

**Band
428**

Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts
Prof. Dr.-Ing. Ansgar Trächtler (Hrsg.)
Regelungstechnik und Mechatronik

Annika Junker

Datengetriebene Modellbildung für nichtlineare mechatronische Systeme in regelungstechnisch verwertbarer Form

Annika Junker

Datengetriebene Modellbildung für nicht-lineare mechatronische Systeme in regelungstechnisch verwertbarer Form

Data-driven modeling of nonlinear mechatronic systems in a form applicable for control engineering

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar

Band 428 der Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts

© Heinz Nixdorf Institut, Universität Paderborn – Paderborn – 2024

ISSN (Online): 2365-4422

ISBN: 978-3-947647-47-7

Das Werk einschließlich seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung der Herausgeber und des Verfassers unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigung, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, sowie die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Als elektronische Version frei verfügbar über die Digitalen Sammlungen der Universitätsbibliothek Paderborn.

Satz und Gestaltung: Annika Junker

Datengetriebene Modellbildung für nichtlineare mechatronische Systeme in regelungstechnisch verwertbarer Form

zur Erlangung des akademischen Grades
DOKTOR DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)
der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Paderborn

genehmigte
DISSERTATION

von
Annika Junker, M. Sc.
aus Hameln

Tag des Kolloquiums: 13. September 2024
Referentin: Dr.-Ing. Julia Timmermann
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Boris Lohmann

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin in der Nachwuchsforschungsgruppe "Datengetriebene Methoden in der Regelungstechnik" am Heinz Nixdorf Institut sowie am Lehrstuhl für Regelungstechnik und Mechatronik der Universität Paderborn.

Mein besonderer Dank gilt meiner Doktormutter, Dr.-Ing. Julia Timmermann, die mich mit herausragendem Engagement und stets offenem Ohr begleitet hat. Deine fachliche Expertise und dein beständiger Glaube an mich haben entscheidend dazu beigetragen, dass ich diesen Weg erfolgreich gehen konnte. Für all die wertvollen Anregungen, konstruktiven Gespräche und die Freiheit, meine eigenen Ideen zu verfolgen, bin ich dir sehr dankbar.

Mein Dank geht an Herrn Prof. Dr.-Ing. Boris Lohmann der Technischen Universität München für die Übernahme des Korreferats. Ebenfalls danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Ansgar Trächtler und Herrn Prof. Dr.-Ing. Walter Sextro für das Mitwirken in der Promotionskommission. Besonders dankbar bin ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Ansgar Trächtler, der mich während meiner Promotion in meiner wissenschaftlichen und persönlichen Entwicklung maßgeblich unterstützt hat. Er hat mir nicht nur fachlich wertvolle Impulse gegeben, sondern mir auch das Vertrauen und die Möglichkeit eingeräumt, an seinem Lehrstuhl zu forschen. Diese prägende Zeit hat mich für meinen weiteren Lebensweg positiv beeinflusst, wofür ich ihm sehr dankbar bin.

Meinen Kolleginnen und Kollegen danke ich für die gute Zusammenarbeit und die vielen schönen gemeinsamen Erinnerungen. Insbesondere Ricarda Götte, Michael Hesse und Christopher Lüke danke ich für ihre Diskussionsbereitschaft und für die konstruktiven fachlichen Ratschläge. Des Weiteren danke ich allen Studierenden, die innerhalb einer studentischen Arbeit oder als Hilfskraft einen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet haben. Besonders hervorheben möchte ich dabei Niklas Fittkau und Keno Pape.

Besonderer Dank gilt meinen großartigen Freundinnen und Freunden, die mir immer wieder unvergessliche Ablenkung und die nötige Balance gegeben haben. Ob bei gemeinsamen sportlichen Aktivitäten oder bei entspannten Momenten, in denen ich einfach ich selbst sein konnte – eure Freundschaft und Unterstützung waren für mich ein wichtiger Ausgleich. Dafür danke ich euch sehr.

Mein größter Dank gilt meiner wundervollen Familie: meinen Eltern, die mir mit ihrer bedingungslosen Liebe und Unterstützung stets den nötigen Rückhalt gegeben haben, und meinem Bruder Jonas, dessen Zuspruch und Verlässlichkeit für mich von unschätzbarem Wert sind. Ihr seid mein sicherer Hafen, und dafür danke ich euch aus tiefstem Herzen.

Zusammenfassung

Der modellbasierte Regelungsentwurf erfordert eine möglichst genaue Kenntnis über das dynamische Verhalten des zugrunde liegenden physikalischen Systems. Durch maschinelle Lernverfahren besteht das Potenzial den Modellierungsaufwand im Vergleich zum klassischen Vorgehen zu reduzieren, indem physikalisches Vorwissen und an Messdaten trainierte Modelle effektiv zusammengeführt werden. Diese Dissertation entwickelt Methoden zur datengetriebenen Bestimmung von Modellen für den Regelungsentwurf nichtlinearer mechatronischer Systeme. Dazu wird die regelungstechnische Anwendbarkeit von Koopman-Operator-basierten Verfahren analysiert, die nichtlineare Dynamiken durch lineare Modelle approximieren. Darüber hinaus wird ein neuartiges Verfahren zur datengetriebenen Bestimmung von Port-Hamilton-Modellen entwickelt, die Energiezusammenhänge plausibel abbilden und sich unmittelbar für einen passivitätsbasierten Regelungsentwurf verwenden lassen. Zudem werden Ansätze zur automatischen Aktualisierung des im Regelkreis verwendeten Streckenmodells bei Modellunsicherheiten oder auftretenden Veränderungen der Systemdynamik vorgestellt. Experimentelle sowie simulative Untersuchungen demonstrieren die herausragende Prädiktionsgenauigkeit der datengetriebenen Modelle und die hohe Regelgüte. Die Ergebnisse dieser Dissertation leisten einen bedeutenden Beitrag, weil die datengetriebenen Modelle eine aus regelungstechnischer Sicht verwertbare Form aufweisen. Sie sind physikalisch interpretierbar und lassen sich nahtlos in bestehende Analyse- und Entwurfsmethoden einbinden. Dies eröffnet neue Perspektiven für zukünftige Anwendungen und Weiterentwicklungen.

Abstract

Model-based control design requires accurate insight into the dynamic behavior of the underlying physical system. Machine learning methods have the potential to reduce modeling efforts compared to the classic approach by effectively combining physical prior knowledge and models trained on measurement data. This dissertation develops methods to determine data-driven models for the control design of nonlinear mechatronic systems. For this purpose, the control applicability of Koopman operator-based methods, which approximate nonlinear dynamics by linear models, is analyzed. In addition, a novel method is developed for the data-driven determination of port-Hamiltonian models, which plausibly represent energy flows and can be directly utilized for passivity-based control design. Moreover, approaches for automatically updating the plant model used in the control loop are presented in case of model uncertainties or occurring changes in system dynamics during operation. Experimental and simulative studies demonstrate the outstanding prediction accuracy of the data-driven models and the high control performance. The findings of this dissertation make a significant contribution because the data-driven models exhibit a form that is highly usable for control engineering. They are physically interpretable and can be seamlessly integrated into existing analysis and design methods. This opens new perspectives for future applications and further developments.

Vorveröffentlichungen

- [Jun22] JUNKER, A.: *Datengetriebene Modellbildung für nichtlineare mechatronische Systeme in regelungstechnisch wertvoller Form*. Vortrag im Rahmen des Karlsruher Regelkreises, München, 4. Juli 2022
- [JTT22a] JUNKER, A.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Learning Data-Driven PCHD Models for Control Engineering Applications. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 55 (2022), Nr. 12, S. 389–394
- [JTT22b] JUNKER, A.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Data-Driven Models for Control Engineering Applications Using the Koopman Operator. *2022 3rd International Conference on Artificial Intelligence, Robotics and Control (AIRC)* (Cairo, Egypt). 2022, S. 1–9
- [JFTT22a] JUNKER, A.; FITTKAU, N.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Autonomes Putten mittels datengetriebener und physikbasierter Methoden. *Proceedings - 32. Workshop Computational Intelligence: Berlin, 1. - 2. Dezember 2022*. Hrsg. von SCHULTE, H.; HOFFMANN, F.; MIKUT, R. Bd. 32. 2022, S. 119–124
- [JFTT22b] JUNKER, A.; FITTKAU, N.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Autonomous Golf Putting with Data-Driven and Physics-Based Methods. *2022 Sixth IEEE International Conference on Robotic Computing (IRC)*. 2022, S. 134–141
- [JPTT23] JUNKER, A.; PAPE, K.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Adaptive Koopman-Based Models for Holistic Controller and Observer Design. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 56 (2023), Nr. 3, S. 625–630
- [JTT25] JUNKER, A.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Adaptive Data-Driven Models in Port-Hamiltonian Form for Control Design. *PAMM* Jg. 25 (2025), Nr. 1

Datengetriebene Modellbildung für nichtlineare mechatronische Systeme in regelungstechnisch verwertbarer Form

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	2
1.2	Zielsetzung	11
1.3	Aufbau der Dissertation	12
2	Grundlagen zur Theorie des Koopman-Operators	15
2.1	Definition	15
2.2	Koopman-invariante Unterräume	18
2.3	Systemtheoretische Eigenschaften	21
2.4	Zusammenhang zur Carleman-Linearisierung	23
3	Systemidentifikation mittels Snapshot-Verfahren	27
3.1	Dynamic Mode Decomposition (DMD)	27
3.2	Extended Dynamic Mode Decomposition (EDMD)	30
3.3	Sparse Identification of Nonlinear Dynamics (SINDY)	36
3.4	Analyse des EDMD-Verfahrens anhand nichtlinearer Beispielsysteme	38
3.4.1	Analyse der Prädiktionsgenauigkeit	40
3.4.2	Analyse der Stabilitätseigenschaft	47
3.4.3	Analyse der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	48
3.4.4	Analyse des Rechenaufwands	51
3.5	Zwischenfazit	53
4	Strategien für regelungstechnisch verwertbare Streckenmodelle	55
4.1	Passivität und PCHD-Modelle	57
4.2	Stabile lineare dynamische Systeme	58
4.3	Stabile Koopman-Operatoren	65
4.4	Datengetriebene PCHD-Modelle	68
4.4.1	Anwendung am Pendel	70
4.4.2	Anwendung am Schlagmechanismus des Golfroboters	71
4.4.3	Anwendung am Doppelpendel	74
4.4.4	Anwendung an einem zweidimensionalen Multicopter	77
4.5	Zwischenfazit	81
5	Modellbasierter Regelungsentwurf anhand der hybriden Modelle	83
5.1	Riccati-Regler mittels des Koopman-Operators	87
5.2	Modellprädiktive Regelung mittels des Koopman-Operators	92

5.3	Passivitätsbasierte Regelung mittels des datengetriebenen PCHD-Modells	98
5.4	Strategien für einen Koopman-Operator-basierten Beobachterentwurf .	101
5.5	Zwischenfazit	105
6	Adaptive Methoden zur datengetriebenen Systemidentifikation	107
6.1	Adaptives EDMD-Modell	107
6.1.1	Stand der Forschung	108
6.1.2	Berechnung des adaptiven EDMD-Modells	110
6.1.3	Analyse der resultierenden Modellgenauigkeit	115
6.1.4	Anwendung im Regelkreis	117
6.2	Adaptives PCHD-Modell	120
6.2.1	Berechnung des adaptiven PCHD-Modells	120
6.2.2	Analyse der resultierenden Modellgenauigkeit	123
6.3	Zwischenfazit	126
7	Zusammenfassung und Ausblick	127
7.1	Zusammenfassung	127
7.2	Ausblick	129
	Literaturverzeichnis	131
	Literaturverzeichnis der studentischen Arbeiten	153
Anhang		
A1	Mathematischer Anhang	157
A1.1	Positive und negative (Semi-)Definitheit	157
A1.2	Kronecker-Produkt	157
A1.3	Singulärwertzerlegung	158
A1.4	Pseudoinverse einer Matrix	158
A1.5	Eigenwerttheorie in der linearen Algebra	159
A1.6	Spektraltheorie in der Funktionalanalysis	160
A2	Zustandsraummodelle in zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Form . .	161
A3	Datengetriebene Modelle des Schlagmechanismus des Golfroboters . .	163
A3.1	Datengetriebene EDMD-Modelle	163
A3.2	Datengetriebene PCHD-Modelle	163
A4	Datengetriebene Modelle des Doppelpendels	165
A4.1	Erstes Szenario, vgl. Bild 4-8(a)	165
A4.2	Zweites Szenario, vgl. Bild 4-8(b)	165
A4.3	Drittes Szenario, vgl. Bild 4-8(c)	166
A4.4	Viertes Szenario, vgl. Bild 4-8(d)	166

Abkürzungsverzeichnis

DMD	Dynamic Mode Decomposition
DMDc	Dynamic Mode Decomposition with Control
EDMD	Extended Dynamic Mode Decomposition
EDMDc	Extended Dynamic Mode Decomposition with Control
EKF	Extended Kalman Filter
IDA	Interconnection and Damping Assignment
KI	Künstliche Intelligenz
LASSO	Least Absolute Shrinkage and Selection Operator
LPV	Lineare parametervariante Systeme
LQ	Linear-Quadratisch
ML	Maschinelles Lernen
MPC	Model-Predictive-Control
PBC	Passive-Based Control
PCH	Port-controlled Hamiltonian system
PCHD	Port-controlled Hamiltonian System with dissipation
POD	Proper Orthogonal Decomposition
rEDMD	rekursives EDMD-Modell
rPCHD	rekursives PCHD-Modell
SINDY	Sparse Identification of Nonlinear Dynamics
SINDYc	Sparse Identification of Nonlinear Dynamics with Control
UKF	Unscented Kalman Filter

Symbolverzeichnis

Vektoren und Matrizen werden fett gedruckt.

Allgemeine Notation

$\dot{\square}$	erste zeitliche Ableitung
$\ddot{\square}$	zweite zeitliche Ableitung
$\nabla_{\square} f$	Gradient der Funktion f nach \square
$\hat{\square}$	geschätzte Größe

Vektoren und Matrizen

\square^{-1}	Inverse der Matrix
\square^{+}	Pseudoinverse der Matrix
\square^T	Transponierte der Matrix
\mathbf{I}_n	Einheitsmatrix mit der Dimension $n \times n$
$\mathbf{0}_{\square}$	Nullmatrix bzw. -vektor mit der Dimension \square
$\text{rang } \square$	Rang einer Matrix
$\text{spur } \square$	Spur einer Matrix
$>, <$	positiv bzw. negativ definite Matrix
\geq, \leq	positiv bzw. negativ semidefinite Matrix
$\langle \cdot, \cdot \rangle_F$	Frobenius-Skalarprodukt für Matrizen
$O(n)$	Gruppe der orthogonalen $n \times n$ -Matrizen

Normen

$ \cdot $	Betrag einer skalaren Größe
$\ \cdot\ $	Euklidische Norm eines Vektors
$\ \cdot\ $	Spektralnorm einer Matrix
$\ \cdot\ _F$	Frobeniusnorm einer Matrix
$\ \cdot\ _{\infty}$	Maximumsnorm einer Matrix
$\rho(\cdot)$	Spektralradius einer Matrix

Dynamische Systeme

t	Zeit
\mathbf{x}	Zustandsvektor
n	Systemordnung bzw. Anzahl der Systemzustände
\mathbf{u}, u	Systemeingang bei Mehrgrößen- bzw. Eingrößensystemen

p	Anzahl der Systemeingänge
y, y	Systemausgang bei Mehrgrößen- bzw. Eingrößensystemen
q	Anzahl der Systemausgänge
\mathbf{f}	Vektorfunktion zur Beschreibung eines dynamischen Systems
\mathbf{F}_t	Fluss eines dynamischen Systems
δ	relativer Grad
\mathbf{A}	Dynamikmatrix
\mathbf{B}	Eingangsmatrix bei linearen Mehrgrößensystemen
\mathbf{b}	Eingangsvektor bei linearen Eingrößensystemen
\mathbf{C}	Ausgangsmatrix bei linearen Mehrgrößensystemen
\mathbf{c}	Ausgangsvektor bei linearen Eingrößensystemen
\mathcal{O}	Beobachtbarkeitsmatrix
\mathcal{C}	Steuerbarkeitsmatrix
\square_t	Index für zeitdiskrete Systembeschreibungen
Δt	Abtastzeit bei zeitdiskreten Systemen
$\mathcal{L}_{\mathbf{f}}g$	Lie-Ableitung von g bezüglich \mathbf{f}

Koopman-Operator

\mathcal{K}_t	allgemeiner Koopman-Operator
\mathcal{K}	allgemeiner Koopman-Generator
g	Koopman-Observable

Carleman-Linearisierung

$\tilde{\mathbf{F}}$	Matrix der Polynome bei der Carleman-Transformation
$\tilde{\Psi}$	Carleman-Lifting-Operator
\tilde{N}	Dimension des Carleman-Lifting-Operators
\otimes	Kronecker-Produkt

Numerische Approximationsverfahren

\mathbf{K}_t	approximierter Koopman-Operator
\mathbf{K}	approximierter Koopman-Generator
Ψ	EDMD-Funktionsbibliothek
N	Anzahl der Koopman-Observablen
\mathbf{X}	Snapshotmatrix des Zustandsvektors
\mathbf{X}'	Snapshotmatrix des Zustandsvektors, um einen Zeitschritt verschoben

$\dot{\mathbf{X}}$	Snapshotmatrix der zeitlichen Ableitung des Zustandsvektors
\mathbf{U}	Snapshotmatrix des Eingangsvektors
M	Anzahl der Snapshots
\mathbf{P}	Projektionsmatrix für EDMD-Verfahren
Θ	SINDY-Funktionsbibliothek
Ξ	SINDY-Koeffizientenmatrix
\mathcal{A}, \mathcal{G}	Matrizen für die Berechnung beim EDMD-Verfahren
e	Fehler

Physikalische Größen

F	Kraft
a, h, l, r	Abstände bzw. Längen
T	Dauer
c	Federkonstante
v	(translatorische) Geschwindigkeit
g	Gravitationsbeschleunigung
m	Masse
d	(dynamische) Reibungs- bzw. Dämpfungskonstante
μ	(statische) Reibungskonstante
J	Rotationsträgheit

Stabile und passive Systembeschreibungen

$\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}_t$	stabile Matrix
$\mathbf{S}, \mathbf{O}, \mathbf{T}$	SOT-Zerlegung stabiler Matrizen
\mathcal{P}	Funktion, die eine Matrix auf den erlaubten Suchraum projiziert
γ	Schrittweite beim projizierten Gradientenabstieg
L	Kostenfunktion
$\tilde{\mathbf{K}}_t$	stabiler Koopman-Operator
$V(\mathbf{x})$	gespeicherte Energie im System
\mathbf{J}	Matrix, die die Energieflüsse im PCHD-System modelliert
\mathbf{D}	Matrix, die die dissipativen Energieflüsse im PCHD-System modelliert

Regelungsentwurf

\mathbf{w}	Führungsgröße
$\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*$	Sollverläufe

J	Kostenfunktion
\mathbf{Q}, \mathbf{R}	Gewichtungsmatrizen der Kostenfunktion
\mathbf{k}	Reglermatrix
\mathbf{L}	Beobachtermatrix
$\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_u$	Vorsteuermatrizen
i	Gain-Scheduling-Variable
\mathbf{v}_s	Schlaggeschwindigkeitsvektor des Golfroboters
$\dot{\varphi}_s$	rotatorische Schlaggeschwindigkeit des Schlägers Golfroboters
φ_a, φ_r	Aushol- und Rückholwinkel des Schlägers
T_a, T_r	Aushol- und Rückholdauer des Schlägers
n_p	Prädiktionshorizont
n_c	Stellhorizont
$\bar{\mathbf{w}}_{k+1}, \bar{\mathbf{y}}_{k+1}$	Führungs- und Ausgangsgrößen bei MPC
$\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}$	erweiterte Gewichtungsmatrizen für MPC
\mathbf{H}, \mathbf{F}	Matrizen für Berechnung der linearen MPC
$\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{F}}$	Matrizen für Berechnung der EDMD-basierten MPC

Adaptive Streckenmodelle

$\mathbf{\Gamma}_k$	Kovarianzmatrix
$\boldsymbol{\gamma}_k$	Korrekturvektor
λ, λ_k	Vergessensfaktor
M_{op}	Anzahl der gespeicherten Messpunkte
$\varepsilon_{\text{low}}, \varepsilon_{\text{high}}$	Fehlerschranken
τ_{max}	maximale Spur der Kovarianzmatrix
N_0	Sensitivitätsfaktor
$\Sigma_{0,k}$	angenommenes Messrauschen
μ_{Γ}	Reduktionsfaktor
$e_{\text{post},k}$	A-posteriori-Fehler

1 Einleitung

Der Einsatz künstlicher Intelligenz (KI) dominiert im Zuge der Digitalisierung fortschreitend nahezu alle Lebensbereiche des Menschen, z. B. intelligente Sprachassistenten, automatische Übersetzungssysteme oder maschinelle Lernalgorithmen für die medizinische Diagnostik. Je nach Sichtweise existieren zahlreiche Definitionen für den Begriff der KI, wobei sich die grundlegende Idee folgendermaßen charakterisieren lässt:

„Künstliche Intelligenz ist die Eigenschaft eines IT-Systems, menschenähnliche, intelligente Verhaltensweisen zu zeigen.“ [Bun17]

Die Intelligenz einer KI lässt sich durch die Fähigkeit des Lernens charakterisieren. Lernen meint hier, dass die KI *künstliches* Wissen aus Erfahrung generieren kann, d. h. anhand von Beispielen (Lerndaten) werden Muster erkannt und verallgemeinert mit dem Ziel nach der Lernphase auch bisher unbekannte Daten verarbeiten zu können. Im ingenieurwissenschaftlichen Bereich können KI-Ansätze die Automatisierung komplexer Aufgaben erleichtern, indem gewisse menschliche Wahrnehmungs- und Verstandsleistungen durch maschinelles Lernen (ML) realisiert werden. Der Begriff des maschinellen Lernens lässt sich folgendermaßen definieren:

„ML bezeichnet Verfahren, bei denen Computer-Algorithmen aus Daten lernen, beispielsweise Muster zu erkennen oder gewünschte Verhaltensweisen zu zeigen, ohne dass jeder Einzelfall explizit programmiert wurde. [...] Oft wird Maschinelles Lernen mit KI gleichgesetzt. Während in der KI häufig ML eingesetzt wird, ist ML eine Methode, ein Werkzeug unter vielen der KI.“ [Bun17]

Die Regelungstechnik beschäftigt sich damit, wie (technische) Systeme gezielt so beeinflusst werden können, dass sie ein bestimmtes Verhalten aufweisen. Abhängig von der spezifizierten Regelungsaufgabe wird das physikalische System durch die Aktorik gezielt beeinflusst, während der aktuelle Systemzustand laufend durch die Sensorik erfasst wird, siehe Bild 1-1. In der Informationsverarbeitung erfolgt ein stetiger Vergleich zwischen dem gewünschten und gemessenen Verhalten des physikalischen Systems, sodass äußere Einflüsse erkannt und ausgeregelt werden. Damit die Regelungsaufgabe für alle möglichen auftretenden Betriebsszenarien zuverlässig und präzise erfüllt werden kann, erfordert die Auslegung der Informationsverarbeitung eine möglichst genaue Kenntnis über das dynamische Verhalten des zugrunde liegenden physikalischen Systems in Form eines mathematischen Modells. Je nach Komplexität kann es unter Umständen sehr aufwändig sein, ein solches Modell herzuleiten, z. B. weil manche Wirkprinzipien nicht exakt bekannt oder mathematisch nur schwer beschreibbar sind. Daher erscheint es reizvoll, Verfahren des maschinellen Lernens auszunutzen, bei denen das mathematische Modell direkt aus vorhandenen Messdaten des physikalischen Systems extrahiert wird. Solch ein rein datengetriebenes Modell bildet in der Regel jedoch nur das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems in numerischer Form ab und behindert somit die physikalische Interpretierbarkeit der Vorgänge im Inneren des Systems. Dadurch wird die Auslegung der Informationsverarbeitung eventuell erschwert.

Diese Dissertation leistet einen Beitrag zur zielgerichteten Integration maschineller Lernverfahren in der Regelungstechnik. Es werden Strategien entwickelt, mit denen sich datengetriebene Modelle für nichtlineare mechatronische Systeme bestimmen lassen, die

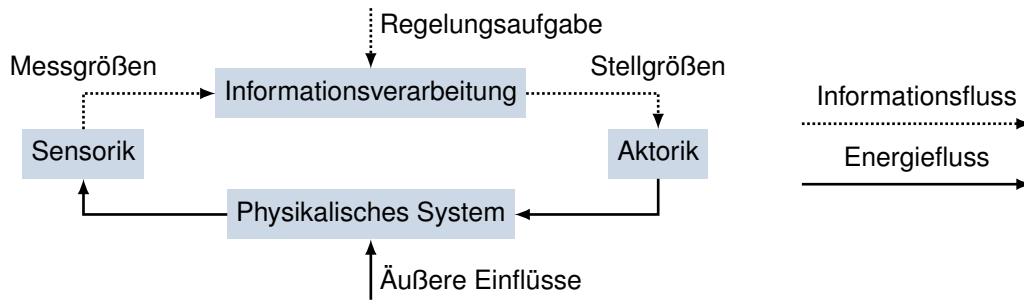


Bild 1-1: Die grundlegende Struktur eines regelungstechnischen Systems lässt sich als Kreislauf charakterisieren. Auf der physikalischen Ebene werden Energieflüsse und auf der logischen Ebene Informationsflüsse übertragen.

eine aus regelungstechnischer Sicht verwertbare Form aufweisen. Hiermit ist gemeint, dass die resultierenden Modelle physikalisch interpretierbar sind und sich die bestehenden leistungsstarken Analyse- und Entwurfsverfahren aus der klassischen Regelungstechnik geradlinig auf die entwickelten Modelle anwenden lassen. Dadurch wird das enorme Potenzial datengetriebener Ansätze ausgeschöpft und gleichzeitig gelingt eine systematische Integration in die bewährten Strategien für den modellbasierten Regelungsentwurf. Im Folgenden werden die Motivation, die Zielsetzung und der Aufbau dieser Dissertation beschrieben.

1.1 Motivation

Die Entwicklung komplexer technischer Systeme erfolgt üblicherweise mittels eines modellbasierten Entwurfs, vgl. Bild 1-2. Die Steuerungs- und Regelungsverfahren werden hierbei anhand eines mathematischen Modells ausgelegt, das das reale Verhalten der Strecke¹ möglichst realitätsnah nachbildet. Die Herleitung dieses Modells kann dabei auf unterschiedliche Arten erfolgen², siehe Bild 1-3.

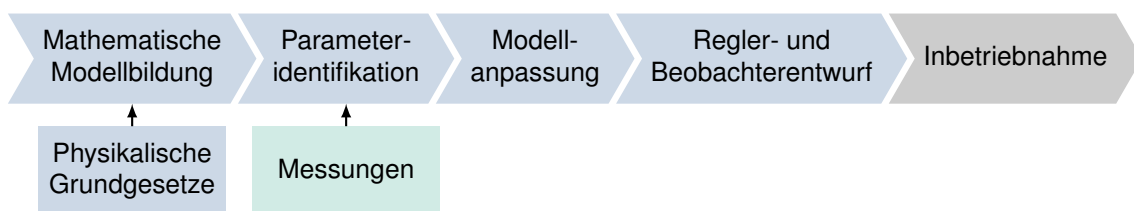


Bild 1-2: Das Vorgehen beim modellbasierten Entwurf.

Bei der *theoretischen Modellbildung* werden physikalische Gesetze in Form von gewöhnlichen oder partiellen nichtlinearen Differentialgleichungen als parametrisches Modell formuliert. Weil das resultierende Modell somit tiefe Systemeinsichten und eine hohe Interpretierbarkeit ermöglicht, wird es auch als *White-Box-Modell* bezeichnet. Die theoretische Modellbildung gelingt nur unter der Voraussetzung, dass hinreichendes Vorwissen

¹Der Begriff (*Regel-*)*Strecke* bezeichnet das zu beeinflussende technische System, vgl. [FKL⁺16].

²Neben der theoretischen und experimentellen Modellbildung führt [Kro13] zusätzlich die *wissensbasierte Modellbildung* an und fasst darunter z. B. Fuzzy-Systeme. Diese Art der Modellbildung hat im Rahmen dieser Arbeit aufgrund des linguistischen Ansatzes jedoch keine Relevanz.

über das betrachtete System verfügbar ist, z. B. Kenntnis über auftretende physikalische Effekte und messbare Materialparameter. In vielen Fällen ist das resultierende Modell zunächst zu komplex für die weitere Verwendung, sodass es nachträglich vereinfacht wird, z. B. durch Linearisierung der Systemdynamik um einen oder mehrere Arbeitspunkte oder Verfahren zur Modellordnungsreduktion. Darüber hinaus führen der fortschreitende Komplexitätsanstieg [Bre21] durch vernetzte [WVK⁺15] und hochdimensionale nichtlineare Systeme [BK19] und verkürzte Entwicklungszyklen [Bun20] dazu, dass die theoretische Modellbildung zunehmend schwieriger oder sogar unmöglich wird.

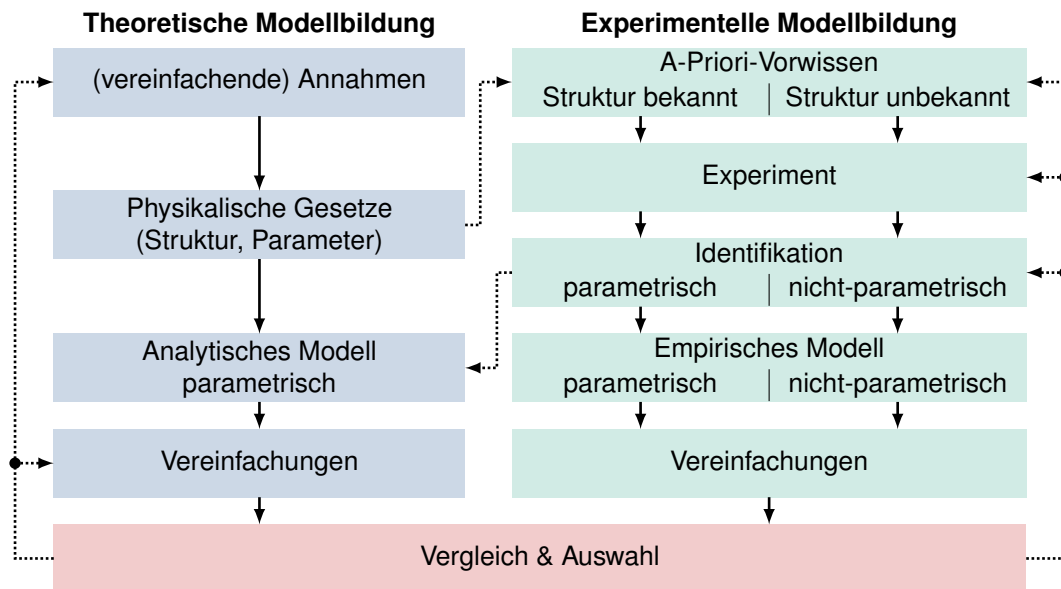


Bild 1-3: Gegenüberstellung der unterschiedlichen Vorgehensweisen bei der theoretischen und experimentellen Modellbildung. Beide Strategien folgen in der Praxis einem iterativen Vorgehen und werden zum Teil miteinander kombiniert, um die jeweiligen Vorteile bestmöglich auszunutzen. In Anlehnung an [IM11].

Im Gegensatz dazu steht die *experimentelle Modellbildung*, bei der das mathematische Modell anhand von Messungen aus einem Experiment so bestimmt wird, dass es den Zusammenhang zwischen Systemeingang und Systemausgang möglichst genau abbildet. Deshalb wird das resultierende Modell auch als *Black-Box-Modell* bezeichnet. Vorhandenes A-Priori-Vorwissen über die Struktur des Systems kann dabei aus dem physikalischen Ansatz oder vorhergehenden Experimenten abgeleitet werden. Unter dem Begriff *Systemidentifikation* wurden in den letzten Jahrzehnten umfangreiche Forschungsarbeiten geleistet, vgl. [ÅE71; Lju99; IM11; GSMJ21]. Das Vorgehen folgt einem iterativen Prozess, bei dem das Modell mit jedem durchgeführten Experiment validiert und angepasst wird, vgl. Bild 1-4. Gleichzeitig hat sich im Bereich der künstlichen Intelligenz der Begriff des maschinellen Lernens etabliert, das ebenfalls das Ziel verfolgt, Modelle anhand von Messdaten (*Trainingsdaten*) zu schätzen und zu validieren. Im Rahmen dieser Dissertation wurde hinsichtlich des Vorgehens eine Analogie zwischen den Bereichen

Systemidentifikation und maschinellem Lernen festgestellt. Der Beitrag [LATS20] hebt ebendiese Analogie zwischen Systemidentifikation und Deep Learning³ hervor.

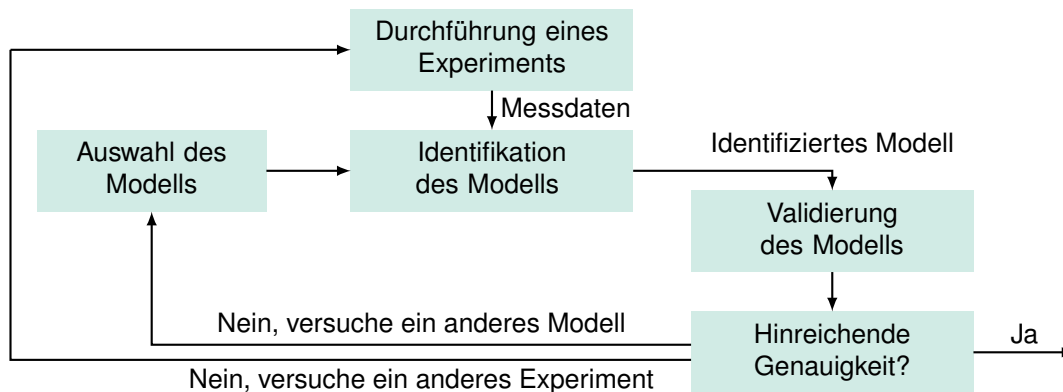


Bild 1-4: Das Vorgehen bei der Systemidentifikation lässt sich als iterativer Prozess betrachten. In Anlehnung an [Lju99; LATS20].

Weil der Einsatz komplexer technischer Systeme hohe Anforderungen an Stabilität und Zuverlässigkeit stellt, wird für den modellbasierten Regelungsentwurf klassischerweise eine Kombination aus theoretischer und experimenteller Modellbildung (*Gray-Box-Modell*) verfolgt. Zunächst wird ein physikalisch motiviertes Modell formuliert und anschließend werden die physikalischen Parameter anhand von Experimenten am realen System identifiziert, vgl. Bild 1-3. Dieses kombinierte Vorgehen wird im Folgenden als physikalische Modellbildung bezeichnet.

Es lassen sich zwei primäre Anforderungen identifizieren, die an ein Streckenmodell für den modellbasierten Regelungsentwurf gestellt werden. Zum einen sollte das Modell eine möglichst hohe Genauigkeit aufweisen, d. h. die Dynamik des realen Systems für möglichst alle Betriebszustände präzise abbilden. Zum anderen ist es für einen erfolgreichen Regler- und Beobachterentwurf vorteilhaft, wenn das Modell der Strecke eine spezielle Struktur aufweist. Für lineare zeitinvariante Systembeschreibungen existiert beispielsweise eine bemerkenswerte Auswahl an bewährten leistungsstarken Systemanalyse- und Entwurfsmethoden, die sich aufgrund der Modellstruktur direkt anwenden lassen. Physikalisch motivierte Systembeschreibungen sind interpretierbar und ermöglichen tiefe Einsichten in das Systemverhalten. Im Gegensatz dazu können datengetriebene Ansätze nahezu beliebig komplexe Dynamiken präzise darstellen, bilden jedoch lediglich den Zusammenhang zwischen Systemeingang und Systemausgang ab. Außerdem bergen datengetriebene Modelle aufgrund der beliebig erweiterbaren Modellkomplexität⁴ (z. B. bei tiefen neuronalen Netzen) das Risiko der Überanpassung⁵. Diese Problematik erschwert den nachfolgenden Regler- und Beobachterentwurf und muss daher unbedingt während

³Deep Learning bezeichnet ein Teilgebiet des maschinellen Lernens, bei dem künstliche neuronale Netze mit zahlreichen versteckten Schichten und Neuronen für die Verarbeitung großer Datenmengen entwickelt werden, z. B. zur Sprach- und Bilderkennung [IYA16].

⁴Die Modellkomplexität ist eine strukturelle Eigenschaft, die Auskunft über die Anzahl an Systemelementen, Wechselwirkungen und Zuständen gibt, vgl. [Loc20]. Dabei gilt der Grundsatz: Das Modell sollte so genau wie nötig und so einfach wie möglich sein, vgl. [Neu90].

⁵Überanpassung tritt beim maschinellen Lernen auf, falls das Modell genaue Vorhersagen für die Trainingsdaten liefert, jedoch nicht für neue Daten.

des Modellbildungsprozesses berücksichtigt werden. Damit das resultierende datengetriebene Modell in der Lage ist zu generalisieren, ist es auf der einen Seite wichtig, die Modellkomplexität anhand von Validierungsdaten sorgfältig anzupassen. Auf der anderen Seite muss sichergestellt werden, dass die Trainingsdaten ein möglichst breites Spektrum von Betriebssituationen des betrachteten technischen Systems abdecken. Hybride Verfahren verfolgen ein kombiniertes Vorgehen aus physikalischen und datengetriebenen Ansätzen und zielen darauf ab, die Vorteile aus beiden Domänen optimal auszunutzen.

Im Folgenden werden unterschiedliche physikalische, datengetriebene und hybride⁶ Modellierungsansätze anhand der zuvor identifizierten Anforderungen für den modellbasierten Regelungsentwurf beurteilt, siehe Bild 1-5. Als illustrierendes Einführungsbeispiel wird ein im Gelenk aktuiertes nichtlineares Pendel (vgl. Bild 1-6(a)) mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T = [\varphi, \dot{\varphi}]^T$ und den entsprechenden Differentialgleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{d}{m l^2} x_2 + \frac{1}{m l^2} u \end{bmatrix}, m = 1 \text{ kg}, g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, l = 0,5 \text{ m}, d = 0,1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \quad (1-1)$$

betrachtet. Es wird angenommen, dass der Zustandsvektor \mathbf{x} vollständig messbar ist. Das System weist eine nichtlineare Dynamik auf und besitzt für $u = 0$ eine stabile untere Ruhelage $\mathbf{x}_1^* = [2k\pi, 0]^T$ und eine instabile obere Ruhelage $\mathbf{x}_2^* = [(2k+1)\pi, 0]^T$, jeweils für $k \in \mathbb{Z}$.

Zur Erzeugung der Messdaten (=Trainingsdaten) wurden 100 Simulationen (jeweils mit einer Dauer von 3 s und einer Schrittweite von $\Delta t = 0,01$ s) mit zufälligen Anfangsauslenkungen \mathbf{x}_0 und zufälligen Systemeingängen u durchgeführt, vgl. Bild 1-6(b). Die Messeinrichtung wurde durch ein additives weißes gaußsches Rauschen mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0,02$ modelliert. Die Testtrajektorie ist so gewählt, dass das Pendel zunächst autonom aus der Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_0 = [\frac{7\pi}{8}, 0]^T$ schwingt und nach 2 s sinusförmig mit ansteigender Schwingungsfrequenz angeregt wird. Dadurch erfährt das Pendel einerseits den Einfluss der Stellgröße und andererseits, aufgrund der hohen Auslenkung, die nichtlinearen Anteile der Dynamik. Das Bild 1-7 zeigt die Prädiktionsgenauigkeiten der im Folgenden beschriebenen unterschiedlichen Modellierungsansätze für die Testtrajektorie im Vergleich zur Antwort des Originalsystems (1-1) mit dem kumulierten mittleren quadratischen Fehler

$$e(t_k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{k} \|\mathbf{x}_{\text{Originalsystem}}(t_m) - \mathbf{x}_{\text{Prädiktion}}(t_m)\|^2. \quad (1-2)$$

Nichtlineares physikalisches Modell

Bei der klassischen Modellbildung werden Differentialgleichungen basierend auf physikalischen Grundgesetzen aufgestellt. Bei diesem einfachen Beispiel wird angenommen,

⁶In dieser Dissertation wird der Begriff *hybrid* nicht für Systeme verwendet, die sowohl kontinuierliches als auch diskretes dynamisches Verhalten zeigen, sondern für ein Modell, das sowohl physikalische als auch datengetriebene Ansätze miteinander vereint.

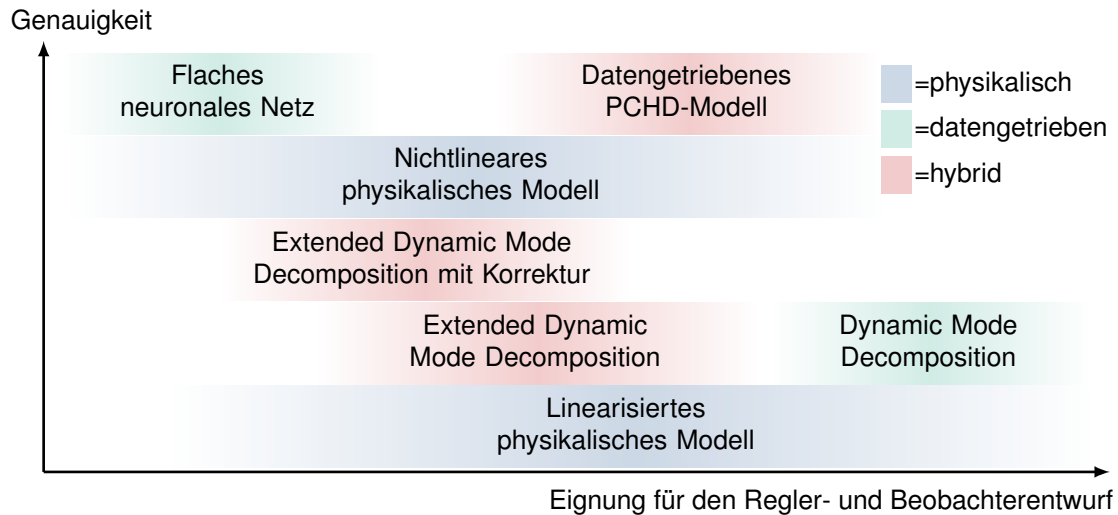
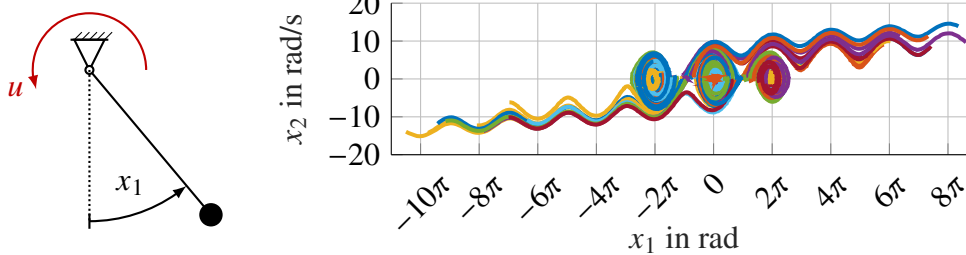


Bild 1-5: Exemplarische Beurteilung möglicher Modellierungsansätze für nichtlineare mechatronische Systeme gemäß der Anforderungen, die an ein Streckenmodell für die Regelungstechnik gestellt werden. Diese Beurteilung erhebt keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit, vielmehr dient sie schematisch dazu, die Forschungslücke qualitativ zu skizzieren. In Anlehnung an den eigenen Beitrag [Jun22].



(a) Skizze des Pendels (b) Trainingsdaten für die datengetriebene und hybride Modellbildung

Bild 1-6: Das nichtlineare aktuierte Pendel illustriert als einfaches Beispiel die unterschiedlichen Strategien zur Modellbildung in der Regelungstechnik.

dass die Differentialgleichungen korrekt aufgestellt wurden und die Parameter \hat{m} , \hat{l} , \hat{d} anhand der künstlich erzeugten Messdaten identifiziert wurden:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{\hat{d}}{\hat{m}l^2} x_2 + \frac{1}{\hat{m}l^2} u \end{bmatrix}, \hat{m} = 0,998 \text{ kg}, \hat{l} = 0,499 \text{ m}, \text{ und } \hat{d} = 0,101 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}. \quad (1-3)$$

Die Prädiktionsgenauigkeit des parametrisierten physikalischen nichtlinearen Modells ist erwartungsgemäß hoch, vgl. Bild 1-7. Jedoch lassen sich allgemeine nichtlineare Modelle nicht unmittelbar für den Regler- und Beobachterentwurf verwenden, sofern sie nicht in einer bestimmten Struktur vorliegen⁷. Daher ist es häufig erforderlich, das Modell nachträglich zu vereinfachen.

⁷Ein Beispiel dafür sind eingangsaffine Systeme, deren Theorie nahezu vollständig ausgearbeitet ist und die auch für die Praxis eine große Bedeutung haben, vgl. [Ada18].

Linearisiertes physikalisches Modell

Eine Möglichkeit zur Vereinfachung des Modells ist es, die Dynamik um einen oder mehrere Arbeitspunkte zu linearisieren, hier beispielsweise um die untere Ruhelage:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}x_1 - \frac{\hat{d}}{\hat{m}l^2}x_2 + \frac{1}{\hat{m}l^2}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\hat{d}}{\hat{m}l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\hat{m}l^2} \end{bmatrix} u. \quad (1-4)$$

Die gewählte Testtrajektorie verläuft durch die große Anfangsauslenkung weit entfernt vom Arbeitspunkt, daher ist die Prädiktionsgenauigkeit des linearisierten Modells stark verringert, vgl. Bild 1-7. Für Systeme, deren Betriebsbereich zu keinem Zeitpunkt verlassen wird, erweist sich die Linearisierung jedoch als Vorteil, weil der Regler- und Beobachterentwurf sich geradlinig mittels bewährter Methoden durchführen lassen.

Flaches neuronales Netz

Im Bereich der datengetriebenen Ansätze gibt es eine Vielzahl verschiedener Modellarten für unterschiedlich komplexe Aufgaben. In der Neuroinformatik legte die Erfindung des McCulloch-Pitts-Neuron 1943 einen Grundstein für neuronale Netze [MP43] und die erfolgreiche Verwendung des Backpropagation-Verfahrens 1986 [RHW86] führte zu einer sprunghaften Zunahme der Forschung im Bereich des Deep Learning. Die Dynamik des betrachteten Pendels lässt sich durch ein flaches neuronales Netz⁸ approximieren. Das Netz, das die zeitdiskrete Dynamik abbildet, besitzt 3 Eingänge $in = [x_{1,k}, x_{2,k}, u_k]^T$ und 2 Ausgänge $out = [x_{1,k+1}, x_{2,k+1}]^T$. Durch die Verwendung von 30 Neuronen in der versteckten Schicht beträgt die Anzahl an Gewichten somit $3 \cdot 30 + 30$ zwischen der Eingangsschicht und der versteckten Schicht und $30 \cdot 2 + 2$ zwischen der versteckten Schicht und der Ausgangsschicht und somit in Summe 182. Das durch die Trainingsdaten angepasste neuronale Netz weist eine sehr hohe Genauigkeit bei der betrachteten Testtrajektorie auf und ist daher in der Lage, die vorliegende Systemdynamik vollständig abzubilden, vgl. Bild 1-7. Die Modellstruktur eignet sich jedoch nicht unmittelbar für den Regler- und Beobachterentwurf, weil aufgrund der Blackbox-Struktur keine tiefen Einsichten in das Systemverhalten möglich sind.

Dynamic Mode Decomposition

Das Verfahren *DMD* (*Dynamic Mode Decomposition*) [SMP09] ist ebenfalls ein datengetriebenes Verfahren zur Modellbildung. Im Gegensatz zu anderen Ansätzen, wie dem neuronalen Netz, wird das abzubildende Systemverhalten jedoch als *lineare Dynamik*

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{A}_t \mathbf{x}_k + \mathbf{B} u_k \quad (1-5)$$

⁸Flache neuronale Netze sind hier mehrschichtige Perzeptronen mit nur einer Schicht an versteckten Neuronen, im Gegensatz zu tiefen neuronalen Netzen, die eine Vielzahl an Schichten besitzen.

Für eine methodische Einführung in das Thema der neuronalen Netze sei auf [KBK⁺13] verwiesen.

aus den Messdaten approximiert. Bei Verwendung der obig beschriebenen Trainingsdaten ergibt sich als resultierendes Modell

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1,k+1} \\ \hat{x}_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0100 \\ -0,0025 & 1,0038 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0057 \end{bmatrix} u_k. \quad (1-6)$$

Das resultierende DMD-Modell weist dieselbe lineare Struktur wie das physikalische um den Arbeitspunkt linearisierte Modell auf und bietet daher eine hohe Eignung für den Regler- und Beobachterentwurf. Aufgrund der beschränkten Modellkomplexität kann jedoch für nichtlineare Systeme im Allgemeinen keine hohe Genauigkeit erreicht werden, vgl. Bild 1-7.

Extended Dynamic Mode Decomposition

Die Forschung im Feld des Koopman-Operators ermöglicht vielversprechende Ansätze, die eine Brücke zwischen datengetriebenen Algorithmen und der Nutzung von bereits vorhandenem physikalischen Vorwissen schlagen, vgl. [BBC⁺20]. Neben einer Vielzahl anderer Publikationen sei hier auf [MCTM19; KKB21] verwiesen. Die zugrunde liegende Idee ist, dass eine nichtlineare Dynamik sich durch einen linearen Operator in einem höherdimensionalen Raum beschreiben lässt. Die numerische Approximation des Koopman-Operators führt zum Verfahren EDMD (Extended Dynamic Mode Decomposition), das als Erweiterung des DMD-Verfahren aufgefasst werden kann. Für das Beispiel des nichtlinearen aktuierten Pendels lässt sich der beobachtete höherdimensionale Zustandsvektor $\Psi(\mathbf{x})$ als Erweiterung des Originalzustandes um die auftretenden nichtlinearen Terme sowie dessen zeitliche Ableitungen formulieren, beispielsweise

$$\Psi(\mathbf{x}) = [\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \psi_4(\mathbf{x})]^\top = [\mathbf{x}^\top, \sin x_1, x_2 \cos x_1]^\top. \quad (1-7)$$

Die Approximation der linearen Systemdynamik anhand der Trainingsdaten ergibt das folgende lineare zeitdiskrete System

$$\begin{bmatrix} \hat{\psi}_1(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \hat{\psi}_2(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \hat{\psi}_3(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \hat{\psi}_4(\mathbf{x}_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0100 & -0,0016 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,9960 & -0,1960 & -0,0010 \\ 0,0000 & -0,0001 & 0,9977 & 0,0100 \\ 0,0019 & -0,0107 & -0,3110 & 1,0033 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}_k) \\ \psi_2(\mathbf{x}_k) \\ \psi_3(\mathbf{x}_k) \\ \psi_4(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0003 \\ 0,0400 \\ 0,0004 \\ 0,0558 \end{bmatrix} u_k. \quad (1-8)$$

Für die Beschreibung der Zustände im höherdimensionalen Raum lässt sich vorhandenes physikalisches Vorwissen gezielt einbringen, daher handelt es sich hierbei um ein hybrides Modell. Aufgrund der speziellen Art der Systembeschreibung in einem höherdimensionalen Raum bietet das EDMD-Modell eine höhere Approximationsgenauigkeit für nichtlineare Dynamiken. Für die Berechnung des EDMD-Modells (1-8) werden immer zwei aufeinander folgende Zeitschritte betrachtet, daher wird die Systemdynamik für einen Prädiktionsschritt relativ präzise abgebildet, jedoch nicht für einen beliebig langen Zeithorizont⁹, vgl. Bild 1-7. Für den Regler- und Beobachterentwurf gibt es bereits vielversprechende Ansätze basierend auf einem EDMD-Modell.

⁹Diese Problematik hängt mit *Koopman-invarianten Unterräumen* zusammen, vgl. Abschnitt 2.2.

EDMD-Prädiktion mit Korrektur

Um die Systemdynamik mit dem EDMD-Modell auch für einen längeren Zeitraum präzise beschreiben zu können, wurde im Rahmen dieser Dissertation eine alternative Prädiktionsvorschrift entwickelt, bei der die erweiterten Zustände, die sich nicht langfristig präzise präzidieren lassen, in jedem Zeitschritt neu ausgewertet werden. Die Berechnung ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1,k+1} \\ \hat{x}_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \hat{\psi}_2(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \hat{\psi}_3(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \hat{\psi}_4(\mathbf{x}_{k+1}) \end{bmatrix}. \quad (1-9)$$

Dieses Verfahren wird als *EDMD-Prädiktion mit Korrektur* bezeichnet und führt zu einer hohen Genauigkeit auch für einen längeren Prädiktionshorizont, vgl. Bild 1-7. Aufgrund der speziellen Prädiktionsvorschrift (1-9) verfügt die EDMD-Prädiktion mit Korrektur jedoch nicht mehr über die Eigenschaft von linearen Systemen und eignet sich daher weniger geradlinig für den Regler- und Beobachterentwurf wie das reine EDMD- oder das DMD-Verfahren. Gleichwohl bietet es die Möglichkeit, mit wenig Aufwand ein hybrides Modell herzuleiten, das in der Lage ist, eine nichtlineare Systemdynamik rechengünstig zu präzidieren.

Datengetriebenes PCHD-Modell

Inspiziert durch den Wunsch, physikalisch interpretierbare hybride Modelle zu erhalten, wurde im Rahmen dieser Dissertation eine Methode entwickelt, mit der sich sogenannte *PCHD-Modelle* (*Port-controlled Hamiltonian System with dissipation*) [Ada18] aus Messdaten approximieren lassen, vgl. eigener Beitrag [JTT22b]. PCHD-Modelle sind passiv und dadurch für die Regelungstechnik sehr vorteilhaft, weil sie physikalisch plausibel sind¹⁰ und sich damit einfach global stabile Regelungen entwerfen lassen¹¹. Für die erfolgreiche Anwendung ist ein grundlegendes Vorwissen über die im System gespeicherte Energie erforderlich. Für das nichtlineare aktuierte Pendel ergibt sich die folgende Systembeschreibung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \mathbf{b}u = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1,6 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} mgl \sin x_1 \\ ml^2 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u, \quad (1-10)$$

mit der Energiefunktion V und den charakteristischen Matrizen \mathbf{J} , \mathbf{D} und \mathbf{b} , die der analytisch hergeleiteten PCHD-Form des Originalsystems, vgl. Gleichung (1-1),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{d}{ml^2} x_2 + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -\frac{1}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{m^2 l^4} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} mgl \sin x_1 \\ ml^2 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \quad (1-11)$$

¹⁰Passive Systeme besitzen keine inneren Energiequellen, sodass immer gilt: gespeicherte Energie \leq zugeführte Energie [Ada18].

¹¹Eine extrem nützliche Eigenschaft von passiven Systemen ist, dass eine Rückkopplungsschleife, die aus zwei passiven Systemen besteht, ebenfalls passiv ist [SJK97].

entspricht. Das datengetriebene PCHD-Modell weist für dieses Beispiel eine sehr hohe Prädiktionsgenauigkeit auf, vgl. Bild 1-7. Damit gelingt es, im Bild 1-5 beide Anforderungen gleichermaßen zu erfüllen.

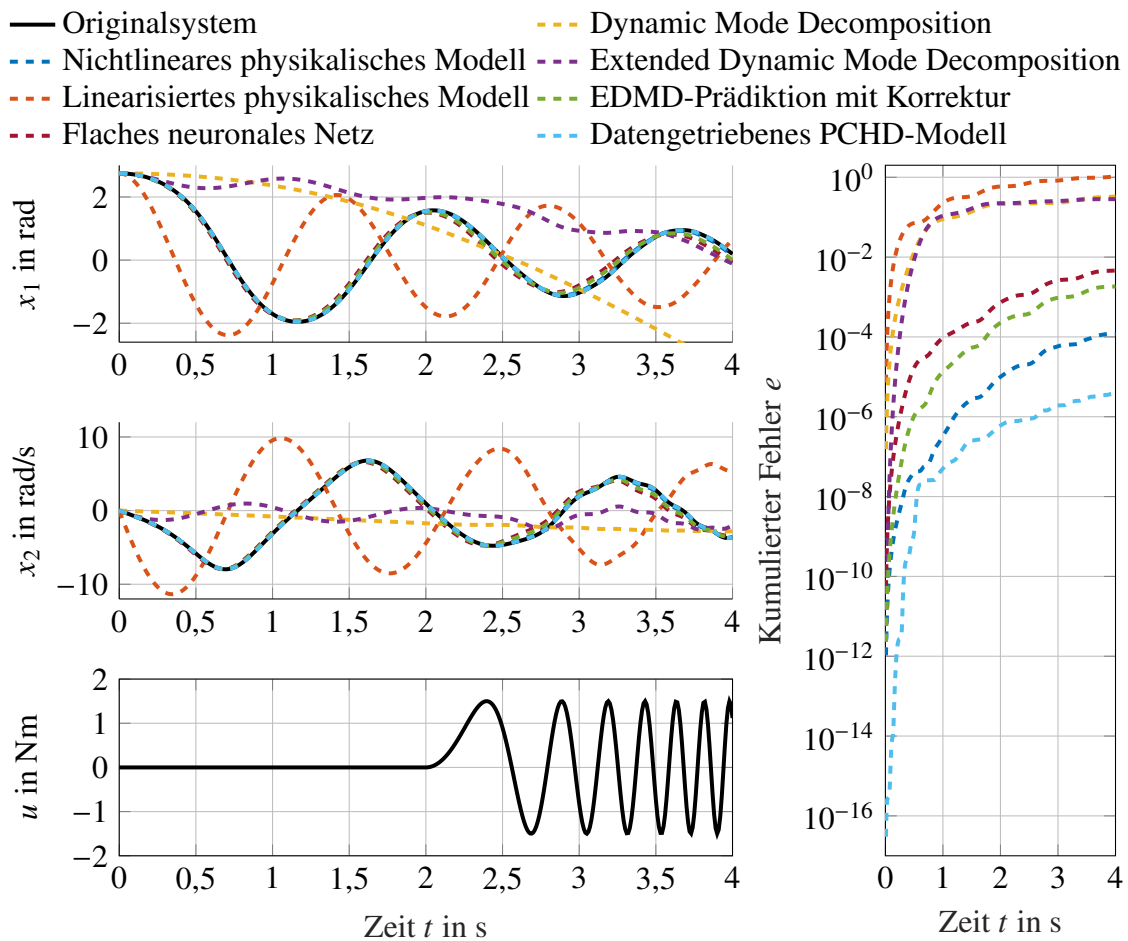


Bild 1-7: Anhand des nichtlinearen aktuierten Pendels werden die simulativ erzielten Prädiktionsgenauigkeiten der unterschiedlichen Modellierungsarten beispielhaft für eine Testtrajektorie miteinander verglichen.

Analyse der Modellkomplexität

Damit ein regelungstechnisches System zuverlässig betrieben werden kann, muss die Informationsverarbeitung (vgl. Bild 1-1) echtzeitfähig¹² sein. Modellprädiktive Regelungsansätze optimieren online anhand eines internen Streckenmodells den Ausgangsgrößenverlauf mittels des Stellgrößenverlaufs [Ada18]. Daher sollte das interne Streckenmodell möglichst recheneffizient präzisiert werden können. Die Tabelle 1-1 vergleicht die unterschiedlichen Modellierungsarten hinsichtlich der Modellkomplexität und der Trainings- und Prädiktionsdauer. Das flache neuronale Netz weist eine deutlich höhere Anzahl an zu bestimmenden Parametern als die anderen Modelle auf, wodurch das Training und die Prädiktion des Modells einen stark erhöhten Rechenaufwand fordern. Darüber hinaus

¹²Echtzeitfähige Systeme sind in der Lage, das Ergebnis einer Berechnung innerhalb eines vorher fest definierten Zeitintervalls garantiert berechnen zu können [WB05].

weist die Dauer der Prädiktion für Modelle, deren Systembeschreibungen in zeitdiskreter Form vorliegen, einen geringeren Wert auf als für solche, bei denen die Prädiktion eine numerische Integration erfordert.

Tabelle 1-1: Vergleich der unterschiedlichen Arten der Modellbildung im Hinblick auf die Modellkomplexität sowie die Trainings- und Prädiktionsdauer. Die Modelle, bei denen die Systembeschreibung in zeitkontinuierlicher Form vorliegt, wurden in Matlab [Mat23] mittels eines expliziten 4-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens[DB13] simuliert.

Modell	# Parameter	Training	Prädiktion
Nichtlineares physikalisches Modell	4	-	1,2 ms
Linearisiertes physikalisches Modell	4	-	0,2 ms
Flaches neuronales Netz	182	≈ 4 min	≈ 670 ms
Dynamic Mode Decomposition	6	2,0 ms	0,3 ms
Extended Dynamic Mode Decomposition	20	2,6 ms	0,3 ms
EDMD mit Korrektur	20	2,6 ms	0,5 ms
Datengetriebenes PCHD-Modell	6	2,2 ms	3,2 ms

1.2 Zielsetzung

Das Ziel dieser Dissertation ist die Entwicklung von Methoden zur datengetriebenen Bestimmung von Modellen für nichtlineare mechatronische Systeme. Die resultierenden Modelle sollen hierbei eine *aus regelungstechnischer Sicht verwertbare Form* aufweisen, d. h. sich geradlinig für den Regler- und Beobachterentwurf verwenden lassen. Dafür müssen zunächst bestehende datengetriebene Ansätze zur Modellbildung systematisch analysiert und im Kontext des modellbasierten Entwurfs mechatronischer Systeme beurteilt werden. Daneben ist zu spezifizieren, unter welchen Voraussetzungen ein Streckenmodell eine regelungstechnisch verwertbare Form aufweist. Darauf aufbauend sollen schließlich hybride Methoden zur Entwicklung solcher regelungstechnisch verwertbaren Modelle entwickelt werden, d. h. der physikalische und datengetriebene Ansatz sollen geschickt so miteinander kombiniert werden, dass die Vorteile beider Strategien bestmöglich ausgenutzt werden. Aus Sicht der physikalischen Modellbildung ist es reizvoll, vorhandenes physikalisches Vorwissen sinnvoll einzubringen. Aus Sicht der datengetriebenen Modellbildung soll die Methode so erweitert werden, dass das verwendete Streckenmodell sich anhand laufend aufgezeichneter Messdaten an vorhersehbare oder unvorhersehbare Systemveränderungen während des Betriebs¹³ flexibel anpasst. Anhand von simulativen und experimentellen Beispielen mit unterschiedlich hoher Komplexität sollen die entwickelten Methoden im Hinblick auf ihre Regelgüte¹⁴ und Anwendbarkeit bewertet werden. Hierbei ist stets ein kritischer Vergleich mit klassischen (physikalisch motivierten) Strategien zu ziehen.

¹³Z. B. durch Verschleiß oder durch den Einbau eines neuen Bauteils.

¹⁴Die Regelgüte bewertet die Qualität des Systemverhaltens anhand verschiedener Gütekriterien (vgl.[FKL+16]).

1.3 Aufbau der Dissertation

In Anlehnung an die Zielsetzung dieser Dissertation wird im Kapitel 2 zunächst die Kernidee des Koopman-Operators eingeführt. Dieses theoretische Konzept stellt einen vielversprechenden Ansatz für die Modellbildung in regelungstechnisch verwertbarer Form dar, weil es die Darstellung nichtlinearer Dynamiken durch lineare Modelle ermöglicht.

Der Koopman-Operator wird in den meisten Fällen numerisch anhand von Messdaten approximiert. Im Kapitel 3 werden daher unterschiedliche Verfahren zur Systemidentifikation im Kontext des Koopman-Operators vorgestellt. Anhand simulativer und experimenteller Beispiele werden die Verfahren hinsichtlich der erreichbaren Prädiktionsgüte, systemtheoretischer Eigenschaften und des Rechenaufwands analysiert. Anschließend wird ein Zwischenfazit der Verfahren bezüglich der Fragestellung dieser Dissertation gezogen.

Basierend auf den Erkenntnissen der Kapitel 2 und 3 wird im Kapitel 4 angestrebt, hybride Modelle zu entwickeln, die eine aus regelungstechnischer Sicht verwertbare Form aufweisen. Hierzu werden zunächst Kriterien formuliert, welche die Zuschreibung einer solchen Bezeichnung rechtfertigen. Im Vergleich zu den Verfahren aus Kapitel 3 erscheint es besonders reizvoll, Ansätze zu verfolgen, die physikalisches Vorwissen bezüglich der Energieerhaltung gezielt auszunutzen. Dafür werden passive Systeme sowie stabile Koopman-Operatoren thematisiert. Darüber hinaus wird eine neuartige hybride Methode zur Modellbildung beschrieben, die es ermöglicht, dass das resultierende Modell eine sogenannte PCHD-Form aufweist. Solche PCHD-Modelle sind in einem besonderen Maße physikalisch interpretierbar als auch unmittelbar für den modellbasierten Regelungsentwurf verwendbar.

Im Kapitel 5 wird dargelegt, wie die hybriden Modelle aus den Kapiteln 3 und 4 für den modellbasierten Regelungsentwurf genutzt werden können. Aufgrund ihrer linearen Systembeschreibung eröffnen die Modelle, die auf dem Koopman-Operator basieren, Möglichkeiten für den Entwurf von Riccati-Reglern sowie linearen modellprädiktiven Regelungen (MPC). Das datengetriebene PCHD-Modell hingegen eignet sich besonders für die Umsetzung einer passivitätsbasierten Regelung. Im Kontext eines ganzheitlichen Regelungsentwurfs wird darüber hinaus erläutert, wie ein Beobachter mittels eines auf dem Koopman-Operator basierten Modells entworfen werden kann.

Im aktiven Betrieb eines regelungstechnischen Systems erfolgt aufgrund der Rückführungsstruktur eine kontinuierliche Erfassung von Messdaten. Das Kapitel 6 stellt innovative Ansätze für adaptive hybride Modelle vor, die eine automatische Aktualisierung des internen Streckenmodells ermöglichen. Diese fortlaufende Anpassung des Reglers und des Beobachters kann somit selbst bei auftretenden Systemveränderungen eine hohe Regelgüte gewährleisten.

Im Schlusskapitel 7 erfolgt eine umfassende Zusammenfassung des Forschungsbeitrags. Zusätzlich werden in einem Ausblick weitere Aspekte für zukünftige Forschungsaufgaben beleuchtet. Das Bild 1-8 visualisiert das grundlegende Vorgehen und damit den Aufbau dieser Dissertation.

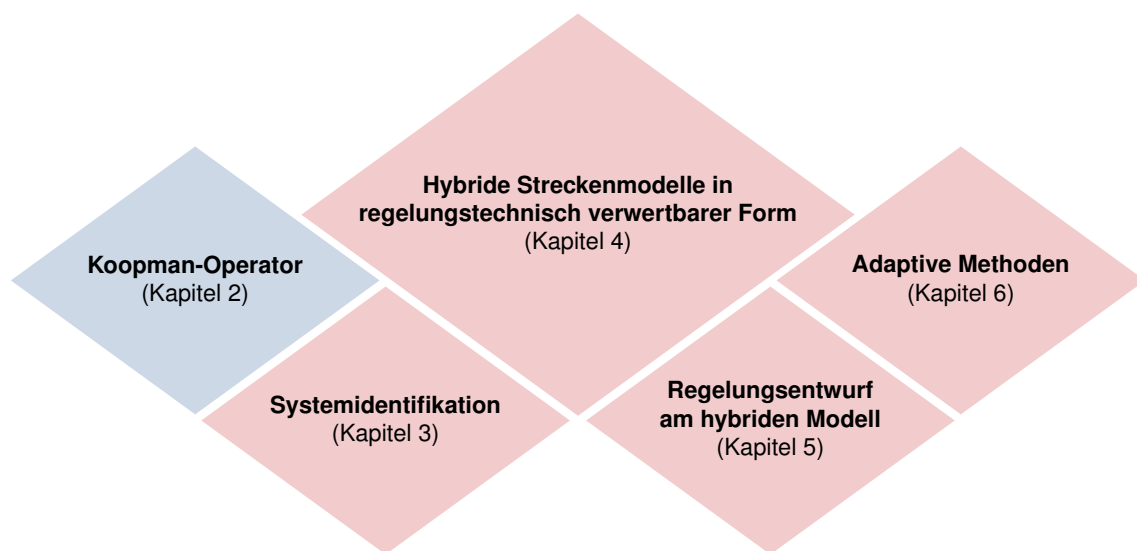


Bild 1-8: Aufbau dieser Dissertation.

2 Grundlagen zur Theorie des Koopman-Operators

B. O. Koopman formulierte bereits 1931 eine operatortheoretische Perspektive auf dynamische Systeme, um die Entwicklung der Messungen von Hamiltonschen Systemen¹ zu beschreiben [Koo31]. Durch die Beobachtung der Zustände in einem im Allgemeinen höherdimensionalen Raum lässt sich die Evolution der Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Koopman-Operator linear beschreiben. Bezüglich einzelner Ruhelagen entspricht dieser Ansatz der Erweiterung des Hartman-Grobman-Theorems² [LM13]. Die lineare Systembeschreibung führt zu einer erheblichen Reduktion des Rechenaufwands bei der Prädiktion des Systemverhaltens und bietet zudem den Vorteil, dass sich bewährte Entwurfsverfahren aus der linearen Regelungstechnik, z. B. Riccati-Regler, direkt auf nichtlineare Systeme anwenden lassen [MCTM19].

Im Allgemeinen ist der lineare Koopman-Operator unendlichdimensional [BBPK16] und lässt sich daher für die meisten algorithmischen Anwendungen nicht ohne Weiteres nutzen. Es ist jedoch möglich, den Koopman-Operator numerisch anhand von (Mess-)Daten des Originalsystems als Matrix zu approximieren. Durch die wachsende Datenverfügbarkeit, die enorme Steigerung der Rechenleistung im Bereich des maschinellen Lernens und die Faszination, anhand von Daten direkt ein lineares Modell zu bestimmen, wurde die fast 100 Jahre alte Arbeit Koopmans in zahlreichen Publikationen aufgegriffen. Die große Popularität dieses Ansatzes wurde in der Literatur scherzhaft bereits als *Koopmania* bezeichnet [PRR⁺22].

In diesem Kapitel wird zunächst im Abschnitt 2.1 die Grundidee des Koopman-Operators eingeführt, weil sie aufgrund der Linearität im Rahmen dieser Dissertation den Ausgangspunkt für Strategien zur datengetriebenen Modellbildung in regelungstechnisch verwertbarer Form bildet. Der Abschnitt 2.2 thematisiert die Herausforderungen, die sich durch den unendlich dimensional Operator ergeben. Darüber hinaus werden im Abschnitt 2.3 Aussagen über systemtheoretische Eigenschaften des exakten Koopman-Operators formuliert. Der Abschnitt 2.4 beschreibt den Zusammenhang zur Carleman-Linearisierung, deren ursprüngliche Idee ähnlich und ähnlich alt ist wie die des Koopman-Operators. Das Ziel dieses Kapitels ist einen Zugang zu der Thematik zu erlangen; für die mathematischen Grundlagen des Koopman-Operators sei beispielsweise auf [Mez05; BBPK16; Mez21] verwiesen.

2.1 Definition

Im Folgenden werden zunächst zeitkontinuierliche autonome dynamische Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2-1}$$

¹Ein Hamiltonsches System ist ein Konzept aus der klassischen Mechanik zur Beschreibung dynamischer Systeme [MA78]. Die Hamilton-Funktion enthält Informationen über die Energie des Systems.

²Das Hartman-Grobman-Theorem, auch Linearisierungstheorem genannt, besagt, dass das Verhalten eines dynamischen Systems in der Umgebung eines hyperbolischen Fixpunkts qualitativ dem Verhalten des um diesen Fixpunkt linearisierten Systems gleicht [Tes12].

betrachtet, wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionaler Zustand und $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion sind. Für eine Zeitspanne t lässt sich der Fluss $\mathbf{F}_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren, der den Zustand $\mathbf{x}(t_0)$ um einen Zeitschritt vorwärts auf den Zustand $\mathbf{x}(t_0 + t)$ abbildet

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{x}(t_0 + t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+t} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) d\tau, \quad (2-2)$$

sodass sich mit $k \in \mathbb{Z}$ und der Schrittweite Δt das zeitdiskrete dynamische System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_k) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t) \quad (2-3)$$

ergibt, vgl. Bild 2-1.

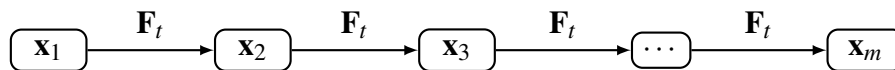


Bild 2-1: Der Fluss \mathbf{F}_t beschreibt die zeitliche Entwicklung des Zustands \mathbf{x} von einem Zeitschritt in den darauffolgenden Zeitschritt.

Für eine beliebige Observable³ $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist der lineare Koopman-Operator \mathcal{K}_t definiert als Komposition⁴ mit dem Fluss

$$\mathcal{K}_t g := g \circ \mathbf{F}_t. \quad (2-4)$$

Damit ergibt sich für das zeitdiskrete System (2-3)

$$\mathcal{K}_t g(\mathbf{x}_k) = g(\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_k)) = g(\mathbf{x}_{k+1}), \quad (2-5)$$

d. h. der Koopman-Operator überführt die Observable $g(\mathbf{x}_k)$ in den nächsten Zeitschritt $g(\mathbf{x}_{k+1})$ (vgl. Bild 2-2).

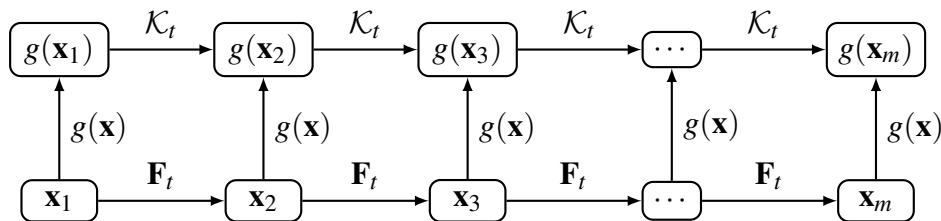


Bild 2-2: Veranschaulichung des Koopman-Operators.

Der Koopman-Operator \mathcal{K}_t ist ein linearer Operator [MSLM94], was sich einfach zeigen lässt. Es seien $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Observablen und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t(ag + bh) &= (ag + bh) \circ \mathbf{F}_t = ag \circ \mathbf{F}_t + bh \circ \mathbf{F}_t \\ &= a(g \circ \mathbf{F}_t) + b(h \circ \mathbf{F}_t) = a\mathcal{K}_t g + b\mathcal{K}_t h. \end{aligned} \quad (2-6)$$

³Der Begriff der Observable lässt sich hier als Beobachtung bzw. Messgröße des Systems verstehen.

⁴Der Koopman-Operator wird daher auch als Kompositionsoperator bezeichnet, vgl. [Mez15].

Der Koopman-Operator \mathcal{K}_t kann stets unendlichdimensional sein, selbst wenn \mathbf{F}_t endlichdimensional ist und ist linear, selbst wenn \mathbf{F}_t nichtlinear ist [WKR15]. Der adjungierte Operator des Koopman-Operators ist der Perron-Frobenius-Operator [MM16; IIS22].⁵

Für hinreichend glatte Systeme lässt sich ein zeitkontinuierliches Analogon

$$\mathcal{K}g = \frac{d}{dt}g, \quad (2-7)$$

definieren, wobei \mathcal{K} der infinitesimale Generator mit

$$\mathcal{K}g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{K}_t g - g}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g \circ \mathbf{F}_t - g}{t} \quad (2-8)$$

ist [BK19]. Der Koopman-Generator \mathcal{K} wird auch als *Lie-Operator* bezeichnet [Koo31], weil dieser der Lie-Ableitung von g entlang des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ entspricht

$$\mathcal{K}g(\mathbf{x}(t)) = \dot{g}(\mathbf{x}(t)) = \nabla_{\mathbf{x}} g \dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla_{\mathbf{x}} g \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathcal{L}_{\mathbf{f}} g(\mathbf{x}(t)). \quad (2-9)$$

Anschauliches Beispiel

Im Folgenden wird die Idee des Koopman-Operators anhand eines Beispielsystems [BBPK16] veranschaulicht, das in der Literatur aufgrund seiner speziellen Struktur vielfach aufgegriffen wird. Das zeitkontinuierliche nichtlineare dynamische System lässt sich durch die Differentialgleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu x_1 \\ \lambda (x_2 - x_1^2) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \ll \mu < 0 \quad (2-10)$$

beschreiben. Es handelt sich um ein *Slow-Fast-System*⁶ mit einer langsamen Mannigfaltigkeit $x_2 = x_1^2$, weil der Zustand x_2 sich zeitlich schneller entwickelt als der Zustand x_1 . Um eine lineare Systemdarstellung mittels des Koopman-Operators zu erhalten, werden die Observablen geschickt so festgelegt, dass sie den originalen Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$ und zusätzlich die Nichtlinearität x_1^2 enthalten⁷

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}. \quad (2-11)$$

⁵Die Dualität zwischen den beiden Operatoren wird beschrieben als *Evolution von Observablenfunktionen* beim Koopman-Operator vs. *Evolution von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen* für den Perron-Frobenius-Operator [KKS16].

⁶Demografische, ökonomische und ökologische Prozesse weisen häufig die Eigenschaft auf, dass sich nicht alle Systemvariablen in derselben Geschwindigkeit entwickeln, sodass sie trotz des deterministischen Verhaltens schwer prädizierbar sind und infolgedessen das Risiko unvorhersehbarer Wechselwirkungen bergen [MPFS96]. Daher erfordert die Analyse von Slow-Fast-Systemen systematische Lösungsansätze [WB15].

⁷Dieser Ansatz ist ähnlich zur Carleman-Linearisierung, vgl. Abschnitt 2.4.

In den Observablen $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ lässt sich die Systemdynamik durch die Berechnung der zeitlichen Ableitungen unter Berücksichtigung der Kettenregel der Differentialrechnung linear und endlichdimensional beschreiben

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{g}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}}_{\mathcal{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}}. \quad (2-12)$$

Das Bild 2-3 veranschaulicht die Dynamik des eigentlich zweidimensionalen nichtlinearen Originalsystems im dreidimensionalen Raum der Observablen.

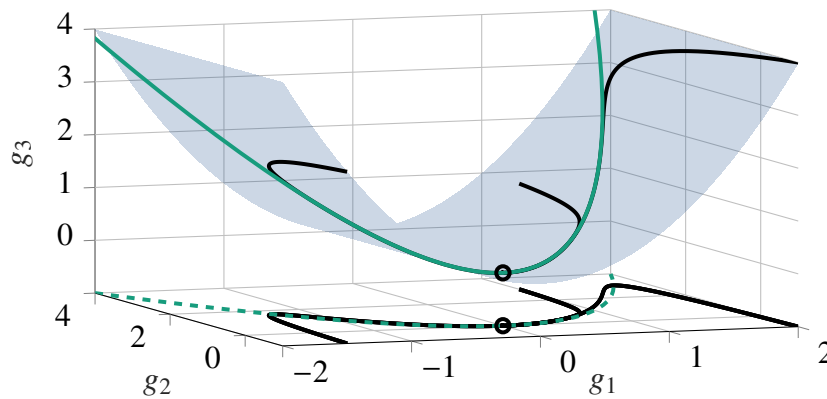


Bild 2-3: Visualisierung von Beispieltrajektorien für $\mu = -0,05$, $\lambda = -1$. Die blaue Fläche ist die Zwangsbedingung $g_3(\mathbf{x}) = x_1^2$, auf der alle Trajektorien verlaufen. In grün ist die attraktive langsame Mannigfaltigkeit des Systems dargestellt, der sich alle Trajektorien zunächst schnell annähern, bevor sie danach langsam in den Ursprung streben.

2.2 Koopman-invariante Unterräume

Das beschriebene Vorgehen ist bei den meisten auftretenden nichtlinearen dynamischen Systemen nicht ohne Weiteres möglich. Als weiteres Beispiel wird daher das System

$$\dot{x} = x^2 \quad (2-13)$$

betrachtet, bei dem die alleinige Erweiterung des Originalzustandes um die Nichtlinearität zu einer unendlichdimensionalen Systembeschreibung führen würde

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \\ \dot{g}_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2-14)$$

Eine endlichdimensionale Darstellung in Form von Matrizen ist nur dann möglich, wenn die Observablen einen sogenannten *Koopman-invarianten Unterraum* aufspannen. Seien

$\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Dann ist der Unterraum $\mathcal{M} = \text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_N\}$ genau dann invariant gegenüber dem Koopman-Operator [BBPK16], falls alle Funktionen

$$g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_N g_N \quad (2-15)$$

auch nach Anwendung des Koopman-Operators in diesem Unterraum liegen, d. h.

$$\mathcal{K}g = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \dots + \beta_N g_N. \quad (2-16)$$

Koopman-Eigenfunktionen spannen stets einen Koopman-invarianten Unterraum auf, so dass sich damit stark nichtlineare Systeme global linearisieren lassen. Im Folgenden werden die Grundlagen der Koopman-Eigenzerlegung erläutert.

Die Observable $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine zeitkontinuierliche Koopman-Eigenfunktion des nichtlinearen dynamischen Systems mit dem dazugehörigen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, falls

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathcal{K}\varphi(\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x}) \quad (2-17)$$

erfüllt ist. Der zeitdiskrete Fall mit $\mu \in \mathbb{C}$ ist durch

$$\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathcal{K}_t\varphi(\mathbf{x}_k) = e^{\lambda t}\varphi(\mathbf{x}_k) = \mu\varphi(\mathbf{x}_k) \quad (2-18)$$

gegeben. Für stetige und differenzierbare Dynamiken ergibt die Anwendung der Kettenregel auf eine Koopman-Eigenfunktion die partielle Differentialgleichung [KKB21]

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x}). \quad (2-19)$$

Die Bestimmung von Koopman-Eigenfunktionen mittels Gleichung (2-19) – sowohl analytisch als auch datengetrieben – ist eine zentrale praktische Herausforderung in der Erforschung dynamischer Systeme [KKB21]. Für spezielle Anwendungen, die ein Punktspektrum oder ein gemischtes Spektrum aufweisen, lassen sich die Koopman-Eigenfunktionen zu bestimmten Eigenwerten jedoch mittels eines datengetriebenen Ansatzes approximieren, vgl. [LKB18]. Dieser Ansatz konnte im Rahmen der von der Autorin betreuten studentischen Arbeit [Ker20] anhand des Einführungsbeispiels sowie eines ungedämpften und gedämpften Pendels validiert werden.

Jede vektorwertige Observable $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ lässt sich als Linearkombination der Eigenfunktionen $\varphi_j(\mathbf{x})$

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} v_{ij}\varphi_j(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\mathbf{x})\mathbf{v}_j \quad (2-20)$$

ausdrücken, wobei $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^N$ die j -te Koopman-Mode zur j -ten Eigenfunktion φ_j ist. Mittels dieser Zerlegung lässt sich die Dynamik für den zeitkontinuierlichen Fall durch

$$\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathcal{K}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathcal{K} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\mathbf{x})\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x})\mathbf{v}_j \quad (2-21)$$

und für den zeitdiskreten Fall durch

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_k) = \mathcal{K}_t^k \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{K}_t^k \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_t^k \varphi_j(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^k \varphi_j(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_j \quad (2-22)$$

beschreiben.

Das Triplet $\left\{ \left(\lambda_j \text{ bzw. } \mu_j, \varphi_j, \mathbf{v}_j \right) \right\}_{j=1}^{\infty}$ wird als *Koopman-Eigenzerlegung* bezeichnet:

- Die Koopman-Eigenwerte λ_j bzw. μ_j charakterisieren die zeitliche Dynamik des zeitkontinuierlichen bzw. zeitdiskreten linearen Systems.
- Die Koopman-Eigenfunktionen φ_j transformieren den Zustandsraum so, dass sich die Dynamik im beobachteten Raum linear verhält.
- Die Koopman-Moden \mathbf{v}_j rekonstruieren den Originalzustand aus den Koopman-Eigenfunktionen [BBKK22].

Die Koopman-Eigenwerte und -Eigenfunktionen sind Eigenschaften der zugrunde liegenden Systemdynamik, während die Koopman-Moden von den Observablen abhängig sind [GP17]. Für lineare Systeme fallen die Koopman-Eigenwerte mit den Eigenwerten, die Koopman-Eigenfunktionen mit dem Zustandsvektor und die Koopman-Moden mit den Eigenvektoren der Dynamikmatrix zusammen [RMB⁺09].

Für das Einführungsbeispiel aus Abschnitt 2.1 lassen sich die zeitkontinuierlichen Koopman-Eigenfunktionen mittels der Linkseigenvektoren⁸ von \mathcal{K}

$$\mathbf{w}_\mu^\top = [1, 0, 0] \quad \Rightarrow \quad \varphi_\mu = \mathbf{w}_\mu^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}) = x_1, \quad (2-23a)$$

$$\mathbf{w}_\lambda^\top = \left[0, 1, \frac{\lambda}{2\mu - \lambda} \right] \quad \Rightarrow \quad \varphi_\lambda = \mathbf{w}_\lambda^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}) = x_2 + \frac{\lambda}{2\mu - \lambda} x_1^2, \quad (2-23b)$$

$$\mathbf{w}_{2\mu}^\top = [0, 0, 1] \quad \Rightarrow \quad \varphi_{2\mu} = \mathbf{w}_{2\mu}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}) = x_1^2 \quad (2-23c)$$

formulieren. Die Dynamik des Systems in der Koopman-Eigenzerlegung mit

$$\dot{\Phi} = \mathcal{K} = \Lambda \Phi \quad (2-24)$$

ist damit gegeben durch

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_\mu \\ \dot{\varphi}_\lambda \\ \dot{\varphi}_{2\mu} \end{bmatrix}}_{\dot{\Phi}} = \mathcal{K} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_\mu \\ \varphi_\lambda \\ \varphi_{2\mu} \end{bmatrix}}_{\Phi} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_\mu \\ \varphi_\lambda \\ \varphi_{2\mu} \end{bmatrix}}_{\Phi}. \quad (2-25)$$

Erhaltungsgrößen wie die Hamilton-Funktion $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bei mechanischen Systemen sind Koopman-Eigenfunktionen zum Eigenwert $\lambda = 0$ (bzw. $\mu = 1$), weil

$$\mathcal{K}\mathcal{H} = \dot{\mathcal{H}} = 0\mathcal{H} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{K}_t\mathcal{H} = 1\mathcal{H} \quad (2-26)$$

gilt. Außerdem existiert für alle Systeme die triviale Eigenfunktion $\varphi = 1$ zum Eigenwert $\lambda = 0$ [MM16] (bzw. $\mu = 1$ [Mez05]). Aus bekannten Paaren aus Eigenwerten und

⁸Ein Vektor \mathbf{v}_α mit $\mathbf{K}\mathbf{v}_\alpha = \alpha\mathbf{v}_\alpha$ wird als Eigenvektor der Matrix \mathbf{K} zum Eigenwert α bezeichnet. Analog dazu wird ein Vektor \mathbf{w}_α^\top mit $\mathbf{w}_\alpha^\top \mathbf{K} = \alpha\mathbf{w}_\alpha^\top$ als Linkseigenvektor der Matrix \mathbf{K} bezeichnet [SW92].

Eigenfunktionen lassen sich beliebige weitere bilden: Seien λ_1, φ_1 und λ_2, φ_2 Paare aus zeitkontinuierlichen Eigenwerten und Eigenfunktionen. Für beliebige feste $r, s \in \mathbb{R}^+$ ist $\varphi_1^r \varphi_2^s, r\lambda_1 + s\lambda_2$ ebenfalls ein Eigenwert-Eigenfunktion-Paar [MM16]. Diese Korrespondenz findet sich beim Einführungsbeispiel bezüglich der Eigenfunktionen φ_μ und $\varphi_{2\mu}$ wieder. Seien μ_1, φ_1 und μ_2, φ_2 Paare aus zeitdiskreten Eigenwerten und Eigenfunktionen. Für beliebige feste $r, s \in \mathbb{R}^+$ ist $\varphi_1^r \varphi_2^s, \mu_1^r \mu_2^s$ ebenfalls ein Eigenwert-Eigenfunktion-Paar [BMM12].

2.3 Systemtheoretische Eigenschaften

Für eine Systembeschreibung mittels des Koopman-Generators \mathcal{K} , vgl. Gleichung (2-7), die äquivalent zum nichtlinearen dynamischen System (2-1) ist, d. h. die identische Dynamik aufweist, lässt sich folgende Aussage bezüglich der Stabilitätseigenschaft treffen: Das nichtlineare System ist genau dann Ljapunov-stabil wenn der exakte Koopman-Generator \mathcal{K} stabil ist, d. h. alle Eigenwerte negative Realteile haben [MAM23].

Die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit eines dynamischen Systems lassen sich mittels der Gramschen Matrizen beurteilen. Für den Fall, dass sich der Systemzustand sowie der Systemeingang und -ausgang mittels geeigneter Koopman-Eigenfunktionen beschreiben lassen, gibt es einen Zusammenhang zwischen den Gramschen Matrizen im Raum der Koopman-Observablen und der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des zugrunde liegenden Originalsystems [YLH18].

Daneben wird in [GP17] beschrieben, wie sich ein eingangsaffines System in eine bilineare Systembeschreibung transformieren lässt und in dieser Form bezüglich der Erreichbarkeit und Steuerbarkeit untersucht werden kann.

Im Kontext des Beobachterentwurfs formulieren [SB16] ein Beobachtbarkeitskriterium unter der Voraussetzung, dass sich die Dynamik des zugrunde liegenden Originalsystems (2-1) mittels N Koopman-Eigenfunktionen $\Phi(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_N(\mathbf{x})]^\top$ und den dazugehörigen Koopman-Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ durch

$$\dot{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathcal{K}\Phi(\mathbf{x}) = \Lambda\Phi(\mathbf{x}) \quad (2-27)$$

beschreiben und der n -dimensionale Systemzustand

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{v}_j^x = \mathbf{V}^x \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_j^x \in \mathbb{R}^n, \mathbf{V}^x = [\mathbf{v}_1^x, \dots, \mathbf{v}_N^x] \in \mathbb{R}^{n \times N} \quad (2-28)$$

sowie der q -dimensionale Systemausgang

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{v}_j^y = \mathbf{V}^y \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_j^y \in \mathbb{R}^q, \mathbf{V}^y = [\mathbf{v}_1^y, \dots, \mathbf{v}_N^y] \in \mathbb{R}^{q \times N} \quad (2-29)$$

als Linearkombinationen formulieren lassen: Das zugrunde liegende nichtlineare Originalsystem ist genau dann beobachtbar, wenn das Paar (Λ, \mathbf{V}^y) beobachtbar ist. Für eine detaillierte Herleitung dieses Ansatzes sowie die Erweiterung um komplex-konjugierte Eigenwerte sei auf [Sur16] verwiesen.

Systeme mit mehreren isolierten Ruhelagen

Der Beitrag [BBPK16] postuliert, dass es nicht möglich sei, einen einzigen Koopman-Operator für Systeme mit mehreren isolierten Ruhelagen zu finden, wenn die Observablen den Zustand beinhalten⁹. Das lässt sich damit erklären, dass die endlichdimensionale Approximation des Koopman-Operators in einem linearen System resultiert und daher nicht mehrere isolierte Ruhelagen aufweisen kann. Eine Möglichkeit zur Abhilfe besteht darin, den Zustandsraum in die unterschiedlichen Einzugsgebiete der Ruhelage zu unterteilen und für jedes dieser Einzugsgebiete einen lokal gültigen Koopman-Operator zu approximieren [WKR15]. Für Koopman-Eigenfunktionen gilt dieser Zusammenhang ebenfalls [TRL⁺14].

In [BNR19] wird die obige These jedoch anhand des Beispielsystems

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} -(x-1) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -(x+1) & x < 0 \end{cases} \quad (2-30)$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dem Fluss

$$F_t(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-t} + 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ (x+1)e^{-t} - 1 & x < 0 \end{cases} \quad (2-31)$$

widerlegt, das drei Ruhelagen in $x = -1, 0, 1$ besitzt. Die Observablen $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\psi_1(x) = x, \quad (2-32a)$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \quad (2-32b)$$

enthalten den Zustand x und bilden die Dynamik aller drei Ruhelagen exakt ab. Durch die Anwendung des Koopman-Operators

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t \psi_1(x) &= \psi_1(F_t(x)) = \begin{cases} (x-1)e^{-t} + 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ (x+1)e^{-t} - 1 & x < 0 \end{cases} \\ &= e^{-t} \psi_1(x) + (1 - e^{-t}) \psi_2(x), \end{aligned} \quad (2-33a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t \psi_2(x) &= \psi_2(F_t(x)) = \begin{cases} (x-1)e^{-t} + 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ (x+1)e^{-t} - 1 & x < 0 \end{cases} \\ &= e^{-t} \psi_2(x) + (1 - e^{-t}) \psi_1(x) \end{aligned} \quad (2-33b)$$

⁹In der Praxis ist es für die Rekonstruktion der originalen Zustände hilfreich, wenn die Observablen den Zustand beinhalten.

und durch Umstellen

$$\mathcal{K}_t(\psi_1 - \psi_2) = e^{-t}(\psi_1 - \psi_2), \quad (2-34a)$$

$$\mathcal{K}_t(\psi_2) = e^0\psi_2 \quad (2-34b)$$

lassen sich die Koopman-Eigenfunktionen $\varphi_1(x) = \psi_1 - \psi_2$ mit dem Eigenwert $\lambda_1 = -1$ und $\varphi_2(x) = \psi_2$ mit dem Eigenwert $\lambda_2 = 0$ ablesen. An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Eigenfunktionen an den Rändern der Einzugsgebiete der Ruhelagen unstetig sind, was für die meisten Observablen nicht zutreffen wird. Für den Fall, dass die Einzugsgebiete der Ruhelagen im Vorfeld bekannt sind, wird es daher gleichwohl empfohlen, den Zustandsraum in diese Einzugsgebiete zu unterteilen und für jedes Gebiet eigene Koopman-Eigenfunktionen zu berechnen [WKR15].

2.4 Zusammenhang zur Carleman-Linearisierung

Torsten Carleman hat 1932 gezeigt, dass nichtlineare Differentialgleichungen mit polynomiellen Nichtlinearitäten in unendlichdimensionale Systeme aus linearen Differentialgleichungen transformiert werden können [Car32; SW80; KS91]. Im Folgenden wird die Grundidee der *Carleman-Linearisierung* beschrieben und anhand eines Beispiels illustriert sowie ein Vergleich zum Koopman-Operator gezogen. Die mathematischen Grundlagen und die Notation des Kronecker-Produkts werden im Abschnitt A1.2 beschrieben.

Carleman-Transformation

Damit die Carleman-Linearisierung durchführbar ist, müssen die Nichtlinearitäten des zu linearisierenden Systems bekannt sein und ausschließlich aus Polynomen bestehen, d. h. die Systemdynamik muss in der Form¹⁰

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \tilde{\mathbf{F}}_i \mathbf{x}^{[i]} \quad (2-35)$$

mit $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ vorliegen [ASM19], wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{\mathbf{F}}_i \in \mathbb{R}^{n \times n^i}$, $\mathbf{x}^{[i]} \in \mathbb{R}^{n^i}$.

Die Zustände des zu linearisierenden Systems werden in einen höherdimensionalen Raum transformiert. Der Carleman-Lifting-Operator $\tilde{\Psi}(\mathbf{x})$ ist eine unendlichdimensionale Abbildung, deren Elemente mittels des Kronecker-Produkts als Monome von \mathbf{x}

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{x}) := [\mathbf{x}^{[1]}, \mathbf{x}^{[2]}, \dots]^T \quad (2-36)$$

definiert werden. Für die zeitlichen Ableitungen der Monome gilt mittels der Produktregel der Differentialrechnung und der Kronecker-Produktregel¹¹ [CS08]

$$\dot{\mathbf{x}}^{[1]} = \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^M \tilde{\mathbf{F}}_i \mathbf{x}^{[i]}, \quad (2-37a)$$

¹⁰Vgl. Notation des Kronecker-Produkts $\mathbf{x}^{[i]}$ eines Vektors im Abschnitt A1.2.

¹¹Vgl. Anhang A1.2.

$$\dot{\mathbf{x}}^{[2]} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^M \tilde{\mathbf{F}}_i \mathbf{x}^{[i]} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \sum_{i=1}^M \tilde{\mathbf{F}}_i \mathbf{x}^{[i]} \quad (2-37b)$$

$$= \sum_{i=1}^M \tilde{\mathbf{F}}_i \mathbf{x}^{[i]} \otimes \mathbf{I}_n \mathbf{x} + \mathbf{I}_n \mathbf{x} \otimes \sum_{i=1}^M \tilde{\mathbf{F}}_i \mathbf{x}^{[i]} = \sum_{i=1}^M (\tilde{\mathbf{F}}_i \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n \otimes \tilde{\mathbf{F}}_i) \mathbf{x}^{[i+1]},$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{[3]} = \sum_{i=1}^M (\tilde{\mathbf{F}}_i \otimes \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n \otimes \tilde{\mathbf{F}}_i \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_n \otimes \tilde{\mathbf{F}}_i) \mathbf{x}^{[i+2]}, \quad (2-37c)$$

⋮

$$\dot{\mathbf{x}}^{[j]} = \sum_{i=1}^M (\tilde{\mathbf{F}}_i \otimes \mathbf{I}_n \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_n + \cdots + \mathbf{I}_n \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathbf{F}}_i \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_n + \cdots \cdots + \mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_n \otimes \tilde{\mathbf{F}}_i) \mathbf{x}^{[i+j-1]}. \quad (2-37d)$$

Zusammengefasst ergibt sich damit die Systembeschreibung [ASM19]

$$\dot{\tilde{\Psi}} = \mathbf{A} \tilde{\Psi} \quad (2-38)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^1 & \mathbf{A}_2^1 & \mathbf{A}_3^1 & \cdots & \mathbf{A}_M^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^2 & \mathbf{A}_3^2 & \cdots & \mathbf{A}_M^2 & \mathbf{A}_{M+1}^2 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3^3 & \cdots & \mathbf{A}_M^3 & \mathbf{A}_{M+1}^3 & \mathbf{A}_{M+2}^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (2-39)$$

wobei die Blockmatrizen von \mathbf{A} durch

$$\mathbf{A}_{i+j-1}^i = \sum_{v=1}^i \overbrace{\mathbf{I}_n \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathbf{F}}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_n}^{i \text{ Operanden}} \in \mathbb{R}^{n^i \times n^{i+j-1}} \quad (2-40)$$

↑
v-te Position

berechnet werden. Die endlichdimensionale approximierte Systembeschreibung des unendlichdimensionalen Systems ergibt sich durch Abschneiden an der Stelle N zu

$$\tilde{\Psi}_N(\mathbf{x}) := [\mathbf{x}^{[1]}, \mathbf{x}^{[2]}, \dots, \mathbf{x}^{[N]}]^\top \quad (2-41)$$

mit der Dimension

$$\tilde{N} = \dim \tilde{\Psi}_N(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N n^i = \frac{n(n^N - 1)}{n - 1} \quad (2-42)$$

und

$$\dot{\tilde{\Psi}}_N = \mathbf{A}_N \tilde{\Psi}_N \quad (2-43)$$

mit

$$\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^1 & \mathbf{A}_2^1 & \mathbf{A}_3^1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^2 & \mathbf{A}_3^2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{A}_N^{N-1} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_N^N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{N} \times \tilde{N}}. \quad (2-44)$$

Der Beitrag [ASM21] formuliert explizite Fehlerschranken für die abgeschnittene Systembeschreibung in Abhängigkeit der Abschneidezah N .

Beispiel

Zur Veranschaulichung wird das Verfahren der Carleman-Linearisierung auf das Einführungsbeispiel aus Abschnitt 2.1 angewendet. Das System lässt sich durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mu x_1 \\ \lambda(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^{(1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^{(2)}} \quad (2-45)$$

beschreiben. Mit $N = 2$ ergibt sich die approximierten endlichdimensionale Systembeschreibung zu

$$\tilde{\Psi}_N(\mathbf{x}) = \left[x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_1 x_2, x_2^2 \right]^T \quad (2-46)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^1 & \mathbf{A}_2^1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^2 \end{bmatrix}, \quad (2-47)$$

wobei

$$\mathbf{A}_1^1 = \tilde{\mathbf{F}}_1, \quad \mathbf{A}_2^1 = \tilde{\mathbf{F}}_2, \quad \mathbf{A}_2^2 = \tilde{\mathbf{F}}_1 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{F}}_1. \quad (2-48)$$

Für dieses spezielle Beispiel bildet die endlichdimensionale Approximation der unendlichdimensionalen Carleman-Linearisierung aufgrund der Koopman-invarianten Observablen, vgl. Abschnitt 2.2, die nichtlineare Systemdynamik exakt ab.

Zusammenhang zwischen der Carleman-Linearisierung und dem Koopman-Operator

Zwischen dem Koopman-Operator und der Carleman-Linearisierung lässt sich ein klarer Zusammenhang erkennen. Bei beiden Verfahren wird ein nichtlineares endlichdimensionales System durch eine nichtlineare Transformation in ein lineares unendlichdimensionales System überführt, sodass für algorithmische Anwendungen jeweils eine Approximation (z. B. durch Abschneiden) notwendig ist. Die Linearisierung ist bei beiden Verfahren global, d. h. für den gesamten Zustandsraum gültig, im Vergleich zu lokalen Linea-

risierungsverfahren wie der Taylorreihenentwicklung in der Umgebung eines Betriebspunkts.

Jedoch lassen sich auch zwei Unterschiede zwischen beiden Konzepten erkennen. Die Carleman-Linearisierung ist durch eine analytische Vorgehensweise bei vollständigem Wissen über die Systemdynamik geprägt. Beim anwendungsorientierten Koopman-Ansatz hingegen werden in der Regel datengetriebene Approximationsverfahren, vgl. Kapitel 3 verwendet, d. h. anstatt der Systemgleichungen werden Messsequenzen des zugrunde liegenden nichtlinearen Systems genutzt. Gleichwohl lässt sich bei diesem Verfahren Vorwissen nutzen, z. B. durch Berücksichtigung bestimmter Nichtlinearitäten bei der Festlegung der Observablen. Für die Carleman-Linearisierung gilt zudem die Voraussetzung, dass die nichtlineare Systemdynamik ausschließlich Polynome enthält, wohingegen das Konzept des Koopman-Operators für beliebige Nichtlinearitäten gilt. Daher lässt sich das Konzept des Koopman-Operators als Verallgemeinerung der Carleman-Linearisierung einordnen.

Bemerkungen

Beim Kronecker-Produkt zweier Vektoren treten einige Terme doppelt auf, wie auch beim Beispiel oben zu sehen ist. Im Beitrag [CS08] wird daher das reduzierte Kronecker-Produkt verwendet, bei dem alle Dubletten herausgestrichen werden. Außerdem wird die *modifizierte Carleman-Linearisierung* beschrieben, bei der die Terme, die beim endlichdimensionalen System durch Abschneiden nicht mehr korrekt beschrieben werden, datengetrieben durch Korrekturterme ersetzt werden.

Der Beitrag [WM16] motiviert die Anwendung der Taylorreihenapproximation, um das asymptotische Verhalten bezüglich unterschiedlicher Ruhelagen eines Systems genauer abzubilden. Dieselben Autoren beschreiben außerdem in [WM17], wie sich Differentialgleichungen mit beliebigen Nichtlinearitäten in polynomielle Differentialgleichungen überführen lassen. Außerdem wird als Alternative zum Abschneiden der unendlichdimensionalen Systembeschreibung die *selbstkonsistente Carleman-Linearisierung* beschrieben. Dadurch ist eine genauere Approximation für einen längeren Zeitbereich möglich.

Im Beitrag [MB08] wird dargestellt, wie die Beobachtbarkeit eines polynomiellen Systems mit der linearen Beobachtbarkeit des Carleman-linearisierten Systems zusammenhängt. Demnach ist das originale System linear beobachtbar, falls die ersten n Koordinaten des Carleman-linearisierten Systems beobachtbar sind. Diese Eigenschaft wird durch eine Rangbedingung formuliert.

Der Beitrag [ASM19] beschreibt einen Zusammenhang zwischen der lokalen Stabilität eines nichtlinearen Systems und den Eigenwerten der Matrix F_1 der Carleman-Linearisierung. Außerdem wird das Konzept auf Systeme mit Steuereingang erweitert und ein optimales Regelungsgesetz anhand der approximierten endlichdimensionalen linearen Systembeschreibung entworfen.

3 Systemidentifikation mittels Snapshot-Verfahren

Aufgrund der steigenden Verfügbarkeit großer Datenmengen wurde in den letzten Jahren eine Vielzahl verschiedener Verfahren zur Systemidentifikation entwickelt. In diesem Kapitel wird angenommen, dass sich die zu modellierende Dynamik der Strecke mit dem vollständig bekannten (=messbaren) Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und der Vektorfunktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ entweder als autonomes System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3-1)$$

oder als eingangsaffines System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3-2)$$

mit der Eingangsgröße $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ und der konstanten Eingangsmatrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ beschreiben lässt. Die verwendeten (Mess-)Daten dürfen sowohl von Simulationen als auch von realen Experimenten stammen und sind in Form von Snapshot-Matrizen

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{M-1}] \in \mathbb{R}^{n \times (M-1)}, \quad (3-3a)$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{M-1}] \in \mathbb{R}^{p \times (M-1)}, \quad (3-3b)$$

$$\mathbf{X}' = [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_M] \in \mathbb{R}^{n \times (M-1)} \quad (3-3c)$$

anzuordnen, wobei $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t)$ bzw. $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(k\Delta t)$ mit $k = 1, 2, \dots$ und \mathbf{X}' die aus \mathbf{X} um einen Zeitschritt Δt in die Zukunft verschobenen Zustände enthält. Die Daten müssen nicht zwingend von einer einzigen Messung oder Simulation stammen, es genügen Paare aus zwei aufeinander folgenden Snapshots \mathbf{x}_k und \mathbf{x}_{k+1} , die spaltenrichtig in \mathbf{X} und \mathbf{X}' eingetragen werden.

Im Folgenden werden unterschiedliche Verfahren zur Snapshot-basierten Systemidentifikation beschrieben, vgl. Abschnitte 3.1-3.3. Einige der Verfahren lassen sich als endlich-dimensionale Approximationen des Koopman-Operators auffassen, weil der Zustandsübergang von einem Zeitschritt in den folgenden Zeitschritt durch eine Matrix approximiert wird. Die Verfahren unterscheiden sich darin, ob die Observablen linear oder nicht-linear von den Systemzuständen abhängig sind. Beim EDMD-Verfahren gibt es durch die nichtlinearen Observablen die Möglichkeit, vorhandenes Systemwissen zu integrieren. Aus diesem Grund und aufgrund der linearen Systembeschreibung wird dieses Verfahren in besonderem Maße betrachtet und anhand von Beispielsystemen umfangreich bezüglich der Prädiktionsgenauigkeit und systemtheoretischer Eigenschaften sowie des Rechenaufwands untersucht, vgl. Abschnitt 3.4. Das Kapitel schließt mit einem Zwischenfazit, vgl. Abschnitt 3.5.

3.1 Dynamic Mode Decomposition (DMD)

Das Verfahren Dynamic Mode Decomposition (DMD) wurde 2008 von Peter Schmid erstmals im Kontext der Modellordnungsreduktion für hochdimensionale fluiddynamische Systeme formuliert [SS08; Sch10]. Der jeweilige Zustandsübergang von einem Zeitschritt in den folgenden Zeitschritt wird über die gesamte Datensequenz als lineare Dy-

namik angenommen. Im Vergleich zur POD (Proper Orthogonal Decomposition)¹, die auf einer Sortierung der Zustände nach räumlicher Korrelation und Energiegehalt beruht, wird beim DMD-Verfahren zusätzlich das zeitliche Verhalten der Zustände berücksichtigt [PS09].²

Das DMD-Verfahren approximiert eine zeitdiskrete Matrix $\mathbf{A}_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die den linearen Zusammenhang zwischen den Datenmatrizen \mathbf{X} und \mathbf{X}' , d. h. für jeden Zustandsübergang der Datensequenz

$$\mathbf{X}' \approx \mathbf{A}_t \mathbf{X} \quad (3-4)$$

optimal beschreibt. Die Kleinste-Quadrate-Lösung für \mathbf{A}_t ist gegeben durch

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{X}' \mathbf{X}^+ \quad (3-5)$$

und minimiert die Frobeniusnorm $\|\mathbf{X}' - \mathbf{A}_t \mathbf{X}\|_F$, wobei \mathbf{X}^+ die Pseudoinverse³ der Matrix \mathbf{X} ist [TRL⁺14]. Damit lässt sich das approximierte System linear im Zustandsraum mit der Dynamikmatrix \mathbf{A}_t beschreiben bzw. präzisieren, vgl. Bild 3-1,

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_k. \quad (3-6)$$

Weil \mathbf{A}_t lediglich eine Approximation der betrachteten im Allgemeinen nichtlinearen Dynamik ist, handelt es sich bei $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ um eine Schätzung von \mathbf{x}_{k+1} . Die Matrix \mathbf{A}_t entspricht einer Approximation des Koopman-Operators \mathcal{K}_t für den Spezialfall, dass der Zustandsvektor als Observablenvektor aufgefasst wird, d. h. für $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

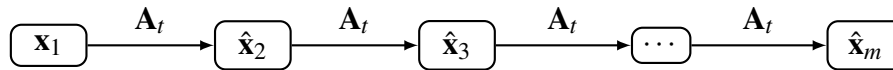


Bild 3-1: Beim DMD-Verfahren lässt sich die zeitliche Evolution der Zustände durch Multiplikation mit der Matrix \mathbf{A}_t präzisieren.

Erweiterung um einen Systemeingang

Das DMD-Verfahren lässt sich auf eingangsaffine Systeme (3-2) erweitern und wird dann auch als DMDc (Dynamic Mode Decomposition with Control) bezeichnet [PBK16]. Dafür werden die Zustandsübergänge

$$\mathbf{X}' \approx \mathbf{A}_t \mathbf{X} + \mathbf{B}_t \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t & \mathbf{B}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

¹Die POD ist eine aus der Fluidodynamik stammende numerische Methode zur Analyse turbulenter Strömungen [BHL93], die eng verwandt mit der Hauptkomponentenanalyse ist [AS01].

²Ebenfalls eng verwandt mit dem DMD-Verfahren ist der *Arnoldi-Algorithmus* [Saa80], der Eigenwerte eines hochdimensionalen dynamischen Systems über Krylov-Unterräume approximiert, vgl. [RMB⁺09]. Außerdem gibt es einen Zusammenhang zum ERA-Verfahren (Eigensystem-Realisierungsalgorithmus) [JP85], das ein lineares zeitdiskretes dynamisches System aus den Messdaten einer Impulsantwort identifiziert [TRL⁺14].

³Siehe Anhang A1.4.

mit $\mathbf{B}_t \in \mathbb{R}^{n \times p}$ betrachtet, deren Kleinste-Quadrate-Lösung $\|\mathbf{X}' - \mathbf{A}_t \mathbf{X} - \mathbf{B}_t \mathbf{U}\|_F$

$$[\mathbf{A}_t, \mathbf{B}_t] = \mathbf{X}' \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}^+ \quad (3-8)$$

ergibt. Damit lässt sich das approximierte System linear präzisieren durch

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k. \quad (3-9)$$

Beispiel linearer Einmassenschwinger

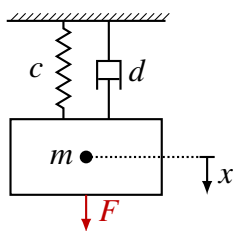
Anhand eines einfachen akademischen Beispiels wird im Folgenden die Anwendung des DMD-Verfahrens veranschaulicht. Dafür wird ein linearer Einmassenschwinger, vgl. Bild 3-2(a), mit der Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -cx - d\dot{x} + F \quad \text{mit} \quad m = 1 \text{ kg}, c = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}, d = 0,1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \quad (3-10)$$

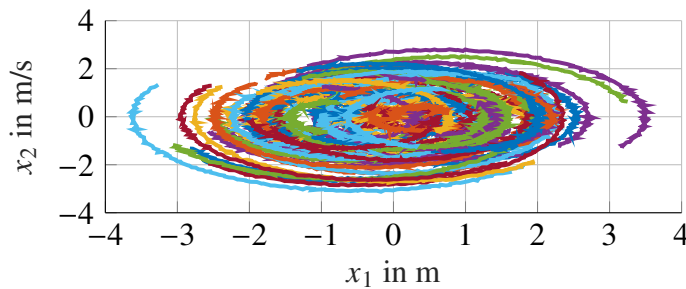
bzw. in Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, u = F, y = x_1 \quad (3-11)$$

betrachtet. Für die Erzeugung der Trainingsdaten werden 100 simulierte Trajektorien mit der Dauer von jeweils 3 s (Schrittweite $\Delta t = 0,01$ s) und zufälligen Anfangsauslenkungen \mathbf{x}_0 sowie zufälligen Systemeingängen u verwendet, vgl. Bild 3-2(b). Die Daten sollen realistische Messdaten eines Prüfstands darstellen, daher wurde ein additives weißes Gaußsches Rauschen mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0,02$ modelliert.



(a) Linearer Schwinger.



(b) Simulativ erzeugte Trainingsdaten.

Bild 3-2: Ein linearer Einmassenschwinger veranschaulicht das DMD-Verfahren.

Der DMD-Algorithmus aus Gleichung (3-8) liefert

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} 0,9999 & 0,01 \\ -0,01 & 0,9989 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_t = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,01 \end{bmatrix}. \quad (3-12)$$

Aufgrund der linearen Dynamik lässt sich ein zeitkontinuierliches Modell

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,0085 & 0,9993 \\ -1,0003 & -0,1079 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,0088 \\ 1,0047 \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

formulieren⁴, wobei die Matrix \mathbf{A} die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -0,0582 \pm 0,9986i \quad (3-14)$$

besitzt, die nur geringfügig von den Eigenwerten des Originalsystems (3-11)

$$\lambda_{1,2} = -0,05 \pm 0,995i \quad (3-15)$$

abweichen. Sowohl das Originalsystem (3-11) als auch das approximierte DMD-Modell sind nach den Kalmanschen Kriterien steuerbar und beobachtbar, weil die Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrizen [FKL⁺16] jeweils vollen Rang aufweisen

$$\text{rang } \mathcal{C} = \text{rang} [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n, \quad (3-16a)$$

$$\text{rang } \mathcal{O} = \text{rang} [\mathbf{C}, \mathbf{CA}, \dots, \mathbf{CA}^{n-1}]^T = n. \quad (3-16b)$$

Demnach lässt sich die lineare Dynamik des betrachteten linearen Systems unter Erhaltung systemtheoretischer Eigenschaften durch das DMD-Verfahren abbilden.

Das DMD-Verfahren lässt sich ohne jegliches Vorwissen über die zu modellierende Dynamik anwenden. Diese Tatsache wird in der Literatur oft als Vorteil angeführt und aufgrund dieser Einfachheit wurde das DMD-Verfahren vielfach praktisch angewendet [Sch11; BJOK15; BSV⁺15; EBK19; PK19a; AF20; AKFN20; BDN20; YZQ⁺20; VMMH22; WN21; SYC⁺22]. Im Kontext hybrider Modelle erweist sich das rein datengetriebene Vorgehen jedoch als Nachteil, weil sich für die betrachteten mechatronischen Systeme meistens physikalisch motivierte Modelle herleiten lassen und dieses Vorwissen nutzbar gemacht werden soll. Außerdem adressiert das DMD-Verfahren vorwiegend fluiddynamische Fragestellungen, bei denen eine Modellordnungsreduktion, d. h. eine Transformation von einem hochdimensionalen in einen niedrigdimensionalen Raum mit dem Ziel eines linearen Dynamikmodells, angestrebt wird. Im Gegensatz dazu erfordern komplexe mechatronische Fragestellungen aufgrund möglicher auftretender Nichtlinearitäten in der Regel eine höhere Modellkomplexität, d. h. die Transformation von einem typischerweise niedrigdimensionalen Raum in einen höherdimensionalen Raum mit dem Ziel eines linearen Dynamikmodells.

3.2 Extended Dynamic Mode Decomposition (EDMD)

Das Verfahren *EDMD* (*Extended Dynamic Mode Decomposition*) verallgemeinert das DMD-Verfahren, weil die Observablen $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ zusätzlich zu den Zuständen nichtlineare Funktionen der Zustände enthalten. Dadurch entspricht dieses Verfahren einer endlich-dimensionalen Approximation des Koopman-Operators. Im Folgenden werden der Algorithmus und die Prädiktionsvorschrift hergeleitet. Anschließend wird thematisiert, wie die Observablen zu konstruieren sind, wie sich die Koopman-Eigenzerlegung berechnet und wie sich das Verfahren um einen Systemeingang erweitern lässt.

⁴Siehe Formeln zur Umrechnung im Anhang A2.

Algorithmus

Für das EDMD-Verfahren werden N Observablen

$$\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N, \Psi(\mathbf{x}) = [\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots, \psi_N(\mathbf{x})]^\top \quad (3-17)$$

definiert⁵, wobei in den meisten Fällen $N > n$ gilt. Um möglichst vielfältige Dynamiken zu modellieren, bietet es sich im Allgemeinen an, Polynome, radiale Basisfunktionen oder trigonometrische Funktionen für $\Psi(\mathbf{x})$ zu verwenden [WKR15].

Eine beliebige skalare Funktion $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich als Linearkombination

$$\theta = \sum_{k=1}^N a_k \psi_k = \mathbf{a} \Psi, \quad a_k \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{1 \times N} \quad (3-18)$$

der Funktionen $\Psi(\mathbf{x})$ beschreiben. Für die zeitliche Evolution von θ gilt mit dem Koopman-Operator

$$\mathcal{K}_t \theta = \mathcal{K}_t(\mathbf{a} \Psi) = \mathbf{a} \Psi \circ \mathbf{F}_t. \quad (3-19)$$

Die endlichdimensionale Approximation von \mathcal{K}_t durch $\mathbf{K}_t \in \mathbb{R}^{N \times N}$

$$\mathbf{a} \Psi \circ \mathbf{F}_t = \mathbf{a} \mathbf{K}_t \Psi + r \quad \Rightarrow \quad r = \mathbf{a} (\Psi \circ \mathbf{F}_t - \mathbf{K}_t \Psi) \quad (3-20)$$

resultiert in einem Fehler r , der sich durch Anpassung von \mathbf{K}_t über Messdaten des betrachteten Systems minimieren lässt. Über alle Messpunkte wird die Kostenfunktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M-1} \|r(\mathbf{x}_m)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M-1} \|\mathbf{a} ((\Psi \circ \mathbf{F}_t)(\mathbf{x}_m) - \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_m))\|^2 \quad (3-21)$$

definiert. Mit $(\Psi \circ \mathbf{F}_t)(\mathbf{x}_m) = \Psi(\mathbf{x}_{m+1})$ folgt

$$L = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M-1} \|\mathbf{a} (\Psi(\mathbf{x}_{m+1}) - \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_m))\|^2. \quad (3-22)$$

Die Minimierung von Gleichung (3-22) entspricht einem Kleinste-Quadrate-Problem [WKR15] mit dem globalen Optimum [MCTM19] in

$$\mathbf{K}_t = \mathcal{G}^+ \mathcal{A} \quad (3-23)$$

mit

$$\mathcal{G} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \Psi(\mathbf{x}_m) \Psi^\top(\mathbf{x}_m) \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (3-24a)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \Psi(\mathbf{x}_m) \Psi^\top(\mathbf{x}_{m+1}) \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (3-24b)$$

⁵Der Beitrag [WKR15] formuliert $\Psi(\mathbf{x})$ in transponierter Darstellung, d. h. als Zeilenvektor.

Eine alternative Berechnungsvorschrift für \mathbf{K}_t lässt sich analog zum DMD-Algorithmus mittels der erweiterten Snapshotmatrizen formulieren [WHD⁺16]. Dafür werden die Observablen für \mathbf{X} und \mathbf{X}' ausgewertet

$$\Psi(\mathbf{X}) = [\Psi(\mathbf{x}_1), \Psi(\mathbf{x}_2), \dots, \Psi(\mathbf{x}_{M-1})] \in \mathbb{R}^{N \times (M-1)}, \quad (3-25a)$$

$$\Psi(\mathbf{X}') = [\Psi(\mathbf{x}_2), \Psi(\mathbf{x}_3), \dots, \Psi(\mathbf{x}_M)] \in \mathbb{R}^{N \times (M-1)}, \quad (3-25b)$$

sodass sich \mathbf{K}_t über den Zusammenhang

$$\Psi(\mathbf{X}') \approx \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{X}) \quad (3-26)$$

mittels der Pseudoinversen berechnen lässt

$$\mathbf{K}_t = \Psi(\mathbf{X}') \Psi^+(\mathbf{X}). \quad (3-27)$$

Beide Berechnungsalgorithmen sind äquivalent zueinander, eine Herleitung dazu findet sich in [MCTM19].

Die resultierende Systembeschreibung des EDMD-Modells, d. h. die zeitliche Evolution der Observablen Ψ für einen Prädiktionsschritt ist durch

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_k), \quad (3-28)$$

gegeben. Die Prädiktion der Originalzustände erfordert eine Rücktransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \Psi(\mathbf{x}), \quad (3-29)$$

vgl. Bild 3-3. Falls die Observablen den Zustandsvektor an erster Stelle beinhalten, d. h. $\Psi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}, \psi_{n+1}(\mathbf{x}), \dots, \psi_N(\mathbf{x})]^\top$, reduziert sich die Lösung auf

$$\mathbf{P} = [\mathbf{I}_n, \mathbf{0}_{n \times (N-n)}] \in \mathbb{R}^{n \times N}, \quad (3-30)$$

wobei \mathbf{I}_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix und $\mathbf{0}_{n \times (N-n)}$ die $n \times (N-n)$ -Nullmatrix sind. Andernfalls wird sie numerisch über

$$\mathbf{P} = \mathbf{X} \Psi(\mathbf{X}') \quad (3-31)$$

approximiert [KM18a]. Das Vorgehen bei der Prädiktion mittels des EDMD-Verfahrens ist im Bild 3-3 dargestellt.

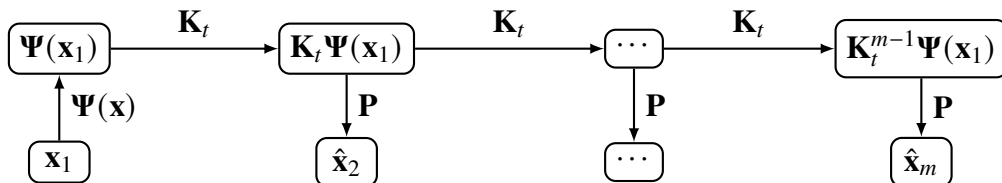


Bild 3-3: Resultierende Systembeschreibung beim EDMD-Verfahren. Die Observablen $\Psi(\mathbf{x})$ weisen eine höhere Dimension als der Zustand \mathbf{x} auf, vgl. Gleichung (3-17), daher wird $\Psi(\mathbf{x})$ auch als Lifting-Operator bezeichnet.

EDMD-Prädiktion mit Korrektur

Für die meisten nichtlinearen dynamischen Systeme lassen sich nicht ohne Weiteres Observablen finden, die einen Koopman-invarianten Unterraum aufspannen. Das bedeutet, dass sich nicht alle Zustände $\Psi(\mathbf{x}_{k+1})$ durch Linearkombination aus $\Psi(\mathbf{x}_k)$ exakt präzisieren lassen. Dadurch resultiert ein Fehler, der mit jedem Prädiktionsschritt weiter anwächst [MAM23]. Dieser Fehler kann signifikant reduziert werden, indem die Observablen $\Psi(\mathbf{x})$ in jedem Prädiktionsschritt nach Extraktion des Zustandsvektors \mathbf{x} mittels Gleichung (3-29) neu ausgewertet werden. Dadurch müssen nicht mehr alle Observablen durch die Anwendung von \mathbf{K}_t präzisiert werden, sodass die Forderung eines Koopman-invarianten Unterraums entfällt. Die resultierende Prädiktionsvorschrift

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{P}\hat{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{P}\mathbf{K}_t\Psi(\mathbf{x}_k) \quad (3-32)$$

wurde erstmals im eigenen Beitrag [JTT22a] als *EDMD-Prädiktion mit Korrektur* vorgestellt⁶ und ist im Bild 3-4 als alternierender Prozess zwischen dem Originalzustand und den höherdimensionalen Observablen dargestellt.

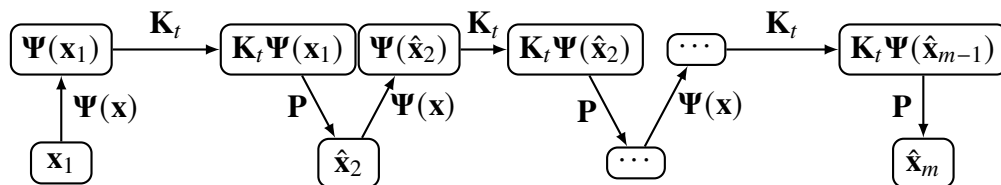


Bild 3-4: Prädiktionsvorschrift bei der EDMD-Prädiktion mit Korrektur. Die Prädiktion von Ψ mittels \mathbf{K}_t erfolgt im höherdimensionalen Raum, jedoch wird der Zustand \mathbf{x} in jedem Prädiktionsschritt mittels \mathbf{P} extrahiert.

Die EDMD-Prädiktion mit Korrektur ist keine tatsächlich lineare Systembeschreibung, weil in jedem Berechnungsschritt zusätzlich zur Matrix-Vektor-Multiplikation die Auswertung einer nichtlinearen Funktion erforderlich ist. Dadurch erhöht sich der Rechenaufwand bei der Prädiktion im Vergleich zum reinen EDMD-Verfahren.

Wahl der Observablen

Die Wahl der Observablen hat einen entscheidenden Einfluss auf die Genauigkeit der approximierten Systembeschreibung und sollte in Abhängigkeit der zugrunde liegenden Dynamik und den verwendeten Daten erfolgen. Dabei gibt es unterschiedliche Ansätze. [WKR15; BRV19; SK22] empfehlen beispielsweise die Verwendung von Hermiteischen Polynomen, Monomen oder radialen Basisfunktionen. [WRK15] nutzen den Kernel-Trick⁷ zur impliziten Berechnung der Observablen für den Fall, dass die Anzahl der Messpunkte deutlich geringer als die Anzahl der angestrebten Observablen ist. Aufgrund verfügbarer Messeinrichtungen lässt sich dieses Szenario für Zeitreihen von regelungstechnischen Prüfständen ausschließen. Ein weit verbreiteter Ansatz bestimmt

⁶Ein ähnlicher Ansatz wurde in [PBK18] formalisiert, indem zwischen dem *Domain*- und *Output*-Raum unterschieden wird, wobei der Domain-Raum hier $\Psi(\mathbf{x})$ und der Output-Raum hier \mathbf{x} entspricht.

⁷Der Kernel-Trick ist eine etablierte Technik aus dem Bereich der Mustererkennung. Die betrachteten Daten werden über eine Kernel-Funktion in einen höherdimensionalen Raum transformiert [Bis06].

die Observablen implizit mittels eines (tiefen) neuronalen Netzes. Neben weiteren Veröffentlichungen seien hier [LDBK17; TKY17; LKB18; ZCKW18; OR19; BK20; XZX⁺20] genannt.

In dieser Dissertation wird im Kontext regelungstechnischer Systeme ein gewisses Maß an physikalischem Vorwissen über die Systemdynamik angenommen. Daher ist es wünschenswert, dieses Vorwissen möglichst zielgerichtet beim Design der Observablen zu integrieren⁸. Eine geeignete Strategie für die Wahl der Observablen ist motiviert durch die Taylorreihenentwicklung und stützt sich auf die zeitlichen Ableitungen der in der betrachteten Dynamik vorkommenden Funktionen [NSKZ21]. Die Evolution einer nichtlinearen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die n -mal differenzierbar ist, lässt sich mittels einer Taylorreihe der n -ten Ordnung approximieren [MCTM19]

$$\tilde{f}(t_{k+1}) = f(t_k) + f'(t_k)(t_{k+1} - t_k) + \frac{f''(t_k)}{2!}(t_{k+1} - t_k)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t_k)}{n!}(t_{k+1} - t_k)^n. \quad (3-33)$$

Für $t_{k+1} - t_k = \Delta t$ und $f_k^{(i)} := f^{(i)}(t_k), \forall i \in \mathbb{Z} \cap [1, n]$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\tilde{f}_{k+1} = f_k + f'_k \Delta t + f''_k \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots + f_k^{(n)} \frac{\Delta t^n}{n!}. \quad (3-34)$$

In Matrixdarstellung lässt sich die Analogie zum Koopman-Operator erkennen, sofern die Observablen $\Psi(\mathbf{x})$ die zeitlichen Ableitungen der Zustände enthalten:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{f}_{k+1} \\ \tilde{f}'_{k+1} \\ \tilde{f}''_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{k+1}^{(n)} \end{bmatrix}}_{\Psi(\mathbf{x}_{k+1})} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t}{2} & \dots & \frac{\Delta t^n}{n!} \\ 0 & 1 & \Delta t & \dots & \frac{\Delta t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{\Delta t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{K}_t} \underbrace{\begin{bmatrix} f_k \\ f'_k \\ f''_k \\ \vdots \\ f_k^{(n)} \end{bmatrix}}_{\Psi(\mathbf{x}_k)}. \quad (3-35)$$

Für praktische Anwendungen können nur endlich viele Observablen bzw. zeitliche Ableitungen der Zustände verwendet werden, sodass die Taylorreihe für ein festes n abgeschnitten wird. Dieses Abschneiden führt bei der analytischen Darstellung von Gleichung (3-35) dazu, dass die höchsten zeitlichen Ableitungen nicht korrekt prädiziert werden können. Die Genauigkeit der Approximation verbessert sich hingegen, wenn \mathcal{K}_t datengetrieben berechnet wird [MCTM21]. Der Zusammenhang zur Taylorreihenapproximation bietet den Vorteil, dass eine Fehlerabschätzung mittels der Berechnung des Lagrange-Restgliedes möglich ist. In [MCTM21] werden die resultierenden Fehlerschranken beschrieben. Für den Fall, dass die Dynamik mehrere Nichtlinearitäten enthält, ist es aufgrund möglicher Parameterunsicherheiten empfehlenswert, jeden Term einzeln zu berücksichtigen [CHM⁺20].

⁸[Mez23] beschreibt dieses Konzept als *parenting in learning*, d. h. dass vorhandenes Expert*innenwissen gezielt dem Lernvorgang vermittelt wird.

Koopman-Eigenzerlegung des EDMD-Verfahrens

Es kann gezeigt werden, dass $\mathbf{K}_t \rightarrow \mathcal{K}_t$ für $M \rightarrow \infty$ (Anzahl der Messungen) [KKS16] und $N \rightarrow \infty$ (Anzahl der Observablen) [KM18b]. Damit ist \mathbf{K}_t eine endlichdimensionale Approximation von \mathcal{K}_t , sodass sich daraus eine numerische Approximation der Koopman-Eigenzerlegung, vgl. Abschnitt 2.2, ergibt. Unter der Voraussetzung, dass sich der Zustandsvektor \mathbf{x} als Linearkombination der Observablen $\mathbf{x} = \mathbf{P}\Psi(\mathbf{x})$ beschreiben lässt, gilt:

- Die Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathbb{R}$ von \mathbf{K}_t charakterisieren die zeitliche Dynamik.
- Aus der Matrix $\mathbf{W}^\top = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N]^\top \in \mathbb{R}^{N \times N}$ der Linkseigenvektoren von \mathbf{K}_t mit $\mathbf{w}_i^\top \mathbf{K}_t = \mathbf{w}_i^\top \mu_i$ ergeben sich die EDMD-approximierten Koopman-Eigenfunktionen

$$\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]^\top = \mathbf{W}^\top \Psi \quad \text{mit} \quad \Phi \in \mathbb{R}^N. \quad (3-36)$$

- Aus der Matrix $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ der Rechtseigenvektoren von \mathbf{K}_t mit $\mathbf{K}_t \xi_i = \mu_i \xi_i$ ergeben sich die EDMD-approximierten Koopman-Eigenmoden

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N] = \mathbf{P}\Xi \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \mathbf{V}\Phi \quad \text{und} \quad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times N}. \quad (3-37)$$

Die beschriebenen Zusammenhänge sind im Bild 3-5 skizziert.

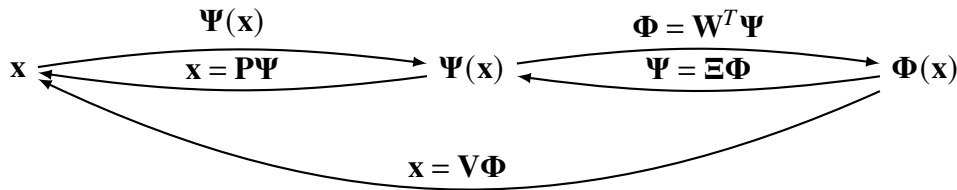


Bild 3-5: Zusammenhang zwischen \mathbf{x} , Ψ und Φ bei der EDMD-approximierten Koopman-Eigenzerlegung.

Mit dem EDMD-Verfahren lassen sich die Koopman-Eigenwerte, die Koopman-Eigenfunktionen und die Koopman-Moden approximieren. Im Gegensatz dazu werden durch das DMD-Verfahren nur die Koopman-Eigenwerte und die Koopman-Moden approximiert, nicht jedoch die Koopman-Eigenfunktionen [WKR15].

Erweiterung um einen Systemeingang

Beim EDMD-Verfahren gibt es unterschiedliche Ansätze für die Erweiterung des Modells um einen Steuereingang. Im Allgemeinen wird der Koopman-Zustandsvektor um die Eingänge bzw. nichtlineare Funktionen der Eingänge erweitert [MCTM19; MCTM21; PBK18]. Eine allgemeingültige Beschreibung ist durch

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \\ \Psi_{\mathbf{xu}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \Psi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{\mathbf{x}} + N_{\mathbf{xu}} + N_{\mathbf{u}}} \quad (3-38)$$

mit $\Psi_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$, $\Psi_{\mathbf{xu}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{N_{xu}}$, $\Psi_{\mathbf{u}} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$ gegeben. Nach der Berechnung von Gleichung (3-27) ergibt sich die Prädiktionsvorschrift

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \hat{\Psi}_{\mathbf{xu}}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) \\ \hat{\Psi}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_{k+1}) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_t \begin{bmatrix} \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_k) \\ \Psi_{\mathbf{xu}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \\ \Psi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_k) \end{bmatrix}. \quad (3-39)$$

Die Vorschrift für $\hat{\Psi}_{\mathbf{xu}}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})$ prädiziert den Systemeingang \mathbf{u}_k mit und erschwert es daher diesen frei vorzugeben. Dadurch ist dieses Prädiktionsverfahren in der Praxis ungeeignet. Für den Fall eingangsaffiner Systeme (3-2) lässt sich ein ähnlicher Ansatz verfolgen wie beim DMDc-Verfahren, der einen Spezialfall von Gleichung (3-38) darstellt. Dafür wird der Zusammenhang

$$\Psi(\mathbf{X}') \approx \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{X}) + \mathbf{B}_t \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t, \mathbf{B}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}) \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

betrachtet, sodass sich die Kleinste-Quadrate-Lösung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t, \mathbf{B}_t \end{bmatrix} = \Psi(\mathbf{X}') \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}) \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}^+ \quad (3-41)$$

ergibt. Anschließend lässt sich das approximierte System

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k \quad (3-42)$$

prädizieren. Dieses Verfahren wird auch als EDMDC (Extended Dynamic Mode Decomposition with Control) bezeichnet und lässt sich wie das EDMD-Verfahren um einen Korrekturansatz erweitern, vgl. Gleichung (3-32),

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{P} \hat{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{P} (\mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k). \quad (3-43)$$

Eine weitere Strategie zur Autonomisierung eines aktuierten Systems wird in [Pei18; HPW⁺18; PK19b; PK20; POR20; PB23] beschrieben. Die möglichen Systemeingänge $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ werden in endlich viele Werte $\{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^m\} \in \mathcal{U}$ diskretisiert. Dadurch wird das aktuierte System durch endlich viele autonome Systeme mit jeweils konstantem Eingang ersetzt. Um nicht eingangsaffine Systeme zu lernen, kann der Eingang durch ein neuronales Netz kodiert werden [BK20; Bon22].

3.3 Sparse Identification of Nonlinear Dynamics (SINDY)

Das SINDY-Verfahren identifiziert die dominanten nichtlinearen Terme eines zugrunde liegenden Systems datengetrieben aus einer Bibliothek von Kandidatenfunktionen [BPK16a]. Dafür wird zunächst eine Funktionsbibliothek

$$\Theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N, \Theta(\mathbf{x}) = \left[\theta_1(\mathbf{x}), \theta_2(\mathbf{x}), \dots, \theta_N(\mathbf{x}) \right]^T \quad (3-44)$$

festgelegt. Diese Bibliothek soll möglichst viele unterschiedliche Kandidatenfunktionen enthalten, z. B. Polynome und trigonometrische Terme. Falls physikalisches Vorwissen

über die Nichtlinearitäten verfügbar ist, kann es an dieser Stelle integriert werden. Über die Messdaten

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m] \in \mathbb{R}^{n \times M}, \quad (3-45a)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \dots, \dot{\mathbf{x}}_M] \in \mathbb{R}^{n \times M} \quad (3-45b)$$

wird mittels der Gleichung

$$\dot{\mathbf{X}} = \Xi \Theta(\mathbf{X}) \quad (3-46)$$

die Koeffizientenmatrix $\Xi = [\xi_1^\top, \xi_2^\top, \dots, \xi_n^\top]^\top \in \mathbb{R}^{n \times N}$ bestimmt. Die gelernte Dynamik wird damit durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \Xi \Theta(\mathbf{x}) \quad (3-47)$$

bzw. zeilenweise durch

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}) = \xi_i^\top \Theta(\mathbf{x}) \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \quad (3-48)$$

beschrieben. Beim SINDY-Verfahren wird angenommen, dass sich die Dynamik der meisten physikalischen Systeme mittels einer geringen Anzahl vorkommender nichtlinearer Terme im Vergleich zur Menge der möglichen nichtlinearen Terme beschreiben lässt. Daher wird die Regression um eine L_1 -Regularisierung ergänzt, d. h. die Koeffizientenvektoren werden mittels

$$\xi_i^\top = \arg \min_{\xi_i^{\top'}} \left\| \left[\dot{x}_{i,1}, \dot{x}_{i,2}, \dots, \dot{x}_{i,M} \right] - \xi_i^{\top'} \Theta \left(\left[x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,M} \right] \right) \right\| + \lambda \left\| \xi_i^{\top'} \right\|_1 \quad (3-49)$$

bestimmt, sodass sie dünnbesetzt sind. Diese Eigenschaft wird durch den LASSO-Algorithmus⁹ erreicht.

Das Verfahren SINDYc (Sparse Identification of Nonlinear Dynamics with Control) [BPK16b] stellt die Erweiterung um einen Steuereingang dar. Mit der vergrößerten Funktionsbibliothek $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, die zusätzliche Kandidatenfunktionen enthält, die neben \mathbf{x} auch von \mathbf{u} abhängig sind, und den Messdaten

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m] \in \mathbb{R}^{p \times M} \quad (3-50)$$

wird die Koeffizientenmatrix Ξ durch die Gleichung

$$\dot{\mathbf{X}} = \Xi \Theta(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \quad (3-51)$$

bestimmt.

Das SINDY-Verfahren liefert schlanke und interpretierbare Modelle, die aufgrund der umfangreichen Funktionsbibliothek in der Lage sind, auftretende Nichtlinearitäten hinreichend genau abzubilden und dabei interpretierbar zu bleiben. Durch die Regularisierung wird das Risiko der Überanpassung gleichzeitig effektiv verringert. Aufgrund die-

⁹LASSO steht für Least Absolute Shrinkage and Selection Operator [HTF09; Tib11]. In [BPK16a] wird ein vereinfachter Algorithmus zur Lösung von Gleichung (3-49) beschrieben.

ser Stärken ist das SINDY-Verfahren auf eine breite Resonanz gestoßen und wurde bereits in zahlreichen Anwendungen genutzt, vgl. [MBPK16; MKBP17; LV17; KKB18b; QAKB18; MAB⁺19; KKB20; SCQ⁺20; STFK20; FKK⁺21]. Darüber hinaus wurde dieser Ansatz vielfach weiterentwickelt und diente als Inspirationsquelle für weitere Verfahren. Ein Beispiel hierfür ist der hybride Ansatz aus [KKS⁺19], der das SINDY-Verfahren in Verbindung mit vorhandenem Modellwissen nutzt. Dieser Ansatz ermöglicht die datengetriebene Identifikation eines Modells, das strukturelle Abweichungen zwischen dem vorliegenden physikalischen Modell und den Messdaten in Form eines interpretierbaren Diskrepanzmodells abbildet. Dieses Verfahren wurde in der von der Autorin betreuten studentischen Arbeit [Gal20] experimentell zur Identifikation der Reibung am Doppelpendel untersucht. Der Beitrag [CLKB19] schlägt ergänzend vor, die Funktionsbibliothek $\Theta(\mathbf{x})$ datengetrieben mithilfe eines neuronalen Netzes zu bestimmen, anstatt sie explizit festzulegen.

Im Rahmen dieser Dissertation wird das reine SINDY-Verfahren nicht weiter untersucht, weil es eine nichtlineare Systembeschreibung erzeugt, die zunächst keine Vorteile im Hinblick auf ihre regelungstechnische Verwertbarkeit bietet. Außerdem wird davon ausgegangen, dass die dominanten Terme eines nichtlinearen dynamischen Systems bereits analytisch bekannt sind, wodurch die Suche in einer großen Funktionsbibliothek entfällt. Gleichwohl ist die Idee des SINDY-Verfahrens relevant für Forschungsarbeiten im Bereich von Koopman-Eigenfunktionen. In [KKB21] wird das SINDY-Verfahren so adaptiert, dass damit Koopman-Eigenfunktionen zum Koopman-Eigenwert $\lambda = 0$, vgl. Abschnitt 2.2, datengetrieben bestimmt werden können. Diese Funktionen entsprechen der im System gespeicherten Energie, vgl. [KKB18a].

3.4 Analyse des EDMD-Verfahrens anhand nichtlinearer Beispielsysteme

Aufgrund der linearen Systembeschreibung sowie der Möglichkeit, vorhandenes physikalisches Vorwissen auszunutzen, scheint das EDMD-Verfahren eine vielversprechende Strategie für die Entwicklung regelungstechnisch verwertbarer Streckenmodelle zu sein. Daher wird im Folgenden das EDMD-Verfahren anhand ausgewählter nichtlinearer Beispielsysteme umfangreich hinsichtlich der erreichbaren Prädiktionsgüte und systemtheoretischer Eigenschaften sowie des Rechenaufwands analysiert. Hierfür wird das numerisch simulierte nichtlineare Verhalten des jeweiligen Originalsystems mit dem approximierten EDMD-Modell verglichen. Als akademische Beispielsysteme werden das im Kapitel 1 eingeführte Einfachpendel und der Duffing-Oszillator betrachtet, die jeweils mehrere isolierte Ruhelagen aufweisen. Als experimentelles Beispielsystem wird zudem der Schlagmechanismus des institutseigenen Golfroboters betrachtet, weil dessen Dynamik nichtlineare Reibungseffekte enthält.

Pendel

Die Dynamik des im Gelenk aktuierten nichtlinearen Pendels, vgl. Bild 1-6, wird durch

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{d}{ml^2} x_2 + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix}, \quad (3-52a)$$

$$y = x_1 \quad (3-52b)$$

mit $m = 1 \text{ kg}$, $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $l = 0,5 \text{ m}$, $d = 0,1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$ beschrieben. Das Pendel weist ein kontinuierliches Spektrum auf, was die Approximation mittels eines EDMD-Modells erschwert. Im Gegensatz zu der von der Autorin betreuten studentischen Arbeit [Göt19], die zur Abbildung der unterschiedlichen Eigenfrequenzen eine Schar winkelabhängiger EDMD-Modelle präsentiert, verfolgt die vorliegende Dissertation das Ziel, die Pendeldynamik mittels eines einzigen Modells zu beschreiben.

Duffing-Oszillator

Der Duffing-Oszillator [AFHF17; Duf18], benannt nach Georg Duffing, beschreibt eines der einfachsten Systeme, bei denen chaotisches Verhalten beobachtet werden kann. Er repräsentiert die Dynamik eines gedämpften und periodisch angeregten nichtlinearen Schwingers mit einem Freiheitsgrad. Die Dynamik lässt sich am Beispiel eines fremderregten geknickten Balkens herleiten, indem eine nichtlineare partielle Differentialgleichung unter Berücksichtigung der ersten Grundmode approximiert wird. Für eine bestimmte Wahl der Parameter ist der Duffing-Oszillator in der Lage chaotisches Verhalten sowie Sprungphänomene zu zeigen [JS07]. Die Rückstellkraft wird durch ein Polynom dritter Ordnung approximiert, sodass sich die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \sin(\omega t) \quad (3-53)$$

ergibt [BBP⁺17]. Im Rahmen der folgenden Untersuchungen wird die Parametrierung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - x_1^3 - dx_2 + u \end{bmatrix}, \quad (3-54a)$$

$$y = x_1 \quad (3-54b)$$

mit $d = 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ betrachtet. Das Bild 3-6 zeigt Beispieltrajektorien der homogenen Dynamik im Phasenporträt. Der Duffing-Oszillator hat zwei stabile Ruhelagen in $\mathbf{x}_{R_{1,2}} = [\sqrt{1}, 0]^T = [\pm 1, 0]^T$ und eine instabile Ruhelage in $\mathbf{x}_{R_3} = [0, 0]^T$. Trajektorien, die in die linke Ruhelage $\mathbf{x}_{R_1} = [-1, 0]^T$ streben, sind im Bild 3-6 blau gehalten und Trajektorien, die in die rechte Ruhelage $\mathbf{x}_{R_2} = [1, 0]^T$ streben, sind grün eingefärbt.

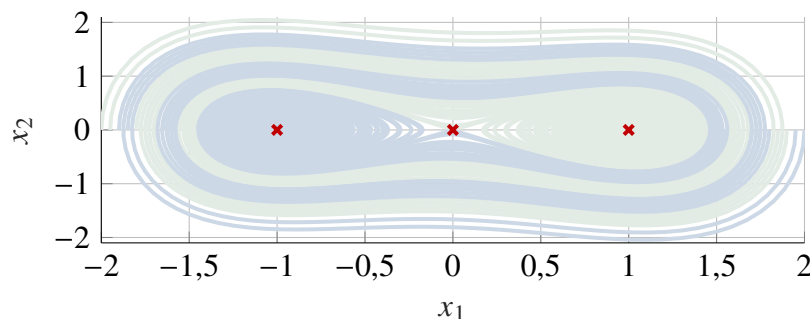


Bild 3-6: Phasenporträt des Duffing-Oszillators, wobei die drei Ruhelagen durch rote Kreuze markiert sind. Trajektorien, die in die linke Ruhelage streben, sind in blau gehalten, während solche, die in die rechte Ruhelage streben, grün eingefärbt sind.

Schlagmechanismus des institutseigenen Golfroboters

Im Labor der Fachgruppe für Regelungstechnik und Mechatronik wird im Rahmen eines internen Projekts ein selbstlernender Golfroboter entwickelt, vgl. Bild 3-7(a), der den Namen *Golfi* trägt, vgl. eigene Beiträge [JFTT22a; JFTT22b]. Das Hauptziel besteht darin, dass der Roboter autonom putten kann. Dies bedeutet, dass der Golfball vom Roboter auf einer ihm unbekanntem Spielfläche von einer beliebigen Startposition aus mit einem einzigen Schlag in das Loch befördert werden soll. Dabei sollen möglichst wenige Trainingsschläge im Vorhinein durchgeführt werden. Die Komplexität dieser Aufgabe unterteilt sich in unterschiedlich schwierige Teilaufgaben, wie im Bild 3-7(b) dargestellt ist. Die Positionierung des Golfroboters kann durch eine vergleichsweise einfache Steuerung basierend auf kinematischen Überlegungen realisiert werden. Im Kontrast dazu handelt es sich bei der Erfassung der Golfspielsituation und der Berechnung eines optimalen Schlaggeschwindigkeitsvektors zum erfolgreichen Putten um anspruchsvollere Aufgaben, wofür u. a. neuronale Netze eingesetzt werden. Der Golfroboter-Prüfstand dient dazu, anschaulich zu zeigen, wie die Kombination von modellbasierten und datenbasierten Methoden gelingen kann und wo die Stärken und Schwächen dieser Ansätze liegen.

In dieser Dissertation wird exemplarisch der Schlagmechanismus des Golfroboters untersucht. Das Ziel ist, dass der Schläger den Ball mit einer präzise geregelten Geschwindigkeit schlägt. Dafür ist der Golfschläger an einer Abtriebswelle montiert, die über einen Keilriemen von einer drehmomentgeregelten Antriebswelle mit Elektromotor¹⁰ aktuiert wird, vgl. Bild 3-8(a). Um die Sicherheit zu gewährleisten, darf der Schläger keine Überschläge ausführen. Unter der Annahme, dass beide Getriebewellen zu einem starren Körper zusammengefasst sind¹¹, ergibt sich durch physikalische Überlegungen, vgl. Bild 3-8 und die von der Autorin betreute studentische Arbeit [Fit20], ein vereinfachtes dynamisches Zustandsraummodell des Schlagmechanismus

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-mga \sin x_1 - M_d(\mathbf{x}) + 4u}{J} \end{bmatrix}, M_d(\mathbf{x}) = dx_2 + r\mu \operatorname{sgn} x_2 |mx_2^2 a + mg \cos x_1|, \quad (3-55a)$$

$$y = x_1. \quad (3-55b)$$

Der Zustandsvektor $\mathbf{x} = [\varphi, \dot{\varphi}]^\top$ enthält den Winkel φ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der (oberen) Abtriebswelle. Die untere stabile Ruhelage des Schlägers entspricht der Nulllage $\varphi = 0$. Das nichtlineare Dämpfungsmoment $M_d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bildet die statische und die dynamische Reibung der Drehgelenke ab, vgl. Bild 3-8(c). Die physikalischen Parameter finden sich in der Tabelle 3-1 und im Bild 3-8(b).

3.4.1 Analyse der Prädiktionsgenauigkeit

Die Prädiktionsgenauigkeit des approximierten EDMD-Modells hängt stark von der sorgfältigen Auswahl der Observablen und den gewählten Trainingsdaten ab, wie im eigenen Beitrag [JTT22a] erläutert ist. Gemäß Abschnitt 3.2 werden die Observablen so gewählt, dass sie den Zustandsvektor sowie mehrmalige zeitliche Ableitungen der nichtlinearen

¹⁰Beckhoff AM8042 [Bec23].

¹¹Die Getriebeübersetzung ist in der Differentialgleichung (3-55) durch den Vorfaktor 4 beim Steuerungseingang berücksichtigt.

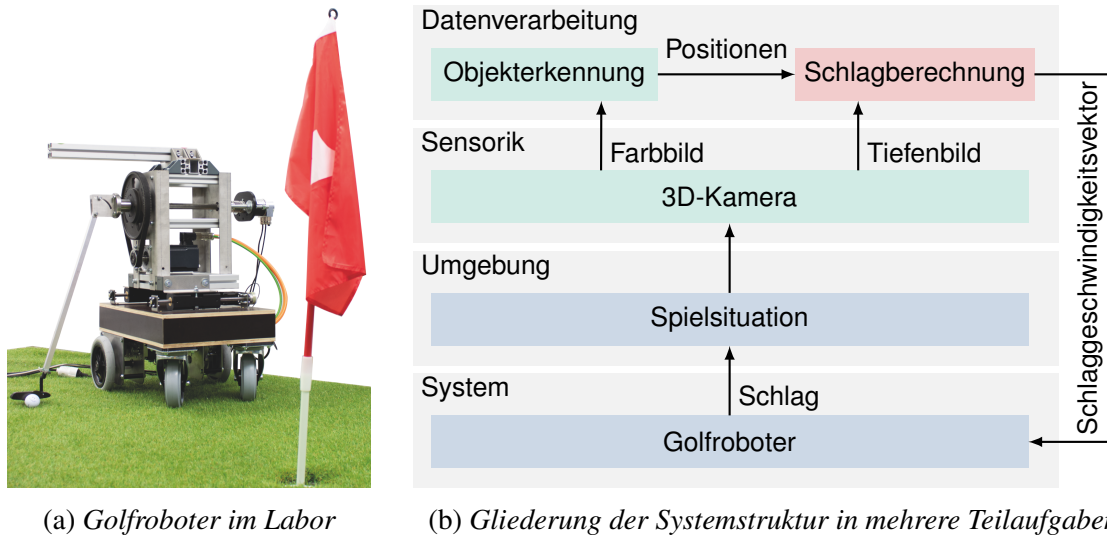


Bild 3-7: Der Golfroboter dient als Demonstrator für die Kombination aus modellbasierten und datengetriebenen Methoden.

Tabelle 3-1: Physikalische Parameter des Schlagmechanismus des Golfroboters.

Symbol	Physikalischer Parameter	Wert
m	Masse des Golfschlägers	0,5241 kg
J	Rotationsträgheit des Golfschlägers	0,1445 kg/m ²
g	Gravitationsbeschleunigung	9,81 m/s ²
a	Abstand von der Rotationsachse der Abtriebswelle zum Massenschwerpunkt des Golfschlägers	0,4702 m
d	Dynamischer Reibungskoeffizient	0,0132 kgm ² /s
r	Radius von der Rotationsachse der Abtriebswelle zum Reibungspunkt	0,0245 m
μ	Statischer Reibungskoeffizient	1,5136

Terme des jeweiligen Originalsystems enthalten. Für das Pendel ergeben sich aufgrund des Terms $\sin x_1$ unter Berücksichtigung der Kettenregel die Observablen

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\text{Pendel}}(\mathbf{x}) = & \left[x_1, x_2, \sin x_1, x_2 \cos x_1, x_2^2 \sin x_1, \sin x_1 \cos x_1, x_2 \cos^2 x_1, \dots \right. \\
 & x_2 \sin^2 x_1, x_2^3 \cos x_1, \sin^3 x_1, \sin x_1 \cos^2 x_1, x_2^4 \sin x_1, \dots \\
 & x_2^2 \sin x_1 \cos x_1, x_2^3 \sin^2 x_1, x_2^3 \cos^2 x_1, x_2 \cos^3 x_1, x_2^5 \cos x_1, \dots \\
 & x_2 \sin^2 x_1 \cos x_1, x_2^6 \sin x_1, x_2^2 \sin^3 x_1, \sin^3 x_1 \cos x_1, \dots \\
 & \left. \sin x_1 \cos^3 x_1, x_2^4 \sin x_1 \cos x_1, x_2^2 \sin x_1 \cos^2 x_1, \dots \right]^T.
 \end{aligned} \quad (3-56)$$

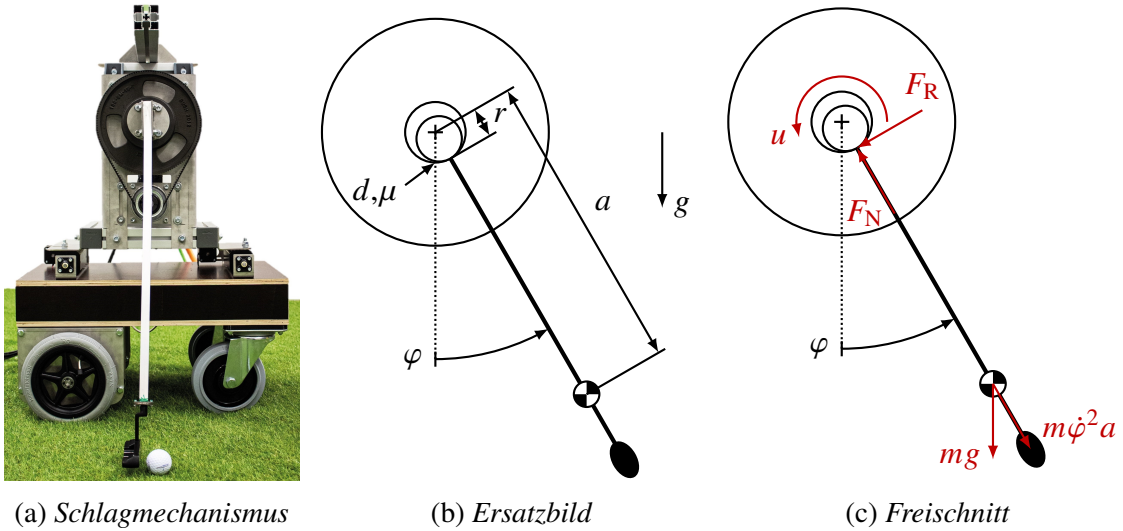


Bild 3-8: Physikalisch motivierte Modellbildung des Schlagmechanismus. Es wird vereinfachend angenommen, dass beide Getriebewellen zu einem starren Körper zusammengefasst sind und daher nur die obere Zahnriemenscheibe betrachtet. In Anlehnung an die von der Autorin betreute studentische Arbeit [Fit20].

Für den Duffing-Oszillator ergibt sich durch den kubischen Term x_1^3 entsprechend

$$\Psi_{\text{Duffing}}(\mathbf{x}) = \left[x_1, x_2, x_1^3, x_1^2 x_2, x_1^5, x_1 x_2^2, x_2^3, x_1^4 x_2, x_1^7, x_1^3 x_2^2, x_1^6 x_2, x_1^2 x_2^3, \dots \right. \\ \left. x_1^9, x_1 x_2^4, x_1^5 x_2^2, x_1^8 x_2, x_1^4 x_2^3, x_1^{11}, x_1^3 x_2^4, x_1^7 x_2^2, \dots \right]^T. \quad (3-57)$$

Der Schlagmechanismus des Golfroboters zeichnet sich durch ein nichtlineares Reibungsmoment aus, sodass es sich empfiehlt, die Observablen im Rahmen der Verwendung von Vorwissen folgendermaßen zu wählen

$$\Psi_{\text{Golf}}(\mathbf{x}) = \left[x_1, x_2, \sin x_1, \operatorname{sgn} x_2 \left| m x_2^2 a + m g \cos x_1 \right| \right]^T. \quad (3-58)$$

Für die Erzeugung der Trainingsdaten werden für das Pendel und den Duffing-Oszillator zunächst jeweils 100 simulierte¹² Trajektorien mit einer Dauer von jeweils 3 s, einer Schrittweite von $\Delta t = 0,01$ s und zufälligen Anfangsauslenkungen mit $u = 0$ verwendet. Für das Pendel wird die zusätzliche Bedingung gestellt, dass die Anfangsauslenkungen im Einzugsbereich der unteren Ruhelage $[0, 0]^T$ liegen.

Die Prädiktionsgenauigkeit der EDMD-Verfahren lässt sich anschließend anhand von Testtrajektorien beurteilen. Als Anfangsauslenkungen werden für das Pendel $\mathbf{x}_0 = [7\pi/8, 0]^T$ und für den Duffing-Oszillator $\mathbf{x}_0 = [2, 2]^T$ gewählt, um zu validieren, mit welcher Genauigkeit die nichtlinearen Anteile der Dynamik abgebildet werden. Die Bilder 3-9 und 3-10 zeigen die Prädiktionsgenauigkeit der EDMD-Prädiktionen in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Observablen (3-56) bzw. (3-57) im Vergleich zur numerischen Simulation des nichtlinearen Originalsystems. Die EDMD-Prädiktion mit Korrektur liefert eine sehr hohe Genauigkeit, während die reine EDMD-Prädiktion

¹²Der Begriff *Simulation* meint in diesem Kontext die numerische Lösung von Anfangswertproblemen mittels des expliziten 4-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens [DB13].

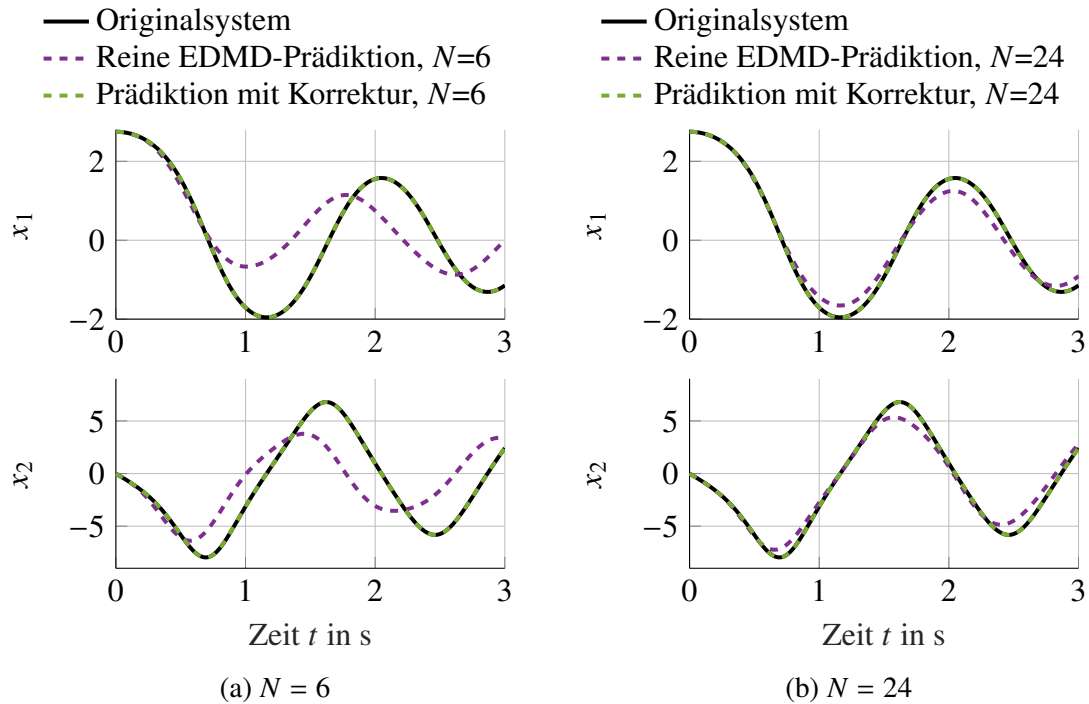


Bild 3-9: Beispielhafte EDMD-Prädiktion des Pendels für eine unterschiedliche Anzahl an Observablen (3-56). Die Zustände x_1 und x_2 beschreiben den Winkel und die Winkelgeschwindigkeit des Pendels.

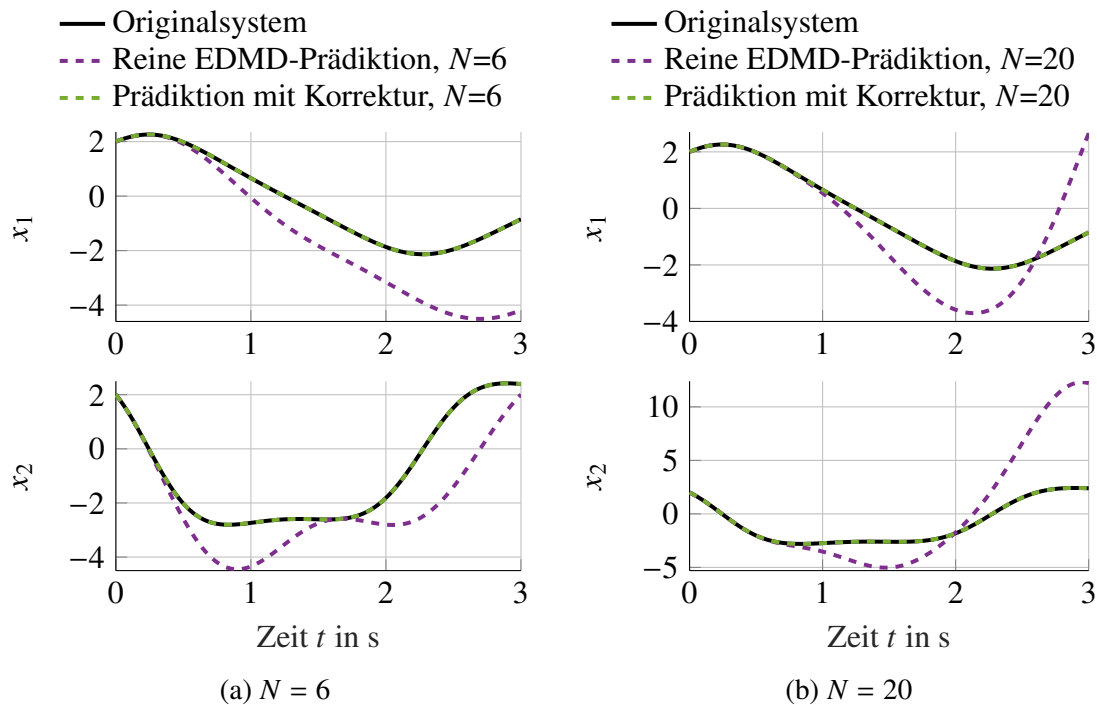


Bild 3-10: Beispielhafte EDMD-Prädiktion des Duffing-Oszillators für eine unterschiedliche Anzahl an Observablen (3-57). Die Zustände x_1 und x_2 beschreiben die Position und die Geschwindigkeit der schwingenden Masse.

die Trajektorie lediglich lokal approximiert. Diese Beobachtung lässt sich dadurch erklären, dass die festgelegten Observablen keinen Koopman-invarianten Unterraum, vgl. Abschnitt 2.2, aufspannen. Daher können nicht alle Zustände der Observablen durch Linearkombination der vorigen Zustände korrekt präzisiert werden. Durch eine Erhöhung der Observablenanzahl weicht die Prädiktion zeitlich später ab.

Das Bild 3-11 zeigt den kumulierten mittleren quadratischen Fehler

$$e(t_k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{k} \left\| \mathbf{x}_{\text{Originalsystem}}(t_m) - \mathbf{x}_{\text{Prädiktion}}(t_m) \right\|^2 \quad (3-59)$$

in Abhängigkeit der Anzahl der Observablen (3-56) für das Pendel. Hierbei fällt auf, dass eine Erhöhung der Observablenanzahl N nicht zwangsläufig zu einer beliebig starken Verringerung des Fehlers führt. Es ist außerdem ersichtlich, dass bereits ab $N = 4$ die EDMD-Prädiktion mit Korrektur den minimalen Fehler erreicht. Das bedeutet, dass eine Erhöhung der Observablenanzahl N in der hier vorgeschlagenen Form durch zusätzliche zeitliche Ableitungen keine weiteren Vorteile zeigt. Es ist wichtig anzumerken, dass der Fehler bereits für $N \geq 3$ ausgesprochen klein ist und die logarithmische Darstellung bei der Betrachtung dazu verleitet, den Fehler zu überschätzen.

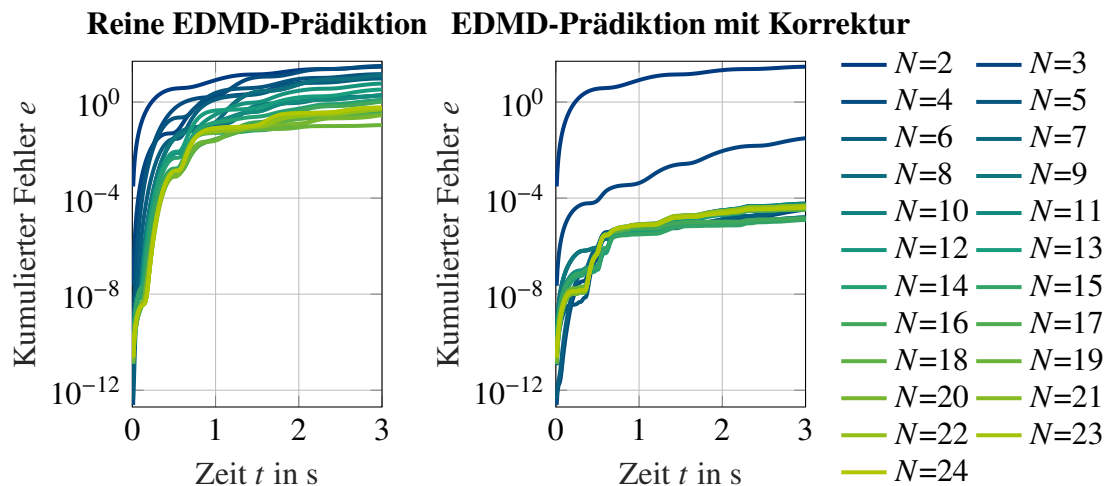


Bild 3-11: Einfluss der Anzahl der verwendeten Observablen auf die Prädiktionsgenauigkeit am Beispiel des Pendels für dieselbe Testtrajektorie wie im Bild 3-9.

Darüber hinaus hat die Wahl der Trainingsdaten einen Einfluss auf die erreichbare Prädiktionsgenauigkeit der Testtrajektorien. Dieser Zusammenhang ist im Bild 3-12 am Beispiel des Pendels veranschaulicht. Für den Fall, dass die Testtrajektorien in einem Bereich des Zustandsraums verlaufen, der die Trainingsdaten umfasst, erhöht sich die Prädiktionsgenauigkeit des reinen EDMD-Verfahrens. Im Gegensatz dazu liefert das EDMD-Verfahren mit Korrektur eine extrem hohe Genauigkeit über einen langen Prädiktionshorizont bei gleichzeitiger Robustheit gegenüber der Auswahl der Trainingsdaten.

Der Schlagmechanismus des Golfroboters wurde zur Erzeugung der Trainingsdaten mit unterschiedlichen Verläufen für u (Chirp-, Sinus- und Sprungsignale mit variierender Amplitude und Frequenz, vgl. Bild 3-13) angeregt und der Systemausgang $y = x_1$ mit einer Abtastrate von 1 kHz gemessen. Der Verlauf für x_2 wurde anschließend offline durch

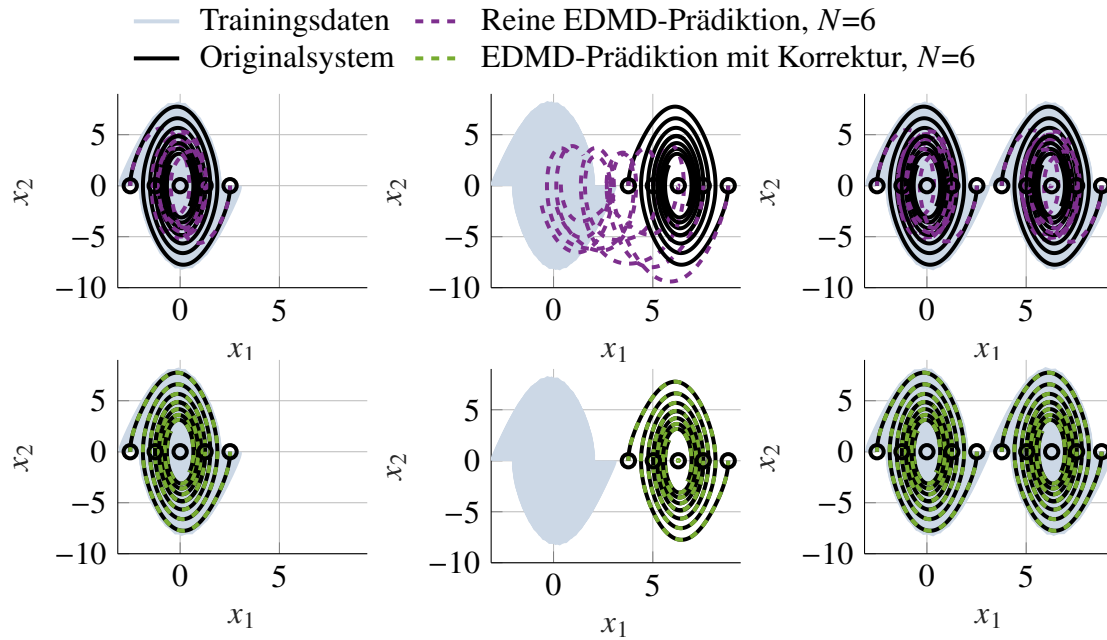


Bild 3-12: Einfluss der Trainingsdaten auf die Prädiktionsgenauigkeit am Beispiel des Pendels. Von links nach rechts werden unterschiedliche Kombinationen aus Trainingsdaten und Testtrajektorien im Phasenporträt betrachtet. Die Anfangspunkte der Testtrajektorien sind jeweils mit einem schwarzen Kreis gekennzeichnet.

numerische Differentiation einer durch Spline-Kurven interpolierten Approximation des Verlaufs von x_1 geschätzt. Zur Beurteilung der Prädiktionsgenauigkeit wird anschließend eine Testanregung untersucht, die nicht in den Trainingsdaten enthalten ist. Das Bild 3-14 zeigt die Prädiktionsgenauigkeit der EDMD-Verfahren im Vergleich zum nichtlinearen physikalischen Modell (3-55). Anhand der Zeitverläufe und dem kumulierten mittleren quadratischen Fehler

$$e(t_k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{k} \left(x_{1,\text{Messung}}(t_m) - x_{1,\text{Prädiktion}}(t_m) \right)^2 \quad (3-60)$$

lässt sich erkennen, dass die reine EDMD-Prädiktion eine geringfügig schwächere Genauigkeit als das nichtlineare physikalische Modell liefert. Im Gegensatz dazu ist die EDMD-Prädiktion mit Korrektur jedoch in der Lage, die nichtlineare Dämpfung nach ca. 8 s präziser abzubilden, wodurch sich der kumulierte Fehler signifikant verringert.

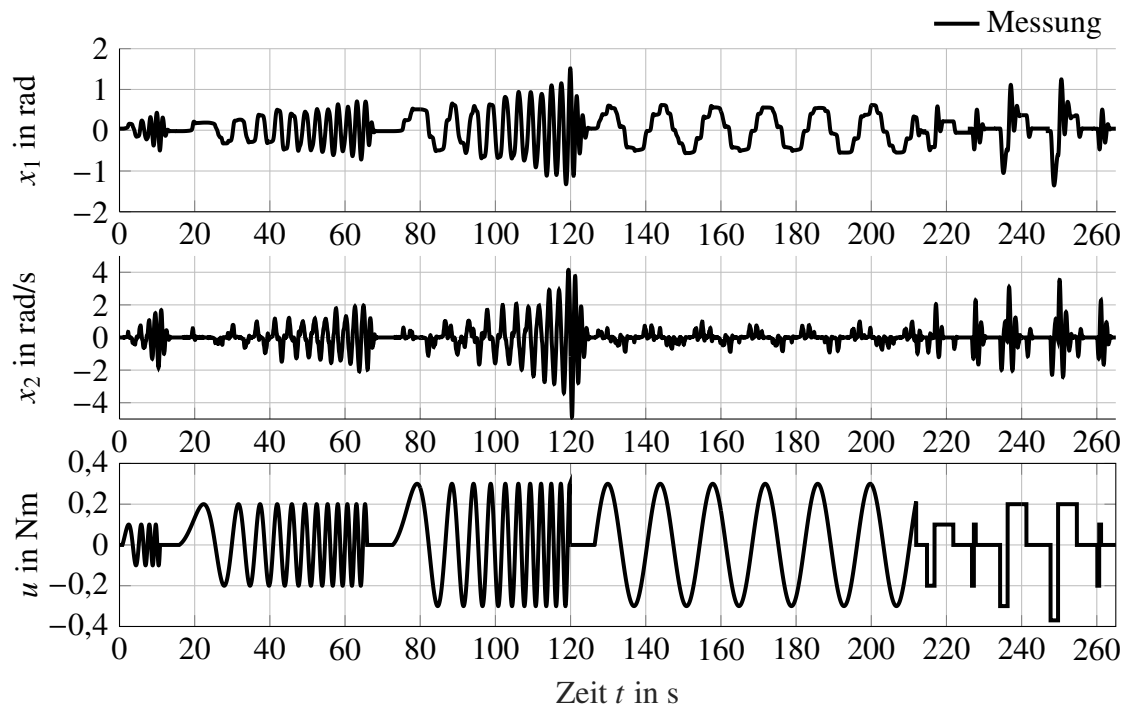


Bild 3-13: Zur Erzeugung der Trainingsdaten wurde der Schlagmechanismus des Golfroboters mit unterschiedlichen Verläufen für u angeregt und der resultierende Systemausgang x_1 gemessen. Der Verlauf für x_2 wurde offline geschätzt.

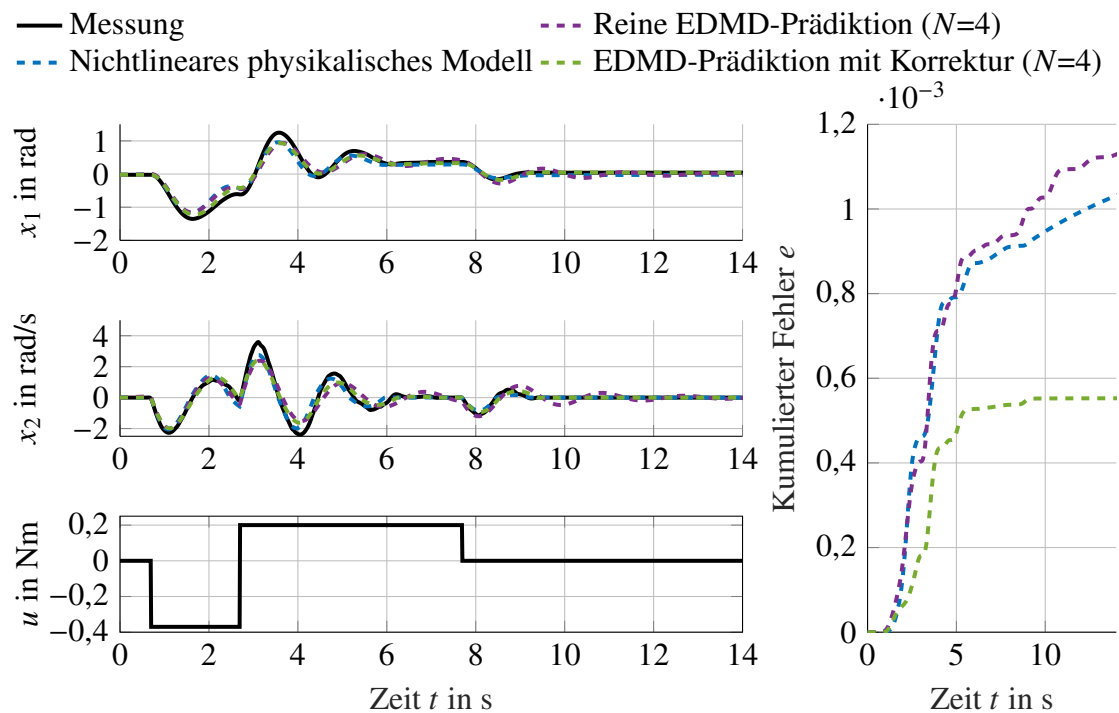


Bild 3-14: Prädiktionsgenauigkeit der EDMD-Verfahren im Vergleich zum nichtlinearen physikalischen Modell am Beispiel des Schlagmechanismus des Golfroboters.

3.4.2 Analyse der Stabilitätseigenschaft

Für die folgende Analyse der Stabilität werden zunächst in Anlehnung an [Ada18] die dafür erforderlichen Begriffe erläutert. Es sei $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ eine Ruhelage des dynamischen Systems (3-1).

- Die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ heißt lokal attraktiv, wenn es eine Umgebung $U(\mathbf{0})$ der Ruhelage gibt, so dass jeder Anfangswert $\mathbf{x}(t_0) \in U(\mathbf{0})$ zu einer Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ führt, die mit $t \rightarrow \infty$ in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ strebt. Ist $U(\mathbf{0}) = \mathbb{R}^n$, so bezeichnet man die Ruhelage als global attraktiv.
- Die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ heißt stabil im Sinne von Ljapunov, wenn es zu jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| < \varepsilon\}$ eine δ -Umgebung $U_\delta(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| < \delta\}$ gibt, so dass alle Trajektorien, die in der δ -Umgebung beginnen, d. h. $\mathbf{x}(t_0) \in U_\delta(\mathbf{0})$, in ihrem weiteren Verlauf in der ε -Umgebung bleiben, d. h. $\mathbf{x}(t) \in U_\varepsilon(\mathbf{0})$ für $t > 0$.
- Ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ lokal (global) attraktiv und stabil im Sinne von Ljapunov, so heißt sie (global) asymptotisch stabil.
- Eine Umgebung einer asymptotisch stabilen Ruhelage heißt Einzugsgebiet der Ruhelage, wenn alle in diesem Gebiet startenden Trajektorien in ihm verbleiben und im weiteren Verlauf in die Ruhelage streben.
- Existiert eine Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die in einer Umgebung $U_2(\mathbf{0}) \subseteq U_1(\mathbf{0})$ stetig differenzierbar ist und dort die Bedingungen

$$(1) V(\mathbf{0}) = 0 \quad (3-61a)$$

$$(2) V(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (3-61b)$$

$$(3) \dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (\text{bzw. } \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0) \quad (3-61c)$$

erfüllt, so ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil (bzw. stabil im Sinne von Ljapunov). Sind die Bedingungen (2) und (3) im gesamten Zustandsraum erfüllt und gilt zusätzlich $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, so ist die Ruhelage global asymptotisch stabil (bzw. global stabil im Sinne von Ljapunov). Funktionen $V(\mathbf{x})$, die die Bedingungen (3-61) erfüllen, bezeichnet man als Ljapunov-Funktionen.

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen der Stabilität des approximierten EDMD-Modells und des zugrunde liegenden nichtlinearen Systems anhand der ausgewählten Beispielsysteme untersucht. Das Pendel ist im Einzugsgebiet

$$E = \left\{ x_1, x_2 \mid \frac{1}{2} l x_2^2 - g \cos(x_1) < g \right\} \quad (3-62)$$

um die untere Ruhelage $\mathbf{x}_R = [0, 0]^T$ asymptotisch stabil. Diese Eigenschaft lässt sich leicht mittels der Ljapunov-Funktion

$$V_{\text{Pendel}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} m l^2 x_2^2 + m g l (1 - \cos(x_1)) \quad \text{für } \mathbf{x} \in E \quad (3-63a)$$

$$\text{mit } (1) V_{\text{Pendel}}(\mathbf{0}) = 0, \quad (3-63b)$$

$$(2) V_{\text{Pendel}}(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (3-63c)$$

$$(3) \dot{V}_{\text{Pendel}}(\mathbf{x}) = -d x_2^2 < 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (3-63d)$$

zeigen. Die Eigenwerte des zeitkontinuierlichen EDMD-Modells für das Pendel mit $N = 6$ ergeben sich zu

$$\lambda_{1,2} = -0,400 \pm 9,613i, \quad \lambda_{3,4} = -0,142 \pm 3,910i, \quad \lambda_5 = -0,815, \quad \lambda_6 = -1,371. \quad (3-64)$$

Der Duffing-Oszillator ist global asymptotisch stabil, was sich mittels der Ljapunov-Funktion

$$V_{\text{Duffing}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^4 \quad (3-65a)$$

$$\text{mit (1) } V_{\text{Duffing}}(\mathbf{0}) = 0, \quad (3-65b)$$

$$(2) V_{\text{Duffing}}(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (3-65c)$$

$$(3) \dot{V}_{\text{Duffing}}(\mathbf{x}) = -dx_2^2 < 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (3-65d)$$

zeigen lässt [BO99]. Die Eigenwerte des zeitkontinuierlichen EDMD-Modells für den Duffing-Oszillator mit $N = 6$ ergeben sich zu

$$\lambda_{1,2} = -0,189 \pm 4,009i, \quad \lambda_{3,4} = -0,120 \pm 1,172i, \quad \lambda_5 = -0,080, \quad \lambda_6 = -0,116. \quad (3-66)$$

Der Schlagmechanismus des Golfroboters ist im Einzugsgebiet um die untere Ruhelage $\mathbf{x}_R = [0, 0]^T$ asymptotisch stabil, was sich mittels der Ljapunov-Funktion

$$V_{\text{Golf}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}Jx_2^2 + mga(1 - \cos(x_1)) \quad \text{für } \left\{ x_1, x_2 \mid \frac{J}{2ma}x_2^2 - g \cos(x_1) < g \right\} \quad (3-67a)$$

$$\text{mit (1) } V_{\text{Golf}}(\mathbf{0}) = 0, \quad (3-67b)$$

$$(2) V_{\text{Golf}}(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (3-67c)$$

$$(3) \dot{V}_{\text{Golf}}(\mathbf{x}) = -dx_2^2 - r\mu |mx_2^3a + x_2mg \cos(x_1)| < 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (3-67d)$$

zeigen lässt. Die zeitkontinuierlichen EDMD-Eigenwerte der Dynamik für $N = 4$ ergeben sich zu

$$\lambda_1 = -13,912, \quad \lambda_2 = -0,146, \quad \lambda_{3,4} = -0,498 \pm 3,395i. \quad (3-68)$$

Die betrachteten Beispielsysteme sind asymptotisch stabil und das EDMD-Verfahren liefert jeweils zeitkontinuierliche Eigenwerte mit ausschließlich negativen Realteilen. Demnach ist hier eine Korrespondenz zwischen der Stabilität des nichtlinearen Originalsystems und der Stabilität des EDMD-approximierten Systems zu erkennen, vgl. eigener Beitrag [JTT22a].

3.4.3 Analyse der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Im Folgenden werden zunächst die Begriffe Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit erläutert. Anschließend werden anhand der Beispielsysteme Schlussfolgerungen im Kontext des Koopman-Operators gezogen.

Definitionen

Das System (3-2) heißt steuerbar, wenn sein Zustandspunkt $\mathbf{x}(t)$ durch geeignete Wahl des Steuervektors $\mathbf{u}(t)$ in endlicher Zeit aus dem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in den Endzustand $\mathbf{0}$ bewegt werden kann [FKL⁺16].

Das System (3-2) heißt beobachtbar, wenn man bei bekanntem $\mathbf{u}(t)$ aus der Messung von $\mathbf{y}(t)$ über eine endliche Zeitspanne den Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0)$ eindeutig ermitteln kann, ganz gleich, wo dieser liegt [FKL⁺16].

Kriterien für lineare Systeme

Ein lineares zeitinvariantes System mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ und einem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3-69a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (3-69b)$$

Nach den Kalmanschen Kriterien ist das System (3-69) genau dann steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{n \times np} \quad (3-70)$$

den Höchstrang n hat und genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = [\mathbf{C}, \mathbf{C}\mathbf{A}, \dots, \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}]^T \in \mathbb{R}^{nq \times n} \quad (3-71)$$

den Höchstrang n hat.

Die Symmetrie der beiden Kriterien lässt sich mittels des Dualitätsprinzips erklären: Die Steuerbarkeit des Paares (\mathbf{A}, \mathbf{B}) lässt sich in sehr ähnlicher Weise wie die Beobachtbarkeit des Paares (\mathbf{A}, \mathbf{C}) nachweisen. Wenn man das Steuerbarkeitskriterium mit \mathbf{A}^T anstelle von \mathbf{A} und \mathbf{C}^T anstelle von \mathbf{B} verwendet, so geht es in das Beobachtbarkeitskriterium über. Daher nennt man beide Eigenschaften *dual* zueinander [Lun13].

Kriterien für nichtlineare Systeme

Nichtlineare Systeme stellen in der mathematischen Beurteilung der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit eine wesentlich komplexere Herausforderung dar als lineare Systeme. Der Einfachheit halber werden die Kriterien der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit im Folgenden lediglich für eine bestimmte Klasse nichtlinearer Systeme erläutert, die für die Analyse der vorliegenden Beispielsysteme ausreichend ist.

Eingangsaffine Eingrößensysteme¹³

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}u, \quad (3-72a)$$

¹³Systeme mit nur einer Eingangsgröße u und einer Ausgangsgröße y werden als Eingrößensysteme bezeichnet, wohingegen Systeme mit mehreren Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen als Mehrgrößensysteme bezeichnet werden [Ada18].

$$y = c(\mathbf{x}) \quad (3-72b)$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u, y \in \mathbb{R}, \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und einem konstanten Eingangsvektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, die in der nichtlinearen Regelungsnormalform

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \alpha(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(\mathbf{x}) \end{bmatrix} u \quad (3-73)$$

vorliegen, können für $\beta(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ mittels

$$u = \frac{-\alpha(\mathbf{x}) + v}{\beta(\mathbf{x})} \quad (3-74)$$

in die lineare Regelungsnormalform

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (3-75)$$

transformiert werden. Ein System (3-2), das in nichtlinearer Regelungsnormalform vorliegt oder durch eine eineindeutige, stetig differenzierbare Koordinatentransformation in diese überführt werden kann, ist steuerbar, falls $\beta(\mathbf{x}) \neq 0$.

Das System (3-72) ist beobachtbar, wenn sein relativer Grad¹⁴ $\delta = n$ ist. Dieser Satz ist nur hinreichend, aber nicht notwendig: Der Umkehrschluss, dass ein eingangsaffines System mit einem relativen Grad $\delta < n$ nicht beobachtbar ist, gilt im Allgemeinen nicht.

Untersuchung der Beispielsysteme

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des approximierten EDMD-Modells und des zugrunde liegenden nichtlinearen Systems anhand der ausgewählten Beispielsysteme untersucht. Sowohl das Pendel als auch der Duffing-Oszillator und der Schlagmechanismus des Golfroboters sind steuerbar und beobachtbar, weil sie jeweils in nichtlinearer Regelungsnormalform mit dem relativen Grad $\delta = n$ vorliegen. Die jeweiligen EDMD-Modelle lassen sich diesbezüglich geradlinig mittels der Kalmanschen Kriterien beurteilen. Das EDMD-Modell ist genau dann steuerbar bzw. beobachtbar, wenn die im N -dimensionalen Raum berechnete Steuerbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{C}_N = [\mathbf{B}, \mathbf{KB}, \dots, \mathbf{K}^{N-1}\mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{N \times Np}, \quad (3-76a)$$

$$\mathbf{O}_N = [\mathbf{C}, \mathbf{CK}, \dots, \mathbf{CK}^{N-1}]^T \in \mathbb{R}^{Nq \times N} \quad (3-76b)$$

¹⁴Der relative Grad δ gibt den Grad der Ableitung der Ausgangsgröße y an, bei dem die δ -fach abgeleitete Ausgangsgröße erstmals direkt von der Stellgröße abhängt [Ada18].

den Höchststrang N aufweist. Für die Generierung der Trainingsdaten wurden das Pendel und der Duffing-Oszillator mit zufälligen Anfangsauslenkungen und Eingangssignalen angeregt und anschließend das berechnete EDMD-Modell bezüglich Gleichung (3-76) beurteilt. Für das Pendel resultiert

$$\text{rang } \mathcal{C}_N = \text{rang } \mathcal{O}_N = N \quad \text{für } N = n, \dots, 24, \quad (3-77)$$

für den Duffing-Oszillator

$$\text{rang } \mathcal{C}_N = \text{rang } \mathcal{O}_N = N \quad \text{für } N = n, \dots, 20 \quad (3-78)$$

und für den Schlagmechanismus des Golfroboters

$$\text{rang } \mathcal{C}_N = \text{rang } \mathcal{O}_N = N \quad \text{für } N = 4. \quad (3-79)$$

Demnach lässt sich eine Korrespondenz zwischen der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des zugrunde liegenden nichtlinearen Systems und dem jeweiligen approximierten EDMD-Modell feststellen. Dieses Ergebnis lässt sich nicht verallgemeinern, sodass die Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit im jeweiligen Einzelfall zu prüfen ist, vgl. eigener Beitrag [JTT22a].

3.4.4 Analyse des Rechenaufwands

Die Analyse des Rechenaufwands bei der Prädiktion ist hilfreich, damit das Potential für Anwendungen mit Echtzeitanforderungen¹⁵ beurteilt werden kann. Begleitet durch die von der Autorin betreute studentische Arbeit [Pap22a] wurde der Rechenaufwand der unterschiedlichen EDMD-Prädiktionsverfahren systematisch analysiert und mit herkömmlichen numerischen Integrationsverfahren aus der Klasse der Runge-Kutta-Verfahren verglichen. Für das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3-80)$$

mit $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t) = \mathbf{x}(kh)$ wurden hierfür das explizite Euler-Verfahren, das die Lösung über ein Rechteck annähert

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (3-81)$$

das Heun-Verfahren, das die Lösung über ein Trapez annähert

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (3-82a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})) \quad (3-82b)$$

und aufgrund der Berechnung von $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ auch als Prädiktor-Korrektor-Verfahren bezeichnet wird, sowie das klassische 4-stufige Runge-Kutta-Verfahren

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (3-83a)$$

¹⁵Echtzeitfähige Systeme sind in der Lage, das Ergebnis einer Berechnung innerhalb eines vorher fest definierten Zeitintervalls garantiert berechnen zu können [WB05].

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}\right), \quad (3-83b)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2, \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}\right), \quad (3-83c)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + h\mathbf{k}_3, \mathbf{u}_{k+1}\right), \quad (3-83d)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (3-83e)$$

betrachtet [Ada18; DB13]. Aufgrund der unterschiedlichen Anzahl an Rechen- bzw. Auswerteschritten wirkt sich die Auswahl der jeweiligen Integrationsmethode unmittelbar auf den Rechenaufwand aus.

Anschließend wurde die Anzahl der sogenannten Taktzyklen¹⁶, die ein Maß für den Rechenaufwand liefert, sowohl für die EDMD- als auch die numerischen Integrationsverfahren für jeweils einen Prädiktionsschritt separat bestimmt. Am Beispiel des Pendels wurde simulativ festgestellt, dass die reine EDMD-Prädiktion ab $N = 12$ mehr Taktzyklen als das Euler-Verfahren und die EDMD-Prädiktion mit Korrektur für alle N mehr Taktzyklen als das Euler-Verfahren benötigt. Das Heun-Verfahren und das klassische 4-stufige Runge-Kutta-Verfahren benötigen doppelt bzw. viermal so viele Taktzyklen wie das Euler-Verfahren. Basierend auf der Quantifizierung des Rechenaufwands mittels der Taktzyklen wurde die Genauigkeit der Prädiktionsverfahren bestimmt. Dafür wurde die Integrationsschrittweite der unterschiedlichen Prädiktionsverfahren gemäß der ermittelten Anzahl der Taktzyklen so normiert, dass der Rechenaufwand bei allen Verfahren gleich groß ist. Anschließend wurde festgestellt, dass die reine EDMD-Prädiktion bezüglich kleiner Zeitintervalle die höchste Approximationsgenauigkeit und die EDMD-Prädiktion mit Korrektur auch über größere Zeitintervalle die höchste Approximationsgenauigkeit erreicht. Hierbei ist hervorzuheben, dass bei den herkömmlichen numerischen Integrationsverfahren angenommen wurde, dass ein exaktes dynamisches Modell der Strecke vorliegt; im Gegensatz zu den EDMD-Verfahren, deren Modellbildung nur Messdaten und ein grundlegendes Wissen über die enthaltenden Nichtlinearitäten voraussetzt.

Einschränkungen dieser Beobachtungen beziehen sich auf die parallele Arbeitsweise moderner Prozessoren sowie unterschiedliche Ergebnisse auf unterschiedlichen Rechensystemen. Außerdem wurden die Ergebnisse nur anhand ausgewählter Beispielsysteme generiert. Eine realistische Beurteilung muss daher vermutlich auf der Zielhardware anhand einer konkreten regelungstechnischen Fragestellung getroffen werden.

Die Haupteckennis der Untersuchungen besteht darin, dass beide EDMD-Prädiktionsverfahren als alternative numerische Integrationsverfahren interpretiert werden können, wobei die Modellbildung aufgrund ihres datengetriebenen Charakters stark vereinfacht wird. Für die Anwendung in einer MPC eignet sich insbesondere die reine EDMD-Prädiktion. Dies ist auf die hohe Approximationsgenauigkeit über einen kurzen Zeitraum, wie sie für den Entwurf von MPC erforderlich ist, zurückzuführen. Zudem bietet

¹⁶Ein Taktzyklus ist in der Computertechnik der benötigte Zeitraum für die Ausführung einer elementaren Rechenoperation auf einem Prozessor [HP19]. Der Rechenaufwand einer Gleitkommaoperation lässt sich durch die Anzahl benötigter Taktzyklen angeben. Das Handbuch [Agn23] bietet eine überaus umfangreiche Auseinandersetzung mit der Bestimmung von Taktzyklen für unterschiedliche Gleitkommaoperationen und Prozessorarchitekturen.

die Gewährleistung einer linearen Systembeschreibung entscheidende Vorteile bei der Berechnung der Regelungsstrategie, vgl. Kapitel 5.

3.5 Zwischenfazit

In diesem Kapitel wurden unterschiedliche Snapshot-basierte Verfahren zur Systemidentifikation beschrieben, die an die Theorie des Koopman-Operators angelehnt sind. Aufgrund der linearen Systembeschreibung und der Möglichkeit, physikalisches Vorwissen zu integrieren, wurde das EDMD-Verfahren in besonderem Maße betrachtet. Anhand von Beispielsystemen wurden die Prädiktionsgenauigkeit in Abhängigkeit der Observablen und Trainingsdaten sowie systemtheoretische Eigenschaften eingehend untersucht. Das Bild 3-15 fasst die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen.

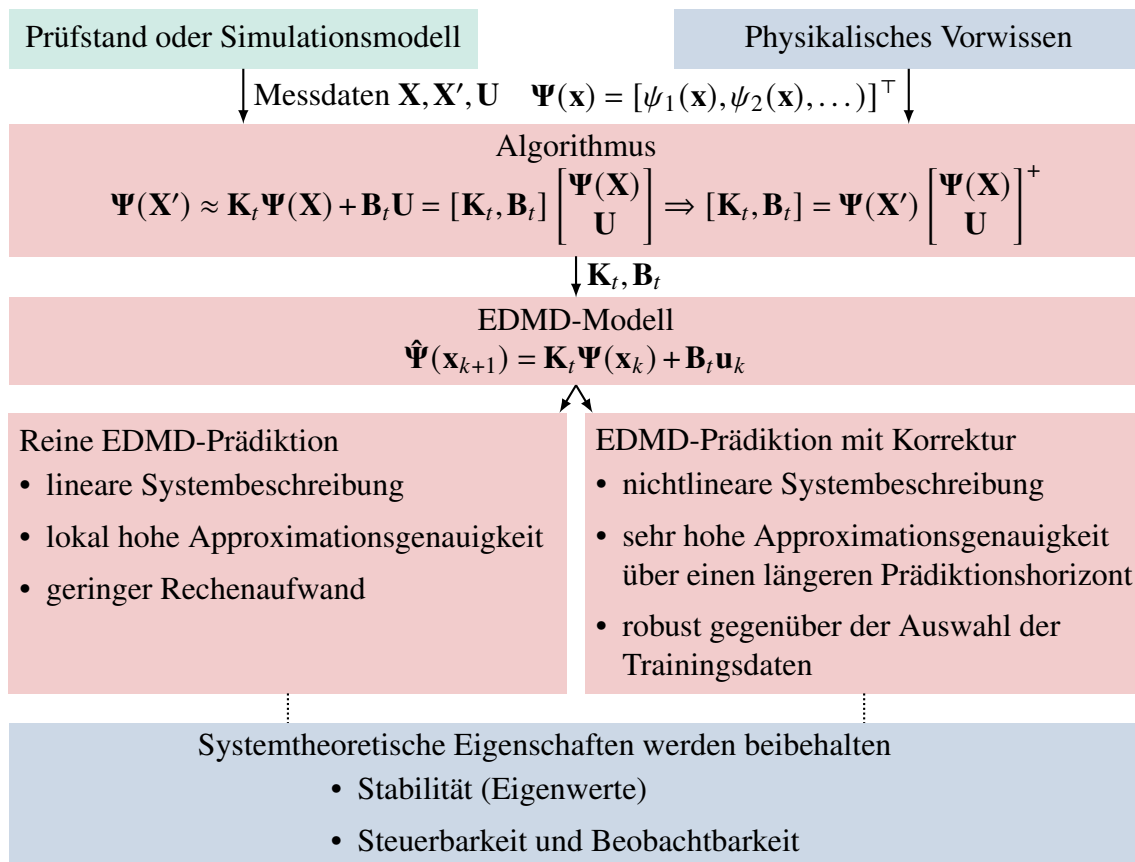


Bild 3-15: Das EDMD-Verfahren bietet die Möglichkeit anhand von (Mess-)Daten und physikalischem Vorwissen ein lineares zeitdiskretes Modell zu approximieren, wobei die Approximationsgenauigkeit von den gewählten Observablen, den Trainingsdaten und dem Prädiktionsverfahren abhängt. Bezüglich systemtheoretischer Eigenschaften konnte für die untersuchten Beispielsysteme eine Korrespondenz zwischen dem zugrunde liegenden Originalsystem und dem EDMD-approximierten Modell festgestellt werden.

Das EDMD-Verfahren approximiert nichtlineare Dynamiken anhand von (Mess-)Daten und physikalischem Vorwissen in Form der auftretenden Nichtlinearitäten als lineare zeitdiskrete Modelle. Die Approximationsgenauigkeit hängt dabei von den gewählten Observablen, den Trainingsdaten sowie dem Prädiktionsverfahren ab. Die reine EDMD-

Prädiktion liefert eine lokal hohe Genauigkeit, d. h. für einen kurzen Zeithorizont, wohingegen die in dieser Dissertation erstmals entwickelte EDMD-Prädiktion mit Korrektur auch über einen längeren Zeithorizont eine sehr hohe Genauigkeit liefert. Bei den in diesem Kapitel umfassend untersuchten Beispielsystemen weist das resultierende EDMD-Modell dieselben systemtheoretischen Eigenschaften (Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit) wie die Dynamik des Originalsystems auf.

Die Integration von physikalischem Vorwissen erfolgt beim EDMD-Verfahren durch die Wahl der Observablen, indem bekannte nichtlineare Terme der zugrunde liegenden Dynamik einbezogen werden. Im Anschluss an die datengetriebene Berechnung des Modells lassen sich systemtheoretische Eigenschaften mittels linearer Analysewerkzeuge untersuchen und mit dem zugrunde liegenden Originalsystem vergleichen, falls dies vorhanden ist. Es gibt jedoch keine Möglichkeit, vorhandenes Vorwissen über die systemtheoretischen Eigenschaften wie Stabilität oder Energieerhaltung bei der datengetriebenen Modellbildung zu berücksichtigen bzw. gewünschtes Verhalten zu gewährleisten. Daher werden im folgenden Kapitel 4 Strategien hergeleitet, mit denen sich das physikalische Vorwissen in größtmöglichem Maße in die Modellbildung integrieren lässt.

4 Strategien für regelungstechnisch verwertbare Streckenmodelle

Im Kapitel 1 wurde anhand eines einfachen Beispiels schematisch erläutert, wie sich unterschiedliche Modellierungsansätze für nichtlineare mechatronische Systeme gemäß der Anforderungen an Streckenmodelle für die Regelungstechnik beurteilen lassen. Dabei wurden sowohl physikalische, datengetriebene als auch hybride Ansätze betrachtet. Basierend auf den Erkenntnissen der Kapitel 2 und 3 werden in diesem Kapitel Strategien hergeleitet, mit denen sich durch die Kombination aus datengetriebenen und physikalisch motivierten Ansätzen Streckenmodelle entwickeln lassen, die eine hohe Genauigkeit aufweisen und gleichzeitig in einer regelungstechnisch verwertbaren Form vorliegen. Das Bild 4-1 veranschaulicht das angestrebte hybride Vorgehen als Alternative zum klassischen physikalisch motivierten modellbasierten Entwurf.

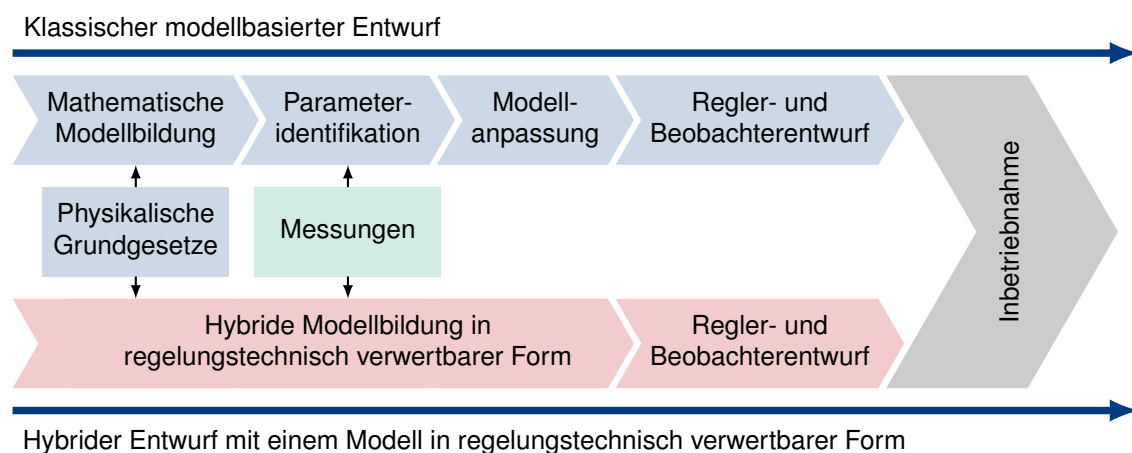


Bild 4-1: Der hybride Entwurf mit einem Modell in regelungstechnisch verwertbarer Form dient als Alternative zum klassischen modellbasierten Regelungsentwurf. In Anlehnung an den eigenen Beitrag [JTT22a].

In dieser Dissertation wird der Begriff der regelungstechnischen Verwertbarkeit erstmals geprägt und anhand der folgenden Kriterien charakterisiert.

Geringer Modellierungsaufwand. Aufgrund verkürzter Entwicklungszyklen ist es wichtig, dass die Modellbildung möglichst ressourceneffizient erfolgt. Ein zu detailliertes Modell kann im schlechtesten Fall sogar den zeitlichen Vorteil, der durch den modellbasierten Entwurf erreicht wird, durch den erhöhten Aufwand kompensieren [SLT13; FSGT15]. Daher soll der Modellierungsaufwand nur so hoch wie nötig sein.

Geringer Rechenaufwand bei der Prädiktion. Modellprädiktive Regelungsansätze optimieren anhand des Streckenmodells den Ausgangsgrößenverlauf mittels des Stellgrößenverlaufs. Ebenso nutzen modellbasierte Beobachter das Streckenmodell, um die Zustände des Systems zu präzisieren und basierend auf Messungen zu korrigieren. Dies sind nur zwei Beispiele, bei denen Echtzeitfähigkeit eine wichtige Rolle spielt. Aus diesem Grund soll das hybride Modell möglichst kostengünstig präzisiert werden können.

Hohe Dateneffizienz. Das Sammeln von Daten ist an mechatronischen Prüfständen aufgrund des hohen Zeitaufwands, des Energiebedarfs und des Ressourcenverbrauchs auf-

wändig. Daher ist es erstrebenswert, dass die datengetriebenen Modellbildungsansätze auch bei begrenzten Datenmengen eine effiziente Generalisierungsfähigkeit zeigen.

Physikalische Interpretierbarkeit. Ein physikalisch interpretierbares Modell ermöglicht ein tiefes Verständnis der zugrunde liegenden Prozesse im gesteuerten System. Dadurch wird eine zuverlässige Vorhersage des Systemverhaltens erleichtert, was insbesondere in sicherheitskritischen Anwendungen entscheidend ist. Folglich soll das datengetriebene Modell eine Form aufweisen, die sich physikalisch analysieren lässt, beispielsweise durch Stabilitätsuntersuchungen.

Nutzung von physikalischem Vorwissen. Zudem wird angenommen, dass die Person, die das regelungstechnische System entwickelt, über Vorwissen bezüglich grundlegender physikalischer Zusammenhänge von mechatronischen Systemen verfügt. Im Kontext der Zielsetzung dieser Dissertation soll dieses physikalisch motivierte Vorwissen in die datengetriebene Modellbildung integriert werden¹, um eine optimale Nutzung der Vorteile und Stärken beider Ansätze zu erreichen.

Anwendung bestehender Entwurfsverfahren. Bestehende Verfahren für den Regler- und Beobachterentwurf zeichnen sich durch ihre systematische Vorgehensweise aus, die auf physikalischen Prinzipien und systemtheoretischen Anforderungen wie Stabilität oder Steuerbarkeit basiert. Im Gegensatz dazu erweisen sich rein datengetriebene Streckenmodelle aufgrund der Black-Box-Struktur als nicht unmittelbar für den Regler- und Beobachterentwurf nutzbar. Dies führt zu Herausforderungen bei der Erreichung bestimmter Regelungsziele. Demnach ist es erstrebenswert, dass das Modell eine geradlinige Anwendung bestehender Entwurfsverfahren ermöglicht.

Adaptionsfähigkeit bei Systemveränderungen. Während des Produktlebenszyklus eines mechatronischen Systems treten vorhersehbare oder unvorhersehbare Veränderungen der Dynamik auf, z. B. durch den Einbau neuer Bauteile, Verschleiß oder Temperaturschwankungen. Zusätzlich unterliegt das verwendete Modell in der Regel Unsicherheiten, beispielsweise durch fehlerhafte Annahmen. Weil durch die Rückkopplungsstruktur regelungstechnischer Systeme während des Betriebs ohnehin laufend Messdaten erfasst werden, ist es reizvoll, das Streckenmodell online anzupassen. Daher sollten die datengetriebenen Modelle adaptiv sein.

Bei den im Kapitel 3 vorgestellten Verfahren lässt sich bereits physikalisches Vorwissen in Form der bekannten nichtlinearen Terme in die Modellbildung einbringen. Darüber hinaus könnte es motiviert durch die obigen Kriterien überaus vorteilhaft für das Verständnis und den Regelungsentwurf sein, wenn sich zusätzlich verfügbares physikalisches Vorwissen über Stabilität oder Energieerhaltung bei der datengetriebenen Modellbildung berücksichtigen ließe.

Im Folgenden werden zunächst Begriffe und Konzepte über energieerhaltende Systeme eingeführt, vgl. Abschnitt 4.1. Danach werden Ansätze diskutiert, mit denen sich anhand von (Mess-)Daten identifizierte Modelle nachträglich so anpassen lassen, dass sie gewünschte Stabilitätseigenschaften aufweisen, vgl. Abschnitte 4.2-4.3. Darüber hinaus wird im Abschnitt 4.4 eine neuartige Methode entwickelt, die basierend auf dem Konzept

¹Die Berücksichtigung von physikalischen Grundgesetzen beim maschinellen Lernen wird auch als *Physics-informed machine learning* bezeichnet und erfährt im wissenschaftlichen Kontext eine weitreichende Beachtung, vgl. [KAF⁺17; KKL⁺21].

der Passivität ermöglicht, dass das resultierende Modell unmittelbar in einer Form vorliegt, die physikalische Grundannahmen einhält und dadurch in einem besonderen Maße interpretierbar ist sowie unmittelbar für den modellbasierten Regelungsentwurf verwendet werden kann. Auf diese Weise wird das Ziel, verfügbares Vorwissen einzubringen, in seiner vollen Konsequenz realisiert. Das Kapitel schließt mit einem Zwischenfazit im Abschnitt 4.5.

4.1 Passivität und PCHD-Modelle

Der Begriff der Passivität wurde durch Dissipationseffekte² dynamischer Systeme motiviert und wird verwendet, um die Stabilität einer allgemeinen Klasse von miteinander verbundenen nichtlinearen Systemen zu analysieren [KB60; Wil72]. Eng damit verbunden ist der Begriff der Hyperstabilität, der sich auf lineare Systeme mit einer positiv reellen Übertragungsfunktion bezieht [Pop63; And68; Pop73; BIW91]. Passive Systeme sind immer stabil und das Konzept kann verwendet werden, um nichtlineare Rückkopplungssysteme durch ein Regelungsgesetz asymptotisch zu stabilisieren, weshalb eine solche Systembeschreibung äußerst wünschenswert ist.

Gegeben sei ein System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (4-1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4-1b)$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Das System ist passiv, falls eine stetig differenzierbare, positiv semidefinite³ Energiefunktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$V(\mathbf{x}(t)) - V(\mathbf{x}(0)) \leq \int_0^t \mathbf{u}^\top \mathbf{y} \, d\tau \quad (4-2)$$

für alle \mathbf{x}, \mathbf{u} existiert. Aus Gleichung (4-2) folgt die differentielle Passivitätsungleichung

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \leq \mathbf{u}^\top \mathbf{y}, \quad (4-3)$$

sodass für die Energiebilanz des Systems gilt

$$\text{gespeicherte Energie} \leq \text{zugeführte Energie}. \quad (4-4)$$

Darüber hinaus lassen sich verlustfreie bzw. streng passive Systeme als Spezialfälle definieren, indem das Ungleichheitszeichen in den Gleichungen (4-2)-(4-4) jeweils durch = bzw. < ersetzt wird [Ada18]. Die Eigenschaft der Passivität ist von den Schnittstellen zur Umgebung abhängig, d. h. von der Wahl des Systemeingangs und -ausgangs [Kha15].

Für Passivität und Stabilität gilt:

- Ein passives System mit positiv definiter Speicherfunktion V besitzt in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine Ruhelage, die stabil im Sinne von Ljapunov ist.

²Das Buch [BLME07] widmet sich vollständig dem Thema der dissipativen Systeme.

³Zur Definitheit von Funktionen und Matrizen, vgl. Anhang A1.1.

- Ein passives System mit positiv definiter Speicherfunktion V besitzt in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine asymptotisch stabile Ruhelage, wenn keine Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ außer $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ in der Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ enthalten ist.
- Ein streng passives System besitzt in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine asymptotisch stabile Ruhelage.

Außerdem gilt für die Passivität verbundener Systeme, dass die Parallelschaltung und die Rückkopplung (streng) passiver Systeme wiederum (streng) passiv ist. Diese Eigenschaft ist für den Regelungsentwurf ein außerordentlich nützliches Werkzeug [Ada18].

Die Dynamik energierhaltender physikalischer Systeme kann durch eine intrinsische Hamiltonsche Formulierung beschrieben werden, die zu *port-Hamiltonian* bzw. *port-controlled Hamiltonian systems* (PCH-Systeme) führt [MS92; MSB92; Sch20; SJ14]. Erweitert um Dissipationseffekte ergeben sich sogenannte *port-controlled Hamiltonian systems with dissipation* (PCHD-Systeme) [MOS00]. Die allgemeine Beschreibung solcher PCHD-Systeme ist durch

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{D}(\mathbf{x})) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (4-5a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}^\top(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \quad (4-5b)$$

gegeben, wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ der Zustandsvektor und $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ die Ein- und Ausgangsschnittstellen des Systems sind. $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetige positiv definite Funktion, die die gespeicherte Energie im System angibt. $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine schiefsymmetrische Matrix, d. h. $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}^\top(\mathbf{x})$, die die Energieflüsse im Inneren des Systems definiert und $\mathbf{D}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine positiv definite symmetrische Matrix, d.h. $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^\top(\mathbf{x})$, die das Verhalten der dissipativen Effekte abbildet⁴. $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ beschreibt den Energieaustausch des Systems mit der Systemumgebung. Die zeitliche Ableitung der Speicherfunktion ergibt

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top}_{=0, \text{ weil } \mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}^\top(\mathbf{x})} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{D}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (4-6a)$$

$$\Rightarrow \dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^\top \mathbf{y} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{D}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \leq \mathbf{u}^\top \mathbf{y}, \quad (4-6b)$$

sodass mit Gleichung (4-5a) die Passivitätsungleichung (4-3) erfüllt ist [Ada18]. PCHD-Systeme sind demnach immer passiv und somit immer stabil.

4.2 Stabile lineare dynamische Systeme

Im Bereich der Systemidentifikation gibt es den Ansatz, identifizierte Modelle von eigentlich stabilen Systemen, die z. B. aufgrund von Messfehlern instabil geworden sind, nachträglich anzupassen, um ihre Stabilität sicherzustellen⁵. Im Folgenden werden unter-

⁴Wenn $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ist, dann handelt es sich um ein (verlustfreies) PCH-System.

⁵Darüber hinaus gibt es noch weitere strukturelle Anforderungen, die an datengetriebene Modelle gestellt werden können. Beispielsweise verallgemeinert der Beitrag [BHM⁺23] diese Strategie als

schiedliche Ansätze zur Berechnung der *nächsten stabilen Matrix* für den zeitkontinuierlichen und den zeitdiskreten Fall erläutert.

Zeitkontinuierliche lineare Systeme

Ausgehend von der instabilen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird die im Sinne der Frobeniusnorm nächste stabile Matrix

$$\inf_{\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{S}^{n \times n}} \|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|_{\text{F}}^2 \quad (4-7)$$

gesucht, wobei $\mathbb{S}^{n \times n}$ die Menge aller stabilen $n \times n$ -Matrizen ist⁶. Die Herausforderung hierbei besteht darin, dass geringfügige Veränderungen der Einträge von \mathbf{A} dazu führen können, dass die Eigenwerte instabil werden oder erheblich von den Eigenwerten von \mathbf{A} abweichen. Die Menge $\mathbb{S}^{n \times n}$ ist zudem nichtkonvex, wodurch es im Allgemeinen schwierig ist, eine global optimale Lösung für Gleichung (4-7) zu finden [OND13]. Im Beitrag [GS17] wird angelehnt an die Stabilitätseigenschaft linearer PCHD-Systeme, vgl. Abschnitt 4.1 der folgende Satz hergeleitet: Die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ ist stabil, wenn sie sich als

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \mathbf{Q} \quad (4-8)$$

formulieren lässt, wobei $\mathbf{J}, \mathbf{D}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T$, $\mathbf{D} \geq 0$ und $\mathbf{Q} \geq 0$. Unter dieser Annahme lässt sich Gleichung (4-7) in das gleichwertige Optimierungsproblem

$$\inf_{\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{S}^{n \times n}} \|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|_{\text{F}}^2 = \inf_{\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T, \mathbf{D} \geq 0, \mathbf{Q} \geq 0} \|\mathbf{A} - (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \mathbf{Q}\|_{\text{F}}^2 \quad (4-9)$$

umformulieren, dessen zulässige Menge konvex ist. Die numerische Lösung erfolgt mittels eines projizierten Gradientenabstiegs. Beim projizierten Gradientenabstieg wird versucht, eine gegebene Kostenfunktion unter einer festgelegten Beschränkung zu minimieren, indem jede Iteration zuerst einen Schritt in Richtung des negativen Gradienten und anschließend eine Projektion der Lösung in die zulässige Menge berechnet. Im Folgenden werden die dafür erforderlichen Gradienten sowie Berechnungsvorschriften für die Projektionen hergeleitet.

Mittels der Definitionen der Frobeniusnorm und des Frobenius-Skalarprodukts

$$\|\mathbf{X}\|_{\text{F}}^2 := \sqrt{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle_{\text{F}}}^2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle_{\text{F}} := \text{spur}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \quad (4-10)$$

ergibt sich für die Kostenfunktion $L : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{J}, \mathbf{D}, \mathbf{Q}) &= \|\mathbf{A} - (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \mathbf{Q}\|_{\text{F}}^2 \\ &= \text{spur}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T (\mathbf{J}^T \mathbf{J} - 2\mathbf{J}^T \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \mathbf{Q}). \end{aligned} \quad (4-11)$$

Physics-informed DMD für unterschiedliche gewünschte Matrixtypen mit jeweils korrespondierenden physikalischen Eigenschaften.

⁶Die Matrix \mathbf{A} ist stabil, wenn alle Eigenwerte von \mathbf{A} in der geschlossenen linken Hälfte der komplexen Ebene liegen und es sich bei allen Eigenwerten auf der j -Achse um halbeinfache Eigenwerte handelt [GS17]. Für einen halbeinfachen Eigenwert gilt, dass seine algebraische Vielfachheit gleich seiner geometrischen Vielfachheit ist.

Unter Ausnutzung der Identitäten [MXM20]

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{spur}(\mathbf{A}\mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{spur}(\mathbf{X}\mathbf{A}) = \mathbf{A}^\top, \quad (4-12a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{spur}(\mathbf{A}\mathbf{X}^\top) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^\top} \text{spur}(\mathbf{X}^\top \mathbf{A}) = \mathbf{A}, \quad (4-12b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{spur}(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}) = \mathbf{A}^\top \mathbf{B}^\top, \quad (4-12c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{spur}(\mathbf{A}\mathbf{X}^\top \mathbf{B}) = \mathbf{B}\mathbf{A}, \quad (4-12d)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{spur}(\mathbf{X}^\top \mathbf{A}\mathbf{X}) = (\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}) \mathbf{X}, \quad (4-12e)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{spur}(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\mathbf{B}) = 2\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top, \quad (4-12f)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{spur}(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}) = (\mathbf{C}^\top + \mathbf{C}) \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top \quad (4-12g)$$

lassen sich die für den Gradientenabstieg erforderlich Gradienten

$$\nabla_{\mathbf{J}} L = -2(\mathbf{A} - (\mathbf{J} - \mathbf{D})\mathbf{Q})\mathbf{Q}^\top, \quad (4-13a)$$

$$\nabla_{\mathbf{D}} L = 2(\mathbf{A} - (\mathbf{J} - \mathbf{D})\mathbf{Q})\mathbf{Q}^\top, \quad (4-13b)$$

$$\nabla_{\mathbf{Q}} L = -2(\mathbf{J}^\top - \mathbf{D}^\top)(\mathbf{A} - (\mathbf{J} - \mathbf{D})\mathbf{Q}) \quad (4-13c)$$

berechnen.

Jede beliebige Matrix $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lässt sich in einen symmetrischen Teil \mathbf{Z}_S und einen schiefsymmetrischen Teil $\mathbf{Z}_{\bar{S}}$ zerlegen

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_S + \mathbf{Z}_{\bar{S}} = \frac{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^\top}{2} + \frac{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^\top}{2}, \quad (4-14)$$

sodass die im Sinne der Frobeniusnorm nächste Projektion $\mathcal{P}_{\bar{S}} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ der Matrix \mathbf{Z} in die Menge \bar{S} der schiefsymmetrischen Matrizen gegeben ist durch [GS17]

$$\mathcal{P}_{\bar{S}}(\mathbf{Z}) = \frac{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^\top}{2}. \quad (4-15)$$

Die Matrix \mathbf{Z} ist genau dann positiv semidefinit, wenn ihr symmetrischer Teil \mathbf{Z}_S positiv semidefinit ist, d. h. alle Eigenwerte von \mathbf{Z}_S größer oder gleich Null sind, vgl. Anhang A1.1. Damit lässt sich die im Sinne der Frobeniusnorm nächste Projektion $\mathcal{P}_{\geq} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ der Matrix \mathbf{Z} in die Menge der positiv semidefiniten Matrizen durch Verschiebung der Eigenwerte [Hig88; GS17]

$$\mathcal{P}_{\geq}(\mathbf{Z}) = \mathbf{V} \max(\mathbf{0}_{n \times n}, \mathbf{\Sigma}) \mathbf{V}^\top := \mathbf{V} \begin{bmatrix} \max(0, \lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \max(0, \lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{V}^\top, \quad (4-16)$$

berechnen, wobei $\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$ die orthogonale Eigenzerlegung⁷ von \mathbf{Z}_S ist.

Initialisiert werden die Matrizen mittels

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}_n, \quad (4-17a)$$

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top}{2}, \quad (4-17b)$$

$$\mathbf{D}_0 = \mathcal{P}_{\geq} \left(\frac{-\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top}{2} \right). \quad (4-17c)$$

Der vollständige Algorithmus ist in [GS17] beschrieben und wurde folgend generalisiert, um unterschiedliche nächste Matrizen für zeitkontinuierliche Systeme zu finden, z. B. die nächste stabile Metzler-Matrix⁸ [And17], das nächste stabile Matrizenpaar [GMS18; GKS20] und das nächste positiv-reelle System [GS18].

Zeitdiskrete lineare Systeme

Auf Basis der obig beschriebenen Ansätze wird im Beitrag [GKS19] ein Verfahren zur numerischen Bestimmung der nächsten stabilen Matrix für zeitdiskrete Systeme hergeleitet. Das Optimierungsproblem wird formuliert als

$$\inf_{\tilde{\mathbf{A}}_t \in \mathbb{S}_t^{n \times n}} \|\mathbf{A}_t - \tilde{\mathbf{A}}_t\|_F^2, \quad (4-18)$$

wobei $\mathbb{S}_t^{n \times n}$ die Menge aller zeitdiskreten stabilen $n \times n$ -Matrizen ist⁹. Hierbei wird eine neuartige Charakterisierung für zeitdiskrete Matrizen formuliert: eine Matrix $\tilde{\mathbf{A}}_t$ ist genau dann stabil, wenn sie sich als

$$\tilde{\mathbf{A}}_t = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \quad (4-19)$$

formulieren lässt, wobei \mathbf{S} positiv definit, \mathbf{O} orthogonal¹⁰ und \mathbf{T} positiv semidefinit mit $\|\mathbf{T}\| \leq 1$ sind. Die Matrix liegt dann in der sogenannten SOT-Form¹¹ vor. Damit lässt sich das nichtkonvexe Optimierungsproblem (4-18) in das gleichwertige Optimierungsproblem

$$\inf_{\tilde{\mathbf{A}}_t \in \mathbb{S}_t^{n \times n}} \|\mathbf{A}_t - \tilde{\mathbf{A}}_t\|_F^2 = \inf_{\mathbf{S} > 0, \mathbf{O} \in \mathbf{O}(n), \mathbf{T} \geq 0, \|\mathbf{T}\| \leq 1} \|\mathbf{A}_t - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S}\|_F^2 \quad (4-20)$$

⁷Symmetrische Matrizen $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind orthogonal diagonalisierbar, d. h. sie lassen sich zerlegen in $\mathbf{Z} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$ mit den Eigenwerten $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^\top$ orthogonal [LLM16].

⁸Eine Metzler-Matrix ist eine Matrix, bei der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen nichtnegative Werte besitzen [And17].

⁹Die Matrix \mathbf{A}_t ist stabil, wenn für alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von \mathbf{A}_t gilt $|\lambda_i| \leq 1$ und es sich bei allen Eigenwerten auf dem Einheitskreis um halbeinfache Eigenwerte handelt [GKS19].

¹⁰Eine orthogonale Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine quadratische Matrix, für die gilt $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

¹¹In der originalen Formulierung von [GKS19] werden die Matrizen als \mathbf{S} , \mathbf{U} und \mathbf{B} und die Schreibweise als SUB-Form bezeichnet. Diese Dissertation verwendet zur Vermeidung von Verwechslungen mit anderen Matrizen stattdessen die Bezeichnungen \mathbf{S} , \mathbf{O} und \mathbf{T} .

umformulieren, dessen zulässige Menge konvex ist. Mittels Gleichung (4-10) ergibt sich daraus die Kostenfunktion $L : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{S}, \mathbf{O}, \mathbf{T}) &= \|\mathbf{A}_t - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 \\ &= \text{spur}(\mathbf{A}_t^{\text{T}} \mathbf{A}_t - 2 \mathbf{A}_t^{\text{T}} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} + \mathbf{S}^{\text{T}} \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{O}^{\text{T}} \mathbf{S}^{-\text{T}} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S}), \end{aligned} \quad (4-21)$$

womit sich mittels Gleichung (4-12) die Gradienten

$$\nabla_{\mathbf{O}} L = -2 \mathbf{S}^{-\text{T}} (\mathbf{A}_t - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S}) \mathbf{S}^{\text{T}} \mathbf{T}^{\text{T}}, \quad (4-22a)$$

$$\nabla_{\mathbf{T}} L = -2 \mathbf{O}^{\text{T}} \mathbf{S}^{-\text{T}} (\mathbf{A}_t - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S}) \mathbf{S}^{\text{T}} \quad (4-22b)$$

berechnen lassen. Für die Berechnung des Gradienten $\nabla_{\mathbf{S}} f$ wird die Hilfsgröße

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \quad (4-23)$$

eingeführt, sodass für die Kostenfunktion $L : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Gleichung (4-10) gilt

$$L(\mathbf{R}) = \|\mathbf{A}_t - \mathbf{R}\|_{\text{F}}^2 = \langle \mathbf{A}_t - \mathbf{R}, \mathbf{A}_t - \mathbf{R} \rangle_{\text{F}}. \quad (4-24)$$

Unter der Annahme, dass $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t)$ ist und mithilfe des Zusammenhangs¹²

$$\frac{d\mathbf{S}^{-1}}{dt} = -\mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{S}^{-1} \quad (4-25)$$

ergibt sich mit der Produktregel die zeitliche Ableitung von \mathbf{R}

$$\dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \dot{\mathbf{S}} = -\mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{S}}. \quad (4-26)$$

Die zeitliche Ableitung der Funktion $L(\mathbf{R})$ lautet¹³

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \langle -\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{A}_t - \mathbf{R} \rangle_{\text{F}} + \langle \mathbf{A}_t - \mathbf{R}, -\dot{\mathbf{R}} \rangle_{\text{F}} \\ &= 2 \langle \mathbf{A}_t - \mathbf{R}, -\dot{\mathbf{R}} \rangle_{\text{F}} \\ &= 2 \langle \mathbf{A}_t - \mathbf{R}, \mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{R} - \mathbf{R} \mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{S}} \rangle_{\text{F}} \\ &= \langle 2 \mathbf{S}^{-\text{T}} ((\mathbf{A}_t - \mathbf{R}) \mathbf{R}^{\text{T}} - \mathbf{R}^{\text{T}} (\mathbf{A}_t - \mathbf{R})), \dot{\mathbf{S}} \rangle_{\text{F}}. \end{aligned} \quad (4-27)$$

Weil für die zeitliche Ableitung der Funktion $L(\mathbf{S}(t))$ unter Berücksichtigung der Kettenregel

$$\dot{L} = \frac{dL(\mathbf{S}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial S_{ij}} \frac{dS_{ij}}{dt} = \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{S}}, \frac{d\mathbf{S}}{dt} \right\rangle_{\text{F}} = \langle \nabla_{\mathbf{S}} L, \dot{\mathbf{S}} \rangle_{\text{F}} \quad (4-28)$$

¹²Dieser Zusammenhang lässt sich einfach durch zeitliche Ableitung der Einheitsmatrix $\frac{d\mathbf{I}_n}{dt} = \frac{d(\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1})}{dt}$ unter Verwendung der Produktregel herleiten.

¹³Zur Umformung wird die Verschiebungseigenschaft des Frobenius-Skalarprodukts $\langle \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle_{\text{F}} = \langle \mathbf{B}, \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{C} \rangle_{\text{F}} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{C} \mathbf{B}^{\text{T}} \rangle_{\text{F}}$ ausgenutzt, die aus $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{\text{T}} = \mathbf{B}^{\text{T}} \mathbf{A}^{\text{T}}$ und $\text{spur}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{spur}(\mathbf{B}\mathbf{A})$ folgt.

gilt, lässt sich der Gradient $\nabla_S L$ unmittelbar aus Gleichung (4-27) ablesen

$$\nabla_S L = 2\mathbf{S}^{-\top} ((\mathbf{A}_t - \mathbf{R})\mathbf{R}^\top - \mathbf{R}^\top(\mathbf{A}_t - \mathbf{R})). \quad (4-29)$$

Für die Projektionen der Matrizen \mathbf{S} und \mathbf{T} in die zulässige Menge wird in Anlehnung an Gleichung (4-16) eine allgemeine Formel für die Verschiebung der Eigenwerte einer symmetrischen Matrix in das Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{P}_{a,b} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{a,b}(\mathbf{Z}) &= \mathbf{V} \max(a\mathbf{I}_n, \min(b\mathbf{I}_n, \boldsymbol{\Sigma})) \mathbf{V}^\top \\ &:= \mathbf{V} \begin{bmatrix} \max(a, \min(b, \lambda_1)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \max(a, \min(b, \lambda_n)) \end{bmatrix} \mathbf{V}^\top \end{aligned} \quad (4-30)$$

genutzt, wobei $\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\top$ die orthogonale Eigenzerlegung von \mathbf{Z}_S ist. Daraus ergibt sich die im Sinne der Frobeniusnorm nächste Projektion $\mathcal{P}_> : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ in die Menge der positiv definiten Matrizen mit $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_>(\mathbf{Z}) &= \mathcal{P}_{\varepsilon, \infty}(\mathbf{Z}) = \mathbf{V} \max(\varepsilon\mathbf{I}_n, \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{V}^\top \\ &:= \mathbf{V} \begin{bmatrix} \max(\varepsilon, \lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \max(\varepsilon, \lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{V}^\top \end{aligned} \quad (4-31)$$

und die im Sinne der Frobeniusnorm nächste Projektion $\mathcal{P}_{0,1}$ in die Menge der positiv semidefiniten Matrizen mit $\|\mathbf{Z}\| \leq 1$ ¹⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{0,1}(\mathbf{Z}) &= \mathbf{V} \max(\mathbf{0}_{n \times n}, \min(\mathbf{I}_n, \boldsymbol{\Sigma})) \mathbf{V}^\top \\ &:= \mathbf{V} \begin{bmatrix} \max(0, \min(1, \lambda_1)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \max(0, \min(1, \lambda_n)) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4-32)$$

Die im Sinne der Frobeniusnorm nächste Projektion $\mathcal{P}_\perp : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ der Matrix \mathbf{O} in die Menge der orthogonalen Matrizen erfolgt mittels der Polarzerlegung [Hig86]

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V}\mathbf{H} \quad (4-33)$$

von \mathbf{Z} , wobei \mathbf{V} eine orthogonale und \mathbf{H} eine positiv semidefinite symmetrische Matrix ist, sodass

$$\mathcal{P}_\perp(\mathbf{Z}) = \mathbf{V}. \quad (4-34)$$

Initialisiert werden die Matrizen mittels

$$\mathbf{S} = \mathbf{I}_n, \quad (4-35a)$$

$$\mathbf{O} = \mathbf{V}, \quad (4-35b)$$

$$\mathbf{C} = \mathcal{P}_{0,1}(\mathbf{H}) \quad \text{mit der Polarzerlegung} \quad \mathbf{A}_t = \mathbf{V}\mathbf{H}. \quad (4-35c)$$

¹⁴Die Spektralnorm einer symmetrischen Matrix entspricht ihrem betragsmäßig größten Eigenwert, sodass mit Gleichung (4-32) die Forderung $\mathbf{T} \leq 1$ eingehalten wird.

Der Algorithmus 4-1 verwendet einen beschleunigten¹⁵ projizierten Gradientenabstieg zur Berechnung der Matrizen, die der Einfachheit halber in der Speicherstruktur \mathbf{X} enthalten sind.

Algorithmus 4-1 Projizierter Gradientenabstieg. In Anlehnung an [GKS19].

▷ \mathbf{X} ist eine Speicherstruktur, die alle zu berechnenden Matrizen enthält

Eingabe:

Initialisierung für \mathbf{X} , Parameter $\alpha_1 \in (0, 1)$, γ_0 , γ_{lb}

Ausgabe:

Approximierte Lösung \mathbf{X} für das zugrunde liegende Optimierungsproblem

```

1:  $\mathbf{X}' = \mathbf{X}$                                 ▷ Erzeuge die Nesterov15-Iteration
2:  $\gamma \leftarrow \gamma_0$ 
3: for  $k = 1, 2, \dots$  do
4:    $\hat{\mathbf{X}} \leftarrow \mathbf{X}$                     ▷ Speichere den vorherigen Wert
5:    $\mathbf{X} \leftarrow \mathcal{P}(\mathbf{X}' - \gamma \nabla f(\mathbf{X}'))$     ▷ Projizierter Gradientenabstieg
6:   while  $L(\mathbf{X}) > L(\hat{\mathbf{X}})$  und  $\gamma \geq \gamma_{lb}$  do
7:      $\gamma \leftarrow \frac{2}{3}\gamma$                 ▷ Reduziere die Schrittweite, falls  $f$  nicht kleiner wird
8:      $\mathbf{X} \leftarrow \mathcal{P}(\mathbf{X}' - \gamma \nabla L(\mathbf{X}'))$ 
9:   end while
10:  if  $\gamma < \gamma_{lb}$  then
11:    Neustart des Gradientenabstiegs:  $\mathbf{X}' \leftarrow \mathbf{X}, \gamma \leftarrow \gamma_0, \alpha_k \leftarrow \alpha_1,$ 
12:  else
13:     $\alpha_{k+1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\alpha_k^4 + 4\alpha_k^2} - \alpha_k^2 \right), \quad \beta_k = \frac{\alpha_k(1-\alpha_k)}{\alpha_k^2 + \alpha_{k+1}}$ 
14:     $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \beta_k(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})$ 
15:  end if
16:   $\gamma \leftarrow 2\gamma$ 
17: end for

```

Als Beispiel lässt sich ausgehend von der instabilen Matrix [GP18]

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \rho(\mathbf{A}_t) = 1,096 \quad (4-36)$$

mittels des Algorithmus 4-1 die stabile Matrix

$$\tilde{\mathbf{A}}_t = \begin{bmatrix} 0,5639 & 0,3600 & 0,0850 \\ 0,4714 & 0,4685 & 0,2879 \\ 0,0643 & 0,0601 & 0,6854 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \rho(\tilde{\mathbf{A}}_t) \approx 1 \quad (4-37)$$

bestimmen. Das Bild 4-2(a) visualisiert die Abnahme der Kostenfunktion $L(\mathbf{S}, \mathbf{O}, \mathbf{T})$ unter Berücksichtigung der Projektionsvorschrift, sodass stets $\rho(\tilde{\mathbf{A}}_t) \leq 1$ eingehalten wird, vgl. Bild 4-2(b).

¹⁵Die Idee des beschleunigten sogenannten *Nesterov-Gradientenabstiegs* [Nes83] besteht darin, den Gradienten am geschätzten zukünftigen Punkt \mathbf{X}' zu berechnen und diesen in den Aktualisierungsschritt einzubeziehen. Weitere Informationen zur konvexen Optimierung finden sich in [Nes18].

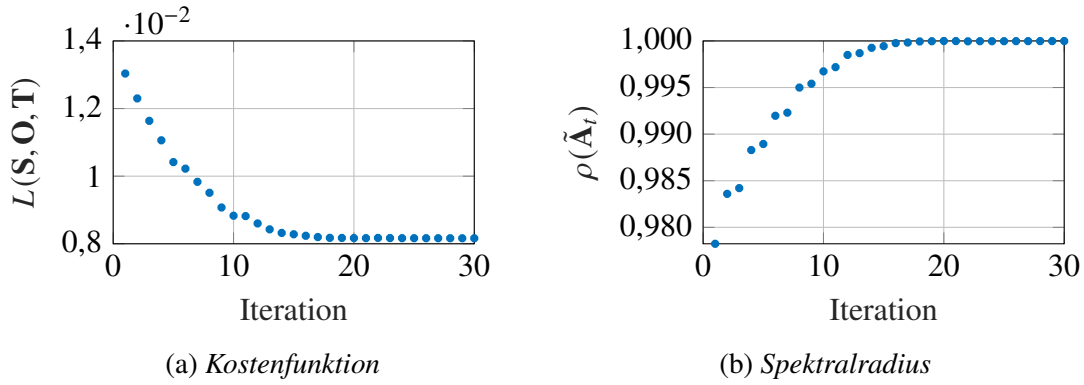


Bild 4-2: Beispielhafter Verlauf der Kostenfunktion und des Spektralradius beim Algorithmus 4-1 ausgehend von der instabilen Matrix (4-36).

4.3 Stabile Koopman-Operatoren

Die Idee zur Berechnung der nächsten stabilen Matrix [GKS19] wurde nachfolgend auf den approximierten Koopman-Operator beim EDMD-Verfahren angewendet. In den meisten Fällen gelingt es nicht das EDMD-Modell so zu wählen, dass die Observablen einen Koopman-invarianten Unterraum aufspannen, vgl. Abschnitt 2.2, sodass die Prädiktion fehlerbehaftet ist. Daher werden im Beitrag [MAM23] Fehlerschranken für das EDMD-Modell hergeleitet. Der *lokale Fehler* gibt den Fehler des EDMD-Modells bezogen auf einen Prädiktionsschritt

$$\mathbf{e}_k = \Psi(\mathbf{x}_k) - \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_{k-1}) \quad (4-38)$$

und der *globale Fehler* auf mehrere EDMD-Prädiktionsschritte

$$\mathbf{E}_k = \Psi(\mathbf{x}_k) - \mathbf{K}_t^k \Psi(\mathbf{x}_0), \quad (4-39)$$

wobei $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ ein betrachteter Anfangszustand ist, vgl. Bild 4-3. Die Überlegungen an dieser Stelle unterstreichen den Ansatz der EDMD-Prädiktion mit Korrektur, bei der eine bemerkenswerte Prädiktionsgenauigkeit erreicht wird, indem die Observablen $\Psi(\mathbf{x})$ in jedem Prädiktionsschritt neu ausgewertet werden, vgl. Abschnitt 3.2. Aus Gleichung (4-38) folgt rekursiv

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}_k) &= \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{e}_k \\ &= \mathbf{K}_t^2 \Psi(\mathbf{x}_{k-2}) + \mathbf{K}_t \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{e}_k \\ &\vdots \\ &= \mathbf{K}_t^k \Psi(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{K}_t^i \mathbf{e}_{k-i}. \end{aligned} \quad (4-40)$$

Somit ist der globale Fehler gegeben durch

$$\mathbf{E}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{K}_t^i \mathbf{e}_{k-i}, \quad (4-41)$$

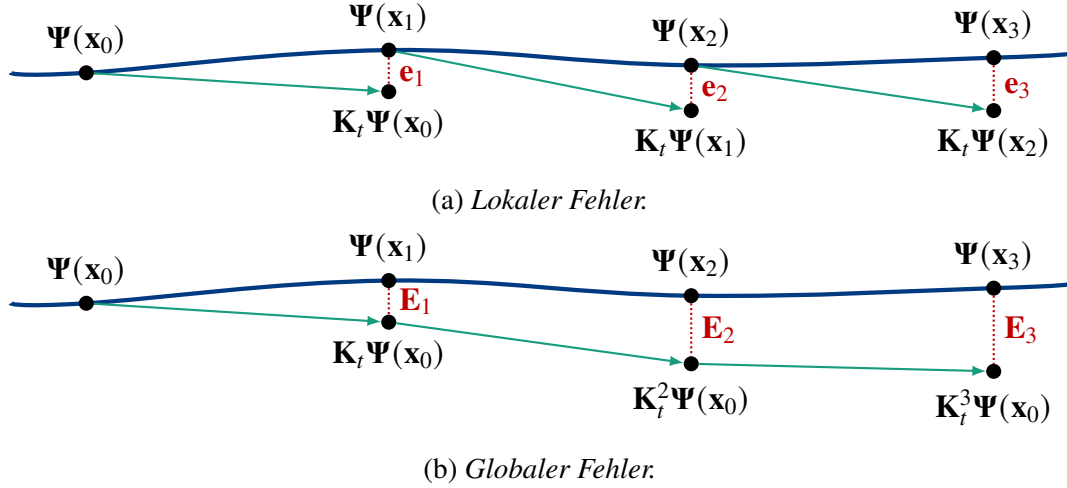


Bild 4-3: Der lokale Fehler \mathbf{e}_i , vgl. Gleichung (4-38) gibt die Prädiktionsgenauigkeit des EDMD-Modells für einen Zeitschritt an, während der globale Fehler \mathbf{E}_i , vgl. Gleichung (4-39) die Prädiktionsgenauigkeit über alle Zeitschritte angibt. In Anlehnung an [MAM23].

sodass sich unter Berücksichtigung der Normeigenschaften eine Fehlerschranke

$$\|\mathbf{E}_k\| = \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{K}_t^i \mathbf{e}_{k-1} \right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{K}_t^i \mathbf{e}_{k-1}\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{K}_t^i\|_{\text{F}} \|\mathbf{e}_{k-1}\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{K}_t\|_{\text{F}}^i \|\mathbf{e}_{k-1}\| \quad (4-42)$$

für den globalen Fehler ergibt. Unter der Annahme, dass der lokale Fehler \mathbf{e} beschränkt ist, d. h. dass es ein $\|\mathbf{e}_{\max}\|$ gibt, sodass $\|\mathbf{e}_i\| \leq \|\mathbf{e}_{\max}\| \forall i \in [1, k]$, lässt sich die Ungleichung vereinfachen zu

$$\|\mathbf{E}_k\| \leq \|\mathbf{e}_{\max}\| \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{K}_t\|_{\text{F}}^i. \quad (4-43)$$

Für den Fall, dass \mathbf{K}_t instabil ist, divergiert die Matrixnorm $\|\mathbf{K}_t\|_{\text{F}}^i$ für einen langen Prädiktionszeitraum. Daher plädiert der Beitrag [MAM23] dafür, zur Erhöhung der Prädiktionsgüte des reinen EDMD-Verfahrens in allen Fällen einen stabilen Koopman-Operator zu verwenden, sogar für den Fall, dass das zugrundeliegende System eine instabile Dynamik aufweist.

Die Bestimmung des im Sinne der Frobeniusnorm nächsten stabilen Koopman-Operators $\tilde{\mathbf{K}}_t$ zu einem anhand von Messdaten approximierten (möglicherweise instabilen) Koopman-Operator \mathbf{K}_t entspricht dem Optimierungsproblem

$$\inf_{\tilde{\mathbf{K}}_t \in \mathbb{S}^{N \times N}} \|\mathbf{K}_t - \tilde{\mathbf{K}}_t\|_{\text{F}}^2 = \inf_{\mathbf{S} > 0, \mathbf{O} \in \text{O}(N), \mathbf{T} \geq 0, \|\mathbf{T}\| \leq 1} \|\mathbf{K}_t - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S}\|_{\text{F}}^2. \quad (4-44)$$

Der Beitrag [MAM23] schlägt jedoch vor, stattdessen die nächste stabile Matrix zur Kleinste-Quadrate-Lösung (3-27) zu betrachten, d. h. die verwendeten Daten \mathbf{X}, \mathbf{X}' (vgl. Gleichung (3-3)) mit zu berücksichtigen

$$\inf_{\tilde{\mathbf{K}}_t \in \mathbb{S}^{N \times N}} \left\| \Psi(\mathbf{X}') - \tilde{\mathbf{K}}_t \Psi(\mathbf{X}) \right\|_F^2 = \inf_{\mathbf{S} > 0, \mathbf{O} \in \mathcal{O}(N), \mathbf{T} \geq 0, \|\mathbf{T}\| \leq 1} \left\| \Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) \right\|_F^2. \quad (4-45)$$

Diese Formulierung (4-45) führt zu einer anderen Lösung als Gleichung (4-44), wobei eine erhöhte Genauigkeit des resultierenden stabilen EDMD-Modells bezüglich der verwendeten Messdaten erzielt wird. Die Kostenfunktion $L : \mathbb{R}^{N \times N} \times \mathbb{R}^{N \times N} \times \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich mit

$$\begin{aligned} L(\mathbf{S}, \mathbf{O}, \mathbf{T}) &= \left\| \Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) \right\|_F^2 \\ &= \text{spur} \left(\Psi^\top(\mathbf{X}') \Psi(\mathbf{X}') + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (\Psi^\top(\mathbf{X}) \mathbf{S}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{O}^\top \mathbf{S}^{-\top} - 2 \Psi^\top(\mathbf{X}')) \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) \right) \end{aligned} \quad (4-46)$$

und die Gradienten werden ähnlich hergeleitet wie in [GKS19]

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{S}} L &= 2 \mathbf{S}^{-\top} \left(\Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) \right) \Psi^\top(\mathbf{X}) \mathbf{S}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{O}^\top \mathbf{S}^{-\top} + \dots \\ &\quad \dots - 2 \mathbf{T}^\top \mathbf{O}^\top \mathbf{S}^{-\top} \left(\Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) \right) \Psi^\top(\mathbf{X}), \end{aligned} \quad (4-47a)$$

$$\nabla_{\mathbf{O}} L = -2 \mathbf{S}^{-\top} \left(\Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) \right) \Psi^\top(\mathbf{X}) \mathbf{S}^\top \mathbf{T}^\top, \quad (4-47b)$$

$$\nabla_{\mathbf{T}} L = -2 \mathbf{O}^\top \mathbf{S}^{-\top} \left(\Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) \right) \Psi^\top(\mathbf{X}) \mathbf{S}^\top. \quad (4-47c)$$

In [MXM20] wird dieser Ansatz auf Systeme mit Steuereingang erweitert, d. h.

$$\inf_{\mathbf{S} > 0, \mathbf{O} \in \mathcal{O}(N), \mathbf{T} \geq 0, \|\mathbf{T}\| \leq 1} \left\| \Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}_t \mathbf{U} \right\|_F^2, \quad (4-48)$$

mit den Messdaten (3-3). Für die Kostenfunktion $L : \mathbb{R}^{N \times N} \times \mathbb{R}^{N \times N} \times \mathbb{R}^{N \times N} \times \mathbb{R}^{N \times p} \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} L(\mathbf{S}, \mathbf{O}, \mathbf{T}, \mathbf{B}_t) &= \left\| \Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}_t \mathbf{U} \right\|_F^2 \\ &= \text{spur} \left(\Psi^\top(\mathbf{X}') \Psi(\mathbf{X}') + (\mathbf{U}^\top \mathbf{B}_t^\top - 2 \Psi^\top(\mathbf{X}')) \mathbf{B}_t \mathbf{U} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (\Psi^\top(\mathbf{X}) \mathbf{S}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{O}^\top \mathbf{S}^{-\top} - 2 \Psi^\top(\mathbf{X}') + 2 \mathbf{U}^\top) \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) \right) \end{aligned} \quad (4-49)$$

und damit für die Gradienten

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{S}} L &= 2 \mathbf{S}^{-\top} \left(\Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}_t \mathbf{U} \right) \Psi^\top(\mathbf{X}) \mathbf{S}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{O}^\top \mathbf{S}^{-\top} + \dots \\ &\quad \dots - 2 \mathbf{T}^\top \mathbf{O}^\top \mathbf{S}^{-\top} \left(\Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}_t \mathbf{U} \right) \Psi^\top(\mathbf{X}), \end{aligned} \quad (4-50a)$$

$$\nabla_{\mathbf{O}} L = -2 \mathbf{S}^{-\top} \left(\Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}_t \mathbf{U} \right) \Psi^\top(\mathbf{X}) \mathbf{S}^\top \mathbf{T}^\top, \quad (4-50b)$$

$$\nabla_{\mathbf{T}} L = -2 \mathbf{O}^\top \mathbf{S}^{-\top} \left(\Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}_t \mathbf{U} \right) \Psi^\top(\mathbf{X}) \mathbf{S}^\top, \quad (4-50c)$$

$$\nabla_{\mathbf{B}_t} L = -2 \left(\Psi(\mathbf{X}') - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{S} \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}_t \mathbf{U} \right) \mathbf{U}^\top. \quad (4-50d)$$

Im Vergleich zum Verfahren aus [GKS19], bei dem die Dynamikmatrix iterativ auf die nächste stabile Matrix projiziert wird, zeichnet sich der Ansatz in [MXM20; MAM23] dadurch aus, dass bereits in der ersten Iteration ein stabiles Modell berechnet wird. Durch die Verwendung der Daten \mathbf{X} , \mathbf{X}' , \mathbf{U} wird der Abstand zur Kleinste-Quadrate-Lösung (3-27) mit jeder Iteration reduziert. Diese Eigenschaft ist vorteilhaft für Online-Anwendungen, bei denen das stabile Modell schnell berechnet werden muss. Die iterative Berechnung von \mathbf{B}_t erweitert die zulässige Menge im Vergleich für den Fall, in dem nur \mathbf{K}_t angepasst wird. [HIS20] beschreibt einen ähnlichen Ansatz, der unter der Annahme einer vorab bekannten Versorgungsrate $s(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ das EDMD-Modell anhand der Messdaten so berechnet, dass es passiv ist.

4.4 Datengetriebene PCHD-Modelle

Stabile Koopman-Operatoren, vgl. Abschnitt 4.3 ermöglichen es, die Stabilitätseigenschaft eines datengetriebenen EDMD-Modell zu gewährleisten, indem Eigenwerte einer Matrix gezielt verschoben werden. Inspiriert durch diese Idee und die herausragenden Vorteile passiver Systeme für den Regelungsentwurf wird im Folgenden eine Methode zur datengetriebenen Bestimmung von PCHD-Modellen unter gezielter Ausnutzung von physikalischem Vorwissen beschrieben, die erstmals im eigenen Beitrag [JTT22b] veröffentlicht wurde. Zur Durchführung dieser Methode sind die nachstehenden Voraussetzungen zu erfüllen:

- Es werden zeitkontinuierliche eingangsa affine Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4-51a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4-51b)$$

mit $\dim \mathbf{u} = \dim \mathbf{y}$, vgl. Abschnitt 4.1, betrachtet.

- Es sind Daten des Zustands \mathbf{x} und des Systemeingangs \mathbf{u} verfügbar, die sowohl aus Messungen als auch aus Simulationen stammen können.
- Grundlegendes physikalisches Vorwissen über die gespeicherte Energie der zu modellierenden Dynamik ist bekannt.

Die Matrizen \mathbf{J} , \mathbf{D} und \mathbf{B} , die im Allgemeinen von \mathbf{x} abhängig sind, vgl. Gleichung (4-5a), werden als konstant angenommen¹⁶. Außerdem werden die Matrizen \mathbf{J} und \mathbf{D} zusammengefasst zu $\mathbf{K} = \mathbf{J} - \mathbf{D}$. Diese Annahme stellt keine Einschränkung dar, weil sich jede quadratische Matrix eindeutig in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Teil zerlegen lässt

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{K} - \mathbf{K}^T}{2}, \quad \mathbf{D} = -\frac{\mathbf{K} + \mathbf{K}^T}{2}. \quad (4-52)$$

Die Messdaten sind angeordnet in den Snapshot-Matrizen

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M] \in \mathbb{R}^{n \times M}, \quad (4-53a)$$

¹⁶Diese Annahme beruht darauf, dass sich die Dynamik eines PCHD-Modells näherungsweise durch konstante Matrizen beschreiben lässt, ähnlich der Vorgehensweise bei der Vereinfachung eines nichtlinearen Modells durch Linearisierung um einen oder mehrere Arbeitspunkte, vgl. Abschnitt 1.1.

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M] \in \mathbb{R}^{p \times M}, \quad (4-53b)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \dots, \dot{\mathbf{x}}_M] \in \mathbb{R}^{n \times M}. \quad (4-53c)$$

Physikalisches Vorwissen über die im System gespeicherte Energie

$$V(\mathbf{x}) = E_{\text{kinetisch}} + E_{\text{potentiell}} \quad (4-54)$$

wird für die Konstruktion der Funktion ¹⁷

$$\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Psi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \quad (4-55)$$

verwendet. Damit ergibt sich nach der Idee von Gleichung (4-5a) die Systembeschreibung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\Psi(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (4-56)$$

Ähnlich wie beim EDMD-Verfahren wird der Zusammenhang über die Messdaten

$$\dot{\mathbf{X}} \approx \mathbf{K}\Psi(\mathbf{X}) + \mathbf{B}\mathbf{U} = [\mathbf{K}, \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}) \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (4-57)$$

betrachtet, sodass sich die Kleinste-Quadrate-Lösung mit

$$[\mathbf{K}, \mathbf{B}] = \dot{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}) \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}^+ \quad (4-58)$$

ergibt. Als Nächstes werden die Matrizen \mathbf{J} und \mathbf{D} mittels Gleichung (4-52) berechnet. Um eine PCHD-Form zu erreichen, vgl. Gleichung (4-5a), ist es erforderlich, dass \mathbf{D} positiv semidefinit ist. Die Matrix \mathbf{D} ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte von \mathbf{D} größer oder gleich null sind, vgl. Anhang A1.1. Für die im Sinne der Frobeniusnorm nächste Projektion der Matrix \mathbf{D} in die Menge der positiv semidefiniten Matrizen wird Gleichung (4-16) verwendet, d. h.

$$\mathbf{D}_\geq = \mathcal{P}_\geq(\mathbf{D}) = \mathbf{V} \max(\mathbf{0}_{n \times n}, \mathbf{\Sigma}) \mathbf{V}^\top := \mathbf{V} \begin{bmatrix} \max(0, \lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \max(0, \lambda_n) \end{bmatrix}, \quad (4-59)$$

wobei $\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$ die orthogonale Eigenzerlegung von \mathbf{D} ist. Die resultierende Systembeschreibung liegt in PCHD-Form vor und ist passiv

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J} - \mathbf{D}_\geq) \Psi(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (4-60)$$

Der Algorithmus ist im Bild 4-4 zusammengefasst. Im Folgenden wird die Methode simulativ anhand des Pendels sowie experimentell anhand des Schlagmechanismus des Golfroboters demonstriert.

¹⁷Der Gradient der Energiefunktion V wird hier aufgrund des verwandten Algorithmus in Analogie zu den Observablen beim EDMD-Verfahren mit $\Psi(\mathbf{x})$ bezeichnet.

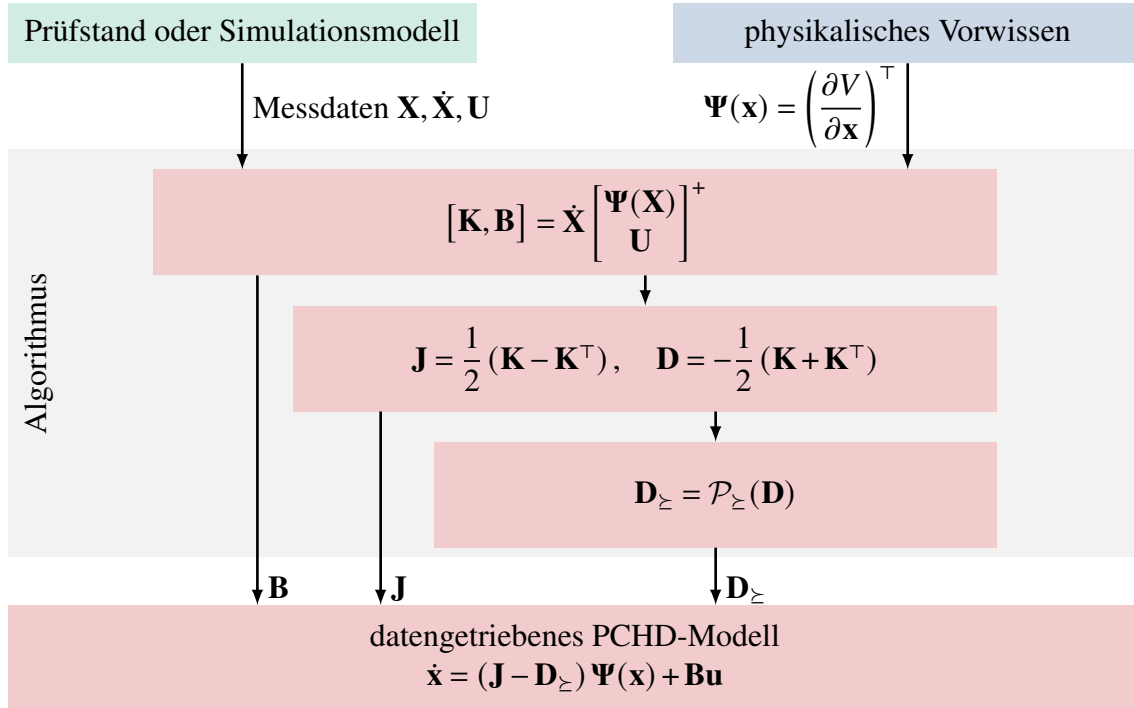


Bild 4-4: Schematische Übersicht des Algorithmus zur Bestimmung eines datengetriebenen PCHD-Modells.

4.4.1 Anwendung am Pendel

Das resultierende datengetriebene PCHD-Modell für das Pendel (1-1) sowie eine ausführliche Beschreibung des Systems und der verwendeten Trainingsdaten wurden bereits im Kapitel 1 vorab präsentiert, um die Motivation dieser Dissertation zu verdeutlichen. Aufgrund der im System gespeicherte Energie

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{x}_2^2 + mgl(1 - \cos x_1) \quad (4-61)$$

ergibt sich

$$\Psi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top = \begin{bmatrix} mgl \sin x_1 \\ ml^2 \dot{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (4-62)$$

Der Algorithmus im Bild 4-4 liefert das datengetriebene PCHD-Modell mit

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^\top, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1,6 \end{bmatrix} = \mathbf{D}^\top \geq 0, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (4-63)$$

und damit

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \mathbf{b}u = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1,6 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} mgl \sin x_1 \\ ml^2 \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u. \quad (4-64)$$

Diese Matrizen korrespondieren exakt mit der analytisch hergeleiteten PCHD-Form des Originalsystems (1-1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{d}{ml^2} x_2 + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -\frac{1}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{m^2 l^4} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} mgl \sin x_1 \\ ml^2 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \quad (4-65)$$

mit

$$\mathbf{J}_{\text{phys}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -\frac{1}{ml^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\text{phys}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{m^2 l^4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\text{phys}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}. \quad (4-66)$$

Die Berechnung des Algorithmus liefert unmittelbar $\mathbf{D}_{\geq} = \mathbf{D}$, sodass keine nachträgliche Verschiebung der Eigenwerte erforderlich ist.

Zur Untersuchung der Robustheit gegenüber Modellunsicherheiten bzw. fehlerhaftem physikalischen Vorwissen wurden datengetriebene PCHD-Modelle für das Pendel bestimmt, bei denen für die Festlegung von $\Psi(\mathbf{x})$ eine Abweichung einzelner Parameter um $\pm 10\%$ vom Originalwert angenommen wurde. Das Bild 4-5 zeigt die dazugehörigen prädizierten Verläufe für das autonom schwingende Pendel. Es ist zu erkennen, dass die Verläufe trotz der Parameterabweichungen von $\pm 10\%$ nur geringfügig vom Originalsystem abweichen. Die Abweichungen der Parameter m und d werden durch den datengetriebenen Algorithmus vollständig korrigiert. Die Ergebnisse für die Abweichungen der Parameter g und l lassen sich hingegen dadurch erklären, dass diese Parameter einen erheblichen Einfluss auf die Schwingungsdynamik, d. h. die Eigenfrequenz, haben. Die hier angenommene Abweichung dient illustrativen Zwecken; bei vorhandener Unsicherheit bezüglich der Systemparameter ist es im Allgemeinen empfehlenswert, diese im Vorfeld zu identifizieren oder alternativ in Form einer Hyperparameteroptimierung¹⁸ zu überlagern.

4.4.2 Anwendung am Schlagmechanismus des Golfroboters

Der Golfroboter, vgl. Bild 3-7, wurde bereits im Abschnitt 3.4 ausführlich beschrieben. Die Dynamik des Schlagmechanismus ergibt sich durch

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-mga \sin x_1 - M_d(\mathbf{x}) + 4u}{J} \end{bmatrix}, \quad M_d(\mathbf{x}) = dx_2 + r\mu \operatorname{sgn} x_2 |mx_2^2 a + mg \cos x_1|, \quad (4-67a)$$

$$y = x_1. \quad (4-67b)$$

Die im System gespeicherte Energie ist gegeben durch

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} J x_2^2 + mga(1 - \cos x_1), \quad (4-68)$$

sodass

$$\Psi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \begin{bmatrix} mga \sin x_1 \\ J x_2 \end{bmatrix}. \quad (4-69)$$

¹⁸Die Hyperparameteroptimierung beschreibt den Schritt im maschinellen Lernen, bei dem die besten Einstellungen für vorab festgelegte Parameter eines Modells oder Algorithmus festgelegt werden. [BBBK11] bietet ausführliche Informationen und Strategien zur Hyperparameteroptimierung.

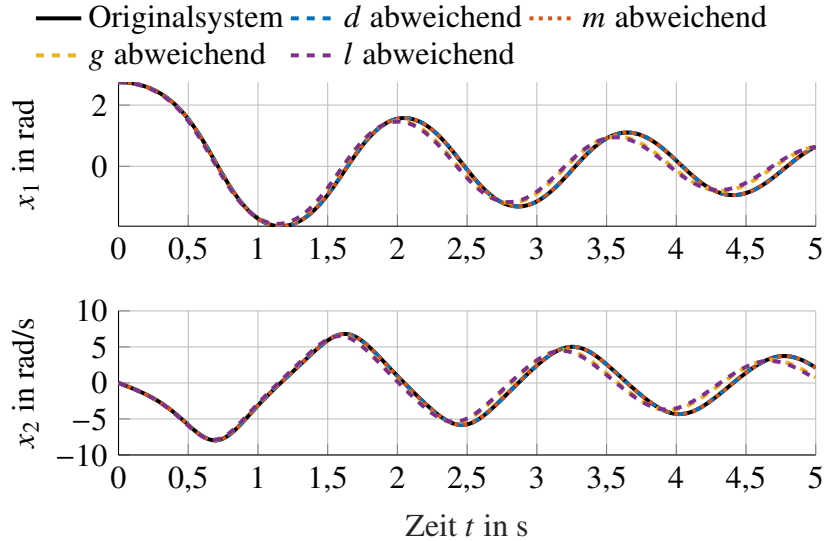


Bild 4-5: Simulative Analyse fehlerhaft gewählter physikalischer Parameter anhand identifizierter PCHD-Modelle mit Parameterabweichungen von $\pm 10\%$.

Der Algorithmus im Bild 4-4 liefert für dieselben Trainingsdaten wie im Bild 3-13 das datengetriebene PCHD-Modell

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 6,1844 \\ -6,1844 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22,9965 \end{bmatrix}, \quad (4-70a)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -0,736 \\ -0,736 & 6,4364 \end{bmatrix} \text{ mit den Eigenwerten } \lambda_1 = -0,0831, \lambda_2 = 6,5195 \quad (4-70b)$$

und der positiv semidefiniten Matrix

$$\mathbf{D}_{\geq} = \begin{bmatrix} 0,0820 & -0,7267 \\ -0,7267 & 6,4375 \end{bmatrix} \text{ mit den Eigenwerten } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6,5195. \quad (4-71)$$

Das physikalische PCHD-Modell

$$\mathbf{J}_{\text{phys}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{j} \\ -\frac{1}{j} & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 6,9204 \\ -6,9204 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\text{phys}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_{\text{phys}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (4-72a)$$

$$\mathbf{b}_{\text{phys}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{j} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 27,6817 \end{bmatrix} \quad \text{mit } d_{\text{phys}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{d}{j^2}, & x_2 = 0 \\ \frac{d}{j^2} + \frac{r\mu}{j^2} \left| \frac{mx_2^2 a + mg \cos x_1}{x_2} \right|, & x_2 \neq 0 \end{cases} \quad (4-72b)$$

lässt sich analytisch aus dem physikalischen nichtlinearen Modell (4-67) herleiten.

Alternativ zum Vorgehen im Bild 4-4 lässt sich auch für die Berechnung des datengetriebenen PCHD-Modells ein Gradientenabstiegsverfahren mit Projektion in die zulässige Menge ($\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T, \mathbf{D} = \mathbf{D}^T \geq 0$) nutzen, vgl. Abschnitt 4.2. Hierfür wird das Optimierungsproblem

$$\inf_{\mathbf{J}=-\mathbf{J}^T, \mathbf{D}=-\mathbf{D}^T, \mathbf{D} \geq 0, \mathbf{B}} \|\dot{\mathbf{X}} - (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}\mathbf{U}\|_{\text{F}}^2 \quad (4-73)$$

mit der Kostenfunktion $L : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{J}, \mathbf{D}, \mathbf{B}) &= \|\dot{\mathbf{X}} - (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}\mathbf{U}\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &= \text{spur} \left(\dot{\mathbf{X}}^{\top} \dot{\mathbf{X}} - (2\dot{\mathbf{X}}^{\top} - 2\mathbf{U}^{\top} \mathbf{B}^{\top} - \Psi^{\top} (\mathbf{J}^{\top} - \mathbf{D}^{\top})) (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \Psi(\mathbf{X}) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - (2\dot{\mathbf{X}}^{\top} - \mathbf{U}^{\top} \mathbf{B}^{\top}) \mathbf{B}\mathbf{U} \right) \end{aligned} \quad (4-74)$$

und den damit berechneten Gradienten

$$\nabla_{\mathbf{J}} L = -2 \left(\dot{\mathbf{X}} - (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}\mathbf{U} \right) \Psi^{\top}(\mathbf{X}), \quad (4-75a)$$

$$\nabla_{\mathbf{D}} L = 2 \left(\dot{\mathbf{X}} - (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}\mathbf{U} \right) \Psi^{\top}(\mathbf{X}), \quad (4-75b)$$

$$\nabla_{\mathbf{B}} L = -2 \left(\dot{\mathbf{X}} - (\mathbf{J} - \mathbf{D}) \Psi(\mathbf{X}) - \mathbf{B}\mathbf{U} \right) \mathbf{U}^{\top} \quad (4-75c)$$

betrachtet. Die approximierte Lösung wurde mittels des Algorithmus 4-1 berechnet und ist gegeben durch

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 6,1066 \\ -6,1066 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,3221 \\ 23,0287 \end{bmatrix}, \quad (4-76a)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0,0658 & -0,6516 \\ -0,6516 & 6,4526 \end{bmatrix} \text{ mit den Eigenwerten } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6,5184. \quad (4-76b)$$

Das Bild 4-6 zeigt die hohe Prädiktionsgenauigkeit beider datengetriebener PCHD-Modelle für die Testdaten im Vergleich zum nichtlinearen physikalischen Modell mittels des kumulierten Fehlers

$$e(t_k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{k} \left(x_{1,\text{Messung}}(t_m) - x_{1,\text{Prädiktion}}(t_m) \right)^2. \quad (4-77)$$

Das Modell (4-76), das mittels des projizierten Gradientenabstiegs, vgl. Algorithmus 4-1, berechnet wurde, erzielt dabei eine höhere Genauigkeit als das Modell (4-70), das mittels des einfachen Algorithmus im Bild 4-4 berechnet wurde. Diese Beobachtung lässt sich damit begründen, dass beim projizierten Gradientenabstieg der Abstand zur Kleinsten-Quadrate-Lösung über die Daten verringert wird, was sich am resultierenden Wert der Kostenfunktion

$$L_{\text{proj.Gradientenabstieg}} = 3,7606 \times 10^5 \quad (4-78)$$

erkennen lässt, der kleiner ist als der bei der Lösung nach Bild 4-4

$$L_{\text{ddPCHD-Algorithmus}} = 3,7732 \times 10^5. \quad (4-79)$$

An dieser Stelle ist anzumerken, dass beim Schlagmechanismus des Golfroboters $\mathbf{D}_{\text{phys}}(\mathbf{x})$ von \mathbf{x} abhängt. Angesichts der dennoch hohen Modellgüte des datengetriebenen PCHD-Modells mit konstanter Matrix \mathbf{D} , vgl. Bild 4-6, kann davon ausgegangen werden, dass die dominanten Nichtlinearitäten bereits in der Energiefunktion $V(\mathbf{x})$ berücksichtigt sind.

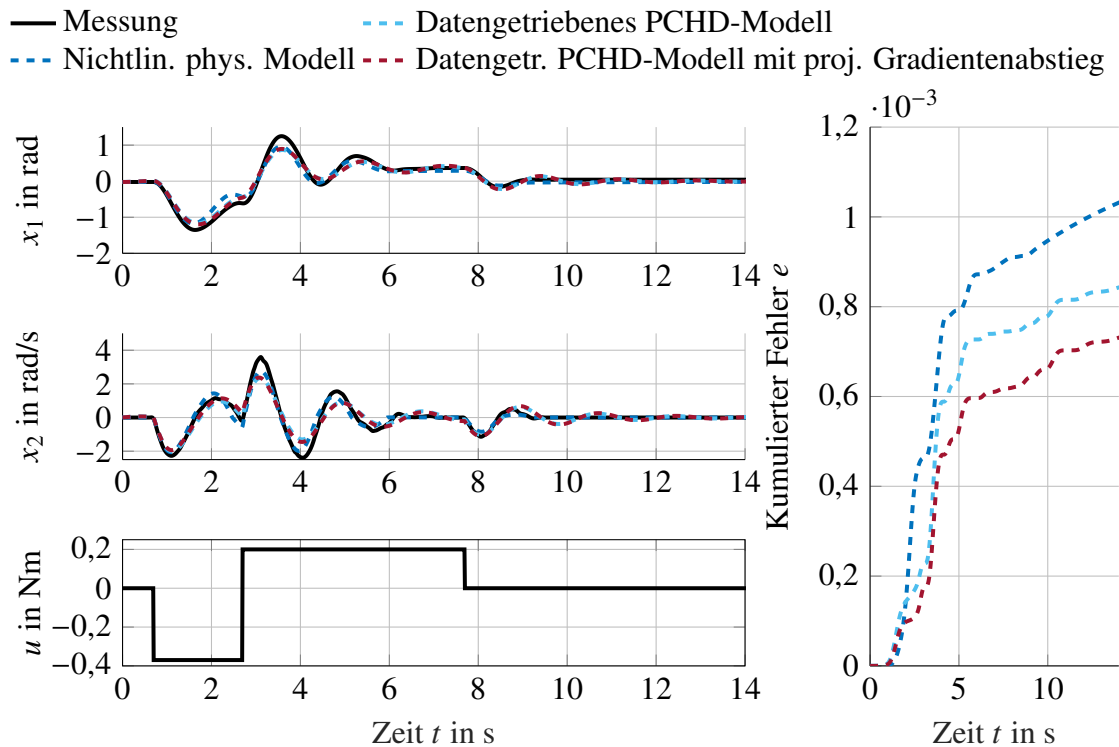


Bild 4-6: Die datengetriebenen PCHD-Modelle weisen eine höhere Prädiktionsgüte als das nichtlineare physikalische Modell (4-67) auf. Das Modell (4-76), das mittels des projizierten Gradientenabstiegs, vgl. Algorithmus 4-1, berechnet wurde, erzielt dabei wie erwartet eine höhere Genauigkeit als das Modell (4-70), das mittels des simplen Algorithmus im Bild 4-4 berechnet wurde.

4.4.3 Anwendung am Doppelpendel

Anhand eines unaktuerten und reibungsfreien Doppelpendels, vgl. Skizze im Bild 4-7, werden die Grenzen des vorgestellten Verfahrens zur datengetriebenen Bestimmung von PCHD-Modellen untersucht. Dieses System zeigt eine chaotische Dynamik. Das bedeutet, dass selbst minimale Änderungen der Anfangsbedingungen eines chaotischen Systems zu stark unterschiedlichen Trajektorien führen können, vgl. [PRR⁺22]. Im Folgenden wird zunächst kurz die physikalisch motivierte Modellbildung beschrieben. Anschließend wird die datengetriebene Bestimmung eines PCHD-Modells diskutiert.

Ein physikalisch motiviertes nichtlineares Modell lässt sich mittels des Lagrange-Formalismus herleiten¹⁹. Unter der Annahme, dass die Nulllage $\varphi = 0$ sich in der unteren Ruhelage befindet und die Pendelarme als Punktmassen mit den in der Tabelle 4-1 angegebenen Parametern modelliert sind, ergeben sich die kinetische und potentielle Energie des Systems durch

$$E_{\text{kinetisch}} = ml^2 \left(\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right), \quad (4-80a)$$

$$E_{\text{potentiell}} = -mgl(2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2). \quad (4-80b)$$

¹⁹Eine ausführliche Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen findet sich beispielsweise in [TKOT11].

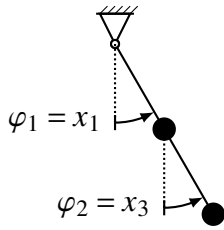


Bild 4-7: Doppelpendel.

Tabelle 4-1: Physikalische Parameter.

Symbol	Physikalischer Parameter	Wert
$m_1 = m_2 = m$	(Punkt-)Massen der Pendel	1 kg
$l_1 = l_2 = l$	Längen der beiden Pendelarme	0,5 m
g	Gravitationsbeschleunigung	$9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Für die Lagrange-Funktion gilt damit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= E_{\text{kinetisch}} - E_{\text{potentiell}} \\ &= ml^2 \left(\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) + mlg(2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2), \end{aligned} \quad (4-81)$$

sodass sich die Bewegungsdifferentialgleichungen formuliert in den Minimalkoordinaten $[q_1, q_2]^T = [\varphi_1, \varphi_2]^T$ mittels des Lagrange-Formalismus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (4-82)$$

zu

$$ml^2 \left(2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right) + 2mlg \sin \varphi_1 = 0, \quad (4-83a)$$

$$ml^2 \left(\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right) + mlg \sin \varphi_2 = 0 \quad (4-83b)$$

ergeben. Mit $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2]^T$ lässt sich die Dynamik des Doppelpendels im Zustandsraum formulieren:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{\frac{g}{l} (\sin x_3 \cos(x_1 - x_3) - 2 \sin x_1) - \sin(x_1 - x_3) (x_4^2 + x_2^2 \cos(x_1 - x_3))}{2 - \cos^2(x_1 - x_3)}} \\ x_4 \\ \frac{2 \frac{g}{l} (\sin x_1 \cos(x_1 - x_3) - \sin x_3) + \sin(x_1 - x_3) (2x_2^2 + x_4^2 \cos(x_1 - x_3))}{2 - \cos^2(x_1 - x_3)}} \end{bmatrix}. \quad (4-84)$$

Für das datengetriebene PCHD-Modell wird physikalisches Vorwissen in Form der im System gespeicherten Energie

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= E_{\text{kinetisch}} + E_{\text{potentiell}} \\ &= ml^2 \left(x_2^2 + \frac{1}{2} x_4^2 + x_2 x_4 \cos(x_1 - x_3) \right) - mlg(2 \cos x_1 + \cos x_3) \end{aligned} \quad (4-85)$$

benötigt. Der Gradient von $V(\mathbf{x})$ definiert die Funktion

$$\Psi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top = \begin{bmatrix} -ml^2 x_2 x_4 \sin(x_1 - x_3) + 2mlg \sin x_1 \\ 2ml^2 x_2 + ml^2 x_4 \cos(x_1 - x_3) \\ ml^2 x_2 x_4 \sin(x_1 - x_3) + mlg \sin x_3 \\ ml^2 x_4 + ml^2 x_2 \cos(x_1 - x_3) \end{bmatrix}. \quad (4-86)$$

Für die Analyse der Modellgenauigkeit des datengetriebenen PCHD-Modells werden unterschiedliche Szenarien betrachtet, bei denen die Trainingsdaten sowie die Testtrajektorie variiert werden, vgl. Bild 4-8. Für jedes Szenario werden 100 Trajektorien mit einer Dauer von jeweils 3 s und einem additiven weißen Rauschen simulativ generiert. Die betrachteten Anfangsauslenkungen werden vom Szenario in Bild 4-8(a) bis zum Szenario in Bild 4-8(d) schrittweise reduziert, wobei die Zahlenwerte der Matrizen der berechneten datengetriebenen PCHD-Modelle im Anhang A4 dargestellt sind. Im Bild 4-9 ist jeweils der kumulierte Fehler

$$e(t_k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{k} \left\| \mathbf{x}_{\text{Originalsystem}}(t_m) - \mathbf{x}_{\text{Prädiktion}}(t_m) \right\|^2 \quad (4-87)$$

der unterschiedlichen datengetriebenen PCHD-Modelle dargestellt. Es ist zu erkennen, dass alle vier datengetriebenen PCHD-Modelle in der Lage sind, die chaotische Dynamik des Doppelpendels zumindest für 0,4 s präzise zu prädizieren. Mit steigender Anfangsauslenkung und für einen längeren Zeithorizont sinkt die Modellgenauigkeit jedoch stark. Eine ähnliche Beobachtung wurde im Beitrag [ALM17] anhand des EDMD-Verfahrens formuliert, dessen Modellgenauigkeit sich mit steigender im System gespeicherter Energie reduziert.

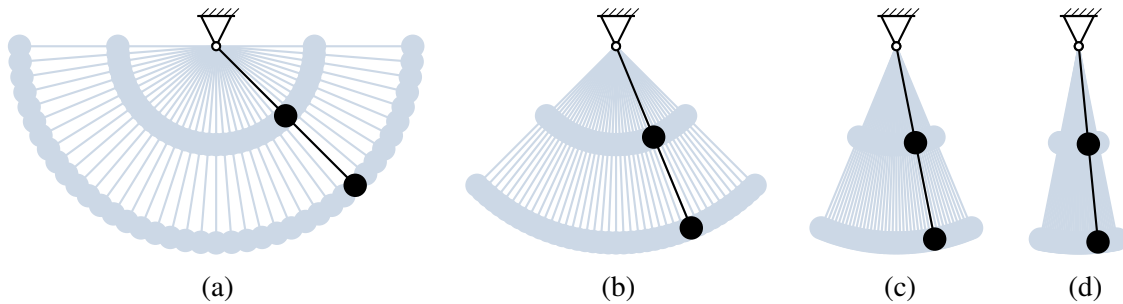


Bild 4-8: Das Doppelpendel dient dazu die Grenzen des vorgestellten Verfahrens zur datengetriebenen Bestimmung von PCHD-Modellen zu illustrieren. Es werden vier unterschiedliche Szenarien der Trainings- und Testdaten untersucht. Die Anfangsauslenkungen für die Trainingsdaten sind schematisch in blau und die Anfangsauslenkung für die Testtrajektorie in schwarz dargestellt.

Aus der Betrachtung der Gleichungen (4-84) und (4-86) ist ersichtlich, dass es für das Doppelpendel nicht ohne Weiteres gelingt, eine PCHD-Beschreibung analytisch herzuleiten. Darüber hinaus wäre die Matrix $\mathbf{J}_{\text{phys}}(\mathbf{x})$ von \mathbf{x} abhängig. Die Approximation der Dynamik des Doppelpendels mittels einer konstanten Matrix \mathbf{J} lässt sich hier ähnlich interpretieren wie die Linearisierung der Dynamik um den Betriebspunkt der unteren Ruhelage. Diese Schlussfolgerung deckt sich mit der Analyse der Modellgenauigkeit für

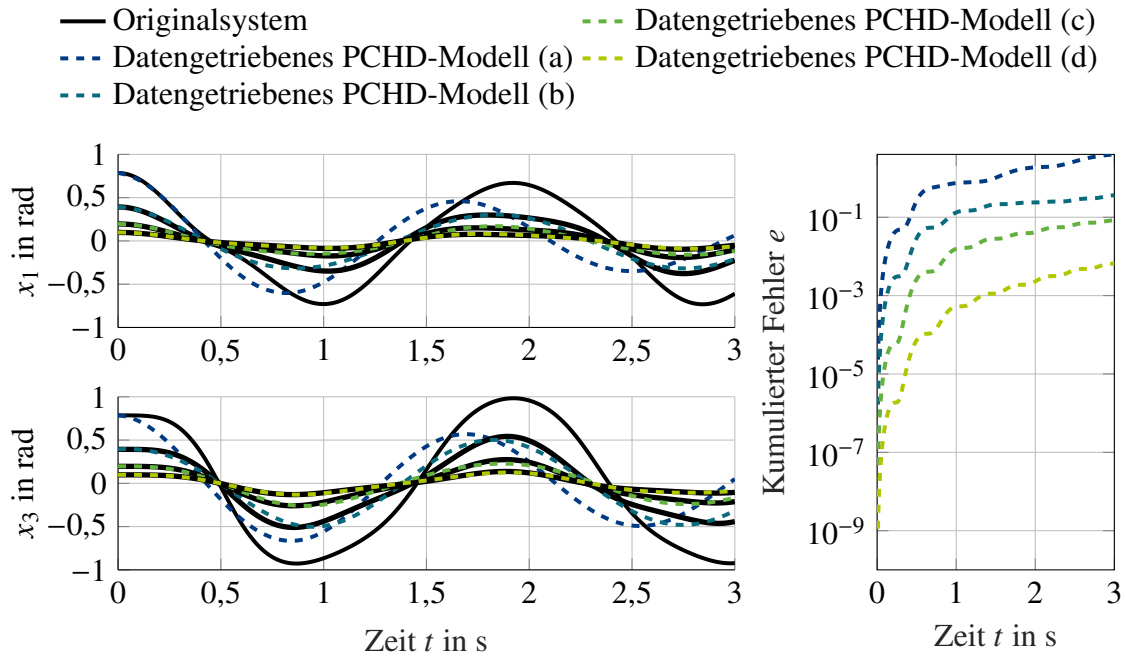


Bild 4-9: Die Prädiktionsgüte des datengetriebenen PCHD-Modells für das simulierte Doppelpendel sinkt bei steigender Anfangsauslenkung stark. Aus Platzgründen wird auf die Darstellung der Verläufe für die Zustände x_2 und x_4 verzichtet.

unterschiedliche Anfangsauslenkungen, vgl. Bild 4-9. Am Beispiel des Doppelpendels erreicht das im Abschnitt 4.4 beschriebene Verfahren zur datengetriebenen Bestimmung von PCHD-Modellen für größere Anfangsauslenkungen die Grenze der erreichbaren Modellgenauigkeit.

4.4.4 Anwendung an einem zweidimensionalen Multicopter

Als weiteres Beispiel für die Anwendung datengetriebener PCHD-Modelle dient ein zweidimensionaler Multicopter. Multicopter sind Luftfahrzeuge, deren Auftrieb durch mehrere²⁰ nach unten wirkende Propeller erzeugt wird, wodurch ein senkrechtes Starten und Landen ermöglicht wird. Durch die Variation der Propellerdrehzahlen lässt sich die Orientierung und damit das Flugverhalten gezielt steuern [Qua17]. Aufgrund der Flexibilität, Effizienz und Zuverlässigkeit bei gleichzeitig niedrigen Wartungskosten spielen Multicopter eine herausragende Rolle beispielsweise bei der Paketzustellung [GLP⁺15] oder in der Katastrophenhilfe [RWR18].

Der Einfachheit halber wird in dieser Dissertation ein Multicopter mit zwei Propellern in der Ebene betrachtet, vgl. Skizze im Bild 4-10. In Anlehnung an [MDP96; FLMR99] ergeben sich die Differentialgleichungen der als linear gedämpft angenommenen Flugbewegung in drei Freiheitsgraden mit den Parametern aus der Tabelle 4-2 zu:

$$m\ddot{x} = -(F_1 + F_2) \sin \varphi - d_t \dot{x}, \quad (4-88a)$$

$$m\ddot{y} = (F_1 + F_2) \cos \varphi - mg - d_t \dot{y}, \quad (4-88b)$$

²⁰Multicopter mit vier Propellern werden beispielsweise als Quadrocopter, solche mit sechs Propellern als Hexacopter bezeichnet.

$$J\ddot{\varphi} = (F_2 - F_1)l - d_r\dot{\varphi}. \quad (4-88c)$$

Mit $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, \varphi, \dot{\varphi}]^T$ und $[u_1, u_2]^T = [F_1, F_2]^T$ lässt sich die

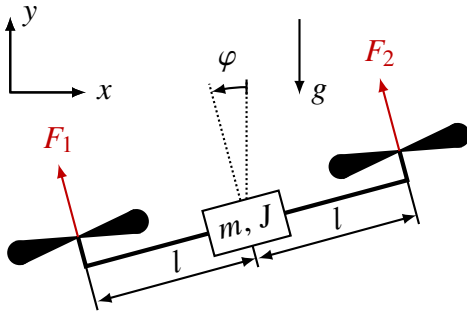


Bild 4-10: Multicopter.

Tabelle 4-2: Physikalische Parameter.

Symbol	Physikalischer Parameter	Wert
m	Masse	1 kg
J	Rotationsträgheit	0,5 kg m ²
l	Länge zu den Propellern	0,5 m
g	Gravitationsbeschleunigung	9,81 $\frac{m}{s^2}$
d_t	translatorische Dämpfung	0,1 $\frac{kg}{s}$
d_r	rotatorische Dämpfung	0,1 $\frac{kg m^2}{s}$

Dynamik im Zustandsraum

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{1}{m}(u_1 + u_2) \sin x_5 - \frac{d_t}{m}x_2 \\ x_4 \\ \frac{1}{m}(u_1 + u_2) \cos x_5 - g - \frac{d_t}{m}x_4 \\ x_6 \\ \frac{l}{J}(u_2 - u_1) - \frac{d_r}{J}x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{d_t}{m}x_2 \\ x_4 \\ -g - \frac{d_t}{m}x_4 \\ x_6 \\ -\frac{d_r}{J}x_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} \sin x_5 & -\frac{1}{m} \sin x_5 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} \cos x_5 & \frac{1}{m} \cos x_5 \\ 0 & 0 \\ -\frac{l}{J} & \frac{l}{J} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (4-89)$$

formulieren. Das System ist eingangsaffin mit einer Eingangsmatrix $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, die nicht konstant ist. Die im System gespeicherte Energie beträgt

$$V(\mathbf{x}) = E_{\text{kinetisch}} + E_{\text{potentiell}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{x}_4^2) + \frac{1}{2}J\dot{x}_6^2 + mgx_3, \quad (4-90)$$

sodass der Gradient sich zu

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)^T = [0, mx_2, mg, mx_4, 0, Jx_6]^T \quad (4-91)$$

berechnet. Die analytisch hergeleitete PCHD-Darstellung ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{d_t}{m^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} & -\frac{d_t}{m^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{J} & -\frac{d_r}{J^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ mx_2 \\ mg \\ mx_4 \\ 0 \\ Jx_6 \end{bmatrix} + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (4-92)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{J}_{\text{phys}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{J} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4-93a)$$

$$\mathbf{D}_{\text{phys}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_1}{m^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d_1}{m^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d_1}{J^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}, \quad (4-93b)$$

$$\mathbf{B}_{\text{phys}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} \sin x_5 & -\frac{1}{m} \sin x_5 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} \cos x_5 & \frac{1}{m} \cos x_5 \\ 0 & 0 \\ -\frac{l}{J} & \frac{l}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sin x_5 & -\sin x_5 \\ 0 & 0 \\ \cos x_5 & \cos x_5 \\ 0 & 0 \\ -20 & 20 \end{bmatrix}. \quad (4-93c)$$

Für die Bestimmung eines datengetriebenen PCHD-Modells werden als Trainingsdaten 100 Simulationen jeweils mit einer Dauer von 3 s mit zufälligen Anfangsbedingungen und Systemeingängen u_1 , u_2 und einem additiven weißen Rauschen verwendet. Der Algorithmus aus Bild 4-4 liefert die Matrizen

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5000 & 0 & 0 & 0 & -0,0074 \\ -0,5000 & 0 & -0,0493 & -0,1272 & 0 & 20,0026 \\ 0 & 0,0493 & 0 & 0,8103 & 0 & 0,0080 \\ 0 & 0,1272 & -0,8103 & 0 & 0 & 0,7271 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49,9917 \\ 0,0074 & -20,0026 & -0,0080 & -0,7271 & -49,9917 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4-94a)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5000 & 0 & 0 & 0 & 0,0074 \\ -0,5000 & -0,3182 & 0,0493 & -0,0207 & 0 & -20,0026 \\ 0 & 0,0493 & 0 & -0,1897 & 0 & -0,0080 \\ 0 & -0,0207 & -0,1897 & -0,2253 & 0 & -0,7271 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49,9917 \\ 0,0074 & -20,0026 & -0,0080 & -0,7271 & -49,9917 & 1000 \end{bmatrix}, \quad (4-94b)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0,0003 & 0,0003 \\ 0,7700 & -0,8056 \\ 0,0003 & -0,0003 \\ 0,0960 & 0,0693 \\ -0,0003 & 0,0002 \\ -20,0002 & 20,0003 \end{bmatrix}. \quad (4-94c)$$

Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass sich die Einträge in der jeweils ersten und fünften Spalte der Matrizen \mathbf{J} und \mathbf{D} bei der Berechnung von

$$\mathbf{K} = \mathbf{J} - \mathbf{D} \quad (4-95)$$

aufheben. Zur Analyse dieser Beobachtung wird die angestrebte PCHD-Systembeschreibung (4-56) unter der Berücksichtigung des Gradienten (4-91) betrachtet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\Psi(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} * & k_{12} & k_{13} & k_{14} & * & k_{16} \\ * & k_{22} & k_{23} & k_{24} & * & k_{26} \\ * & k_{32} & k_{33} & k_{34} & * & k_{36} \\ * & k_{42} & k_{43} & k_{44} & * & k_{46} \\ * & k_{52} & k_{53} & k_{54} & * & k_{56} \\ * & k_{62} & k_{63} & k_{64} & * & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ mx_2 \\ mg \\ mx_4 \\ 0 \\ Jx_6 \end{bmatrix} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (4-96)$$

Es fällt auf, dass die (farblich hervorgehobenen) Elemente in der ersten und fünften Spalte von \mathbf{K} aufgrund der partiellen Ableitungen $\psi_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0$, $\psi_5(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_5} = 0$ tatsächlich beliebig wählbar sind. Die numerische Lösung, vgl. Gleichung (4-58),

$$[\mathbf{K}, \mathbf{B}] = \dot{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}) \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}^+ \quad (4-97)$$

des datengetriebenen PCHD-Modells liefert infolge der Singularität von $\Psi(\mathbf{X})$ die Lösung

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,0148 \\ 0 & 0,3182 & -0,0986 & -0,1065 & 0 & 40,0053 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,0160 \\ 0 & 0,1480 & -0,6206 & 0,2253 & 0 & 1,4542 \\ 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 99,9834 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1000 \end{bmatrix}. \quad (4-98)$$

Dadurch, dass die erste und fünfte Spalte von \mathbf{K} Nullvektoren sind, ist die anschließende Zerlegung in die Matrizen \mathbf{J} und \mathbf{D} fehlerhaft, vgl. Gleichung (4-94).

Eine nahe liegende Lösung für dieses Problem könnte eine Modellordnungsreduktion des Systems auf die für die gespeicherte Energie relevanten Zustände

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^\top = [\dot{x}, y, \dot{y}, \dot{\varphi}]^\top \quad (4-99)$$

darstellen. Dieser Ansatz ist bei dem betrachteten Beispiel jedoch nicht anwendbar, weil die Eingangsmatrix $\mathbf{B}_{\text{phys}}(\mathbf{x})$ vom Winkel φ abhängig ist und daher die Prädiktion des Winkels φ erforderlich ist.

Die Eingangsmatrix \mathbf{B} des datengetriebenen PCHD-Modells, vgl. Gleichung (4-94), rekonstruiert zumindest die konstanten Einträge der analytisch hergeleiteten PCHD-Beschreibung \mathbf{B}_{phys} . Die Einträge, die von x_5 abhängen, werden numerisch approximiert. Ein ähnliches Resultat wird am Beispiel des Golfroboters für die Matrix $\mathbf{D}_{\text{phys}}(\mathbf{x})$ erzielt.

4.5 Zwischenfazit

In diesem Kapitel wurde der Begriff der regelungstechnischen Verwertbarkeit von Streckenmodellen für nichtlineare mechatronische Systeme erstmals geprägt und anhand konkreter Kriterien charakterisiert. Im Vergleich zu den Verfahren aus dem Kapitel 3 wurden anschließend Ansätze verfolgt, die physikalisches Vorwissen bezüglich der Stabilität und Energieerhaltung des Systems berücksichtigen. Nach einer Einführung in die Thematik passiver Systeme wurden bestehende Konzepte beschrieben, mit denen sich datengetriebene Modelle nachträglich so anpassen lassen, dass sie gewünschte Stabilitätseigenschaften aufweisen, beispielsweise stabile lineare Systeme oder stabile Koopman-Operatoren. Das primäre Ziel bei diesen Konzepten ist eine Reduktion des globalen Prädiktionsfehlers.

Inspiziert durch diese Vorarbeiten wurde schließlich eine neuartige Methode zur datengetriebenen Bestimmung von PCHD-Modellen unter Nutzung von physikalischem Vorwissen über die im System gespeicherte Energie entwickelt. Diese Methode hebt sich von den bestehenden Ansätzen zur Berechnung stabiler linearer Systeme bzw. stabiler Koopman-Operatoren ab: Auf der einen Seite wird diese Methode motiviert durch die explizite Nutzung von physikalischem Vorwissen und die damit einhergehende Interpretierbarkeit. Auf der anderen Seite lassen sich mit dieser Methode nicht nur (grenz-)stabile, sondern auch dissipative Systeme datengetrieben bestimmen. Anhand simulativer und experimenteller Anwendungsbeispiele konnte gezeigt werden, dass die resultierenden PCHD-Modelle in der Lage sind, die zugrunde liegende nichtlineare Dynamik mit einer hohen Genauigkeit zu approximieren. Gleichzeitig geht diese Methode mit einem reduzierten Modellierungsaufwand im Vergleich zur physikalisch motivierten Modellbildung einher, weil zusätzlich zu den Messdaten als Expert*innenwissen lediglich die im System gespeicherte Energie benötigt wird. Gleichwohl wurden am Beispiel des Doppelpendels sowie eines zweidimensionalen Multicopters Grenzen der Anwendbarkeit infolge einer chaotischen Dynamik oder Singularitäten bei speziellen Systemstrukturen aufgezeigt, bei denen die im System gespeicherte Energie nicht von allen Zuständen des Systems abhängt.

5 Modellbasierter Regelungsentwurf anhand der hybriden Modelle

In diesem Kapitel wird untersucht, wie sich die hybriden Modelle aus den Kapiteln 3 und 4 für den modellbasierten Regelungsentwurf nutzen lassen und welche Vorteile sich dabei durch die unterschiedlichen Systemstrukturen ergeben. Diese Aspekte sind entscheidend bezüglich des Ziels dieser Dissertation, hybride Streckenmodelle zu entwickeln, die eine aus regelungstechnischer Sicht verwertbare Struktur¹ aufweisen. Im Folgenden wird eine umfassende Recherche und anschließende Beurteilung von Entwurfsverfahren für den Regler und Beobachter basierend auf den hybriden Modellen präsentiert, wobei die nachstehenden Ansätze betrachtet werden.

Der Entwurf eines Riccati-Reglers mittels des Koopman-Operators wird im Abschnitt 5.1 beschrieben. Durch die systematische Ausnutzung der Linearitätseigenschaft von EDMD-Modellen lassen sich stabile nichtlineare Regelungsgesetze mithilfe eines linearen Entwurfsverfahrens bestimmen.

Modellprädiktive Regelungen mittels des Koopman-Operators werden im Abschnitt 5.2 thematisiert. Aufgrund der linearen Systemstruktur von EDMD-Modellen ergibt sich ein konvexes Optimierungsproblem, dessen Lösung sich einfach implementieren lässt.

Passivitätsbasierte Regelungen mittels eines datengetriebenen PCHD-Modells werden im Abschnitt 5.3 behandelt. Basierend auf dem Konzept der Passivität lassen sich robuste global stabile Regelkreise mit gewünschten dynamischen Eigenschaften entwerfen.

Der Beobachterentwurf mittels des Koopman-Operators wird im Abschnitt 5.4 im Kontext eines ganzheitlichen Entwurfs diskutiert. Aufgrund der linearen Systemstruktur lassen sich EDMD-Modelle geradlinig für den Beobachterentwurf mithilfe linearer Ansätze nutzen.

Das Ziel dieses Kapitels besteht nicht darin, neuartige Entwurfsverfahren zu entwickeln, sondern vielmehr darin, die regelungstechnische Anwendbarkeit der hybriden Modelle zu demonstrieren und diesbezüglich Handlungsempfehlungen abzuleiten. In den Abschnitten 5.1, 5.2 und 5.4 werden Entwurfsverfahren präsentiert, die dem aktuellen Forschungsstand der einschlägigen Literatur entsprechen. Im Abschnitt 5.3 wird darüber hinaus ein vollständig neuartiger Ansatz vorgestellt.

Die genannten Entwurfsverfahren werden beispielhaft anhand des Schlagmechanismus des Golfroboters untersucht und bewertet. Im Abschnitt 5.5 wird ein Fazit bezüglich der in diesem Kapitel gewonnenen Erkenntnisse gezogen. Um das Verständnis zu erleichtern und einen Vergleich mit klassischen Ansätzen zu ermöglichen, wird im Folgenden zunächst die Regelungsaufgabe dieses Systems spezifiziert sowie die bisher verwendete physikalisch motivierte Regelungsstrategie vorgestellt.

¹Der Begriff der regelungstechnischen Verwertbarkeit wird im Kapitel 4 definiert und das Bild 4-1 zeigt das angestrebte Vorgehen beim hybriden Entwurf.

Beschreibung der Regelungsaufgabe des Schlagmechanismus

Die Regelungsaufgabe des Schlagmechanismus am Golfroboter, vgl. Abschnitt 3.4, besteht darin, dass der Schläger den Ball mit einer präzise geregelten translatorischen Geschwindigkeit $\|\mathbf{v}_s\|$ schlägt². Diese entspricht einer rotatorischen Geschwindigkeit von

$$\dot{\varphi}_s = \frac{\|\mathbf{v}_s\|}{h}, \quad (5-1)$$

wobei h der Abstand von der Rotationsachse der Abtriebswelle zum Schlagpunkt des Schlägers ist, vgl. Tabelle 5-1. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_s$ soll genau dann erreicht werden, wenn der Schläger senkrecht nach unten steht, d. h. einen Winkel von $\varphi = 0$ rad aufweist. Basierend auf diesen Anforderungen wurde eine Schar von Solltrajektorien $\mathbf{w} = [\varphi, \dot{\varphi}]^T$ in Abhängigkeit der gewünschten Schlaggeschwindigkeit $\dot{\varphi}_s$ hergeleitet. In Anlehnung an eine authentische Golfschwungbewegung bestehen diese jeweils aus den drei Phasen *Ausholen*, *Schlagen*, *Rückholen*, vgl. Bild 5-1, wobei die frei wählbaren Parameter φ_a und T_a den Winkel und die Dauer des Aushol- und Rückholvorgangs charakterisieren, vgl. Tabelle 5-1. Die abschnittsweise definierten Funktionen $\varphi, \dot{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ergeben sich durch

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_a}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{T_a} t\right) - 1 \right), & 0 < t \leq T_a, \\ -\varphi_a \cos\left(\frac{\dot{\varphi}_s}{\varphi_a} (t - T_a)\right), & T_a < t \leq \left(T_a + \frac{\varphi_a \pi}{\dot{\varphi}_s}\right), \\ \frac{\varphi_a}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{T_a} \left(t - T_a - \frac{\varphi_a \pi}{\dot{\varphi}_s}\right)\right) + 1 \right), & \left(T_a + \frac{\varphi_a \pi}{\dot{\varphi}_s}\right) < t \leq \left(2T_a + \frac{\varphi_a \pi}{\dot{\varphi}_s}\right), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5-2a)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{cases} -\frac{\varphi_a \pi}{2T_a} \sin\left(\frac{\pi}{T_a} t\right), & 0 < t \leq T_a, \\ \dot{\varphi}_s \sin\left(\frac{\dot{\varphi}_s}{\varphi_a} (t - T_a)\right), & T_a < t \leq \left(T_a + \frac{\varphi_a \pi}{\dot{\varphi}_s}\right), \\ -\frac{\varphi_a \pi}{2T_a} \sin\left(\frac{\pi}{T_a} \left(t - T_a - \frac{\varphi_a \pi}{\dot{\varphi}_s}\right)\right), & \left(T_a + \frac{\varphi_a \pi}{\dot{\varphi}_s}\right) < t \leq \left(2T_a + \frac{\varphi_a \pi}{\dot{\varphi}_s}\right), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5-2b)$$

Tabelle 5-1: Parameter zur Beschreibung der Regelungsaufgabe des Schlagmechanismus.

Symbol	Physikalischer Parameter
$T_a = T_r$	Ausholdauer bzw. Rückholdauer
$\varphi_a = -\varphi_r$	Ausholwinkel bzw. Rückholwinkel
h	Abstand von der Rotationsachse der Abtriebswelle zum Schlagpunkt

²Der Schlaggeschwindigkeitsvektor \mathbf{v}_s wird mittels eines maschinellen Lernverfahrens, speziell durch die Anwendung eines neuronalen Netzes, bestimmt, vgl. Abschnitt 3.4 sowie den eigenen Beitrag [JFTT22b].

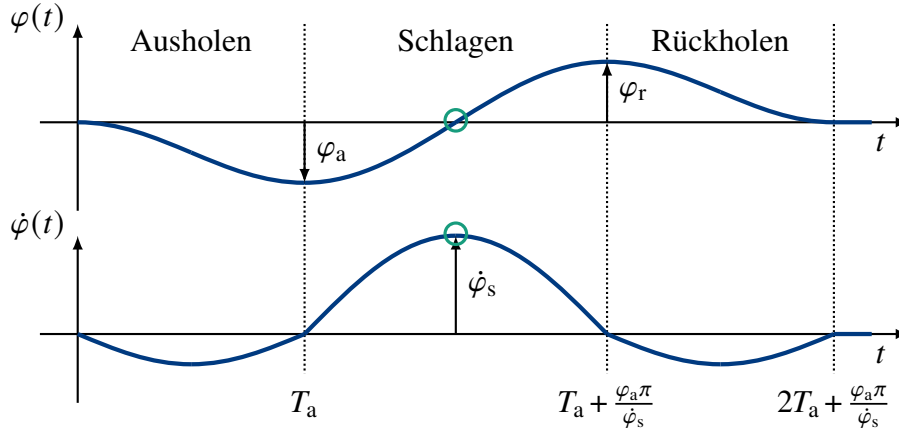


Bild 5-1: Die Solltrajektorien für den Winkel φ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ bestehen aus den drei Phasen Ausholen, Schlagen, Rückholen und werden durch stückweise definierte Funktionen beschrieben, vgl. Gleichung (5-2). Die gewünschte Schlaggeschwindigkeit $\dot{\varphi}_s$ wird erreicht, wenn der Winkel $\varphi = 0$ aufweist, hier eingezeichnet als grüner Kreis.

Beschreibung der bisherigen physikalisch basierten Regelungsstrategie

Die bisher verwendete Regelungsstrategie basiert auf einem klassischen modellbasierten Regelungsentwurf, vgl. Bild 1-2, mit ausschließlich physikalisch motivierten Ansätzen. Das verwendete nichtlineare physikalische Modell der Dynamik ist durch

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-mga \sin x_1 - M_d(\mathbf{x}) + 4u}{J} \end{bmatrix}, \quad M_d(\mathbf{x}) = dx_2 + r\mu \operatorname{sgn} x_2 |mx_2^2 a + mg \cos x_1|, \quad (5-3a)$$

$$y = x_1 \quad (5-3b)$$

gegeben, wobei der Zustandsvektor $\mathbf{x} = [\varphi, \dot{\varphi}]^\top$ den Winkel φ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ des Schlagers enthält, vgl. Abschnitt 3.4, Bild 3-7, Tabelle 3-1.

Die Regelungsstrategie des Schlagmechanismus basiert auf einer linearen Zwei-Freiheitsgrade-Struktur [FKL⁺16] unter Verwendung eines Gain-Scheduling-Ansatzes [Ada18], wie im Bild 5-2 dargestellt ist. Das bedeutet, dass die Regelstrecke (5-3) für verschiedene Arbeitspunkte $\varphi_{R_i} \in [-\pi, \pi]$ mit einem Inkrement von 0,01 rad linearisiert wird. Dadurch entsteht eine Reihe von linearen Teilmodellen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{R_i} \mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (5-4a)$$

$$y = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad (5-4b)$$

mit

$$\mathbf{A}_{R_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mga}{J} \cos(\varphi_{R_i}) & -\frac{d}{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^\top = [1, 0]. \quad (5-5)$$

Während des Betriebs wird der Regler verwendet, dessen zugehöriges Streckenmodell am besten mit der aktuellen Situation übereinstimmt, d. h.

$$i = \arg \min_i |x_1 - \varphi_{R_i}|. \quad (5-6)$$

Die Gain-Scheduling-Variable i bestimmt sowohl die Vorsteuerung und den Regler als auch den für die Zustandsregelung erforderlichen Beobachter.

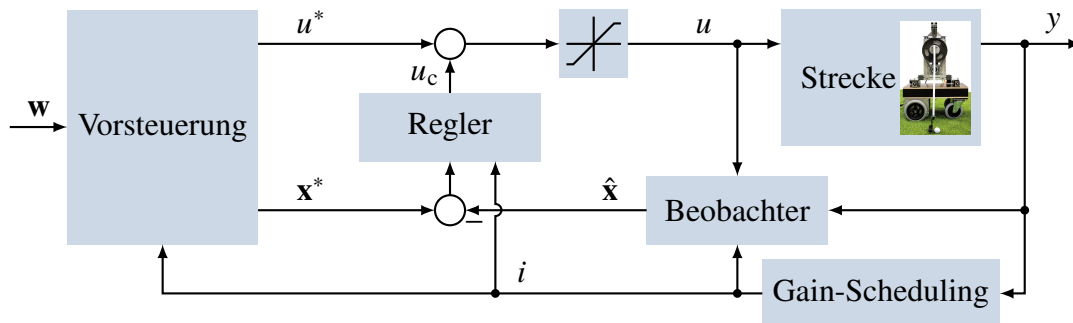


Bild 5-2: Bisher wurde am Prüfstand eine lineare Zwei-Freiheitsgrade-Regelungsstruktur mit Beobachter auf der Grundlage eines Gain-Scheduling-Ansatzes verwendet. In Anlehnung an den eigenen Beitrag [JFTT22b].

Die linearen Zustandsrückführungen

$$u_c = \mathbf{k}_{R_i}^\top (\mathbf{x}^* - \hat{\mathbf{x}}) \quad (5-7)$$

werden als zeitinvariante Riccati-Regler entworfen. Hierfür wird die quadratische Kostenfunktion

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + R u^2(t) dt \quad (5-8)$$

mit

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (5-9)$$

minimiert, die die simultane Berücksichtigung des zeitlichen Verlaufs der Zustandsgrößen und der aufgebrauchten Steuerenergie ermöglicht³.

Die Vorsteuerungsmatrizen, die zur Berechnung der Sollverläufe

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{F}_x \mathbf{w}, \quad u^* = \mathbf{f}_{u_{R_i}}^\top \mathbf{w} \quad (5-10)$$

erforderlich sind, ergeben sich durch die Betrachtung des eingeschwungenen Zustands [FKL⁺16] zu

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{u_{R_i}}^\top = -\mathbf{b}^+ \mathbf{A}_{R_i}. \quad (5-11)$$

Das resultierende Regelungsgesetz lautet

$$u = u^* + u_c, \quad (5-12)$$

³Eine ausführliche Beschreibung dieses Ansatzes findet sich in [FKL⁺16].

wobei aufgrund von Stellgrößenbeschränkungen zu beachten ist, dass die Stellgröße u einer Sättigung unterliegt, vgl. Bild 5-2.

Für jedes linearisierte System wird ein Luenberger-Beobachter [Lue71; FKL⁺16] entworfen, dessen Dynamik durch

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}_{R_i} - \mathbf{I}_{R_i} \mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{I}_{R_i} y \quad (5-13)$$

beschrieben wird. Dabei werden die Eigenwerte des Beobachters, d. h. der Matrix $\mathbf{A}_{R_i} - \mathbf{I}_{R_i} \mathbf{c}^T$ so gewählt, dass sie doppelt so groß sind wie die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises [Oga02].

Simulationsbasiertes Vorgehen bei der Untersuchung der unterschiedlichen Entwurfsverfahren

Im Folgenden werden unterschiedliche Entwurfsverfahren für den Regler und Beobachter vorgestellt, die auf einem hybriden Modell basieren. Am Beispiel des Schlagmechanismus des Golfroboters wird die Anwendbarkeit und damit die regelungstechnische Verwertbarkeit demonstriert. Die Untersuchungen des Regler- und Beobachterentwurfs werden ausschließlich mittels numerischer Simulationen präsentiert. Dieses Vorgehen wird gewählt, weil die erreichbare Regelgüte maßgeblich vom Einfluss des Beobachters abhängt. Des Weiteren gestaltet sich die präzise Berechnung der resultierenden Regelgüte gemäß der Gleichungen (5-8)-(5-9) als herausfordernd, wenn nicht alle Zustände gemessen werden können und daher fehlerbehaftete Schätzungen erforderlich sind. Ein weiterer Aspekt, der die Nutzung von Simulationen begründet, liegt in der Möglichkeit, eine Vielzahl von Szenarien zu untersuchen. Dies ermöglicht die Erforschung unterschiedlicher Betriebsbereiche, die sich durch starke nichtlineare Effekte auszeichnen, wie sie bei dem betrachteten Beispiel bei großen Ausholwinkeln oder Schlaggeschwindigkeiten auftreten können.

In den Abschnitten 5.1-5.3, die den Reglerentwurf behandeln, ist im Zuge der Simulationsstudien der vollständige Zustandsvektor \mathbf{x} zu jedem Zeitpunkt bekannt. Lediglich im Abschnitt 5.4, in dem der Beobachterentwurf thematisiert wird, wird angenommen, dass nur der Zustand x_1 messbar ist. Durch dieses simulationsbasierte Vorgehen können der Regler- und Beobachterentwurf isoliert voneinander untersucht und beurteilt werden.

5.1 Riccati-Regler mittels des Koopman-Operators

Der Koopman-Operator bietet das Potenzial, lineare Entwurfsmethoden für die Regelung von eigentlich nichtlinearen Streckendynamiken zu nutzen. In [BBPK16] wird erstmals der Entwurf eines linearen Riccati-Reglers für nichtlineare Dynamiken im höherdimensionalen Koopman-Raum präsentiert und als *Koopman Operator Optimal Control* bezeichnet. Im Folgenden werden die Grundidee anhand eines Einführungsbeispiels sowie mögliche Erweiterungen vorgestellt. Anschließend wird der Entwurf eines Riccati-Reglers am EDMD-Modell des Schlagmechanismus des Golfroboters präsentiert, gefolgt von einer zusammenfassenden Bewertung dieses Ansatzes hinsichtlich der regelungstechnischen Verwertbarkeit des hybriden Streckenmodells.

Illustration der Idee anhand eines Einführungsbeispiels

Die Idee eines Koopman-basierten linearen Riccati-Reglers wird anhand des Einführungsbeispiels (2-10) illustriert. Ergänzt um einen Steuerungseingang und so modifiziert, dass der Zustand x_2 sich instabil verhält, ergibt sich für die Differentialgleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu x_1 \\ \lambda(x_2 - x_1^2) + u \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda = 1, \quad \mu = -0,05. \quad (5-14)$$

Die quadratische Kostenfunktion für den Entwurf des Riccati-Reglers wird als

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + R u^2(t) dt \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (5-15)$$

angenommen. Das für die Berechnung des Regelungsgesetzes erforderliche lineare Streckenmodell wird klassischerweise mittels einer exakten Zustandslinearisierung oder einer Linearisierung der Dynamik um einen oder mehrere Arbeitspunkte bestimmt. Auf der einen Seite wird für die Zustandslinearisierung

$$u = v + \lambda x_1^2 \quad (5-16)$$

gewählt, sodass sich das resultierende lineare System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (5-17)$$

mit dem neuen Eingang v und dem nichtlinearen Regelungsgesetz

$$u = v + \lambda x_1^2 = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + \lambda x_1^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}^T = [0, 2,414] \quad (5-18)$$

ergibt. Auf der anderen Seite führt eine Linearisierung um die Ruhelage $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ zum linearen Modell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5-19)$$

mit dem resultierenden linearen Regelungsgesetz

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}^T = [0, 2,424]. \quad (5-20)$$

Im Gegensatz zu den beiden klassischen Ansätzen ermöglicht die Koopman-Beschreibung

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (5-21)$$

der Originaldynamik, vgl. Abschnitt 2.1, eine unmittelbare, d. h. linearisierungsfreie Anwendung des Riccati-Entwurfs. Die Kostenfunktion

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} \mathbf{g}^T(\mathbf{x}(t)) \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + Ru^2(t) dt \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

wird identisch zu Gleichung (5-15) gewählt⁴ und ergibt das nichtlineare Regelungsgesetz

$$u = -\tilde{\mathbf{k}}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -[\tilde{k}_1, \tilde{k}_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \tilde{k}_3 x_1^2 \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{k}}^T = [0, 2,414, -1,594], \quad (5-23)$$

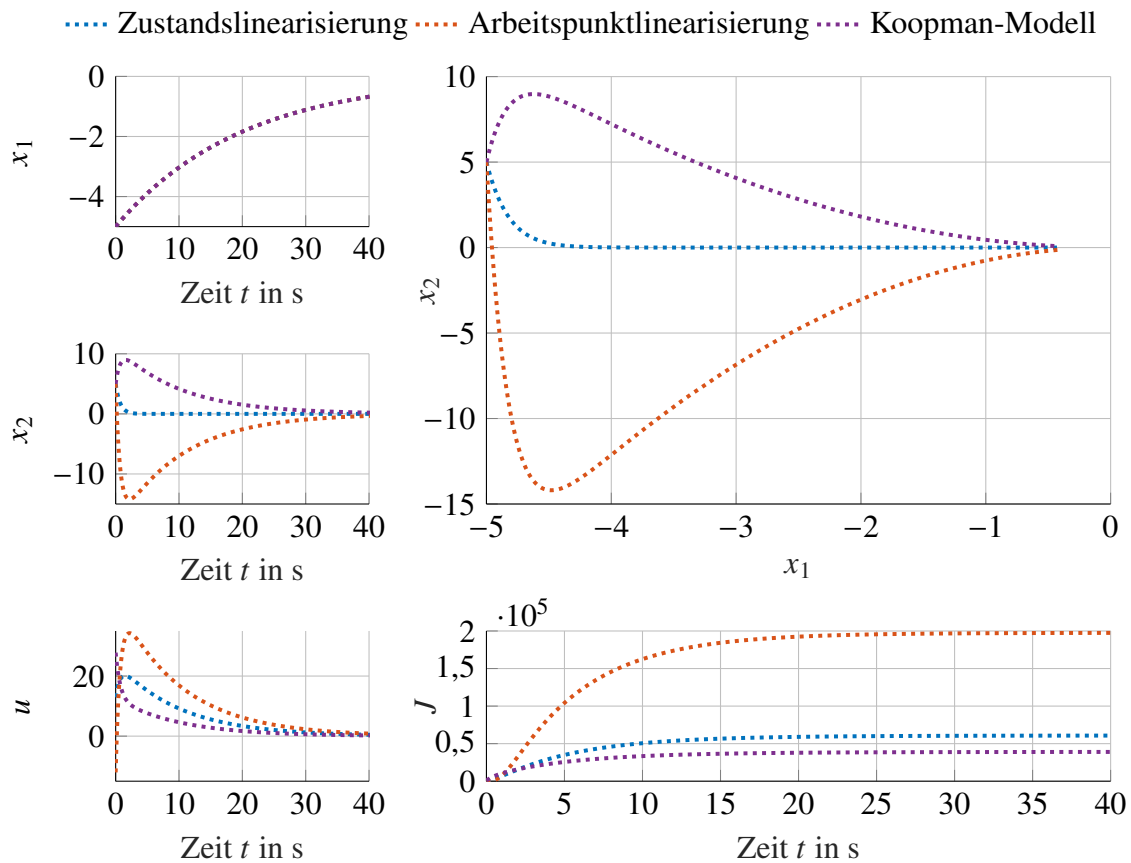
das eine ähnliche Struktur wie Gleichung (5-18) aufweist. Bemerkenswert ist, dass die Reglerparameter $[\tilde{k}_1, \tilde{k}_2]$ mit \mathbf{k}^T übereinstimmen und der einzige Unterschied zwischen der Koopman-basierten Regelung und der exakten Zustandslinearisierung im Faktor $-\tilde{k}_3 \neq \lambda$ besteht.

Das Bild 5-3 zeigt die simulative Untersuchung des Koopman-basierten Riccati-Reglers. Bezüglich der Minimierung der Kostenfunktion (5-15) ist die auf dem Koopman-Modell basierende Zustandsrückführung den beiden klassischen Verfahren überlegen. Dass der Zustand x_2 der auf einer Zustandslinearisierung basierenden Regelung im Bild 5-3(a) schneller abklingt, lässt sich dadurch erklären, dass die Kostenfunktion (5-15) für diesen Fall fälschlicherweise den neuen Eingang v anstatt des wahren Eingangs u gewichtet und dadurch den Stellgrößenverbrauch unterschätzt. Im Bild 5-3(b) sind die geregelten Trajektorien für unterschiedliche Anfangsauslenkungen dargestellt. Beim Koopman-basierten Ansatz scheint die charakteristische langsame Mannigfaltigkeit, vgl. Bild 2-3, die Dynamik des geregelten Systems maßgeblich zu bestimmen, weil sich sämtliche Trajektorien zunächst asymptotisch dieser annähern, bevor sie schließlich in den Ursprung streben, vgl. Abschnitt 2.1. Der für die Koopman-basierte Regelung erheblich reduzierte Stellgrößenverbrauch, der im Bild 5-3(a) zu erkennen ist, resultiert aus der geschickten Nutzung dieses Phänomens.

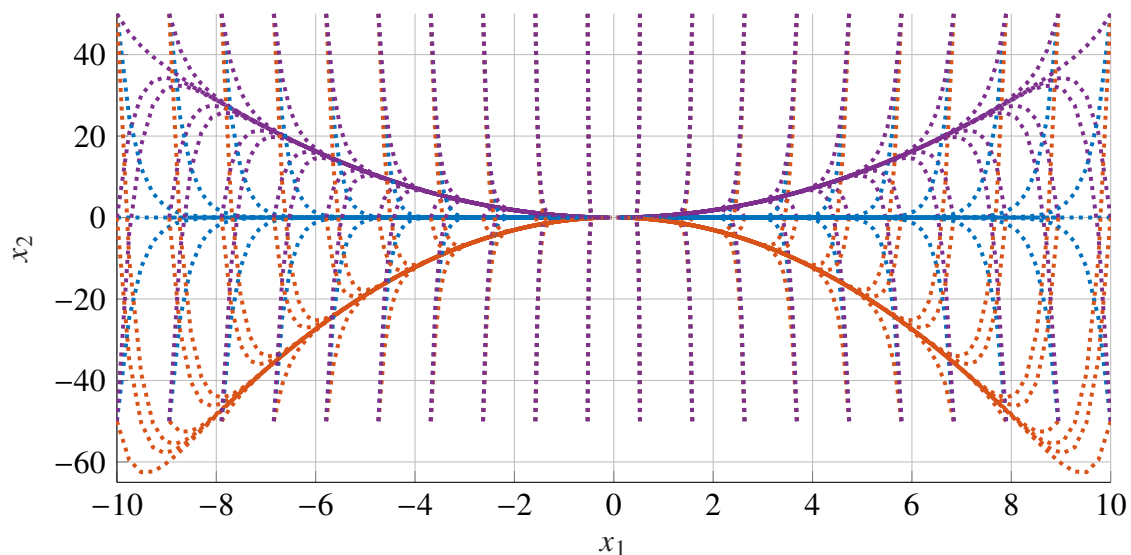
Das betrachtete Einführungsbeispiel stellt aufgrund des Koopman-invarianten Unterraums einen Spezialfall dar. Der Beitrag [BBPK16] weist darauf hin, dass das Entwurfsverfahren an seine Grenzen stoße, sobald einzelne Zustände in \mathbf{g} nicht steuerbar seien oder es nicht möglich sei, eine endlichdimensionale Koopman-invariante Systembeschreibung zu bestimmen. Gleichwohl wurde das Verfahren in nachfolgenden Arbeiten erfolgreich auch auf numerisch approximierten EDMD-Modelle, vgl. Abschnitt 3.2 angewendet. Zahlreiche Veröffentlichungen demonstrieren die Effektivität Koopman-basierter Riccati-Regler anhand unterschiedlicher Beispielsysteme⁵.

⁴Für das hier betrachtete Beispiel genügt es, dass $\tilde{\mathbf{Q}}$ positiv semidefinit ist, weil zusätzlich das betrachtete System über die Ausgangsgleichung $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{Q}}_0 \mathbf{x}$ mit $\tilde{\mathbf{Q}}_0^T \tilde{\mathbf{Q}}_0$ beobachtbar ist, vgl. [FKL⁺16].

⁵In Form von Simulationsstudien wird die Regelung für ein Pendel auf dem Wagen [ALM17], den Duffing-Oszillator und den Van-der-Pol-Oszillator [MHV19], einen Boost-Konverter mit aktiver Last [MP20], das FitzHugh-Nagumo-Modell und die Lorenz-Gleichungen [IK21], die Dynamik starrer Körper in Dualquaternionendarstellung [ZB22], einen Spurhalteassistenten [KQC22], einen MEMS-Drehratensensor [RR23] und weitere akademische Beispiele [BBH⁺22] beschrieben. In Form von Experimenten demonstrieren [ALM17] und [AM19] den Regelungsentwurf für Spielzeug- und Industrieroboter, [MCTM19] für einen schwimmenden Roboterfisch mit aktuierter Schwanzflosse.



(a) Beispielhafte simulierte Regelung einer Anfangsauslenkung. Gemäß der Kostenfunktion J , vgl. (5-15), ist die Zustandsrückführung (5-23), die auf dem Koopman-Modell (5-21) basiert, den Regelungsgesetzen (5-18) und (5-20), die auf einer Zustands- bzw. Arbeitspunktlinearisierung basieren, überlegen. In Anlehnung an [BBPK16; KKB21].



(b) Vergleich der unterschiedlichen Regelungsgesetze für unterschiedliche Anfangsauslenkungen.

Bild 5-3: Veranschaulichung der Koopman-basierten Riccati-Regelung im Vergleich zu einer Zustandslinearisierung bzw. einer Linearisierung um einen Arbeitspunkt.

Der Beitrag [KKB21] präsentiert analog zur oben beschriebenen Strategie einen Ansatz zur Regelung mittels Koopman-Eigenfunktionen, wobei die Kostenfunktion

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} \boldsymbol{\varphi}^{\top}(\mathbf{x}(t)) \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}(t)) + Ru^2(t) dt \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-24)$$

so gewählt wird, dass $\boldsymbol{\varphi}^{\top} \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\varphi} \approx \mathbf{x}^{\top} \mathbf{Q} \mathbf{x}$. Dieser Ansatz resultiert im nichtlinearen Regelungsgesetz

$$\mathbf{u} = -\tilde{\mathbf{k}}^{\top} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}). \quad (5-25)$$

Die Regelgüte wird anhand einer Energieregulierung für Hamiltonsche Systeme demonstriert, bei denen die Koopman-Eigenfunktion die im System gespeicherte Energie mit dem Koopman-Eigenwert $\lambda = 0$ ist, vgl. Abschnitt 2.2. Darüber hinaus finden sich in der Literatur weitere Ansätze zur Regelung mittels Koopman-Eigenfunktionen. In [KRT23] wird beispielsweise das Regelungsproblem für einen endlichen Zeithorizont formuliert. Der Beitrag [GCY22] zeigt die Anwendung eines Riccati-Reglers mit Koopman-Eigenfunktionen für den Duffing- und den Van-der-Pol-Oszillator.

Anwendung am Schlagmechanismus des Golfroboters

Das Verfahren wurde anhand der Schlagregelung des Golfroboters, vgl. Abschnitt 3.4, simulativ untersucht. Für den zeitinvarianten Riccati-Regler wurde ein zeitkontinuierliches⁶ EDMD-Modell mit $N = 4$ Observablen (3-58) betrachtet, das anhand simulativ erzeugter Messdaten aus dem Modell (3-55) trainiert wurde. Die Zahlenwerte der Matrizen befinden sich im Anhang A3.1. Mit der Kostenfunktion

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} \boldsymbol{\Psi}^{\top}(\mathbf{x}(t)) \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}(t)) + Ru^2(t) dt \quad (5-26a)$$

$$\text{mit} \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \text{diag}(5, 1, 1 \times 10^{-12}, 1 \times 10^{-12}), \quad R = 1, \quad (5-26b)$$

die analog zu den Gleichungen (5-8)-(5-9) gewählt wurde, ergibt sich die Zustandsrückführung

$$u_c = \tilde{\mathbf{k}}^{\top} (\boldsymbol{\Psi}^* - \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{k}}^{\top} \in \mathbb{R}^{1 \times N}. \quad (5-27)$$

Mit den Führungsgrößen $\tilde{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}^*)$ ergeben sich die Sollverläufe

$$\boldsymbol{\Psi}^* = \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Psi}} \tilde{\mathbf{w}}, \quad u^* = \tilde{\mathbf{f}}_u \tilde{\mathbf{w}} \quad (5-28)$$

mit den Vorsteuerungsmatrizen

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{I}_N, \quad \tilde{\mathbf{f}}_u = -\mathbf{b}^+ \mathbf{K} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{f}}_u \in \mathbb{R}^{1 \times N} \quad (5-29)$$

in Anlehnung an die Gleichungen (5-10)-(5-11) und die von der Autorin betreute studentische Arbeit [Hei22]. Das resultierende Regelungsgesetz lautet

$$u = u^* + u_c. \quad (5-30)$$

⁶Vgl. Formeln zur Umrechnung im Anhang A2.

Im Bild 5-7 ist die resultierende Regelgüte (5-8) des EDMD-basierten Riccati-Reglers für eine beispielhafte Solltrajektorie mit einem Ausholwinkel von $\varphi_1 = 120^\circ$, einer Ausholdauer von $T_a = T_r = 1$ s und einer Schlaggeschwindigkeit von $\|\mathbf{v}_s\| = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ dargestellt⁷. Es ist zu erkennen, dass die Koopman-basierte linear-quadratische (LQ)-Regelung eine deutlich höhere Regelgüte als die bisher verwendete rein physikalisch motivierte LQ-Regelung mit Gain-Scheduling aufweist. Das Bild 5-7(b) visualisiert die resultierende Regelgüte in Abhängigkeit der frei wählbaren Parameter der Solltrajektorie, vgl. Tabelle 5-1. Es ist zu erkennen, dass die EDMD-basierte LQ-Regelung die Regelungsaufgabe für alle wählbaren Werte sehr gut erfüllt, jedoch in besonderem Maße im Bereich kleiner Schlaggeschwindigkeiten. Eine mögliche Erklärung hierfür liegt darin, dass die nichtlinearen (Haft-)Reibungseffekte sich vor allem bei kleinen Geschwindigkeiten stark auf die Dynamik auswirken. Neben der hohen Regelgüte ist zusätzlich der stark verringerte Aufwand bei der Modellbildung durch das hybride Vorgehen bei diesem Ansatz hervorzuheben, vgl. Kapitel 3.

5.2 Modellprädiktive Regelung mittels des Koopman-Operators

Modellprädiktive Regelungsansätze (MPC) optimieren online anhand eines internen Streckenmodells den Ausgangsgrößenverlauf mittels des Stellgrößenverlaufs. Der optimierte Stellgrößenverlauf wird dann für die Regelung des betrachteten Systems verwendet. Die grundlegende Idee der MPC ist im Bild 5-4 dargestellt. Ausgehend vom Zeitpunkt $k - 1$ mit bekannter Stellgröße \mathbf{u}_{k-1} variiert die Optimierung den zukünftigen Stellgrößenverlauf \mathbf{u}_{k+i} ab dem Zeitpunkt k für eine endliche Zahl $i = 0, \dots, n_c - 1$ von Stellgrößenritten so, dass eine vorgegebene Kostenfunktion, beispielsweise

$$J = \sum_{i=1}^{n_p} \|\mathbf{Q}(\mathbf{y}_{k+i} - \mathbf{w}_{k+i})\|^2 + r \sum_{i=1}^{n_c} \|\mathbf{u}_{k+i-1}\|^2, \quad (5-31)$$

mit der positiv definiten Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ und dem Faktor $r \in \mathbb{R}$ über n_p Zeitschritte minimal wird. Die Werte $n_p, n_c \in \mathbb{N}$ mit $n_p \geq n_c$ werden als Prädiktions- bzw. Stellhorizont bezeichnet. Für den Zeitbereich $i \geq n_c$ werden alle Stellgrößen auf \mathbf{u}_{k+n_c-1} gehalten, vgl. Bild 5-4. Nach der Optimierung wird nur der erste Wert der Stellgrößenfolge auf die reale Regelstrecke angewendet. Danach wird der Prädiktions- und Optimierungsprozess um einen Zeitschritt in die Zukunft verschoben, was als gleitender Horizont bezeichnet wird [Ada18].

Abhängig vom verwendeten Streckenmodell gibt es unterschiedliche MPC-Ansätze. Lineare Streckenmodelle erlauben eine einfache Implementierung und Berechnung der MPC und ermöglichen – im Vergleich zu zeitinvarianten Regelungsansätzen – die Berücksichtigung von Stell-, Ausgangs- oder Zustandsgrößenbeschränkungen. Nichtlineare Streckenmodelle hingegen erschweren die Lösung des Optimierungsproblems. Dies resultiert aus der komplizierten Abhängigkeit der Kostenfunktion J von der Stellgrößenfolge \mathbf{u}_{k+i} , was einen erhöhten Rechenaufwand verursacht und dazu führt, dass die Auswertung der Kostenfunktion nicht konvex ist, vgl. [GZQ⁺20]. Daher werden nichtlineare MPC in der Praxis gewöhnlich für eher langsame Systeme verwendet.⁸

⁷Diese Wahl der Parameter führt dazu, dass die nichtlinearen Anteile der Dynamik des Schlagmechanismus des Golfroboters hinreichend angeregt werden.

⁸Beispielsweise für die Regelung eines Trinkwasserversorgungssystems [BRKP16].

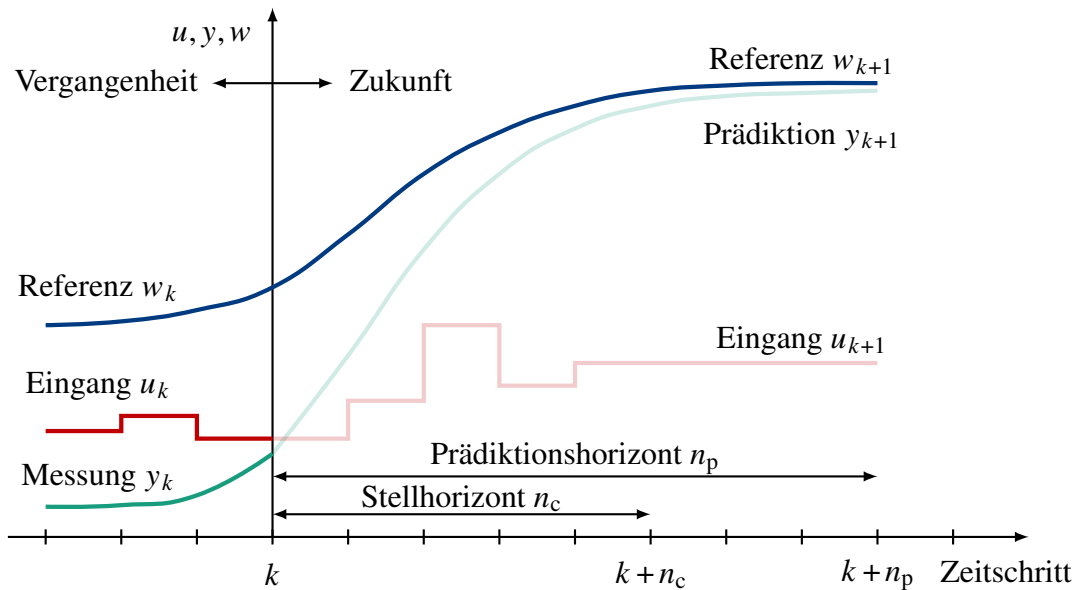


Bild 5-4: Grundlegende Idee der modellprädiktiven Regelung. In Anlehnung an [Ada18].

Für den MPC-Entwurf lassen sich auch datengetriebene Streckenmodelle, beispielsweise DMD-Modelle [SSW20], SINDY-Modelle [KKB18a] oder neuronale Netze [AJFR17] verwenden. Außerdem finden sich in der Literatur Ansätze für den direkten datengetriebenen Entwurf einer MPC, der unmittelbar auf Messdaten basiert, beispielsweise in [BK-MA21].

Die Nutzung von Koopman-Operator-basierten Streckenmodellen für die MPC erscheint vielversprechend, weil sie die Anwendung der Algorithmen der linearen MPC für nicht-lineare Streckendynamiken ermöglichen. Im Folgenden wird zur Erleichterung des Verständnisses zunächst der lineare MPC-Entwurf in Anlehnung an [Ada18] beschrieben. Danach werden die Koopman-Operator-basierte MPC und ihre Anwendung am Schlagmechanismus des Golfroboters vorgestellt und ein Fazit dieses Ansatzes hinsichtlich der regelungstechnischen Verwertbarkeit des verwendeten hybriden Streckenmodells gezogen.

Lineare modellprädiktive Regelung

Die lineare MPC basiert auf zeitinvarianten und zeitdiskreten Streckenmodellen

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k, \quad (5-32a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k \quad (5-32b)$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{A}_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_t \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Aus der Differenzgleichung (5-32) lässt sich unmittelbar der zeitliche Verlauf der Zustände

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k, \quad (5-33a)$$

$$\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}_t^2 \mathbf{x}_k + \mathbf{A}_t \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_{k+1}, \quad (5-33b)$$

⋮

$$\mathbf{x}_{k+i} = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{k+i-1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_{k+i-1} = \mathbf{A}_t^i \mathbf{x}_k + \sum_{j=1}^i \mathbf{A}_t^{i-j} \mathbf{B}_t \mathbf{u}_{k+j-1} \quad (5-33c)$$

und des Systemausgangs

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{C} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{C} \mathbf{A}_t \mathbf{x}_k + \mathbf{C} \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k, \quad (5-34a)$$

$$\mathbf{y}_{k+2} = \mathbf{C} \mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{C} \mathbf{A}_t^2 \mathbf{x}_k + \mathbf{C} \mathbf{A}_t \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k + \mathbf{C} \mathbf{B}_t \mathbf{u}_{k+1}, \quad (5-34b)$$

⋮

$$\mathbf{y}_{k+i} = \mathbf{C} \mathbf{x}_{k+i} = \mathbf{C} \mathbf{A}_t^i \mathbf{x}_k + \sum_{j=1}^i \mathbf{C} \mathbf{A}_t^{i-j} \mathbf{B}_t \mathbf{u}_{k+j-1} \quad (5-34c)$$

berechnen. In Matrix-Vektorform mit

$$\bar{\mathbf{u}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+n_c-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn_c}, \quad \bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+n_p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{qn_p}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{A}_t \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_t^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_t^{n_p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{qn_p \times n}, \quad (5-35a)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{B}_t & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_t \mathbf{B}_t & \mathbf{C} \mathbf{B}_t & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_t^{n_c-1} \mathbf{B}_t & \mathbf{C} \mathbf{A}_t^{n_c-2} \mathbf{B}_t & \cdots & \mathbf{C} \mathbf{B}_t \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_t^{n_c} \mathbf{B}_t & \mathbf{C} \mathbf{A}_t^{n_c-1} \mathbf{B}_t & \cdots & \mathbf{C} \mathbf{A}_t \mathbf{B}_t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_t^{n_p-1} \mathbf{B}_t & \mathbf{C} \mathbf{A}_t^{n_p-2} \mathbf{B}_t & \cdots & \mathbf{C} \mathbf{A}_t^{n_p-n_c} \mathbf{B}_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{qn_p \times pn_c} \quad (5-35b)$$

ergibt sich

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{F} \mathbf{x}_k + \mathbf{H} \bar{\mathbf{u}}_k. \quad (5-36)$$

Die quadratische Kostenfunktion

$$J(\bar{\mathbf{u}}_k) = (\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \bar{\mathbf{w}}_{k+1})^\top \bar{\mathbf{Q}} (\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \bar{\mathbf{w}}_{k+1}) + \bar{\mathbf{u}}_k^\top \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{u}}_k \quad (5-37)$$

mit

$$\bar{\mathbf{w}}_{k+1} = [\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+2}, \dots, \mathbf{w}_{k+n_p}]^\top \in \mathbb{R}^{qn_p} \quad (5-38)$$

lässt sich mit dem Fehlerterm

$$\mathbf{e}_k := \mathbf{F} \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{w}}_{k+1} \Rightarrow \bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \bar{\mathbf{w}}_{k+1} = \mathbf{e}_k + \mathbf{H} \bar{\mathbf{u}}_k \quad (5-39)$$

zu

$$\begin{aligned} J(\bar{\mathbf{u}}_k) &= (\mathbf{e}_k + \mathbf{H} \bar{\mathbf{u}}_k)^\top \bar{\mathbf{Q}} (\mathbf{e}_k + \mathbf{H} \bar{\mathbf{u}}_k) + \bar{\mathbf{u}}_k^\top \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{u}}_k \\ &= \bar{\mathbf{u}}_k^\top (\mathbf{H}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{H} + \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{u}}_k + 2 \bar{\mathbf{u}}_k^\top \mathbf{H}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (5-40)$$

umformen, wobei die Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ zu

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q n_p \times q n_p}, \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p n_c \times p n_c} \quad (5-41)$$

erweitert werden. Die Minimierung der Kostenfunktion

$$\frac{\partial J(\bar{\mathbf{u}}_k)}{\partial \bar{\mathbf{u}}_k} = 2(\mathbf{H}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{H} + \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{u}}_k + 2\mathbf{H}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_k = \mathbf{0} \quad (5-42)$$

ergibt die Lösung

$$\bar{\mathbf{u}}_k = -(\mathbf{H}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{H} + \bar{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{H}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_k. \quad (5-43)$$

Eventuelle Stellgrößen- und Ausgangsgrößenbeschränkungen

$$\bar{\mathbf{u}}_{\min} \leq \bar{\mathbf{u}} \leq \bar{\mathbf{u}}_{\max}, \quad \bar{\mathbf{y}}_{\min} \leq \bar{\mathbf{y}} \leq \bar{\mathbf{y}}_{\max} \quad (5-44)$$

können während der numerischen Minimierung der Kostenfunktion (5-42) berücksichtigt werden. Für die Regelung wird jeweils nur der erste Wert

$$\mathbf{u}_k = [\mathbf{I}_p, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \bar{\mathbf{u}}_k \quad (5-45)$$

als Stellgröße verwendet.

Modellprädiktive Regelung basierend auf EDMD-Modellen

Der Beitrag [KM18a] zeigt, dass EDMD-Modelle sich aufgrund der linearen Struktur geradlinig für den Entwurf linearer modellprädiktiver Regelungen für nichtlineare Streckendynamiken nutzen lassen. In Anlehnung an die vorherigen Ausführungen lässt sich für ein EDMD-Modell

$$\Psi(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k, \quad (5-46a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k = \mathbf{C} \Psi(\mathbf{x}_k), \quad (5-46b)$$

vgl. Abschnitt 3.2, eine Vorschrift für den zeitlichen Verlauf der Observablen

$$\Psi(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k, \quad (5-47a)$$

$$\Psi(\mathbf{x}_{k+2}) = \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{K}_t^2 \Psi(\mathbf{x}_k) + \mathbf{K}_t \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_{k+1}, \quad (5-47b)$$

⋮

$$\Psi(\mathbf{x}_{k+i}) = \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_{k+i-1}) + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_{k+i-1} = \mathbf{K}_t^i \Psi(\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^i \mathbf{K}_t^{i-j} \mathbf{B}_t \mathbf{u}_{k+j-1} \quad (5-47c)$$

und des Systemausgangs

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{C} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{C} \Psi(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{C} \mathbf{K}_t \Psi(\mathbf{x}_k) + \mathbf{C} \mathbf{B}_t \mathbf{u}_k, \quad (5-48a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+2} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{C}\mathbf{P}\Psi(\mathbf{x}_{k+2}) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^2\Psi(\mathbf{x}_k) + \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t\mathbf{B}_t\mathbf{u}_k + \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{B}_t\mathbf{u}_{k+1}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5-48b)$$

$$\mathbf{y}_{k+i} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+i} = \mathbf{C}\mathbf{P}\Psi(\mathbf{x}_{k+i}) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^i\Psi(\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^i \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^{i-j}\mathbf{B}_t\mathbf{u}_{k+j-1} \quad (5-48c)$$

bestimmen. In Matrix-Vektor-Form mit

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t \\ \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^{n_p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_{n_p} \times N}, \quad (5-49a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{B}_t & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t\mathbf{B}_t & \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{B}_t & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^{n_c-1}\mathbf{B}_t & \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^{n_c-2}\mathbf{B}_t & \dots & \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{B}_t \\ \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^{n_c}\mathbf{B}_t & \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^{n_c-1}\mathbf{B}_t & \dots & \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t\mathbf{B}_t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^{n_p-1}\mathbf{B}_t & \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^{n_p-2}\mathbf{B}_t & \dots & \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{K}_t^{n_p-n_c}\mathbf{B}_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_{n_p} \times p_{n_c}} \quad (5-49b)$$

ergibt sich

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{F}}\Psi(\mathbf{x}_k) + \tilde{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{u}}_k. \quad (5-50)$$

Die quadratische Kostenfunktion

$$J(\bar{\mathbf{u}}_k) = (\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \bar{\mathbf{w}}_{k+1})^\top \bar{\mathbf{Q}} (\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \bar{\mathbf{w}}_{k+1}) + \bar{\mathbf{u}}_k^\top \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{u}}_k \quad (5-51)$$

lässt sich mit dem Fehlerterm

$$\mathbf{e}_k := \tilde{\mathbf{F}}\Psi(\mathbf{x}_k) - \bar{\mathbf{w}}_{k+1} \Rightarrow \bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \bar{\mathbf{w}}_{k+1} = \mathbf{e}_k + \tilde{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{u}}_k \quad (5-52)$$

zu

$$\begin{aligned} J(\bar{\mathbf{u}}_k) &= (\mathbf{e}_k + \tilde{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{u}}_k)^\top \bar{\mathbf{Q}} (\mathbf{e}_k + \tilde{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{u}}_k) + \bar{\mathbf{u}}_k^\top \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{u}}_k \\ &= \bar{\mathbf{u}}_k^\top (\tilde{\mathbf{H}}^\top \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{Q}}) \bar{\mathbf{u}}_k + 2\bar{\mathbf{u}}_k^\top \tilde{\mathbf{H}}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (5-53)$$

umformen.

Die Minimierung der Kostenfunktion

$$\frac{\partial J(\bar{\mathbf{u}}_k)}{\partial \bar{\mathbf{u}}_k} = 2(\tilde{\mathbf{H}}^\top \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{u}}_k + 2\tilde{\mathbf{H}}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_k = \mathbf{0}, \quad (5-54)$$

ergibt die Lösung

$$\bar{\mathbf{u}}_k = -(\tilde{\mathbf{H}}^\top \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{R}})^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_k. \quad (5-55)$$

Im Bild 5-5 wird die Struktur der EDMD-basierten MPC veranschaulicht.

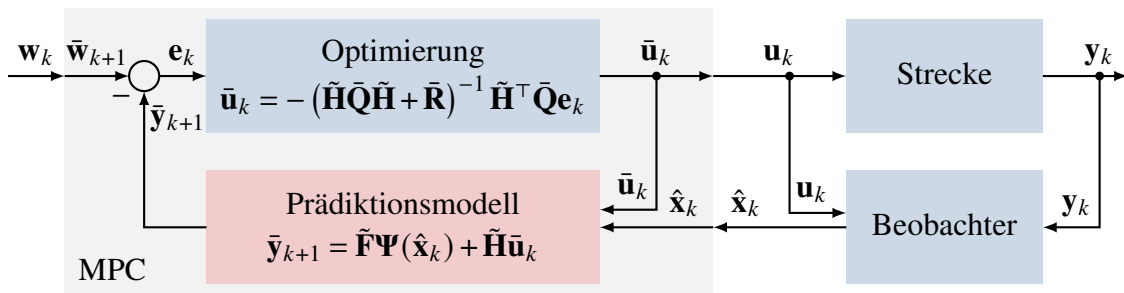


Bild 5-5: Struktur der EDMD-basierten modellprädiktiven Regelung.

Das zu lösende Optimierungsproblem ist konvex. Durch die Offline-Berechnung der Matrizen $\tilde{\mathbf{F}}$ und $\tilde{\mathbf{H}}$ ist der Rechenaufwand für die Stellgrößenfolge bei der EDMD-basierten MPC vergleichbar mit einer linearen MPC für das entsprechende klassisch linearisierte Originalsystem [KM18a]. In der Literatur finden sich vielfältige Anwendungsfälle, beispielsweise die Regelung künstlicher pneumatischer Muskeln [BGDV19; BFG⁺20; WXL⁺23], gekoppelter Pendelsysteme [DKH23], Piezo-Aktoren zur Nano-Positionierung [XR20a; XR20b; HZ23]. Außerdem wurde die Koopman-basierte MPC zur Stabilisierung von Multicoptern [FPB20; MDV22; TB23] sowie im Bereich der Regelung von Fahrzeugen [ŠIM23], Schiffen [LXLX22] und Hochgeschwindigkeitszügen [CHZ⁺21] demonstriert. Darüber hinaus finden sich in der Literatur Anwendungen auf ein Viertanksystem [SJC22], Fracking von Erdöl [NK20] sowie einen verfahrenstechnischen mikrobiellen Fermentationsprozess [YZY⁺24]. Der Beitrag [AKM18] erweitert den Ansatz auf partielle Differentialgleichungen.

Anwendung am Schlagmechanismus des Golfroboters

Für die simulative Untersuchung der EDMD-basierten MPC am Schlagmechanismus des Golfroboters wurde ein EDMD-Modell (3-58) mit $N = 4$ Observablen betrachtet, das anhand simulativ erzeugter Messdaten aus dem Modell (3-55) trainiert wurde. Als Gütefunktion wurde Gleichung (5-31) mit der Gewichtung (5-9) verwendet. Der Prädiktions- bzw. Stellhorizont wird mit $n_p = n_c = 100$ zu $T = 0,5$ s gewählt. Als Vergleich wurde zusätzlich eine lineare MPC basierend auf einem um die untere Ruhelage linearisierten Modell implementiert. Anhand von Bild 5-7(a) ist zu erkennen, dass die EDMD-basierte MPC eine signifikant höhere resultierende Regelgüte (5-8)-(5-9) als die lineare MPC aufweist. Das Bild 5-7(b) visualisiert die Regelgüte in Abhängigkeit der frei wählbaren Parameter der Solltrajektorie, vgl. Tabelle 5-1. Die EDMD-basierte MPC ist den anderen in diesem Kapitel betrachteten Ansätzen für alle wählbaren Parameter überlegen. Ähnlich wie die EDMD-basierte LQ-Regelung, vgl. Abschnitt 5.1, erfüllt die EDMD-basierte MPC insbesondere im Bereich kleiner Schlaggeschwindigkeiten $\|\mathbf{v}_s\|$ die Regelungsaufgabe mit einer herausragenden Genauigkeit. Diese Beobachtung ist beachtlich, insbesondere vor dem Hintergrund, dass der Rechenaufwand vergleichbar mit dem der linearen MPC ist. Zudem ist die Modellbildung im Vergleich zur analytischen Herleitung eines physikalisch motivierten Modells mit anschließender Linearisierung mit einem deutlich geringeren Aufwand verbunden, vgl. Kapitel 4.

5.3 Passivitätsbasierte Regelung mittels des datengetriebenen PCHD-Modells

Im Folgenden wird zunächst die Idee der passivitätsbasierten Regelung allgemein beschrieben. Danach wird die Anwendbarkeit der im Abschnitt 4.4 entwickelten hybriden PCHD-Modelle für einen solchen Regelungsentwurf vorgestellt und im Rahmen einer Machbarkeitsstudie beispielhaft am Schlagmechanismus des Golfroboters demonstriert.

Die passivitätsbasierte Regelung verfolgt das Ziel, die Passivitätseigenschaft einer Strecke systematisch zu nutzen, um stabile Regelkreise zu erhalten. Das Konzept wurde erstmalig in [OS89] eingeführt und folgend weiterentwickelt. Die Regelung mittels IDA (Interconnection and Damping Assignment) [OSME99; OSME02] verfolgt das Ziel, für ein möglicherweise, aber nicht zwingend passives System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (5-56a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad (5-56b)$$

eine Regelung $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ zu entwerfen, sodass der geschlossene Regelkreis die Dynamik eines PCHD-Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{D}_d(\mathbf{x})) \left(\frac{\partial V_d}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{w}_{\text{PCHD}}, \quad (5-57a)$$

$$\mathbf{y}_{\text{PCHD}} = \mathbf{B}^\top(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V_d}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \quad (5-57b)$$

mit dem kollozierten Ausgangsvektor \mathbf{y}_{PCHD} und der Führungsgröße \mathbf{w}_{PCHD} aufweist [Ada18]. Die Matrizen $\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}_d^\top(\mathbf{x})$ und $\mathbf{D}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_d^\top(\mathbf{x}) \geq 0$ sowie die positiv semidefinite Funktion $V_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die ein striktes lokales Minimum an der Stelle der gewünschten Ruhelage \mathbf{x}^* hat, charakterisieren die gewünschte Dynamik des Regelkreises.

Zur Bestimmung eines Regelungsgesetzes $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ für die Regelstrecke (5-56) mit dem Ziel, dass der Regelkreis die PCHD-Struktur (5-57) aufweist, wird die Stellgröße in zwei Komponenten aufgeteilt

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (5-58)$$

wobei $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_{\text{PCHD}}$ den Einfluss der Führungsgrößen und \mathbf{u}_2 den Einfluss des stabilisierenden Reglers repräsentieren. Das Gleichsetzen der Gleichungen (5-56a) und (5-57a) unter der Berücksichtigung von Gleichung (5-58) ergibt

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}_2 = (\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{D}_d(\mathbf{x})) \left(\frac{\partial V_d}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top - \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (5-59)$$

Zur Bestimmung der Größen $V_d(\mathbf{x})$, \mathbf{J}_d , \mathbf{D}_d ist die partielle Differentialgleichung⁹

$$\mathbf{B}^\perp(\mathbf{x}) \left((\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{D}_d(\mathbf{x})) \left(\frac{\partial V_d}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right) = \mathbf{0} \quad (5-60)$$

zu erfüllen. Hierfür gibt es unterschiedliche Ansätze [OG04]:

Algebraischer Ansatz. Die Energiefunktion $V_d(\mathbf{x})$ wird explizit vorgegeben. Anschließend wird Gleichung (5-60) als algebraische Gleichung in $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$, $\mathbf{D}_d(\mathbf{x})$ und $\mathbf{B}^\perp(\mathbf{x})$ gelöst.

Nichtparametrischer Ansatz. $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$, $\mathbf{D}_d(\mathbf{x})$ und $\mathbf{B}^\perp(\mathbf{x})$ werden explizit vorgegeben und $V_d(\mathbf{x})$ über die partielle Differentialgleichung (5-60) bestimmt.

Parametrischer Ansatz. Ähnlich wie beim nichtparametrischen Ansatz wird $V_d(\mathbf{x})$ über Gleichung (5-60) bestimmt. Allerdings erfolgt dies unter der Beschränkung, dass nur eine spezielle Klasse an Funktionen zugelassen ist. Zum Beispiel kann es bei mechanischen Systemen wünschenswert sein, die Summe der potentiellen oder kinetischen Energie des betrachteten Systems vorzugeben.

Zur Vereinfachung der Parametrierung wird in [KL09; KL10] eine systematische Vorgehensweise durch Zuweisen einer lokal linearen Dynamik vorgeschlagen. Der Beitrag [SRJ22] beschreibt hingegen, wie die Funktion $V_d(\mathbf{x})$ zur Realisierung einer gewünschten Dynamik des geschlossenen Regelkreises mittels eines neuronalen Netzes anstelle der Lösung der partiellen Differentialgleichung approximiert werden kann.

Nach erfolgter Bestimmung der Größen $V_d(\mathbf{x})$, $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$, $\mathbf{D}_d(\mathbf{x})$ ist das Regelungsgesetz gegeben durch [Ada18]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_{\text{PCHD}} + (\mathbf{B}^\top(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{B}^\top(\mathbf{x}) \left((\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{D}_d(\mathbf{x})) \left(\frac{\partial V_d}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right). \quad (5-61)$$

Das vorgestellte passivitätsbasierte Entwurfsverfahren liefert Regler, die stabil und robust gegenüber Parameterunsicherheiten sind. Im Bild 5-6 ist die grundlegende Struktur des IDA-Regelungsansatzes dargestellt.

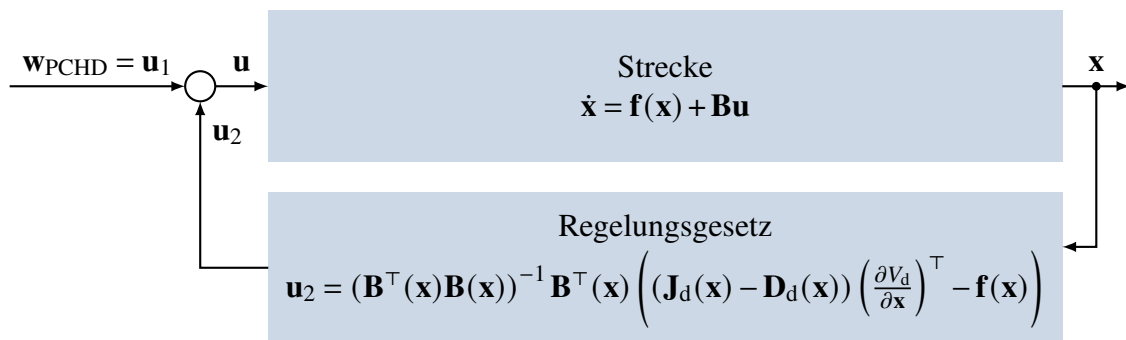


Bild 5-6: Die passivitätsbasierte Regelung mit IDA erzeugt einen passiven Regelkreis mit guter Dämpfung und einer stabilen Ruhelage.

⁹Die Matrix $\mathbf{B}^\perp(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$ ist eine Matrix mit dem Rang $n-p$, die für den jeweiligen Anwendungsfall so konstruiert werden muss, dass $\mathbf{B}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ gilt [Ada18].

Anwendung am Schlagmechanismus des Golfroboters

Im Folgenden wird demonstriert, wie sich datengetriebene PCHD-Modelle, vgl. Abschnitt 4.4, für den Entwurf passivitätsbasierter Regelungen verwenden lassen. Zur Veranschaulichung wird der Entwurf einer IDA-Regelung für den Schlagmechanismus des Golfroboters beschrieben. Als Streckenmodell wird ein datengetriebenes PCHD-Modell verwendet, das anhand simulativ erzeugter Messdaten aus dem Modell (5-3) bestimmt wurde. Die Zahlenwerte der Matrizen befinden sich im Anhang A3.2. Mit der Energiefunktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} J x_2^2 + m g a (1 - \cos x_1) \quad (5-62)$$

und dem daraus berechneten Gradienten $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\Psi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top = \begin{bmatrix} m g a \sin x_1 \\ J x_2 \end{bmatrix} \quad (5-63)$$

ergeben sich die Matrizen

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 6,935 \\ -6,935 & 0 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} 0 & j_1 \\ -j_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 26,534 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (5-64a)$$

$$\mathbf{D}_\geq = \begin{bmatrix} 4,318 \times 10^{-5} & 0,014 \\ 0,014 & 4,610 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix}. \quad (5-64b)$$

Für die Parametrierung des IDA-Reglers wird

$$V_d(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) \quad (5-65)$$

festgelegt und anschließend der algebraische Ansatz mit den parametrisierten Matrizen

$$\mathbf{J}_d = \begin{bmatrix} 0 & k_j \\ -k_j & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_d = \begin{bmatrix} k_{d_1} & k_{d_2} \\ k_{d_2} & k_{d_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^\perp = [1, 0] \quad (5-66)$$

verfolgt. Damit ergibt sich die Schlüsselgleichung (5-60) zu

$$\mathbf{b}^\perp \left((\mathbf{J}_d - \mathbf{J} + \mathbf{D} - \mathbf{D}_d) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \right) = 0 \quad (5-67)$$

bzw. zu

$$[1, 0] \begin{bmatrix} d_1 - k_{d_1} & k_j - j_1 + d_2 - k_{d_2} \\ -k_j + j_1 + d_2 - k_{d_2} & d_3 - k_{d_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m g a \sin x_1 \\ J x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5-68a)$$

$$\Leftrightarrow [1, 0] \begin{bmatrix} (d_1 - k_{d_1}) m g a \sin x_1 + (k_j - j_1 + d_2 - k_{d_2}) J x_2 \\ (-k_j + j_1 + d_2 - k_{d_2}) m g a \sin x_1 + (d_3 - k_{d_3}) J x_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (5-68b)$$

Daraus folgt

$$k_{d_1} = d_1, \quad (5-69a)$$

$$k_j - j_1 + d_2 - k_{d_2} = 0 \Leftrightarrow k_j = j_1 - d_2 + k_{d_2}. \quad (5-69b)$$

Die Parameter k_{d_2} und k_{d_3} können frei gewählt werden. Damit jedoch $\mathbf{D}_d \geq 0$ erfüllt ist, muss

$$k_{d_3} \geq \frac{k_{d_2}^2}{d_1} \quad (5-70)$$

gelten. Beide Parameter lassen sich mittels der Gleichungen (5-8)-(5-9) numerisch optimieren zu

$$k_{d_2} = -0,1747, \quad k_{d_3} = 706,6345. \quad (5-71)$$

Als stabilisierendes Regelungsgesetz ergibt sich mit Gleichung (5-61)

$$u_2 = \frac{1}{b_2} (2(d_2 - k_{d_2})mga \sin x_1 + (d_3 - k_{d_3})Jx_2). \quad (5-72)$$

Für den Systemausgang gilt nach Gleichung (5-57)

$$y_{\text{PCHD}} = \mathbf{b}^\top \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top = b_2 J x_2 \quad (5-73)$$

und damit für die neue Führungsgröße

$$w_{\text{PCHD}} = b_2 J w_2, \quad (5-74)$$

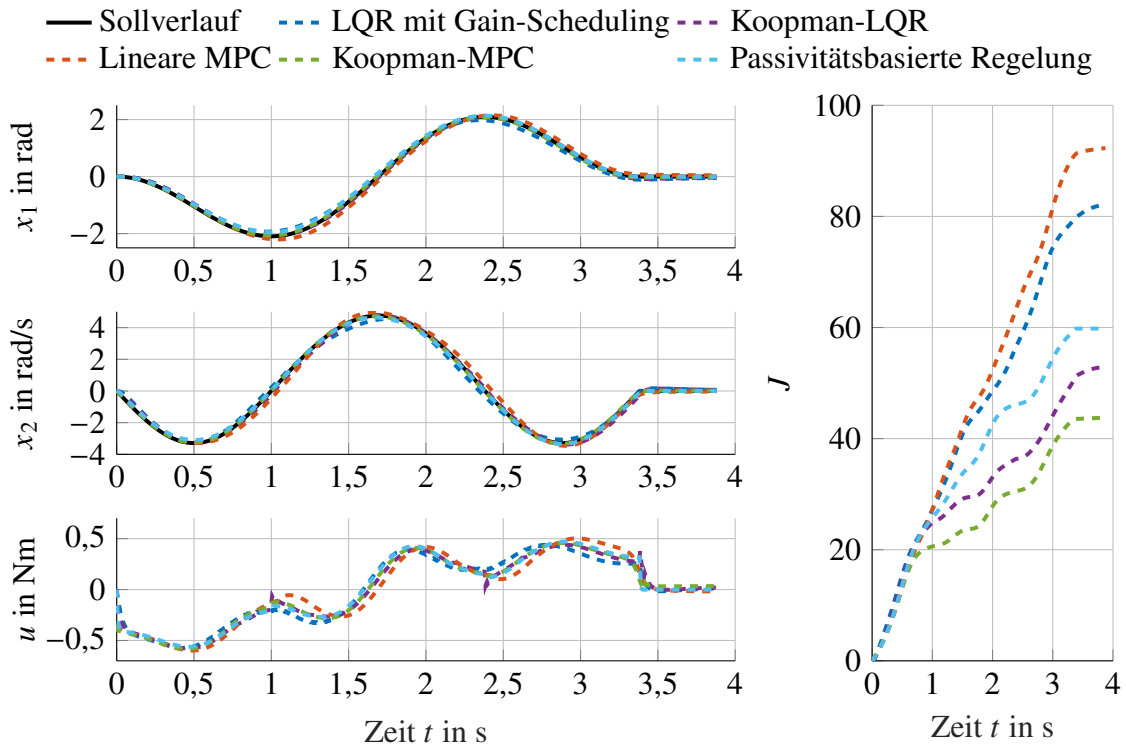
sodass sich schließlich das resultierende Regelungsgesetz

$$u = u_1 + u_2 = b_2 J w_2 + \frac{1}{b_2} (2(d_2 - k_{d_2})mga \sin x_1 + (d_3 - k_{d_3})Jx_2) \quad (5-75)$$

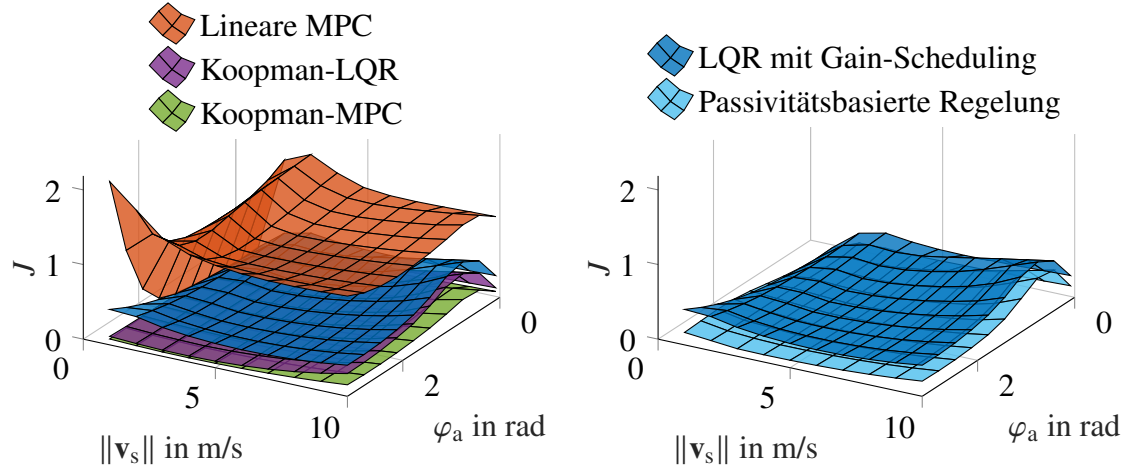
ergibt. Das Bild 5-7(a) zeigt die simulierte resultierende Regelgüte (5-8)-(5-9) der passivitätsbasierten Regelungsansatzes im Vergleich zur bisher verwendeten LQ-Regelung mit Gain-Scheduling. Es ist zu erkennen, dass der passivitätsbasierte Ansatz mit dem hybriden PCHD-Modell stark überlegen ist. Darüber hinaus visualisiert das Bild 5-7(c) die Regelgüte in Abhängigkeit der frei wählbaren Parameter der Solltrajektorie, vgl. Tabelle 5-1. Der passivitätsbasierte Ansatz mit dem hybriden PCHD-Modell erweist sich als überlegen gegenüber der bisher verwendeten LQ-Regelung mit Gain-Scheduling für alle wählbaren Werte, wobei der Aufwand bei der Modellbildung stark reduziert ist. Die Methode, ein PCHD-Modell datengetrieben zu bestimmen und systematisch für den Entwurf einer passivitätsbasierten Regelung zu verwenden, wurde in dieser Dissertation erstmals entwickelt und validiert.

5.4 Strategien für einen Koopman-Operator-basierten Beobachterentwurf

Im Kontext eines ganzheitlichen Entwurfs bedarf es in den meisten Anwendungen neben der Reglerentwicklung auch Ansätze für die Konzeption eines Beobachters. In diesem Zusammenhang wird im Folgenden erläutert, wie sich hybride EDMD-Modelle für den Beobachterentwurf verwenden lassen. Dafür werden zunächst zentrale Forschungsergebnisse aus der einschlägigen Literatur vorgestellt. Anschließend wird beispielhaft die An-



(a) Resultierende simulierte Regelgüte der unterschiedlichen Regelungsansätze.



(b) Analyse der Koopman-basierten Regelungsansätze.

(c) Analyse des passivitätsbasierten Regelungsansatzes.

Bild 5-7: Simulationsbasierte Analyse der unterschiedlichen in diesem Kapitel beschriebenen Regelungsansätze im Vergleich zur bisher verwendeten Riccati-Regelung mit Gain-Scheduling. In den Bildern 5-7(b) und 5-7(c) ist die mittlere resultierende Regelgüte J jeweils in Abhängigkeit der frei wählbaren Parameter φ_a (Ausholwinkel) und $\|\mathbf{v}_s\|$ (Schlaggeschwindigkeit) dargestellt.

wendung anhand des Schlagmechanismus des Golfroboters demonstriert und hinsichtlich der regelungstechnischen Verwertbarkeit des hybriden Streckenmodells beurteilt.

In [SB16] wird erstmals der modellbasierte Beobachterentwurf für ein Koopman-basiertes Streckenmodell in Anlehnung an lineare Luenberger-Beobachter beschrieben. Es wird angenommen, dass sich die Dynamik eines zugrunde liegenden autonomen Systems mittels N Koopman-Eigenfunktionen $\Phi(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_N(\mathbf{x})]^\top$ und den dazugehörigen Koopman-Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ durch

$$\dot{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathcal{K}\Phi(\mathbf{x}) = \Lambda\Phi(\mathbf{x}) \quad (5-76)$$

und der n -dimensionale Systemzustand

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{v}_j^x = \mathbf{V}^x \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_j^x \in \mathbb{R}^n, \mathbf{V}^x = [\mathbf{v}_1^x, \dots, \mathbf{v}_N^x] \in \mathbb{R}^{n \times N} \quad (5-77)$$

sowie der q -dimensionale Systemausgang

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{v}_j^y = \mathbf{V}^y \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_j^y \in \mathbb{R}^q, \mathbf{V}^y = [\mathbf{v}_1^y, \dots, \mathbf{v}_N^y] \in \mathbb{R}^{q \times N} \quad (5-78)$$

als Linearkombinationen formulieren lassen¹⁰. Dann ergibt sich daraus die Koopman-Beobachternormalform

$$\Phi(\mathbf{x}_k) = \Lambda\Phi(\mathbf{x}_{k-1}), \quad (5-79a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{V}^y \Phi(\mathbf{x}_k), \quad (5-79b)$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{V}^x \Phi(\mathbf{x}_k), \quad (5-79c)$$

mit der ein Luenberger-Beobachter [Lue71; FKL⁺16]

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}_k) = \Lambda\hat{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{L}(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k), \quad (5-80a)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{V}^y \hat{\Phi}(\mathbf{x}_k), \quad (5-80b)$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{V}^x \hat{\Phi}(\mathbf{x}_k) \quad (5-80c)$$

entworfen werden kann. Wenn das Paar (Λ, \mathbf{V}^y) beobachtbar ist, kann eine Rückführmatrix \mathbf{L} bestimmt werden, sodass der Beobachter (5-80) konvergiert. Falls die Koopman-Eigenzerlegung (5-76)-(5-78) darüber hinaus endlich dimensional und exakt ist, ist die Koopman-Beobachternormalform (5-79) global gültig und damit der Beobachter (5-80) global konvergent. In [SB16] wird simulativ demonstriert, dass die resultierende Schätzgüte eines Koopman-basierten Kalman-Filters sowohl am Einführungsbeispiel, vgl. Abschnitt 2.1, als auch am Van-der-Pol-Oszillator einem EKF (Extended Kalman Filter) überlegen ist. [Sur16] erweitert den beschriebenen Ansatz auf eingangsaffine und bilineare Systeme und [SWMB17] erweitern den Ansatz auf Systeme mit Zustandsbeschränkungen.

¹⁰Hier wird der Einfachheit halber ausschließlich der Fall für reale Eigenwerte beschrieben; eine Erweiterung um komplex-konjugierte Eigenwerte findet sich in [SB16].

In [ISA⁺15] wird die simulative Entwicklung eines Kalman-Filters unter Verwendung eines DMD-Modells zur Modellordnungsreduktion für Windturbinen beschrieben. Der Beitrag [NM18] beschreibt in Anlehnung an [SB16; Sur16] die Entwicklung eines robusten Koopman-basierten Kalman-Filters mit einem Maximum-Likelihood-Ansatz¹¹ für ein elektrisches Energiesystem und demonstrieren eine höhere Schätzgüte als bei der Verwendung eines EKFs. Der Beitrag [SEN⁺21] beschreibt einen neuartigen Ansatz für die Fehlererkennung bei supraleitenden Hochfrequenzkavitäten in einem Teilchenbeschleuniger mittels eines Koopman-basierten Kalman-Filters. Im Vergleich zu einem UKF (Uncentred Kalman Filter) ermöglicht der Koopman-basierte Kalman-Filter bei dieser Anwendung eine hohe Schätzgüte bei einer stark verringerten Rechenzeit. Der Beitrag [ZSB23] beschreibt den Entwurf eines Koopman-basierten EKFs für die Kraft- und Drehmoment-schätzung eines weichen Medizinroboters. Hierfür wurde das in dieser Dissertation entwickelte EDMD-Prädiktionsverfahren mit Korrektur, vgl. Abschnitt 3.2, aufgegriffen, um die Schätzgüte zu erhöhen.

Anwendung am Schlagmechanismus des Golfroboters

Beim Schlagmechanismus des Golfroboters lässt sich der Zustand x_1 (der Winkel der Abtriebswelle) messen, sodass für die Ausgangsgleichung gilt, vgl. Gleichung (5-3),

$$y = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}^\top = [1, 0]. \quad (5-81)$$

Daher ist es erforderlich, dass der Zustand x_2 mittels eines Beobachters geschätzt wird. Basierend auf dem EDMD-Modell der Dynamik lässt sich ein Luenberger-Beobachter [Lue71; FKL⁺16] für den Schlagmechanismus entwerfen, der sich durch

$$\dot{\hat{\Psi}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{K} - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^\top) \hat{\Psi}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}u + \tilde{\mathbf{l}}y \quad (5-82)$$

beschreiben lässt. Hierbei ist der EDMD-Ausgangsvektor durch

$$\tilde{\mathbf{c}} = [1, 0, 0, 0] \quad (5-83)$$

gegeben und die Eigenwerte des Beobachters, d. h. der Matrix $\mathbf{K} - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^\top$, werden doppelt so groß wie die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises gewählt [Oga02].

Im Bild 5-8 wird beispielhaft die resultierende Regelgüte (5-8)-(5-9) des EDMD-basierten Beobachters mit einem EDMD-basierten LQ-Regler der des physikalisch motivierten Entwurfs, vgl. Beginn dieses Kapitels, gegenübergestellt. Bei letzterem werden der Regler und Beobachter durch einen Gain-Scheduling-Ansatz bestimmt. Für die Solltrajektorie mit einem Ausholwinkel von 120° erreicht der Koopman-Ansatz eine deutlich höhere Regelgüte. Diese Erkenntnis ist nach umfassenden Analysen der vorherigen Kapitel erwartungsgemäß und lässt sich darauf zurückführen, dass das EDMD-Modell eine höhere Modellgenauigkeit aufweist, vgl. Abschnitt 3.4, und somit auch eine überlegene Regelgüte, vgl. Abschnitt 5.1, als der Gain-Scheduling-Ansatz bietet, der auf einer Linearisierung

¹¹Die Maximum-Likelihood-Methode [MM84] stammt aus der Statistik und konstruiert eine Schätzfunktion derart, dass für den unbekannt Parameter unter der Grundgesamtheit aller denkbaren Schätzwerte genau derjenige ausgewählt wird, bei dem die gezogene Stichprobe die maximale Eintrittswahrscheinlichkeit besitzt. Eine umfassende Beschreibung dieser Methode findet sich beispielsweise in [Bis06].

des nichtlinearen physikalischen Modells basiert. Aufgrund der hohen Schätzgüte und der geradlinigen Anwendbarkeit lässt sich die Aussage treffen, dass das EDMD-Modell eine hohe regelungstechnische Verwertbarkeit auch hinsichtlich des Beobachterentwurfs aufweist.

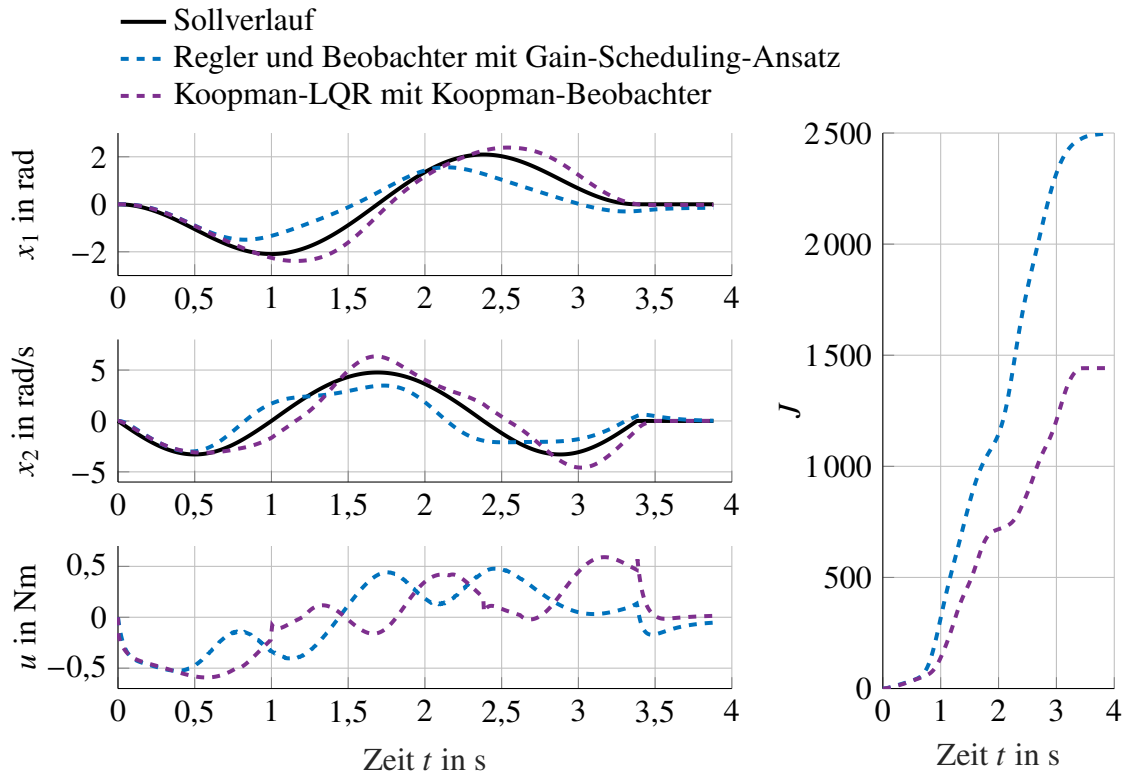


Bild 5-8: Resultierende simulierte Regelgüte unter Einsatz von Beobachtern.

5.5 Zwischenfazit

In den vergangenen Abschnitten wurde untersucht, wie sich die hybriden Modelle aus den Kapiteln 3 und 4 für den modellbasierten Regelungsentwurf nutzen lassen. Eine zentrale Erkenntnis hierbei war, dass sich die EDMD-Modelle aufgrund der linearen Systemstruktur geradlinig in lineare Entwurfsmethoden wie beispielsweise Riccati-Regler, modellprädiktive Regelungen und Luenberger-Beobachter integrieren lassen. Am Beispiel des Schlagmechanismus des Golfroboters wurde mittels numerischer Simulationen die Erkenntnis gewonnen, dass sämtliche EDMD-basierte Entwurfsansätze bezüglich der resultierenden Regelgüte einem physikalisch motivierten Ansatz mit klassischer Linearisierung überlegen sind. Dabei ist zu erwähnen, dass der Aufwand sowohl bei der Modellbildung als auch beim Regler- bzw. Beobachterentwurf signifikant reduziert wird, weil das gelernte Streckenmodell unmittelbar in der Form vorliegt, die sich für den Regler- und Beobachterentwurf nutzen lässt, vgl. Bild 4-1.

Datengetriebene PCHD-Modelle lassen sich systematisch für den passivitätsbasierten Regelungsentwurf nutzen. Dieses Vorgehen wurde in dieser Dissertation erstmals simulativ am Beispiel des Schlagmechanismus des Golfroboters untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass die resultierende Regelgüte zwar geringfügig schlechter ist als die der EDMD-

basierten Ansätze, das Modell dafür jedoch eine sehr hohe physikalische Interpretierbarkeit und Plausibilität bietet.

Zusammenfassend zeigt sich, dass sowohl EDMD-Modelle als auch hybride PCHD-Modelle gemäß der Kriterien aus Kapitel 4 eine hohe regelungstechnische Verwertbarkeit aufweisen. Bei der Entscheidung für das am besten geeignete Entwurfsverfahren aus den in diesem Kapitel präsentierten Ansätzen kann keine allgemeine Aussage getroffen werden. Vielmehr ist es ratsam, diese Darstellung als Instrumentarium zu betrachten und bei der konkreten Anwendung im Einzelfall zu prüfen, welche Art der Modellbildung zielführend ist. Anschließend kann das dazu passende Entwurfsverfahren ausgewählt werden. Hierbei zeigen die in diesem Kapitel präsentierten Ergebnisse, dass eine hohe Modellgüte im Allgemeinen mit einer entsprechend hohen Regelgüte korreliert, sodass die Approximationsgenauigkeit des datengetriebenen Modells durchaus als Kriterium für die Auswahl eines geeigneten Reglerentwurfsverfahrens dienen kann.

Im Hinblick auf den im Kapitel 4 definierten Begriff der aus regelungstechnischer Sicht verwertbaren hybriden Streckenmodelle wurde die Anforderung der Adaptionfähigkeit bei Systemveränderungen bisher nicht adressiert. Die im Abschnitt 5.1 beschriebene Riccati-Regelung lässt sich nicht ohne Weiteres anpassen, weil für ein rekursives Modell, das optimal im Sinne der Kostenfunktion ist, die algebraische Riccati-Gleichung in jedem Rechenschritt gelöst werden müsste. Daher wird dieses Entwurfsverfahren im weiteren Verlauf dieser Dissertation nicht weiter betrachtet. Jedoch werden im folgenden Kapitel 6 Strategien beschrieben, mit denen sich adaptive datengetriebene EDMD- und PCHD-Modelle bestimmen lassen.

6 Adaptive Methoden zur datengetriebenen Systemidentifikation

Eine Herausforderung bei der Entwicklung mechatronischer Systeme besteht darin, dass über den Produktlebenszyklus hinweg vorhersehbare oder unvorhersehbare Systemveränderungen auftreten können, z. B. die Installation eines neuen Bauteils, Verschleiß oder Temperaturschwankungen während des Betriebs. Um dennoch eine gleichbleibend hohe Regelgüte gewährleisten zu können, ist es erforderlich, dass die Informationsverarbeitung in der Lage ist, diese Änderungen zu erfassen und sich automatisch anzupassen. Hierfür können die während des Betriebs eines regelungstechnischen Systems ohnehin aufgrund der Rückkopplungsstruktur laufend erfassten Messdaten, vgl. Bild 1-1, genutzt werden.

Im Bereich der adaptiven Regelung existieren etablierte Methoden¹ für den Umgang mit sich verändernden Systemparametern oder Modellunsicherheiten. Außerdem bieten sich diese Methoden für den Fall an, dass ein unzureichend genaues lineares Modell zur vereinfachten Beschreibung nichtlinearer Dynamiken angenommen wird. Es erfolgt eine Unterscheidung in direkte und indirekte adaptive Regelungsansätze. Bei der direkten adaptiven Regelung werden die Reglerparameter in Echtzeit angepasst, beispielsweise in Abhängigkeit der Differenz zwischen der Systemausgabe und der Ausgabe eines gewünschten Referenzmodells [Åst08]. Im Gegensatz dazu ist die indirekte adaptive Regelung ein zweistufiger Prozess: Zuerst werden die Parameter des Streckenmodells basierend auf der Differenz zwischen der Messung und der aktuellen Modellausgabe neu geschätzt und danach werden die Reglerparameter entsprechend berechnet [BU16]. Im Hinblick auf den Wunsch nach interpretierbaren Modellen mit einem tiefen Verständnis für die Systemdynamik werden in dieser Dissertation ausschließlich indirekte Verfahren verfolgt.

Das Vorgehen bezüglich hybrider Streckenmodelle in regelungstechnisch verwertbarer Form ist im Bild 6-1 illustriert. Aufbauend auf den vergangenen Kapiteln wird die Modellbildung um einen Ansatz zur Online-Adaption während der Laufzeit erweitert. Auftretende Systemveränderungen werden durch die laufenden Messungen erfasst und die Informationsverarbeitung entsprechend angepasst, wobei die regelungstechnisch verwertbare Form des Streckenmodells erhalten bleibt. Zunächst werden adaptive EDMD-Modelle thematisiert, vgl. Abschnitt 6.1. Hierfür werden Ansätze aus dem aktuellen Forschungsstand der Literatur aufgegriffen und umfassend erweitert. Zudem wird die Anwendung für den Regler- und Beobachterentwurf erstmals experimentell an einem Prüfstand validiert. Aufbauend auf den im Kontext adaptiver EDMD-Modelle gewonnenen Erkenntnissen wird anschließend ein Ansatz für adaptive datengetriebene PCHD beschrieben und simulativ sowie experimentell validiert, vgl. Abschnitt 6.2. Wie auch die Idee datengetriebener PCHD-Modelle selbst, stellt dieser Ansatz eine gänzlich neuartige Methode dar. In einem Zwischenfazit im Abschnitt 6.3 werden die Methoden hinsichtlich der im Kapitel 4 hergeleiteten Kriterien an Streckenmodelle in regelungstechnisch verwertbarer Form beurteilt.

6.1 Adaptives EDMD-Modell

Im Folgenden wird die Entwicklung eines adaptiven EDMD-Modells beschrieben, das sich basierend auf einem rekursiven Kleinste-Quadrate-Ansatz während des Betriebs lau-

¹ Siehe beispielsweise [ASG15; LLMK11] für einen Überblick über bestehende Methoden.

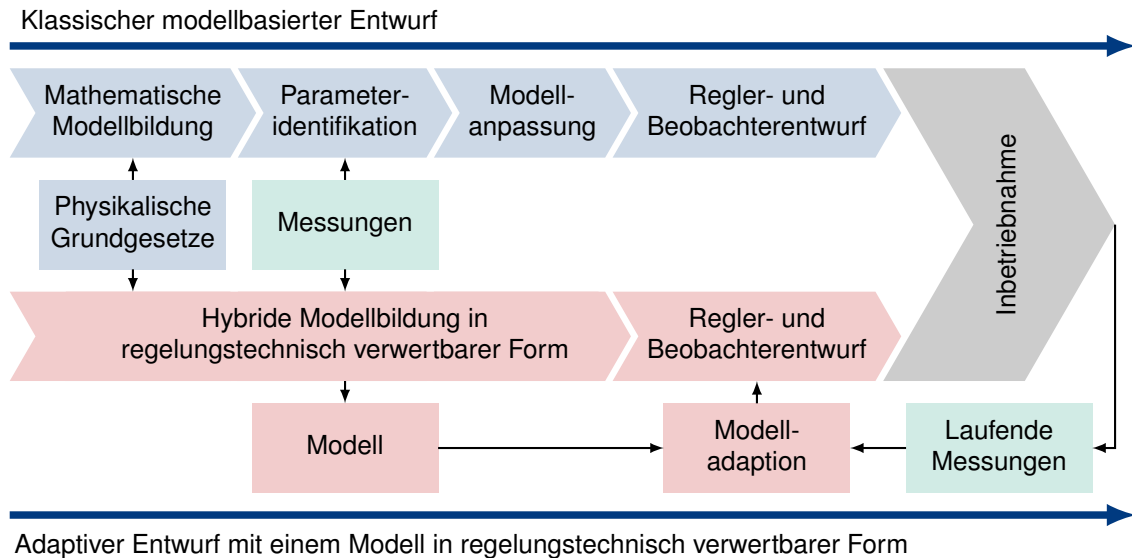


Bild 6-1: Der adaptive Entwurf ermöglicht ein hybrides Modell in regelungstechnisch verwertbarer Form, das sich während des Betriebs anpasst. In Anlehnung an den eigenen Beitrag [JPTT23].

find aktualisiert. Dafür wird zunächst der aktuelle Stand der Forschung beschrieben und darauf basierend eine Rekursionsvorschrift für das EDMD-Modell hergeleitet. Danach wird der Algorithmus um unterschiedliche intelligente Berechnungselemente wie beispielsweise einen variablen Vergessensfaktor erweitert. Hinsichtlich der Fragestellung dieser Dissertation werden die resultierende Modellgenauigkeit sowie die Anwendbarkeit für den Regler- und Beobachterentwurf beurteilt und ein Fazit gezogen.

6.1.1 Stand der Forschung

In der Literatur finden sich unterschiedliche Ansätze für adaptive Koopman-Operatorbasierte Modelle und darauf basierende Regelungsstrategien. Aufgrund der Vielzahl einander ähnlicher Beiträge werden diese im Folgenden nur kurz beschrieben. Der Beitrag [PK20] beschreibt die Anpassung des EDMD-Modells durch eine rekursive Formulierung der Kleinste-Quadrate-Lösung (3-24) und demonstrieren den Erfolg dieser Methode simulativ anhand der Navier-Stokes-Gleichungen². Der beschriebene Ansatz erfordert in jedem Adaptionsschritt die Berechnung der Pseudoinversen Matrix \mathcal{G}^+ , vgl. Gleichung (3-23). [ZRDC19] entwickeln einen Algorithmus für ein adaptives DMD-Modell basierend auf einem rekursiven Kleinste-Quadrate-Ansatz und demonstrieren die resultierende Modellgüte anhand eines piezoelektrischen Scanners in einem Rasterkraftmikroskop. Der Beitrag [CVW16] beschreibt den Entwurf einer nichtlinearen MPC basierend auf quasi-LPV³-Systemen und wenden diese Methode in [CDGW20] auf rekursiv berechnete EDMD-Modelle an. Die resultierende Regelgüte wird experimentell anhand

²Die Navier-Stokes-Gleichungen sind fundamentale partielle Differentialgleichungen, die die Strömung linear-viskoser Flüssigkeiten beschreiben [Her08].

³Mithilfe linearer parametervarianter (LPV-)Systeme lassen sich lineare Dynamiken beschreiben, die abhängig von externen zeitabhängigen Parametern variieren [RS00]. Im Gegensatz dazu lassen sich mit quasi-LPV-Systemen nichtlineare Dynamiken beschreiben, die abhängig von (internen) Parametern wie Eingangs- oder Zustandsgrößen variieren [BB05; RNP13; Cis21]. Die LPV-

einer Gyroskopregelung demonstriert. In [CSOW21] wird die Berechnung des adaptiven EDMD-Modells basierend auf einem rekursiven Kleinste-Quadrate-Ansatz mit einem konstanten Vergessensfaktor⁴ formuliert und die erzielte Regelgüte simulativ anhand des Van-der-Pol-Oszillators untersucht. Darüber hinaus wird die erzielte Regelgüte simulativ anhand einer Windturbinenregelung [DSW21] und einer Windfarm [DSW22; SDW22] demonstriert. Bei diesen Ergebnissen wird die Annahme getroffen, dass die Zustandsgrößen des Systems vollständig bekannt sind. Der Beitrag [CSOW23] erweitert den Entwurf um einen variablen Matrix-Vergessensfaktor [BGB20], der es ermöglicht, die Vergessensrate (Geschwindigkeit des Vergessens) und die Vergessensrichtung (Einfluss der verschiedenen messbaren Zustände auf das Vergessen) passgenau zu wählen. Die resultierende Regelgüte wird simulativ anhand des Van-der-Pol-Oszillators demonstriert. In [GCZ⁺22] wird eine gewichtete rekursive EDMD-Methode für ein Fahrer*innenmodell ausgelegt und simulativ für eine MPC der Fahrzeugautomatisierung genutzt. Im Beitrag [HZL⁺21] wird die Nutzung eines adaptiven EDMD-Modells für die Regelung von Piezo-Aktoren zur Nanopositionierung beschrieben. Der Beitrag [GWJ23] präsentiert die Verwendung eines adaptiven EDMD-Modells für einen Riccati-Regler und demonstrieren die Regelgüte simulativ für die Spannungs- und Frequenzregelung von Inselnetzen. Der Beitrag [XIS23] entwickelt ein gewichtetes rekursives EDMD-Modell für die Beschreibung von essentiell Tremor⁵ an den Handgelenken von Patient*innen. Anschließend beschreiben sie simulativ die Entwicklung einer Koopman-MPC für die Regelung eines Hirnschrittmachers, der dazu dient diesen Tremor zu unterdrücken.

Der aktuelle Stand der Forschung umfasst Ansätze zur Berechnung adaptiver EDMD-Modelle sowie deren Anwendung für den modellbasierten Regelungsentwurf. Zustandsregelungen erfordern, dass alle Zustandsgrößen des Systems entweder direkt messbar sind oder mittels eines Beobachters geschätzt werden können, wie in Kapitel 5 beschrieben. Die meisten der beschriebenen Ansätze wurden anhand simulativer Untersuchungen validiert, bei denen alle Zustände als bekannt angenommen wurden, oder anhand experimenteller Versuche, bei denen alle Zustände des Systems direkt messbar sind. Die meisten mechatronischen Systeme erfordern jedoch aufgrund nicht messbarer Zustandsgrößen den Entwurf eines Beobachters. Für eine hohe resultierende Regelgüte im Fall von Modellunsicherheiten oder auftretenden Systemveränderungen ist neben dem Regler zusätzlich auch der Beobachter während des Betriebs anzupassen. Zum Zeitpunkt der Erarbeitung der Ergebnisse in diesem Kapitel fanden sich in der Literatur nach sorgfältiger Recherche keine Anwendungen eines adaptiven EDMD-Modells, die einen zusätzlichen Beobachter für die Schätzung der Zustände, die nicht direkt messbar sind, erfordern.

bzw. quasi-LPV-Form ermöglicht die Anwendung linearer Entwurfsverfahren für nichtlineare Dynamiken, ähnlich wie beim Gain-Scheduling-Ansatz, vgl. Kapitel 5.

⁴Der Vergessensfaktor ist ein Gewichtungsfaktor bei rekursiven Kleinste-Quadrate-Ansätzen, der beeinflusst, wie stark vergangene Daten in der Anpassung der Modellparameter berücksichtigt werden. Eine optimale Wahl des Vergessensfaktors gewährleistet, dass der Algorithmus anpassungsfähig gegenüber Systemveränderungen und gleichzeitig robust gegenüber Rauschen ist [CPBE09].

⁵Tremor beschreibt ein unwillkürliches oszillierendes Muskelzittern, das durch neurodegenerative Krankheiten wie Parkinson verursacht wird [XIS23].

6.1.2 Berechnung des adaptiven EDMD-Modells

Die Herleitung der rekursiven Berechnungsvorschrift⁶ erfolgt unter Berücksichtigung von [CSOW21]. Zur maßgeblichen Verbesserung des Adaptionsvorgangs wird der Algorithmus anschließend in Anlehnung an die von der Autorin betreute studentische Arbeit [Pap22b] und den eigenen Beitrag [JPTT23] um verschiedene intelligente Berechnungselemente erweitert. In jedem Berechnungsschritt wird die Notwendigkeit zur Aktualisierung des Modells überprüft. Zusätzlich wird ein variabler Vergessensfaktor eingeführt, der es dem Modell ermöglicht, Messdaten aus der Vergangenheit in Abhängigkeit der Intensität der auftretenden Systemveränderungen zu vernachlässigen. Um ein mögliches Risiko der Divergenz des Schätzalgorithmus zu verhindern, wird zudem die Spur der Kovarianzmatrix laufend überwacht und zur Anpassung der Empfindlichkeit des Algorithmus angepasst.

Rekursive Berechnungsvorschrift

Im Folgenden wird in Anlehnung an [CSOW21] der Algorithmus für ein rekursives EDMD-Modell hergeleitet, das in dieser Dissertation als *rEDMD-Modell* (*rekursives EDMD-Modell*) bezeichnet wird. Das Ziel ist es, das Modell mithilfe kontinuierlich aufgezeichneter Messdaten zu aktualisieren. Zu diesem Zweck werden die Snapshotmatrizen, vgl. Gleichung (3-3), in jedem Zeitschritt k formuliert

$$\mathbf{X}_k = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}] \in \mathbb{R}^{n \times (k-1)}, \quad (6-1a)$$

$$\mathbf{X}'_k = [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_k] \in \mathbb{R}^{n \times (k-1)}, \quad (6-1b)$$

$$\mathbf{U}_k = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}] \in \mathbb{R}^{p \times (k-1)} \quad (6-1c)$$

und für den Zeitschritt $k + 1$ erweitert zu

$$\mathbf{X}_{k+1} = [\mathbf{X}_k, \mathbf{x}_k] = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}, \quad (6-2a)$$

$$\mathbf{X}'_{k+1} = [\mathbf{X}'_k, \mathbf{x}_{k+1}] = [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{k+1}] \in \mathbb{R}^{n \times k}, \quad (6-2b)$$

$$\mathbf{U}_{k+1} = [\mathbf{U}_k, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k] \in \mathbb{R}^{p \times k}. \quad (6-2c)$$

Mit

$$\Psi(\mathbf{X}_k) = [\Psi(\mathbf{x}_1), \Psi(\mathbf{x}_2), \dots, \Psi(\mathbf{x}_{k-1})] \in \mathbb{R}^{N \times (k-1)}, \quad (6-3a)$$

$$\Psi(\mathbf{X}'_k) = [\Psi(\mathbf{x}_2), \Psi(\mathbf{x}_3), \dots, \Psi(\mathbf{x}_k)] \in \mathbb{R}^{N \times (k-1)}, \quad (6-3b)$$

$$\Psi(\mathbf{X}_{k+1}) = [\Psi(\mathbf{X}_k), \Psi(\mathbf{x}_k)] = [\Psi(\mathbf{x}_1), \Psi(\mathbf{x}_2), \dots, \Psi(\mathbf{x}_k)] \in \mathbb{R}^{N \times k}, \quad (6-3c)$$

$$\Psi(\mathbf{X}'_{k+1}) = [\Psi(\mathbf{X}'_k), \Psi(\mathbf{x}_{k+1})] = [\Psi(\mathbf{x}_2), \Psi(\mathbf{x}_3), \dots, \Psi(\mathbf{x}_{k+1})] \in \mathbb{R}^{N \times k} \quad (6-3d)$$

ergibt sich für jeden Zeitschritt die jeweilige Kleinste-Quadrate-Lösung für ein EDMD-Modell

$$[\mathbf{K}_{t,k}, \mathbf{B}_{t,k}] = \Psi(\mathbf{X}'_k) \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{U}_k \end{bmatrix}^+, \quad (6-4a)$$

⁶Die klassische rekursive Kleinste-Quadrate-Methode wird beispielsweise in [IM11] beschrieben.

$$\left[\mathbf{K}_{t,k+1}, \mathbf{B}_{t,k+1} \right] = \Psi(\mathbf{X}'_{k+1}) \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}_{k+1}) \\ \mathbf{U}_{k+1} \end{bmatrix}^+ \quad (6-4b)$$

Mittels der Gleichung (A1-14) aus dem Anhang A1.4 lassen sich die Pseudoinversen umformulieren⁷

$$\left[\mathbf{K}_{t,k}, \mathbf{B}_{t,k} \right] = \Psi(\mathbf{X}'_k) \left[\Psi^\top(\mathbf{X}_k), \mathbf{U}_k^\top \right] \Gamma_k, \quad (6-5a)$$

$$\left[\mathbf{K}_{t,k+1}, \mathbf{B}_{t,k+1} \right] = \Psi(\mathbf{X}'_{k+1}) \left[\Psi^\top(\mathbf{X}_{k+1}), \mathbf{U}_{k+1}^\top \right] \Gamma_{k+1}, \quad (6-5b)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \left(\begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{U}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^\top(\mathbf{X}_k), \mathbf{U}_k^\top \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}_k)\Psi^\top(\mathbf{X}_k) & \Psi(\mathbf{X}_k)\mathbf{U}_k^\top \\ \mathbf{U}_k\Psi^\top(\mathbf{X}_k) & \mathbf{U}_k\mathbf{U}_k^\top \end{bmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{(N+p) \times (N+p)}, \end{aligned} \quad (6-6a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{k+1} &= \left(\begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}_k) & \Psi(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{U}_k & \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^\top(\mathbf{X}_k) & \mathbf{U}_k^\top \\ \Psi^\top(\mathbf{x}_k) & \mathbf{u}_k^\top \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}_k)\Psi^\top(\mathbf{X}_k) + \Psi(\mathbf{x}_k)\Psi^\top(\mathbf{x}_k) & \Psi(\mathbf{X}_k)\mathbf{U}_k^\top + \Psi(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}_k^\top \\ \mathbf{U}_k\Psi^\top(\mathbf{X}_k) + \mathbf{u}_k\Psi^\top(\mathbf{x}_k) & \mathbf{U}_k\mathbf{U}_k^\top + \mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^\top \end{bmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{(N+p) \times (N+p)} \end{aligned} \quad (6-6b)$$

die Kovarianzmatrizen⁸ für die Zeitschritte k bzw. $k+1$ sind. Die Umformung der Gleichungen (6-5a) und (6-5b) ergibt

$$\left[\mathbf{K}_{t,k}, \mathbf{B}_{t,k} \right] \Gamma_k^{-1} = \Psi(\mathbf{X}'_k) \left[\Psi^\top(\mathbf{X}_k), \mathbf{U}_k^\top \right], \quad (6-7a)$$

$$\left[\mathbf{K}_{t,k+1}, \mathbf{B}_{t,k+1} \right] = \Psi(\mathbf{X}'_k) \left[\Psi^\top(\mathbf{X}_k), \mathbf{U}_k^\top \right] \Gamma_{k+1} + \Psi(\mathbf{x}_{k+1}) \left[\Psi^\top(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^\top \right] \Gamma_{k+1} \quad (6-7b)$$

und das Einsetzen von Gleichung (6-7a) in Gleichung (6-7b) liefert

$$\left[\mathbf{K}_{t,k+1}, \mathbf{B}_{t,k+1} \right] = \left[\mathbf{K}_{t,k}, \mathbf{B}_{t,k} \right] \Gamma_k^{-1} \Gamma_{k+1} + \Psi(\mathbf{x}_{k+1}) \left[\Psi^\top(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^\top \right] \Gamma_{k+1}. \quad (6-8)$$

Mit der aus den Gleichungen (6-6a) und (6-6b) formulierten rekursiven Vorschrift

$$\Gamma_{k+1}^{-1} = \Gamma_k^{-1} + \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^\top(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^\top \end{bmatrix} \quad (6-9)$$

ergibt sich durch Einsetzen von Γ_k^{-1} die rekursive Formel für die Modellaktualisierung

$$\underbrace{\left[\mathbf{K}_{t,k+1}, \mathbf{B}_{t,k+1} \right]}_{\text{neues Modell}} = \underbrace{\left[\mathbf{K}_{t,k}, \mathbf{B}_{t,k} \right]}_{\text{altes Modell}} + \underbrace{\left(\Psi(\mathbf{x}_{k+1}) - \left[\mathbf{K}_{t,k}, \mathbf{B}_{t,k} \right] \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right)}_{\text{Prädiktionsfehler}} \underbrace{\gamma_k}_{\text{Korrekturvektor}} \quad (6-10)$$

⁷Die Spalten der Matrizen $\begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{U}_k \end{bmatrix}$ bzw. $\begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}_{k+1}) \\ \mathbf{U}_{k+1} \end{bmatrix}$ werden als linear unabhängig angenommen, so dass Gleichung (A1-14) für die Berechnung der Pseudoinversen angewendet werden darf.

⁸Die Kovarianzmatrix liefert basierend auf den Messdaten ein Maß für die Unsicherheit der aktuell geschätzten Parameter.

mit dem Korrekturvektor

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^\top(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^\top \end{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{k+1}. \quad (6-11)$$

Die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Gamma}_{k+1}$ wird unter Verwendung des Matrix-Inversions-Lemmas⁹ mittels Gleichung (6-9) berechnet¹⁰:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{k+1} = \boldsymbol{\Gamma}_k - \frac{\boldsymbol{\Gamma}_k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^\top(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^\top \end{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_k}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^\top(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^\top \end{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} + 1} \quad (6-12)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\Gamma}_{k+1} = \boldsymbol{\Gamma}_k \left(\mathbf{I}_{N+p} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_k \right) \quad (6-13)$$

mit

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \frac{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^\top(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^\top \end{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_k}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^\top(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^\top \end{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} + 1}. \quad (6-14)$$

Die Kostenfunktion der Standard-EDMD-Approximation, vgl. Gleichung (3-22), für M Snapshots ist durch

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M-1} \left\| \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t, \mathbf{B}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (6-15)$$

gegeben. Für eine rekursive Berechnung mit $M^* > M$ erweitert sich die Kostenfunktion schrittweise zu

$$L(M^*) = \frac{1}{2} \sum_{k=M^*-M}^{M^*-1} \left\| \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{t,k}, \mathbf{B}_{t,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right\|^2, \quad (6-16)$$

vgl. [Ise08], wodurch alle gespeicherten Messpunkte gleichwertig berücksichtigt werden. Um vergangene Messungen bei auftretenden Systemveränderungen zu *vergessen*, d. h. schwächer zu gewichten, wird im Folgenden ein Vergessensfaktor λ verwendet, der typischerweise im Bereich $0,95 \leq \lambda < 1$ liegt [IM11]. Der Vergessensfaktor lässt die

⁹Das Matrix-Inversions-Lemma besagt, dass für die nichtsingulären quadratischen Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{C} und $(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D})$ gilt: $(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}(\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}$ [IM11]. Für die Berechnung von Gleichung (6-12) entsprechen die Matrizen $\mathbf{A} = \boldsymbol{\Gamma}_k$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = 1$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^\top(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^\top \end{bmatrix}$.

¹⁰Bei dem Term im Nenner des Bruchs von Gleichung (6-12) handelt es sich um eine skalare Größe.

Gewichtung der einzelnen Messwerte exponentiell abnehmen, wie in der Kostenfunktion

$$L(M^*) = \frac{1}{2} \sum_{k=M^*-M}^{M^*-1} \lambda^{M^*-k} \left\| \Psi(\mathbf{x}_{k+1}) - [\mathbf{K}_{t,k}, \mathbf{B}_{t,k}] \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (6-17)$$

zu erkennen ist. Die Verwendung eines Vergessensfaktors erlaubt eine systematische Einstellung der Adaptionsgeschwindigkeit. Dabei ist ein Kompromiss zu schließen zwischen der Fähigkeit, Parameteränderungen gut zu folgen (λ klein) und der Fähigkeit, Störsignale gut zu eliminieren (λ groß) [Ise08].

Ein Vergessensfaktor $\lambda < 1$ beeinflusst die Berechnung von γ_k und Γ_{k+1} , sodass sich zusammengefasst die folgenden Formeln für die Modellaktualisierung ergeben

$$\gamma_k = \frac{[\Psi^\top(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^\top] \Gamma_k}{[\Psi^\top(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^\top] \Gamma_k \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} + \lambda}, \quad (6-18a)$$

$$[\mathbf{K}_{t,k+1}, \mathbf{B}_{t,k+1}] = [\mathbf{K}_{t,k}, \mathbf{B}_{t,k}] + \left(\Psi(\mathbf{x}_{k+1}) - [\mathbf{K}_{t,k}, \mathbf{B}_{t,k}] \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right) \gamma_k, \quad (6-18b)$$

$$\Gamma_{k+1} = \Gamma_k \left(\mathbf{I}_{N+p} - \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \gamma_k \right) \frac{1}{\lambda}, \quad (6-18c)$$

die zugleich den Kern des Algorithmus bilden. Hierbei wird im Wesentlichen die Adaptionsstärke durch die Kovarianzmatrix Γ_k und die Adaptionsgeschwindigkeit durch den Vergessensfaktor λ charakterisiert.

Überprüfung der Notwendigkeit zur Aktualisierung des Modells

Es ist nicht ratsam das Modell konsequent in jedem Berechnungsschritt zu aktualisieren. Würden beispielsweise durchgehend Messpunkte hinzugefügt, während das System sich in einer Ruhelage befindet, d. h. die Zustands- und Eingangsgrößen konstant sind, hätte dies zur Folge, dass nachfolgende signifikante neue Informationen beim Verlassen der Ruhelage das Modell kaum beeinflussen, weil ihre Bedeutung aufgrund ihrer Menge im Vergleich zur Gesamtdatenmenge gering ist. Daher ist es wichtig, dass neue Messdaten analysiert werden, um festzustellen, ob sie tatsächlich neue und relevante Informationen darstellen, die das Modell verbessern oder anpassen könnten. In Anlehnung an [CDGW20] wird die Abweichung zwischen dem aktuellen Modell und den Messdaten als Kriterium genutzt, um zu entscheiden, ob das Modell aktualisiert wird. Während des Betriebs werden M_{op} Messungen der Zustands- und Eingangsgrößen in den Matrizen

$$\bar{\mathbf{X}}_k = [\mathbf{x}_{k-M_{\text{op}}}, \mathbf{x}_{k-M_{\text{op}}+1}, \dots, \mathbf{x}_k], \quad (6-19a)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_k = [\mathbf{u}_{k-M_{\text{op}}}, \mathbf{u}_{k-M_{\text{op}}+1}, \dots, \mathbf{u}_k] \quad (6-19b)$$

gespeichert. Das aktuelle rEDMD-Modell wird gemäß Gleichung (3-43) prädiziert

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-M_{\text{op}}+1} = \mathbf{P} \left(\mathbf{K}_{t,k} \Psi(\mathbf{x}_{k-M_{\text{op}}}) + \mathbf{B}_{t,k} \mathbf{u}_{k-M_{\text{op}}} \right), \quad (6-20a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-M_{\text{op}}+2} = \mathbf{P} \left(\mathbf{K}_{t,k} \boldsymbol{\Psi}(\hat{\mathbf{x}}_{k-M_{\text{op}}+1}) + \mathbf{B}_{t,k} \mathbf{u}_{k-M_{\text{op}}+1} \right), \quad (6-20b)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{P} \left(\mathbf{K}_{t,k} \boldsymbol{\Psi}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{B}_{t,k} \mathbf{u}_{k-1} \right) \quad (6-20c)$$

und in der Matrix

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \left[\mathbf{x}_{k-M_{\text{op}}}, \hat{\mathbf{x}}_{k-M_{\text{op}}+1}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_k \right] \quad (6-21)$$

gespeichert. Falls eine vorher festgelegte definierte Genauigkeitsschranke ε_{low} ¹¹ überschritten wird, d. h.

$$\|\bar{\mathbf{X}}_k - \hat{\mathbf{X}}_k\|_{\infty} \geq \varepsilon_{\text{low}}, \quad (6-22)$$

wird die neue Messung $\left[\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1} \right]^{\top}$ für eine Aktualisierung des Modells verwendet.

Variabler Vergessensfaktor

Zur Verbesserung des Adaptionvorgangs wird in Anlehnung an [FKY81; ZCLL17] anstatt eines konstanten Vergessensfaktors λ ein variabler Vergessensfaktor λ_k verwendet. Die Bestimmung erfolgt in jedem Berechnungsschritt durch

$$\lambda_{k+1} = 1 - \frac{1}{\Sigma_{0,k}} \left(1 - \left[\boldsymbol{\Psi}^{\top}(\mathbf{x}_k), \mathbf{u}_k^{\top} \right] \boldsymbol{\gamma}_k^{\top} \right) e_{\text{post},k}^2, \quad (6-23)$$

wobei zusätzlich sichergestellt wird, dass stets

$$\lambda_{\text{min}} < \lambda_k < 1 \quad (6-24)$$

gilt. Hierbei ist

$$e_{\text{post},k} = y_k - \mathbf{P}_y \left(\mathbf{K}_{t,k} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{B}_{t,k} \mathbf{u}_{k-1} \right) \quad (6-25)$$

der Fehler zwischen dem gemessenen Systemausgang y_k und dem prädierten Systemausgang, der mittels der Projektionsmatrix¹²

$$\mathbf{P}_y = \mathbf{c}^{\top} \mathbf{P} \quad (6-26)$$

aus dem EDMD-Modell extrahiert wird. Die Variable

$$\Sigma_{0,k} = \sigma_{e,k} N_0 \quad (6-27)$$

ist ein angenommenes Messrauschen mit der Varianz $\sigma_{e,k}$ des A-posteriori-Fehlers $e_{\text{post},k}$ und einem einstellbaren Sensitivitätsfaktor N_0 . Ein kleiner Wert für N_0 resultiert in einer

¹¹Der Index low dient zur Unterscheidung von einer weiteren vorher festgelegten Genauigkeitsschranke $\varepsilon_{\text{high}}$, die weiter unten in diesem Abschnitt eingeführt wird.

¹²Die Matrix $\mathbf{P}_y \in \mathbb{R}^{q \times N}$ projiziert $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})$ auf die Ausgangsgrößen des Systems, während $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ auf die Zustandsgrößen projiziert, vgl. Abschnitt 3.2.

großen Kovarianzmatrix und somit in einer hohen Empfindlichkeit. Falls eine vorher festgelegte Genauigkeitsschranke $\varepsilon_{\text{high}} > \varepsilon_{\text{low}}$, vgl. Gleichung (6-22) überschritten wird, d. h.

$$\|\bar{\mathbf{X}}_k - \hat{\mathbf{X}}_k\|_{\infty} \geq \varepsilon_{\text{high}}, \quad (6-28)$$

wird die Adaptionsgeschwindigkeit erhöht, indem $\Sigma_{0,k}$ mit einem Reduktionsfaktor $\mu_{\Sigma} < 1$ multipliziert wird. Die hier beschriebene Strategie für einen variablen Vergessensfaktor beschränkt sich der Einfachheit halber auf Systeme mit einer Ausgangsgröße, d. h. für $q = 1$. Für Systeme mit $q > 1$ müssten multiple (Matrix-)Vergessensfaktoren variabel bestimmt werden.

Überwachung der Spur der Kovarianzmatrix

Die Verwendung eines Vergessensfaktors $\lambda < 1$ kann für Situationen, in denen das System nicht beständig angeregt¹³ wird, zu einer Divergenz der Schätzungen führen, weil Γ_{k+1}^{-1} für $\Psi(\mathbf{x}_{k+1}) \approx \mathbf{0}$ laufend abnimmt. Dies kann zu stark ansteigenden Werten von Γ_{k+1} und γ_k führen [Ise08], wodurch der Schätzalgorithmus empfindlich auf Änderungen in den Messdaten reagiert.

Zur Begrenzung der Adaptionstärke und damit der Empfindlichkeit des Schätzalgorithmus erfolgt in Anlehnung an [LG85] eine laufende Überwachung der Spur der Kovarianzmatrix. Beim Überschreiten eines Grenzwertes τ_{\max} werden die Elemente der Kovarianzmatrix mit einem Reduktionsfaktor $\mu_{\Gamma} < 1$ multipliziert

$$\Gamma_k \leftarrow \mu_{\Gamma} \Gamma_k \quad \text{mit} \quad \mu_{\Gamma} = \frac{\tau_{\max}}{\text{spur}(\Gamma_k)}. \quad (6-29)$$

Der Algorithmus 6-1 kombiniert die obig hergeleitete rekursive Berechnungsvorschrift mit den beschriebenen Erweiterungen.

6.1.3 Analyse der resultierenden Modellgenauigkeit

Am Beispiel des Schlagmechanismus des Golfroboters wird die resultierende Modellgenauigkeit des rEDMD-Modells untersucht. Bezüglich der Trainings- und Testdaten wird dasselbe Szenario wie in den Bildern 3-13 und 3-14, vgl. Abschnitt 3.4, betrachtet. Das Bild 6-2 zeigt die Prädiktionsgüte des rEDMD-Modells im Vergleich zum nichtlinearen physikalischen Modell und zur EDMD-Prädiktion mit Korrektur. Der kumulierte Fehler ist gegeben durch

$$e(t_k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{k} \left(x_{1,\text{Messung}}(t_m) - x_{1,\text{Prädiktion}}(t_m) \right)^2. \quad (6-30)$$

¹³Das sogenannte *Willems' Fundamental Lemma* [WRMM05] formuliert eine Bedingung für die beständige Anregung (*persistent excitation*) eines linearen steuerbaren Systems, unter der eine einzige Trajektorie ausreicht, um alle möglichen Trajektorien dieses Systems zu parametrieren [WPCT20]. Dieses Lemma ist ein wichtiges Werkzeug für theoretische Herleitungen im Bereich der Systemidentifikation.

Algorithmus 6-1 Adaptives rEDMD-Modell. In Anlehnung an den eigenen Beitrag [JPTT23].

▸ Es erfolgt eine Überprüfung, ob die Mindestanzahl M_{op} an Messpunkten erreicht ist, weil andernfalls keine Genauigkeitsbetrachtung des aktuellen Modells anhand der vergangenen Messpunkte erfolgen kann.

Eingabe:

Initialisierungen für $\mathbf{K}_{t,0}, \mathbf{B}_{t,0}, \mathbf{\Gamma}_0, \lambda_0, \Sigma_{0,0}$

Parameter $M_{\text{op}}, N_0, \mu_{\Sigma}, \varepsilon_{\text{low}}, \varepsilon_{\text{high}}, \tau_{\text{max}}, \lambda_{\text{min}}$

Ausgabe:

Laufend sich aktualisierendes rEDMD-Modell $\mathbf{K}_{t,k}, \mathbf{B}_{t,k}$

```

1: while  $k \leq T_{\text{sim}}$  do
2:   if  $M_{\text{op}}$  Messpunkte liegen vor then
3:     if  $\|\bar{\mathbf{X}}_k - \hat{\mathbf{X}}_k\|_{\infty} \geq \varepsilon_{\text{low}}$  then
4:       if  $\text{spur}(\mathbf{\Gamma}_k) > \tau_{\text{max}}$  then
5:         Setze  $\mathbf{\Gamma}_k$  mittels Gleichung (6-29)
6:       end if
7:       if  $\|\bar{\mathbf{X}}_k - \hat{\mathbf{X}}_k\|_{\infty} \geq \varepsilon_{\text{high}}$  then
8:          $\Sigma_{0,k} \leftarrow \mu_{\Sigma} \Sigma_{0,k}$ 
9:       end if
10:      Aktualisiere das rEDMD-Modells mittels Gleichung (6-18)
11:      Berechne  $\lambda_{k+1}$  mittels der Gleichungen (6-23) und (6-24)
12:    else
13:       $\mathbf{K}_{t,k+1} \leftarrow \mathbf{K}_{t,k}$  ▸ Keine Modellaktualisierung
14:       $\mathbf{B}_{t,k+1} \leftarrow \mathbf{B}_{t,k}$ 
15:       $\mathbf{\Gamma}_{k+1} \leftarrow \mathbf{\Gamma}_k$ 
16:       $\lambda_{k+1} \leftarrow \lambda_k$ 
17:    end if
18:  else
19:    Aktualisiere das rEDMD-Modell mittels Gleichung (6-18)
20:  end if
21: end while

```

Beim betrachteten Szenario liegen keine Systemveränderungen vor, sodass sich die hohe Prädiktionsgüte im Vergleich zur EDMD-Prädiktion mit Korrektur dadurch erklären lässt, dass das statische EDMD-Modell nicht hinreichend genau ist. Das adaptive rEDMD-Modell ist demnach in der Lage, diese Modellunsicherheiten effektiv auszugleichen.

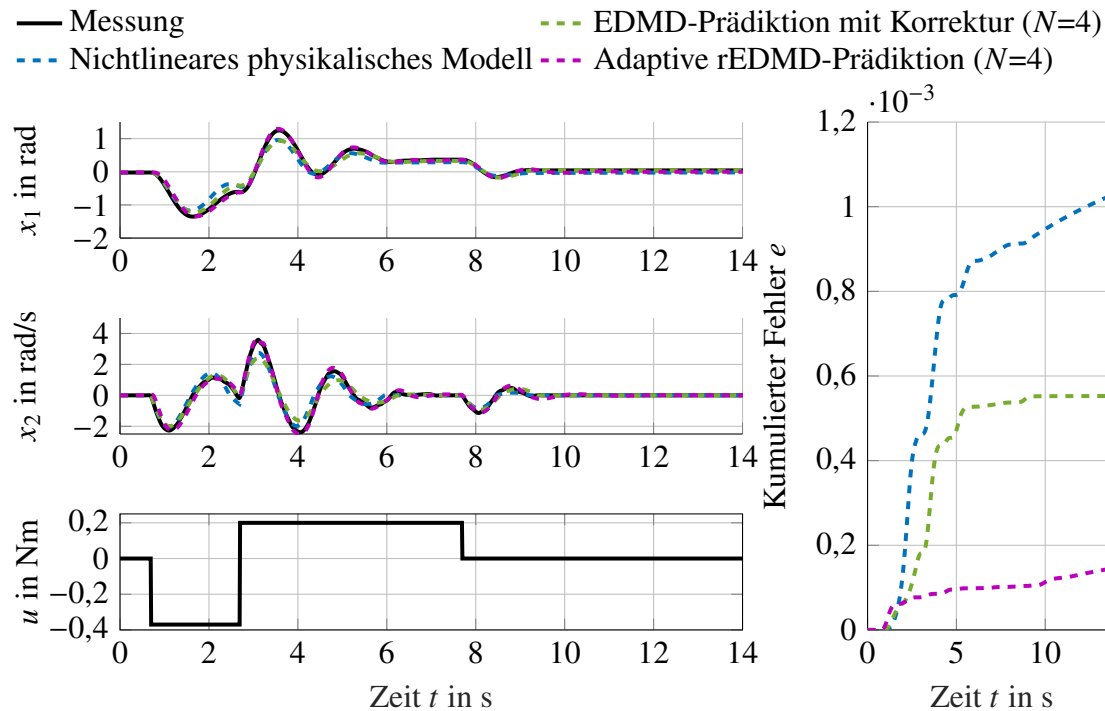


Bild 6-2: Die adaptive rEDMD-Prädiktion liefert eine höhere Prädiktionsgüte als das nichtlineare physikalische Modell (4-67) und die EDMD-Prädiktion mit Korrektur.

6.1.4 Anwendung im Regelkreis

Im Folgenden wird die Anwendung des adaptiven rEDMD-Modells während des laufenden Betriebs eines mechatronischen Systems diskutiert, wie es zu Beginn des Kapitels im Bild 6-1 skizziert wurde. Anknüpfend an das vorherige Kapitel 5 wird auch hier beispielhaft die Schlagregelung des Golfroboters untersucht. Es wird der Ansatz der indirekten adaptiven Regelung verfolgt, bei dem die Parameter des Reglers online entsprechend des fortlaufend geschätzten Streckenmodells angepasst werden. Bei mechatronischen Systemen, deren Regelalgorithmen einen Beobachter erfordern, stellt sich die Herausforderung, dass sowohl das adaptive rEDMD-Modell als auch der Zustandsregler den vollständigen Zustandsvektor \mathbf{x} benötigen. Für eine hohe resultierende Regelgüte ist die Schätzgüte des Beobachters daher maßgeblich, sodass bei Modellunsicherheiten oder auftretenden Systemveränderungen der Beobachter unbedingt auch online angepasst werden muss. Dieser ganzheitliche Ansatz, bei dem das adaptive EDMD-Modell für die Anpassung des Reglers und des Beobachters genutzt wird, ist im Bild 6-3 dargestellt.

Für die Schlagregelung des Golfroboters wird eine Koopman-MPC, vgl. Abschnitt 5.2 in Kombination mit einem (linearen) Kalman-Filter¹⁴ verwendet, wobei sowohl der Regler als auch der Beobachter online in Abhängigkeit des fortlaufend geschätzten EDMD-Modells angepasst werden, vgl. Bild 6-3. Als initiales Modell wird ein statisches EDMD-Modell, vgl. Abschnitt 3.4 und Anhang A3.1, verwendet. Die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems wurden im Abschnitt 3.4 nachgewiesen. Für eine aussagekräftige

¹⁴Das Kalman-Filter [GG94] ist ein optimaler Beobachter, der den aktuellen Zustand eines dynamischen Systems basierend auf Messungen und dem Streckenmodell schätzt. Im Unterschied zum Luenberger-Beobachter berücksichtigt das Kalman-Filter auch Unsicherheiten in den Systemmodellen und den Messungen.

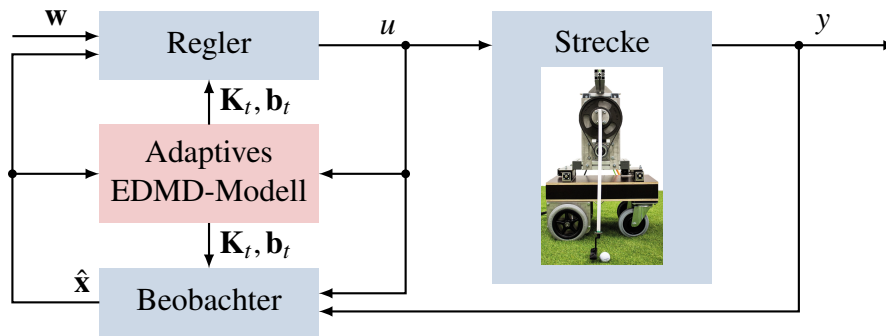


Bild 6-3: Am Beispiel der Schlagregelung des Golfroboters wird die Anwendung des adaptiven rEDMD-Modells im Regelkreis demonstriert. Das adaptive rEDMD-Modell wird gleichzeitig für die Anpassung des Reglers und des Beobachters verwendet.

Analyse wird das System gezielt verändert, indem die Masse des Schlägerkopfes verdoppelt und die Reibung der Abtriebswelle durch zusätzliche Spanngurte erhöht wird. Diese unrealistisch großen Systemveränderungen wurden zur Illustration der Leistungsfähigkeit des Adaptionsalgorithmus gewählt. Das Bild 6-4 zeigt den resultierenden Regelfehler

$$e(t_k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{k} \|\mathbf{w}(t_m) - \mathbf{x}(t_m)\|^2 \quad (6-31)$$

der adaptiven Regler-Beobachter-Strategie, vgl. Bild 6-3, für eine Schlaggeschwindigkeit von $\|\mathbf{v}_s\| = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ im Vergleich zur nichtadaptiven Regler-Beobachter-Strategie basierend auf einem nichtlinearen physikalischen Modell mit einem Gain-Scheduling-Ansatz, vgl. Kapitel 5. Die Regelungsstrategie basierend auf dem adaptiven rEDMD-Modell liefert eine herausragend hohe Regelgüte, weil sowohl der Regler als auch der Beobachter in der Lage sind sich während des Betriebs anzupassen. Dieses Ergebnis lässt sich auch für andere Schlaggeschwindigkeiten sowie den Fall ohne Systemveränderungen reproduzieren, wie es in der Tabelle 6-1 ersichtlich ist. Darüber hinaus demonstriert die Tabelle 6-1 zusätzlich den Einfluss der gleichzeitigen Anpassung des Reglers und Beobachters im Vergleich zur alleinigen Anpassung des Reglers, wodurch das zu Beginn dieses Kapitels formulierte Ziel eines ganzheitlichen Entwurfs gestützt wird.

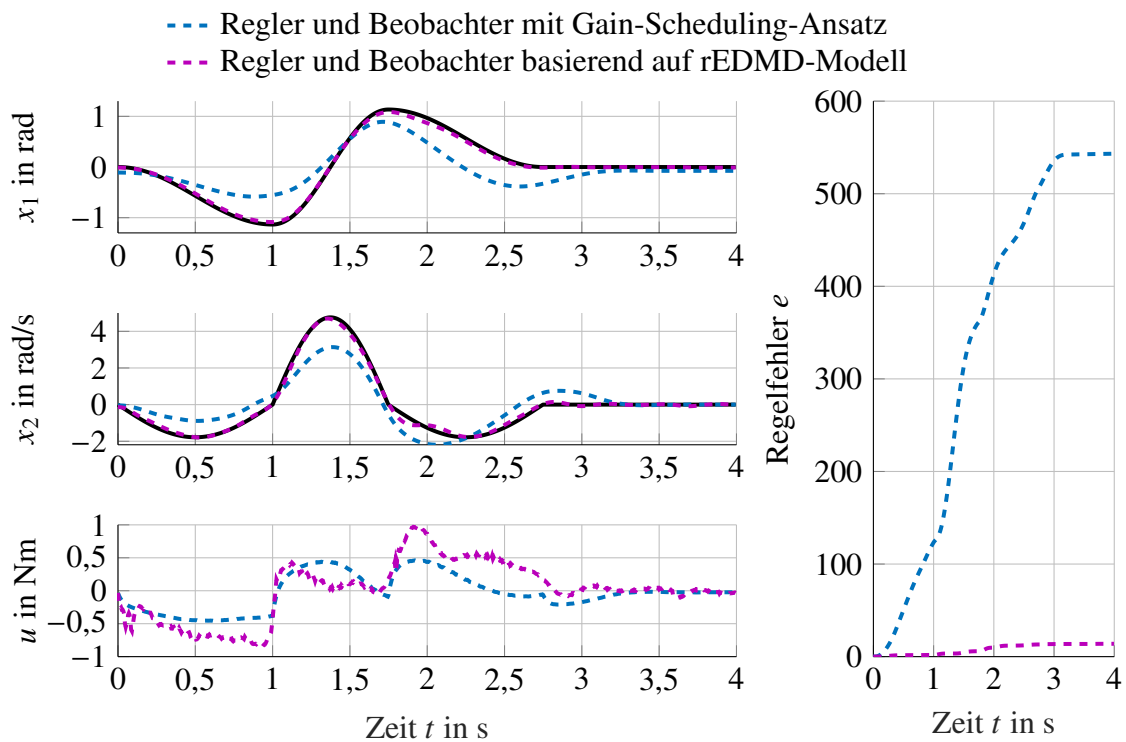


Bild 6-4: Resultierender Regelfehler des Schlagmechanismus am Golfroboter-Prüfstand für eine exemplarische Schlaggeschwindigkeit von $\|\mathbf{v}_s\| = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und unter Einfluss der beschriebenen Systemveränderungen.

Tabelle 6-1: Normierte Werte für den Regelfehler e , vgl. Gleichung (6-31) der unterschiedlichen Regler-Beobachter-Strategien anhand unterschiedlicher gewünschter Schlaggeschwindigkeiten mit der Unterscheidung, für den Fall ohne bzw. mit Systemveränderungen. Zur besseren Lesbarkeit wurden die Werte mit dem Faktor 10^2 multipliziert.

Gewünschte Schlaggeschwindigkeit $\ \mathbf{v}_s\ $	ohne Systemveränderungen		mit Systemveränderungen	
	$1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Klassischer statischer Gain-Scheduling-Ansatz für den Regler und Beobachter, vgl. Bild 5-2	5.68	6.33	46.00	55.08
Adaptiver Regler und Beobachter mit statischem Gain-Scheduling-Ansatz	0.31	0.96	6.36	5.08
Adaptiver Regler und adaptiver Beobachter, vgl. Bild 6-3	0.34	0.67	1.38	2.18

6.2 Adaptives PCHD-Modell

Basierend auf den Erkenntnissen des adaptiven rEDMD-Modells, vgl. Abschnitt 6.1, wird im Folgenden ein Ansatz beschrieben, der die im Abschnitt 4.4 beschriebene Methode zur datengetriebenen Bestimmung von PCHD-Modellen ebenfalls um die Adaptionsfähigkeit erweitert, vgl. eigener Beitrag [JTT25]. Im Vergleich zu EDMD-Modellen liefern PCHD-Modelle aufgrund ihrer speziellen Struktur den Vorteil, dass sie physikalisch plausibel sind und sich bestehendes Vorwissen über die Energiezusammenhänge des betrachteten Systems systematisch integrieren lässt, vgl. Abschnitt 4.1. Darüber hinaus lassen sich basierend auf PCHD-Modellen global stabile Regelungen entwerfen, vgl. Abschnitt 5.3.

Nachfolgend wird der Algorithmus zur Berechnung des adaptiven PCHD-Modells hergeleitet. Anschließend wird die resultierende Modellgenauigkeit simulativ anhand eines Pendels, vgl. Bild 1-6, analysiert, das während der Simulation eine Systemveränderung erfährt.

6.2.1 Berechnung des adaptiven PCHD-Modells

Im Folgenden wird beschrieben, wie sich der Algorithmus 6-1 auf datengetriebene PCHD-Modelle übertragen lässt. Das Vorgehen bei der Herleitung des Algorithmus zur rekursiven Anpassung des *rPCHD-Modells* (*rekursives PCHD-Modell*) ähnelt stark dem Ansatz adaptiver rEDMD-Modelle, vgl. Abschnitt 6.1. Daher werden im Folgenden nicht alle algorithmischen Umformungen in ihrer Vollständigkeit dargestellt, sondern ein Fokus auf die wichtigsten Berechnungsformeln gelegt.

Angelehnt an die Gleichungen (4-53) und (6-1)-(6-2) werden die Snapshotmatrizen

$$\mathbf{X}_k = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}, \quad (6-32a)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_k = [\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \dots, \dot{\mathbf{x}}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}, \quad (6-32b)$$

$$\mathbf{U}_k = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k] \in \mathbb{R}^{p \times k}, \quad (6-32c)$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = [\mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k+1}] = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k+1}] \in \mathbb{R}^{n \times (k+1)}, \quad (6-32d)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{k+1} = [\dot{\mathbf{X}}_k, \dot{\mathbf{x}}_{k+1}] = [\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \dots, \dot{\mathbf{x}}_{k+1}] \in \mathbb{R}^{n \times (k+1)}, \quad (6-32e)$$

$$\mathbf{U}_{k+1} = [\mathbf{U}_k, \mathbf{u}_{k+1}] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k+1}] \in \mathbb{R}^{p \times (k+1)} \quad (6-32f)$$

für die Zeitschritte k und $k + 1$ definiert. Mit

$$\Psi(\mathbf{X}_k) = [\Psi(\mathbf{x}_1), \Psi(\mathbf{x}_2), \dots, \Psi(\mathbf{x}_k)] \in \mathbb{R}^{n \times k}, \quad (6-33a)$$

$$\Psi(\mathbf{X}_{k+1}) = [\Psi(\mathbf{X}_k), \Psi(\mathbf{x}_{k+1})] = [\Psi(\mathbf{x}_1), \Psi(\mathbf{x}_2), \dots, \Psi(\mathbf{x}_{k+1})] \in \mathbb{R}^{n \times (k+1)} \quad (6-33b)$$

ergibt sich für jeden Zeitschritt die Kleinste-Quadrate-Lösung für das jeweilige datengetriebene PCHD-Modell

$$[\mathbf{K}_k, \mathbf{B}_k] = \dot{\mathbf{X}}_k \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{U}_k \end{bmatrix}^+ = \dot{\mathbf{X}}_k [\Psi^\top(\mathbf{X}_k), \mathbf{U}_k^\top] \Gamma_k, \quad (6-34a)$$

$$[\mathbf{K}_{k+1}, \mathbf{B}_{k+1}] = \dot{\mathbf{X}}_{k+1} \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{X}_{k+1}) \\ \mathbf{U}_{k+1} \end{bmatrix}^+ = \dot{\mathbf{X}}_{k+1} [\Psi^\top(\mathbf{X}_{k+1}), \mathbf{U}_{k+1}^\top] \Gamma_{k+1}, \quad (6-34b)$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_k &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{U}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{X}_k), \mathbf{U}_k^\top \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}_k)\mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{X}_k) & \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}_k)\mathbf{U}_k^\top \\ \mathbf{U}_k\mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{X}_k) & \mathbf{U}_k\mathbf{U}_k^\top \end{bmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)},\end{aligned}\quad (6-35a)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_{k+1} &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}_k) & \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \mathbf{U}_k & \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{X}_k) & \mathbf{U}_k^\top \\ \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}) & \mathbf{u}_{k+1}^\top \end{bmatrix} \right)^{-1} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}_k)\mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{X}_k) + \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1})\mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}) & \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}_k)\mathbf{U}_k^\top + \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1}^\top \\ \mathbf{U}_k\mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{X}_k) + \mathbf{u}_{k+1}\mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}) & \mathbf{U}_k\mathbf{U}_k^\top + \mathbf{u}_{k+1}\mathbf{u}_{k+1}^\top \end{bmatrix}^{-1}\end{aligned}\quad (6-35b)$$

die Kovarianzmatrizen für die Zeitschritte k bzw. $k + 1$ sind. Die Umformung der Gleichungen (6-34a) und (6-34b) ergibt

$$\left[\mathbf{K}_k, \mathbf{B}_k \right] \mathbf{\Gamma}_k^{-1} = \dot{\mathbf{X}}_k \left[\mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{X}_k), \mathbf{U}_k^\top \right], \quad (6-36a)$$

$$\left[\mathbf{K}_{k+1}, \mathbf{B}_{k+1} \right] = \dot{\mathbf{X}}_k \left[\mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{X}_k), \mathbf{U}_k^\top \right] \mathbf{\Gamma}_{k+1} + \dot{\mathbf{x}}_{k+1} \left[\mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1}^\top \right] \mathbf{\Gamma}_{k+1} \quad (6-36b)$$

und das Einsetzen von Gleichung (6-36a) in (6-36b) liefert

$$\left[\mathbf{K}_{k+1}, \mathbf{B}_{k+1} \right] = \left[\mathbf{K}_k, \mathbf{B}_k \right] \mathbf{\Gamma}_k^{-1} \mathbf{\Gamma}_{k+1} + \dot{\mathbf{x}}_{k+1} \left[\mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1}^\top \right] \mathbf{\Gamma}_{k+1}. \quad (6-37)$$

Mit der aus den Gleichungen (6-35a) und (6-35b) formulierten rekursiven Vorschrift

$$\mathbf{\Gamma}_{k+1}^{-1} = \mathbf{\Gamma}_k^{-1} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1}^\top \end{bmatrix} \quad (6-38)$$

ergibt sich durch Einsetzen von $\mathbf{\Gamma}_k^{-1}$ die rekursive Formel für die Modellaktualisierung

$$\underbrace{\left[\mathbf{K}_{k+1}, \mathbf{B}_{k+1} \right]}_{\text{neues Modell}} = \underbrace{\left[\mathbf{K}_k, \mathbf{B}_k \right]}_{\text{altes Modell}} + \underbrace{\left(\dot{\mathbf{x}}_{k+1} - \left[\mathbf{K}_k, \mathbf{B}_k \right] \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} \right)}_{\text{Prädiktionsfehler}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1}^\top \end{bmatrix}}_{\text{Korrekturvektor}} \quad (6-39)$$

mit dem Korrekturvektor

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1}^\top \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{k+1}. \quad (6-40)$$

Gemäß der im Abschnitt 4.4 vorgeschlagenen Zerlegung (4-52) und der Projektion (4-59) in die Menge der positiv semidefiniten Matrizen ergibt sich das datengetriebene rPCHD-Modell durch

$$\mathbf{J}_{k+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{K}_{k+1} - \mathbf{K}_{k+1}^\top), \quad (6-41a)$$

$$\mathbf{D}_{k+1} = \mathcal{P}_{\geq} \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{K}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1}^\top) \right). \quad (6-41b)$$

Die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Gamma}_{k+1}$ wird unter Verwendung des Matrix-Inversions-Lemmas, s. o., mittels Gleichung (6-38) berechnet:

$$\mathbf{\Gamma}_{k+1} = \mathbf{\Gamma}_k - \frac{\mathbf{\Gamma}_k \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1}^\top \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_k}{\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1}^\top \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_k \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} + 1} \quad (6-42)$$

bzw.

$$\mathbf{\Gamma}_{k+1} = \mathbf{\Gamma}_k \left(\mathbf{I}_{n+p} - \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_k \right) \quad (6-43)$$

mit

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1}^\top \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_k}{\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1}^\top \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_k \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} + 1}. \quad (6-44)$$

Die Verwendung eines Vergessensfaktors $\lambda < 1$, vgl. Abschnitt 6.1, beeinflusst die Berechnung von $\boldsymbol{\gamma}_k$ und $\mathbf{\Gamma}_{k+1}$, sodass sich zusammengefasst die folgenden Formeln für die Modellaktualisierung ergeben

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1}^\top \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_k}{\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^\top(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{u}_{k+1}^\top \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_k \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} + \lambda}, \quad (6-45a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{k+1}, \mathbf{B}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_k, \mathbf{B}_k \end{bmatrix} + \left(\dot{\mathbf{x}}_{k+1} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_k, \mathbf{B}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{\gamma}_k, \quad (6-45b)$$

$$\mathbf{J}_{k+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{K}_{k+1} - \mathbf{K}_{k+1}^\top), \quad (6-45c)$$

$$\mathbf{D}_{k+1} = \mathcal{P}_{\geq} \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{K}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1}^\top) \right), \quad (6-45d)$$

$$\mathbf{\Gamma}_{k+1} = \mathbf{\Gamma}_k \left(\mathbf{I}_{n+p} - \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_k \right) \frac{1}{\lambda}, \quad (6-45e)$$

die zugleich den Kern des Algorithmus bilden. Die Adaptionstärke und -geschwindigkeit werden auch hier maßgeblich durch die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Gamma}_k$ und den Vergessensfaktor λ charakterisiert.

Die im Abschnitt 6.1 beschriebenen Erweiterungen (Überprüfung der Notwendigkeit zur Aktualisierung des Modells, variabler Vergessensfaktor, Überwachung der Spur der Kovarianzmatrix) werden analog für den rPCHD-Algorithmus verwendet. Für die Wahl der Parameter werden die Erfahrungswerte genutzt, die bezüglich des rEDMD-Modells gewonnen wurden. Der Algorithmus 6-2 fasst die Berechnung adaptiver rPCHD-Modelle zusammen.

Algorithmus 6-2 Adaptives rPCHD-Modell. In Anlehnung an Algorithmus 6-1.

▷ Es erfolgt eine Überprüfung, ob die Mindestanzahl M_{op} an Messpunkten erreicht ist, weil andernfalls keine Genauigkeitsbetrachtung des aktuellen Modells anhand der vergangenen Messpunkte erfolgen kann.

Eingabe:

Initialisierungen für $\mathbf{J}_0, \mathbf{D}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{\Gamma}_0, \lambda_0, \Sigma_{0,0}$

Parameter $M_{\text{op}}, N_0, \mu_{\Sigma}, \varepsilon_{\text{low}}, \varepsilon_{\text{high}}, \tau_{\text{max}}, \lambda_{\text{min}}$

Ausgabe:

Laufend sich aktualisierendes rPCHD-Modell $\mathbf{J}_k, \mathbf{D}_k, \mathbf{B}_k$

```

1: while  $k \leq T_{\text{sim}}$  do
2:   if  $M_{\text{op}}$  Messpunkte liegen vor then
3:     if  $\|\bar{\mathbf{X}}_k - \hat{\mathbf{X}}_k\|_{\infty} \geq \varepsilon_{\text{low}}$  then
4:       if  $\text{spur}(\mathbf{\Gamma}_k) > \tau_{\text{max}}$  then
5:         Setze  $\mathbf{\Gamma}_k$  mittels Gleichung (6-29)
6:       end if
7:       if  $\|\bar{\mathbf{X}}_k - \hat{\mathbf{X}}_k\|_{\infty} \geq \varepsilon_{\text{high}}$  then
8:          $\Sigma_{0,k} \leftarrow \mu_{\Sigma} \Sigma_{0,k}$ 
9:       end if
10:      Aktualisiere das rPCHD-Modells mittels Gleichung (6-45)
11:      Berechne  $\lambda_{k+1}$  mittels der Gleichungen (6-23) und (6-24)
12:    else
13:       $\mathbf{J}_{k+1} \leftarrow \mathbf{J}_k$  ▷ Keine Modellaktualisierung
14:       $\mathbf{D}_{k+1} \leftarrow \mathbf{D}_k$ 
15:       $\mathbf{B}_{k+1} \leftarrow \mathbf{B}_k$ 
16:       $\mathbf{\Gamma}_{k+1} \leftarrow \mathbf{\Gamma}_k$ 
17:       $\lambda_{k+1} \leftarrow \lambda_k$ 
18:    end if
19:  else
20:    Aktualisiere das rPCHD-Modell mittels Gleichung (6-45)
21:  end if
22: end while

```

6.2.2 Analyse der resultierenden Modellgenauigkeit

Am Beispiel des Pendels (1-1), vgl. Abschnitte 1.1, 3.4 und 4.4, wird die resultierende Genauigkeit des rPCHD-Modells simulativ analysiert. Das initiale PCHD-Modell wird mit den Trainingsdaten aus Bild 1-6(b) gelernt, sodass sich die Systembeschreibung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m l^2} \\ \frac{1}{m l^2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{m^2 l^4} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} m g l \sin x_1 \\ m l^2 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m l^2} \end{bmatrix} u \quad (6-46a)$$

$$\text{mit } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1,6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (6-46b)$$

ergibt, die der analytisch hergeleiteten PCHD-Form entspricht. Zum Zeitpunkt $t = 1$ s erfolgt eine künstliche Systemveränderung: die Masse m des Pendels wird um 90 % reduziert, wodurch sich die Systemdynamik verändert

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{0,1ml^2} \\ \frac{1}{0,1ml^2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{0,01m^2l^4} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0,1mgl \sin x_1 \\ 0,1ml^2 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{0,1ml^2} \end{bmatrix} u \quad (6-47a)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{ml^2} \\ \frac{1}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{0,1m^2l^4} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} mgl \sin x_1 \\ ml^2 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{0,1ml^2} \end{bmatrix} u \quad (6-47b)$$

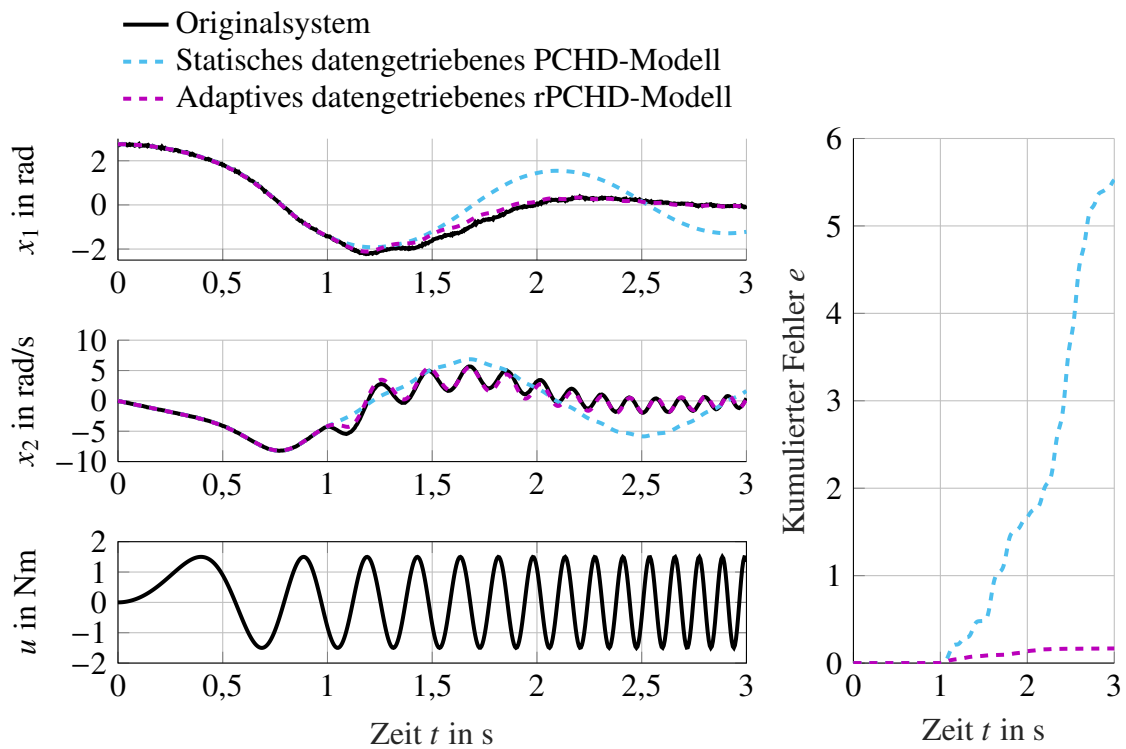
$$\text{mit } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \end{bmatrix}. \quad (6-47c)$$

Diese unrealistisch starke Systemveränderung dient hier zur Illustration; in der Praxis werden wahrscheinlich geringere Systemveränderungen zu erwarten sein. Das Bild 6-5(a) stellt die resultierende Genauigkeit des rPCHD-Modells im Vergleich zum statischen PCHD-Modell dar. Der kumulierte Fehler ist gegeben durch

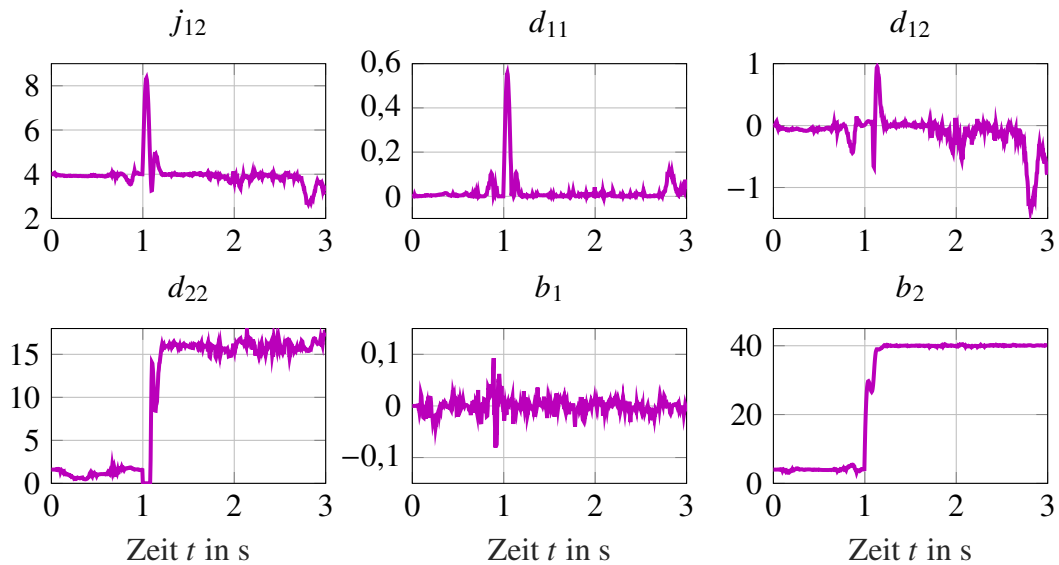
$$e(t_k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{k} \left\| \mathbf{x}_{\text{Originalsystem}}(t_m) - \mathbf{x}_{\text{Prädiktion}}(t_m) \right\|^2. \quad (6-48)$$

Ergänzend sind im Bild 6-5(b) die Verläufe der einzelnen Einträge in den Matrizen $\mathbf{J}_k, \mathbf{D}_k, \mathbf{b}_k$ über den Adaptionprozess dargestellt¹⁵. In allen dargestellten Diagrammen lassen sich Ausschläge zum Zeitpunkt der Systemveränderung erkennen, den betragsmäßig größten Einfluss hat die Veränderung der Masse jedoch auf die Einträge d_{22} und b_2 . Diese Beobachtung entspricht der Erwartung, die sich aus den Matrizen (6-46) und (6-47) ergibt. Die geringfügigen Schwankungen der Werte resultieren aus dem modellierten Messrauschen.

¹⁵Die Auswahl der dargestellten Matrixeinträge orientiert sich am Informationsgehalt. Für die Matrix \mathbf{J} gilt beispielsweise $j_{11} = j_{22} = 0$ und $j_{12} = -j_{21}$, vgl. Abschnitt 4.1.



(a) Prädiktionsgüte des adaptiven datengetriebenen rPCHD-Modells im Vergleich zum statischen datengetriebenen PCHD-Modell am Beispiel des Pendels. Das adaptive rPCHD-Modell ist in der Lage, sich der Systemveränderung anzupassen.



(b) Zeitlicher Verlauf der Matrixeinträge des rPCHD-Modells während des Adaptionsprozesses. Den betragsmäßig größten Einfluss hat die Systemveränderung auf die Einträge d_{22} und b_2 .

Bild 6-5: Simulative Untersuchung des Algorithmus zur Bestimmung eines rPCHD-Modells am Beispiel des Pendels. Zum Zeitpunkt $t = 1$ s wird die Pendelmasse künstlich um 90 % reduziert.

6.3 Zwischenfazit

In diesem Kapitel wurden innovative Ansätze für adaptive hybride Modelle vorgestellt, die das im Regelkreis verwendete interne hybride Streckenmodell automatisch aktualisieren. Bezüglich adaptiver EDMD-Modelle wurden Ansätze aus dem aktuellen Forschungsstand aufgegriffen und umfangreich erweitert. Darüber hinaus wurde am Schlagmechanismus des Golfroboters erstmals die experimentelle Anwendung eines rEDMD-Modells im Regelkreis unter Verwendung eines adaptiven Reglers und Beobachters demonstriert. Die fortlaufende Anpassung des Reglers und des Beobachters gewährleistet eine herausragend hohe Regelgüte, selbst bei Modellunsicherheiten oder auftretenden Veränderungen der Systemdynamik während des Betriebs.

Die Erkenntnisse des rEDMD-Modells wurden anschließend auf die Entwicklung neuartiger adaptiver datengetriebener PCHD-Modelle übertragen. Simulative und experimentelle Untersuchungen demonstrieren eine bemerkenswerte Prädiktionsgenauigkeit. Darüber hinaus wurde die Einschränkung konstanter Matrizen \mathbf{J} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , vgl. Abschnitt 4.4, durch Anpassung der einzelnen Einträge während des Durchlaufens des Zustandsraums durchbrochen.

Die erfolgreiche Integration der Adaptionfähigkeit bestätigt die hohe regelungstechnische Verwertbarkeit der EDMD-Modelle und datengetriebenen PCHD-Modelle gemäß der Kriterien, die im Kapitel 4 formuliert wurden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel wird der Inhalt dieser Dissertation zusammengefasst und deren wissenschaftlicher Beitrag aufgezeigt. Abschließend erfolgt ein Ausblick auf weiterführende Forschungsarbeiten.

7.1 Zusammenfassung

In dieser Dissertation wurden Methoden zur datengetriebenen Bestimmung von aus regelungstechnischer Sicht verwertbaren Modellen für nichtlineare mechatronische Systeme entwickelt. Diese Modelle sind physikalisch interpretierbar und lassen sich nahtlos in etablierte Analyse- und Entwurfsverfahren der klassischen Regelungstechnik integrieren. Dadurch wird das enorme Potenzial datengetriebener Ansätze ausgeschöpft, während gleichzeitig eine systematische Integration in bewährte Strategien für den modellbasierten Regelungsentwurf gelingt.

In Anlehnung an das in dieser Dissertation formulierte Ziel, regelungstechnisch verwertbare Streckenmodelle zu entwickeln, wurde im Kapitel 2 zunächst die Idee des Koopman-Operators eingeführt. Dieses theoretische Konzept stellt einen vielversprechenden Ansatz dar, weil es die Darstellung nichtlinearer Dynamiken durch lineare Modelle ermöglicht, welche überaus vorteilhaft für den regelungstechnischen Entwurf sind.

Dadurch, dass der Koopman-Operator im Allgemeinen unendlichdimensional und daher für algorithmische Anwendungen in der Regel nicht ohne Weiteres nutzbar ist, wird er in den meisten Fällen numerisch anhand von Messdaten approximiert. Daher wurden im Kapitel 3 unterschiedliche Verfahren zur Systemidentifikation im Kontext des Koopman-Operators dargelegt. Dabei hat sich das EDMD-Verfahren, aufgrund der linearen Systembeschreibung sowie der Möglichkeit, vorhandenes physikalisches Vorwissen auszunutzen, als am meisten relevant bezüglich der regelungstechnischen Anwendbarkeit erwiesen. Daher wurde das EDMD-Verfahren anhand unterschiedlicher simulativer und experimenteller Anwendungsbeispiele eingehend untersucht. Die resultierenden linearen zeitdiskreten Modelle sind in der Lage, nichtlineare Dynamiken für kurze Zeithorizonte mit hoher Genauigkeit und geringem Rechenaufwand zu approximieren, während gleichzeitig systemtheoretische Eigenschaften wie Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit erhalten bleiben. Die erreichbare Prädiktionsgüte wird wesentlich von den gewählten Observablen und den verwendeten Trainingsdaten beeinflusst. Durch die Anwendung eines zusätzlichen Korrekturverfahrens bei der Prädiktion, das erstmals in dieser Dissertation entwickelt wurde, ist es auch über einen längeren Zeitraum möglich, eine sehr hohe Prädiktionsgüte zu erhalten.

Hinsichtlich der Fragestellung dieser Dissertation wurden im Kapitel 4 zunächst Kriterien an aus regelungstechnischer Sicht verwertbare hybride Streckenmodelle formuliert. Im Vergleich zu den Verfahren aus Kapitel 3 ist es besonders vielversprechend, Ansätze zu verfolgen, die physikalisches Vorwissen bezüglich der Energieerhaltung berücksichtigen. Dafür wurden zunächst passive Systeme und stabile Koopman-Operatoren thematisiert. Darüber hinaus wurde eine neuartige Methode zur datengetriebenen Bestimmung von PCHD-Modellen unter gezielter Nutzung von physikalischem Vorwissen über die im System gespeicherte Energie entwickelt. Die resultierenden Modelle bilden die Energiezu-

sammenhänge des Systems plausibel und interpretierbar ab und ermöglichen einen passivitätsbasierten Regelungsentwurf. Anhand verschiedener simulativer und experimenteller Anwendungsbeispiele wurde die vorgestellte Methode untersucht und die hohe erreichbare Prädiktionsgüte demonstriert. Gleichwohl wurden Grenzen der Anwendbarkeit bei chaotischen Dynamiken oder Singularitäten durch spezielle Systemstrukturen aufgezeigt, bei denen die im System gespeicherte Energie nicht von allen Zuständen des Systems abhängt.

Im Kapitel 5 wurde schließlich die konkrete Anwendbarkeit der hybriden Modelle aus den Kapiteln 3 und 4 für den modellbasierten Regelungsentwurf validiert. Aufgrund ihrer linearen Systembeschreibung lassen sich EDMD-Modelle geradlinig für den Entwurf von Riccati-Reglern sowie linearen modellprädiktiven Regelungen und linearen Beobachtern verwenden. Datengetriebene PCHD-Modelle hingegen eignen sich besonders für die Umsetzung einer passivitätsbasierten Regelung, wie erstmals in dieser Dissertation demonstriert wurde. Am Beispiel des Golfroboters wurde gezeigt, dass sowohl EDMD-Modelle als auch datengetriebene PCHD-Modelle eine hohe Anwendbarkeit aufweisen und die erreichte Regelgüte der eines klassischen physikalisch motivierten zeitinvarianten Gain-Scheduling-Reglers überlegen ist.

Zusätzlich wurden im Kapitel 6 innovative Ansätze für adaptive hybride Modelle vorgestellt, die eine automatische Aktualisierung des im Regelkreis verwendeten internen hybriden Streckenmodells ermöglichen. Im Kontext adaptiver EDMD-Modelle wurden Ansätze aus dem aktuellen Forschungsstand aufgegriffen und umfangreich erweitert. Darüber hinaus wurde in dieser Dissertation erstmals die experimentelle Anwendung eines adaptiven EDMD-Modells im Regelkreis unter Verwendung eines adaptiven Reglers und Beobachters demonstriert. Die fortlaufende Anpassung des Reglers und des Beobachters gewährleistet eine herausragend hohe Regelgüte, selbst bei Modellunsicherheiten oder auftretenden Veränderungen der Systemdynamik während des Betriebs. Die Erkenntnisse des adaptiven rEDMD-Modells wurden anschließend auf die Entwicklung neuartiger adaptiver datengetriebener rPCHD-Modelle übertragen. Simulative und experimentelle Untersuchungen demonstrieren eine bemerkenswerte Prädiktionsgenauigkeit. Die erfolgreiche Integration der Adaptionsfähigkeit bestätigt die hohe regelungstechnische Verwertbarkeit der EDMD-Modelle und datengetriebenen PCHD-Modelle.

Diese Dissertation stellt einen bedeutsamen Beitrag zur zielgerichteten Integration maschineller Lernverfahren in der Regelungstechnik dar. Die Ergebnisse demonstrieren die effektive Zusammenführung aus physikalischem Vorwissen und an Messdaten trainierten Modellen. Erstmals in dieser Dissertation wurde der Begriff der regelungstechnischen Verwertbarkeit eines Streckenmodells geprägt und durch die Formulierung konkreter Kriterien charakterisiert. Das Bild 7-1 veranschaulicht die regelungstechnische Verwertbarkeit unterschiedlicher Modellierungsansätze anhand dieser Kriterien. Dabei werden sowohl physikalisch motivierte als auch datengetriebene und hybride Ansätze miteinander verglichen. Es ist ersichtlich, dass die in dieser Dissertation entwickelte Methode zur Bestimmung eines datengetriebenen PCHD-Modells durch eine besonders hohe Interpretierbarkeit gekennzeichnet ist und somit eine hohe regelungstechnische Verwertbarkeit aufweist, die weit über die datengetriebener Black-Box-Modelle hinausgeht. Gleichwohl ist es von entscheidender Bedeutung zu betonen, dass sämtliche in dieser Dissertation untersuchten und entwickelten Verfahren keineswegs als Ersatz für den klassischen physikalischen Modellbildungsprozess dienen. Vielmehr stellen sie gemeinsam einen vielseitigen

Werkzeugkasten dar, der die Möglichkeit bietet, je nach den spezifischen Anforderungen eines bestimmten Anwendungsfalls die am besten geeignete Methode auszuwählen. Somit eröffnen die erzielten Ergebnisse dieser Dissertation nicht nur neue Perspektiven im Hinblick auf regelungstechnisch verwertbare Streckenmodelle, sondern stellen auch einen soliden Grundstein für zukünftige Anwendungen und Weiterentwicklungen in diesem Bereich dar.

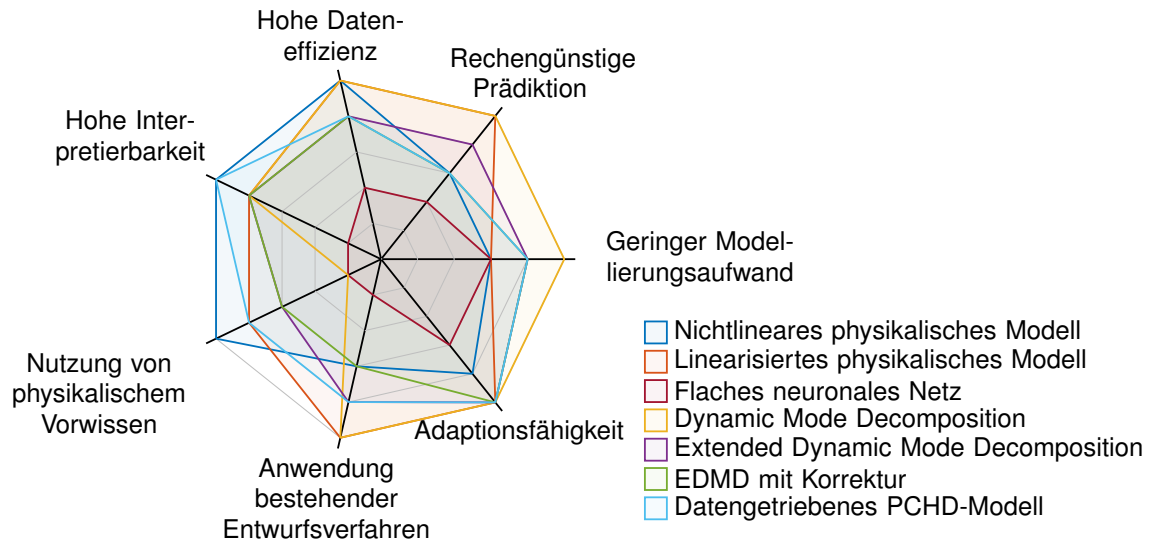


Bild 7-1: Qualitativer Vergleich unterschiedlicher Modellierungsansätze bezüglich ihrer regelungstechnischen Verwertbarkeit, vgl. Kapitel 4. Die EDMD-Prädiktion mit Korrektur sowie die Bestimmung eines datengetriebenen PCHD-Modells sind zwei neuartige Methoden, die in dieser Dissertation entwickelt wurden.

7.2 Ausblick

Im Kontext datengetriebener Modelle, die eine regelungstechnisch verwertbare Form aufweisen sollen, gibt es weitere Aspekte, die in zukünftigen Forschungsthemen aufgegriffen werden können.

Die in dieser Dissertation untersuchten Methoden zur datengetriebenen Modellbildung wurden anhand simulativer und experimenteller Beispiele validiert. Beim simulativen Vorgehen können sehr schnell und einfach beliebig viele und beliebig vielfältige Trainingsdaten aus dem gesamten Zustandsraum künstlich generiert werden. Im Gegensatz dazu kann sich die Erzeugung von Trainingsdaten an einem realen mechatronischen System als problematisch herausstellen, weil der Betrieb eines Prüfstandes zeit- und kostenintensiv ist. Gleichzeitig müssen unbedingt Sicherheitsanforderungen berücksichtigt werden. Hierbei ist es von größter Bedeutung zu gewährleisten, dass keine Gefährdung von Personen oder Geräten besteht. Daher ist es wünschenswert, konkrete Handlungsempfehlungen für die effiziente und sichere Generierung von Trainingsdaten an realen mechatronischen Systemen zu formulieren. Hierfür kann es hilfreich sein, mögliche Betriebsszenarien anhand eines rudimentären Modells der Dynamik vorab zu identifizieren, sodass potenzielle Gefahren frühzeitig erkannt und bewertet werden können.

Im Kapitel 6 wurden innovative Ansätze für adaptive hybride EDMD- und PCHD-Modelle vorgestellt. Neben einer hohen Modellgenauigkeit wurde die experimentelle Anwendung der adaptiven Modelle erfolgreich im Regelkreis gezeigt. Die Modelle zeigen eine hohe Anpassungsfähigkeit selbst beim Auftreten starker Systemveränderungen. Die erreichte Adaptionsfähigkeit birgt jedoch darüber hinaus ein enormes Potenzial. So können beispielsweise adaptive datengetriebene rPCHD-Modelle genutzt werden, um die Abhängigkeit der Matrizen $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ vom Zustandsraum zu untersuchen. Dies ermöglicht eine tiefgreifende physikalische Interpretation, insbesondere für den Fall, wenn es auf analytische Weise nicht gelingt, ein PCHD-Modell herzuleiten.

Diese Dissertation schlägt Ansätze für parametrische Anpassungen vor. In der Praxis können sich jedoch auch strukturelle Systemveränderungen ergeben. Beispielsweise kann der Einbau neuer Bauteile zu grundlegenden Veränderungen in den nichtlinearen Termen der Systemdynamik oder sogar dem Zustandsvektor führen. Eine Möglichkeit, das Modell zusätzlich hinsichtlich solcher struktureller Veränderungen anzupassen, besteht darin, die Observablen (beim rEDMD-Verfahren) bzw. den Gradienten (beim rPCHD-Verfahren) überlagert mittels eines Sparse-Dictionary-Learning-Ansatzes zu bestimmen. Dieser Ansatz zielt, ähnlich wie beim SINDY-Verfahren, darauf ab, die dominanten nichtlinearen Funktionen datengetrieben aus einer Bibliothek von Kandidatenfunktionen zu bestimmen. Um eine Echtzeit-Schätzung des Modells zu ermöglichen, ist es denkbar diese zusätzliche strukturelle Anpassung des hybriden Streckenmodells nicht in jedem Rechenschritt, sondern in größeren zeitlichen Intervallen durchzuführen, um den Rechenaufwand zu reduzieren.

Weiterhin soll in Zukunft die Anwendbarkeit der entwickelten Methoden zur datengetriebenen Modellbildung anhand weiterer mechatronischer Systeme untersucht werden. Besonders erstrebenswert ist dabei die Validierung dieser Methoden in konkreten Anwendungen des industriellen Umfelds. Hierbei ist zu beachten, dass die Kriterien an verwertbare Streckenmodelle in der praxisnahen Entwicklung möglicherweise von den in dieser Dissertation formulierten Kriterien abweichen könnten. Die kritische Auseinandersetzung der Begriffsdefinition ist daher von wesentlicher Bedeutung, da sie eine Brücke zwischen den theoretischen Erkenntnissen und praktischer Anwendung schlägt.

Literaturverzeichnis

- [Ada18] ADAMY, J.: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2018
- [ÅE71] ÅSTRÖM, K. J.; EYKHOFF, P.: System identification—A survey. *Automatica* Jg. 7 (1971), Nr. 2, S. 123–162
- [AF20] ALASSAF, A.; FAN, L.: Randomized Dynamic Mode Decomposition for Oscillation Modal Analysis. *IEEE Transactions on Power Systems* (2020)
- [AFHF17] ARGYRIS, J.; FAUST, G.; HAASE, M.; FRIEDRICH, R.: *Die Erforschung des Chaos. Dynamische Systeme*. Aktualisierte und erweiterte 3. Auflage. Berlin: Springer Vieweg, 2017
- [Agn23] AGNER FOG. TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK: *The microarchitecture of Intel, AMD, and VIA CPUs. An optimization guide for assembly programmers and compiler makers*. 2023. <https://www.agner.org/optimize/microarchitecture.pdf>
- [AJFR17] AFRAM, A.; JANABI-SHARIFI, F.; FUNG, A. S.; RAAHEMIFAR, K.: Artificial neural network (ANN) based model predictive control (MPC) and optimization of HVAC systems: A state of the art review and case study of a residential HVAC system. *Energy and Buildings* Jg. 141 (2017), S. 96–113
- [AKFN20] A. SAJJA; K. SONAM; F. KAZI; N. M. SINGH: Coherency Identification in Multimachine Power Systems Using Dynamic Mode Decomposition. *2020 European Control Conference (ECC)*. 2020, S. 1342–1347
- [AKM18] ARBABI, H.; KORDA, M.; MEZIĆ, I.: A Data-Driven Koopman Model Predictive Control Framework for Nonlinear Partial Differential Equations. *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Miami Beach, FL). Piscataway, NJ, 2018, S. 6409–6414
- [ALM17] ABRAHAM, I.; LA TORRE, G. de; MURPHEY, T. D.: Model-Based Control Using Koopman Operators. *Robotics: Science and Systems XIII* (2017). 2017
- [AM19] ABRAHAM, I.; MURPHEY, T. D.: Active Learning of Dynamics for Data-Driven Control Using Koopman Operators. *IEEE Transactions on Robotics* (2019)
- [And17] ANDERSON, J.: Distance to the nearest stable Metzler matrix. *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)* (Melbourne, Australia). Piscataway, NJ, 2017, S. 6567–6572
- [And68] ANDERSON, B. D.: A simplified viewpoint of hyperstability. *IEEE Transactions on Automatic Control* Jg. 13 (1968), Nr. 3, S. 292–294
- [AS01] ANTOULAS, A.; SORENSEN, D.: Approximation of large-scale dynamical systems: an overview. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* Jg. 11 (2001), Nr. 5, S. 1093–1121

- [ASG15] ANAVATTI, S. G.; SANTOSO, F.; GARRATT, M. A.: Progress in adaptive control systems: past, present, and future. *2015 International Conference on Advanced Mechatronics, Intelligent Manufacture, and Industrial Automation (ICAMIMIA)* (Surabaya). 2015, S. 1–8
- [ASM19] AMINI, A.; SUN, Q.; MOTEE, N.: Carleman State Feedback Control Design of a Class of Nonlinear Control Systems. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 52 (2019), Nr. 20, S. 229–234
- [ASM21] AMINI, A.; SUN, Q.; MOTEE, N.: Error Bounds for Carleman Linearization of General Nonlinear Systems. *2021 Proceedings of the Conference on Control and its Applications*. Hrsg. von MATINEZ DIAZ, S.; SANFELICE, R. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021, S. 1–8
- [Åst08] ÅSTRÖM, K. J.: *Adaptive control*. 2. Mineola, N.Y: Dover Publ, 2008
- [BB05] BOKOR, J.; BALAS, G.: Linear Parameter Varying Systems: A Geometric Theory and Applications. *IFAC Proceedings Volumes* Jg. 38 (2005), Nr. 1, S. 12–22
- [BBBK11] BERGSTRA, J.; BARDENET, R.; BENGIO, Y.; KÉGL, B.: Algorithms for Hyper-Parameter Optimization. *Advances in Neural Information Processing Systems*. Hrsg. von J. SHAWE-TAYLOR; R. ZEMEL; P. BARTLETT; F. PEREIRA; K.Q. WEINBERGER. Bd. 24. 2011
- [BBC⁺20] BAKKER, C.; BHATTACHARYA, A.; CHATTERJEE, S.; PERKINS, C. J.; OSTER, M. R.: The Koopman Operator: Capabilities and Recent Advances. *2020 Resilience Week (RWS)* (Salt Lake City, ID). 2020, S. 34–40
- [BBH⁺22] BEVANDA, P.; BEIER, M.; HESHMATI-ALAMDARI, S.; SOSNOWSKI, S.; HIRCHE, S.: Towards Data-driven LQR with Koopmanizing Flows. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 55 (2022), Nr. 15, S. 13–18
- [BBKK22] BRUNTON, S. L.; BUDIŠIĆ, M.; KAISER, E.; KUTZ, J. N.: Modern Koopman Theory for Dynamical Systems. *SIAM Review* Jg. 64 (2022), Nr. 2, S. 229–340
- [BBP⁺17] BRUNTON, S. L.; BRUNTON, B. W.; PROCTOR, J. L.; KAISER, E.; KUTZ, J. N.: Chaos as an intermittently forced linear system. *Nature communications* Jg. 8 (2017), Nr. 1
- [BBPK16] BRUNTON, S. L.; BRUNTON, B. W.; PROCTOR, J. L.; KUTZ, J. N.: Koopman Invariant Subspaces and Finite Linear Representations of Nonlinear Dynamical Systems for Control. *PloS one* Jg. 11 (2016), Nr. 2
- [BDN20] BISTRIAN, D. A.; DIMITRIU, G.; NAVON, I. M.: Modeling dynamic patterns from COVID-19 data using randomized dynamic mode decomposition in predictive mode and ARIMA. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: 12th International On-line Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences - AMiTaNS'20* (Albena, Bulgaria). AIP Conference Proceedings. 2020
- [Bec23] BECKHOFF: *Original-Betriebsanleitung AM8000 und AM8500. Synchron Servomotoren*. 2023

- [BFG⁺20] BRUDER, D.; FU, X.; GILLESPIE, R. B.; REMY, C. D.; VASUDEVAN, R.: Data-Driven Control of Soft Robots Using Koopman Operator Theory. *IEEE Transactions on Robotics* (2020), S. 1–14
- [BGB20] BRUCE, A. L.; GOEL, A.; BERNSTEIN, D. S.: Recursive Least Squares with Matrix Forgetting. *2020 American Control Conference (ACC)* (Denver, CO). 2020, S. 1406–1410
- [BGDV19] BRUDER, D.; GILLESPIE, B.; DAVID REMY, C.; VASUDEVAN, R.: Modeling and Control of Soft Robots Using the Koopman Operator and Model Predictive Control. *Robotics: Science and Systems XV* (2019). 2019
- [BHL93] BERKOOZ, G.; HOLMES, P.; LUMLEY, J. L.: The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* Jg. 25 (1993), Nr. 1, S. 539–575
- [BHM⁺23] BADDOO, P. J.; HERRMANN, B.; MCKEON, B. J.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.: Physics-informed dynamic mode decomposition. *Proceedings. Mathematical, physical, and engineering sciences* Jg. 479 (2023), Nr. 2271
- [Bis06] BISHOP, C. M.: *Pattern recognition and machine learning*. Computer science. New York, NY: Springer, 2006
- [BIW91] BYRNES, C. I.; ISIDORI, A.; WILLEMS, J. C.: Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* Jg. 36 (1991), Nr. 11, S. 1228–1240
- [BJOK15] BRUNTON, B. W.; JOHNSON, L. A.; OJEMANN, J. G.; KUTZ, J. N.: Extracting spatial-temporal coherent patterns in large-scale neural recordings using dynamic mode decomposition. *Journal of Neuroscience Methods* Jg. 258 (2015), S. 1–15
- [BK19] BRUNTON, S. L.; KUTZ, J. N.: *Data-Driven Science and Engineering*. Bd. 237. Cambridge University Press, 2019
- [BK20] BONNERT, M.; KONIGORSKI, U.: Estimating Koopman Invariant Subspaces of Excited Systems Using Artificial Neural Networks. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 53 (2020), Nr. 2, S. 1156–1162
- [BKMA21] BERBERICH, J.; KOHLER, J.; MULLER, M. A.; ALLGÖWER, F.: Data-Driven Model Predictive Control With Stability and Robustness Guarantees. *IEEE Transactions on Automatic Control* Jg. 66 (2021), Nr. 4, S. 1702–1717
- [BLME07] BROGLIATO, B.; LOZANO, R.; MASCHKE, B.; EGELAND, O.: *Dissipative systems analysis and control. Theory and applications*. 2. Aufl. Communications and Control Engineering. London: Springer, 2007
- [BMM12] BUDIŠIĆ, M.; MOHR, R.; MEZIĆ, I.: Applied Koopmanism. *Chaos (Woodbury, N.Y.)* Jg. 22 (2012), Nr. 4, S. 047510
- [BNR19] BAKKER, C.; NOWAK, K. E.; ROSENTHAL, W. S.: Learning Koopman Operators for Systems with Isolated Critical Points. *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)* (Nice, France). Piscataway, NJ, 2019, S. 7733–7739
- [BO99] BENDER, C. M.; ORSZAG, S. A.: *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I*. New York, NY: Springer New York, 1999

- [Bon22] BONNERT, M.: Identifikation, Analyse und Regelung nichtlinearer dynamischer Systeme mittels des Koopman-Operators, künstlicher neuronaler Netze und linearer Zustandsregler. Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik. Dissertation. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2022
- [BPK16a] BRUNTON, S. L.; PROCTOR, J. L.; KUTZ, J. N.: Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* Jg. 113 (2016), Nr. 15, S. 3932–3937
- [BPK16b] BRUNTON, S. L.; PROCTOR, J. L.; KUTZ, J. N.: Sparse Identification of Nonlinear Dynamics with Control (SINDYc). *IFAC-PapersOnLine* Jg. 49 (2016), Nr. 18, S. 710–715
- [Bre21] BRETZ, L.: Herausforderungen und Chancen bei der Einführung von Systems Engineering. *ATZextra* Jg. 26 (2021), Nr. S6, S. 12–15
- [BRKP16] BAUNSGAARD, K. M. H.; RAVN, O.; KALLESOE, C. S.; POULSEN, N. K.: MPC control of water supply networks. *2016 European Control Conference (ECC)* (Aalborg). 2016, S. 1770–1775
- [BRV19] BRUDER, D.; REMY, C. D.; VASUDEVAN, R.: Nonlinear System Identification of Soft Robot Dynamics Using Koopman Operator Theory. *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)* (Montreal, QC). 2019, S. 6244–6250
- [BSV⁺15] BERGER, E.; SASTUBA, M.; VOGT, D.; JUNG, B.; BEN AMOR, H.: Estimation of perturbations in robotic behavior using dynamic mode decomposition. *Advanced Robotics* Jg. 29 (2015), Nr. 5, S. 331–343
- [BU16] BOHN, C.; UNBEHAUEN, H.: *Identifikation dynamischer Systeme. Methoden zur experimentellen Modellbildung aus Messdaten*. Springer Lehrbuch. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2016
- [Bun17] BUNDESVERBAND INFORMATIONSWIRTSCHAFT, TELEKOMMUNIKATION UND NEUE MEDIEN E. V., DEUTSCHES FORSCHUNGSZENTRUM FÜR KÜNSTLICHE INTELLIGENZ GMBH, Hrsg.: *Künstliche Intelligenz. Wirtschaftliche Bedeutung, gesellschaftliche Herausforderungen, menschliche Verantwortung*. 2017. https://www.dfki.de/fileadmin/user_upload/import/9744_171012-KI-Gipfelpapier-online.pdf
- [Bun20] BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG UND FORSCHUNG, Hrsg.: *Industrie 4.0. Innovationen im Zeitalter der Digitalisierung*. Frankfurt am Main, 2020
- [Car32] CARLEMAN, T.: Application de la théorie des équations intégrales linéaires aux systèmes d'équations différentielles non linéaires. *Acta Math* Jg. 59 (1932), S. 63–87
- [CDGW20] CISNEROS, P. S.; DATAR, A.; GÖTTSCHE, P.; WERNER, H.: Data-Driven quasi-LPV Model Predictive Control Using Koopman Operator Techniques. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 53 (2020), Nr. 2, S. 6062–6068

- [CHM⁺20] CASTANO, M. L.; HESS, A.; MAMAKOUKAS, G.; GAO, T.; MURPHEY, T. D.; TAN, X.: Control-oriented Modeling of Soft Robotic Swimmer with Koopman Operators. *2020 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)* (Boston, MA). 2020, S. 1679–1685
- [CHZ⁺21] CHEN, B.; HUANG, Z.; ZHANG, R.; LIU, W.; LI, H.; WANG, J.; FAN, Y.; PENG, J.: Data-Driven Koopman Model Predictive Control for Optimal Operation of High-Speed Trains. *IEEE Access* Jg. 9 (2021), S. 82233–82248
- [Cis21] CISNEROS, P. S.: Quasi-Linear Model Predictive Control: Stability, Modelling and Implementation. Dissertation. Technische Universität Hamburg, 2021
- [CLKB19] CHAMPION, K.; LUSCH, B.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.: Data-driven discovery of coordinates and governing equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* Jg. 116 (2019), Nr. 45, S. 22445–22451
- [CPBE09] CIOCHINA, S.; PALEOLOGU, C.; BENESTY, J.; ENESCU, A. A.: On the influence of the forgetting factor of the RLS adaptive filter in system identification. *2009 International Symposium on Signals, Circuits and Systems* (Iasi, Romania). 2009, S. 1–4
- [CS08] COLLADO, J.; SANCHEZ, I.: Modified Carleman Linearization and its use in oscillators. *2008 5th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control* (Mexico City, Mexico). Piscataway, NJ, 2008, S. 13–19
- [CSOW21] CALDERÓN, H. M.; SCHULZ, E.; OEHLISCHLÄGEL, T.; WERNER, H.: Koopman Operator-based Model Predictive Control with Recursive Online Update. *2021 European Control Conference (ECC)* (Delft, Netherlands). Piscataway, NJ, 2021, S. 1543–1549
- [CSOW23] CALDERÓN, H. M.; SCHULZ, E.; OEHLISCHLÄGEL, T.; WERNER, H.: Data-driven Model Predictive Control with Matrix Forgetting Factor. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 56 (2023), Nr. 2, S. 10077–10082
- [CVW16] CISNEROS, P. S.; VOSS, S.; WERNER, H.: Efficient Nonlinear Model Predictive Control via quasi-LPV representation. *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)* (Las Vegas, NV). Piscataway, NJ, 2016, S. 3216–3221
- [DB13] DEUFLHARD, P.; BORNEMANN, F.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. De Gruyter, 2013
- [Deu12] DEUTSCHER, J.: *Zustandsregelung verteilt-parametrischer Systeme*. Dordrecht: Springer, 2012
- [DKH23] DO, L.; KORDA, M.; HURÁK, Z.: Controlled synchronization of coupled pendulums by Koopman Model Predictive Control. *Control Engineering Practice* Jg. 139 (2023)
- [DSW21] DITTMER, A.; SHARAN, B.; WERNER, H.: A Velocity quasiLPV-MPC Algorithm for Wind Turbine Control. *2021 European Control Conference (ECC)* (Delft, Netherlands). Piscataway, NJ, 2021, S. 1550–1555

- [DSW22] DITTMER, A.; SHARAN, B.; WERNER, H.: Data-driven Adaptive Model Predictive Control for Wind Farms: A Koopman-Based Online Learning Approach. *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)* (Cancun, Mexico). 2022, S. 1999–2004
- [Duf18] DUFFING, G.: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. *Sammlung Vieweg* (1918), Nr. 41/42
- [EBK19] ERICHSON, N. B.; BRUNTON, S. L.; KUTZ, J. N.: Compressed dynamic mode decomposition for background modeling. *Journal of Real-Time Image Processing* Jg. 16 (2019), Nr. 5, S. 1479–1492
- [Fit20] FITTKAU, N.: Detaillierte Modellbildung für den Golfroboter zur Verbesserung der Zustandsregelung und -beobachtung. Bachelorarbeit (Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau). Paderborn: Universität Paderborn, 2020
- [FKK⁺21] FASEL, U.; KAISER, E.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, B. W.; BRUNTON, S. L.: SINDy with Control: A Tutorial. *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Austin, TX). 2021, S. 16–21
- [FKL⁺16] FÖLLINGER, O.; KONIGORSKI, U.; LOHMANN, B.; ROPPENECKER, G.; TRÄCHTLER, A.: *Regelungstechnik. Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 12., überarbeitete Auflage. Lehrbuch Studium. Berlin und Offenbach: VDE Verlag GmbH, 2016
- [FKY81] FORTESCUE, T. R.; KERSHENBAUM, L. S.; YDSTIE, B. E.: Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors. *Automatica* Jg. 17 (1981), Nr. 6, S. 831–835
- [FLMR99] FLIESS, M.; LEVINE, J.; MARTIN, P.; ROUCHON, P.: A Lie-Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* Jg. 44 (1999), Nr. 5, S. 922–937
- [FPB20] FOLKESTAD, C.; PASTOR, D.; BURDICK, J. W.: Episodic Koopman Learning of Nonlinear Robot Dynamics with Application to Fast Multirotor Landing. *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)* (Paris, France). 2020, S. 9216–9222
- [Fra87] FRANKE, D.: *Systeme mit örtlich verteilten Parametern. Eine Einführung in die Modellbildung, Analyse und Regelung*. Hochschultext. Berlin und Heidelberg: Springer, 1987
- [FSGT15] FRIEBEN, T.; SCHNEIDER, M.; GAUSEMEIER, J.; TRÄCHTLER, A.: Virtuelle Inbetriebnahme mit wählbarer Modellierungstiefe. *Zeitschrift für wirtschaftlichen Fabrikbetrieb* Jg. 110 (2015), Nr. 4, S. 227–232
- [Gal20] GALLA, F. E.: Datengetriebene Identifikation struktureller Modellabweichungen untersucht am Beispiel des Doppelpendels. Studienarbeit (Maschinenbau). Paderborn: Universität Paderborn, 2020
- [GCY22] GIBSON, A. J.; CALVISI, M. L.; YEE, X. C.: Koopman Linear Quadratic Regulator Using Complex Eigenfunctions for Nonlinear Dynamical Systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* Jg. 21 (2022), Nr. 4, S. 2463–2486

- [GCZ⁺22] GUO, W.; CAO, H.; ZHAO, S.; LI, M.; YI, B.; SONG, X.: A data-driven model-based shared control strategy considering drivers' adaptive behavior in driver-automation interaction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering* (2022)
- [GG94] GREG WELCH; GARY BISHOP: Welch & Bishop, An Introduction to the Kalman Filter 2 1 The Discrete Kalman Filter In 1960. 1994
- [GKS19] GILLIS, N.; KAROW, M.; SHARMA, P.: Approximating the nearest stable discrete-time system. *Linear Algebra and its Applications* Jg. 573 (2019), S. 37–53
- [GKS20] GILLIS, N.; KAROW, M.; SHARMA, P.: A note on approximating the nearest stable discrete-time descriptor systems with fixed rank. *Applied Numerical Mathematics* Jg. 148 (2020), S. 131–139
- [GLP⁺15] GATTESCHI, V.; LAMBERTI, F.; PARAVATI, G.; SANNA, A.; DEMARTINI, C.; LISANTI, A.; VENEZIA, G.: New Frontiers of Delivery Services Using Drones: A Prototype System Exploiting a Quadcopter for Autonomous Drug Shipments. *2015 IEEE 39th Annual Computer Software and Applications Conference* (Taichung, Taiwan). 2015, S. 920–927
- [GMS18] GILLIS, N.; MEHRMANN, V.; SHARMA, P.: Computing the nearest stable matrix pairs. *Numerical Linear Algebra with Applications* Jg. 25 (2018), Nr. 5
- [Göt19] GÖTTE, R.: Modellprädiktive Regelung des Pendels mittels einer linear approximierten Zustandsbeschreibung basierend auf dem Koopman-Operator. Masterarbeit (Technomathematik). Paderborn: Universität Paderborn, 2019
- [GP17] GOSWAMI, D.; PALEY, D. A.: Global bilinearization and controllability of control-affine nonlinear systems: A Koopman spectral approach. *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)* (Melbourne, Australia). Piscataway, NJ, 2017, S. 6107–6112
- [GP18] GUGLIELMI, N.; PROTASOV, V. Y.: On the Closest Stable/Unstable Nonnegative Matrix and Related Stability Radii. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* Jg. 39 (2018), Nr. 4, S. 1642–1669
- [GS17] GILLIS, N.; SHARMA, P.: On computing the distance to stability for matrices using linear dissipative Hamiltonian systems. *Automatica* Jg. 85 (2017), Nr. 2, S. 113–121
- [GS18] GILLIS, N.; SHARMA, P.: Finding the Nearest Positive-Real System. *SIAM Journal on Numerical Analysis* Jg. 56 (2018), Nr. 2, S. 1022–1047
- [GSMJ21] GUEHO, D.; SINGLA, P.; MAJJI, M.; JUANG, J.-N.: Advances in System Identification: Theory and Applications. *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Austin, TX). 2021, S. 22–30
- [GWJ23] GONG, X.; WANG, X.; JOOS, G.: An Online Data-Driven Method for Microgrid Secondary Voltage and Frequency Control With Ensemble Koopman Modeling. *IEEE Transactions on Smart Grid* Jg. 14 (2023), Nr. 1, S. 68–81

- [GZQ⁺20] GROS, S.; ZANON, M.; QUIRYNEN, R.; BEMPORAD, A.; DIEHL, M.: From linear to nonlinear MPC: bridging the gap via the real-time iteration. *International Journal of Control* Jg. 93 (2020), Nr. 1, S. 62–80
- [Hei22] HEINEMANN, L.: Riccati-Regelungen für nichtlineare Systeme mittels des Koopman-Operators. Studienarbeit (Maschinenbau). Paderborn: Universität Paderborn, 2022
- [Her08] HERWIG, H.: *Strömungsmechanik. Einführung in die Physik von technischen Strömungen ; mit 13 Tabellen.* 1. Aufl. Studium. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
- [Hig86] HIGHAM, N. J.: Computing the Polar Decomposition—with Applications. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* Jg. 7 (1986), Nr. 4, S. 1160–1174
- [Hig88] HIGHAM, N. J.: Computing a nearest symmetric positive semidefinite matrix. *Linear Algebra and its Applications* Jg. 103 (1988), S. 103–118
- [HIS20] HARA, K.; INOUE, M.; SEBE, N.: Learning Koopman Operator under Dissipativity Constraints. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 53 (2020), Nr. 2, S. 1169–1174
- [HP19] HENNESSY, J. L.; PATTERSON, D. A.: *Computer architecture. A quantitative approach.* Unter Mitarb. von ASANOVIĆ, K. Sixth edition. Cambridge, Mass.: Morgan Kaufmann Publishers an imprint of Elsevier, 2019
- [HPW⁺18] HANKE, S.; PEITZ, S.; WALLSCHEID, O.; KLUS, S.; BÖCKER, J.; DELLNITZ, M.: *Koopman Operator Based Finite-Set Model Predictive Control for Electrical Drives.* arXiv:1804.00854 [math.OC], 2018
- [HTF09] HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R.; FRIEDMAN, J.: *The Elements of Statistical Learning.* New York, NY: Springer New York, 2009
- [HZ23] HUANG, X.; ZHANG, H.-T.: Koopman Operator Learning Control of the Piezoelectric Actuator. *2023 42nd Chinese Control Conference (CCC)* (Tianjin, China). 2023, S. 6731–6735
- [HZL⁺21] HUANG, X.; ZHOU, W.; LI, X.; ZHU, L.; ZHANG, H.-T.: Online Koopman Operator Learning to identify Cross-Coupling Effect of Piezoelectric Tube Scanners in Atomic Force Microscopes. *IEEE Transactions on Industrial Informatics* (2021)
- [IIS22] IKEDA, M.; ISHIKAWA, I.; SCHLOSSER, C.: Koopman and Perron-Frobenius operators on reproducing kernel Banach spaces. *Chaos (Woodbury, N.Y.)* Jg. 32 (2022), Nr. 12
- [IK21] IWATA, T.; KAWAHARA, Y.: Controlling Nonlinear Dynamical Systems with Linear Quadratic Regulator-based Policy Networks in Koopman space. *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Austin, TX). 2021, S. 5086–5091
- [IM11] ISERMANN, R.; MÜNCHHOF, M.: *Identification of Dynamic Systems.* Berlin, Heidelberg: Springer, 2011

- [ISA⁺15] IUNGO, G. V.; SANTONI-ORTIZ, C.; ABKAR, M.; PORTÉ-AGEL, F.; ROTEÀ, M. A.; LEONARDI, S.: Data-driven Reduced Order Model for prediction of wind turbine wakes. *Journal of Physics: Conference Series* Jg. 625 (2015)
- [Ise08] ISERMANN, R.: *Mechatronische Systeme. Grundlagen*. 2. neu bearb. Aufl. 2008. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008
- [IYA16] IAN GOODFELLOW; YOSHUA BENGIO; AARON COURVILLE: *Deep Learning*. <http://www.deeplearningbook.org>. MIT Press, 2016
- [JFTT22a] JUNKER, A.; FITTKAU, N.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Autonomes Putten mittels datengetriebener und physikbasierter Methoden. *Proceedings - 32. Workshop Computational Intelligence: Berlin, 1. - 2. Dezember 2022*. Hrsg. von SCHULTE, H.; HOFFMANN, F.; MIKUT, R. Bd. 32. 2022, S. 119–124
- [JFTT22b] JUNKER, A.; FITTKAU, N.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Autonomous Golf Putting with Data-Driven and Physics-Based Methods. *2022 Sixth IEEE International Conference on Robotic Computing (IRC)*. 2022, S. 134–141
- [JP85] JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S.: An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* Jg. 8 (1985), Nr. 5, S. 620–627
- [JPTT23] JUNKER, A.; PAPE, K.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Adaptive Koopman-Based Models for Holistic Controller and Observer Design. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 56 (2023), Nr. 3, S. 625–630
- [JS07] JORDAN, D. W.; SMITH, P.: *Nonlinear ordinary differential equations. An introduction for scientists and engineers*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2007
- [JTT22a] JUNKER, A.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Data-Driven Models for Control Engineering Applications Using the Koopman Operator. *2022 3rd International Conference on Artificial Intelligence, Robotics and Control (AIRC)* (Cairo, Egypt). 2022, S. 1–9
- [JTT22b] JUNKER, A.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Learning Data-Driven PCHD Models for Control Engineering Applications. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 55 (2022), Nr. 12, S. 389–394
- [JTT25] JUNKER, A.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Adaptive Data-Driven Models in Port-Hamiltonian Form for Control Design. *PAMM* Jg. 25 (2025), Nr. 1
- [Jun22] JUNKER, A.: *Datengetriebene Modellbildung für nichtlineare mechatronische Systeme in regelungstechnisch wertvoller Form*. Vortrag im Rahmen des Karlsruher Regelkreises, München, 4. Juli 2022
- [Kab18] KABALLO, W.: *Grundkurs Funktionalanalysis*. 2. Aufl. 2018. Berlin, Heidelberg: Springer, 2018
- [KAF⁺17] KARPATNE, A.; ATLURI, G.; FAGHMOUS, J. H.; STEINBACH, M.; BANERJEE, A.; GANGULY, A.; SHEKHAR, S.; SAMATOVA, N.; KUMAR, V.: Theory-Guided Data Science: A New Paradigm for Scientific Discovery from Data. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* Jg. 29 (2017), Nr. 10, S. 2318–2331

- [KB60] KALMAN, R. E.; BERTRAM, J. E.: Control System Analysis and Design Via the “Second Method” of Lyapunov: I—Continuous-Time Systems. *Journal of Basic Engineering* Jg. 82 (1960), Nr. 2, S. 371–393
- [KBK⁺13] KRUSE, R.; BORGELT, C.; KLAWONN, F.; MOEWES, C.; STEINBRECHER, M.; HELD, P.: *Computational Intelligence. A Methodological Introduction*. Texts in Computer Science. London: Springer, 2013
- [Ker20] KERSTING, N.: Datengetriebene Bestimmung von Koopman-Eigenfunktionen mittels eines tiefen künstlichen neuronalen Netzes. Studienarbeit (Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau). Paderborn: Universität Paderborn, 2020
- [Kha15] KHALIL, H. K.: *Nonlinear control*. Boston: Pearson, 2015
- [KKB18a] KAISER, E.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.: Discovering Conservation Laws from Data for Control. *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Miami Beach, FL). Piscataway, NJ, 2018, S. 6415–6421
- [KKB18b] KAISER, E.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.: Sparse identification of nonlinear dynamics for model predictive control in the low-data limit. *Proceedings. Mathematical, physical, and engineering sciences* Jg. 474 (2018), Nr. 2219
- [KKB20] KAHEMAN, K.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.: SINDy-PI: a robust algorithm for parallel implicit sparse identification of nonlinear dynamics. *Proceedings. Mathematical, physical, and engineering sciences* Jg. 476 (2020), Nr. 2242
- [KKB21] KAISER, E.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.: Data-driven discovery of Koopman eigenfunctions for control. *Machine Learning: Science and Technology* Jg. 2 (2021), Nr. 3
- [KKL⁺21] KARNIADAKIS, G. E.; KEVREKIDIS, I. G.; LU, L.; PERDIKARIS, P.; WANG, S.; YANG, L.: Physics-informed machine learning. *Nature Reviews Physics* Jg. 3 (2021), Nr. 6, S. 422–440
- [KKS⁺19] KAHEMAN, K.; KAISER, E.; STROM, B.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.: *Learning Discrepancy Models From Experimental Data*. arXiv:1909.08574 [cs.LG], 2019
- [KKS16] KLUS, S.; KOLTAI, P.; SCHÜTTE, C.: On the numerical approximation of the Perron-Frobenius and Koopman operator. *Journal of Computational Dynamics* Jg. 3 (2016), Nr. 1, S. 1–12
- [KL09] KOTYCZKA, P.; LOHMANN, B.: Parametrization of IDA-PBC by assignment of local linear dynamics. *2009 European Control Conference* (Budapest). Piscataway, NJ, 2009, S. 4721–4726
- [KL10] KOTYCZKA, P.; LOHMANN, B.: Parametrierung von IDA-PBC über Zuweisung lokal linearer Dynamik. *at - Automatisierungstechnik* Jg. 58 (2010), Nr. 1
- [KM18a] KORDA, M.; MEZIĆ, I.: Linear predictors for nonlinear dynamical systems: Koopman operator meets model predictive control. *Automatica* Jg. 93 (2018), S. 149–160

- [KM18b] KORDA, M.; MEZIĆ, I.: On Convergence of Extended Dynamic Mode Decomposition to the Koopman Operator. *Journal of Nonlinear Science* Jg. 28 (2018), Nr. 2, S. 687–710
- [Koo31] KOOPMAN, B. O.: Hamiltonian Systems and Transformation in Hilbert Space. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* Jg. 17 (1931), Nr. 5, S. 315–318
- [KQC22] KIM, J. S.; QUAN, Y. S.; CHUNG, C. C.: Data-Driven Modeling and Control for Lane Keeping System of Automated Driving Vehicles: Koopman Operator Approach. *2022 22nd International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)* (Jeju, Korea, Republic of). 2022, S. 1049–1055
- [Kro13] KROLL, A.: *Computational Intelligence. Eine Einführung in Probleme, Methoden und technische Anwendungen*. München: Oldenbourg, 2013
- [KRT23] KROLICKI, A.; RUFINO, D.; TELLEZ-CASTRO, D.: Finite Time Nonlinear Optimal Control using Koopman Eigenfunctions. *2023 American Control Conference (ACC)* (San Diego, CA). Hrsg. von TAN, X. Piscataway, NJ, 2023, S. 2117–2122
- [KS91] KOWALSKI, K.; STEEB, W.-H.: *Nonlinear dynamical systems and Carleman linearization*. Singapore und Teaneck, N.J: World Scientific Pub. Co, 1991
- [LATS20] LJUNG, L.; ANDERSSON, C.; TIELS, K.; SCHÖN, T. B.: Deep Learning and System Identification. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 53 (2020), Nr. 2, S. 1175–1181
- [LDBK17] LI, Q.; DIETRICH, F.; BOLLT, E. M.; KEVREKIDIS, I. G.: Extended dynamic mode decomposition with dictionary learning: a data-driven adaptive spectral decomposition of the Koopman operator. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* Jg. 27 (2017), Nr. 10
- [LG85] LOZANO-LEAL, R.; GOODWIN, G.: A globally convergent adaptive pole placement algorithm without a persistency of excitation requirement. *IEEE Transactions on Automatic Control* Jg. 30 (1985), Nr. 8, S. 795–798
- [Lju99] LJUNG, L.: *System identification. Theory for the user*. 2. Aufl. Prentice-Hall information and system sciences series. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999
- [LKB18] LUSCH, B.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.: Deep learning for universal linear embeddings of nonlinear dynamics. *Nature communications* Jg. 9 (2018), Nr. 1
- [LLM16] LAY, D. C.; LAY, S. R.; McDONALD, J.: *Linear algebra and its applications*. 5. Aufl. Boston: Pearson, 2016
- [LLMK11] LANDAU, I. D.; LOZANO, R.; M'SAAD, M.; KARIMI, A.: *Adaptive Control*. London: Springer, 2011
- [LM13] LAN, Y.; MEZIĆ, I.: Linearization in the large of nonlinear systems and Koopman operator spectrum. *Physica D: Nonlinear Phenomena* Jg. 242 (2013), Nr. 1, S. 42–53

- [Loc20] LOCHBICHLER, M.: Systematische Wahl einer Modellierungstiefe im Entwurfsprozess mechatronischer Systeme. deu. UB-PAD - Paderborn University Library, 2020
- [Lue71] LUENBERGER, D.: An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control* Jg. 16 (1971), Nr. 6, S. 596–602
- [Lun13] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013
- [LV17] LE CLAINCHE, S.; VEGA, J. M.: Higher Order Dynamic Mode Decomposition. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* Jg. 16 (2017), Nr. 2, S. 882–925
- [LXLX22] LI, S.; XU, Z.; LIU, J.; XU, C.: Learning-based Extended Dynamic Mode Decomposition for Addressing Path-following Problem of Underactuated Ships with Unknown Dynamics. *International Journal of Control, Automation and Systems* (2022)
- [MA78] MOORE, C. C.; ARNOLD, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Bd. 60. New York, NY: Springer New York, 1978
- [MAB⁺19] MANGAN, N. M.; ASKHAM, T.; BRUNTON, S. L.; KUTZ, J. N.; PROCTOR, J. L.: Model selection for hybrid dynamical systems via sparse regression. *Proceedings. Mathematical, physical, and engineering sciences* Jg. 475 (2019), Nr. 2223
- [MAM23] MAMAKOUKAS, G.; ABRAHAM, I.; MURPHEY, T. D.: Learning Stable Models for Prediction and Control. *IEEE Transactions on Robotics* Jg. 39 (2023), Nr. 3, S. 2255–2275
- [Mat23] MATHWORKS, INC.: *MATLAB*. 2023. <https://de.mathworks.com/products/matlab.html>
- [MB08] MOZYSKA, D.; BARTOSIEWICZ, Z.: Carleman Linearization of Linearly Observable Polynomial Systems. *Mathematical Control Theory and Finance*. Hrsg. von SARYCHEV, A.; SHIRYAEV, A.; GUERRA, M.; GROSSINHO, M. D. R. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 311–323
- [MBPK16] MANGAN, N. M.; BRUNTON, S. L.; PROCTOR, J. L.; KUTZ, J. N.: Inferring Biological Networks by Sparse Identification of Nonlinear Dynamics. *IEEE Transactions on Molecular, Biological and Multi-Scale Communications* Jg. 2 (2016), Nr. 1, S. 52–63
- [MCTM19] MAMAKOUKAS, G.; CASTANO, M. L.; TAN, X.; MURPHEY, T. D.: Local Koopman Operators for Data-Driven Control of Robotic Systems. *Robotics: Science and Systems XV* (2019). 2019
- [MCTM21] MAMAKOUKAS, G.; CASTANO, M. L.; TAN, X.; MURPHEY, T. D.: Derivative-Based Koopman Operators for Real-Time Control of Robotic Systems. *IEEE Transactions on Robotics* Jg. 37 (2021), Nr. 6, S. 2173–2192
- [MDP96] MARTIN, P.; DEVASIA, S.; PADEN, B.: A different look at output tracking: control of a vtol aircraft. *Automatica* Jg. 32 (1996), Nr. 1, S. 101–107
- [MDV22] MAMAKOUKAS, G.; DI CAIRANO, S.; VINOD, A. P.: Robust Model Predictive Control with Data-Driven Koopman Operators. *2022 American Control Conference (ACC)* (Atlanta, GA). Piscataway, NJ, 2022, S. 3885–3892

- [Mez05] MEZIĆ, I.: Spectral Properties of Dynamical Systems, Model Reduction and Decompositions. *Nonlinear Dynamics* Jg. 41 (2005), S. 309–325
- [Mez15] MEZIĆ, I.: On applications of the spectral theory of the Koopman operator in dynamical systems and control theory. *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Osaka). Piscataway, NJ, 2015, S. 7034–7041
- [Mez21] MEZIĆ, I.: Koopman Operator, Geometry, and Learning of Dynamical Systems. *Notices of the American Mathematical Society* Jg. 68 (2021), Nr. 7
- [Mez23] MEZIĆ, I.: *Operator is the Model*. arXiv:2310.18516v2 [math.DS], 2023
- [MHV19] MA, X.; HUANG, B.; VAIDYA, U.: Optimal Quadratic Regulation of Nonlinear System Using Koopman Operator. *2019 American Control Conference (ACC)* (Philadelphia, PA). 2019, S. 4911–4916
- [MKBP17] MANGAN, N. M.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.; PROCTOR, J. L.: Model selection for dynamical systems via sparse regression and information criteria. *Proceedings. Mathematical, physical, and engineering sciences* Jg. 473 (2017), Nr. 2204
- [MM16] MAUROY, A.; MEZIĆ, I.: Global Stability Analysis Using the Eigenfunctions of the Koopman Operator. *IEEE Transactions on Automatic Control* Jg. 61 (2016), Nr. 11, S. 3356–3369
- [MM84] MARDIA, K. V.; MARSHALL, R. J.: Maximum Likelihood Estimation of Models for Residual Covariance in Spatial Regression. *Biometrika* Jg. 71 (1984), Nr. 1
- [MOS00] MASCHKE, B.; ORTEGA, R.; SCHAFT, A. van der: Energy-based Lyapunov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation. *IEEE Transactions on Automatic Control* Jg. 45 (2000), Nr. 8, S. 1498–1502
- [MP20] MAKSAKOV, A.; PALIS, S.: Koopman-based Optimal Control of Boost DC-DC Converter. *2020 IEEE Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP)* (Kremenchuk, Ukraine). 2020, S. 1–4
- [MP43] McCULLOCH, W. S.; PITTS, W.: A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The Bulletin of Mathematical Biophysics* Jg. 5 (1943), Nr. 4, S. 115–133
- [MPFS96] MILIK, A.; PRSKAWETZ, A.; FEICHTINGER, G.; SANDERSON, W. C.: Slow-fast dynamics in Wonderland. *Environmental Modeling & Assessment* Jg. 1 (1996), Nr. 1-2, S. 3–17
- [MS92] MASCHKE, B.; SCHAFT, A. van der: Port-Controlled Hamiltonian Systems: Modelling Origins and Systemtheoretic Properties. *IFAC Proceedings Volumes* Jg. 25 (1992), Nr. 13, S. 359–365
- [MSB92] MASCHKE, B.; SCHAFT, A. van der; BREEDVELD, P. C.: An intrinsic hamiltonian formulation of network dynamics: non-standard poisson structures and gyrators. *Journal of the Franklin Institute* Jg. 329 (1992), Nr. 5, S. 923–966
- [MSLM94] MARSDEN, J. E.; SIROVICH, L.; LASOTA, A.; MACKAY, M. C.: *Chaos, Fractals, and Noise*. Bd. 97. New York, NY: Springer New York, 1994

- [MXM20] MAMAKOUKAS, G.; XHERIJA, O.; MURPHEY, T. D.: Memory-Efficient Learning of Stable Linear Dynamical Systems for Prediction and Control. *Advances in Neural Information Processing Systems*. Hrsg. von H. LAROCHELLE; M. RANZATO; R. HADSELL; M.F. BALCAN; H. LIN. Bd. 33. 2020, S. 13527–13538
- [Nes18] NESTEROV, Y.: *Lectures on Convex Optimization*. Bd. 137. Cham: Springer International Publishing, 2018
- [Nes83] NESTEROV, Y.: A method for solving the convex programming problem with convergence rate. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences* Jg. 269 (1983), S. 543–547
- [Neu90] NEUNZERT, H.: Von Modellen und wie man sie nutzt. *Forum '90 Wissenschaft und Technik*. Hrsg. von BRAUER, W.; FRIEMEL, H.-J.; MÜLLER-SCHÖNBERGER, G.; SCHÜTT, A. Bd. 259. Informatik-Fachberichte. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1990, S. 10–21
- [NK20] NARASINGAM, A.; KWON, J. S.-I.: Koopman operator-based model identification and control of hydraulic fracture propagation. *2020 American Control Conference (ACC)* (Denver, CO). 2020, S. 4533–4538
- [NM18] NETTO, M.; MILI, L.: A Robust Data-Driven Koopman Kalman Filter for Power Systems Dynamic State Estimation. *IEEE Transactions on Power Systems* (2018), S. 1–10
- [NSKZ21] NETTO, M.; SUSUKI, Y.; KRISHNAN, V.; ZHANG, Y.: On Analytical Construction of Observable Functions in Extended Dynamic Mode Decomposition for Nonlinear Estimation and Prediction. *IEEE Control Systems Letters* Jg. 5 (2021), Nr. 6, S. 1868–1873
- [OG04] ORTEGA, R.; GARCÍA-CANSECO, E.: Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control: A Survey. *European Journal of Control* Jg. 10 (2004), Nr. 5, S. 432–450
- [Oga02] OGATA, K.: *Modern control engineering*. 4. Aufl. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002
- [OND13] ORBANDEXIVRY, F.-X.; NESTEROV, Y.; DOOREN, P. van: Nearest stable system using successive convex approximations. *Automatica* Jg. 49 (2013), Nr. 5, S. 1195–1203
- [OR19] OTTO, S. E.; ROWLEY, C. W.: Linearly Recurrent Autoencoder Networks for Learning Dynamics. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* Jg. 18 (2019), Nr. 1, S. 558–593
- [OS89] ORTEGA, R.; SPONG, M. W.: Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. *Automatica* Jg. 25 (1989), Nr. 6, S. 877–888
- [OSME02] ORTEGA, R.; SCHAFT, A. van der; MASCHKE, B.; ESCOBAR, G.: Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems. *Automatica* Jg. 38 (2002), Nr. 4, S. 585–596

- [OSME99] ORTEGA, R.; SCHAFT, A. van der; MASCHKE, B.; ESCOBAR, G.: Energy-shaping of port-controlled Hamiltonian systems by interconnection. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304)* (Phoenix, AZ). 1999, S. 1646–1651
- [Pap15] PAPULA, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015
- [Pap22a] PAPE, K.: Analyse des Rechenaufwands der numerischen Approximationsverfahren des Koopman-Operators. Studienarbeit. Paderborn: Universität Paderborn, 2022
- [Pap22b] PAPE, K.: Entwicklung von selbstlernenden internen Streckenmodellen mittels des Koopman-Operators. Masterarbeit (Maschinenbau). Paderborn: Universität Paderborn, 2022
- [PB23] PEITZ, S.; BIEKER, K.: On the universal transformation of data-driven models to control systems. *Automatica* Jg. 149 (2023)
- [PBK16] PROCTOR, J. L.; BRUNTON, S. L.; KUTZ, J. N.: Dynamic Mode Decomposition with Control. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* Jg. 15 (2016), Nr. 1, S. 142–161
- [PBK18] PROCTOR, J. L.; BRUNTON, S. L.; KUTZ, J. N.: Generalizing Koopman Theory to Allow for Inputs and Control. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* Jg. 17 (2018), Nr. 1, S. 909–930
- [Pei18] PEITZ, S.: *Controlling nonlinear PDEs using low-dimensional bilinear approximations obtained from data*. arXiv:1801.06419 [math.OC], 2018
- [PK19a] PAGE, J.; KERSWELL, R. R.: Koopman mode expansions between simple invariant solutions. *Journal of Fluid Mechanics* Jg. 879 (2019), S. 1–27
- [PK19b] PEITZ, S.; KLUS, S.: Koopman operator-based model reduction for switched-system control of PDEs. *Automatica* Jg. 106 (2019), S. 184–191
- [PK20] PEITZ, S.; KLUS, S.: Feedback Control of Nonlinear PDEs Using Data-Efficient Reduced Order Models Based on the Koopman Operator. *The Koopman Operator in Systems and Control*. Hrsg. von MAUROY, A.; MEZIĆ, I.; SUSUKI, Y. Bd. 484. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Cham: Springer International Publishing, 2020, S. 257–282
- [Pop63] POPOV, V.-M.: The solution of a new stability problem for controlled systems. *Avtomat. i Telemekh.* (1963), S. 7–26
- [Pop73] POPOV, V.-M.: *Hyperstability of control systems*. Bd. 204. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bucuresti: Editura Academiei, 1973
- [POR20] PEITZ, S.; OTTO, S. E.; ROWLEY, C. W.: Data-Driven Model Predictive Control using Interpolated Koopman Generators. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* Jg. 19 (2020), Nr. 3, S. 2162–2193
- [PRR⁺22] P. CVITANOVIĆ; R. ARTUSO; R. MAINIERI; G. TANNER; G. VATTAY: *Chaos: Classical and Quantum*. Copenhagen: Niels Bohr Institute, 2022
- [PS09] PUST, O.; SCHMID, P. J.: Stabilitätsanalyse experimenteller Daten mit der Dynamic Mode Decomposition. *Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik, Erlangen* (2009)

- [QAKB18] QUADE, M.; ABEL, M.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.: Sparse identification of nonlinear dynamics for rapid model recovery. *Chaos (Woodbury, N.Y.)* Jg. 28 (2018), Nr. 6
- [Qua17] QUAN, Q.: *Introduction to Multicopter Design and Control*. Singapore: Springer Singapore, 2017
- [RHW86] RUMELHART, D. E.; HINTON, G. E.; WILLIAMS, R. J.: Learning representations by back-propagating errors. *Nature* Jg. 323 (1986), Nr. 6088, S. 533–536
- [RMB⁺09] ROWLEY, C. W.; MEZIĆ, I.; BAGHERIE, S.; SCHLATTER, P.; HENNINGSON, D. S.: Spectral analysis of nonlinear flows. *Journal of Fluid Mechanics* Jg. 641 (2009), S. 115–127
- [RNP13] ROTONDO, D.; NEJJARI, F.; PUIG, V.: Quasi-LPV modeling, identification and control of a twin rotor MIMO system. *Control Engineering Practice* Jg. 21 (2013), Nr. 6, S. 829–846
- [RR23] RAHMANI, M.; REDKAR, S.: Optimal control of a MEMS gyroscope based on the Koopman theory. *International Journal of Dynamics and Control* (2023)
- [RS00] RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S.: Research on gain scheduling. *Automatica* Jg. 36 (2000), Nr. 10, S. 1401–1425
- [RWR18] RABTA, B.; WANKMÜLLER, C.; REINER, G.: A drone fleet model for last-mile distribution in disaster relief operations. *International Journal of Disaster Risk Reduction* Jg. 28 (2018), S. 107–112
- [Saa80] SAAD, Y.: Variations on Arnoldi's method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices. *Linear Algebra and its Applications* Jg. 34 (1980), S. 269–295
- [SB16] SURANA, A.; BANASZUK, A.: Linear observer synthesis for nonlinear systems using Koopman Operator framework. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 49 (2016), Nr. 18, S. 716–723
- [Sch10] SCHMID, P. J.: Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics* Jg. 656 (2010), S. 5–28
- [Sch11] SCHMID, P. J.: Application of the dynamic mode decomposition to experimental data. *Experiments in Fluids* Jg. 50 (2011), Nr. 4, S. 1123–1130
- [Sch20] SCHAFT, A. van der: Port-Hamiltonian Modeling for Control. *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems* Jg. 3 (2020), Nr. 1, S. 393–416
- [SCQ⁺20] SILVA, B. D.; CHAMPION, K.; QUADE, M.; LOISEAU, J.-C.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.: PySINDy: A Python package for the sparse identification of nonlinear dynamical systems from data. *Journal of Open Source Software* Jg. 5 (2020), Nr. 49
- [SDW22] SHARAN, B.; DITTMER, A.; WERNER, H.: Real-time Model Predictive Control for Wind Farms: a Koopman Dynamic Mode Decomposition Approach. *2022 European Control Conference (ECC). 12-15 July 2022* (London, United Kingdom). Piscataway, NJ, 2022, S. 1006–1011

- [SEN⁺21] SYED, W. H.; EICHLER, A.; NAWAZ, A.; SHARAN, B.; WERNER, H.: Koopman-based Kalman Filter for Fault Detection for the Superconducting Radio Frequency Cavities of the European XFEL. *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Austin, TX). 2021, S. 6855–6860
- [ŠIM23] ŠVEC, M.; ILEŠ, Š.; MATUŠKO, J.: Predictive Direct Yaw Moment Control Based on the Koopman Operator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* (2023)
- [SJ14] SCHAFT, A. van der; JELTSEMA, D.: *Port-Hamiltonian systems theory. An introductory overview*. Foundations and trends in systems and control. Boston und Delft: Now, 2014
- [SJC22] SALTİK, M. B.; JAYAWARDHANA, B.; CHERUKURI, A.: Iterative Learning and Model Predictive Control for Repetitive Nonlinear Systems via Koopman Operator Approximation. *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)* (Cancun, Mexico). 2022, S. 3059–3065
- [SJK97] SEPULCHRE, R.; JANKOVIĆ, M.; KOKOTOVIĆ, P. V.: *Constructive Nonlinear Control*. Communications and Control Engineering. London: Springer London Limited, 1997
- [SK22] SHI, L.; KARYDIS, K.: ACD-EDMD: Analytical Construction for Dictionaries of Lifting Functions in Koopman Operator-Based Nonlinear Robotic Systems. *IEEE Robotics and Automation Letters* Jg. 7 (2022), Nr. 2, S. 906–913
- [SLT13] SCHMÜDDERICH, T.; LOCHBICHLER, M.; TRÄCHTLER, A.: Methodik zur anforderungsgerechten Wahl der Modellierungstiefe von Verhaltensmodellen für die virtuelle Inbetriebnahme Methodology for selecting the required modeling depth of behavioral models for virtual commissioning. *Fachtagung Mechatronik 2013*. Hrsg. von BERTRAM, T. Aachen, 2013
- [SMP09] SCHMID, P. J.; MEYER, K. E.; PUST, O.: Dynamic Mode Decomposition and Proper Orthogonal Decomposition of flow in a lid-driven cylindrical cavity. *8th International Symposium on Particle Image Velocimetry (PIV09)*. Melbourne, Australia, 2009
- [SRJ22] SANCHEZ-ESCALONILLA, S.; REYES-BAEZ, R.; JAYAWARDHANA, B.: Total Energy Shaping with Neural Interconnection and Damping Assignment - Passivity Based Control. *Proceedings of The 4th Annual Learning for Dynamics and Control Conference*. Hrsg. von FIROOZI, R.; MEHR, N.; YEL, E.; ANTONOVA, R.; BOHG, J.; SCHWAGER, M.; KOCHENDERFER, M. Bd. 168. Proceedings of Machine Learning Research. 2022, S. 520–531
- [SS08] SCHMID, P. J.; SESTERHENN, J.: *Dynamic Mode Decomposition of numerical and experimental data*. Unter Mitarb. von AMERICAN PHYSICAL SOCIETY. 2008
- [SSW20] SUNNY, K.; SHEIKH, A.; WAGH, S.: Dynamic Mode Decomposition for Prediction and Enhancement of Rotor Angle Stability. *2020 7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)* (Prague, Czech Republic). 2020, S. 160–165

- [STFK20] SCHRECK, G.; THIELE, G.; FEY, A.; KRÜGER, J.: Robust system identification for hysteresis-controlled devices using SINDy. *IECON 2020 The 46th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society* (Singapore, Singapore). 2020, S. 4820–4824
- [Sur16] SURANA, A.: Koopman operator based observer synthesis for control-affine nonlinear systems. *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)* (Las Vegas, NV). Piscataway, NJ, 2016, S. 6492–6499
- [SW80] STEEB, W.-H.; WILHELM, F.: Non-linear autonomous systems of differential equations and Carleman linearization procedure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Jg. 77 (1980), Nr. 2, S. 601–611
- [SW92] SCHABACK, R.; WERNER, H.: *Numerische Mathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1992
- [SWMB17] SURANA, A.; WILLIAMS, M. O.; MORARI, M.; BANASZUK, A.: Koopman operator framework for constrained state estimation. *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)* (Melbourne, Australia). Piscataway, NJ, 2017, S. 94–101
- [SYC⁺22] SHENG, E.; YU, S.; CHANG, H.; ZHANG, Y.; LI, Y.; HAO, Y.: Automated Driving Control of Vehicles with Guidances. *2022 IEEE 25th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)* (Macau, China). 2022, S. 1817–1822
- [TB23] TABASSUM, A.; BAI, H.: Data-Driven Koopman-based Modeling and Control of Quadcopter in a Turbulent Wind Field. *2023 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)* (Bridgetown, Barbados). 2023, S. 490–495
- [Tes12] TESCHL, G.: *Ordinary differential equations and dynamical systems*. Online-Ausgabe. Graduate Studies in Mathematics Ser. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2012
- [Tib11] TIBSHIRANI, R.: Regression shrinkage and selection via the lasso: a retrospective. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* Jg. 73 (2011), Nr. 3, S. 273–282
- [TKOT11] TIMMERMANN, J.; KHATAB, S.; OBER-BLÖBAUM, S.; TRÄCHTLER, A.: Discrete Mechanics and Optimal Control and its Application to a Double Pendulum on a Cart. *IFAC Proceedings Volumes* Jg. 44 (2011), Nr. 1, S. 10199–10206
- [TKY17] TAKEISHI, N.; KAWAHARA, Y.; YAIRI, T.: Learning Koopman invariant subspaces for dynamic mode decomposition. *Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems*. NIPS'17. Red Hook, NY, 2017, S. 1130–1140
- [TRL⁺14] TU, J. H.; ROWLEY, C. W.; LUCHTENBURG, D. M.; BRUNTON, S. L.; KUTZ, J. N.: On Dynamic Mode Decomposition: Theory and Applications. *Journal of Computational Dynamics* Jg. 1 (2014), Nr. 2, S. 391–421

- [VMMH22] VOLCHKO, A.; MITCHELL, S. K.; MORRISSEY, T. G.; HUMBERT, J. S.: Model-Based Data-Driven System Identification and Controller Synthesis Framework for Precise Control of SISO and MISO HASEL-Powered Robotic Systems. *2022 IEEE 5th International Conference on Soft Robotics (RoboSoft)* (Edinburgh, United Kingdom). 2022, S. 209–216
- [WB05] WÖRN, H.; BRINKSCHULTE, U.: *Echtzeitsysteme. Grundlagen, Funktionsweisen, Anwendungen ; mit 32 Tabellen*. eXamen.press. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005
- [WB15] WITELSKI, T.; BOWEN, M.: *Methods of mathematical modelling. Continuous systems and differential equations*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Cham u. a.: Springer, 2015
- [Wer18] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2018
- [WHD⁺16] WILLIAMS, M. O.; HEMATI, M. S.; DAWSON, S. T. M.; KEVREKIDIS, I. G.; ROWLEY, C. W.: Extending Data-Driven Koopman Analysis to Actuated Systems. *IFAC-PapersOnLine* Jg. 49 (2016), Nr. 18, S. 704–709
- [Wi72] WILLEMS, J. C.: Dissipative dynamical systems part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* Jg. 45 (1972), Nr. 5, S. 321–351
- [WKR15] WILLIAMS, M. O.; KEVREKIDIS, I. G.; ROWLEY, C. W.: A Data-Driven Approximation of the Koopman Operator: Extending Dynamic Mode Decomposition. *Journal of Nonlinear Science* Jg. 25 (2015), Nr. 6, S. 1307–1346
- [WM16] WEBER, H.; MATHIS, W.: Adapting the range of validity for the Carleman linearization. *Advances in Radio Science* Jg. 14 (2016), S. 51–54
- [WM17] WEBER, H.; MATHIS, W.: Eine selbstkonsistente Carleman Linearisierung zur Analyse von Oszillatoren. *Advances in Radio Science* Jg. 15 (2017), S. 223–230
- [WN21] WANG, H.; NOGUCHI, N.: Real-time states estimation of a farm tractor using dynamic mode decomposition. *GPS Solutions* Jg. 25 (2021), Nr. 1
- [WPCT20] WAARDE, H. J. van; PERSIS, C. de; CAMLIBEL, M. K.; TESI, P.: Willems' Fundamental Lemma for State-Space Systems and Its Extension to Multiple Datasets. *IEEE Control Systems Letters* Jg. 4 (2020), Nr. 3, S. 602–607
- [WRK15] WILLIAMS, M. O.; ROWLEY, C. W.; KEVREKIDIS, I. G.: A kernel-based method for data-driven koopman spectral analysis. *Journal of Computational Dynamics* Jg. 2 (2015), Nr. 2, S. 247–265
- [WRMM05] WILLEMS, J. C.; RAPISARDA, P.; MARKOVSKY, I.; MOOR, B. L. de: A note on persistency of excitation. *Systems & Control Letters* Jg. 54 (2005), Nr. 4, S. 325–329
- [WVK⁺15] WROBEL, S.; VOSS, H.; KÖHLER, J.; BEYER, U.; AUER, S.: Big Data, Big Opportunities. *Informatik-Spektrum* Jg. 38 (2015), Nr. 5, S. 370–378
- [WXL⁺23] WANG, J.; XU, B.; LAI, J.; WANG, Y.; HU, C.; LI, H.; SONG, A.: An Improved Koopman-MPC Framework for Data-Driven Modeling and Control of Soft Actuators. *IEEE Robotics and Automation Letters* Jg. 8 (2023), Nr. 2, S. 616–623

- [XIS23] XUE, X.; IYER, A.; SHARMA, N.: Koopman-based Data-driven Model Predictive Control of Limb Tremor Dynamics with Online Model Updating: A Theoretical Modeling and Simulation Approach. *2023 American Control Conference (ACC)* (San Diego, CA). Hrsg. von TAN, X. Piscataway, NJ, 2023, S. 2873–2878
- [XR20a] XIE, S.; REN, J.: Discrete System Linearization using Koopman Operators for Predictive Control and Its Application in Nano-positioning. *2020 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)* (Boston, MA). 2020, S. 1374–1379
- [XR20b] XIE, S.; REN, J.: Linearization of Recurrent-Neural-Network- Based Models for Predictive Control of Nano-Positioning Systems Using Data-Driven Koopman Operators. *IEEE Access* Jg. 8 (2020), S. 147077–147088
- [XZX⁺20] XIAO, Y.; ZHANG, X.; XU, X.; LIU, X.; LIU, J.: *A deep learning framework based on Koopman operator for data-driven modeling of vehicle dynamics*. arXiv:2007.02219v1 [eess.SY], 2020
- [YLH18] YEUNG, E.; LIU, Z.; HODAS, N. O.: A Koopman Operator Approach for Computing and Balancing Gramians for Discrete Time Nonlinear Systems. *2018 Annual American Control Conference (ACC)* (Milwaukee, WI). 2018, S. 337–344
- [YZQ⁺20] YU, Y.; ZHANG, Y.; QIAN, S.; WANG, S.; HU, Y.; YIN, B.: A Low Rank Dynamic Mode Decomposition Model for Short-Term Traffic Flow Prediction. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* (2020), S. 1–14
- [YZY⁺24] YUAN, J.; ZHAO, S.; YANG, D.; LIU, C.; WU, C.; ZHOU, T.; LIN, S.; ZHANG, Y.; CHENG, W.: Koopman modeling and optimal control for microbial fed-batch fermentation with switching operators. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* Jg. 52 (2024)
- [ZB22] ZINAGE, V.; BAKOLAS, E.: Koopman Operator Based Modeling and Control of Rigid Body Motion Represented by Dual Quaternions. *2022 American Control Conference (ACC)* (Atlanta, GA). Piscataway, NJ, 2022, S. 3997–4002
- [ZCKW18] ZHU, R.; CAO, Y.; KANG, Y.; WANG, X.: The Deep Input-Koopman Operator for Nonlinear Systems. *Neural Information Processing*. Hrsg. von CHENG, L.; LEUNG, A. C. S.; OZAWA, S. Bd. 11307. Theoretical Computer Science and General Issues. Cham: Springer International Publishing, 2018, S. 97–107
- [ZCLL17] ZHANG, L.; CAI, Y.; LI, C.; LAMARE, R. C. de: Variable forgetting factor mechanisms for diffusion recursive least squares algorithm in sensor networks. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* Jg. 2017 (2017), Nr. 1
- [ZRDC19] ZHANG, H.; ROWLEY, C. W.; DEEM, E. A.; CATTAFESTA, L. N.: Online Dynamic Mode Decomposition for Time-Varying Systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* Jg. 18 (2019), Nr. 3, S. 1586–1609

- [ZSB23] ZENG, L.; SADATI, S.; BERGELES, C.: Koopman Operator-based Extended Kalman Filter for Cosserat Rod Wrench Estimation. *2023 International Symposium on Medical Robotics (ISMR)* (Atlanta, GA). 2023, S. 1–7

Literaturverzeichnis der studentischen Arbeiten

Die nachstehend aufgeführten studentischen Arbeiten wurden im Kontext der vorliegenden Dissertation angefertigt. Die Definition der Zielsetzung, die Bearbeitung sowie die Auswertung, Interpretation und Visualisierung von Ergebnissen der studentischen Arbeiten erfolgten unter wissenschaftlicher Anleitung der Autorin dieser Dissertation. Die erzielten Ergebnisse sind zum Teil in die Dissertation eingeflossen. Besonders hervorzuheben ist die Arbeit [Fit20], die einen Grundstein für die Modellbildung und den Regelungsentwurf am Golfroboter sowie die nachfolgend gemeinsam verfassten Beiträge [JFTT22a; JFTT22b] gelegt hat. Der Schlagmechanismus des Golfroboters wird in der vorliegenden Dissertation an mehreren Stellen als Forschungsgegenstand behandelt. Außerdem wurden bedeutsame Ergebnisse im Bereich adaptiver Streckenmodelle, vgl. Abschnitt 6.1, durch die Arbeit [Pap22b] erzielt und als Beitrag [JPTT23] veröffentlicht.

- [Fit20] FITTKAU, N.: Detaillierte Modellbildung für den Golfroboter zur Verbesserung der Zustandsregelung und -beobachtung. Bachelorarbeit (Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau). Paderborn: Universität Paderborn, 2020
- [Gal20] GALLA, F. E.: Datengetriebene Identifikation struktureller Modellabweichungen untersucht am Beispiel des Doppelpendels. Studienarbeit (Maschinenbau). Paderborn: Universität Paderborn, 2020
- [Göt19] GÖTTE, R.: Modellprädiktive Regelung des Pendels mittels einer linear approximierten Zustandsbeschreibung basierend auf dem Koopman-Operator. Masterarbeit (Technomathematik). Paderborn: Universität Paderborn, 2019
- [Hei22] HEINEMANN, L.: Riccati-Regelungen für nichtlineare Systeme mittels des Koopman-Operators. Studienarbeit (Maschinenbau). Paderborn: Universität Paderborn, 2022
- [Ker20] KERSTING, N.: Datengetriebene Bestimmung von Koopman-Eigenfunktionen mittels eines tiefen künstlichen neuronalen Netzes. Studienarbeit (Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau). Paderborn: Universität Paderborn, 2020
- [Pap22a] PAPE, K.: Analyse des Rechenaufwands der numerischen Approximationsverfahren des Koopman-Operators. Studienarbeit. Paderborn: Universität Paderborn, 2022
- [Pap22b] PAPE, K.: Entwicklung von selbstlernenden internen Streckenmodellen mittels des Koopman-Operators. Masterarbeit (Maschinenbau). Paderborn: Universität Paderborn, 2022

Anhang

Inhaltsverzeichnis

A1 Mathematischer Anhang	157
A1.1 Positive und negative (Semi-)Definitheit	157
A1.2 Kronecker-Produkt	157
A1.3 Singulärwertzerlegung	158
A1.4 Pseudoinverse einer Matrix	158
A1.5 Eigenwerttheorie in der linearen Algebra	159
A1.6 Spektraltheorie in der Funktionalanalysis	160
A2 Zustandsraummodelle in zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Form . .	161
A3 Datengetriebene Modelle des Schlagmechanismus des Golfroboters . .	163
A3.1 Datengetriebene EDMD-Modelle	163
A3.2 Datengetriebene PCHD-Modelle	163
A4 Datengetriebene Modelle des Doppelpendels	165
A4.1 Erstes Szenario, vgl. Bild 4-8(a)	165
A4.2 Zweites Szenario, vgl. Bild 4-8(b)	165
A4.3 Drittes Szenario, vgl. Bild 4-8(c)	166
A4.4 Viertes Szenario, vgl. Bild 4-8(d)	166

A1 Mathematischer Anhang

A1.1 Positive und negative (Semi-)Definitheit

Eine Funktion $f(\mathbf{x})$ heißt positiv bzw. negativ semidefinit, wenn $f(\mathbf{x}) \geq 0$ bzw. $f(\mathbf{x}) \leq 0$ und $f(\mathbf{0}) = 0$. Gilt $f(\mathbf{x}) < 0$ bzw. $f(\mathbf{x}) > 0$ und $f(\mathbf{0}) = 0$, so heißt sie positiv bzw. negativ definit [Ada18].

Man bezeichnet eine quadratische Matrix \mathbf{A} als positiv definit ($\mathbf{A} > 0$), wenn

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (\text{A1-1})$$

und als positiv semidefinit ($\mathbf{A} \geq 0$), wenn

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (\text{A1-2})$$

Analog dazu werden die Begriffe negativ definit ($<$) und negativ semidefinit (\leq) definiert.

Eine symmetrische Matrix \mathbf{A} ist genau dann positiv bzw. negativ definit, wenn alle Eigenwerte von \mathbf{A} größer bzw. kleiner als null sind und ist genau dann positiv bzw. negativ semidefinit, wenn alle Eigenwerte von \mathbf{A} größer bzw. kleiner oder gleich null sind und ist genau dann indefinit, wenn sowohl positive als auch negative Eigenwerte existieren [FKL⁺16].

Positiv und negativ (semi-)definite Funktionen und Matrizen finden beispielsweise im Kapitel 4 Anwendung.

A1.2 Kronecker-Produkt

Das Kronecker-Produkt wird auch als *Tensorprodukt* oder *direktes Produkt* bezeichnet. Für die Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ist das Kronecker-Produkt definiert als

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}, \quad (\text{A1-3})$$

wobei die Potenzen des Kronecker-Produkts durch

$$\mathbf{A}^{[i]} = \underbrace{\mathbf{A} \otimes \cdots \otimes \mathbf{A}}_{i \text{ Operanden}} \in \mathbb{R}^{n^i \times n^i} \quad (\text{A1-4})$$

definiert sind.

Damit ergibt sich für das Kronecker-Produkts eines Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x}^{[i]} = \underbrace{\mathbf{x} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}}_{i \text{ Operanden}} \in \mathbb{R}^{n^i}. \quad (\text{A1-5})$$

Eine wichtige Eigenschaft ist die Kronecker-Produktregel

$$(\mathbf{AB}) \otimes (\mathbf{CD}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{B} \otimes \mathbf{D}). \quad (\text{A1-6})$$

Das Kronecker-Produkt wird im Abschnitt 2.4 zur Berechnung der Carleman-Linearisierung benötigt.

A1.3 Singulärwertzerlegung

Für jede reelle Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert eine Darstellung der Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top. \quad (\text{A1-7})$$

Dabei sind die Matrizen $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthonormal und die Matrix $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ enthält die Singulärwerte

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \quad (\text{A1-8})$$

von \mathbf{A} , sodass

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{A1-9})$$

Die Anzahl der Singulärwerte r ist gleich dem Rang von \mathbf{A} [FKL⁺16].

In dieser Arbeit ist die Singulärwertzerlegung relevant, weil sie für die numerische Berechnung pseudoinverser Matrizen benötigt wird, vgl. Anhang A1.4.

A1.4 Pseudoinverse einer Matrix

Die Pseudoinverse einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die eindeutig bestimmte Matrix $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$, welche die folgenden vier Eigenschaften erfüllt:

$$\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (\text{A1-10a})$$

$$\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ = \mathbf{A}^+, \quad (\text{A1-10b})$$

$$(\mathbf{AA}^+)^\top = \mathbf{AA}^+, \quad (\text{A1-10c})$$

$$(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^\top = \mathbf{A}^+\mathbf{A}. \quad (\text{A1-10d})$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}, \quad (\text{A1-11a})$$

$$(\mathbf{A}^\top)^+ = (\mathbf{A}^+)^\top, \quad (\text{A1-11b})$$

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{I}_n \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{I}_m. \quad (\text{A1-11c})$$

Die Pseudoinverse lässt sich über die Singulärwertzerlegung berechnen. Ist

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (\text{A1-12})$$

die Singulärwertzerlegung von \mathbf{A} . Dann gilt

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}^T. \quad (\text{A1-13})$$

Für den Fall $m < n$ lässt sich die Singulärwertzerlegung von \mathbf{A} in einer Variante formulieren, die einen verringerten Rechenaufwand erfordert [TRL⁺14]. Im Kontext Snapshot-basierter Systemidentifikation für die Regelungstechnik liegen jedoch im Allgemeinen deutlich mehr Messpunkte als Zustände vor, deshalb wird dieser Spezialfall in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Für den Spezialfall, dass die Spalten der Matrix \mathbf{A} linear unabhängig sind, ist $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ invertierbar und die Pseudoinverse von \mathbf{A} lässt sich mittels

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (\text{A1-14})$$

berechnen.

Die Pseudoinverse einer Matrix findet in vielen Teilen dieser Dissertation Anwendung, insbesondere in den Kapiteln 3-6 zur numerischen Berechnung datengetriebener Streckenmodelle.

A1.5 Eigenwerttheorie in der linearen Algebra

In der linearen Algebra werden **Endomorphismen** (quadratische Matrizen) betrachtet. Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$, für die die Gleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (\text{A1-15})$$

Lösungen $\neq \mathbf{0}$ hat, werden **Eigenwerte** genannt. \mathbf{x} wird dann jeweils als **Eigenvektor** zum Eigenwert λ bezeichnet. Die Eigenwerte sind die Lösungen des charakteristischen Polynoms

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (\text{A1-16})$$

[Pap15]. Eigenwerte sind demzufolge Zahlen λ , für die das Inverse $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{-1}$ nicht existiert, d.h. die Matrix $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ nicht bijektiv ist. Im Endlichdimensionalen ist das damit gleichzusetzen, dass der Endomorphismus nicht injektiv und damit auch nicht surjektiv ist.

Die Berechnung von Eigenwerten spielt in dieser Dissertation an mehreren Stellen eine große Rolle, beispielsweise im Kapitel 3 zur Systemanalyse oder auch im Kapitel 4 für die datengetriebene Bestimmung stabile oder passive Streckenmodelle.

A1.6 Spektraltheorie in der Funktionalanalysis

In der Funktionalanalysis werden lineare Abbildungen zwischen unendlichdimensionalen Vektorräumen (Funktionsräumen) betrachtet. Diese werden dann meistens als lineare Operatoren bezeichnet. Die Spektraltheorie linearer Operatoren erweitert die Theorie von Eigenwerten und Eigenvektoren von Matrizen auf den unendlichdimensionalen Fall [Kab18].

Das **Spektrum** eines Operators T ist die Menge aller Elemente λ des Zahlkörpers, für die die Differenz des Operators mit dem λ -fachen der identischen Abbildung

$$T - \lambda \text{id} \tag{A1-17}$$

nicht beschränkt invertierbar ist, d.h. dass es keine Inverse gibt oder diese nicht beschränkt ist. Bei unendlichdimensionalen Räumen ist es notwendig zu unterscheiden, ob der Operator $(T - \lambda \mathbf{I})$ invertierbar, nicht injektiv und/oder nicht surjektiv ist. Das Spektrum des Operators wird mit $\sigma(T)$ bezeichnet und die Elemente des Spektrums heißen Spektralwerte.

Das Spektrum lässt sich in verschiedene Teilmengen untergliedern [Wer18], Wikipedia:

- Das **Punktspektrum**:
Wenn der Operator $T - \lambda \text{id}$ nicht injektiv ist, d. h. $\ker(T - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$, dann ist λ ein Element des Punktspektrums $\sigma_p(T)$ von T . Die Elemente des Punktspektrums werden Eigenwerte genannt.
- Das **kontinuierliches Spektrum**:
Wenn der Operator $T - \lambda \text{id}$ injektiv, jedoch nicht surjektiv ist, aber ein dichtes Bild besitzt, d.h. es existiert ein Inverses, das jedoch nur auf einem dichten Teilraum des Banachraumes X definiert ist, dann ist λ ein Element des stetigen Spektrums $\sigma_c(T)$ von T .
- Das **Restspektrum**:
Wenn der Operator $T - \lambda \text{id}$ injektiv ist, jedoch kein im Banachraum X dichtes Bild besitzt, dann ist λ ein Element des Residualspektrums $\sigma_r(T)$ von T . In diesem Fall ist $T - \lambda \text{id}$ insbesondere nicht surjektiv. Der zu $T - \lambda \text{id}$ inverse Operator existiert, ist jedoch lediglich auf einem nicht dichten Teilraum von X definiert.

Bei Systemen mit örtlich verteilten Parametern [Deu12; Fra87] müssen neben dem Punktspektrum noch weitere Spektralwerte betrachtet werden. Hier ist die Rede von Häufungspunkten.

Die Spektraltheorie linearer Operatoren dient als Ergänzung zum Kapitel 2.

A2 Zustandsraummodelle in zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Form

In Analogie zu zeitkontinuierlichen linearen Zustandsraummodellen mit Differentialgleichungen lassen sich zeitdiskrete lineare Zustandsraummodelle mit Differenzgleichungen formulieren. Im Folgenden werden in Anlehnung an [Lun13] die Formeln zur Umrechnung dargestellt. Diese Formeln finden in den Kapiteln 3 und 5 Anwendung bei der Umrechnung von DMD- bzw. EDMD-Modellen.

Aus einem zeitkontinuierlichen linearen Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (\text{A2-1a})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad (\text{A2-1b})$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{A2-1c})$$

lässt sich unter Beachtung der Eigenschaften des Abtasters und des Halteglieders ein zeitdiskretes lineares Zustandsraummodell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_k, \quad (\text{A2-2a})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_d\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_d\mathbf{u}_k \quad (\text{A2-2b})$$

aufstellen, wobei Δt die Abtastzeit ist. Die Umrechnungsformeln für $\det \mathbf{A} \neq 0$ lauten:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}\Delta t}, \quad (\text{A2-3a})$$

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{B}, \quad (\text{A2-3b})$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C}, \quad (\text{A2-3c})$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{D} \quad (\text{A2-3d})$$

bzw.

$$\mathbf{A} = \frac{\log \mathbf{A}_d}{\Delta t} \quad (\text{A2-4a})$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_d - \mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}_d. \quad (\text{A2-4b})$$

A3 Datengetriebene Modelle des Schlagmechanismus des Golfroboters

Im Folgenden werden die numerischen Matrizen der unterschiedlichen datengetriebenen Modelle des Schlagmechanismus des Golfroboters explizit angegeben. In manchen Teilen dieser Arbeit, beispielsweise in den Kapiteln 3 und 6 wurden Messdaten vom Prüfstand zum Training verwendet, in anderen Teilen dieser Arbeit, beispielsweise im Kapitel 5, Trainingsdaten, die durch numerische Integration des nichtlinearen physikalischen Modells (3-55) generiert wurden. Die Unterschiede der resultierenden Modelle lassen sich jeweils dadurch erklären, dass das nichtlineare physikalische Modell nicht exakt das Verhalten des Prüfstandes abbildet, wie auch im Bild 3-14 zu erkennen ist. Die jeweilige Umrechnung zwischen zeitdiskreter und zeitkontinuierlicher Formulierung wird im Anhang A2 beschrieben.

A3.1 Datengetriebene EDMD-Modelle

Das EDMD-Modell, vgl. Abschnitt 3.2, des Schlagmechanismus des Golfroboters ergibt sich bei Verwendung von simulativ erzeugten Trainingsdaten durch

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,0001 & 1,0000 & -0,0002 & 0,0000 \\ -0,0467 & -0,2396 & -16,6881 & -0,1912 \\ 0,8253 & 0,6112 & -0,7025 & 0,0712 \\ 13,5420 & 6,5889 & -58,5597 & -3,3561 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0,0001 \\ 27,9867 \\ -1,0535 \\ 98,2054 \end{bmatrix} \quad (\text{A3-1})$$

und bei Verwendung von Messdaten des Prüfstandes durch

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -1,7604 & -0,4608 & -12,0318 & -0,1349 \\ 0,0595 & 0,8784 & -0,0921 & 0,0032 \\ 241,9582 & 45,4132 & -406,9642 & -14,5006 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 24,5078 \\ 0,0746 \\ 238,0165 \end{bmatrix}. \quad (\text{A3-2})$$

A3.2 Datengetriebene PCHD-Modelle

Das datengetriebene PCHD-Modell, vgl. Abschnitt 4.4, des Schlagmechanismus des Golfroboters ergibt sich bei Verwendung von simulativ erzeugten Trainingsdaten durch

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 6,9345 \\ -6,9345 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\geq} = \begin{bmatrix} 4,318 \times 10^{-5} & 0,0141 \\ 0,0141 & 4,6104 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 26,534 \end{bmatrix}, \quad (\text{A3-3})$$

und bei Verwendung von Messdaten des Prüfstandes durch

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 6,1066 \\ -6,1066 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\geq} = \begin{bmatrix} 0,0658 & -0,6516 \\ -0,6516 & 6,4526 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 23,0287 \end{bmatrix}. \quad (\text{A3-4})$$

A4 Datengetriebene Modelle des Doppelpendels

Im Abschnitt 4.4 wird die Bestimmung von datengetriebenen PCHD-Modellen am Beispiel des Doppelpendels simulativ demonstriert. Es werden vier unterschiedliche Szenarien für die Trainings- und Testdaten betrachtet. Für die Trainingsdaten wurden 100 simulierte Trajektorien mit einer Dauer von jeweils 3 s und zufälligen Anfangsauslenkungen verwendet. Im Folgenden werden die Zahlenwerte der resultierenden PCHD-Modelle für das jeweilige Szenario dargestellt.

A4.1 Erstes Szenario, vgl. Bild 4-8(a)

Die Anfangsauslenkungen der Trainingsdaten liegen im Bereich

$$\begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 0 \\ -\frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ x_{3,0} \\ x_{4,0} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-1})$$

Das resultierende datengetriebene PCHD-Modell ist gegeben durch

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 2,3094 & 0,0017 & -1,3163 \\ -2,3094 & 0 & 1,5053 & 0,3791 \\ -0,0017 & -1,5053 & 0 & 4,6105 \\ 1,3163 & -0,3791 & -4,6105 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A4-2a})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0,0039 & -0,0310 & 0,0087 & 0,1612 \\ -0,0310 & 0,7171 & -0,1298 & -0,4637 \\ 0,0087 & -0,1298 & -0,0276 & 0,0496 \\ 0,1612 & -0,4637 & 0,0496 & -0,2474 \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-2b})$$

A4.2 Zweites Szenario, vgl. Bild 4-8(b)

Die Anfangsauslenkungen der Trainingsdaten liegen im Bereich

$$\begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ 0 \\ -\frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ x_{3,0} \\ x_{4,0} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \\ \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-3})$$

Das resultierende datengetriebene PCHD-Modell ist gegeben durch

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 2,9779 & -0,0021 & -2,4734 \\ -2,9779 & 0 & 2,4960 & -0,0801 \\ 0,0021 & -2,4960 & 0 & 5,8662 \\ 2,4734 & 0,0801 & -5,8662 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A4-4a})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -0,0006 & -0,1954 & 0,0022 & 0,3226 \\ -0,1954 & 0,0384 & 0,2870 & -0,0274 \\ 0,0022 & 0,2870 & -0,0061 & -0,4817 \\ 0,3226 & -0,0274 & -0,4817 & -0,0208 \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-4b})$$

A4.3 Drittes Szenario, vgl. Bild 4-8(c)

Die Anfangsauslenkungen der Trainingsdaten liegen im Bereich

$$\begin{bmatrix} -\frac{\pi}{8} \\ 0 \\ -\frac{\pi}{8} \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ x_{3,0} \\ x_{4,0} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \frac{\pi}{8} \\ 0 \\ \frac{\pi}{8} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-5})$$

Das resultierende datengetriebene PCHD-Modell ist gegeben durch

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 3,6139 & -0,0005 & -3,4255 \\ -3,6139 & 0 & 3,4066 & 0,0028 \\ 0,0005 & -3,4066 & 0 & 7,1474 \\ 3,4255 & -0,0028 & -7,1474 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A4-6a})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0,0002 & -0,1346 & 0,0002 & 0,2045 \\ -0,1346 & -0,0353 & 0,2265 & 0,0463 \\ 0,0002 & 0,2265 & -0,0012 & -0,3441 \\ 0,2045 & 0,0463 & -0,3441 & -0,0620 \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-6b})$$

A4.4 Viertes Szenario, vgl. Bild 4-8(d)

Die Anfangsauslenkungen der Trainingsdaten liegen im Bereich

$$\begin{bmatrix} -\frac{\pi}{16} \\ 0 \\ -\frac{\pi}{16} \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ x_{3,0} \\ x_{4,0} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \frac{\pi}{16} \\ 0 \\ \frac{\pi}{16} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-7})$$

Das resultierende datengetriebene PCHD-Modell ist gegeben durch

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 3,8827 & 0 & -3,8263 \\ -3,8827 & 0 & 3,8187 & -0,0067 \\ 0 & -3,8178 & 0 & 7,7379 \\ 3,8263 & 0,0067 & -7,7379 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A4-8a})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -0,0510 & 0,0002 & 0,0761 \\ -0,0510 & -0,0031 & 0,0843 & 0,0095 \\ 0,0002 & 0,0843 & -0,0006 & -0,1254 \\ 0,0761 & 0,0095 & -0,1254 & -0,0207 \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-8b})$$

Erklärung zur Zitation von Inhalten aus studentischen Arbeiten

In Ergänzung zu meinem Antrag auf Zulassung zur Promotion in der Fakultät für Maschinenbau der Universität Paderborn erkläre ich gemäß §11 der Promotionsordnung und unter Beachtung der Regelung zur Zitation studentischer Arbeiten:

Die von mir vorgelegte Dissertation habe ich selbstständig verfasst, **und ich habe keine anderen** als die dort angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt. Es sind **Inhalte** studentischen Ursprungs (studentische Arbeiten) in dieser Dissertation enthalten.

Ich habe die verwendeten Arbeiten entsprechend der Regelung „Zitation aus studentischen Arbeiten in Dissertationen“ zitiert.

Paderborn, im Dezember 2024

Annika Junker

Das Heinz Nixdorf Institut – Interdisziplinäres Forschungszentrum für Informatik und Technik

Das Heinz Nixdorf Institut ist ein Forschungszentrum der Universität Paderborn. Es entstand 1987 aus der Initiative und mit Förderung von Heinz Nixdorf. Damit wollte er Ingenieurwissenschaften und Informatik zusammenführen, um wesentliche Impulse für neue Produkte und Dienstleistungen zu erzeugen. Dies schließt auch die Wechselwirkungen mit dem gesellschaftlichen Umfeld ein.

Die Forschungsarbeit orientiert sich an dem Programm „Dynamik, Vernetzung, Autonomie: Neue Methoden und Technologien für die intelligenten technischen Systeme von morgen“. In der Lehre engagiert sich das Heinz Nixdorf Institut in Studiengängen der Informatik, der Ingenieurwissenschaften und der Wirtschaftswissenschaften.

Heute wirken am Heinz Nixdorf Institut acht Professoren/in mit insgesamt 120 Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern. Pro Jahr promovieren hier etwa 15 Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftler.

Heinz Nixdorf Institute – Interdisciplinary Research Centre for Computer Science and Technology

The Heinz Nixdorf Institute is a research centre within the University of Paderborn. It was founded in 1987 initiated and supported by Heinz Nixdorf. By doing so he wanted to create a symbiosis of computer science and engineering in order to provide critical impetus for new products and services. This includes interactions with the social environment.

Our research is aligned with the program “Dynamics, Networking, Autonomy: New methods and technologies for intelligent technical systems of tomorrow”. In training and education the Heinz Nixdorf Institute is involved in many programs of study at the University of Paderborn. The superior goal in education and training is to communicate competencies that are critical in tomorrow's economy.


Today eight Professors and 120 researchers work at the Heinz Nixdorf Institute. Per year approximately 15 young researchers receive a doctorate.

Zuletzt erschienene Bände der Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts

- Bd. 403 HILLEBRAND, M.: Entwicklungssystematik zur Integration von Eigenschaften der Selbstheilung in Intelligente Technische Systeme. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 403, Paderborn, 2021 – ISBN 978-3-947647-22-4
- Bd. 404 OLMA, S.: Systemtheorie von Hardware-in-the-Loop-Simulationen mit Anwendung auf einem Fahrzeugachsprüfstand mit parallelkinematischem Lastsimulator. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 404, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-23-1
- Bd. 405 FECHTELPEETER, C.: Rahmenwerk zur Gestaltung des Technologietransfers in mittelständisch geprägten Innovationsclustern. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 405, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-24-8
- Bd. 406 OLEFF, C.: Proaktives Management von Anforderungsänderungen in der Entwicklung komplexer technischer Systeme. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 406, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-25-5
- Bd. 407 JAVED, A. R.: Mixed-Signal Baseband Circuit Design for High Data Rate Wireless Communication in Bulk CMOS and SiGe BiCMOS Technologies. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 407, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-26-2
- Bd. 408 DUMITRESCU, R., KOLDEWEY, C.: Daten-gestützte Projektplanung. Fachbuch. Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 408, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-27-9
- Bd. 409 PÖHLER, A.: Automatisierte dezentrale Produktionssteuerung für cyber-physische Produktionssysteme mit digitaler Repräsentation der Beschäftigten. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 409, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-28-6
- Bd. 410 RÜDDENKLAU, N.: Hardware-in-the-Loop-Simulation von HD-Scheinwerfer-Steuergeräten zur Entwicklung von Lichtfunktionen in virtuellen Nachtfahrten. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 410, Paderborn, 2023 – ISBN 978-3-947647-29-3
- Bd. 411 BIEMELT, P.: Entwurf und Analyse modell-prädiktiver Regelungsansätze zur Steigerung des Immersionsempfindens in interaktiven Fahrsimulationen. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 411, Paderborn, 2023 – ISBN 978-3-947647-30-9
- Bd. 412 HAAKE, C.-J., MEYER AUF DER HEIDE, F., PLATZNER, M., WACHSMUTH, H., WEHRHEIM, H. (Eds.): On-The-Fly Computing - Individualized IT-Services in dynamic markets, Collaborative Research Centre 901 (2011 - 2023), Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 412, Paderborn, 2023 – ISBN 978-3-947647-31-6
- Bd. 413 DUMITRESCU, R.; HÖLZLE, K. (Hrsg.): Vorausschau und Technologieplanung. 17. Symposium für Vorausschau und Technologieplanung, Heinz Nixdorf Institut, 14./15. September 2023, Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 413, Paderborn, 2023 – ISBN 978-3-947647-32-3
- Bd. 414 ABUGHANNAM, S.: Low-power Direct-detection Wake-up Receiver at 2.44 GHz for Wireless Sensor Networks. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 414, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-33-0

Zuletzt erschienene Bände der Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts

- Bd. 415 REINHOLD, J.: Systematik zur musterbasierten Transformation von Wertschöpfungssystemen für Smart Services. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 415, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-34-7
- Bd. 416 YANG, X.: Eine Methode zur Unterstützung von Entscheidungen bei der Entwicklung modularer Leichtbauprodukte. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 416, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-35-4
- Bd. 417 GRÄLER, M.: Entwicklung adaptiver Einrichtungsassistenzsysteme für Produktionsprozesse. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 417, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-36-1
- Bd. 418 RÖSMANN, D.: Menschenzentrierte Montageplanung und -steuerung durch fähigkeitsorientierte Aufgabenzuordnung. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 418, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-37-8
- Bd. 419 BAHMANIAN, M.: Optoelectronic Phase-Locked Loop, Theory and Implementation. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 419, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-38-5
- Bd. 420 HEIHOFF-SCHWEDE, J.: Spezifikations-technik zur Analyse, Gestaltung und Bewertung von Engineering-IT-Architekturen. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 420, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-39-2
- Bd. 421 MEYER, M.: Systematik zur Planung und Verwertung von Betriebsdaten-Analysen in der strategischen Produktplanung. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 421, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-40-8
- Bd. 422 MALENA, K.: Konzipierung, Analyse und Realumsetzung eines mehrstufigen modellprädiktiven Lichtsignalanlagenregelungssystems. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 422, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-41-5
- Bd. 423 GÖTTE, R.-S.: Online-Schätzung von Modellgenauigkeiten zur automatischen Modelladaptation unter Beibehaltung einer physikalisch-technischen Interpretierbarkeit. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 423, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-42-2
- Bd. 424 PIERENKEMPER, C.: Systematik zur Entwicklung Leistungsstufen-basierter Industrie 4.0-Strategien. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 424, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-43-9
- Bd. 425 DUMITRESCU, R.; HÖLZLE, K. (Hrsg.): Vorausschau und Technologieplanung. 18. Symposium für Vorausschau und Technologieplanung, Heinz Nixdorf Institut, 5./6. Dezember 2024, Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 425, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-44-6
- Bd. 426 HESSE, M.: Interaktive Inbetriebnahme von Steuerungen und Regelungen für partiell bekannte dynamische Systeme mittels Gauß-Prozess-Regression. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 426, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-45-3
- Bd. 427 PREUß, D.: Methodik zur automatisierten Extrahierung, Formalisierung und Handhabung von Änderungen technischer Anforderungen. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 427, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-46-0



Der modellbasierte Regelungsentwurf erfordert eine möglichst genaue Kenntnis über das dynamische Verhalten des zugrunde liegenden physikalischen Systems. Durch maschinelle Lernverfahren besteht das Potenzial den Modellierungsaufwand im Vergleich zum klassischen Vorgehen zu reduzieren, indem physikalisches Vorwissen und an Messdaten trainierte Modelle effektiv zusammengeführt werden. Diese Dissertation entwickelt Methoden zur datengetriebenen Bestimmung von Modellen für den Regelungsentwurf nichtlinearer mechatronischer Systeme. Dazu wird die regelungstechnische Anwendbarkeit von Koopman-Operatorbasierten Verfahren analysiert, die nichtlineare Dynamiken durch lineare Modelle approximieren. Darüber hinaus wird ein neuartiges Verfahren zur datengetriebenen Bestimmung von Port-Hamilton-Modellen entwickelt, die Energiezusammenhänge plausibel abbilden und sich unmittelbar für einen passivitätsbasierten Regelungsentwurf verwenden lassen. Zudem werden Ansätze zur automatischen Aktualisierung des im Regelkreis verwendeten Streckenmodells bei Modellunsicherheiten oder auftretenden Veränderungen der Systemdynamik vorgestellt. Experimentelle sowie simulative Untersuchungen demonstrieren die herausragende Prädiktionsgenauigkeit der datengetriebenen Modelle und die hohe Regelgüte. Die Ergebnisse dieser Dissertation leisten einen bedeutenden Beitrag, weil die datengetriebenen Modelle eine aus regelungstechnischer Sicht verwertbare Form aufweisen. Sie sind physikalisch interpretierbar und lassen sich nahtlos in bestehende Analyse- und Entwurfsmethoden einbinden. Dies eröffnet neue Perspektiven für zukünftige Anwendungen und Weiterentwicklungen.