Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Institut für Mathematik

Mathematisches Problemlösen im Ingenieurstudium: Eine qualitative Prozessanalyse

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Dr. rer. nat.
an der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
im Institut für Mathematik

Vorgelegt von:
Tim Kolbe

Betreuer:in:
Prof. Dr. Lena Wessel
Prof. Dr. Michael Liebendörfer

Paderborn, Februar 2025

Geleitwort

Die empirische Beforschung von Lehr-Lernprozessen von Mathematikstudierenden hat in den letzten Jahren im Rahmen der gesteigerten Aufmerksamkeit gegenüber hochschuldidaktischer Forschung zwar zugenommen, dennoch sind qualitative Lernprozessstudien mit der Lernendengruppe der Nebenfach-Studierenden weiterhin noch kaum vertreten. In seiner Dissertation widmet sich Tim Kolbe daher diesem Desiderat, genauer beschäftigt er sich mit Lernprozessen bei Hausaufgabenbearbeitungen im Ingenieurstudium. Mit qualitativen Prozessanalyse bearbeitet Herr Kolbe den Themenbereich des mathematischen Problemlösens und rekonstruiert durch Prozessanalysen von Hausaufgabenbearbeitungen zu Inhalten der Analysis das von Studierenden aktivierte Wissen und Heurismen zur Überwindung von Schwierigkeiten und Hürden in individuellen Problemlösesituationen. Dafür integriert er Perspektiven der Problemlöseforschung in das Feld der hochschulmathematikdidaktischen Lernprozessforschung der Studieneingangsphase im Ingenieurstudium.
Als Ausgangspunkte der Arbeit werden in Kapitel 1 die Spezifitäten des Mathematiklernens in Ingenieurstudiengängen aufbereitet und mit lehr-lern-theoretischen Grundlagen des eigenverantwortlichen Lernens im Hochschulstudium verzahnt. In diesem Zusammenspiel wird die Relevanz von Hausaufgabenbearbeitungsprozessen für mathematisches Lernen aufgezeigt und motiviert, warum diese Prozesse mit Theorie und Methoden der (bislang überwiegend schulbezogenen) Problemlöseforschung betrachtet werden können.
Die theoretischen Grundlagen zum Forschungsgegenstand mathematischen Problemlösens in der Hochschule werden nachfolgend in Kapitel 2 dargestellt. Ausgehend von der Relevanz mathematischen Problemlösens für ein Ingenieurstudium bereitet der Autor den aktuellen Forschungsstand zum Problemlösen mit Bezug auf die nationale und internationale Grundlagenliteratur und strukturiert nach den in Problemlöseprozessen beteiligten Konstrukten Steuerung, Wissen, Heurismen und Beliefs auf.
Die Darlegung der Forschungsfragen erfolgt in Kapitel 3, in dem zunächst vorweg aufgezeigt wird, warum für die Kategorie des „Wissens“ eine inhaltliche Schwerpunktsetzung notwendig ist. Vor dem Hintergrund dieser Schwerpunktsetzung auf Inhalte der Differentialrechnung unterscheidet der Autor die zu bearbeitenden Forschungsfragen in stoffdidaktische und empirische Fragestellungen. Zur Bearbeitung der stoffdidaktischen Fragestellung dient Kapitel 4 der Arbeit. Im Anschluss an die Darlegung der Relevanz der Differentialrechnung für ein Ingenieurstudium wird das für den Ableitungsbegriff notwendige Vorwissen spezifiziert: der Funktionsbegriff, der Grenzwertbegriff und der Stetigkeitsbegriff werden jeweils fachdidaktisch mit Blick auf die

notwendigen aufzubauenden Vorstellungen, Verfahren, relevanten Darstellungen und potentiellen typischen Hürden mit Bezug auf nationale und internationale Vorarbeiten diskutiert. Anschließend wird die Spezifizierung des Ableitungsbegriff vorgenommen. Mit der Verschränkung der Theorie zu Wissensarten und Wissensfacetten gelingt es dem Autor, den komplexen Lerngegenstand für die Analysen aufzufalten und so den empirischen Teil der Arbeit stoffdidaktisch vorzubereiten.

Im Methodenkapitel 5 werden Rahmen und Entscheidungen des Forschungsprojekts dargestellt. Die Darlegung erfolgt bezogen auf die Fokussierung der Dissertation auf die Prozesse der Hausaufgabenbearbeitungen in authentischen Lernsituationen mithilfe des lauten Denkens. Die folgenden Abschnitte dienen der Darstellung des lauten Denkens als Erhebungsmethode sowie der qualitativen Inhaltsanalyse als gewählte Auswertungsmethode. Ebenso werden im Kapitel 5 die Gütekriterien qualitativer Forschung sowie das Studiendesign beschrieben und bzgl. getroffener Entscheidungen reflektiert. Der Forschungsteil der Arbeit gliedert sich in Kapitel 6 in vier Unterkapitel entsprechend der Konstrukte „Steuerung“, „Wissen“, „Heurismen“ sowie eine integrierende Betrachtung der drei genannten Konstrukte zur Rekonstruktion potentieller Zusammenhänge der Konstrukte. Im Diskussionskapitel der Arbeit liefert Herr Kolbe prägnante Zusammenfassungen zu den Forschungsfragen und reflektiert das methodische Vorgehen der empirischen Studie mit Blick auf das laute Denken in Beobachtungssituationen des hochschulmathematischen (Selbst-)Lernens.

Mit dem gesetzten Schwerpunkt und Thema seiner Arbeit bearbeitet Herr Kolbe einen Bereich, der in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik bislang wenig empirisch beforscht wurde und mit den verschiedenen, zu berücksichtigenden Perspektiven entsprechend komplex auftritt. Die Analyse der Lernprozesse aus den Perspektiven der gegenstandsspezifischen Verläufe und Schwierigkeiten sowie Problemlösen bietet einen detailreichen Einblick in die individuellen und gruppenbezogenen Hausaufgabenbearbeitungsprozesse. Die gewonnenen Ergebnisse stellen bedeutsame Anknüpfungspunkte für weitere Forschungsarbeiten dar und sind relevant für die mathematische Hochschullehre. Die Arbeit zeichnet sich damit auch durch eine hohe Praxisrelevanz bei gleichzeitig theoriegeleitetem Vorgehen aus.

PADERBORN, IM AUGUST 2025

Lena Wessel

Vorwort

In diesem Vorwort möchte ich die Gelegenheit nutzen, all jenen zu danken, die mich während der Ausarbeitung meiner Dissertation unterstützt haben.
Mein besonderer Dank gilt meiner Betreuerin, Prof. Dr. Lena Wessel. Sie hat mir den nötigen Freiraum für meine wissenschaftliche Arbeit gelassen und war dennoch stets nah am Forschungsprozess beteiligt. Ihre Unterstützung und die Möglichkeit, jederzeit auf ihre Hilfe zurückgreifen zu können, waren für mich äußerst wertvoll. Ebenso danke ich Prof. Dr. Michael Liebendörfer, der mich bereits seit meiner Zeit als Bachelor- und Master-Student begleitet hat. Er stand mir stets zur Seite, wenn ich Unterstützung brauchte, und hat mir mit wertvollen Impulsen geholfen, meinen Weg in der Forschung zu finden.
Mein Dank richtet sich außerdem an die gesamte Fachgruppe, mit der ich über die Jahre hinweg bereichernde Gespräche führen durfte, sei es auf dem Flur, in Pausen oder bei anderen Gelegenheiten. Besonders schätze ich die regelmäßigen AG-Sitzungen der AG Wessel sowie das Oberseminar „khdm“ bzw. „Sek II/Hochschule“. In diesen Formaten habe ich meine Forschung geteilt, konstruktives Feedback erhalten und hilfreiche Diskussionen geführt.
Ein großer Dank gilt auch einzelnen Personen, die mich während dieser Zeit besonders unterstützt haben. Zunächst möchte ich meine Bürokollegin Anna Dellori erwähnen, mit der ich die gesamte Zeit das Büro teilen durfte. Wir haben zeitgleich begonnen und uns auf unserem Weg durch die Promotion stets gegenseitig unterstützt. Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei Laura Burr, die nicht nur während vieler gemeinsamer Konferenzen, sondern auch im informellen Rahmen abseits des Tagungsprogramms zu einer angenehmen Erfahrung beigetragen hat und mir darüber hinaus mit wertvollen Hinweisen und neuen Perspektiven wichtige Impulse zu meiner Forschung gegeben hat.
Des Weiteren möchte ich meiner Hilfskraft Albina Klaus danken, die mich fast die gesamte Zeit begleitet hat. Sie hat ihre Aufgaben stets zuverlässig und mit großem Engagement erledigt, was mir eine enorme Entlastung war. Ein weiterer Dank gilt den Studierenden, die an meiner Studie teilgenommen haben – ohne ihre Unterstützung hätte ich keine Daten für meine Analysen und Auswertungen gehabt. In diesem Zusammenhang möchte ich auch Dr. Tobias Black hervorheben, der es mir ermöglicht hat, in seinen Veranstaltungen nach Teilnehmenden für meine Studie zu suchen.
Besonders in der Endphase meiner Arbeit haben mich Dr. Max Hoffmann und Dr. Gero Stoffels intensiv unterstützt. Sie haben sich viel Zeit genommen, um meine Arbeit zu lesen, zu diskutieren und wertvolle Rückmeldungen zu geben. Ihre Investition hat meine Arbeit wesentlich vorangebracht.
Abschließend möchte ich mich auch für die vielen schönen Momente außerhalb der Arbeit bedanken. Dazu zählen die WiMi-Touren, Fachgruppen- und AG-Treffen sowie andere gemeinsame Aktivitäten, die für eine angenehme Balance

zwischen Arbeit und Freizeit gesorgt haben. Stellvertretend möchte ich hier Markus Leifeld, Olga Lomas, Leonie Ahlemeyer, Birte Reich, Federica Becker, Oliver Baumann, Yannik Fleischer und viele weitere nennen.
Nun wünsche ich viel Freude beim Lesen meiner Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit analysiert mathematische Problembearbeitungsprozesse im Kontext des Ingenieurstudiums, mit besonderem Fokus auf die Differentialrechnung. Ziel der Arbeit ist es, die Rolle von Steuerung, Wissen und Heurismen in Problembearbeitungsprozessen zu untersuchen, um deren Einfluss auf den Lernerfolg zu verstehen. Die theoretische Grundlage bildet die Theorie des mathematischen Problemlösens nach Schoenfeld, ergänzt durch eine strukturierte Betrachtung des Lerngegenstands Differentialrechnung. Methodisch kombiniert die Studie qualitative Erhebungen, wie „Lautes Denken“, mit einer qualitativen Inhaltsanalyse. Im empirischen Teil werden die Problembearbeitungsprozesse von Studierenden anhand spezifischer Aufgaben analysiert. Dabei stehen die Steuerung der Lösungsprozesse, die Nutzung von Wissen und die Anwendung von Heurismen im Mittelpunkt. Zunächst werden die Kategorien des Problemlösens nach Schoenfeld einzeln herangezogen, um die Problembearbeitungsprozesse differenziert zu analysieren. Anschließend werden diese Kategorien in einer gemeinsamen Betrachtung zusammengeführt, um den gesamten Problemlöseprozess ganzheitlich zu untersuchen. Die Ergebnisse werden abschließend reflektiert und in den theoretischen Kontext eingeordnet. Darüber hinaus werden praktische Implikationen abgeleitet und Ansätze für zukünftige Forschungsarbeiten aufgezeigt.

Abstract

This study analyzes mathematical problem-solving processes in the context of engineering education, with a particular focus on differential calculus. The aim of the study is to investigate the role of control, knowledge, and heuristics in problem-solving processes in order to understand their impact on learning outcomes. The theoretical foundation is based on Schoenfeld's theory of mathematical problem-solving, supplemented by a structured consideration of the learning subject of differential calculus. Methodologically, the study combines qualitative data collection methods, such as "think-aloud protocols", with qualitative content analysis. In the empirical part, the problem-solving processes of students are analyzed based on specific tasks. The focus is on the control of the solution processes, the use of knowledge, and the application of heuristics. Initially, Schoenfeld’s categories of problem-solving are applied separately to analyze the problem-solving processes in detail. Subsequently, these categories are brought together in a comprehensive analysis to examine the entire problem-solving process holistically. The results are then reflected upon and placed in the theoretical context. Furthermore, practical implications are derived, and suggestions for future research are outlined.

Einleitung

Dieser Abschnitt bietet einen Überblick über die Struktur dieser Arbeit.
Das einleitende Kapitel (**Kapitel 1**) liefert eine Einführung in die Problemlage der mathematischen Lernprozesse in der Hochschule sowie die Frage nach der Relevanz für die Forschung in diesem Bereich – insbesondere im ingenieurwissenschaftlichen Kontext. Dabei werden verschiedene Aspekte der Lehre und des Lernens von Mathematik in einem Ingenieurstudium beleuchtet. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Rolle von Hausaufgaben im Lernprozess der Studierenden. Es wird herausgestellt, dass die wöchentliche Bearbeitung von Hausaufgaben eine besondere Herausforderung darstellt und diese Bearbeitungsprozesse anhand der Theorie des mathematischen Problemlösens untersucht werden können. Abschließend wird die Zielsetzung dieser Arbeit erläutert.
Kapitel 2 beschäftigt sich mit der theoretischen Auseinandersetzung des mathematischen Problemlösens. Dabei wird zunächst der Begriff des mathematischen Problemlösens eingeordnet. Anschließend erfolgt eine Betrachtung der vier Kategorien des mathematischen Problemlösen nach Schoenfeld (1985). Zuerst werden verschiedene Problemlösemodelle vorgestellt (*Steuerung* auf dem allgemeinen Level). Danach wird sich der Kombination von Wissensarten und Wissensfacetten gewidmet, um die Wissensmatrix zu erhalten (*Wissen*). Im Anschluss werden Problemlösestrategien sowie deren Kategorisierung und Einsatz diskutiert (*Heurismen*). Es wird ebenfalls kurz auf *Beliefs*[1] eingegangen. Abschließend endet das Kapitel, indem andere Forschungsarbeiten aus dem Kontext des mathematischen Problemlösens vorgestellt werden.
In **Kapitel 3** wird das Forschungsdesign dieser Studie vorgestellt. Dabei werden sowohl stoffdidaktische als auch empirische Fragestellungen ausgearbeitet. Diese Forschungsfragen werden in diesem Kapitel erörtert.
Mathematisches Problemlösen kann zunächst unabhängig eines bestimmten Inhaltsgebiets untersucht werden. In dieser Arbeit wird sich jedoch auf das Themengebiet der Differentialrechnung fokussiert. Der Abschnitt (**Kapitel 4**) beginnt mit der Entscheidung, warum sich speziell Problembearbeitungsprozessen der Differentialrechnung gewidmet wird. Dabei wird auf die Relevanz der Differentialrechnung für das Ingenieurstudium eingegangen. Anschließend werden die benötigten mathematischen Grundlagen dargestellt. Zur Strukturierung des Lerngegenstands Differentialrechnung wird

1 Obwohl *Beliefs* nicht Gegenstand dieser Arbeit sind, werden sie aus Gründen der Vollständigkeit in einem kurzen Abschnitt vorgestellt.

der Vier-Ebenen-Ansatz nach Hußmann & Prediger (2016) vorgestellt und für die eigene Nutzung in dieser Arbeit angepasst. Vorbereitend auf die Daten dieser Arbeit werden relevante Definitionen, Sätze und Verfahren dargelegt. Inhaltlich fallen darunter der Begriff der Differenzierbarkeit, die Ableitungsregeln, die Regel von L´Hospital und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Abschließend werden die theoretischen Ausführungen in einer Wissensmatrix festgehalten.

Mit **Kapitel 5** erfolgt eine Verschiebung des Fokus von den theoretischen Vorarbeiten hin zur empirischen Studie. Dazu werden zunächst Vorüberlegungen bezüglich des Forschungsparadigmas und zur Auswahl der Erhebungs- (Lautes Denken) als auch Auswertungsmethode (qualitative Inhaltsanalyse) angestellt. Daraufhin werden qualitative Gütekriterien für die Sicherstellung der Qualität der Arbeit diskutiert. Anschließend wird das Studiendesign dargestellt. Dabei wird auf den Kontext der Studie, die Beschreibung der Studienteilenehmenden und zuletzt auf das Herstellen einer authentischen Lernsituation eingegangen. Als Nächstes werden die drei Aufgaben, zu denen die Bearbeitungsprozesse der Studierenden untersucht werden, einer stoffdidaktischen Analyse unterzogen. Dafür werden einige Schritte durchgeführt. Als Basis wird eine ausführliche Musterlösung erstellt, daraufhin das benötigte Wissen in einer Wissensmatrix veranschaulicht, mögliche Schwierigkeiten bzw. Hürden skizziert und letztlich mit einer ähnlichen, zuvor behandelten Aufgabe aus dem Tutorium, verglichen. Letztlich werden die Auswertungsmethoden dargelegt. Dabei wird zuerst die Bewertung der Lösungsprodukte und anschließend die Auswertung zu den Bearbeitungsprozessen vorgestellt. Diese basieren auf den drei theoretischen Aspekten des Problemlösens (*Wissen*, *Heurismen*, S*teuerung*). Bezüglich *Steuerung* werden die Schoenfeld Episoden, bezüglich *Wissens* das (Wissens-)Angebot und die (Wissens-)Nutzung in der Wissensmatrix und bezüglich *Heurismen* wird ein bestehender Kategorienkatalog genutzt.

Das Kapitel der Analyse und Ergebnisse (**Kapitel 6**) beginnt mit einer Übersicht zu allen Problembearbeitungsprozessen dieser Arbeit. Im Weiteren werden die Ergebnisse in vier Abschnitte, passend zu den Kategorien des Problemlösens (*Steuerung*, *Wissen*, *Heurismen*) sowie der gemeinsamen Betrachtung, gegliedert.

Kapitel 6.1: Zur Betrachtung der *Steuerung* wird zunächst der Problembearbeitungsprozess von Alex und Thomas detailliert vorgestellt, wobei dies auch gleichzeitig die Nachvollziehbarkeit der zuvor vorgestellten Schoenfeld Episoden ermöglicht. Als Verallgemeinerung werden alle Prozesse bezüglich der Schoenfeld Episoden eingeordnet und die Spezifika zu den Verläufen der jeweiligen Lerngruppen dargestellt. Im weiteren Verlauf wird auf bestimmte Merkmale der Problembearbeitungsprozesse eingegangen. Dies sind zum einen die Episodenwechsel im Prozess und zum anderen der „wild goose chase“. Anschließend wird die Kodierung der Schoenfeld Episoden in Zusammenhang mit Erfolg bzw. Misserfolg gesetzt.

Kapitel 6.2: Die Betrachtung des *Wissens* beginnt mit der Darstellung des Wissensangebotes der Veranstaltung zu den einzelnen Aufgaben. Im Folgenden wird intensiver die Wissensnutzung der Studierenden betrachtet. Dabei wird ein Problembearbeitungsprozess genauer betrachtet und in die Wissensmatrix eingeordnet. Anschließend werden alle Prozesse in einem Überblick zusammengefasst. Außerdem wird der *Fokus* bezüglich Wissensart und Wissensfacette der einzelnen Prozesse herausgearbeitet. Des Weiteren erfolgt die Darstellung besonderer Merkmale über verschiedene Prozesse sowie Schwierigkeiten der Studierenden bezüglich der jeweiligen Aufgabe. Nachfolgend werden die Erkenntnisse des Angebots und der Nutzung verglichen. Ferner werden die Erkenntnisse der Wissensnutzung in Zusammenhang mit Erfolg bzw. Misserfolg gesetzt.
Kapitel 6.3: Die Betrachtung der *Heurismen* beginnt mit einem Gesamtüberblick über die Nutzung der verschiedenen Heurismen. Anschließend wird untersucht, inwiefern die Verwendung der Heurismen von der Lerngruppe bzw. von einer Aufgabe abhängig ist. Außerdem wird die Nutzung der Heurismen in Zusammenhang mit Erfolg bzw. Misserfolg gesetzt.
Kapitel 6.4: Abschließend werden die drei Kategorien gemeinsam betrachtet. Dafür werden zunächst Interaktionen zwischen den Kategorien näher beleuchtet. Anschließend werden spezielle Episodenübergängen hinsichtlich des Episodentyps *Exploration* betrachtet und die Gründe für Episodenwechsel herausgearbeitet. Schließlich wird empirisch entschieden, inwiefern die Prozesse in der vorliegenden Arbeit als Problembearbeitungsprozesse eingeordnet werden können.
Im abschließenden Kapitel wird die Arbeit diskutiert und in den wissenschaftlichen Kontext eingeordnet (**Kapitel 7**). Zu Beginn erfolgt eine kurze Zusammenfassung der empirischen Untersuchung. Anschließend werden die Forschungsfragen anhand der Ergebnisse beantwortet, die Ergebnisse mit ähnlichen Studien verglichen und theoretische Implikationen abgeleitet. Darauf aufbauend werden praktische Implikationen aufgezeigt, die sich aus den Ergebnissen für die Praxis ableiten lassen. Die verwendeten Methoden werden kritisch reflektiert, um deren Eignung und mögliche Schwächen zu bewerten. Abschließend bietet ein Ausblick auf zukünftige Forschungsprojekte eine Skizzierung offener Fragen und weiterführender Ansätze.

1 Mathematisches Lernen im (Ingenieur-)Studium: Herausforderungen und Forschungslücken

Ein mathematikhaltiges Studium[2] kann für die Studierenden mit zahlreichen Herausforderungen verbunden sein. Diese spiegeln sich vor allem sowohl in lernorganisatorischen als auch fachlichen Aspekten wider, die in der mathematikdidaktischen Literatur viel diskutiert werden (z. B. Göller, 2020; Gueudet & Pepin, 2018; Moser-Fendel & Wessel, 2019; di Martino & Gregorio, 2019). Ein Gegenstand dieser Diskussion sind mathematische Lernprozesse der Studierenden (z. B. Johns, 2020). Diese stellen den Fokus dieser Arbeit dar. Das Studium eines mathematikhaltigen Studiengangs bietet in der Regel eine große Vielfalt an Lernmöglichkeiten, die Studierenden eine umfassende Auseinandersetzung mit mathematischen Konzepten, Zusammenhängen und Verfahren ermöglicht. Zu den Lernmöglichkeiten gehören klassische Vorlesungen, Übungen, Zentralübungen, Hausaufgaben, Tests, Sprechstunden, Lernzentren, etc. In der Forschung gibt es dazu Überlegungen sowie Unterstützungsmaßnahmen zur Verbesserung der Lehre, die in der Praxis erprobt und umgesetzt werden, um die Lernprozesse der Studierenden zu erleichtern. Darunter zählen Vorbereitungs- und Brückenkurse, die Studierende inhaltlich auf die Hochschule vorbereiten sollen (z. B. Hoppenbrock et al., 2016). Um eine bessere Zielgruppenorientierung zu erreichen, werden Fachvorlesungen entwickelt, die auf bestimmte Studierendengruppen zugeschnitten sind (z. B. Hilgert et al., 2015; Hoffmann, 2022; Kempen, 2019). Auch unabhängig vom Inhalt werden Veränderungen an der Struktur der Vorlesung vorgenommen, z. B. durch den Ansatz *flipped classroom* (z. B. Lesseig & Krouss, 2017). Damit sollen Studierende zum aktiveren und selbstständigen Lernen angeregt werden. Darüber hinaus wird zusätzliches Material zum Lernen und Vertiefen der Inhalte angeboten (Biehler et al., 2017). Es gibt weiterhin Bemühungen, spezifische Strategien für das Lösen von Hausaufgaben in den Übungen zu besprechen (Stenzel, 2023b). Des Weiteren soll das Erstellen ausführlicher Musterlösungen Studierenden dabei helfen, besser mathematische Gedankengänge zu verstehen und nachzuvollziehen (Ableitinger & Herrmann, 2011). Außerdem werden während des Semesters *learning support centres* (Schürmann et al., 2021) geöffnet, um Studierende inhaltlich und lernorganisatorisch zu unterstützen.

Es gibt demnach erhebliche Bemühungen, die Lehre und das Lernen in der Mathematik zu verbessern, doch bislang ist nur wenig darüber bekannt, wie die Lernprozesse der Studierenden im Detail ablaufen. Einen Einblick liefern Studien

---

2 Zu den mathematikintensiven Studiengängen zählen solche, in denen ein erheblicher Anteil an Mathematik gelehrt und angewandt wird. Beispiele hierfür sind Mathematik als Fachstudium, Mathematik für das Lehramt, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Informatik und ähnliche Studienrichtungen.

aus dem selbstregulierenten (Mathematik-)Lernen, die häufig Strategien anhand von Fragebögen abfragen (z. B. Johns, 2020; Laging & Voßkamp, 2017; Liebendörfer et al., 2021; Rach & Heinze, 2013). Diese Strategien werden oftmals in den Zusammenhang mit Erfolg (z. B. Bestehen der abschließenden Klausur) gesetzt. Es zeigt sich bei den Forschungsergebnissen zwar eine Tendenz, allerdings sind die Ergebnisse nicht immer einheitlich. Des Weiteren geben Interviews (Göller, 2020) und Selbstberichte (Kolbe & Wessel, 2022; Liebendörfer et al., 2023) weitere Einblicke in studentische Lernprozesse. Trotz wertvoller Erkenntnisse dieser Studien wird deutlich, dass sie nicht immer den realen Prozess des mathematischen Arbeitens vollständig abbilden. Die Lernprozesse von Studierenden sind insgesamt noch wenig erforscht. Untersuchungen zu diesem Themengebiet konzentrieren sich in der Regel auf mathematische Lernprozesse von Fachstudierenden bzw. Studierenden des Gymnasiallehramts (z. B. zu Beweisprozessen Kirsten, 2020; zu Problemlöseprozessen Stenzel, 2023a), während andere Fachrichtungen weitgehend unbeachtet bleiben. Insbesondere die Studiengänge der Ingenieurwissenschaften sind in dieser Hinsicht unterrepräsentiert, obwohl Mathematik eine zentrale Rolle im Ingenieurstudium spielt (Hochmuth & Schreiber, 2016). Diese Studiengänge zeichnen sich zudem oft durch besonders große Studienkohorten aus (Kortemeyer & Frühbis-Krüger, 2021), was ihre Notwendigkeit für die Forschung zusätzlich unterstreicht. Insgesamt sind mathematische Lernprozesse von Studierenden, insbesondere im ingenieurwissenschaftlichen Studium, eine Forschungslücke.
Diese Forschungslücke ist besonders relevant, da in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen die Studienabbruchquote außergewöhnlich hoch ist. 35 % der Studierenden brechen ihr universitäres Bachelorstudium ab (Heublein et al., 2022). Dieser Prozentsatz blieb in den Untersuchungen der letzten Jahre unverändert (siehe in Studien aus vorherigen Jahren: Heublein et al., 2018; Neugebauer et al., 2019). Dabei „besteht generell Konsens darüber, dass hohe Abbruchquoten im Ingenieursstudium nicht zuletzt auf Schwierigkeiten der Studierenden mit der Mathematik zurückzuführen sind“ (Hochmuth & Schreiber, 2016, S. 549f.). Mathematik gehört in vielen Veranstaltungen des Ingenieurstudiums zu den wesentlichen Werkzeugen, stellt aber gleichzeitig die größte Hürde dar. Als Konsequenz müsse sowohl das Lehren als auch Lernen von Mathematik im Ingenieurstudium verbessert werden (Hochmuth & Schreiber, 2016).
Die Notwendigkeit, sich speziell der Mathematik im Ingenieurstudium zu widmen, basiert allerdings nicht nur auf hohen Abbruchquoten im Studium, sondern auch auf dem Ingenieurmangel, der seit Jahren beklagt wird (z. B. Rauhut, 2024). VDI (*Verein Deutscher Ingenieure*) berichtet, dass im vierten Quartal von 2022 170.000 offene Stellen im Ingenieurbereich zu verzeichnen waren. Währenddessen haben 2022 lediglich 125.600 Studierende ein MINT-

Studium begonnen (Janczura, 2023). Diese Diskrepanz wird durch Auswirkungen der Corona-Pandemie, der Energiewende und Digitalisierung sowie den demografischen Wandel zusätzlich verschärft (z. B. Gast, 2024).
Um dazu beizutragen, mathematisch gut ausgebildete Ingenieur:innen für den Arbeitsmarkt zu gewinnen, ist es wichtig, die mathematischen Hürden im Studium gezielt anzugehen. Ein erster wesentlicher Schritt in dieser Richtung wäre, die Lernprozesse der Studierenden besser zu verstehen und systematisch zu erforschen, um daraus gezielte Unterstützungsmaßnahmen abzuleiten, die langfristig helfen können, diese Hürden zu überwinden.
Im Folgenden wird sich daher mit den Spezifitäten der Mathematik für Ingenieur:innen (Kapitel 1.1) sowie mit weiteren Ansatzpunkten der Mathematik im Studium beschäftigt (Kapitel 1.2). Anschließend werden die Lernprozesse im Sinne einer Fokussetzung für diese Arbeit verdichtet (Kapitel 1.3). Abschließend wird die Zielsetzung dieser Arbeit dargestellt (Kapitel 1.4).

1.1 Spezifitäten der Mathematik für Ingenieur:innen

Im Folgenden wird der Fokus auf die Besonderheiten des hochschulischen Lehrens und Lernens von Mathematik für Ingenieur:innen gelegt.
Die mathematikhaltigen Studienbestandteile sind für angehende Ingenieur:innen ab dem ersten Tag an der Universität mit einer Reihe von Herausforderungen verbunden. Diese betreffen organisatorische, inhaltliche und didaktische Aspekte, die sowohl die Lehrenden als auch die Studierenden maßgeblich beeinflussen.
Für die Lehrenden stellt die große Anzahl der Studierenden in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen eine erhebliche Herausforderung dar. Sie erschwert die Organisation und Durchführung der Veranstaltungen und führt zu einer weiteren Einschränkung der ohnehin begrenzten Möglichkeiten zur individuellen Betreuung. Dies unterstreicht die Notwendigkeit, alternative Wege für eine effektive Unterstützung der Studierenden zu finden, z. B. durch den verstärkten Einsatz von selbstgesteuertem Lernen.
Für die Studierenden ergeben sich hingegen mehrere spezifische Herausforderungen. Zum einen müssen sie damit umgehen, dass verschiedene mathematikhaltige Veranstaltungen miteinander „konkurrieren“ (Cramer et al., 2015). Mathematik wird vom ersten Tag an als Werkzeug in anderen Kernfächern wie Physik, Mechanik oder Elektrotechnik eingesetzt, was dazu führt, dass sie unterschiedliche Mathematikkulturen erleben, die sich bspw. in Notationen oder Konzeptdarstellungen unterscheiden können (Redish, 2005). So kann dasselbe mathematische Konzept in verschiedenen Veranstaltungen unterschiedlich dargestellt werden. Ein weiterer Aspekt, mit dem die Studierenden konfrontiert sind, ist der deduktive Aufbau der Mathematik, während andere Kernfächer häufig direkt mathematische Inhalte verwenden, die in der Mathematikveranstaltung noch nicht eingeführt wurden. Darüber hinaus spielt die

Einstellung der Studierenden zur Mathematik eine Rolle: Da sie sich für ein Ingenieurstudium und nicht für ein Mathematikstudium entschieden haben, ist ihre Motivation für mathematische Inhalte oft geringer. Die Relevanz der Mathematik erkennen viele erst dann, wenn diese in Verbindung mit einem konkreten, bspw. physikalischen, Thema steht (Kortemeyer, 2018, S. 29). Ohne diesen Praxisbezug bleibt die Bedeutung der Mathematik für viele Studierende zunächst abstrakt und schwer greifbar.
Die Herausforderungen verdeutlichen, wie wichtig es für Lehrende ist, Mathematik nicht nur als isoliertes Fach zu betrachten, sondern sie als integralen Bestandteil des ingenieurwissenschaftlichen Studiums zu verstehen und entsprechend zu gestalten. Um dieser Aufgabe gerecht zu werden, bedarf es klarer Zielsetzungen und didaktischer Ansätze. Hier setzt das Framework von der *SEFI* (European Society for Engineering Education) an, das systematisch mathematische Ziele für die Ingenieurstudium auf Grundlage der aktuellen wissenschaftlichen Erkenntnisse definiert (Alpers et al., 2013). Das Framework orientiert sich am Kompetenzmodell von Niss (2002) und bietet eine strukturierte Grundlage für die Mathematiklehre in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen. Es ist nicht auf eine spezifische Ingenieurdisziplin ausgelegt, sondern zielt darauf ab, eine allgemeine Orientierung für alle Beteiligten der ingenieurwissenschaftlichen Mathematiklehre zu schaffen. Das Framework übernimmt die acht Kompetenzen aus dem KOM-Projekt (Niss, 2002; Niss & Højgaard, 2011):

- thinking mathematically,
- posing and solving problems,
- modelling mathematically,
- reasoning mathematically,
- representing mathematical entities,
- handling mathematical symbols and formalism,
- communicating in, with and about mathematics,
- making use of aids and tools

Des Weiteren ordnen Alpers et al. (2013) diese acht Kompetenzen nach ihrer Bedeutung anhand des Studiengangs Maschinenbau auf drei Fortschrittsstufen ein (Abbildung 1). Dabei wird auf die Stufen *Reproduction*, *Connections* und *Reflection* zurückgegriffen. Diese Stufen verdeutlichen, wie die Kompetenzen im Verlauf des Studiums aufgebaut und vertieft werden sollen.

Competency \ Level	Reproduction	Connections	Reflection
Thinking math.	+	+	O
Reasoning math.	+	O	-
Problem solving	+	+	O
Modelling math.	+	+	O
Communication	+	+	O
Representation	+	+	O
Symbols and formalism	+	O	-
Aids and tools	+	+	+

Meaning of signs: +: very important, O: medium important, -: less important

Abbildung 1: Mathematische Kompetenzen und Level des Fortschritts (Alpers et al., 2013, S. 18)

Das SEFI-Framework ist zwar kompetenzbasiert, berücksichtigt jedoch ebenso die Bedeutung des fachspezifischen Wissens. Dazu zählen unter anderem Algebra, Analysis und Calculus, Diskrete Mathematik, Geometrie und Trigonometrie, Lineare Algebra sowie Statistik und Wahrscheinlichkeit. Ein beispielhafter Verlaufsplan hinsichtlich der Inhalte im ersten Semester einer Mathematikveranstaltung für Ingenieur:innen befindet sich in Tabelle 1. Der Fokus des Beispiels ist stark auf Lineare Algebra und Analysis gerichtet.

Die Themengebiete aus dem SEFI-Framework werden auf vier Vertiefungsstufen beschrieben. Bereits auf der Einstiegsstufe 0 tauchen Anforderungen wie das Verständnis grundlegender mathematischer Konzepte auf, etwa „to understand how the derivative of a function at a point is defined“ (Alpers et al., 2013, S. 25). Dies verdeutlicht, dass bereits auf anfänglichem Niveau von den Studierenden mehr als lediglich das Auswendiglernen erwartet wird. Sie sollen zugrunde liegende Konzepte verstehen und anwenden können.

Obwohl die mathematischen Konzepte und deren Hintergründe auch für Ingenieur:innen von großer Bedeutung sind, liegt der Fokus in der Mathematiklehre dennoch häufig auf der Anwendung dieser Konzepte. Das Lehren und Lernen sind dabei überwiegend prozedural ausgerichtet. Dies bedeutet, dass der Schwerpunkt auf der praktischen Durchführung von Rechenverfahren und weniger auf dem tiefgreifenden Verständnis der theoretischen Hintergründe liegt (Alpers, 2014; Alpers, 2016; Bergqvist, 2007; Engelbrecht et al., 2012).

Der Fokus auf prozedurales Wissen[3] zeigt sich bspw. in Prüfungsformaten. In einer Untersuchung von 150 amerikanischen *Calculus 1*-Klausuren stellte sich heraus, dass 85 % der Aufgaben allein durch prozedurales Wissen gelöst werden konnten (Tallman et al., 2016). Auch im deutschen Kontext enthalten Mathematikklausuren in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen je nach Klausur einen hohen Anteil von 50 % bis 88 % an Aufgaben, die rein prozedurales

3 Auf prozedurales (und konzeptuelles Wissen) wird in Kapitel 2.4.2 näher eingegangen.

Wissen erfordern (Altieri, 2016, S. 167). Es ist daher wenig überraschend, dass sich Studierende während ihres Lernprozesses ebenfalls auf prozedurales Wissen konzentrieren. Studien zeigen, dass dies ein starker Prädiktor für den Klausurerfolg ist (z. B. Altieri, 2016, S. 173). Vor allem das gezielte Üben von Verfahren und Aufgaben wird als effektive Lernstrategie im Kontext der ingenieurwissenschaftlichen Mathematik beschrieben (Liebendörfer et al., 2022). Eine weitere Verschiebung zum prozeduralen Wissen zeigt sich in der Darstellung von mathematischen Inhalten zwischen Lehrbüchern, die für Ingenieur:innen (z. B. Papula, 2018) oder für das Fachstudium der Mathematik (z. B. Forster, 2011) konzipiert sind. Während Lehrbücher für das Fachstudium typischerweise eine mathematische Strenge aufweisen, indem sie Inhalte nach dem Schema *Definition-Satz-Beweis* präsentieren, verzichten anwendungsorientierte Lehrbücher hin und wieder auf ausführliche Beweise. Stattdessen wird der Schwerpunkt auf die Anwendung von Konzepten und Verfahren gelegt. Auch die formale Darstellung der Inhalte wird in diesen Werken oft zugunsten einer zugänglicheren, weniger abstrakten Herangehensweise reduziert.

Thema	**Woche**	**Thematische Schwerpunkte**
Vektorrechnung in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$	1	Polarkoordinaten, Vektoren, Dreiecksungleichung
	2	Parameterform, Hessesche Normalform, Determinante
	3	Vektorprodukt, Spatprodukt, Geraden und Ebenen
Grundlagen der Analysis	4	Reelle Zahlen, Mengen, Potenz, Wurzel, Betrag
	5	Binomische Formel/Lehrsatz, Monotonie, Injektivität & Surjektivität
	6	Folgen, Grenzwerte, Konvergenz, Häufungspunkte
	7	Konvergenzkriterien, Reihen, Absolute Konvergenz
	8	Stetigkeit, Zwischenwertsatz, Maximum und Minimum
	9	Häufungspunkt, Polstellen
Elementare Funktionen	9	Polynome, Trigonometrische Funktionen, e & log, Horner-Schema
Differentialrechnung	10	Differenzierbarkeit, Kettenregel, Mittelwertsatz
	11	L´Hospital, Taylorformel, Extremstellen, Kurvendiskussion
Integralrechnung	12	Integralrechnung, Mittelwertsatz, Hauptsatz, Substitution
	13	partielle Integration, uneigentliche Integrale, Rechenregeln

Tabelle 1: Vorläufiger Verlaufsplan einer Mathematikveranstaltung für Ingenieur:innen

1.2 Mathematik im Studium

Die Ausführungen aus Kapitel 1.1 konzentrieren sich auf die Spezifika der Ingenieursmathematik. Wie bereits erwähnt, ist das Lernen (und das Lehren) von Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen im Vergleich zu anderen Bereichen, wie bspw. der Mathematiklehramtsausbildung oder dem Mathematikfachstudium, bislang nur wenig erforscht. Dieses Forschungsdefizit erschwert es, ein umfassendes Verständnis für die spezifischen Herausforderungen in diesem Kontext zu entwickeln. Um jedoch einen breiteren Blick auf das Thema werfen zu können, ist der Einbezug von Erkenntnissen benachbarter Disziplinen oder verwandter Kontexte sinnvoll. Im Folgenden werden daher empirisch fundierte Fakten und Forschungsergebnisse zu Aspekten des Lernens und der Lehre der hochschulischen Mathematik aus benachbarten bzw. eng verwandten Kontexten (vor allem des Fach- bzw. gymnasialen Lehramtsstudiums) präsentiert. Diese können möglicherweise auf die mathematische Lehre und das mathematische Lernen in Ingenieurstudiengängen übertragen werden – oder eben auch nicht, was eine kritische Reflexion erfordert (Kapitel 1.2.7). Die folgenden Ausführungen betreffen Ziele (Kapitel 1.2.1), fachlicher Inhalt (Kapitel 1.2.2), Spezifika des mathematischen Lehrens (Kapitel 1.2.3), eigenverantwortliches Lernen (Kapitel 1.2.4) sowie Spezifika des mathematischen Lernens (1.2.5) und erfolgreiches Lernen (Kapitel 1.2.6).

1.2.1 Ziel des Fachs Mathematik

Das (übergreifende) Ziel des Fachs Mathematik in der Hochschule besteht darin, Studierende in die wissenschaftlichen Arbeitsweisen der Mathematik einzuführen (Rach et al., 2014; Tall, 1992). Im Mittelpunkt stehen die formale Begriffsbildung und das deduktive Beweisen, die für ein tieferes Verständnis mathematischer Zusammenhänge notwendig sind. Im gleichen Zug wird das Konzept des „advanced mathematical thinking" genutzt, welches Studierende im Laufe des Studiums entwickeln sollen (Engelbrecht, 2010). Damit ist der Prozess gemeint, formale, abstrakte und logische Denkweisen zu erlangen, die in der Hochschulmathematik üblich sind (Maron, 2016).

Im Vergleich zur Schulmathematik zeichnet sich die Hochschulmathematik durch eine stärkere Abstraktion und Formalisierung aus. Mathematische Aussagen werden präzise und eindeutig in einer stark formalisierten Sprache dargestellt (Engelbrecht, 2010). Besonders im ersten Studienjahr müssen Studierende lernen, mit komplexen mathematischen Strukturen umzugehen. Beweise spielen dabei eine zentrale Rolle: Sie sichern die Gültigkeit mathematischer Aussagen (Heintz, 2000) und erfordern von den Studierenden ein tiefes Verständnis der Begriffe, Zusammenhänge und logische-deduktive Argumentationsweisen. Die formale Sprache der Mathematik verlangt ein Umdenken, da sie neue Strukturen und Konventionen mit sich bringt (Clark & Lovric, 2009). Mathematisches Wissen

verbindet zudem konzeptuelle Aspekte über Objekte und prozedurales Wissen über Verfahren (Sfard, 1991). Diese enge Verknüpfung verlangt flexibles Denken, was im Gegensatz zur Schulmathematik oft nicht im Vordergrund steht.
Allerdings existieren unterschiedliche Studiengänge, in denen unterschiedliche mathematische Veranstaltungen durchgeführt werden. Dies hat dementsprechend Auswirkungen auf die Ziele der mathematischen Lehre, da unterschiedliche Professionen nach Abschluss des Studiums angestrebt werden (Maron, 2016). So werden bspw. in einem Lehramtstudium nicht nur fachliche Inhalte, sondern ebenfalls fachdidaktische Inhalte präsentiert, die für den Beruf als Lehrer:in zugeschnitten werden.

1.2.2 Fachlicher Inhalt der hochschulischen Mathematik

Es gibt viele verschiedene Studiengänge, in denen Mathematik gelehrt wird, wobei sich die Zielsetzungen und somit ebenfalls die Inhalte je nach Fachrichtung unterscheiden können. Aus den verschiedenen Studienprogrammen lässt sich daher ein gemeinsamer Überblick nur schwer ableiten, da die Inhalte und Strukturen stark variieren können. Es zeigen sich jedoch nicht nur Unterschiede zwischen verschiedenen Studiengängen, sondern auch innerhalb desselben Studienfachs. So kann das gleiche Studium an unterschiedlichen Universitäten unterschiedlich aufgebaut sein (Gildehaus et al., 2021). Noch komplexer wird der Vergleich, wenn verschiedene Länder und deren spezifische Studienstrukturen einbezogen werden.
In der internationalen Literatur werden häufig eine Reihe von grundlegenden mathematischen Inhalten genannt, die in vielen Studiengängen vermittelt werden. Zu den typischen Fächern gehören *Linear Algebra*, P*recalculus*, E*lementary Statistics* und C*alculus* (z. B. Brunetto et al., 2019; Jaworsky et al., 2009; Lahme & Shott, 2021; Pyke, 2012). Diese Bereiche bilden die Grundlage, auf der weiterführende mathematische Konzepte im Studium aufgebaut werden.
In Deutschland kann für ein konkretes Studienmodell der Studiengang „Lehramt an Gymnasien“ herangezogen werden. In diesem Studiengang werden zahlreiche Module aus dem Fachstudium Mathematik und dem gymnasialen Lehramtsstudium gemeinsam unterrichtet. Zu Beginn des Studiums, ähnlich wie zu der internationalen Literatur, sind in fast allen Universitäten die Fächer *Analysis* und *Lineare Algebra* zentral (Gildehaus et al., 2021; Göller, 2020, S. 79), da sie fundamentale mathematische Konzepte vermitteln, die für weiterführende Themen erforderlich sind.
Eine weitere Möglichkeit, sich dem fachlichen Inhalt mathematikhaltiger Studiengänge anzunähern, bieten die Projekte *cosh* (Dürrschnabel & Wurth, 2015) und *MaLeMint* (Deeken et al., 2020; Neumann et al., 2017; Neumann et al., 2018). Beide Projekte untersuchen Mindestvoraussetzungen, die für ein erfolgreiches Studium im MINT-Bereich (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik) erforderlich sind. Im *cosh*-Projekt wurden

Mathematikdidaktiker und Lehrer:innen aus Baden-Württemberg eingeladen, um die Mindestanforderungen für ein MINT-Studium zu diskutieren. Im *MaLeMint*-Projekt wurden Hochschuldozierende deutschlandweit befragt, welche mathematischen Lernvoraussetzungen Studierende für einen erfolgreichen Start an der Universität mitbringen sollten. In beiden Projekten wird die Rolle von Inhalten aus den Fächern *Analysis*, *Lineare Algebra* sowie *Stochastik* deutlich. Diese drei Bereiche gelten in beiden Projekten als grundlegende Inhalte, die für ein Studium im MINT-Bereich notwendig sind. Darüber hinaus werden weitere Inhalte aus den Bereichen *Elementare Algebra* und *Elementare Geometrie* aufgeführt.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass mathematikhaltige Studiengänge in der Regel auf grundlegenden Inhalten wie *Analysis* (*calculus*), *Linearer Algebra* und *Stochastik* aufbauen.

1.2.3 Spezifika der mathematischen Lehre

Die Struktur der Mathematiklehre an deutschen Universitäten folgt in der Regel einem traditionellen Modell, das sich aus den Komponenten Vorlesung, Übungsblätter, Übungsgruppen und Klausuren zusammensetzt (Liebendörfer, 2018, S. 20). Vorlesungen, Übungsblätter und Übungsgruppen finden in der Regel in einem wöchentlichen Rhythmus im Semester statt, während die Klausur in der vorlesungsfreien Zeit geschrieben wird. Im Gegensatz zur Schule fordert diese Struktur von den Studierenden ein hohes Maß an Selbststudium.

Vorlesungen bilden eine zentrale Lehrform an Universitäten (Körner, 2005). Die Dozierenden präsentieren den Stoff meist in Form eines abgeschlossenen Formalismus mittels der Definition-Satz-Beweis-Struktur (Engelbrecht, 2010). Dabei werden allerdings oftmals die dahinterliegenden Denkprozesse ausgespart, die zu diesen Kernelementen geführt haben (Rach et al., 2016). Die Rolle der Studierenden beschränkt sich dabei größtenteils auf das Zuhören oder Mitschreiben (Wlassak & Schöneburg-Lehnert, 2022). Um ein tieferes Verständnis des Stoffes zu erlangen, ist eine intensive Nachbereitung erforderlich (Weber, 2012), da neue Inhalte auf früheren Vorlesungen aufbauen und selten wiederholt werden (Körner, 2005). Obwohl das klassische Vorlesungsformat häufig kritisch diskutiert wird (Pritchard, 2015; Weber, 2004) und alternative Lehrformen wie z. B. „flipped classroom“ erprobt werden (z. B. Lo et al., 2017; Feudel & Fehlinger, 2023), bleibt die Vorlesung sowohl national als auch international die vorherrschende Form. Um Studierende zu entlasten und ihre Aufmerksamkeit gezielt zu lenken, kann bspw. die Methode des „guided note-taking“ eingesetzt werden (Feudel & Panse, 2022). Dabei erhalten Studierende vor der Vorlesung ein vorbereitetes Skript, das an bestimmten Stellen Leerstellen aufweist. Diese gezielten Lücken sollen die Aufmerksamkeit der Studierenden steuern sowie den Schreibaufwand reduzieren, um mehr Kapazitäten für das Verstehen und Mitdenken zu haben.

Ein weiterer zentraler Bestandteil der Mathematiklehre sind die *Übungsaufgaben* bzw. *Hausaufgaben*. Diese Aufgaben bestehen aus komplexen Problemstellungen und Beweisen sowie dem Einüben von Kalkülen. In der Regel werden die Aufgaben so konzipiert, dass sie nicht auf den ersten Blick gelöst werden können und einen erheblichen Anteil an Zeit in Anspruch nehmen (Liebendörfer, 2018, S. 22). Häufig ist das erfolgreiche Bearbeiten eines gewissen Prozentsatzes dieser Übungsaufgaben eine Voraussetzung für die Teilnahme an der Klausur bzw. das Bestehen des Moduls. Übungsaufgaben übernehmen dabei eine wichtige Funktion beim Erwerb mathematischer Begriffe, Verfahren und Arbeitsweisen (Weber & Lindmeier, 2020), da sie die in der Vorlesung vermittelten Inhalte und Methoden vertiefen und praktisch anwenden lassen. Die Bearbeitung dieser Aufgaben verlangt im Gegensatz zur Vorlesung jedoch einen hohen Grad an eigenständigem Lernen. Es zeigt sich jedoch, dass nur etwa ein Sechstel der Studierenden die Übungsaufgaben selbst lösen bzw. in der Lage sind, diese selbst zu lösen (Liebendörfer & Göller, 2016; Rach & Heinze, 2013).
Die Art der Aufgaben spielt hierbei eine zentrale Rolle, da verschiedene Aufgabenarten unterschiedliche Ansprüche an das mathematische Verständnis und die Arbeitsweise der Studierenden stellen. So bestehen die Übungsaufgaben aus drei verschiedenen deutschen Mathematikveranstaltungen für den 1-Fach Bachelor bzw. Lehramt für das Gymnasium zu 51 % aus Rechenaufgaben (Weber & Lindmeier, 2020). Weitere 47 % bestehen aus Beweisaufgaben durch Beweise mittels Definitionen und/oder Sätzen. Ähnliche Ergebnis zeigen sich bei der Analyse von Übungsaufgaben an vier verschiedenen deutschen Universitäten, wo ca. 45 % der Übungsaufgaben prozedurales und ca. 55 % konzeptuelles Wissen erfordern (Wlassak & Schöneburg-Lehnert, 2022). Dabei bestehen allerdings zwischen den Universitäten teilweise große Unterschiede. In der wenigen internationalen Literatur können ebenfalls ähnliche Ergebnisse gefunden werden. Darlington (2014) unterscheidet in drei Aufgabenarten. Gruppe A umfasst Routineprozesse, Gruppe B die Anwendung mathematischen Wissens in unbekannten Kontexten und Gruppe C erfordert konzeptuelles Wissen für komplexe Argumentationen. In Darlingtons Studie zu Hochschulaufgaben fallen auf Gruppe A 31,6 %, auf Gruppe B 14,4 % und auf Gruppe C 54,1 % der Aufgaben.
Die *Übungsgruppen* bzw. *Tutorien* zu der Veranstaltung finden meist in Kleingruppen von bis zu 30 Studierenden statt. Sie dienen der weiteren Vertiefung der Vorlesungsinhalte und zur Besprechung von Übungsaufgaben. Die Gestaltung der Übungsgruppen variiert allerdings zwischen Veranstaltungen, wobei auch innerhalb einer Veranstaltung ebenfalls qualitative Unterschiede zwischen den Übungsgruppen beobachtet werden können (Püschl, 2019, S. 9ff.). Diese Variabilität ergibt sich aus der Tatsache, dass die Gestaltung der Übungsgruppe der jeweiligen Lehrperson überlassen wird, und aufgrund oftmals hoher Anzahl von Übungsgruppen werden verschiedene Lehrpersonen (darunter auch

studentische Tutoren) eingesetzt, die ihre eigene Übungsgruppe individuell gestalten. Traditionell werden Übungsgruppen oft mit sog. klassischen „Vorrechenübungen" assoziiert (Haak, 2016), bei denen entweder die Lehrperson oder einzelne Studierende Lösungen vorrechnen. In den letzten Jahren sind jedoch neue Ansätze entstanden, um die Studierenden stärker in den Mittelpunkt zu stellen und ihre aktive Teilnahme zu fördern (Püschl, 2019, S. 18ff.). Ein solcher Ansatz wird von Stenzel (2023b) verfolgt, der sich in Übungen darauf konzentriert, bestimmte Problemlösestrategien zu vermitteln, um Studierende bei der weiteren Bearbeitung von Hausaufgaben zu unterstützen. Ein weiterer innovativer Ansatz ist die Vorbereitung von Musterlösungen für Studierende (Ableitinger & Hermann, 2011; Ableitinger, 2012). Diese Musterlösungen sollen Studierenden den Lösungsprozess sichtbar machen, um die Fähigkeit zur eigenständigen Durchführung solcher Prozesse zu fördern.
Am Ende des Semesters steht in der Regel eine *Klausur* an, die in den meisten Fällen über den erfolgreichen Modulabschluss und die abschließende Note entscheidet. Aus diesem Grund haben Klausuren einen erheblichen Einfluss auf die Art und Weise, wie Studierende lernen und sich auf Prüfungen vorbereiten (Bergqvist, 2007; Kane et al., 1999). Obwohl das Ziel der hochschulischen Mathematiklehre die Einführung in die wissenschaftliche Disziplin der beweisenden Mathematik ist (Tall, 1992; Weber & Lindmeier, 2020), spiegelt sich dieses Ziel in den Klausuren oft nicht wider. In verschiedenen nationalen und internationalen Studien wurden Klausuraufgaben in der hochschulischen Mathematikausbildung untersucht. Die Ergebnisse zeigen, dass der Schwerpunkt meist auf dem prozeduralen Wissen liegt (z. B. Bergqvist, 2007; Kolbe & Liebendörfer, 2024). Eine Ausnahme zeigt die Studie von Darlington (2014), in der 58 % der untersuchten Aufgaben an der Universität Oxford in Gruppe C (erfordert konzeptuelles Wissen für komplexe Argumentation) zugeordnet wurden. Allerdings war auch dort für das Bestehen der Klausuren die Anwendung von Prozeduren ausreichend. Insbesondere im Kontext ingenieurwissenschaftlicher Mathematikveranstaltungen verschiebt sich der Fokus in Klausuren noch weiter in Richtung des prozeduralen Wissens (z. B. Tallman et al., 2016).

1.2.4 Eigenverantwortliches Lernen

Im Kontext des Übergangs von Schule zur Hochschule wird in der mathematikdidaktischen Literatur häufig der „didaktische Vertrag" (Brousseau, 1984; Gronbaek et al., 2009; Gueudet & Pepin, 2018) thematisiert, dessen Veränderungen für Studierende einen erheblichen Einfluss haben können. Beim Übergang von Schule zur Hochschule verändert sich dieser Vertrag für Studierende erheblich, oft ohne dass ihnen diese neuen impliziten Regeln des Lehrens und Lernens bewusst sind. Der schulische Mathematikunterricht zielt stark auf strukturiertes Üben und Auswendiglernen kleinerer und kontrollierter

Einheiten ab. Dieser Ansatz vermittelt den Schüler:innen, dass die bloße Beteiligung am Unterricht sowie das Befolgen klarer Anweisungen für den Lernerfolg ausreichen (Hourigan & O´Donoghue, 2007; Pritchard, 2015). Eigenständiges bzw. eigenverantwortliches Lernen ist dabei meist weniger gefordert.

Im Mathematikfachstudium wird bspw. erwartet, dass Studierende eigenverantwortlich für ihren Lernerfolg sorgen und darüber hinaus eigenständig Entscheidungen über ihren Lernprozess treffen (Göller, 2020). Sie müssen dabei z. B. ihren Lernstand selbst evaluieren und die passenden Lernhandlungen wählen, da die Vorlesungen primär als Impulse und nicht als vollständige Erklärungen dienen (Liebendörfer, 2018, S. 21f.). Die Studierenden erleben aus diesem Grund Konflikte, weil sie von der Schule gewohnt sind, dass alle notwendigen Lernschritte klar vorgegeben sind und für auftretende Schwierigkeiten direkt Hilfestellungen zur Verfügung stehen (Gueudet, 2008). Im Studium hingegen wird weniger kleinschrittig vorgegangen. Dabei wird von den Studierenden erwartet, dass sie mit komplexen und weniger vorstrukturiertere Problemstellungen eigenständig umgehen können.

Das Missverständnis, die Lehre sei rein vermittelnd, entsteht häufig dadurch, dass für viele Studierende die Vorlesungen und Übungen die einzigen sichtbaren Orte des Lernens darstellen (Pritchard, 2015). Dabei bleibt der Wunsch, dass die Vorlesungen zum einen verständlich sind und zum anderen einen sofortigen Lernerfolg ermöglichen (Kalesse, 1998), was jedoch nicht die zentrale Zielsetzung der universitären Mathematiklehre darstellt. Diese Diskrepanz zeigt sich außerdem in Frustrationen, wenn vorausgesetztes Wissen fehlt oder Dozierende sich aus Sicht der Studierenden nicht ausreichend in deren Lernschwierigkeiten einfühlen können (de Guzman et al., 1998).

Klagen über fehlende Unterstützung weisen zudem darauf hin, dass es unterschiedliche Auffassungen über die Verantwortung für den Studienerfolg gibt: Während Studierende häufig mehr direkte Unterstützung erwarten, wird an der Hochschule die Eigenverantwortung betont. Diese Herausforderungen machen sich besonders in den ersten Wochen des Studiums bemerkbar (Pritchard, 2015). Diese Phase ist entscheidend dafür, dass Studierende ihre Rolle im neuen didaktischen Vertrag erkennen und die notwendige Selbstständigkeit entwickeln, um die Anforderungen des Mathematikstudiums zu meistern (di Martino & Gregorio, 2019).

Zusammengefasst erfordert der Übergang in das mathematikhaltige Studium eine deutliche Anpassung an einen neuen didaktischen Vertrag, bei dem Eigenverantwortung eine wichtige Rolle einnimmt.

1.2.5 Spezifika des mathematischen Lernens

In der Hochschule werden Lernprozesse oft anhand von Lernstrategien überprüft, um Erkenntnisse über das Lernverhalten der Studierenden zu gewinnen. In der

Vergangenheit wurden oftmals allgemeine Fragebögen (z. B. Pintrich et al., 1991; Wild & Schiefele, 1994) zu Lernstrategien eingesetzt, um das Lernen sowie die Nutzung von Lernstrategien der Studierenden zu erfassen. Solche Fragebögen bieten wertvolle Einblicke, bleiben jedoch allgemein und berücksichtigen häufig nicht die Besonderheiten fachbezogener Lerninhalte. Gerade die Hochschulmathematik stellt einen spezifischen Lerngegenstand dar, dessen Anforderungen und kognitiven Prozesse sich von anderen Disziplinen unterscheiden (Liebendörfer, 2018, Kapitel 2; Rach, 2014, Kapitel 3). In jüngerer Zeit wurden aus diesem Grund fachspezifische Lernstrategien konzeptualisiert, die für mathematisches Lernen in der Hochschule angepasst sind (Liebendörfer et al., 2021). Diese basieren auf der psychologischen Unterscheidung in ressourcenbezogene, metakognitive und kognitive Lernstrategien (Wild & Schiefele, 1994).

Ressourcenbezogene Lernstrategien

Ressourcenbezogene Strategien zielen darauf ab, sowohl externe als auch interne Ressourcen optimal zu nutzen.

Externe Ressourcen umfassen Materialien wie Vorlesungsmitschriften, Übungsaufgaben, ergänzende Literatur und elektronische Ressourcen sowie den Austausch mit anderen Personen. So ist unter anderem das gründliche Nacharbeiten von Vorlesungsmitschriften wichtig (Alcock, 2017, S. 135), um das hohe Tempo in der Vorlesung auszugleichen und komplexe Inhalte nachzuvollziehen (Haite et al., 2008, S. 150f.). Übungsaufgaben gelten als wesentliches Mittel, um das Gelernte anzuwenden und zu vertiefen (Alcock, 2017, S. 190ff.; Beutelspacher, 2009). Auch zusätzliche Literatur kann wertvolle Einblicke bieten und das Verständnis erleichtern (Haite et al., 2008, S. 151f.). In jüngerer Zeit wird außerdem vermehrt die Nutzung von elektronischen Informationsquellen aufgeführt (Kempen & Liebendörfer, 2021; Liebendörfer et al., 2023). Darüber hinaus wird der Austausch mit Kommiliton:innen, etwa durch gemeinsames Bearbeiten der Aufgaben oder Diskussionen über Vorlesungsinhalte, als hilfreich angesehen (Alcock, 2017, S. 199ff.; Göller, 2020, S. 198ff.).

Interne Ressourcen betreffen Aspekte wie Zeitmanagement, Anstrengungsbereitschaft, Konzentration und Motivation. Das Verstehen komplexer mathematische Inhalte nimmt nicht nur einige Zeit in Anspruch (Weber, 2012), sondern erfordert zusätzlich eine Menge an Konzentration (Göller, 2020, S. 96). Ein gutes Zeitmanagement ermöglicht es den Studierenden, gewisse Zeiträume gezielt für das Verstehen von Konzepten sowie Bearbeiten von Übungsaufgaben zu nutzen, wodurch die Lernzeit effektiver gestaltet werden kann. Auch Durchhaltevermögen und Motivation sind für das langfristige Lernen essenziell (Neumann et al., 2017), insbesondere in Phasen, in denen das Lernen nur langsam Fortschritte zeigt oder bereits viel Zeit investiert wurde. Schließlich ist der konstruktive Umgang mit negativen Emotionen, vor allem mit Frustration, ein entscheidender Faktor, um auch in schwierigen Momenten die Motivation und den Lernfortschritt aufrechtzuerhalten (Göller & Gildehaus, 2021).

Kognitive Lernstrategien

Kognitive Strategien unterstützen die aktive Auseinandersetzung mit Inhalten und umfassen Wiederholungs-, Organisations- und Elaborationsstrategien. Organisations- und Elaborationsstrategien werden oftmals als Tiefenstrategien und Wiederholungsstrategien als Oberflächenstrategien verstanden (z. B. Coertjens et al., 2016; Lahdenperä et al., 2019).
Wiederholungsstrategien beziehen sich auf das wiederholte Lesen, Schreiben oder laute Wiederholen von Inhalten. Es geht also darum, ob Studierende z. B. immer wieder ihre Vorlesungsnotizen durchlesen oder wichtige Inhalte auswendig lernen, um sich an Konzepte, Zusammenhänge oder Verfahren zu erinnern. Auswendiglernen kann dabei als erster Schritt in Richtung Verständnis verstanden werden (Alcock, 2017, S. 135ff.). Z. B. kann das mehrfache Lesen von Beweisen weitere Feinheiten aufdecken und einen besseren Überblick verschaffen (Houston, 2012). Allerdings kann stures Auswendiglernen auch als Zeitverschwendung angesehen werden (Alcock, 2017, S. 156).
Eine weitere Wiederholungsstrategie ist das Üben. Darunter fällt das wiederholte Ausführen von Regeln bzw. Verfahren, die anhand verschiedener Beispiele eingeübt werden können (Göller, 2020, S. 98; Liebendörfer et al., 2021). Durch die Entwicklung von Routinen werden gewisse Problemaufgaben zu Routineaufgaben, da spezifische Lösungsverfahren bereits bekannt und eingeübt worden sind. Letztlich werden durch Routinen kognitive Ressourcen frei, die für komplexere Inhalte genutzt werden können.
Elaborationsstrategien fokussieren darauf, Inhalte zu verknüpfen, indem Studierende neue Informationen in die bereits bestehende Wissensstruktur integrieren bzw. verbinden. Hinsichtlich mathematischer Definitionen kann es hilfreich sein, die Definitionen in eigene Worte zu formulieren oder Beispiele zu konstruieren. Hinsichtlich mathematischer Sätze kann es hilfreich sein, die Negation oder Kontraposition zu bilden oder den dazugehörigen Beweis nachzuvollziehen. Dabei kann versucht werden, bspw. die Hauptideen des Beweises zu identifizieren oder den Beweis auf einen anderen Kontext zu übertragen (Vollrath & Roth, 2012 S. 48f.). Weitere Elaborationsstrategien lassen sich in zusätzlicher Literatur finden (z. B. Alcock, 2017, S. 135ff.; Hilgert et al, 2015; Houston, 2012).
Organisationsstrategien helfen dabei, Informationen in eine strukturierte und leichter zu verarbeitende Form zu bringen (Wild & Schiefele, 1994). Dies umfasst unter anderem das Zusammenfassen oder Herausheben wesentlicher Informationen oder Erkenntnisse (Alcock, 2017, S. 181f.; Houston, 2012), die Nutzung von Concept-Maps (Evans & Jeong, 2023; Renkl & Nückles, 2006) zur

Visualisierung von Beziehungen zwischen Begriffen sowie das gezielte Selektieren von spezifischen Inhalten. Das Selektieren relevanter Inhalte führt dazu, dass andere Inhalte bewusst ignoriert werden. Oftmals fokussieren sich Studierende auf Fakten sowie Prozeduren und sparen bspw. Beweise beim Lernen aus (Göller, 2017).

Metakognitive Lernstrategien

Metakognitive Lernstrategien zielen darauf ab, das eigene Lernen bewusst zu steuern und zu regulieren. Im Gegensatz zu kognitiven Strategien richten sie sich nicht direkt auf die Verarbeitung von Inhalten, sondern auf die übergeordnete Kontrolle des gesamten Lernprozesses (Wild & Schiefele, 1994). Die drei Kernbereiche der metakognitiven Strategien sind Planung, Überwachung und Regulation (Wild & Schiefele, 1994). Planung beinhaltet das Festlegen konkreter Lernziele sowie die Auswahl geeigneter Werkzeuge und Methoden, um diese zu erreichen. Während des Lernens dient die Überwachung zur Überprüfung von Fortschritten, Identifikation von Wissenslücken und zum kritischen Hinterfragen des eigenen Verständnisses. Die Regulation umfasst schließlich die Anpassung des Lernverhaltens, etwa durch den Wechsel der Strategie. In der Mathematik gewinnen metakognitive Strategien eine besondere Bedeutung, da das Nachvollziehen und Validieren von Details besonders relevant erscheinen. Insbesondere hinsichtlich der Überwachung ist es beim Lesen von mathematischen Texten wichtig, die Aussagen sowie Argumente permanent kritisch zu hinterfragen (Mason et al., 2008, S. 102ff.). Insgesamt hat sich gezeigt, dass Strategien wie das Selbsterklären, Selbstbefragung und Selbstüberwachung im Kontext der Mathematik sowohl die Lernergebnisse als auch die metakognitiven Fähigkeiten verbessern (Raza et al., 2016).
Abbildung 2 bietet einen theoriebasierten Überblick über Lernstrategien im Mathematikstudium, der auch auf mathematikhaltige Studiengänge übertragbar ist. Eine ähnliche Kategorisierung von Lernstrategien wird durch den *LimSt* (Fragebogen zur Erhebung von Lernstrategien im mathematikhaltigen Studium) vorgenommen (Liebendörfer et al., 2021).
Im Kontext von Strategien für das Mathematikstudium werden häufig auch *Problemlösestrategien*, sog. *Heurismen*, thematisiert. Diese sind jedoch nicht mit den hier vorgestellten Lernstrategien gleichzusetzen, obwohl es zwischen beiden Konzepten kleinere Überschneidungen gibt. Eine detaillierte Einführung in Heurismen erfolgt in Kapitel 2.5, wobei die spezifischen Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Kapitel 2.5.1 näher erläutert werden.

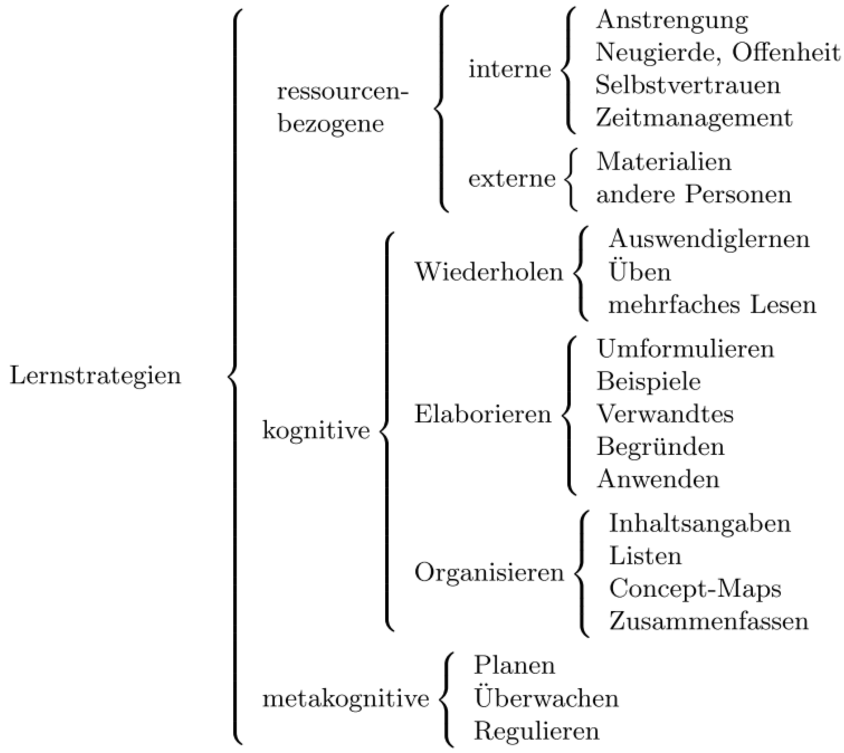


Abbildung 2: Übersicht über theoriebasierte Kategorien zu Lernstrategien für mathematikhaltige Studiengänge (Ausschnitt aus Göller, 2020, S. 114)

1.2.6 Erfolgreiches Lernen

In den letzten Jahren haben sich zahlreiche Studien mit der Identifikation erfolgreicher Lernstrategien für das Mathematiklernen an der Universität beschäftigt. Oftmals wird in diesen Studien der Zusammenhang zwischen Lernstrategien mit Erfolg in der Klausur untersucht. Die resultierenden Ergebnisse sind dabei oft nicht eindeutig.

Obwohl mathematische Lernstrategien aus theoretischer Perspektive einen deutlichen Einfluss auf den Studienerfolg haben sollten, zeigen Studien, dass dieser Einfluss in der Praxis oft gering ausfällt. Teilweise zeigt sich, dass sogar kein Zusammenhang zwischen vielen Lernstrategien und Erfolg besteht (z. B. Johns, 2020). Es gibt jedoch auch positive Befunde. Elaborationsstrategien, insbesondere wenn diese fachspezifisch erhoben werden, erweisen sich als effektive Lernstrategien (z. B. Geisler, 2019, S. 184; Göller, 2020, S. 337; Kolter et al., 2018). Ebenso wird der Zeiteinsatz bzw. die Menge an investiertem Aufwand häufig als positiver Prädiktor für Erfolg identifiziert (Göller, 2020, S. 336; Griese, 2017, S. 187; Liebendörfer et al., 2022). Darüber hinaus spielen die Frustrationstoleranz sowie das Interesse eine bedeutende Rolle für den Erfolg. Studierende, die Rückschläge und längere Phasen ohne Fortschritt aushalten können, profitieren langfristig (Kuklinski et al., 2019; Liebendörfer et al., 2022). Des Weiteren erleichtert das Interesse an Mathematik das Lernen. Hierbei wird allerdings zwischen dem Interesse an Schulmathematik und Hochschulmathematik unterschieden (Ufer et al., 2017). Ein starkes Interesse an der Hochschulmathematik trägt ebenfalls dazu bei, auch bei wachsender Frustration motiviert zu bleiben (Göller & Gildehaus, 2021).

Oberflächenstrategien wie reines Auswendiglernen erweisen sich meist als wenig effektiv (Göller, 2020; Liebendörfer et al., 2022). Dennoch ist der (Miss-)Erfolg solcher Strategien stark kontextabhängig. Es gibt Situationen, in denen auch scheinbar weniger geeignete Strategien hilfreich sein können. Erfolgreiche Studierende zeichnen sich durch ihre Fähigkeit aus, die richtige Strategie im richtigen Moment auszuwählen (Matcha et al., 2019). Des Weiteren neigen erfolgreiche Studierende dazu, Misserfolge auf interne Faktoren zurückzuführen (di Martino & Gregorio, 2019).

Neben den spezifischen Strategien wird die Bedeutung der kontinuierlichen Arbeit während des Semesters betont. Besonders erfolgreich sind Studierende, die Übungsblätter selbstständig und regelmäßig bearbeiten (Rach & Heinze, 2013). Dabei werden ständig und kontinuierlich mathematische Begriffe und Verfahren wiederholt, eingeübt sowie in spezifischen Situationen eingesetzt.

Neben den Lernstrategien zeigt sich das Vorwissen als ein bedeutsamer Faktor für den Studienerfolg. Studien, die diesen Aspekt untersucht haben, weisen konsistent darauf hin, dass schulisches Vorwissen einen zuverlässigen sowie den stärksten Prädiktor für den Erfolg in der Hochschulmathematik darstellt (Hailikari et al., 2008; Kosiol et al., 2019; Kuklinski et al., 2019; Liebendörfer et al., 2022; Rach & Ufer, 2020; de Winter & Dodou, 2011). Grundlegende mathematische Kenntnisse sind demnach eine wichtige Voraussetzung für das Verständnis der Inhalte im universitären Kontext.

1.2.7 Übertragung mathematikdidaktischer Ansätze auf die Ingenieurmathematik

Die vorangegangenen Ausführungen (Kapitel 1.2) beziehen sich allgemein auf mathematikhaltige Studiengänge (vor allem auf Fachmathematik und gymnasiales Lehramtsstudium) und betrachten übergreifende Aspekte der mathematischen Lehre und des Lernens an der Hochschule. Es bleibt jedoch die Frage, inwiefern sich diese ebenfalls auf die Mathematik für Ingenieur:innen übertragen lassen. Dies wird im Folgenden erörtert.

Ein grundlegender Unterschied liegt im Ziel der jeweiligen Lehre zwischen verschiedenen Studiengängen (Maron, 2016). Die Fachmathematik strebt eine Einführung in wissenschaftliches Arbeiten an, bei der die formale Begriffsbildung sowie das deduktive Beweisen eine zentrale Rolle spielen. In der Ingenieurmathematik wird die Mathematik primär als Werkzeug gesehen, welches für andere Disziplinen nutzbar gemacht werden soll. Die ausgearbeiteten Kompetenzen des SEFI-Frameworks (Alpers et al., 2013, S. 18) zeigen bspw., dass *reasoning mathematically* und *symbols and formalism* zwar relevant, jedoch weniger wichtig sind als die anderen sechs aufgelisteten Kompetenzen. Diese Kompetenzen wären gerade dann relevant, um mathematische Inhalte tief zu durchdringen und zu verstehen. Dennoch sollten auch bei Ingenieur:innen mathematische Hintergründe nicht vollkommen vernachlässigt werden (z. B. Alpers et al., 2013, S. 25). Es ist wichtig, dass auch diese Hintergründe verstanden werden, da sie unter anderem die Grundlage für erfolgreichen Einsatz von Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen bilden.

Hinsichtlich der fachlichen Inhalte scheint eine weitgehende Konsistenz über die verschiedenen Studiengänge hinweg zu bestehen. Insbesondere in den grundlegenden Bereichen der Mathematik wird im ersten Semester in der Fach- und gymnasialen Lehramtsmathematik sowie des Ingenieurstudiums ein Fokus auf Lineare Algebra und Analysis gelegt.

Die organisatorischen Aspekte der Lehre lassen sich weitgehend unverändert auf den Ingenieurskontext übertragen (für ein Beispiel zur Organisation einer Mathematikveranstaltung für Ingenieur:innen siehe in Kortemeyer & Frühbis-Krüger, 2021). Wie gewohnt bestehen die Veranstaltungen aus Vorlesungen, Übungsaufgaben, Tutorien und einer Klausur am Ende des Semesters, die im Groben jeweils die gleiche Funktion erfüllen. Eine Besonderheit ergibt sich jedoch in Bezug auf die Hausaufgaben. Im Ingenieurstudium sind Hausaufgaben nicht unbedingt verpflichtend, um eine Studienleistung zu erbringen und sich für die Klausur zu qualifizieren. Es existieren verschiedene Modelle. Z. B. gelten in manchen die Hausaufgaben lediglich als freiwilliges Lernangebot, während andere Modelle die Möglichkeit bieten, durch Hausaufgaben Bonuspunkte[4] für die Klausur zu erwerben.

Darüber hinaus wird auch von Ingenieurstudierenden erwartet, dass sie eigenständig lernen und sich nicht ausschließlich auf die Präsenztermine an der Universität verlassen. Allerdings wird dem Umfang des eigenständigen Lernens weniger Zeit eingeräumt (Liebendörfer et al., 2022), als es bei dem Fach- bzw. gymnasialen Lehramtsstudium der Fall ist (Göller, 2020, S. 4f.). Dies kann sich auf die Gestaltung der Übungsblätter auswirken. Durch den reduzierten Zeitumfang für das eigenständige Lernen haben Ingenieurstudierende weniger Zeit für die Bearbeitung. Die Aufgaben dürften dadurch einfacher und weniger

4 An der Universität Paderborn wird das Modell der Bonuspunkte für die Klausur sammeln seit mehreren Jahren angewendet.

komplex als im Fachstudium sein. Bereits die Klausuraufgaben im Ingenieurstudium sind oft prozeduraler bzw. anwendungsorientierter gestaltet (Altieri, 2016, S. 167). Ein Ansatz, der sich möglicherweise auch in den Übungsaufgaben widerspiegelt.
Diese Unterschiede werfen die Frage auf, welche Lernstrategien von den Studierenden angewandt werden. Im Fachstudium, dessen Ziel stark auf dem deduktiven Beweisen liegt, sind Elaborationsstrategien erforderlich, um die tiefen Zusammenhänge und komplexen Aufgaben zu verstehen und zu lösen. Hingegen können anwendungsorientierte Aufgaben im Ingenieurstudium oft mit Wiederholungsstrategien bearbeitet werden. Es ist daher denkbar, dass Ingenieurstudierende keine große Umstellung im Vergleich zur Schule durchlaufen müssen, da die Strategien des Übens und Auswendiglernen auch im Studium häufig zielführend sind (Liebendörfer et al, 2022).

Aspekt	**Mathematik für Ingenieur:innen**	**Mathematik im Fach- bzw. gymnasialen Lehramtsstudium**
Ziel der Lehre	Mathematik als Werkzeug zur Anwendung in anderen Disziplinen	Einführung in wissenschaftliches Arbeiten mit Fokus auf formale Begriffsbildung und deduktives Beweisen
Fachliche Inhalte (zu Beginn des Studiums)	Lineare Algebra und Analysis	Lineare Algebra und Analysis
Organisatorische Aspekte	Vorlesungen, Übungen, Tutorien und Klausuren	Vorlesungen, Übungen, Tutorien und Klausuren
Hausaufgaben	Hausaufgaben oft freiwillig oder mit Bonuspunkten für Klausur	Hausaufgaben oft verpflichtend, um Studienleistung zu erbringen
Art der Aufgaben	(Klausur-)Aufgaben stark prozedural	(Klausur-)Aufgaben prozedural und konzeptuell gemischt
Eigenständiges Lernen	Mehr als die Hälfte der gesamten Lernzeit (Liebendörfer et al., 2022)	Etwa zwei Drittel der gesamten Lernzeit (Göller, 2020, S. 5)
Lernstrategien	Wiederholungsstrategien oft ausreichend	Elaborationsstrategien sowie Wiederholungsstrategien notwendig
Rolle der Mathematik	Mathematik als „Nebenprodukt“	Bewusste Entscheidung für Mathematik

Tabelle 2: Vergleich zwischen Mathematik für Ingenieur:innen und Mathematik im Fach bzw. gymnasialen Lehramtsstudium

Ein weiterer bedeutender Punkt betrifft die Rolle der Studierenden und ihre Einstellungen zur Mathematik. Im Fach- oder Lehramtsstudium fand eine bewusste Entscheidung für das Fach Mathematik statt, während Ingenieurstudierende ihr Studium aufgrund eines allgemeinen Interesses an ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen gewählt haben. Mathematik stellt hier eher ein „Nebenprodukt“ dar, das notwendig ist, um die ingenieurwissenschaftlichen Ziele zu erreichen. Diese unterschiedliche Ausgangslage kann dazu führen, dass die Motivation zur Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten im Ingenieurstudium geringer ist und stärker pragmatisch geprägt ist. Darüber hinaus kann die Bewertung mathematischer Inhalte je nach Studiengang variieren – ein Unterschied, der möglicherweise auch durch die jeweilige Studienkultur beeinflusst wird.
Tabelle 2 stellt den Vergleich zwischen der Mathematik für Ingenieur:innen und für das Fach- bzw. gymnasiales Lehramtsstudium zusammen. Die Tabelle erhebt dabei keinen Anspruch auf Vollständigkeit und basiert ausschließlich auf den zuvor genannten Aspekten.

1.3 Die Bedeutung von Hausaufgaben im mathematischen Lernprozess

Wie bereits erwähnt, sind mathematische Lernprozesse von Studierenden der Fokus dieser Arbeit. Angesichts der Lernprozesse wird der Bearbeitung der wöchentlichen Hausaufgaben eine besondere Bedeutung beigemessen. Diese sind als Teil der eigenständigen Selbstlernzeit vorgesehen und gelten gleichzeitig als zentraler Aspekt des mathematischen Lernens von Studierenden (z. B. Göller, 2020, S. 4f.; Liebendörfer et al., 2022). Im ingenieurwissenschaftlichen Studium spielt die eigenständige Lernzeit ebenfalls eine zentrale Rolle und ist unerlässlich für den Lernerfolg. Hausaufgaben sind dabei zwar nicht unbedingt verpflichtend, stellen für Studierende aber ebenfalls eine wesentliche Ressource zum Lernen dar (Kolbe & Wessel, 2022). Ausgehend von der bedeutenden Rolle, die Hausaufgaben hinsichtlich des mathematischen Lernens im ingenieurwissenschaftlichen Studium einnehmen, liegt es nahe, diesen Lernprozess genauer zu untersuchen. In der vorliegenden Arbeit wird daher ein Fokus auf die Bearbeitungsprozesse von Hausaufgaben gelegt.

1.3.1 Hausaufgaben als Problem?

Obwohl wöchentliche Hausaufgaben das Ziel haben, das Verständnis und die Anwendung des gelernten Stoffs zu fördern, stellen sie für viele Studierende eine Herausforderung dar. Wie Studien zeigen, kämpfen Studierende häufig mit der Bearbeitung dieser Aufgaben (z. B. Liebendörfer & Göller, 2016). Der damit verbundene Zeitaufwand, eigenständig Lösungen zu finden, führt regelmäßig zu

Schwierigkeiten und Überforderung. Es stellt sich daher die Frage, ob die Bearbeitung der wöchentlichen Hausaufgaben als Problem aufgefasst werden kann. Um dies zu klären, lohnt sich ein Blick auf verschiedene Definitionen des Begriffs Problem.

In der psychologischen Literatur werden Probleme als Situationen beschrieben, in denen jemand etwas möchte, jedoch nicht sofort weiß, welche Handlung er ausführen soll, um sein Ziel zu erreichen. Newell und Simon (1972) formulieren dies wie folgt:

> „A person is confronted with a problem when he wants something and does not know immediately what series of action he can perform to get to it.” (Newell & Simon, 1972, S. 72)

In der Definition von Dörner (1987) wird der strukturelle Aspekt eines Problems hervorgehoben.

> „Ein Problem ist also gekennzeichnet durch drei Komponenten: 1. Unerwünschter Anfangszustand s_α 2. Erwünschter Endzustand s_ω 3. Barriere, die die Transformation von s_α in s_ω im Moment verhindert“. (Dörner, 1987, S. 10)

Nach den beiden Definitionen kann ein Problem allgemein als Situation beschrieben werden, bei der ein Anfangszustand (ungelöste Hausaufgabe) durch Überwindung von Barrieren in einen Zielzustand (gelöste Hausaufgabe) überführt werden soll. Für Hausaufgaben bedeutet dies, dass Studierende von der Aufgabenstellung ausgehend Hindernisse bewältigen müssen, um eine Lösung zu erreichen.

In der Mathematikdidaktik wird das Konzept des Problems spezifischer angewendet. Vollrath (1992) bezieht das Wort Problem auf eine Aufgabe:

> „Im folgenden verstehen wir unter einem *Problem* eine Aufgabe, die dem Bearbeiter beim Lösen eine Barriere entgegenstellt. Ob eine Aufgabe ein Problem darstellt, hängt von den Erfahrungen, Kenntnissen und Fähigkeiten des Problemlösers ab.“ (Vollrath, 1992, S. 127)

Dabei wird außerdem betont, dass es nicht nur auf die Aufgabe selbst, sondern auch auf die Erfahrungen, Kenntnisse und Fähigkeiten der Person ankommt, welche die Aufgabe bearbeitet und somit zusätzlich darüber entscheidet, ob tatsächlich ein Problem vorliegt. Es muss demnach geklärt werden, ob Studierende bei der Bearbeitung von Hausaufgaben auf Hindernisse stoßen.

Aufgrund der personenabhängigen Natur eines Problems ist es nicht möglich, eine generalisierende Aussage darüber zu treffen, ob eine bestimmte Aufgabe immer ein Problem darstellt. Vielmehr hängt dies von den individuellen Erfahrungen, Kenntnissen und Fähigkeiten der Person ab, die die Aufgabe bearbeitet (Vollrath, 1992). Dennoch können aus bisherigen Forschungsergebnissen Hinweise abgeleitet und Vermutungen aufgestellt werden, die darauf hinweisen, dass Studierende bei der Bearbeitung von Hausaufgaben häufig auf Barrieren stoßen. So haben Liebendörfer und Göller (2016) gezeigt, dass Studierende sowohl aus dem Fachstudium als auch aus dem gymnasialen Lehramtsstudium (Physik) oft an ihre fachlichen Grenzen geraten, wenn sie wöchentliche Hausaufgaben bearbeiten. Stenzel (2023a, S. 13f.) geht sogar so weit, zu behaupten, dass ein Großteil der Aufgaben, die Studierende in der Hochschule bearbeiten, für sie Probleme darstellen. Ein wesentlicher Grund dafür ist die hohe Frequenz an Wissenskomponenten, die für das Verständnis und die Bearbeitung erforderlich sind. Dies führt unter anderem auch dazu, dass vermeintliche Routineoperationen nicht in die kognitiven Strukturen der Studierenden internalisiert sind (dies würde insbesondere auf Grenzwertbestimmungen zutreffen). Zusätzlich kann vermutet werden, dass einige Studierende nicht über die notwendigen Strategien verfügen, um bestimmte Aufgabenformate erfolgreich zu lösen (für Beweise siehe z. B. Weber, 2014). Selbst wenn sowohl Wissen als auch Strategien vorhanden sind, garantiert dies nicht zwangsläufig einen erfolgreichen Einsatz. Eine unzureichende Steuerung des eigenen Bearbeitungsprozesses kann dementsprechend dazu führen, dass vorhandene Ressourcen nicht optimal genutzt werden.

Es bleibt die Frage, ob diese Argumente auch auf den ingenieurwissenschaftlichen Kontext übertragen werden können. Im Ingenieurbereich sind die mathematischen (Haus-)Aufgaben häufig stärker verfahrensorientiert und lassen sich durch ihre reine Aufgabenanalyse eher dem prozeduralen Wissen zuordnen. Es stellt sich daher die Frage, ob solche Aufgaben als Problem eingeordnet werden können. Auch hier gilt, dass dies stark personenabhängig ist. Eine verfahrensorientierte Aufgabe kann für Studierende durchaus ein Problem darstellen, insbesondere wenn bestimmte Verfahren noch nicht automatisiert sind (Stenzel, 2023a, S. 13f.). Selbst wenn ein Verfahren oder eine Strategie bekannt ist, bedeutet dies nicht zwangsläufig, dass diese korrekt auf die gegebene Situation angewendet wird. Ein weiterer Punkt ist die Wahrnehmung der Mathematik selbst. Studierende aus beiden Studiengängen würden behaupten, dass die Mathematik, die sie bearbeiten müssen, schwierig ist. Dies zeigt, dass die empfundene Schwierigkeit nicht primär vom Studiengang oder den Aufgabenstellungen abhängt, sondern eher von individuellen Erfahrungen und Fähigkeiten (Vollrath, 1992) sowie dem jeweiligen Kontext, in dem Mathematik angewandt wird.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das Bearbeiten wöchentlicher Hausaufgaben in dieser Arbeit (vorsichtig) als Problem für Studierende aufgefasst werden kann. Die Frage, inwieweit Hausaufgaben tatsächlich als Probleme wahrgenommen werden, wird zudem als Forschungsfrage aufgegriffen und im Kapitel 6.4.3 ausführlich empirisch beantwortet.

1.4 Zielsetzung dieser Arbeit

Die Forschung dieser Arbeit setzt nach Hochmuth und Schreiber (2016) beim Lernen von Mathematik an. Mit der Auffassung, dass die Bearbeitung von mathematischen Hausaufgaben für Studierende Probleme darstellen (Kapitel

1.3.1), erscheint es aufgrund des Problemcharakters sinnvoll, die Theorie des mathematischen Problemlösens für die Betrachtung der Bearbeitungsprozesse mathematischer Hausaufgaben heranzuziehen. Die Theorie des mathematischen Problemlösens bietet dafür eine passende Grundlage, da sie Lernen als Problembearbeitungsprozess betrachtet (Leuders, 2017) und somit direkte Anknüpfpunkte bietet, um die typischen Denkprozesse der Studierenden beim Lösen mathematischer Aufgaben zu untersuchen. Aufgrund der bislang geringen Forschungslage zu authentischen Lernsituationen wird in der vorliegenden Arbeit ein beschreibender Ansatz gewählt. Ziel ist es, die Lernprozesse im Kontext des mathematischen Problemlösens umfassend darzulegen und so ein tieferes Verständnis dieser Prozesse zu ermöglichen. Eine solche empirische Untersuchung ist wichtig, da sie tiefere Einblicke in die Art und Weise geben kann, wie Studierende mit mathematischen Problemen umgehen und mathematisch lernen. Die theoretischen Grundlagen für das mathematische Problemlösen werden in Kapitel 2 dargestellt (Abbildung 3).

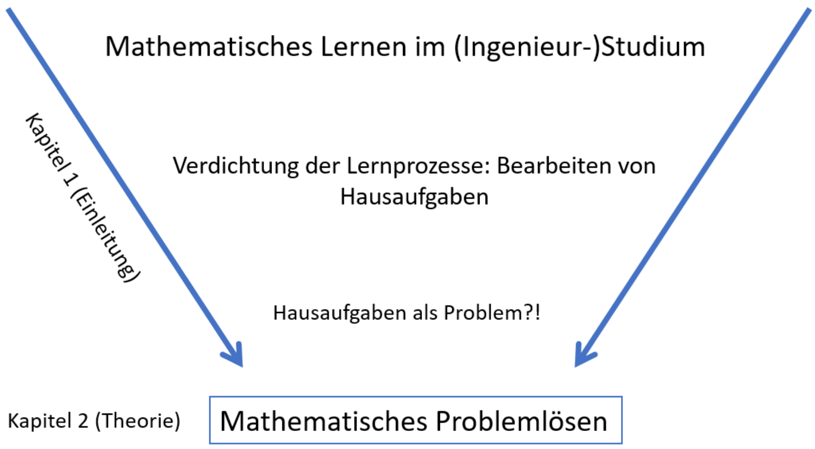


Abbildung 3: Von der Motivation zur Theorie des mathematischen Problemlösens

2 Mathematisches Problemlösen mit Blick auf die Hochschule

Dieses Kapitel behandelt die theoretische Beschreibung des mathematischen Problemlösens. Zunächst folgt eine Auseinandersetzung mit der Relevanz des (mathematischen) Problemlösens für das Ingenieurstudium (Kapitel 2.1). Des Weiteren folgt eine Begriffsbeschreibung (Kapitel 2.2) zum mathematischen Problemlösen. Die anschließenden Ausführungen werden anhand der vier Kategorien des mathematischen Problemlösens nach Schoenfeld (1985) gegliedert: *Steuerung (=Control)* (Kapitel 2.3), *Wissen (=Resources)* (Kapitel 2.4), *Heurismen (=Heuristics)* (Kapitel 2.5) und *Beliefs* (Kapitel 2.6). Letztlich werden vier empirische Studien vorgestellt, die für die vorliegende Arbeit bedeutsam sind (Kapitel 2.7).

2.1 Relevanz des (mathematischen) Problemlösens für das Ingenieurstudium

Mathematisches Problemlösen nimmt nicht nur in der schulischen Ausbildung und im Mathematikstudium eine zentrale Rolle ein, sondern wird auch als wesentlicher Bestandteil des Ingenieurstudiums angesehen (Jonassen et al., 2006). Es wurde festgestellt, dass die Bearbeitung von Lehrbuchaufgaben zu den häufigsten und zeitintensivsten Tätigkeiten im Ingenieurstudium gehört (Taraban et al., 2011). Insbesondere die Bearbeitung von mathematischen Hausaufgaben spiegelt dies wider. Studierende müssen einen erheblichen Zeitaufwand investieren, um sich mit solchen Aufgaben auseinanderzusetzen, die häufig als Probleme aufgefasst werden können (Kapitel 1.3.1). In diesem Kontext findet das mathematische Problemlösen vor allem im Rahmen der wöchentlichen Hausaufgaben statt, die einen wesentlichen Bestandteil des Studiums ausmachen und oft den größten Teil der Lernzeit der Studierenden beanspruchen (Kapitel 1.2.7). Auch die SEFI (*European Society for Engineering Education*) erkennt die Bedeutung des mathematischen Problemlösens an und betrachtet es als eine der Kompetenzerwartungen[5] für das Ingenieurstudium (Alpers et al., 2013):

„This competency comprises on the one hand the ability to identify and specify mathematical problems (be they pure or applied, open-ended or close) and on the other hand the ability to solve mathematical problems (including knowledge of the adequate algorithms)" (Alpers et al., 2013, S. 13).

In den weiteren Ausführungen gehen sie auf das Level (*Reproduction*, *Connection*, *Reflection*) ein, welches von Studierenden bezüglich der mathematischen Kompetenzen erreicht werden sollte. Dabei wird festgelegt, dass

5 Diese basieren auf dem dänischen KOM-Projekt (Niss, 2002; Niss & Højgaard, 2011).

mathematisches Problemlösen für einen praxisorientierten Kurs im Studiengang Maschinenbau sowohl bezüglich *Reproduction* als auch *Connections* als *very important* und lediglich bezüglich *Reflection* als *medium important* eingestuft wird. Diese Einstufung basiert darauf, welche typischen mathematischen Aufgaben Ingenieur:innen zu bewältigen haben (Alpers et al., 2013, S. 18).
Mathematisches Problemlösen wird daher als ein wichtiger Teil des Ingenieurstudiums angesehen. Besonders im ersten Semester wird der Grundstein der mathematischen Fähigkeiten gelegt, die im weiteren Verlauf des Studiums und im zukünftigen Beruf notwendig sind.
Trotz einiger Studien, die sich mit Problemlösen im Kontext des Ingenieurstudiums befassen (Jonassen et al., 2006; Kirn & Benson, 2018; Lehmann, 2018; Nordstrom & Korpelainen, 2011), fehlt bislang eine detaillierte Prozessanalyse zum authentischen mathematischen Problemlösen von Ingenieurstudierenden. Für das Schließen dieser Forschungslücke ist es notwendig, die Prozesse des mathematischen Problemlösens detailliert zu untersuchen, da bspw. standardisierte Problemlösetests zwar Ergebnisse liefern, jedoch wenig Einblick in die konkreten Denk- und Lösungswege der Studierenden bieten. Nur durch eine Prozessanalyse lassen sich typische Strategien, Schwierigkeiten und individuelle Herangehensweisen erfassen, die für gezielte Unterstützungsmaßnahmen entscheidend sind.

2.2 Begriffsklärung zum Problemlösen

In Kapitel 1.3.1 wurden bereits einige Definitionen zur Charakterisierung des Begriffs „Problem“ vorgestellt. Ein Problem wird typischerweise durch einen Anfangs- und Endzustand beschrieben, wobei eine Person beim Übergang von Anfangs- zum Endzustand auf eine Barriere stößt (Abbildung 4). Diese Barriere kennzeichnet das Problem und hebt den Prozesscharakter hervor, da eine „series of action“ (Newell & Simon, 1972, S. 72) erforderlich ist, um das Ziel zu erreichen. Rott (2013, S. 19) bemerkt, dass in der Literatur oft eine saubere Trennung der Begrifflichkeiten Problem und Problemlöseprozess nicht gegeben ist. Seine eigene Definition verbindet ebenfalls beide Aspekte:

> „Eine Aufgabe ist für ihren Bearbeiter (genau) dann eine (mathematische) Problemaufgabe, wenn bei ihrer Bearbeitung ein *Prozess des Problemlösens* stattfindet (im Gegensatz zu einem *Routineprozess*)“ (Rott, 2013, S. 32)

Ergänzend wird auch der Begriff des Routineprozesses herangezogen, um eine Unterscheidung zu ermöglichen. Ein Routineprozess zeichnet sich dadurch aus, dass während der Bearbeitung keine Barriere existiert. Insgesamt sind demnach sowohl ein Problem als auch der damit verbundene Problemlöseprozess personenabhängig und werden von den individuellen Erfahrungen und Fähigkeiten bestimmt.

Mit dieser Definition verlagert Rott (2013) außerdem den Schwerpunkt der Definition des Problems bzw. der Problemaufgabe hin zu einem Problemlöseprozess.

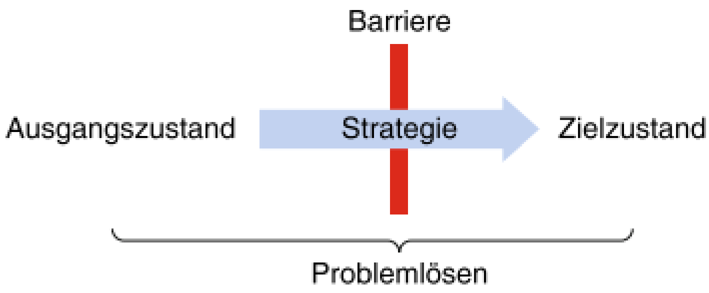


Abbildung 4: Bestandteile des Problemlösen (Öllinger, 2017)

Anhand eines Problemlöseprozesses kann bewertet werden, ob es sich für eine bestimmte Person bei einer Aufgabe um ein Problem handelt (Rott, 2013, S. 32). Während eines solchen Problemlöseprozesses müssen Mittel erst konstruiert oder passend konstruiert werden. Diese Mittel können vielfältig sein, z. B. Werkzeuge, Ansätze, Konzepte, Strategien, Ideen, Gestalten, usw. (Holzäpfel et al., 2018, S. 16). Schoenfeld (z. B. 1985) beschäftigt sich in seinen vielen Arbeiten ebenfalls mit dem Problemlösen, liefert allerdings keine klare Definition. Stattdessen stellt er vier Kategorien heraus, die eine Erklärung des Verhaltens sowie einen Einfluss hinsichtlich Erfolgs und Misserfolg auf Problemlösesituationen haben: *Resources*, *Heuristics*, *Control* und *Beliefs*. Im weiteren Verlauf werden auf deutsche Begriffe dieser vier Kategorien zurückgegriffen, wobei der Ausdruck *Beliefs* aus dem Englischen übernommen wird.

Wissen (Resources): Das mathematische Wissen, das die Person besitzt und auf ein aktuelles Problem angewandt werden kann.
Heurismen (Heuristics): Strategien und Techniken, um Fortschritte bei unbekannten oder unkonventionellen Problemen zu erzielen, sowie Faustregeln für effektives Problemlösen.
Steuerung (Control): Globale und lokale Entscheidungen hinsichtlich der Auswahl und Verwendung von Wissen und Heurismen.
Beliefs: Die „mathematische Weltsicht" einer Person, also die Gesamtheit von (nicht unbedingt bewussten) Einflussfaktoren, die das Verhalten eines Individuums bestimmen.

Wie in den kurzen Beschreibungen bereits deutlich wird, überlappen und interagieren die Kategorien miteinander (Schoenfeld, 1985, S. 44). Es reicht bspw. nicht aus, lediglich mathematisches Wissen zu haben, dieses muss auch an den richtigen Stellen beim Problemlösen eingesetzt werden können. Anhand dieser Kategorien erfolgt die Strukturierung der folgenden Kapitel. Obwohl Schoenfeld in seinen Ausführungen die Bedeutung der einzelnen Kategorien nicht ausdrücklich betont, lässt die Reihenfolge vermuten, dass dem Wissen die größte Bedeutung zugeschrieben wird. Diese implizite Priorisierung (falls diese existiert) soll in dieser Arbeit auch nicht verändert werden. Dennoch wird im Folgenden zunächst auf die Steuerung eingegangen. Dies liegt daran, dass die Auswertung zur Steuerung in der Ergebnisdarstellung am besten geeignet ist, um gleichzeitig einen umfassenden Überblick über die Problemlöseprozesse der Studierenden zu gewinnen.

2.3 Steuerung

Im Laufe der Zeit wurden für *Control* viele verschiedene Begriffe, wie z. B. *Monitoring*, *self-regulation* sowie *Metakognition*, genutzt. Für diese Arbeit wird der Begriff *Steuerung* verwendet (wie z. B. in Holzäpfel et al., S. 87). Vereinfacht gesagt geht es dabei um die Ressourcenverteilung während kognitiver Aktivitäten und des Problemlösens (Schoenfeld, 2016). *Steuerung* gliedert sich dabei in zwei verschiedene Level. Zum einen mittels des präskriptiven Ansatzes, welcher sich damit beschäftigt, wie *Heurismen* und *Wissen* effektiv an spezifischen Stellen während des Problemlösens eingesetzt werden können (lokal). Zum anderen mittels des allgemeineren Ansatzes, welcher sich dem Prozess des Problemlösens als Ganzes nähert und das Verhalten der problemlösenden Person beschreibt (global). In dieser Arbeit wird sich lediglich auf das allgemeine (globale) Level von *Steuerung* fokussiert.

2.3.1 Konzeptualisierung von Steuerung auf dem allgemeinen Level

Steuerung auf dem allgemeinen Level beschreibt, wie verschiedene Arten von Kontrollverhalten die Problemlöseleistung beeinflussen können. Im positiven Sinne besitzt Steuerung einen großen Einfluss auf den Erfolg von Problemlöseprozessen. Ineffizientes Verhalten, also eine negative Steuerung, hindert den Erfolg, indem es den Zugriff auf potenziell verfügbares Wissen oder nützliche Heurismen verhindert. Dabei geht es allerdings nicht nur um den Einsatz des eigenen heuristischen Wissens, sondern um die Art und Weise, wie das gesamte mathematische Wissen eingesetzt wird (Schoenfeld, 1985, S. 114). Bei Steuerung handelt es sich demnach um das Verhalten von Personen, die sich in einem Problemlöseprozess befinden.

Auf dem allgemeinen Level von Steuerung identifiziert Schoenfeld (1985, S. 116ff.) vier Verhaltenstypen bei der Bearbeitung von Problemaufgaben und beschreibt deren Einfluss auf den Erfolg beim Problemlösen:

Typ A: Steuerung hat einen negativen Einfluss auf die Lösung, da schlechte Entscheidungen Misserfolg garantieren: „Wild goose chases[6]“ führen dazu, dass vorhandenes Wissen nicht effektiv genutzt wird und potenziell nützliche Lösungsansätze unbeachtet bleiben.
Typ B: Steuerung verhält sich neutral. „Wild goose chases” werden verhindert, bevor sie als solche ausarten, aber Wissen wird nicht zu seinem vollen Potenzial ausgenutzt.
Typ C: Steuerung hat einen positiven Einfluss auf die Lösung. Wissen wird bedacht ausgewählt und aufgrund sorgfältiger Überwachung in angemessener Weise genutzt oder verworfen.
Typ D: Es besteht (fast) kein Bedarf für Steuerung. Geeignetes Wissen und geeignete Verfahren zur Problemlösung werden aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen.

Diese Typen geben bereits eine grobe Vorstellung davon, wie Problemlöseprozesse bezüglich Steuerung auf allgemeinem Level aussehen können. Gerade weil die Steuerung in Problemlöseprozessen oft komplex und vielschichtig ist, erweisen sich Problemlösemodelle als besonders geeignet, um die Mechanismen und Phasen der Steuerung auf einer übergeordneten Ebene systematisch zu beschreiben. Solche Modelle erlauben es, einzelne Steuerungsmerkmale klarer zu erkennen und das (mathematische) Verhalten in verschiedenen Phasen des Problemlösens präzise zu fassen. Daher wird im Folgenden eine Auswahl von verschiedenen Problemlösemodelle vorgestellt, die auf der allgemeinen Ebene das Problemlöseverhalten beschreiben. Die vorgestellten Modelle sind sowohl in der psychologischen als auch in der mathematikdidaktischen Literatur und Forschung fest verankert.

2.3.2 Problemlösemodelle aus der Psychologie

Bevor sich mit mathematischen Problemlösemodellen beschäftigt wird, werden zunächst zwei Modelle aus der Psychologie vorgestellt. Diese liefern wertvolle Ansätze, die sich auch in den mathematischen Problemlösemodellen wiederfinden lassen. In der Regel wird der gesamte Problemlöseprozesse in

6 „Wild goose chase“ ist nach Schoenfeld ein spezifisches Problemlöseverhalten, bei denen Problemlösende einen Ansatz verfolgen und ohne Steuerung diesen Ansatz bis zum Ende der Bearbeitungszeit verfolgen. „Wild goose chases“ werden in Kapitel 6.1.5 erneut thematisiert.

Abschnitte bzw. Phasen unterteilt, in denen bestimmtes (mathematisches) Verhalten von der problemlösenden Person beobachtet werden kann.

Problemlöseprozesse nach Dewey

Die ersten Modelle des Problemlösens stammen aus der Psychologie zu Beginn des 20. Jahrhunderts. John Dewey war der Erste, der ein Problemlöseprozesse in Stufen unterteilt hat (Neuhaus, 1995). Nach Dewey (2002, S. 56) können Problemlöseprozesse in fünf verschiedene Stufen differenziert werden.

1. *Suggestions*: In dieser Stufe begegnet einer Person eine schwierige Situation oder ein Problem. Diese Unsicherheit initiiert einen Denkprozess.
2. *Intellectualization*: Das Problem wird klarer definiert. Dabei muss die Natur der Schwierigkeit aufgedeckt und der besondere Charakter des Problems herausgestellt werden.
3. *The Guiding Idea*, *Hypothesis*: Es werden potenzielle Lösungen, Hypothesen, Ideen und Erklärungsansätze für das Problem entwickelt. Dieser Schritt ist der kreative Teil des Prozesses, bei dem nicht voreilig der erste Gedankengang verfolgt wird, sondern verschiedene durchdacht werden.
4. *Reasoning* (*in the Narrower Sense*): Jede der aufgestellten Hypothesen wird gründlich geprüft und hinsichtlich ihrer Umsetzbarkeit sowie Erfolgschancen bewertet. Diese Hypothesen werden nach Vor- und Nachteilen abgewogen, auf Erfolgschancen überprüft sowie vermeintlich abwegige Lösungen verworfen.
5. *Testing the Hypothesis by Action*: Die vielversprechendste Lösung wird in die Tat umgesetzt. Im Anschluss wird bewertet, ob das Problem damit gelöst werden konnte. Falls dem nicht so ist, beginnt der Prozess von vorne.

Problemlöseprozesse nach Newell und Simon

In der heutigen Psychologie hat das Modell von Newell und Simon (1972) eine besondere Bedeutung. Öllinger (2017) beschreibt das Modell von Newell und Simon (1972) als das wichtigste Paradigma für die aktuelle Problemlöseforschung. Der zentrale Begriff für das Modell ist der *Problemraum*. Dieser umfasst alle möglichen Zustände, die durch die Anwendung der verfügbaren Operatoren entstehen können. Demnach besteht der *Problemraum* aus allen möglichen Zuständen, die für die Lösung eines Problems auftreten können. Der *Problemraum* wird mittels einer Aufgabenanalyse bzw. Problemanalyse festgestellt (=Problemrepräsentation). Sobald diese Aufgabenanalyse durchgeführt wurde, kann jede denkbar mögliche Lösung im Problemraum dargestellt werden (=Suche nach einer Lösung). In der Regel kann der Mensch nicht alle Möglichkeiten durchdenken, sondern muss gewisse Heuristiken (z. B. Vermeidung von Schleifen, die Unterschiedsreduktion oder Ziel-Mittel-Analyse) nutzen, um weniger sinnvolle Lösungsmöglichkeiten auszuschließen (Öllinger, 2017). Eine mögliche Darstellung des Problemraumes zeigt Abbildung 5.

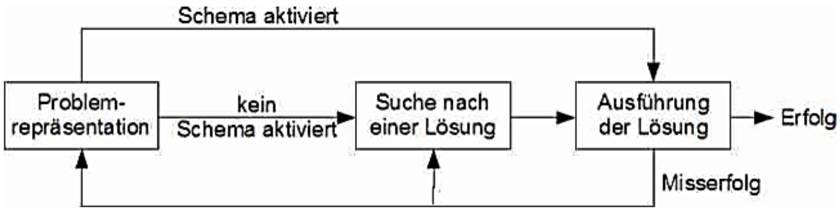


Abbildung 5: Schematische Darstellung des Problemlöseprozesses (Gick, 1986, S. 101)

Arbinger (1997, S. 33) weist darauf hin, dass ein solcher Prozess keinesfalls als linearer Prozess verstanden werden sollte. In jeder der dargestellten Phasen sind sowohl Rücksprünge als auch ein erneuter Durchlauf des Prozesses möglich. In der heutigen Problemlöseforschung der Psychologie findet die zyklische Auffassung des Problemlöseprozesses gegenüber dem linearen Ansatz den überwiegenden Zuspruch (Öllinger, 2017).

2.3.3 Problemlösemodelle aus der Mathematikdidaktik

Problemlöseprozesse nach Pólya

George Pólya hat mit seinem Buch „How to solve it“ (1945) (oder auf Deutsch: „Schule des Denkens“, 1949) auf das mathematische Problemlösen einen signifikanten Einfluss. Als einer der ersten Autoren beschäftigt er sich mit didaktischen Fragen, um Lernende beim mathematischen Problemlösen zu unterstützen (Holzäpfel et al., 2018, S. 23). In seiner Arbeit beschreibt er mathematische Problemlöseprozesse und teilt diese in vier unterschiedliche Phasen ein. Diese Phasen werden mit einigen Fragen und Handlungsimpulsen verbunden, um bei der Bearbeitung eines Problems zu unterstützen. Die Beschreibungen von Pólya basieren auf theoretischen Überlegungen sowie eigenen Beobachtungen von Studierenden (Pólya, 1945). Insgesamt erkennt man aus den Beschreibungen von Pólya einen starken Bezug zu der Einteilung von Problemlöseprozessen nach Dewey (2002). Die vier Phasen umfassen (Pólya, 1949, S. 18ff.):

1. Das *Verstehen der Aufgabe* (Was ist unbekannt? Was ist gegeben?)
2. Das *Ausdenken eines Plans* (Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken? Kennst du eine verwandte Aufgabe?)
3. Das *Ausführen des Plans* (Kannst du deutlich sehen, dass jeder Schritt richtig ist?)
4. Die *Rückschau* (Kannst du das Resultat kontrollieren? Kannst du es auf verschiedene Weise ableiten?

In der 1. Phase (*Verstehen der Aufgabe*) beschäftigt man sich damit, ein tieferes Verständnis der Aufgabe zu entwickeln und damit einen Zugang zu schaffen. Dafür ist es wichtig, die Anforderungen der Aufgabe klar zu erfassen. Um dies zu erreichen, kann es hilfreich sein, die Aufgabe in eigenen Worten wiedergeben zu können, das Gesuchte und das Gegebene voneinander getrennt aufzuschreiben, geeignete Beschriftungen einzuführen oder sich den Sachverhalt in einer Skizze zu verdeutlichen. Solche Repräsentationswechsel erleichtern es, wesentliche Merkmale der Problemstellung zu erkennen und eine klare Vorstellung für den Lösungsweg zu entwickeln. (Pólya, 1949, S. 19ff.).
In der 2. Phase (*Ausdenken eines Plans*) wird ein Lösungsplan erarbeitet, der das grundlegende Vorgehen im Lösungsprozess skizziert. Dabei ist es hilfreich, ähnliche, bereits gelöste oder äquivalente, leichter zu lösende Probleme zu betrachten. Insbesondere die Untersuchung von Spezialfällen oder Verallgemeinerungen kann wertvolle Ansätze liefern. Demnach ist für diese Phase zentral, einen Plan zu entwerfen, der die Verbindung zwischen den gegebenen Informationen und dem gesuchten Ergebnis herstellt. Der Plan muss allerdings nicht perfekt ausgearbeitet sein, sondern soll vielmehr eine grobe Struktur liefern (Pólya, 1949, S. 22ff.).
In der 3. Phase (*Ausführung des Plans*) wird der zuvor überlegte Plan ausgeführt. Einen Plan umzusetzen ist oft einfacher, als diesen zu entwerfen. Die kreative Arbeit wurde bereits bei dem *Ausdenken eines Plans* erledigt. Dennoch ist es wichtig, geduldig zu bleiben und jeden Schritt sorgfältig zu kontrollieren. Der Fokus liegt nun auf der detaillierten Ausarbeitung und dem kritischen Überprüfen der einzelnen Lösungsschritte (Pólya, 1949, S. 26ff.).
Die 4. Phase (*Rückschau*) dient der erneuten Kontrolle des erzielten Ergebnisses und des angewandten Lösungswegs. Dabei wird einerseits auf Korrektheit sowie Vollständigkeit kontrolliert und andererseits eine Reflexion vorgenommen, bei der die verwendeten Techniken und Strategien überprüft sowie alternative Lösungswege diskutiert werden. Durch die Rückschau soll zum einen das Wissen gefestigt werden, zum anderen das Repertoire für weitere Probleme erweitert werden (Pólya, 1949, S. 28ff.).
Ein Kritikpunkt bezüglich der Beschreibungen von Pólya ist die suggerierte Linearität der Phasen, wie sie z. B. auch bei Dewey (2002) beschrieben sind. Aufgrund des Aufbaus wird dem „Modell“ von Pólya oftmals ein linearer

Charakter zugeschrieben. Einige Ausführungen deuten allerdings an, dass es nicht unbedingt linear aufgefasst werden sollte.

„Diese Methode […] ist nicht starr; sie darf es auch nicht sein, denn in diesen Dingen ist irgendein starres, mechanisches, pedantisches Verfahren notwendig von Nachteil. Unsere Methode läßt eine gewisse Elastizität und Variation zu, sie gestattet verschiedene Wege.“ (Pólya, 1949, S. 35)

In der heutigen Zeit scheinen eher Problemlösemodelle gängiger zu sein, die eine Linearität ausschließen (Öllinger, 2017). Dennoch nimmt Pólyas Beschreibung eines Problemlöseprozesses in der Mathematikdidaktik eine bedeutsame Rolle ein. Viele weitere Arbeiten zum mathematischen Problemlösen basieren auf Pólyas Arbeit. Eine davon ist die Beschreibung von Problemlöseprozessen nach Schoenfeld (1985), welche im Folgenden vorgestellt wird.

Problemlöseprozesse nach Schoenfeld

Schoenfeld hat mit seinem Buch „Mathematical problem solving“ (Schoenfeld, 1985) ebenfalls einen großen Einfluss auf die Beschreibung von Problemlöseprozessen. Schoenfeld (1985) gab diesen Ablaufplan an Studenten, um deren Problemlöseverhalten zu trainieren. Darin stellt er einen idealen Problemlösenden vor bzw. das systematischste Vorgehen eines guten Problemlösenden (Schoenfeld, 1985, S. 107):

1. *Analysis*
2. *Design*
3. *Exploration*
4. *Implementation*
5. *Verification*

Der Prozess beginnt mit der *Analysis* der Aufgabe bzw. des Problems. Dies bedeutet, dass ein Gefühl für die Aufgabe entwickelt werden soll. Im Groben werden die Fragen geklärt: Was ist gegeben? Was genau wird verlangt? Darüber hinaus können weitere Tätigkeiten durchgeführt werden, z. B. in welchen mathematischen Kontext die Aufgabe passt. Des Weiteren gehört das aufmerksame Lesen der Aufgabenstellung[7] sowie das Zeichnen von Diagrammen, die Betrachtung von Spezialfällen oder die möglichen Vereinfachungen der Aufgabe dazu (Schoenfeld, 1985, S. 108).
Design[8] ist zunächst keine eigene „Box“ bzw. kein eigener Schritt im Prozess, sondern begleitet den Prozess über die Gesamtheit des Prozesses. Die Funktion

7 In den empirischen Betrachtungen von Schoenfeld (1985) werden das Lesen der Aufgabenstellung (*Reading*) und die *Analysis* voneinander getrennt. Dies wird in Kapitel 5.4.1 erneut aufgegriffen.

8 In den empirischen Betrachtungen von Schoenfeld (1985) wird dieser Teil als *Planning* verstanden. Allerdings sind *Planning* und *Design* nicht gleich. *Planning* wird in dem

von *Design* besteht darin, die problemlösende Person dauerhaft in Aktivitäten einzubinden, die zu einem gewissen Zeitpunkt als positiv für den Lösungserfolg angesehen wird. Demnach wird eine globale Perspektive über die getätigten Handlungen eingenommen (Schoenfeld, 1985, S. 108).

Exploration ist das heuristische Herz des Prozesses. In dieser Phase werden die meisten heuristischen Strategien genutzt. Hier wird nach ähnlichen oder verwandten Aufgaben gesucht, die Aufgabe modifiziert oder verallgemeinert. Aufgrund der Gewinnung neuer Erkenntnisse kann erneut zur *Analysis* oder *Design* zurückgekehrt werden (Schoenfeld, 1985, S. 110).

Implementation sollte (normalerweise) der letzte Schritt auf dem Weg der Lösung sein (Schoenfeld, 1985, S. 111). In dieser Phase wird der vorher aufgestellte Plan Schritt-für-Schritt ausgeführt und „lokal" geprüft (Rott, 2013, S. 55).

Verification sollte nach Schoenfeld (1985, S. 111) besonders betont werden. Es kommt häufig vor, dass die Lösung nicht mehr überprüft bzw. kontrolliert wird, was zu negativen Konsequenzen führen kann. Auf lokalem Level können z. B. Flüchtigkeitsfehler entdeckt werden. Auf globalem Level (Kontrolle des gesamten Prozesses) können alternative Lösungen gefunden werden, Verbindungen zu anderen fachlichen Inhalten hergestellt werden oder nützlicher Aspekte bewusstwerden. *Verification* kann somit zu einer verbesserten Fähigkeit beim Problemlösen verhelfen (Schoenfeld, 1985, S. 111).

Abbildung 6 zeigt den Problemlöseprozess nach Schoenfeld (1985) und Pólya (1945). Darin wird die Ähnlichkeit der beiden Beschreibungen bezüglich der Phasen deutlich, wobei bei Schoenfeld (1985) der Prozess um die *Exploration* erweitert wird. Eine eigenständige *Explorationsphase* lässt sich als Erweiterung der Phase „*Ausdenken eines Plans*" oder Zwischenschritt zwischen den Phasen „*Verstehen der Aufgabe*" und „*Ausdenken eines Plans*" nach Pólya (1945) interpretieren. Dadurch wird vor allem der Problemcharakter einer Aufgabe betont, da die *Exploration* unter anderem für die Generierung von Ideen für das Überwinden einer Hürde genutzt wird.

Obwohl die Modelle zur Beschreibung von Problemlöseprozessen Ähnlichkeiten aufweisen, bricht Schoenfeld (1985) allerdings den linearen Charakter. Damit wird zusätzlich die Rolle metakognitiver und selbstregulatorischer Prozesse deutlich. Dieser nicht-lineare Ansatz spiegelt auch eher die Aktivitäten eines natürlichen Problemlöseprozesses wider.

Episodenmodell (Kapitel 5.4.1) nicht mehr als global verstanden. Dies wird in Kapitel 5.4.1 erneut aufgegriffen.

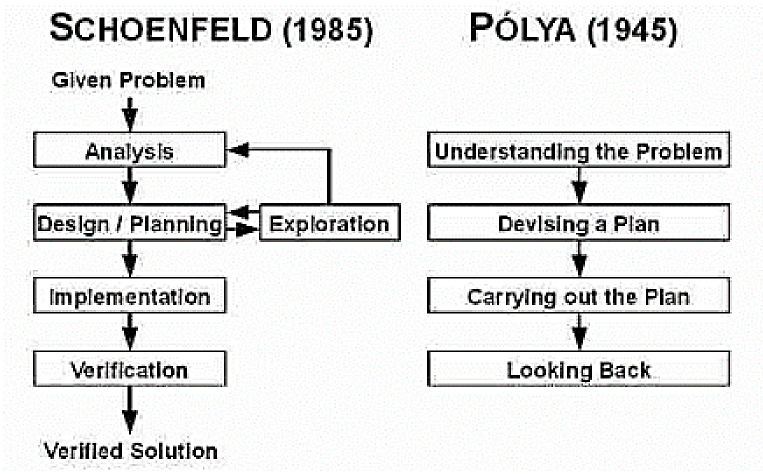


Abbildung 6: Der Problemlöseprozess nach Schoenfeld (1985) und Pólya (1945), übernommen aus Rott (2013, S. 62)

Problemlöseprozesse nach Rott

Rott (2013) setzt sich in seinen Untersuchungen intensiv mit der Frage auseinander, ob Problemlöseprozesse eher linear verlaufen oder ob sie vielmehr durch zyklische, nicht-lineare Strukturen geprägt sind. Basierend auf empirischen Daten, die er in Problemlösesituationen mit Schüler:innen der fünften Klasse erhoben hat, entwickelt er ein detailliertes deskriptives Modell. Dieses Modell berücksichtigt sowohl lineare als auch nicht-lineare Verläufe und trägt somit der Komplexität realer Problemlöseprozesse Rechnung (Rott, 2013, S. 297ff.).
Dieses Modell (Abbildung 7) beinhaltet außerdem mit *Planning* und *Exploration* (wie bei Schoenfeld, 1985) sowohl strukturiertes als auch unstrukturiertes Problemlöseverhalten. Weiterhin bietet es die Möglichkeit, planendes Verhalten durch die Verknüpfung von *Planning* und *Implementation* implizit, allerdings auch explizit (*Planning* und *Implementation* getrennt) wiederzugeben. Darüber hinaus illustrieren die im Modell enthaltenen Pfeilstrukturen den Einfluss metakognitiver Prozesse und selbstregulatorischer Strategien auf den Problemlöseverlauf. Sie veranschaulichen, inwiefern Lernende ihr eigenes Vorgehen reflektieren, anpassen und steuern, um zu einer Lösung zu gelangen.

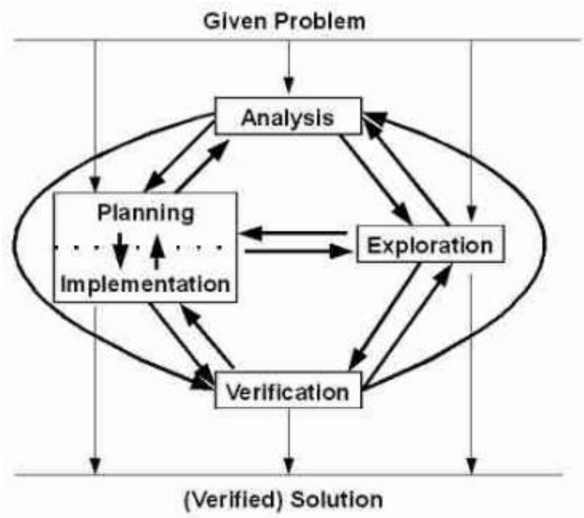


Abbildung 7: Der Problemlöseprozess nach Rott (2013, S. 298)

2.3.4 Synthese zur Steuerung

Bei der Wahl eines geeigneten Modells für die Analyse von Problemlöseprozessen wird in dieser Arbeit auf das Modell von Schoenfeld (1985) zurückgegriffen. Die aufgeführten psychologischen Modelle (Dewey sowie Newell & Simon) bieten zwar eine gute Grundlage, allerdings ist das Modell von Schoenfeld (1985) speziell für mathematische Kontexte gedacht und geht somit mehr auf die speziellen Anforderungen und Dynamiken mathematischen Denkens ein.

Dieses Modell ist besonders geeignet, da es „ehrliche" Problemlöseprozesse abbildet. Ein zentrales Merkmal dieses Modells ist die Erkenntnis, dass Problemlösen nicht zwangsläufig in einer linearen Abfolge von Phasen stattfindet, wie es in Pólyas Modell (1945) suggeriert wird. In empirischen Untersuchungen zeigen sich jedoch häufig nicht-lineare Verläufe (z. B. in Rott, 2013, S. 298). Problemlösende Personen springen zwischen den Phasen hin und her, wechseln bspw. nach der *Verification* erneut in *Planning*.

Darüber hinaus kann das Modell von Pólya als normativ angesehen werden. Er beschreibt eine ideale Vorgehensweise, die in der Praxis jedoch selten identifiziert werden kann. Dagegen sind die Modelle von Schoenfeld (1985) und Rott (2013) deskriptiv angelegt. Sie zielen darauf ab, Problemlöseprozesse so abzubilden, wie sie in der Realität stattfinden. Für die Untersuchung von authentischen

Problemlöseprozessen in der Hochschule bietet ein deskriptives Modell deshalb eine geeignete Grundlage.
Ein weiterer entscheidender Aspekt, der für Schoenfelds Modell (1985) spricht, ist seine bereits erfolgte Anwendung in der Forschung, insbesondere in der Arbeit von Stenzel (2023a), die sich mit hochschulischen Problemlöseprozessen beschäftigt. Darin wird gezeigt, dass Schoenfelds Modell (1985) auch in diesem Kontext fruchtbare Einsichten in mathematischen Problemlöseprozesse liefern kann. Dadurch wird es ebenfalls leichter, die eigenen Forschungsergebnisse an die bisherigen anzuschließen.
Zusätzlich ergänzt Rott das Modell durch die Unterscheidung zwischen strukturierten und unstrukturierten Prozessen, was für die Beschreibung und Kategorisierung von Problemlöseprozessen relevant ist. Diese Überlegung wird in den empirischen Einblicken berücksichtigt.
Das Modell von Schoenfeld (1985), mit der Ergänzung von Rott (2013), stellt somit ein wesentliches Analyseinstrument bezüglich Steuerung auf allgemeinem Level dar. In Kapitel 5.4.1 werden die vorherigen Überlegungen aufgegriffen und eine ausgeschärfte Version der Phasen vorgestellt.

2.4 Wissen

Wissen ist das Fundament, auf dem die Performanz des Problemlösens gebaut ist (Schoenfeld, 1985, S. 46). Ohne über spezielles *Wissen* zu verfügen, lassen sich Probleme nicht lösen, auch wenn die problemlösende Person in der Regel über eine gute selbstregulatorische Fähigkeit verfügt. Es geht also darum, welches *Wissen* (*Resources*) beim Individuum während des Problemlösens zur Verfügung steht:

„It is intended as an inventory of all the facts, procedures, and skills – in short, the **mathematical knowledge** – that the individual is capable of bringing to bear on a particular problem. The idea is to characterize what might be called the problem solver´s 'initial search space'." (Schoenfeld, 1985, S. 17, eigene Hervorhebung)

2.4.1 Konzeptualisierung mathematischen Wissens nach Schoenfeld

Schoenfeld (1985) gibt in seinem Buch einen Einblick in das weite Spektrum an Wissen, das beim Problemlösen zur Verfügung stehen sollte. Dabei unterteilt er in vier Klassen[9]: Die erste Klasse beinhaltet „relevant facts known by the

9 Zu einem späteren Zeitpunkt in seinem Buch (Schoenfeld, 1985, S. 54f.) erweitert Schoenfeld auf 6 Arten. Er fügt sowohl „informal and intuitive knowledge about the domain" und „knowledge about the rules of discourse in the domain" hinzu. Beide Arten beziehen sich dabei auf einen spezifischen mathematischen Inhaltsbereich, in dem informelles bzw. intuitives Wissen sowie die eigene Auffassung der Regeln in diesem Inhaltsbereich bei der Lösung von Problemen hilfreich sind. Tiefergehende Beschreibungen sind in Schoenfeld (S. 55f. und S. 61) zu finden.

individual“ (Schoenfeld, 1985, S. 17). Diese sind entscheidend dafür, wie man an ein Problem herangeht. Ob eine mathematische Information vollständig, zu einem Teil oder gar nicht vorhanden ist, kann erheblichen Einfluss auf die Lösungen und deren Erfolg haben. Darüber hinaus gehört ebenfalls „broad understanding“ dazu. Im Bezug zur Geometrie[10] sind dies z. B. das Erkennen von bestimmten Eigenschaften aus einem Diagramm (z. B. eine Tangente an einem Kreis ist orthogonal zu dem Radius des Kreises), das Ableiten von weiteren (nützlichen) Informationen, das Einzeichnen von Hilfslinien etc. Die zweite Klasse besteht aus „algorithmic procedures known by the individual“ (Schoenfeld, 1985, S.19). Dabei werden vor allem handwerkliche Schritte, wie das Konstruieren bzw. Zeichnen einer orthogonalen Geraden oder einer Winkelhalbierenden beschrieben. Die dritte Klasse beinhaltet „routine procedures“ (Schoenfeld, 1985, S. 19). Dazu gehören mathematische Techniken, um eine Aufgabe bzw. ein Problem zu bearbeiten. Solche Techniken sind für das Lösen spezifischer Aufgaben nützlich. „Routine procedures“ können komplex sein, da in einigen Aufgaben z. B. zunächst gewisse Anforderungen überwunden oder weitere Annahmen getätigt werden müssen, um eine solche „routine“ procedure anwenden zu können. Diese Aktivitäten sind nicht-trivial, führen zuletzt aber auf die Anwendung der bestimmten Technik. Die vierte Klasse wird „relevant competencies“ (Schoenfeld, 1985, S.19f.) genannt. Diese Klasse überlappt mit den „routine procedures“, ist allerdings etwas breiter definiert. Zum einen sind damit aufgabenspezifische Fertigkeiten (z. B. ist eine Person mit der „routine procedure“ vertraut, Dreiecken die Kongruenz nachzuweisen?) und zum anderen inhaltsspezifische heuristische Strategien (in der Geometrie z. B. das Zeichnen einer Hilfslinie) gemeint.

Die Informationen müssen innerhalb dieser vier Klassen nicht unbedingt korrekt sein und können mit Fehlvorstellungen behaftet sein (Schoenfeld, 1985, S. 20). Dennoch können sie in dem Moment für das Individuum eine wahre Aussage darstellen, nach der sie handeln. Fehlerhaftes Wissen führt wiederum zu einem erfolglosen Problemlöseverhalten.

Die von Schoenfeld (1985) ursprünglich eingeführten vier Klassen weisen eine Ähnlichkeit mit der heute in der Mathematikdidaktik verbreiteten Unterscheidung zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen auf. Wenn Schoenfeld (2016) in späteren Arbeiten von Wissen spricht, bezieht er sich ebenfalls auf diese Unterscheidung von Wissensarten. Die mathematikdidaktische Literatur legt außerdem nahe, Wissen nicht nur in verschiedene Arten, sondern auch in sogenannte Facetten zu unterteilen (z. B. Vollrath & Roth, 2012). Dadurch wird Wissen in zwei Dimensionen differenziert: Wissensarten (Kapitel 2.4.2) und Wissensfacetten (Kapitel 2.4.3). Beide Dimensionen finden Berücksichtigung in der Wissensmatrix von Prediger et al. (2011), die in dieser Arbeit ein zentrales

10 Schoenfeld hat seine Untersuchungen (1985) zu geometrischen Problemen durchgeführt, weshalb sich viele seiner Beschreibungen auf die Geometrie beziehen.

Analyseinstrument darstellt. Die Wissensmatrix wurde ursprünglich im Rahmen der Unterrichtsphase Systematisieren und Sichern entwickelt. Das Ziel der Wissensmatrix besteht vor allem darin, Aufgaben systematisch zu erstellen, die Lernende dabei unterstützen, ihr Wissen aktiv zu strukturieren. Um die Wissensmatrix umfassend zu verstehen, ist es zunächst wichtig, sowohl die Wissensarten als auch die Wissensfacetten näher zu betrachten. In den folgenden Abschnitten werden daher diese beiden Dimensionen des Wissens genauer beleuchtet. Im Anschluss wird eine leicht adaptierte Wissensmatrix vorgestellt, die auf den Kontext der Hochschulmathematik zugeschnitten ist.

2.4.2 Unterscheidung von Wissensarten

Die Bezeichnungen des konzeptuellen und prozeduralen Wissens gehen im mathematikdidaktischen Kontext auf Hiebert und Lefevre (1986) zurück und werden in verschiedenen mathematikdidaktischen Kontexten verwendet bzw. aufgegriffen.

Konzeptuelles Wissen

Konzeptuelles Wissen kann als ein Netzwerk von Informationen verstanden werden, in dem einzelne Informationen miteinander verbunden sind.

„Conceptual knowledge is characterized most clearly as knowledge that is rich in relationships. It can be thought of as a connected web of knowledge, a network in which the linking relationships are as prominent as the discrete pieces of information. Relationships pervade the individual facts and propositions so that all pieces of information are linked to some network. In fact, a unit of conceptual knowledge cannot be an isolated piece of information; by definition it is a part of conceptual knowledge only if the holder recognizes its relationship to other pieces of information." (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 3f.)

Diese Definition von konzeptuellem Wissen stellt heraus, dass den Verbindungen von Informationen eine wichtige Rolle zugeschrieben wird. Einzelne, isolierte Informationen gehören demnach nicht zu einem konzeptuellen Netzwerk. Sobald eine Verbindung bzw. eine Verknüpfung hergestellt werden kann, gehören sie zum Netzwerk. Dies lässt sich besonders gut in der Hochschulmathematik beobachten, wo Begriffe und Theorien auf bereits erworbenes Wissen aufbauen (Rach & Heinze, 2013). Unter anderem stellt dies den Unterschied zwischen konzeptuellen Netzwerken verschiedener Personen dar. Konzeptuelles Wissen kann über Zeit wachsen und selbst das Netzwerk von Experten kann ausgebaut und besser strukturiert werden (diSessa et al., 2004; Schneider & Stern, 2009). Star (2005) fasst zusammen:

„The term conceptual knowledge has come to encompass not only what is known (knowledge of concepts) but also one way that concepts can be known (e.g. deeply and with rich connections)" (Star, 2005, S. 408).

In der Hochschulmathematik zeigen sich die reichhaltigen Verbindungen durch eine tiefe Verknüpfung von Konzepten, wie bspw. die Differenzierbarkeit. In der Regel wird der Begriff Differenzierbarkeit zunächst nur eindimensional eingeführt und erst im weiteren Verlauf auf Mehrdimensionalität erweitert. Dabei werden weitere verwandte Begriffe wie partielle und totale Ableitung sowie Richtungsableitung eingeführt, wodurch der Begriff Differenzierbarkeit tiefer verstanden und stärker vernetzt wird (siehe z. B. in Lankeit & Biehler, 2024).
Letztlich beschreiben Hiebert und Lefevre (1986, S. 8), dass durch Verbindungen zwischen einzelnen Informationen Bedeutung entwickelt oder geschaffen werden kann. Dadurch kann konzeptuelles Wissen nur bedeutungsvoll aufgebaut werden, da dies definitorisch so festgelegt wurde.

Prozedurales Wissen

Prozedurales Wissen steht in einem engen Zusammenhang mit Prozeduren (Canobi, 2009), die als eine Abfolge von Schritten (= *action sequences*) definiert werden, um ein Ziel zu erreichen (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). Star et al. (2015) definieren:

„Procedural knowledge refers to having the knowledge of action sequences for solving a problem (e.g. an algorithm for solving linear equations)" (Star et al., 2015, S. 45).

Demnach liefert das prozedurale Wissen einer Person mathematische Verfahren (für das Bearbeiten einer Aufgabe). Solche Verfahren haben in der Regel einen linearen Charakter, in denen die durchzuführenden Schritte vorgegeben sind. Der lineare Charakter wird in der Hochschulmathematik besonders durch Algorithmen, wie z. B. das Newtonverfahren, allerdings auch durch kleinere Verfahren, wie z. B. die Regel von L´Hospital, deutlich.
Darüber hinaus muss angemerkt werden, dass Vorgehensweisen Teilschritte größerer Vorgehensweisen sein können, wodurch die hierarchische Struktur prozeduralen Wissens betont wird (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 6). Rittle-Johnson und Schneider (2014) erweitern diese Definition, indem sie ebenfalls die Fähigkeiten zur Durchführung dieser Schritte in ihrer Definition von prozeduralem Wissen betonen:

„The procedures can be algorithms – a predetermined sequence of actions that will lead to the correct answer when executed correctly" (Rittle-Johnson & Schneider, 2014, S. 1103).

Prozedurales Wissen bedeutet, dass eine Person nicht nur weiß, was sie tun muss, sondern auch, wie sie es tun muss.
Hiebert und Lefevre (1986, S. 6) inkludieren zum prozeduralen Wissen ebenfalls die mathematische Sprache und die Bedeutung von mathematischen Symbolen.

„It includes a familiarity with the symbols used to represent mathematical ideas and an awareness of the syntactic rules for writing symbols in an acceptable form" (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 6).

Dazu zählt auch das Wissen über die Gestaltung eines formalen Beweises, allerdings ohne Berücksichtigung des Gegenstandes oder der Logik des Beweises selbst.
Entgegen dem konzeptuellen Wissen muss prozedurales Wissen nicht bedeutungsbezogen aufgebaut werden. Allerdings werden die Verfahren, die bedeutungsbezogenen gelernt werden, an konzeptuelles Wissen geknüpft (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 8).

Zusammenspiel konzeptuellen und prozeduralen Wissens

Sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen sind wichtiger Bestandteil mathematischen Wissens. „Mathematical knowledge, in its fullest sense, includes significant, fundamental relationships between conceptual and procedural knowledge. Students are not fully competent in mathematics if either kind of knowledge is deficient or if they both have been acquired but remain separate entities.” (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 9)
Konzeptuelles und prozedurales Wissen greifen demnach auch ineinander, wodurch beim Aufbau sowie der Nutzung gegenseitig voneinander profitieren werden kann. Dadurch lassen sich die beiden Wissensarten nicht immer voneinander trennen (Rittle-Johnson & Schneider, 2014), obwohl sie unterschiedlich konzeptualisiert werden. Besonders im Kontext der Hochschulmathematik lassen sich viele Aufgaben identifizieren, in denen sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen für die Lösung notwendig sind (Kolbe & Liebendörfer, 2024; Weber & Lindmeier, 2020).

2.4.3 Unterscheidung von Wissensfacetten

Einige mathematikdidaktische Arbeiten legen nahe, dass nicht nur eine Differenzierung verschiedener Wissensarten, sondern auch verschiedener Wissensfacetten erfolgen sollte.

Arten der Begriffsbestimmung nach Winter

Winter (1983, S. 187) hat in seiner Arbeit verschiedene Arten zu Begriffsbestimmung herausgearbeitet. Dabei gliedert er die Wissensart der Begriffe in sechs verschiedene Begriffsbestimmungen.

- Exemplarische Begriffsbestimmung: Winter beschreibt diese Begriffsbestimmung als unverzichtbar, auch auf Hochschulniveau. Es geht dabei um die Nutzung von Beispielen und Gegenbeispielen. Häufig genügt ein vorläufiges Gebrauchsverständnis eines Begriffs ohne weitere Explizierung, um diesen zu nutzen (Winter, 1983, S. 187f.).

- Konstruktive Begriffsbestimmung: Hiermit sind Tätigkeiten gemeint, die mittels eines Verfahrens einen Begriff bilden. Dazu gehören z. B. Zeichnen, Zählen, Rechnen, Kombinieren, etc. (Winter, 1983, S. 189).
- Abstraktive Begriffsbestimmung: Begriffe werden mit Äquivalenzrelationen bestimmt (Flächeninhalt ebener Vielecke über die Äquivalenzrelation x ist zerlegungsgleich zu y in der Menge ebener Vielecke), die abhängig von Vorwissen sind. Hauptaktivitäten sind dabei Vergleich- und Maßhandlungen und das daraus resultierende Klassifizieren von Gegenständen (Winter, 1983, S. 190f.).
- Ideative Begriffsbildung: Ein Idealisierungsprozess besteht darin, in ein „Ding" gewisse Eigenschaften hineinzusehen (die es an sich gar nicht hat). Winter beschreibt dies bspw. mit einem straffgezogenen Faden, in den wir die Eigenschaften einer Gerade hineinsehen (Winter, 1983, S. 191ff.).
- Explizit-definitorische Begriffsbestimmung: Hiermit ist die klassische Art gemeint, einen Begriff zu bestimmen bzw. etwas zu definieren. Standardgemäß wird ein Oberbegriff genannt und diesem werden charakterisierende Eigenschaften zugeschrieben (Winter, 1983, S. 193ff.).
- Implizit-axiomatische Begriffsbestimmung: Winter beschreibt dies als eine Art Formalisierung höherer Stufe. Es geht dabei um die maximale deduktive Gliederung von größeren Theoriekomplexen, damit maximale Verallgemeinerungen erlangt werden (Winter, 1983, S195f.).

Erath (2017, S. 48) kommt zu dem Schluss, dass daraus verschiedene Wissensfacetten abgeleitet werden können. Darunter zum einen Konkretisierungen in Form von Beispielen und Gegenbeispielen und zum anderen expliziten Formulierungen von Definitionen.

Wissensfacetten nach Vollrath und Roth (2012) und Prediger et al. (2011)

Vollrath und Roth (2012, S. 48ff.) beschreiben in ihrem Buch mehrere Facetten von Wissen. Dabei listen sie auf, welche typischen Kenntnisse und Fähigkeiten zum Verständnis führen. Sie teilen dies für das Verstehen eines Begriffs, Verstehen eines Sachverhalts und Verstehen eines Verfahrens auf.
Die kognitiven Seiten des mathematischen Begriffsverständnisses bestehen aus der Bezeichnung des Begriffs, dem Angeben von (Gegen-)Beispielen sowie der Begründung, warum es ein (Gegen-)Beispiel ist, dem Kennen charakteristischer Eigenschaften und inhaltsnaher Begriffe sowie der Arbeit mit dem Begriff beim Argumentieren und Problemlösen. Das Begriffslernen kann auf der affektiven Seite durch Emotionen beeinflusst werden, wodurch das Lernen mit angenehmen Erlebnissen verbunden werden sollte (Vollrath & Roth, 2012, S. 48).

Zum Verstehen eines mathematischen Sachverhalts gehört es, den Sachverhalt angemessen zu formulieren, Beispiele für den Sachverhalt angeben zu können, wissen, unter welchen Voraussetzungen der Sachverhalt gilt, den Sachverhalt begründen zu können und Konsequenzen des Sachverhalts sowie Anwendungen des Sachverhalts zu kennen (Vollrath & Roth, 2012, S. 48f.).
Ein mathematisches Verfahren haben Lernende dann verstanden, wenn sie sowohl die intendierten Ziele des Verfahrens als auch die zugrundeliegenden mathematischen Schritte kennen. Darüber hinaus gehört die Anwendung auf Beispiele. Letztlich trägt das Wissen darüber, unter welchen Voraussetzungen und aus welchen Gründen es funktioniert, zum Verständnis mathematischer Verfahren bei (Vollrath & Roth, 2012, S. 49f.).
Eine ähnliche Zusammenstellung von Wissensfacetten liefern Prediger et al. (2011). Sie teilen in vier verschiedene Wissensfacetten auf: *Explizite Formulierung*, *Konkretisierung & Abgrenzung*, *Bedeutung & Vernetzung* sowie *Konventionelle Festlegungen*.
Die *Explizite Formulierung* ist für die Fachwissenschaft Mathematik die wichtigste Facette. Definitionen (=Konzepte) und Sätze (=Zusammenhänge) werden im konzeptuellen Wissen und Anleitungen im prozeduralen Wissen prägnant ausformuliert (Prediger et al., 2011).
Konkretisierung & Abgrenzung wird durch Beispiele und Gegenbeispiele verdeutlicht. Dabei soll auch begründet werden, ob diese Beispiele bzw. Gegenbeispiele (nicht) zu einem Begriff gehören. Darüber hinaus soll ein Gespür für Spezialfälle entwickelt werden, um ein Abgrenzungswissen zu schaffen. Speziell für Verfahren und Sätze werden ebenfalls Bedingungen der Anwendbarkeit miteingeschlossen (Prediger et al., 2011).
Bedeutung & Vernetzung beschreibt die Bedeutung der jeweiligen Konzepte, Zusammenhänge und Verfahren. Charakterisierend für diese Wissensfacette sind inhaltliche Vorstellungen und passende Darstellungen (vom Hofe, 1995, z. B. S. 99). Dazu soll der der Begriff der Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995, S. 103ff.) hervorgehoben werden. Grundvorstellungen beschreiben die Verbindung zwischen mathematischen Inhalt und der individuellen Begriffsbildung. Dabei sind drei Aspekte zentral: Die Konstitution der Bedeutung auf Rückführung bekannten mathematischen Wissens, die Erzeugung einer mentalen Repräsentation des Begriffs sowie die Fähigkeit, diesen Begriff auf reale Situationen anzuwenden (vom Hofe & Blum, 2016). Des Weiteren gehören Vernetzungen zu anderen Wissenselemente zur Wissensfacette *Bedeutung & Vernetzung* dazu, bspw. durch anschauliche Begründungen von Sätzen oder Verfahren (Prediger et al., 2011).
Zu den *Konventionellen Festlegungen* zählen Konventionen zu den jeweiligen Wissensarten. Dies sind zum Beispiel die Fachwörter zu den Konzepten „Multiplikation“ und „Division“. Es wird betont, dass die alleinige Bezeichnung nicht für eine adäquate Vorstellung ausreicht (Prediger et al., 2011).

Zusammenführung der Wissensfacetten

Winter (1983)	Vom Hofe (1995)	Vollrath und Roth (2012)	Prediger et al. (2011)
Exemplarisch		Beispiele & Gegenbeispiele	Konkretisierung & Abgrenzung
Explizit-definitorisch		(allg.) Formulierungen & charakteristische Eigenschaften	Explizite Formulierung
	Grundvorstellungen	Vernetzungen & Begründungen	Bedeutung & Vernetzung
		Benennungen	Konventionelle Festlegungen
		Anwendungs-möglichkeiten	

Tabelle 3: Darstellung verschiedener Unterteilung der Wissensfacetten (teilweise übernommen aus Erath, 2017, S. 51)

Tabelle 3 zeigt die Ausarbeitungen der verschiedenen Autoren. Darin sind einige Übereinstimmungen zu erkennen, vor allem zwischen den Unterteilungen von Vollrath und Roth (2012) und Prediger et al. (2011). Obwohl die beiden Arbeiten diese Facetten im Hinblick auf schulische Überlegungen entwickelt haben, lassen sie sich ebenfalls auf die hochschulische Mathematik übertragen. Im Folgenden werden die Bezeichnungen der Wissensfacetten von Prediger et al. (2011) übernommen.

In der hochschulischen Mathematik verfolgt die formale Fachsprache das Ziel, die Inhalte möglichst verdichtet darzustellen. Dafür wird der typisch deduktive Aufbau mittels Definition-Satz-Beweis-Struktur verwendet (Houston, 2012; Hußmann, 2017, S. 61; Rach & Heinze, 2013). Bezüglich mathematischer Verfahren werden Anleitungen in Sätzen oder in folgenden Bemerkungen aufgeführt. Dies spricht die Facette der *Expliziten Formulierung* an.

Des Weiteren spielen sowohl Beispiele als auch Gegenbeispiele eine wesentliche Rolle, um die kompakte Darstellung der mathematischen Inhalte zu verstehen (z. B. Alcock, 2017; Mejia-Ramos et al., 2012). Eine weitere Besonderheit der Mathematik liegt in der Bedeutung von Voraussetzungen und Spezialfällen[11] (Liebendörfer et al., 2021). Beides adressiert die Facette *Konkretisierung & Abgrenzung*.

Weiterhin ist es wichtig, neue Inhalte mit der bestehenden Wissensstruktur zu vernetzen, welches bspw. mit Diagrammen und Skizzen erreicht werden kann (z. B. Alcock, 2017; Hilgert et al., 2015; Houston, 2012). Dies gelingt z. B. bei

11 Dies deckt sich vor allem für das prozedurale Wissen mit der Beschreibung der Facette *Konkretisierung & Abgrenzung* nach Prediger et al. (2011)

Konzepten mit Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995). Darüber hinaus gehört ebenfalls der umfangreiche Umgang mit Beweisen dazu (Liebendörfer et al., 2021). Damit wird auf die Facette *Bedeutung & Vernetzung* eingegangen.
Außerdem existieren in der hochschulischen Mathematik genauso Fachwörter und Benennungen wie in der Schule (z. B. Hilgert et al., 2015, S. 11). Dies spricht die Facette *Konventionelle Festlegung* an.
Letztlich unterscheidet sich die Aufteilung der Wissensfacetten zwischen Vollrath und Roth (2012) und Prediger et al. (2011) um die Facette der Anwendungsmöglichkeiten. Vollrath und Roth (2012, S. 51) betonen Anwendungsmöglichkeiten für Sachverhalte und das Beherrschen für Verfahren. Für Begriffe ergänzt Winter (1983) auf schulischer Ebene den Anwendungsbezug zu realweltlichen Problemen. Aus den Ausführungen von Freudenthal (1983) kann dies für Begriffe allerdings auf innermathematische Phänomene übertragen werden, welche in der hochschulischen Mathematik im Vordergrund stehen. Insgesamt ist in der hochschulischen Mathematik die Arbeit mit Begriffen und Zusammenhängen zentral, allerdings werden auch Verfahren benötigt (Liebendörfer et al., 2021). Vor allem in Service-Veranstaltungen der Mathematik liegt der Fokus eher auf Verfahren (Alpers, 2014; Alpers, 2016). Daher ist es wichtig, Anwendungskontexte zu kennen und Anwendungen zu beherrschen. Diese Überlegungen führen dazu, diese Facette ebenfalls zu konzeptualisieren. Sie wird *Implizite Nutzung*[12] genannt. Weitere Ausführungen zur *Impliziten Nutzung* werden in Kapitel 5.4.2 erläutert.

2.4.4 Synthese zum Wissen

Prediger et al. (2011) stellen auf Grundlage ihrer Überlegungen die Kreuzung der Wissensarten und Wissensfacetten in einer Matrix dar. In Tabelle 4 ist eine adaptierte Version der ursprünglichen Wissensmatrix abgebildet.
Aus der ursprünglichen Wissensmatrix (Prediger et al., 2011) wird die feinere Aufteilung des konzeptuellen Wissens in Konzepte (=Definitionen) und Zusammenhänge (=Sätze) übernommen. Dies passt zu der Definition-Satz-Beweis Struktur, die für die Hochschulmathematik typisch ist (Engelbrecht, 2010; Rach & Heinze, 2013). Für das prozedurale Wissen werden aus der Wissensmatrix handwerkliche Verfahren ausgeschlossen, da diese in der hochschulischen Mathematik nicht vorkommen (Stenzel, 2023a, S. 24). Es bleiben demnach lediglich mathematische Verfahren im prozeduralen Wissen. Des Weiteren wird das metakognitive Wissen aus der Wissensmatrix ausgeklammert. Diese Art von Wissen wird hinsichtlich der vier Kategorien des Problemlösen nach Schoenfeld (1985) eher bei den *Heuristics* bzw. *Control*

12 Die Überlegungen, eine solche Facette (sowie die Bezeichnung *Implizite Nutzung*) zu berücksichtigen, stammt aus der Arbeitsgruppe aus Dortmund. Bis zum jetzigen Zeitpunkt existiert allerdings noch keine Literatur, die diesbezüglich zitiert werden kann.

verortet[13]. Es handelt sich daher um Wissen, welches nicht einem speziellen Fachinhalt zugeschrieben werden kann (z. B. Anderson et al., 2001, S. 55ff.) und deshalb nicht in der adaptierten Wissensmatrix aufgenommen wird. Die Wissensfacetten werden hingegen komplett aus der ursprünglichen Wissensmatrix übernommen.

	Explizite Formulie-rung	**Konkretisie-rung & Abgrenzung**	**Bedeutung & Vernet-zung**	**Konventio-nelle Fest-legungen**
Konzeptuelles Wissen				
Konzepte	Ausformu-lierte Definition	Beispiele / Gegen-beispiele	Vor-stellungen / Dar-stellungen	Fachwörter, Bezeich-nungen
Zusammen-hänge	Ausformu-lierter Satz	Beispiele / Gegen-beispiele	(anschau-liche) Begründung / Beweis	Namen, Bezeich-nungen, konventio-nelle Regeln
Prozedurales Wissen				
Verfahren	Anleitung des Verfahrens	Bedingung der Anwend-barkeit, Beispiele	Vorstellung / Begründung	Verein-barungen

Tabelle 4: Adaptierte Wissensmatrix nach Prediger et al. (2011)

Die Kreuzung einer Wissensart (z. B. Zusammenhang im konzeptuellen Wissen) mit einer Wissensfacette (z. B. *Explizite Formulierung*) ergibt eine Zelle (speziell für diese Kreuzung: Ausformulierter Satz) in der Matrix (Tabelle 4). Im weiteren Verlauf wird eine solche Zelle als Wissenselement bezeichnet.
Die Wissensmatrix stellt ein wesentliches Analyseinstrument hinsichtlich des Wissens in dieser Arbeit dar. Mithilfe der Wissensarten lassen sich zunächst notwendige mathematische Inhalte für die stoffdidaktische Analyse der Aufgaben festlegen (Kapitel 5.3). Ferner können mit den Wissenselementen sowohl das

13 Insgesamt lassen sich in der Wissensmatrix die vier Klassen von Schoenfeld wiederfinden. Die erste Klasse kann mit Konzepten und Zusammenhängen, die zweite Klasse mit den (ausgeklammerten) handwerklichen Verfahren, die dritte Klasse mit den Verfahren gleichgesetzt werden. Nur die vierte Klasse lässt sich durch die inhaltsspezifischen Strategien nicht in der Wissensmatrix verorten.

Wissensangebot der relevanten Veranstaltung als auch die Wissensnutzung der Studierenden während der Problemlöseprozesse festgestellt werden (Kapitel 5.4.2). Außerdem werden die Überlegungen der Wissensmatrix für die Strukturierung genutzt, um das relevante mathematische Wissen zur Differentialrechnung darzustellen (Kapitel 4.3.1).

2.5 Heurismen

Im Kontext des Problemlösens ist immer wieder von allgemeinen Strategien oder Methoden die Rede, die Menschen dabei unterstützen, sich in komplexen Situationen zu orientieren. Diese Werkzeuge des Denkens und Handelns werden häufig als *Heurismen* bezeichnet.

2.5.1 Konzeptualisierung von Heurismen

Der englische Begriff heuristic[14] kann sowohl mit „Heurismus" als auch „Heuristik" übersetzt werden. Diese ähnlichen Begrifflichkeiten führen dazu, dass begrifflichen Schwierigkeiten unter verschiedenen Namen auftauchen (Rott, 2014). Die Heuristik bezeichnet die Wissenschaft des Problemlösens (Rott, 2018). Pólya (1949, S.118f.) beschreibt das Ziel der Heuristik, Methoden und Regeln von Entdeckung und Erfindung zu studieren. Für die Mathematik spezifiziert Pólya (1964, S. 5):

> „Die Heuristik beschäftigt sich mit dem Lösen von Aufgaben. Zu ihren spezifischen Zielen gehört es, in allgemeiner Formulierung die Gründe herauszustellen für die Auswahl derjenigen Momente bei einem Problem, deren Untersuchung uns bei der Auffindung der Lösung helfen könnte." (Pólya, 1964, S. 5)

Heurismen (Mehrzahl von Heurismus) sind zwar Teil von der Heuristik, allerdings sind damit einzelne heuristische Aktivitäten gemeint (Rott, 2018). Schoenfeld (1985, S. 23) beschreibt Heurismen als Faustregeln für das erfolgreiche Problemlösen. Sie sind allgemeine Anregungen, die einem Individuum helfen, ein Problem besser zu verstehen oder in einer Lösung einen Fortschritt zu erzielen. Pólya (1945, S. 2) bezeichnet sie als mentale Operationen, die beim Problemlösen nützlich sind. Heurismen sind demnach gewisse mathematische Tätigkeiten, die beim Problemlösen zum Erfolg verhelfen können. Holzäpfel et al. (2018, S. 87) fügen hinzu, dass Heurismen übergreifend (nicht nur auf eine Situation bezogen) sind. Im Gegensatz zu mathematischen Verfahren und Algorithmen, die eine klare Anleitung liefern und zu einem gewünschten Ergebnis führen, garantieren Heurismen keinen sicheren Erfolg.
Es gibt noch viele weitere Beschreibungen und Definitionen zu *Heurismen*, die auf verschiedene Aspekte eingehen. Dahingehend hat Rott (2014) verschiedene

14 Bei dem Plural heuristics ist die Unterscheidung einfacher, da in diesem Fall von Heurismen gesprochen wird.

Definitionen und Beschreibungen zu *Heurismen* aus der Literatur analysiert. Die Analyse der verschiedenen Definition ist auch dadurch motiviert, dass keine einheitliche Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik bezüglich *Heurismen* existierte (Rott, 2014). Dabei arbeitet er auf theoretischer Ebene neun verschiedene Kategorien zur Beschreibung des Begriffs heraus (Beispiele zu den Kategorien sind in Rott (2014) zu finden):

- Beschreibung: Was ist nach Ansicht der Autor*innen die Natur der *Heurismen*? Die Beschreibung bewegt sich zwischen „rules of thumb", „kind of information" und „cognitive tools".
- Effektivität: Was sagt die Charakterisierung über die Effektivität der *Heurismen* aus? Die meisten beschreiben, dass sie keine Garantie für eine Lösung haben, allerdings hilfreich für das Problemlösen sind.
- Analyse: Erwähnt die Charakterisierung explizit das Verstehen und die Analyse des Problems?
- Metakognition: Erwähnt die Charakterisierung explizit metakognitive und selbstregulatorische Aktivitäten? Werden diese inkludiert oder exkludiert in *Heurismen*?
- Bereich: Erwähnen die Autoren bestimmte *Heurismen*? Für welche Probleme sind diese anwendbar? Gibt es verschiedene Arten von *Heurismen* (z. B. lokal und globale oder inhaltsspezifische und allgemeine) mit unterschiedlichen Anwendungsbereichen?
- Algorithmus: Beinhaltet die Charakterisierung Algorithmen oder andere Standardverfahren? Werden diese inkludiert oder exkludiert in *Heurismen*?
- Bewusstsein bzw. Wahrnehmung: Erwähnt die Charakterisierung, ob Problemlösestrategien bewusst oder ausgeführt werden müssen, um als *Heurismen* zu gelten? Einige Charakterisierungen benennen „systemical" oder „methodische Ansätze", welche implizite / unterbewusste / intuitive Nutzungen ausschließen.
- Problemraum: Bezieht sich die Charakterisierung auf den Problemraum (Newell & Simon, 1972)?
- Andere: Gibt es weitere Merkmale, die noch nicht von den Kategorien abgedeckt worden sind?

In derselben Studie bittet Rott (2014) Expert:innen aus verschiedenen Ländern, unterschiedliche Charakterisierungen von *Heurismen* (aus der Literatur) zu bewerten. 18 Expert:innen haben neun Charakterisierung bewertet und einige von den Expert:innen haben eine eigene Charakterisierung geliefert. Aus diesen empirischen Einblicken formuliert er eine (mit Vorbehalten, vorläufige) Definition für *heuristics*:

„Heuristics is a collective term for devices, methods, or (cognitive) tools, often based on experience. They are used under the assumption of being helpful when solving a problem (but do no guarantee a solution). There are general (e.g. “working backwards”) as well as domain-specific (e.g., “reduce fractions first”) heuristics. Heuristics being helpful regards all stages of working on a problem, the analysis of its initial state, its transformation as well as its evaluation. Heuristics foster problem solving by reducing effort (e.g., by narrowing the search space), by generating new ideas (e.g., by changing the problem´s way of representation or by widening the search space), or by structuring (e.g., by ordering the search space or by providing strategies for working on or evaluation a problem). Though their nature is cognitive, the application and evaluation of heuristics is operated by *metacognition*.” (Rott, 2014, S. 188f.)

Abgrenzung zu ähnlichen Begriffen

Heurismen werden oftmals synonym als Problemlösestrategien verstanden (z. B. Leuders, 2010). Durch die namentliche Ähnlichkeit sollten diese allerdings nicht mit Lernstrategien verwechselt werden, wobei in einem Teilbereich einige Ähnlichkeiten existieren. Lernen wird als ein Informationsverarbeitungsprozess verstanden, welcher von Lernenden durch bestimmte Verhaltensweisen und Gedanken beeinflusst werden kann. Solche Verhaltensweisen und Gedanken, die Lernende nutzen, um ihren Wissenserwerb zu steuern, werden als Lernstrategien bezeichnet (Friedrich & Mandl, 2006, S. 1). *Heurismen* hingegen sind eher mathematische Tätigkeiten, die beim Lösen eines Problems helfen können (Holzäpfel et al., 2018, S. 87). Typischerweise werden Lernstrategien in kognitive, metakognitive und ressourcenbezogene Lernstrategien aufgeteilt[15]. Innerhalb der kognitiven Lernstrategien wird darüber hinaus zwischen Tiefen- und Oberflächenstrategien unterschieden. Viele Tiefenstrategien[16] stellen sich im Kontext des Problemlösen als hilfreich heraus und ähneln somit *Heurismen*. Diese Ähnlichkeit der kognitiven Prozesse diskutiert Leuders (2010) und beschreibt, dass jedes Lernen eine Art Problemlöseprozess ist. Zwischen dem Erwarteten (Zielzustand) und der aktuellen Situation (Anfangszustand) liegt eine Diskrepanz (Hürde), die es zu überwinden gilt. Diese Lernsituation ähnelt demnach einem Problemlöseprozess. Obwohl es diese Überschneidungen gibt, sind *Heurismen* und Lernstrategien voneinander verschieden (siehe in den Beschreibungen der Begriffe).

Es soll außerdem eine weitere Abgrenzung zu den Begriffen Intuition bzw. Kreativität (Winter, 2016, S. 220ff.) sowie Geistige Beweglichkeit (Bruder, 2000) in der Mathematikdidaktik vorgenommen werden. Die Intuition gilt als Entdeckungsapparat und das „plötzliche Gewahrwerden“ wie z. B. das Erkennen von Analogien kann nur als ein intuitiver Prozess verstanden werden. Durch

---

15 Eine ausführliche Beschreibung von Lernstrategien befindet sich in Kapitel 1.2.5 oder Göller (2020, S. 94ff.).

16 Ein Überblick über einige Tiefenstrategien: Multiple Repräsentationen des Lernstoffs (Darstellungswechsel), mit eigenen Worten umformulieren, Informationen auf das Wesentliche reduzieren, Beispiele betrachten, etc. (weitere Tiefenstrategien zu finden bei Göller, 2020; S. 114; Liebendörfer et al., 2021; Stenzel, 2023a, S. 22)

mathematische Erfahrungen könne diese Intuition verbessert werden, wodurch ebenfalls das Problemlösen profitiert (Winter, 2016, S. 221). Geistige Beweglichkeit spielt ebenfalls eine wichtige Rolle beim Problemlösen (Hasdorf, 1976, S. 16). Bruder und Collet (2011, S. 33) teilen für den mathematischen Kontext in fünf Erscheinungsformen geistiger Beweglichkeit auf. *Reduktion* (Fokussieren auf das Wesentliche), *Reversiblität* (Umkehrung von Gedankengängen), *Aspektbeachtung* (gleichzeitiges Beachten mehrerer Aspekte, die Abhängigkeit von Dingen erkennen und gezielt variieren), *Aspektwechsel* (Wechsel von Annahmen oder Kriterien, Umstrukturieren eines Sachverhalts) sowie *Transferierung* (Übertragung von Vorgehen auf einen anderen, ähnlichen Kontext).
Im Gegensatz zu *Heurismen* sind Intuition und geistige Beweglichkeit „Fähigkeiten", welche unterbewusst und intuitiv angewandt werden. Es gibt demnach Personen, die ohne *Heurismen* auskommen, da sie bereits intuitiv handeln und somit gut Probleme lösen können. Sind diese Fähigkeiten allerdings nicht vorhanden, so kann das Erlernen von *Heurismen* hilfreich sein (König, 1992).

2.5.2 Kategorisierung von Heurismen

Zum besseren Verständnis von *Heurismen* lassen sich diese in verschiedene Kategorien unterteilen. In der Mathematik und Mathematikdidaktik lassen sich drei unterschiedliche Gruppierungen von *Heurismen* identifizieren (Rott, 2018).

1. Nützlichkeit und Trainierbarkeit: Einige Werke zum Problemlösen stellen *Heurismen* vor, die als nützlich bzw. erfolgreich gelten. Diese entstehen in Kontexten von mathematischen Wettbewerben und hinsichtlich der Trainierbarkeit von Problemlösestrategien. Dabei werden diese oftmals im Zusammenhang mit bestimmten Aufgaben präsentiert (z. B. an mehreren Stellen bei Engel, 1998, z. B. S.7).
2. Inhaltliche Ähnlichkeit: Schreiber (2011, S. 95ff.) schlägt eine Kategorisierung nach inhaltlichen Kriterien und gemeinsamen Merkmalen vor, basierend auf den Ausarbeitungen von Pólya. Diese umfasst vier Kategorien: *Heurismen* der Induktion (z. B. „Probiere systematisch"), Variation (z. B. „Variiere das Gegebene"), Interpretation (z. B. „Suche nach Analogien") sowie Reduktion (z. B. „Arbeite rückwärts"). Eine ähnliche Unterteilung befindet sich in der Systematik von Schwarz (2006), der in *Heurismen* der Variation, Induktion und Reduktion unterteilt.
3. Reichweite in Bezug auf die Gestaltung von Problemlöseprozessen: Tietze (2000, S. 99ff.) unterscheidet zwischen „globalen" und „lokalen *Heurismen*. Globale *Heurismen* betreffen den gesamten Problemlöseprozess und beinhalten Strategien wie die Planung und

Organisation des Lösungsprozesses in Phasen (z. B. wie die vier Phasen von Pólya, 1949). Lokale *Heurismen* konzentrieren sich auf spezifische Schritte in einem Problemlöseprozess, z. B. wie das Finden von Spezialfällen oder das Zerlegen von Problemen in Teilaufgaben. Insgesamt ist die Aufteilung in „lokal“ und „global“ nur eine grobe Kategorisierung zur Orientierung (Tietze, 2000, S. 99).
Eine zweite Möglichkeit, *Heurismen* nach der Reichweite einzuteilen, ist die Aufteilung zwischen Hilfsmittel, Prinzipien und Strategien (Bruder & Collet, 2011)[17]. Heuristische Hilfsmittel verfügen zunächst über keinen Verfahrenscharakter, sondern dienen dem Verstehen und der Strukturierung bzw. Reduktion von Problemen. Beispiel sind Tabellen, Lösungsgraphen oder Skizzen. Heuristische Strategien zielen auf die Entwicklung eines Lösungsplans ab, z. B. wie das Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten und systematisches Probieren (Bruder, 2000). Sie beschreiben damit allgemeine Vorgehensweisen für eine Problemsituation, ohne algorithmischen Charakter. Damit ähneln sie den Beschreibungen der „globalen“ *Heurismen* von Tietze (2000). Heuristische Prinzipien hingegen ähneln den Beschreibungen von „lokalen“ *Heurismen*. Sie geben konkrete Hilfestellungen, oft problem- bzw. inhaltsspezifisch, die beim Finden von Lösungsideen helfen. Beispiele sind Analogie-, das Transformations- und das Extremalprinzip sowie das Arbeiten mit Spezialfällen. Rott (2018) resümiert, dass ebenfalls diese Einteilung nicht trennscharf ist. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten können sowohl global als auch sehr lokal eingesetzt werden. Dennoch geben diese Kategorisierungen einen Überblick und liefern praktikable Unterscheidung von *Heurismen*.

Einordnung in den Problemlöseprozess

In den Beschreibungen der verschiedenen Kategorisierungen zu Heurismen wird bereits angedeutet, dass bestimmte Heurismen an unterschiedlichen Stellen des Problemlöseprozesses genutzt werden. Heuristische Prinzipien, Strategien und Hilfsmittel beschränken sich nach Müller (1992) primär auf die ersten beiden Phasen des Problemlöseprozesses nach Pólya (Kapitel 2.3.3). Dabei helfen diese bei der Orientierungs- sowie Such- und Planungsphase. König (1992) bezieht sich ebenfalls auf die Unterteilung von Phasen nach Pólya, allerdings schreibt er der zweiten Phase eine dominierende Rolle für heuristische Vorgehensweisen zu. Die erste und vierte Phase sind darüber hinaus auch nicht frei von heuristischen Elementen. In der dritten Phase kommen keine heuristischen Elemente vor, da diese Schritte im Prinzip von „jedem Schüler erlernbar“ sind. Zu ähnlichen

17 Einige Beispiele zu dieser Kategorisierung von Heurismen befinden sich in Tabelle 6.

Erkenntnissen kommt Schoenfeld (1985). Heuristische Elemente tauchen in seinen empirischen Untersuchungen zu Problemlöseprozessen in allen Phasen seines Modells auf (Kapitel 2.3.3), mit Ausnahme der *Implementation*. Dabei ist die Phase der *Exploration* allerdings das heuristische Herzstück, in denen die meisten heuristischen Aktivitäten stattfinden.

Beispiele von Heurismen

In den vorherigen Ausführungen wurden bereits an einigen Stellen Beispiele für Heurismen angedeutet. Dabei existiert, wie bei der Kategorisierung, keine einheitliche und „vollständige" Liste. Es gibt allerdings einige Arbeiten, auf die in der Literatur Bezug genommen wird. Eine davon ist die Auflistung nach Pólya (1945, S. xvii), in der für jede Phase passende Fragen und Arbeitsanregungen für Problemlösende aufgelistet sind (Tabelle 5).

Phase	Fragen (Auflistung einer Auswahl)
Phase 1: Verstehen der Aufgabe	What is the unknown? What is the condition? Draw a figure.
Phase 2: Ausdenken eines Plans	Have you seen it before? Or in a slightly different form? Do you know related problems? Could you restate the problem?
Phase 3: Ausführen eines Plans	Can you see clearly that the step is correct? Can you prove that it is correct?
Phase 4: Rückschau	Can you check the result? Can you use the result differently?

Tabelle 5: Kleiner Ausschnitt aus Pólyas (1945, S. xvii) Problemlösestrategien

2.5.3 Einsatz von Heurismen

Die Beschreibungen von Heurismen geben auf den ersten Blick den Anschein, dass die Anwendung einer problemlösenden Person hilft, zu einer Lösung zu gelangen. Doch bereits zu Beginn dieses Kapitels wurde die Eigenschaft erwähnt, dass Heurismen mathematische Aktivitäten sind, die beim Problemlösen helfen können, aber keinen sicheren Erfolg garantieren (Holzäpfel et al., 2018, S. 87). Früher gab es darüber hinaus wenig Belege, dass Heurismen zu einer höheren Problemlösekompetenz führen.

„ … the critic of the strategies […] is that the characterizations of them were *descriptive* rather than *prescriptive*. That is, the characterizations allowed one to recognize the strategies when they were being used. However, Pólya´s characterizations did not provide the amount of detail that would enable people who were not already familiar with the strategies to be able to implement them." (Schoenfeld, 1992, S. 353)

Heurismus	**Umschreibung**
Heuristisches Hilfsmittel	
Skizze / informative Figur	Das Anfertigen einer Skizze oder Zeichnung – nicht nur bei geometrischen Problemen; eine informative Figur kann auch die Darstellung von Zuordnungen mit Pfeildiagrammen oder von funktionalen Zusammenhängen (im Koordinatensystem) sein (Bruder, 2000)
Wissensspeicher	Sammlungen / Regelhefte, in denen Wissen über Zusammenhänge, Verfahren und Begriffe festgehalten wird (Collet, 2009, S. 58; Degener et al., 2005, S. 166)
Heuristisches Prinzip	
Analogieprinzip	Die Suche nach ähnlichen oder vergleichbaren (Hilfs-)Aufgabe, deren Resultat oder Lösungsweg übertragen werden kann (Pólya, 1949, S. 60f.)
Spezialisieren	Übergang zu einer neuen Problemstellung, mit der ursprünglichen als Verallgemeinerung, z. B. indem man anstelle von n-Ecken zunächst Dreiecke betrachtet (Pólya, 1949, S. 209; Schoenfeld, 1985, S. 76ff.)
Heuristische Strategien	
Vorwärtsarbeiten	Man betrachtet den Anfangszustand bzw. das Gegebene und versucht davon ausgehen, den Zielzustand bzw. das Gesuchte zu erreichen (König, 1992; Pólya, 1949, S. 200)
Systematisches Probieren	Systematisches Testen von Elementen (Einsetzen von Werten bzw. Betrachten von Fällen) mit dem Ziel, sich der Lösung anzunähern (Schwarz, 2006, S. 156)

Tabelle 6: Zusammenstellung einiger Heuristischer Hilfsmittel, Prinzipien und Strategien (Beispiele aus Rott, 2013, S. 76ff.)

Insgesamt eignen sich Heurismen dafür, Problemlöseprozesse im Nachhinein nachzuvollziehen und zu reflektieren. Im Vorhinein ist nur schwer absehbar, welche Heurismen einen positiven Einfluss auf die Lösung ausüben. Dies liegt in der Natur von Heurismen, da sie im Gegensatz zu spezifischen Algorithmen eher vage sind (Holzäpfel et al., 2018). Allerdings gibt es mittlerweile Hinweise darauf, dass insbesondere heuristische Hilfsmittel förderlich für den Problemlöseprozess im Hochschulkontext sein können (z. B. Lehmann, 2018, S. 236, S. 252; Stenzel, 2023a, S. 148).

„Our interpretations of Polya´s heuristics is that the strategies are intended to help problem solvers think about, reflect on, and interpret problem situations, more than they are intended to help them decide what to *do* when 'stuck' during a solution attempt." (Lesh & Zawojewski, 2007, S. 768)

Des Weiteren scheint es so, dass Heurismen oftmals zu allgemein beschrieben werden (Schoenfeld, 1992, S. 54ff.), um Problemlösende tatsächlich zu unterstützen. Der gleiche Heurismus kann bei unterschiedlichen Aufgaben ebenfalls unterschiedliche Ausprägungen annehmen (Holzäpfel et al., 2018, S. 153; Schoenfeld, 1992, S. 53ff.). Dies zeigt, dass Heurismen ggfs. inhaltsspezifischer oder sogar noch spezieller formuliert werden sollten. Insgesamt lässt sich dennoch festhalten, dass Problemlösebemühungen nur dann erfolgreich sein können, wenn Heurismen genutzt werden (Holzäpfel et al., 2018, S. 152). Dafür müssen der problemlösenden Personen mehr als nur wenige Heurismen und somit ein gewisses heuristisches Vokabular zur Verfügung stehen, welches in Problemlösesituationen flexibel angewandt werden kann (Koichu et al., 2007).

2.5.4 Synthese zu Heurismen

Heurismen lassen sich in verschiedene Kategorien einteilen, wobei diese nicht immer trennscharf voneinander zu unterscheiden sind. Trotzdem wird in dieser Arbeit auf die Aufteilung (heuristisches Prinzip, heuristisches Hilfsmittel und heuristische Strategie) von Bruder und Collet (2011) zurückgegriffen, da diese einen praktikablen Überblick über Heurismen gibt. Auf diese Aufteilung stützt sich darüber hinaus auch die weitere Forschung (z. B. Lehmann, 2018; Rott, 2013; Stenzel, 2023a). Aufgrund der inhaltlichen Spezifik im hochschulischen Mathematikkontext sollten allerdings geeignete Heurismen gezielt untersucht werden. Dafür wird ein Kategoriensystem eingesetzt, das speziell für mathematische Anforderungen auf Hochschulebene angepasst wurde. Dieses Kategoriensystem wird in Kapitel 5.4.3 weiter ausgeschärft und dient als Grundlage für die Analyse der verwendeten Heurismen.

2.6 Beliefs

Obwohl *Beliefs* (= Überzeugungen, Glauben und Vorstellungen) in dieser Arbeit nicht behandelt werden, gehören diese dennoch zur Theorie des Problemlösens nach Schoenfeld (1985). Aus Gründen der Vollständigkeit wird daher in einem kleinen Abschnitt das Thema der *Beliefs* beleuchtet. In den Dissertationen von z.

B. Göller (2020, S. 69ff.) und Geisler (2019, S. 82ff.) wird ein größerer Überblick über *Beliefs* gegeben.
Menschen treffen Entscheidungen in ihrem alltäglichen Leben, bei denen sie relevantes Wissen sowie etablierte Verfahren ignorieren. Darüber hinaus können solche Entscheidungen stark voreingenommen und alles andere als rational sein (Einhorn & Hogarth, 1981; Kahneman et al., 1982). Schoenfeld (1985, S. 35) folgert daraus, dass pures kognitives Verhalten[18] selten vorkommt. Innerhalb eines bestimmten Kontextes werden Aufgaben im Rahmen der eigenen Perspektive ausgeführt, die darüber entscheidet, wie diese Aufgaben verstanden und angegangen werden. „Beliefs systems“ beeinflussen die Kognition, selbst wenn man sich dieser Überzeugung nicht bewusst ist (Schoenfeld, 1985, S. 35). Auch beim Lernen können *Beliefs* die Informationsaufnahme beeinflussen, sodass nur Informationen aufgenommen werden, welche in das eigene System passen (Blömeke, 2004). Insgesamt werden *Beliefs* eher als Disposition (*trait*) und nicht als situative (*state*) Zustände betrachtet, da sie sich über einen längeren Zeitraum hinweg kaum verändern und stabil bleiben (McLeod, 1992).
In der mathematikdidaktischen Literatur teilen Grigutsch und Törner (1998) mathematische *Beliefs* in vier Bereiche auf:

- Mathematik selbst als Disziplin (*Beliefs* über die Natur der Mathematik)
- Das Lernen von Mathematik
- Das Lehren von Mathematik
- Die eigene Person als Lernender oder Nutzer der Mathematik (*Self-Beliefs*)

Darüber hinaus stellt sich die Frage, welchen Einfluss *Beliefs* auf das Treiben von Mathematik hat. Schoenfeld (1985, S. 43f.) stellt im Kontext der Bearbeitung von Problemen heraus, dass einige Beliefs zu negativen Effekten führen können. So kann z. B. die Überzeugung, dass nur Genies imstande sind, Mathematik zu erkunden und zu schaffen, dazu führen, dass Probleme zu früh aufgegeben werden oder gar nicht erst versucht wird, diese zu lösen. Allerdings können gegenteilige Beliefs zu positiven Effekten führen.
Insgesamt zeigt sich, dass *Beliefs* einen Einfluss auf das Verhalten haben kann.

„One´s mathematical world view shapes the way one does mathematics.” (Schoenfeld, 1985, S. 44)

2.7 Neuere Studien zum mathematischen Problemlösen

In diesem Kapitel wird ein Überblick über neuere Studien im Bereich des mathematischen Problemlösens gegeben. Tiefere Einblicke in ältere Studien,

18 Pures kognitives Verhalten ist solches, welches nach ihm durch Wissen, Heurismen und Steuerung charakterisiert ist.

sogenannte Klassiker des Problemlösens, können bspw. in Rott (2013, S. 97ff.) nachgelesen werden. Die neueren Arbeiten haben einen direkten Einfluss auf die vorliegende Arbeit genommen und werden aufgrund ihrer Theorien, Methoden oder Ergebnisse im weiteren Verlauf dieser Arbeit mehrfach zitiert. Aus diesem Grund werden diese Arbeiten hier vorgestellt. Die Darstellung beschränkt sich dabei auf wesentliche Aspekte, da eine detaillierte Analyse der einzelnen Studien nicht erfolgen kann.

Dissertation von Rott (2013)

In seiner explorativen Studie untersucht Rott (2013) mathematisches Problemlösen im Allgemeinen sowie die spezifischen Problemlöseprozesse von Fünftklässlern. Der Fokus liegt dabei auf dem Verlauf der Prozesse, dem Einsatz von Heurismen und der Rolle von metakognitiven Aktivitäten. Grundlage der Untersuchung sind Daten aus dem Projekt MALU (Mathe AG an der Leibniz Universität), einem Förderprogramm für Fünftklässler:innen. Im Rahmen dieses Projekts wurden Videoaufnahmen von Schüler:innen erstellt, die in Partnerarbeit mathematische Problemaufgaben bearbeiteten. Die Daten wurden mit einem qualitativ-quantitativen Ansatz analysiert.
Die Untersuchung zeigt, dass die Prozesse der Schüler:innen in Phasen unterteilt werden können, die mit den Schoenfeld Episoden beschrieben werden. Die Ergebnisse betonen die Relevanz dieses Modells für die Beschreibung und Analyse von Problemlöseprozessen. Auf Basis der empirischen Daten entwickelt Rott darüber hinaus das Modell von Schoenfeld weiter, um den zyklischen Charakter des Problemlösen besser darzustellen. Des Weiteren können einige Heurismen (z. B. Systematisches Probieren, Rückwärtsarbeiten, Suchen nach Mustern) in den Prozessen der Schüler:innen identifiziert werden, die einen positiven Zusammenhang zwischen deren Einsatz sowie Problemlöseerfolg aufweisen. Einige Prozesse wurden hinsichtlich metakognitiver Aktivitäten gezielt an den Episodenwechseln untersucht. Dabei zeigt sich, dass insbesondere diese Wechsel oft von metakognitiven Aktivitäten geprägt zu sein scheinen.
Die Studie leistet darüber hinaus methodische Beiträge zur Analyse von Problemlöseprozessen, bspw. durch die Entwicklung von Kodiermanualen zu den Schoenfeld Episoden sowie Heurismen.

Dissertation von Stenzel (2023a)

Die Zielsetzung der Studie von Stenzel (2023a) ist, mathematisches Problemlösen von Studienanfänger:innen genauer zu untersuchen und daraus eine Fördermaßnahme für deren Problemlösekompetenz zu entwickeln. Die Studie verwendet einen Mixed-Methods-Ansatz. Es wurde eine Intervention im Sinne von Design-Based-Research entwickelt und über sieben Semester in den Anfängervorlesungen Lineare Algebra I oder Analysis I an der Universität Duisburg-Essen durchgeführt. Die Intervention modifizierte die traditionelle

Gruppenübung, in der Übungsaufgaben besprochen wurden. Zur Datenerhebung wurden aufgabenbasierte Interviews mit Studienanfänger:innen arrangiert, bei denen authentische Übungsaufgaben bearbeitet wurden. Die Interviews wurden videografiert und mit einem Fokus auf den Einsatz von Heurismen, Metakognition und den Einfluss von Vorwissen qualitativ analysiert. Zusätzlich wurden quantitative Daten erhoben, um den Einfluss der Intervention auf die Klausurergebnisse, die Bearbeitung von Hausaufgaben und die Teilnahme an den Übungsgruppen zu messen.
Die qualitative Analyse der Interviews zeigt, dass das Vorwissen der Studierenden den entscheidenden Faktor für den Erfolg beim Problemlösen darstellt. Studierende mit gutem Vorwissen setzen häufiger heuristische Strategien ein und zeigen mehr metakognitive Aktivitäten. Die Intervention hat zu einer stärkeren Reflexion des eigenen Problemlösevorgehens geführt und den bewussten Einsatz von Heurismen gefördert. Die quantitativen Daten zeigen zwar leichte Vorteile für die Interventionsgruppe, diese sind jedoch nicht statistisch signifikant.

Dissertation von Lehmann (2018)

Die Studie von Lehmann (2018) widmet sich der Analyse relevanter mathematischer Kompetenzen von Ingenieurstudierenden im ersten Studienjahr. Dabei wird sowohl das Wissen als auch die Fähigkeit zur Anwendung dieses Wissens im Kontext des Problemlösens betrachtet. Die Untersuchung wurde im Rahmen des Forschungsprogramms KoKoHs (Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor) durchgeführt. Die Studie folgt einem Mixed-Methods-Design. Quantitative Daten wurden mithilfe von standardisierten Tests erhoben, die schulisches und hochschulisches Wissen im Bereich Mathematik und Physik umfassen. Qualitative Daten wurden durch Videografie von Gruppen- und Einzelarbeiten gewonnen, während Studierende Aufgaben aus den Bereichen Mathematik und Physik bearbeiteten.
Die quantitativen Ergebnisse zeigen deutliche Zusammenhänge zwischen den mathematischen und physikalischen Kompetenzen der Studierenden. Studierende mit besseren mathematischen Fähigkeiten zu Studienbeginn erzielen auch am Ende des ersten Studienjahres höhere Leistungen in Mathematik und Technischer Mechanik. Qualitative Analysen zeigen, dass eine strukturierte und planvolle Herangehensweise beim Problemlösen einen entscheidenden Einfluss auf den Erfolg hat. Insbesondere leistungsstärkere Studierende nutzen bevorzugt Problemlösestrategien, die ein tiefes konzeptuelles Verständnis fordern.

Dissertation von Herold-Blasius (2019)

In der explorativen Studie von Herold-Blasius (2019) wird untersucht, inwiefern Strategieschlüssel den Problemlöseprozess von Grundschulkindern der 3. und 4. Klasse beeinflussen. Ziel der Studie ist es herauszufinden, ob und wie diese

unterstützenden Materialien die Nutzung von Heurismen sowie den Erfolg beim Lösen mathematischer Aufgaben fördern.
Mithilfe eines Mixed-Methods-Ansatzes zeigt sich, dass die Nutzung von Strategieschlüsseln mit dem Einsatz von Heurismen sowie der Häufigkeit von Episodenwechseln im Problemlöseprozess positiv zusammenhängen. Strategieschlüssel erweisen sich somit als effektives Werkzeug zur Unterstützung des mathematischen Problemlösens bei Grundschulkindern.

3 Forschungsfragen

Bevor auf das Forschungsdesign und die Forschungsfragen eingegangen wird, erfolgt ein Kommentar zu Begrifflichkeit: In dieser Arbeit wird der Begriff des *mathematischen Problemlösens* in den theoretischen Ausführungen verwendet, wodurch auch die Bezeichnung *Problemlöseprozesse* geprägt wird. Dieser Begriff impliziert jedoch, dass ein Problem tatsächlich gelöst wird. Um der Realität mathematischer Prozesse gerecht zu werden, wird stattdessen der Begriff des *Problembearbeitungsprozesses* eingeführt und bevorzugt verwendet (wie in Rott, 2013, S. 33). Dieser umfasst nicht nur Prozesse, die zu einer Lösung führen, sondern schließt ebenso Bearbeitungsprozesse ein, die ergebnislos bleiben oder in denen keine vollständige Lösung erreicht wird. Um der theoretischen Grundlage Rechnung zu tragen, wird jedoch an einigen Stellen weiterhin die Begrifflichkeit des *Problemlöseprozesses* verwendet. Dies erfolgt mit dem Ziel, Konsistenz mit der bestehenden theoretischen Terminologie zu wahren, ohne die umfassendere Perspektive des Problembearbeitungsprozesses aus dem Blick zu verlieren.

Im Folgenden wird das Forschungsdesign der Studie erörtert sowie die daraus resultierenden Forschungsfragen unter Hinzunahme der theoretischen Ausarbeitungen abgeleitet. Das Forschungsdesign legt einen starken Fokus auf die empirische Untersuchung von mathematischen Lernprozessen im Kontext des mathematischen Problemlösens. Für diese Untersuchung ist es unerlässlich, den mathematischen Inhalt mit einzubeziehen. Dies begründet sich unter anderem damit, dass die Kategorie des *Wissens* unmittelbar mit dem mathematischen Inhalt gleichgesetzt werden kann (Schoenfeld, 1985, S. 17). Dementsprechend sollten mathematische Problembearbeitungsprozesse in einem inhaltlichen Kontext betrachtet werden, da sie ohne Berücksichtigung der zugrundeliegenden mathematischen Strukturen nicht adäquat untersucht werden können. Aus diesem Grund wird vor der empirischen Betrachtung von Problembearbeitungsprozessen bereits einer stoffdidaktischen Fragestellung nachgegangen. Diese vorangestellten stoffdidaktischen Überlegungen dienen somit als unterstützendes Element für die nachfolgenden empirischen Analysen.

3.1 Stoffdidaktische Fragestellungen zur Differentialrechnung

Der mathematische Inhalt, auf den sich diese Arbeit fokussiert, ist die Differentialrechnung. Dies stellt ein zentrales Gebiet der Mathematik dar, welches durch eine Vielzahl von Definitionen, Sätzen und Verfahren charakterisiert ist. Vor diesem Hintergrund stellt sich die didaktische Frage, wie dieser umfangreiche Inhaltsbereich gezielt für den ingenieurwissenschaftlichen Kontext aufbereitet werden kann. Dabei ist zu berücksichtigen, dass nicht sämtliche Aspekte der Differentialrechnung für die Untersuchung der

empirischen Daten von Relevanz sind. Die stoffdidaktische Analyse beschränkt sich daher auf ausgewählte, relevante Teilbereiche der Differentialrechnung, die unmittelbar mit den Problembearbeitungsprozessen verknüpft sind.
Aufbauend auf die stoffdidaktische Ausarbeitung werden im weiteren Verlauf die Anforderungen zu den jeweiligen Aufgaben dieser Studie eingeordnet (Kapitel 5.3). Außerdem wird die stoffdidaktische Ausarbeitung genutzt, um im empirischen Teil dieser Arbeit die Analysen zur Kategorie *Wissen* durchzuführen (Kapitel 6.2). Es ergibt sich somit die folgende stoffdidaktische Forschungsfrage, die in Kapitel 4 beantwortet wird:

(D1) *Wie lassen sich ausgewählte Teilbereiche der Differentialrechnung didaktisch aufbereiten, sodass sie für die Analyse zur Kategorie des Wissens beitragen?*

3.2 Empirische Fragestellungen zur Untersuchung von Problembearbeitungsprozessen

Freudenthal (1991, S. 87) macht deutlich, dass sich die Bildungsforschung häufig auf Produkte konzentriert, da diese leichter zu analysieren sind, während die Abfolge vor den Produkten, also die Lernprozesse, oft vernachlässigt werden. Dabei sind gerade diese Prozesse didaktisch von zentraler Bedeutung, weil sie zeigen, wie Lernen tatsächlich geschieht. Während Produkte (wie Testergebnisse oder abgeschlossene Aufgaben) nur das Endergebnis eines Lernprozesses darstellen, geben die Prozesse Einblick in die Strategien, Denkweisen und Herausforderungen, die Lernende durchlaufen. Didaktisch sind Prozesse entscheidend, weil sie die Grundlage dafür bilden, das Lehren nicht nur ergebnisorientiert, sondern auch lernorientiert zu gestalten.
An Universitäten finden solche Lernprozesse in mathematischen Veranstaltungen regelmäßig statt, insbesondere durch die typische, wöchentliche Bearbeitung von Hausaufgaben. Diese Prozesse lassen sich als mathematische Problembearbeitungsprozesse auffassen (Kapitel 1.3.1). Um realitätsnahe Erkenntnisse über solche Lernprozesse zu gewinnen, müssen diese ebenfalls möglichst nah an der tatsächlichen Studienrealität erhoben und analysiert werden. Da das authentische Lernen aufgrund begrenzter Forschungsressourcen nicht über das gesamte Semester hinweg verfolgt werden kann, wird entschieden, den Fokus auf einen spezifischen Inhaltsbereich zu legen. Dafür wird das Thema der Differentialrechnung ausgewählt. Diese Eingrenzung auf einen spezifischen Inhalt ist auch im Hinblick auf die Kategorie *Wissen* sinnvoll, da die Bearbeitungsprozesse zu diesen Aufgaben mithilfe Wissensmatrizen verglichen werden können. Aufgaben(bearbeitungen) aus unterschiedlichen Inhaltsbereichen haben unter Umständen unterschiedliche Anforderungen, wodurch die resultierenden Wissensmatrizen ebenfalls stark unterschiedlich wären. Letztlich

ist die Differentialrechnung zwar in jedem mathematikhaltigen Studiengang von Bedeutung, jedoch profitieren insbesondere Ingenieurstudierende von einem fundierten Verständnis in diesem Bereich, da sie im Anwendungskontext für Ingenieur:innen besonders wichtig ist (Kapitel 4.1). Daher wird der Fokus der Untersuchung auf diese Zielgruppe gelegt.
Insgesamt ergibt sich demnach das Forschungsinteresse dieser Arbeit (Kapitel 1.4), mathematische Problembearbeitungsprozesse von Ingenieurstudierenden bezüglich der Differentialrechnung in einem authentischen Setting zu untersuchen.
Problemlösen ist eine wichtige Kompetenz, die nicht nur im Mathematikstudium, sondern auch im Studium für Ingenieur:innen wichtig ist (Kapitel 2.1). Bisherige Studien zu Problembearbeitungsprozessen haben bislang vorwiegend das Denken von Schüler:innen untersucht (z.B. Herold-Blasius, 2019; Rott, 2013). Auf Hochschulebene liegen Forschungsergebnisse zu Problembearbeitungsprozessen bislang nur von Stenzel (2023a) und Lehmann (2018) vor. Insbesondere authentische mathematische Problembearbeitungsprozesse von Ingenieurstudierenden wurden bisher jedoch kaum untersucht (Kapitel 2.1). Aus den theoretischen Ausführungen dieser Arbeit lassen sich Problemlöseprozesse mit den vier Kategorien beschreiben, die ebenfalls einen Einfluss auf den Problemlöseprozess haben können: *Wissen*, *Heurismen*, *Steuerung*, *Beliefs* (Schoenfeld, 1985). *Beliefs* werden in der Forschung oft als (relativ) stabile Konstrukte betrachtet. Für ihre Erhebung haben sich Methoden wie Fragebögen oder Interviews als effektiv erwiesen. Allerdings greifen diese Methoden aktiv in den Problembearbeitungsprozess ein und stören somit den authentischen Verlauf, da sie von den Studierenden eine bewusste Reflexion ihrer *Beliefs* erfordern. Um den natürlichen Ablauf der Problemlöseprozesse nicht zu unterbrechen, wird in dieser Arbeit auf die Erhebung von *Beliefs* verzichtet. Der Fokus liegt stattdessen auf den dynamischen, unmittelbaren Aspekten der Problemlöseprozesse, die direkt im Prozess selbst sichtbar werden.
Die empirischen Forschungsfragen zum Problembearbeitungsprozess werden zunächst durch die drei Kategorien *Steuerung* (Kapitel 3.2.1), *Wissen* (Kapitel 3.2.2) und *Heurismen* (Kapitel 3.2.3) gegliedert. Abschließend werden die Kategorien gemeinsam hinsichtlich der Problembearbeitungsprozesse betrachtet (Kapitel 3.2.4). Zur Motivation der jeweiligen Forschungsfragen werden zunächst theoretische und empirische Erkenntnisse in einem kurzen Absatz dargestellt. Im Anschluss an diesen Absatz wird die dazugehörige Forschungsfrage formuliert.

3.2.1 Fragen zur Steuerung

Bisherige Studien beziehen sich vor allem auf die Untersuchung von Schüler:innen (Herold-Blasius, 2019; Rott, 2013), wobei Stenzel (2023a) im hochschulischen Kontext Problembearbeitungsprozesse von Studierenden analysiert. Für die Untersuchung solcher Problembearbeitungsprozesse eignet sich das Modell von Schoenfeld, da es die Dynamik der einzelnen Problemlösephasen erfasst (Kapitel 2.3). Da der Fokus ingenieurwissenschaftlicher Stundengänge in der Regel auf anwendungsorientierten Aufgaben liegt, ist eine Untersuchung der in diesem Kontext ausgeprägten Steuerungsfähigkeit von besonderem Interesse. Daraus ergibt sich folgende Forschungsfrage:

(S1) *Welche Episoden durchlaufen Ingenieurstudierende bei mathematischen Problembearbeitungsprozessen?*

In der Studie von Lehman (2018, S. 252ff.) wird deutlich, dass die Bearbeitungsprozesse mathematischer und physikalischer Aufgaben bei Ingenieurstudierenden über verschiedene Messzeitpunkte hinweg meist linear verlaufen. Ähnliches zeigt sich auch bei der Analyse von Schüler:innen (Rott, 2013, S. 296ff.). Dies steht jedoch im Kontrast zu Modellen, die betonen, dass Problemlöseprozesse typischerweise nicht-linear verlaufen. Es bleibt zu klären, ob in der aktuellen Studie ähnliche lineare Muster vorliegen oder nicht-lineare Dynamiken zum Tragen kommen.

(S2) *Welche Episodenwechsel treten in den Problembearbeitungsprozessen auf? Verlaufen die Prozesse linear?*

Schoenfeld (1985) prägte den Begriff „wild goose chases", um Prozesse zu beschreiben, bei denen keine Steuerung vorhanden ist. In solchen Fällen verfolgen die Lernenden einen Lösungsansatz, ohne weiterhin darüber nachzudenken. Sowohl in seinen eigenen Studien mit Studierenden (z. B. 1985) als auch in Studien mit Schüler:innen (z. B. Herold-Blasius, 2019; Rott, 2013) kann dieses Verhalten identifiziert werden. Interessanterweise können in mathematischen Problembearbeitungsprozessen in der Hochschule kein solches Verhalten nachgewiesen werden (Stenzel, 2023a, S. 122). Dies führt zur Frage, inwiefern sich dieses Verhalten in Problembearbeitungsprozessen von Ingenieurstudierenden identifizieren lässt.

(S3) *Inwiefern lassen sich „wild goose chases" in den Problembearbeitungsprozessen identifizieren und inwiefern können Studierende dieses Verhalten vermeiden?*

Schoenfeld (1985) beschreibt in seinen Untersuchungen, dass vier Kategorien Einfluss auf Problemlöseprozesse nehmen. Für die Kategorie Steuerung hebt er bspw. vier verschiedene Typen von Steuerung und den Einfluss auf Erfolg bzw. Misserfolg hervor (Schoenfeld, 1985, S. 110). Ein Beispiel ist dafür das Verhalten „wild goose chase". Darüber hinaus können auch hinsichtlich linearer und nicht-linearer Prozesse Aussagen über Erfolg bzw. Misserfolg getroffen werden (Lehmann, 2018, S. 252ff.). Daraus ergibt sich die Forschungsfrage:

(S4) *Inwiefern hängen die Schoenfeld Episoden mit dem Erfolg bzw. Misserfolg eines Problembearbeitungsprozesses zusammen?*

3.2.2 Fragen zum Wissen

Das Wissen der Studierenden spielt eine zentrale Rolle im Problemlöseprozess. Dabei ist entscheidend, auf welches Wissen sie während des Lösens von Aufgaben zurückgreifen können. Zum einen ist dies Wissen, das sie bereits mitbringen, zum anderen um solches, das sie im Rahmen der Veranstaltung (Vorlesung, Übungsgruppen, Hausaufgaben) erwerben. Im Allgemeinen liegt der Kern der Hochschulmathematik in ihrem Selbstverständnis als beweisende Disziplin (Heintz, 2000). Mathematische Veranstaltungen für Ingenieurstudierende werden dagegen oft als eher verfahrensorientiert und praxisnah beschrieben (Alpers, 2014; Alpers, 2016). Daher stellt sich die Forschungsfrage, welches spezifische Wissen in der Veranstaltung vermittelt wird und Studierenden für die Nutzung zur Verfügung steht.

(W1) *Welches Wissen wird von der Veranstaltung angeboten?*

Die Wissensmatrix entstammt der Theorie zur Unterrichtsphase „Systematisieren und Sichern“ und wurde ursprünglich entwickelt, um Wissen strukturiert zu erfassen und zu ordnen (Prediger et al., 2011). Erath (2017) hat die Wissensmatrix für ihren Forschungskontext adaptiert, um Aussagen von Schüler:innen im Klassenraum systematisch einzuordnen. Eine neue Anwendung der Wissensmatrix besteht nun darin, sie zur Beschreibung der Wissensnutzung bei Problembearbeitungsprozessen von Studierenden heranzuziehen. Die Untersuchung dieser Anwendung könnte zeigen, ob die Wissensmatrix auch in einem hochschulischen Kontext nützlich ist, um aktivierte Wissenselemente zu rekonstruieren. Daraus ergibt sich die Forschungsfrage:

(W2) *Wie lässt sich die Wissensnutzung in Problembearbeitungsprozessen mithilfe der Wissensmatrix rekonstruieren?*

Im hochschulischen Kontext existiert bislang kaum tiefergehende Forschung, die sich explizit mit der reinen Beschreibung der mathematischen Wissensnutzung von Studierenden beschäftigt. In diesem Zusammenhang ermöglicht die Wissensmatrix eine präzise Darstellung der Wissenselemente, die Studierende im Problembearbeitungsprozess nutzen. Dadurch ergeben sich zwei Forschungsfragen:

(W3) *Welche Wissenselemente werden von den Studierenden häufig genutzt?*
(W4) *Auf welche Wissenselemente setzen Studierende einen Fokus während der Prozesse?*

In Kapitel 3 werden verschiedene, typische Verständnisschwierigkeiten von Studierenden im Zusammenhang mit der Differentialrechnung aufgezeigt. Diese Schwierigkeiten befinden sich in verschiedenen Wissensarten und -facetten. Allerdings ist bisher nur wenig über die spezifischen Barrieren bekannt, die bei der Bearbeitung von (authentischen) Aufgaben in diesem Bereich auftreten. Im Kontext von (authentischen) Aufgabenbearbeitungen hat Stenzel (2023a, S. 160) feststellen können, dass sowohl begriffliche als auch prozedurale Schwierigkeiten entstehen. Aufgrund der unterschiedlichen Anforderungen hinsichtlich der Aufgaben, stellt sich die Frage, ob ähnliche Ergebnisse auch in dieser Studie identifiziert werden können.

(W5) *Welche Schwierigkeiten können während der Problembearbeitungsprozesse identifiziert werden?*

Auf Grundlage der vorherigen Ausführungen, die getrennt voneinander das Angebot und die Nutzung von Wissen beschrieben haben, sollen nun beide Betrachtungen zusammengeführt werden. Diese Zusammenführung ermöglicht es herauszufinden, inwiefern das angebotene Wissen in den Problembearbeitungsprozessen tatsächlich genutzt wird. Daher ergibt sich folgende Forschungsfrage:

(W6) *Welches Wissensangebot wird von der Veranstaltung angeboten und inwiefern wird dies von den Studierenden in ihren Bearbeitungen genutzt?*

Schoenfeld (1985) beschreibt Wissen als eine der vier Kategorien, die einen Einfluss auf den Problemlöseprozess und seinen Erfolg nehmen. In diesem Zusammenhang kann Stenzel (2023a, S. 160) für Fachstudierende aufzeigen, dass insbesondere Wissenslücken auf begrifflicher Ebene sowie prozedurale Mängel die Problembearbeitungsprozesse erheblich erschweren. Die Wissensmatrix liefert eine detailliertere Darstellung von Wissen und kann daher besser beschreiben, inwiefern Wissensarten bzw. -facetten sich als entscheidend für den Fortschritt in einem Problembearbeitungsprozess darstellen. Damit stellt sich die folgende Forschungsfrage:

(W7) *Inwiefern hängt die Wissensnutzung mit dem Erfolg bzw. Misserfolg eines Problembearbeitungsprozesses zusammen?*

3.2.3 Fragen zu Heurismen

Zunächst wird ermittelt, welche Heurismen in den Problembearbeitungsprozessen von Ingenieurstudierenden zu beobachten sind. Dabei stellt sich die Frage, welche heuristischen Hilfsmittel, Prinzipen und Strategien (Bruder & Collet, 2011) (am häufigsten) auftreten. Diese Untersuchung bildet die Grundlage für die Beantwortung der weiteren Forschungsfragen.

(H1) *Welche Heurismen treten in den Problembearbeitungsprozessen auf?*

In verschiedenen empirischen Studien wurde bereits die Nutzung unterschiedlicher Heurismen im hochschulischen Kontext nachgewiesen (z.B. Hoon et al., 2013; Lehmann, 2018; Stenzel, 2023a). Dabei variieren die spezifischen Kontexte jedoch deutlich, insbesondere hinsichtlich der gestellten Aufgaben. Die Unterschiede in den Aufgabenstellungen deuten darauf hin, dass der Einsatz von Heurismen je nach Situation unterschiedlich ausfallen kann. Rott (2013, S. 136ff.) stellt in seiner Studie theoretischen Annahmen zur Nutzung von Heurismen auf, die in speziellen Aufgaben als besonders hilfreich gelten. Dies legt nahe, dass es Heurismen gibt, die eher situationsspezifisch sind und je nach Aufgabe einen größeren Nutzen erbringen. Gleichzeitig weist Stenzel (2023a, S. 31) darauf hin, dass einige Problemlösende auch ohne die (bewusste) Anwendung von Heurismen auskommen. Dies deutet darauf hin, dass die Nutzung von Heurismen nicht nur aufgabenabhängig sein könnte, sondern ebenfalls von individuellen Faktoren beeinflusst wird. Insgesamt stellt sich damit die folgende Forschungsfrage:

(H2) *Ist die Nutzung von Heurismen aufgabenabhängig? Ist die Nutzung von Heurismen lerngruppenabhängig?*

Schoenfeld (1985) beschreibt Heurismen als Kategorie, die einen Einfluss auf Erfolg bzw. Misserfolg in Problemlöseprozessen hat. Insbesondere die gezielte Förderung von Heurismen erweist laut Singh et al. (2018) einen positiven Einfluss auf das mathematische Denken von Ingenieurstudierenden. Die Frage, welche spezifischen Heurismen diesen positiven Effekt begünstigen, wird in mehreren Studien thematisiert. Übereinstimmende Ergebnisse zeigen sich in den beiden Studien von Stenzel (2023a) und Lehmann (2019). Der Einsatz heuristischer Hilfsmittel hat generell einen förderlichen Einfluss auf den Problembearbeitungsprozess. In beiden Studien werden darüber hinaus einzelne spezifische Heurismen aufgeführt, die ebenfalls einen positiven Einfluss bewirken. Es ergibt sich somit die folgende Forschungsfrage:

(H3) *Inwiefern hängt die Nutzung der Heurismen mit dem Erfolg bzw. Misserfolg eines Problembearbeitungsprozesses zusammen?*

3.2.4 Fragen zur gemeinsamen Betrachtung von Steuerung, Wissen und Heurismen

In diesem Kapitel werden Forschungsfragen formuliert, welche die Problembearbeitungsprozesse der Studierenden anhand der drei Kategorien (*Steuerung*, *Wissen* und *Heurismen*) untersuchen.

Zunächst stellt sich die Frage, inwiefern sich die in der Literatur beschriebenen Interaktionen der Kategorien (Schoenfeld, 1985, S. 44) in den Daten dieser Arbeit wiederfinden lassen.

(Z1) *Welche Interaktionen lassen sich zwischen Steuerung, Heurismen und Wissen identifizieren?*

Episodenwechsel gelten bei Schoenfeld als kritische Momente, da sie eine signifikante Veränderung in der Bearbeitung von Aufgaben darstellen (Schoenfeld, 1985, S. 292). Besonders im Hinblick auf die Kategorie *Transition* betont Schoenfeld (1985, S. 300), dass diese eng mit den Prozessen der Selbstregulation verknüpft ist. Allerdings ist es durchaus möglich, dass über die Selbstregulation hinaus noch weitere Aspekte ausschlaggebend für einen Episodenwechsel sind. Es stellt sich daher die Frage, ob – nicht nur im Kontext der *Transition*, sondern auch weiteren Episoden – (vorhandenes) Wissen sowie der Einsatz von Heurismen ebenfalls einen Zusammenhang mit Episodenwechsel aufweist.

(Z2) *Welche Rolle spielen Wissen und Heurismen bei einem Episodenwechsel?*

In Kapitel 2.2 wird die Unterscheidung zwischen Routine- und Problemlöseaufgaben diskutiert. Während theoretisch im Voraus nicht eindeutig geklärt werden kann, ob eine Aufgabe als Problem gilt, könnte dies anhand empirischer Daten und der Analyse der relevanten Kategorien erschlossen werden. Diese Kategorien könnten Hinweise darauf geben, ob ein Problem vorlag. Stenzel (2023a, S. 13) nimmt an, dass die meisten Aufgaben für Studierende in der Eingangsphase Probleme darstellen. Im Ingenieurstudium hingegen wird Mathematik häufig anwendungsorientierter bzw. prozeduraler gelehrt (Alpers, 2014, 2016), wodurch möglicherweise weniger Probleme vorliegen, da viele Aufgaben durch Anwendung spezieller Verfahren gelöst werden können. Damit stellt sich im Kontext der Ingenieur:innen die folgende Forschungsfrage:

(Z3) *Kann empirisch entschieden werden, ob die Aufgaben für die Studierenden Probleme darstellen?*

4 Spezifizierung von Grundlagen der Differentialrechnung

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Fokus auf den Inhaltsbereich der Differentialrechnung in einer Veränderlichen gelegt (im weiteren Verlauf wird auf den Zusatz „in einer Veränderlichen“ zur besseren Lesbarkeit verzichtet). Das Ziel dieses Kapitels ist es, einen stoffdidaktischen Überblick zur Differentialrechnung zu liefern und anschließend eine Einordnung in die Wissensmatrix vorzunehmen. Es soll demnach deutlich werden, welche fachlichen Inhalte zur Differentialrechnung zuzuordnen sind (bezogen auf die Lehre in einem ingenieurwissenschaftlichen Studium) sowie welche didaktischen Perspektiven hinter dem mathematischen Inhalt stehen. Dabei wird nur auf derartige Inhaltsbereiche eingegangen, die für die empirischen Fragestellungen der Arbeit notwendig sind. Die stoffdidaktische Auseinandersetzung mit einem spezifischen Inhaltsbereich steht dabei in einem engen Zusammenhang mit der Kategorie *Wissen* nach Schoenfeld (1985). Bevor das Wissen bzw. die Wissensnutzung von Studierenden empirisch untersucht wird, ist eine theoretische Betrachtung notwendig, um die Bearbeitungsprozesse umfassend zu verstehen. Die Ausführungen in diesem Kapitel beantworten somit die Forschungsfragen:

(D1) *Wie lassen sich ausgewählte Teilbereiche der Differentialrechnung didaktisch aufbereiten, sodass sie für die Analyse zur Kategorie des Wissens beitragen?*

Das Kapitel 4.1 stellt zunächst die Relevanz der Differentialrechnung für Ingenieur:innen in den Vordergrund. Um sich inhaltlich mit der Differentialrechnung auseinandersetzen zu können, wird mathematisches Vorwissen benötigt, welches in Kapitel 4.2 beschrieben wird. Im Anschluss wird der Vier-Ebenen-Ansatz nach Hußmann und Prediger (2016) sowie ausgewählte mathematischen Inhalte der Differentialrechnung vorgestellt (Kapitel 4.3). Schlussendlich werden die vorherigen theoretischen Ausführungen zur Differentialrechnung in einer Wissensmatrix festgehalten (Kapitel 4.4).

4.1 Relevanz der Differentialrechnung im Kontext des Ingenieurstudiums

Besonders für Ingenieurstudierende nimmt die Differentialrechnung eine wichtige Rolle ein, da Konzepte und Anwendungen der Differentialrechnung viele Anknüpfungspunkte in der Technik sowie Naturwissenschaft besitzen.

„Viele physikalische Gesetzmäßigkeiten lassen sich nur über die Differenziation einer physikalischen Größe beschreiben. Ist beispielsweise bei einem Bewegungsvorgang das Weg-Zeit-Gesetz s(t) gegeben, dann ist die Geschwindigkeit v(t) die Ableitung des Weg-Zeit-Gesetzes nach der Zeit t. Die konkrete Bestimmung der Geschwindigkeit setzt rechentechnisch voraus, dass man die Funktion s(t) ableiten kann“ (Westermann, 2015, S. 243).

Fragestellungen im Zusammenhang mit Geschwindigkeit werden auch häufig als Motivation der Differentialrechnung genutzt, wobei weitere inner- und außermathematische Anwendungen existieren. Die Differentialrechnung hilft beim Lösen von Gleichungen, beim Maximieren und Minimieren sowie bei der Berechnung von komplizierten Funktionen, Flächen und Rauminhalten. Darüber hinaus findet sie auch bei Phänomenen wie Bewegungen, Kräften, Impulsen, Energien, dem Zusammenspiel der Gesteine als auch der Elementarteilchen und bildet somit eine wichtige Grundlage zum Verstehen (Burg et al., 2017).
Im SEFI-Framework (Alpers et al., 2013) ist die Differentialrechnung hauptsächlich in den Bereichen Core 0 und Core 1 verankert. Sie bildet damit die Grundlage für viele weiterführende mathematischen Inhalte. Aus diesem Grund wird die Differentialrechnung in der Regel in Mathematikveranstaltungen für Ingenieurstudierende in einem der ersten beiden Semester behandelt. Angesichts der zeitlichen Beschränkung werden meist lediglich Grundideen der Differentialrechnung behandelt, die den Studierenden im weiteren Verlauf des Studiums und im Beruf helfen sollen.
Es gibt daher eine Reihe von Anknüpfungspunkten und Anwendungen der Differentialrechnung, denen im späteren Berufsleben der Ingenieur:innen eine wichtige Bedeutung zukommen können. Dementsprechend erscheint ein ausgeprägtes und gefestigtes Wissen über die Differentialrechnung vor allem für Studierende der Ingenieurwissenschaften essenziell zu sein. Lax und Terrel (2014, S. 130) heben besonders die Änderungsrate als Teil der Ableitung als zentralen Aspekt hervor. Zudem geben sie einige Beispiele, in denen die Änderungsrate in verschiedenen Kontexten bedeutsam ist:

- Geschwindigkeit: Änderungsrate der Distanz als Funktion der Zeit
- Geschwindigkeit im Sinne einer vektoriellen Größe: Änderungsrate der Position als Funktion der Zeit
- Beschleunigung: Änderungsrate der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit
- Dichte: Änderungsrate von Masse als Funktion des Volumens
- Steigung: Änderungsrate der Höhe als Funktion der horizontalen Distanz
- Strom: Änderungsrate der Menge elektrischer Ladung als Funktion der Zeit
- Grenzkosten: Änderungsrate der Produktionskosten als Funktion der produzierten Stückzahl

Lax und Terrel (2014, S. 129) legen außerdem dar, dass Änderungen von (Funktions-)Größen bedeutsamer sein können als die (Funktions-)Größe selbst. Im mathematikdidaktischen Kontext lässt sich dies so einordnen, dass die dynamische Sichtweise der Kovariationsvorstellung von Funktionen wichtiger als die statische Sichtweise der Zuordnungsvorstellung von Funktionen aufgefasst wird[19]. Für eine Funktion bedeutet dies wiederum, dass die Änderung über einem Intervall oder im Anwendungskontext über einem Zeitintervall wichtiger ist als der Funktionswert. Am Börsenmarkt ist es zwar nicht unwichtig zu wissen, zu welchem Preis eine Aktie am nächsten Tag verkauft wird, allerdings wäre es relevanter zu wissen, ob sie am Tag davor zum gleichen, niedrigeren oder höheren Preis verkauft wurde. Es geht dabei also um die Änderung einer Größe. Wie bereits beschrieben, beziehen sich im Bereich der Ingenieurwissenschaften viele dieser Anwendungen (Mechanik, Optik, Wärme, Sound, etc.) auf die Änderung von Größen. Im weiteren Verlauf des Studiums sowie im späteren Berufsleben wird mit Methoden der Differentialrechnung gearbeitet, wodurch sich die Wichtigkeit herausstellt, gerade die Grundlagen der Differentialrechnung im ersten Semester zu durchdringen. Eine Anwendung für die Methoden der Differentialrechnung findet sich bei Differentialgleichungen wieder. Eine Differentialgleichung setzt eine unbekannte Funktion mit einer oder mehrerer ihrer Ableitungen in Beziehung. Härterich und Rooch (2014) stellen bspw. vier typische Praxisprobleme („Balancieren mit Differentialgleichungen: Der Segway“ – „Cool bleiben: Design eines Rippenkühlers“ – „Mit Trigonometrie schaukelfrei ans Ziel: Kransteuerung“ – „Immer mit der Ruhe: Schwingungstilgung“) aus verschiedenen Bereichen der Ingenieurwissenschaften umfänglich vor, die mithilfe von Mathematikkenntnissen zu lösen sind. Dabei spielen Differentialgleichungen in jedem dieser vier Projekte eine wichtige Rolle, um die aufgeworfenen Probleme lösen zu können. Ein grundsätzliches Verständnis der Differentialrechnung und deren Methoden ist daher eine notwendige Voraussetzung, um Differentialgleichungen lösen zu können.

4.2 Spezifizierung des Vorwissens für die Differentialrechnung

Zu dem mathematischen Vorwissen werden in dieser Arbeit der Funktionsbegriff (Kapitel 4.2.1), Grenzwertbegriff (Kapitel 4.2.2) sowie Stetigkeitsbegriff (Kapitel 4.2.3) gezählt. Diese drei Begriffe werden als Grundlagen für die Ableitung verstanden (Rasmussen & Zandieh, 2000) und sowohl aus fachlicher als auch

---

19 Auf die Kovariations- und Zuordnungsvorstellung wird in Kapitel 4.2.1 erneut eingegangen.
Kovariationsvorstellung: „Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird“ (Greefrath et al., 2016a, S. 48).
Zuordnungsvorstellung: Eine Funktion ordnet jedem Wert einer bestimmten Größe genau einen Wert einer anderen Größe zu (Greefrath et al., 2016a, S. 47).

didaktischer Perspektive eingeordnet. Dabei erfolgt die Darstellung der Grundlagen der Differentialrechnung hinsichtlich des Detailreichtums in einer gekürzten Form.

4.2.1 der Funktionsbegriff

Die Differentialrechnung setzt ein Verständnis von Funktionen voraus (Thomas et al., 2015). Funktionen werden in der Differentialrechnung auf ihre Eigenschaft der Differenzierbarkeit geprüft, die später als Voraussetzung für verschiedene Anwendungen benutzt wird. Bereits im Mathematikunterricht in der Schule gilt der Aufbau des Funktionenbegriffs als ein wichtiges Ziel (Ministerium für Schule und Bildung des Landes NRW, 2023). Der Schulunterricht ist damit prägend für das Verständnis des Funktionsbegriffs, da in der höheren Mathematik nicht mehr im Einzelnen auf Funktionen eingegangen, dies sondern als Vorwissen angesehen wird. Ein sicherer und flexibler Umgang mit Funktionen und deren Vorstellungen ist allerdings notwendig, um sich mit dem Ableitungsbegriff auseinanderzusetzen sowie im weiteren Verlauf mit Zusammenhängen und Verfahren der Differentialrechnung umgehen zu können.
Erfahrungen mit Funktionen machen Lernende bereits sehr früh im alltäglichen Leben. Funktionales Denken in Form von Abhängigkeiten passiert oft unbewusst, aber auf ganz natürliche Art und Weise. Ein anschauliches Beispiel hierfür ist: Je schneller man um den Sportplatz läuft, desto weniger Zeit wurde benötigt. Charakteristisch für solche Situationen ist, dass eine Variable frei veränderbar ist, allerdings die andere Variable abhängig von der ersten Variable ist (Greefrath et al., 2016a, S. 38). Historisch haben sich viele Mathematiker bemüht, diese Charakterisierung von Denken in Funktionen mathematisch zu präzisieren, wodurch verschiedene Definitionen entstanden sind. Mittlerweile hat sich allerdings der Dedekind´sche Funktionsbegriff durchgesetzt:

> „Unter einer Abbildung φ eines Systems S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit φ(s) bezeichnet wird“ (Büchter & Henn, 2010, S. 18).

Das Wort „Abbildung“ ist dabei synonym mit dem Wort „Funktion“ zu verstehen und „Gesetz“ meint einen konkreten Zusammenhang. Mittlerweile finden sich in mathematischen Lehrbüchern sprachliche Modernisierungen dieser Definition wieder, allerdings bleibt die Grundidee bestehen. Zu der modernen, allgemein anerkannten Definition von Funktionen gehören mitunter auch unstetige Funktionen, abschnittsweise definierte Funktionen und Funktionen, die für einen einzelnen Punkt anders als für die restlichen Punkte definiert sind sowie Funktionen, die durch Graphen definiert werden. In der Schule werden allerdings hauptsächlich Funktionen behandelt, die durch einen Term beschrieben werden (Vinner & Dreyfus, 1989).

Vinner und Dreyfus (1989) zeigen, dass etwa ein Drittel von Studierenden in einer Stichprobe aus dem ersten Semester eine Funktion nicht als solche erkennen können, wenn sie aus mehr als einem Term bestehen. Je komplexer die Anforderung an eine Funktion ist, desto eher argumentieren Studierende, dass keine Funktion vorliegt. Dies zeigt sich dadurch, dass die meisten (86 %) der Studienteilnehmenden noch zustimmen, dass eine Funktion vorliegt, wenn der Graph aus zwei Halbgeraden und einer Unstetigkeitsstelle besteht. Allerdings stimmen nur noch wenige (17 %) Studienteilnehmende zu, dass eine Funktion vorliegt, falls diese Funktion für ganze Zahlen nicht-ganzzahlig und für andere Zahlen ganzzahlig ist. Die formale Definition der Funktion scheint Studierende auch in anderen Studien vor Probleme zu stellen (z. B. Pettersson, 2012; Widada et al., 2020). Zum einen fällt es Studierenden schwer, eine formale Definition der Funktion aufzustellen (Beitlich et al., 2015), da sprachliche Mittel und passendes Vokabular fehlen. Zum anderen ergeben sich Schwierigkeiten beim Finden mathematisch korrekter Beispiele einer Funktion (Pettersson, 2012; Pettersson et al. 2013).

Exkurs: Variable

Bevor Funktionen weiter beschrieben werden, wird ein Exkurs zu Variablen eingeschoben, da Variablen im Funktionenbegriff eine wesentliche Grundlage bilden. In der mathematischen Literatur können verschiedene Definitionen zum Variablenbegriff gefunden werden. Allerdings beleuchten diese Definition den Begriff der Variable häufig nur einseitig, da nicht alle Aspekte thematisiert werden. Wie einige andere wichtige Begriffe in der Mathematik, lässt sich der Variablenbegriff nicht erschöpfend in einer Definition erfassen (Malle, 1993, S. 44).
Malle (1993, S. 46) unterscheidet bei Variablen daher in drei Aspekte, die in gegebenen Situationen flexibel verwendet werden können.

- Gegenstandsaspekt: Die Variable wird als eine feste, aber noch nicht genauer bekannte Zahl betrachtet.
- Einsetzungsaspekt: Die Variable ist eine Leerstelle für eine bestimmte Zahl und wird als Platzhalter angesehen.
- Kalkülaspekt: Die Variable wird als Symbol aufgefasst, mit dem man Rechenoperationen durchführen kann.

Alle drei Aspekte spielen in der Analysis und später bei dem Begriff der Ableitung eine wichtige Rolle. Der Kalkülaspekt kommt z. B. besonders bei den Ableitungsregeln zum Tragen, der Gegenstandsaspekt bei der Bezeichnung der Ableitung einer bekannten Funktion f mit f' und der Einsetzungsaspekt bei dem Prüfen der Differenzierbarkeit in einem Punkt einer Funktion (Büchter & Henn, 2010, S. 33f.).

Büchter und Henn (2010, S. 32f.) übernehmen die Aufteilung von Malle (1993), benennen die Aspekte allerdings in Grundvorstellungen (Gegenstandsvorstellung, Einsetzungsvorstellung und Kalkülvorstellung) um und teilen anschließend eigens den Begriff der Variablen in drei Aspekte auf. Sie begründen dies damit, dass eine weitere Unterscheidung von Variablenaspekten sinnvoll für Lehrtätigkeiten ist. An dieser Stelle soll kurz der Unterschied zwischen Aspekten und Grundvorstellungen skizziert werden: Aspekte lassen sich durch *fachwissenschaftliche* Analysen identifizieren: „Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann“ (Greefrath et al., 2016a, S. 15). Grundvorstellungen sind *fachdidaktischer* Art: Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn ergibt“ (Greefrath et al., 2016a, S. 15).

- Einzelzahlaspekt: Die Variable steht für eine feste Zahl.
- Simultanaspekt: Die Variable steht gleichzeitig für alle Zahlen in einem Zahlbereich.
- Veränderlichenaspekt: Die Variable wird als Veränderliche aufgefasst, die Zahlen aus einem Bereich repräsentiert und „durchläuft“.

Während der Einzelzahlaspekt und Simultanaspekt vermehrt in der Algebra zum Ausdruck kommen, besitzt der Veränderlichenaspekt besonders in der Analysis eine wichtige Bedeutung, z. B. beim Arbeiten mit Grenzwerten (Büchter & Henn, 2010, S. 34), welcher auch Teil des Differenzierbarkeitsbegriffs ist.

Grundvorstellungen und Darstellungsformen von Funktionen

Der formalen Definition der Funktion kann durch verschiedene Darstellungen Bedeutung und Interpretation verliehen werden. Dabei können erneut Grundvorstellungen helfen, einen Zugang zu dem Begriff zu erlangen.
Die folgenden drei Grundvorstellungen *Zuordnung*, *Kovariation* und *Objekt* basieren auf drei Aspekten, die Vollrath (1989) für das funktionale Denken herausgearbeitet hat und durch vom Hofe adaptiert (1996) wurden.

- Die Zuordnungsvorstellung ist so definiert, dass eine Funktion jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zuordnet.
- Die Kovariationsvorstellung ist so definiert, dass sie beschreibt, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirkt bzw. in welcher Form die zweite Größe von der ersten abhängig ist.
- Die Objektvorstellung ist so definiert, dass eine Funktion global und als einziges Objekt betrachtet wird sowie der Zusammenhang als Ganzes und die Eigenschaften als Ganzes fokussiert wird.

Im deutschen Bildungssystem wird im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I häufig zunächst die Zuordnung und erst im Anschluss die Kovariation als auch die Funktion als Ganzes thematisiert. Es wird allerdings gefordert, dass die Kovariation mehr im Fokus und stärker gefördert werden sollte, was sich international bereits als die gängige Praxis etabliert hat (Zindel, 2018, S. 36). Die Fokussierung der Kovariationsvorstellung kann Lernenden ermöglichen, das Funktionenverständnis von einer Variablen auf zwei zu erweitern und zu verallgemeinern (Weber & Thompson, 2014). Außerdem schafft die Kovariationsvorstellung bessere Voraussetzungen für das Erlernen späterer Konzepte der Mathematik, bspw. für das Arbeiten mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Carlson et al., 2003). Zusätzlich erlaubt die Kovariationsvorstellung den Lernenden, die Funktion als Prozess aufzufassen, der wiederum umgekehrt werden kann (Trujillo et al., 2023).

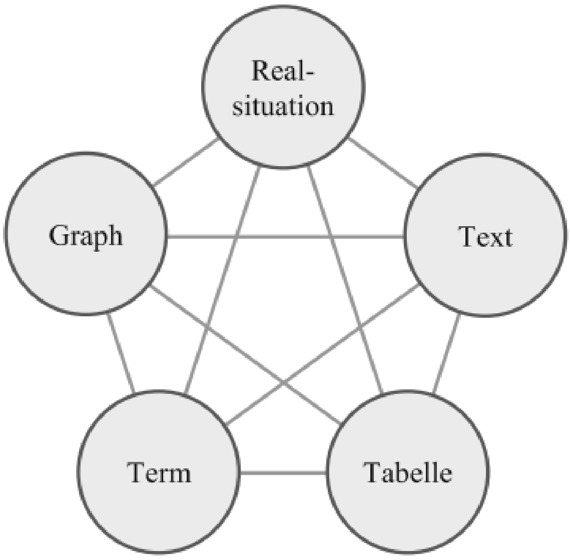


Abbildung 8: Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge und Wege des Transfers (Greefrath et al., 2016a, S. 57)

Neben den Grundvorstellungen gehören auch verschiedene Darstellungsformen von Funktionen zum Begriffsverständnis dazu. Die Transformation und der flexible Wechsel zwischen den Darstellungen ist eine wichtige Fähigkeit, um effektiv mit Funktionen in unterschiedlichen Kontexten zu arbeiten. Eine gute Auswahl der Darstellungsformen ist allerdings notwendig, da verschiedene

Darstellungen sowohl Vor- als auch Nachteile mit sich bringen (Büchter & Henn, 2010; Oehrtman et al., 2008). Abbildung 8 (Greefrath et al., 2016a, S. 57) zeigt die verschiedenen Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge und Wege des Transfers.

Die Darstellung mit Termen wird nahezu überall verwendet, wo eine Funktion zu finden ist. Dabei lässt sich in Funktionsterm ($f(x) = x^2 - 2$), Funktionsgleichung ($y = x^2 - 2$) und Zuordnungsvorschrift ($x \mapsto x^2 - 2$) unterscheiden, die jeweils die Zuordnung durch einen algebraischen Term bestimmt. Sowohl die Zuordnungsvorstellung, worauf die algebraischen Terme der Funktion basieren, als auch die Objektvorstellung können durch diese Darstellung in den Fokus gestellt werden. Der Kovariationvorstellung bekommt erst dann eine wichtigere Bedeutung, wenn Terme von Ableitungsfunktionen behandelt werden (Greefrath et al., 2016a). Die Termdarstellung von Funktionen gibt bereits Hinweise auf die Notation, wobei x üblicherweise als unabhängige Variable ein Element des Definitionsbereichs und $f(x)$ als abhängige Variable ein Element des Wertebereichs ist (Trujillo et al., 2023).

Das kartesische Koordinatensystem wird am häufigsten für die grafische Darstellung von Funktionen benutzt. Grundsätzlich wird die unabhängige Variable auf der x-Achse und die abhängige Variable auf der y-Achse abgetragen. Mit dieser Darstellung einer Funktion als Graph können punktuelle, lokale und globale Eigenschaften einer Funktion betrachtet werden, die jeweils erneut auf die Fokussierung einer Grundvorstellung zurückzuführen sind (Greefrath et al., 2016a, S. 53). Zunächst kann punktuell aus dem Graphen entnommen werden, welcher y-Wert zu welchem x-Wert zugeordnet wird (Zuordnungsvorstellung). Außerdem kann die Änderung der Funktionswerte in Abhängigkeit der Änderung der unabhängigen Variable untersucht werden (Kovariationsvorstellung). Zuletzt kann der Graph als Ganzes betrachtet und Eigenschaften wie Differenzierbarkeit, Stetigkeit etc. untersucht werden (Objektvorstellung). Obwohl die grafische Darstellung einer Funktion unterstützend wirken kann, ist die Übertragung auf ein reales Problem nicht immer unproblematisch. Es hat sich in den Studien von O`Shea et al. (2016) und Yusof et al. (2014) herausgestellt, dass Studierende Schwierigkeiten damit haben, den Funktionsgraphen eines realen Phänomens korrekt mathematisch zu interpretieren. Besonders an der Stelle des Modellierens und der Nutzung von Funktionen in realen Problemen sieht Sierpinska (1992) allerdings eine Chance, das Konzept der Funktion besser zu verstehen.

Vandebrouck (2011) stellt im Hinblick auf den Funktionsbegriff im Kontext des Übergangs von Schule zur Hochschule heraus, dass Lernende Schwierigkeiten haben, eine lokale Perspektive einzunehmen. Dies kann damit zusammenhängen, dass in der Schule weniger die Kovariationsvorstellung im Fokus steht und der Begriff der Funktion eher durch die Zuordnungsvorstellung motiviert wird (Zindel, 2018, S. 36). Eine lokale Perspektive einzunehmen wäre für den universitären Kontext hilfreich, da einige Konzepte lokal definiert werden. Laut der Studie von Vandebrouck (2011) müsste im Übergang von der Schule zur Hochschule der Funktionsbegriff bei den Lernenden so umstrukturiert werden, dass er sowohl als Prozess als auch als Objekt verstanden wird. Dabei geht es darum, dass Lernende nicht nur einzelne Schritte bei der Anwendung von Funktionen nachvollziehen, sondern auch die Funktion als ein zusammenhängendes Ganzes begreifen können. Ein stärkerer Fokus auf die Kovariationsvorstellung im Unterricht könnte dazu beitragen, dass Lernende ein tieferes Verständnis für den Funktionsbegriff entwickeln und so besser auf die Anforderungen der Hochschulmathematik vorbereitet werden.

4.2.2 Der Grenzwertbegriff

Das Konzept des Grenzwerts ist ein zentraler Begriff, der üblicherweise als Grundlage für die Einführung in die Differentialrechnung dient und daher auf hochschulischem Niveau oft unmittelbar vor diesem Thema behandelt wird. Das Grenzwertkonzept wird bspw. für die Einführung des Begriffs der Differenzierbarkeit sowohl auf formaler als auch auf semantischer Ebene benötigt.

Der Begriff des Grenzwerts wird in hochschulischen Mathematikveranstaltungen häufig zunächst in Bezug auf Folgen eingeführt. Hinsichtlich Grenzwerte von Folgen werden in der Literatur verschiedene Vorstellungen beschrieben, die zu einem Aufbau des Begriffsverständnisses führen können. Dazu zählt zunächst die Annäherungsvorstellung, in der sich Folgenglieder einem bestimmten Wert annähern. Eine weitere Vorstellung ist die Umgebungsvorstellung, in der ab einem bestimmten Folgenglied eine noch so kleine Umgebung existiert, in der alle weiteren Folgenglieder liegen. Zuletzt zählt auch die Objektvorstellung dazu, in der Grenzwerte als mathematische Objekte, wie z. B. ein fester Wert, gesehen werden (Greefrath et al., 2016a, S. 105f). Um mit dem Grenzwert im Zusammenhang des Ableitungsbegriffs arbeiten zu können, muss der Grenzwert auch für Funktionen über $\mathbb{R}$ definiert werden. Anschaulich gesehen verhält sich dies ähnlich zum Grenzwert von Folgen, allerdings wird es beim Grenzwert für Funktionen etwas komplexer, da nun zwei Folgen zu betrachten sind (Cottril et al., 1996). Dabei wird der Ausdruck $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ als Schreibweise für den Grenzwert einer Funktion benutzt, der existiert, falls die Folge der x-Werte und die Folge der y-Werte ($y_n := f(x_n)$) konvergieren (Büchter & Henn, 2010). Die mittlerweile gängige Definition ist die Epsilon-N-Definition des Grenzwerts. Um im Zusammenhang mit Funktionen über $\mathbb{R}$ Grenzwerte untersuchen zu können und dort die Existenz von Grenzwerten nachweisen zu können, kann auf das Epsilon-Delta-Kriterium als Definition zurückgegriffen werden.

Mathematische Bemerkung 1 (Definition): Grenzwert

Für eine Funktion $f: D \mapsto \mathbb{R}$ heißt $A \in \mathbb{R}$ Grenzwert von f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |A - f(x)| < \varepsilon$$

Greefrath et al. (2016a, S. 78)

Im Mathematikunterricht bleiben die Betrachtungen von Grenzwerten meist auf anschaulich-propädeutischer Ebene (Skutella & Weygandt, 2021). Die formale Einführung des Begriffs findet in der Schule nicht statt (für NRW[20]: Ministerium für Schule und Bildung des Landes NRW, 2023). Der Übergang zu einem abstrakt-formalen Begriffsaufbau von Grenzwerten im Studium stellt daher eine Herausforderung für Studierende dar. Bezüglich der Epsilon-Delta-Definition für Grenzwerte zeigen Studien, dass sich Studierende auf bestimmte Stellen der Definition fokussieren und infolge der Vernachlässigung der logischen Verknüpfungen die Definition nicht ganzheitlich verstehen können (Bezuidenhout, 2001; Swinyard & Larsen, 2012). Dies führt dazu, dass nicht korrekte Kombinationen einzelner Teile einer vermeintlichen Definition als legitim angesehen, während andere korrekte Definitionen als falsch wahrgenommen werden (Bressoud et al., 2016). In den entscheidenden Phasen der Begriffsbildung schlägt Bender (1991, S. 239) anstelle der üblich formalen Epsilon-N-Definition eine Definition vor, die sich weniger auf die Quantoren, Ungleichungen und Beträge fokussiert. Diese kann den folgenden Wortlaut haben: „… falls das Wesentliche der Folge in jeder, noch so kleinen, Umgebung von *a* liegt.“ Diese Definition würde Lernende weniger abschrecken, obwohl es im Wesentlich dieselbe Definition sei. Möglicherweise werden dadurch auch die Probleme beseitigt, dass Studierende nur bestimmte Stellen der Definition fokussieren und sich mehr auf das ganzheitliche Verständnis der Definition konzentrieren können.

In einer Studie von Skutella und Weygandt (2021) wurde das fachliche Wissen zu Grenzwerten von Lehramt Bachelor- sowie Masterstudierenden untersucht. Dabei wurde deutlich, dass mehr als die Hälfte der Studierenden die Definition der

20 In Niedersachsen und Berlin-Brandenburg bleibt der Grenzwertbegriff ebenfalls auf anschaulich-propädeutischer Ebene. In Bayern hingegen wird in Jahrgangsstufe 11 von Schülerinnen und Schülern erwartet, dass die Definition des Differentialquotienten erläutert wird.

Konvergenz einer Zahlenfolge nicht adäquat grafisch darstellen konnte. Außerdem wurden den Studierenden Aufgaben gestellt, die vier typische Fehlvorstellungen zur Konvergenz von Folgen adressieren. Bezüglich dieser Aufgaben konnten lediglich ein Drittel der Studierenden drei oder mehr als solche identifizieren. Es scheint demnach eine Schwierigkeit für Studierende darzustellen, zwischen den (korrekten) Darstellungen und der Definition wechseln zu können.

Des Weiteren fassen viele Lernende den Grenzwert als dynamischen Prozess auf, bei dem sich sowohl die unabhängige als auch die abhängige Variable einem Wert annähert (Cottril et al., 1996). Dies ist allerdings gleichzeitig eine große Hürde beim Verständnis des Grenzwertbegriffs und laut Bender (1991) mitverantwortlich für Fehlvorstellungen und -verständnisse vom Begriff des Grenzwerts. Tall und Vinner (1981) haben untersucht, wie Lernende die Zahlenfolge 0.9, 0.99, 0.999, $\dots$ als 1 akzeptiert haben, jedoch $0,\overline{9}$ nicht mit 1 gleichsetzen. Dies verdeutlicht die Schwierigkeit, den beschriebenen „Grenzwertprozess" als Zahl aufzufassen.

Zudem stellt die sprachliche Verwendung des Begriffs „annähern" eine Herausforderung dar, da sie das Verständnis des Konzepts des Grenzwerts erschweren kann. Durch das Wort „annähern" kann leicht die Vorstellung ausgebildet werden, dass Monotonie impliziert sowie ein Grenzwert niemals erreicht wird (Tall & Vinner, 1981). Das Wort „annähern" lässt darauf schließen, dass Lernende das Konzept in einer frühen kognitiven Phase behandeln, in der sie sich noch auf einzelne Schritte konzentrieren, anstatt das Konzept als Ganzes zu begreifen. Ein tieferes Verständnis würde vielmehr erfordern, dass sich Lernende von der Betrachtung einzelner Prozesse lösen und das Konzept als zusammenhängendes Ganzes erfassen. Dies würde ihnen ermöglichen, den Grenzwert in einer komplexeren und flexibleren Weise zu verstehen und zu speichern (Dubinsky & McDonald, 2002).

Bereits durch die $0,\overline{9} = 1$ Problematik angedeutet, entstammt eine weitere Schwierigkeit für das Begriffsverständnis des Grenzwerts aus dem Umgang mit der Unendlichkeit (Feudel, 2018, S. 71ff.). Dubinsky et al. (2005) merken an, dass das Schließen von endlichen Prozessen auf unendliche Prozesse zu Problemen führen kann. Im Beispiel der Folgen hat jede endliche Folge ein letztes Folgenglied. Wird dies genauso auf die unendlichen Folgen übertragen, so könnte leicht angenommen werden, dass auch unendliche Folgen ein letztes Folgenglied besitzt. Dies kann laut Mamona-Downs (2001) in Bezug zu Grenzwerten zu der Annahme führen, dass immer ein letztes Folgenglied existiert, welches immer den Grenzwert annehmen würde.

Eine detaillierte Ausarbeitung zu Fehlvorstellungen bezüglich Grenzwerte kann in der Dissertation von Ostsieker (2020) nachgelesen werden.

4.2.3 Der Stetigkeitsbegriff

Eine vereinfachte Vorstellung von Stetigkeit bzw. einer stetigen Funktion, die häufig als erster Zugang zum Begriff dient, ist die Vorstellung, dass der Graph einer Funktion in einem Zug gezeichnet werden kann, ohne den Stift abzusetzen (Hilger, 2019, S. 143). Dies geht auch damit einher, dass die Funktion keine Sprungstellen besitzt. Eine weitere Anschauung zu stetigen Funktionen ist, dass eine gewisse Vorhersagbarkeit getroffen werden kann, denn kleine Änderungen der unabhängigen Variable (meistens als x-Wert) ziehen nur kleine Änderungen der abhängigen Variable (meistens als y-Wert) nach sich. Obwohl diese Vorstellungen aus fachwissenschaftlicher Sicht nur begrenzt die Bedeutung von Stetigkeit widerspiegeln, helfen sie z. B. Eigenschaften einer Funktion zu verstehen (Greefrath et al., 2016a, S. 141). Die Vorstellungen für den Begriff können dann helfen, eine mathematische Formalisierung zu finden[21], wobei es dafür äquivalente Definition gibt. Zum einem kann dafür der Grenzwertbegriff genutzt werden, in dem gesagt wird, dass sowohl der linksseitige als auch rechtsseitige Grenzwert in einem Punkt einer Funktion übereinstimmen. Falls dies für alle Punkte der Definitionsmenge gilt, so heißt diese Funktion stetig. Andererseits kann Stetigkeit an einer Stelle auch mithilfe des Epsilon-Delta-Kriteriums über die Existenz eines einzelnen Grenzwerts ausgedrückt werden. Die spricht besonders die Vorstellung der Vorhersagbarkeit an, da deutlich wird, dass sich der y-Wert einer Funktion wenig ändert, wenn zuvor der x-Wert wenig verändert wurde.

Mathematische Bemerkung 2 (Definition): Stetigkeit

Die Funktion $f: D \mapsto \mathbb{R}$ heißt genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

In Anlehnung an Büchter und Henn (2010, S. 183)

Sowohl der Begriff Stetigkeit als auch Differenzierbarkeit können zur Charakterisierung von Funktionen genutzt werden. Dabei ist die Differenzierbarkeit der „stärkere" Begriff, da Differenzierbarkeit die Stetigkeit einer Funktion impliziert. Wenn also eine Funktion an einer Stelle differenzierbar ist, bedeutet dies automatisch, dass sie dort auch stetig ist. Eine Möglichkeit, um sich diesen Zusammenhang zu erklären, liefert die geometrische Interpretation der Ableitung. Die Ableitung einer Funktion an einer bestimmten Stelle gibt die Steigung der Tangente an dem Graphen der Funktion an. Diese Tangente spiegelt

21 Vorstellungen können zwar helfen, einen Begriff zu verstehen, allerdings ist es oftmals nicht möglich, daraus eine formale mathematische Definition abzuleiten. Dennoch können Vorstellungen eine Hilfe für die Formalisierung darstellen.

den Graphen der Funktion in einer kleinen Umgebung gut wider. Wenn diese Ableitung dort existiert, dann gibt es dort auch keinen sogenannten Sprung im Graphen. Daher muss die Funktion dort auch stetig sein.
Andersrum gibt es Funktionen, die zwar stetig, aber nicht differenzierbar sind. Ein bekanntes Beispiel liefert dabei die Betragsfunktion $f(x) = |x|$, dessen Graph an der Stelle $x = 0$ einen Knick aufweist. An dieser Stelle existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht und infolgedessen auch keine eindeutige Tangente.
In einer Untersuchung von Skutella und Weygandt (2021) wurde das fachliche mathematische Wissen zur Stetigkeit von Bachelor- und Masterstudierenden im Lehramt analysiert. Dabei hat sich herausgestellt, dass etwa die Hälfte von 28 Studierenden (sowohl Bachelor- als auch Masterstudierende) das Epsilon-Delta-Kriterium der Stetigkeit nicht adäquat visuell darstellen konnten. Nur eine Studentin konnte eine vollständig und (uneingeschränkt) adäquate Visualisierung liefern. Des Weiteren stellte die praktische Anwendung der Definition von Stetigkeit bei linearen oder abschnittsweisen definierten Funktionen für die Studierenden eine erhebliche Hürde dar. Es hat sich gezeigt, dass lediglich fünf von 30 Studierenden in der Lage waren, die Stetigkeit einer linearen Funktion an einem beliebigen Punkt ihres Definitionsbereichs gemäß der Definition nachzuweisen. Nur einem Drittel der Studierenden gelang es, die Unstetigkeit einer abschnittsweisen konstanten Funktion nachzuweisen.

4.3 Spezifizierung konkreter Inhalte der Differentialrechnung

In dem vorangegangenen Kapitel wurde das benötigte Vorwissen (Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit) für die Differentialrechnung in Kürze dargestellt. Der inhaltliche Bereich der Differentialrechnung wird in dieser Arbeit als mathematischer Gegenstand detaillierter dargestellt. Innerhalb der Differentialrechnung befinden sich Konzepte, Zusammenhänge und Verfahren. Aus fachlicher Perspektive finden sich bezüglich der Strukturierung dieser Inhalte zum Themengebiet der Differentialrechnung häufig gleiche bzw. ähnliche Strukturierungen in Lehrbüchern zur mathematischen Ausbildung von zukünftigen Ingenieur:innen wieder (z. B. Meyberg & Vachenhauer, 2015; Burg et al., 2017; Rießinger, 2013; Papula, 2018; Westermann, 2015). Um den Gegenstand der Differentialrechnung um die didaktische Perspektive zu ergänzen, wird im Folgenden zunächst der Vier-Ebenen-Ansatz nach Hußmann und Prediger (2016) herangezogen (Kapitel 4.3.1). Anschließend werden die Inhaltsbereiche der Differentialrechnung basierend auf den Vorüberlegungen des Vier-Ebenen-Ansatzes dargestellt, die für die Lösung der Aufgaben (Kapitel 5.3) relevant sind (Kapitel 4.3.2 bis Kapitel 4.3.5). Abschließend wird dargelegt, welche inhaltlichen Vorkenntnisse zur Differentialrechnung aus der Schule erwartet werden können (Kapitel 4.3.6).

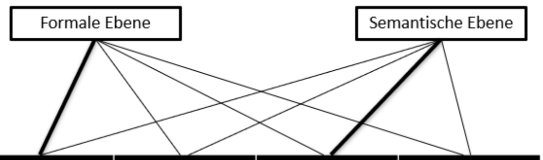
4.3.1 Vier-Ebenen-Ansatz nach Hußmann und Prediger (2016)

Die Idee hinter dem Vier-Ebenen-Modell ist es, zunächst genau festlegen zu können, wodurch ein Lerngegenstand charakterisiert wird und welche relevanten Lernziele identifiziert werden können (Spezifizierung). Anschließend wird der Lerngegenstand in ein sinnhaftes Lehr-Lern-Arrangement gebracht, die eine kohärente und eine intendierte Lernreihenfolge (Strukturierung) vorgibt. In dieser Arbeit liegt der Fokus jedoch ausschließlich auf der Spezifizierung; die Strukturierung wird nicht betrachtet. Die Strukturierung eines Lerngegenstands würde vor allem dann sinnvoll sein, wenn eine Lernumgebung entwickelt werden soll. In dieser Arbeit wird jedoch kein Lehr-Lern-Arrangement vorgenommen, sondern lediglich eine Untersuchung von Bearbeitungsprozessen zu Aufgaben eines bestimmten mathematischen Inhalts.
Die Spezifizierung (und die Strukturierung) eines Inhalts erfolgt dabei auf vier verschiedenen Ebenen. Diese vier Ebenen sind allerdings nicht als hierarchisches Modell zu verstehen, sondern vielmehr als Ebenen, die parallel zueinander bestehen.

- Die formale Ebene: Adressiert mathematische Objekte und Phänomene in ihrer formalen Repräsentation und logischen Struktur
- Die semantische Ebene: Adressiert Sinn und Bedeutung (z. B. Grundvorstellungen und mentale Modelle), die an einem mathematischen Objekt gelernt werden sollen sowie die epistemologischen Aspekte zwischen ihnen
- Die konkrete Ebene: Adressiert die Realisierung von Lehr-Lern-Arrangements bezüglich Kernideen, Problemen und Situationen, in denen mathematisches Wissen relevant ist, um es generisch zu konstruieren
- Die empirische Ebene: Adressiert kognitive und möglicherweise soziale Aspekte studentischen Denkens, typischer Ressourcen, Lernwege und Hürden

In dieser Arbeit wird auf die konkrete Ebene verzichtet, da sie vor allem Aspekte hervorhebt, die Hinweise für ein sinnvolle Realisierung eines Lehr-Lern-Arrangement liefern. Dennoch ist es nicht auszuschließen, dass einige Ausführungen indirekt der konkreten Ebene zugeordnet werden könnten, ohne dass diese explizit thematisiert wird.
Für die Spezifizierung eines Lerngegenstands auf mathematischem Hochschulniveau ist besonders die formale als auch die semantische Ebene relevant. Die Formalität der Mathematik genießt in der Hochschule eine besondere Stellung, während die semantische Ebene helfen kann, die formale

Mathematik besser zu verstehen. Um die formale und semantische Ebene zur Differentialrechnung in dieser Arbeit zu beschreiben, wird erneut die Wissensmatrix herangezogen. Sowohl die formale als auch semantische Ebene können beide in den Wissensfacetten der Wissensmatrix identifiziert werden, wobei die Wissensfacetten einen mathematischen Inhalt noch etwas detaillierter beschreiben. Die formale Ebene findet sich besonders in der Wissensfacette der *Expliziten Formulierung* und die semantische Ebene in der Wissensfacette der *Bedeutung & Vernetzung* wieder (dicke Verbindung in Abbildung 9). Dennoch ist es nicht auszuschließen, dass sowohl die formale als auch die semantische Ebene in weiteren Wissensfacetten auftauchen können (dünne Verbindungen in Abbildung 9).



		Explizite Formulierung	**Konkretisierung & Abgrenzung**	**Bedeutung & Vernetzung**	**Konventionelle Festlegungen**
Konzeptuelles Wissen	Konzepte	Ausformulierte Definition	Beispiele / Gegenbeispiele	Vorstellung / Darstellung	Fachwörter
	Zusammen-hänge	Ausformulierter Satz	Beispiele / Gegenbeispiele	(anschauliche) Begründung	Namen, Bezeichnungen
Prozedurales Wissen	Verfahren	Anleitung des Verfahrens	Bedingung der Anwendbarkeit, Spezialfälle	Vorstellung / Begründung	Nicht begründbare Festlegungen

Abbildung 9: Verknüpfung der formalen und semantischen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes mit der Wissensmatrix (eigene Darstellung)

Zusätzlich wird die empirische Ebene betrachtet, da in dieser Arbeit Studierende bei der Bearbeitung von mathematischen Aufgaben untersucht werden. Zu den ausgewählten Inhalten der Differentialrechnung werden demnach auch vorherige Forschungsergebnisse zu Hürden, Schwierigkeiten, Ressourcen, typischen studentisches Denkens beschrieben. So lässt sich ein Vergleich zwischen bisherigen Forschungsergebnissen und den empirischen Daten dieser Arbeit ziehen.

Zusammenfassend bilden die formale und semantische Ebene das zentrale Gerüst für die Spezifizierung der Differentialrechnung in dieser Arbeit. Sie lassen sich anhand der Wissensfacetten der Wissensmatrix beschreiben, wobei die empirische Ebene eine ergänzende Perspektive bietet, um studentisches Denken und Lernprozesse zu beleuchten. Für den Ableitungsbegriff (Kapitel 4.3.2) werden jedoch alle drei Ebenen gleichzeitig betrachtet, da es umfangreiche Forschung zu diesem Begriff gibt, die spezifische Aspekte bzw. Facetten untersucht. Für die Kapitel 4.3.3 bis 4.3.5 werden zunächst nur formale und semantische Ebene (gleichzeitig) sowie im Anschluss die empirische Ebene betrachtet, da die Forschung zu diesen Inhaltsbereichen etwas allgemeiner ist.

4.3.2 Ableitung

Der Begriff der Ableitung wurde in der mathematikdidaktischen Forschung bereits von einigen Forschenden stoffdidaktisch untersucht (z. B. Asiala et al., 2001; Büchter & Henn, 2010; Greefrath et al., 2016b; Kendal & Stacey, 2003; Lankeit & Biehler, 2024; Zandieh, 2000).
Zandieh´s (2000, Abbildung 10) Framework zum Verständnis der Ableitung ist in der internationalen Literatur weit verbreitet und wird in verschiedenen Forschungskontexten benutzt (z. B. Feudel & Biehler, 2021). Dabei wird der Begriff der Ableitung in drei Dimensionen aufgefasst:

- Darstellungsformen: Die Ableitung kann verschiedene Repräsentationen einnehmen (grafisch, verbal, physikalisch, symbolisch). Diese Dimension basiert auf der Idee, dass Lernende unterschiedliche Darstellungen eines Begriffs entwickeln (Hart, 1991) und der Wechsel zwischen diesen ein vertieftes Verständnis fördert (Prinzip der Darstellungswechsel nach Bruner, 1966). Unter grafischen Repräsentationen versteht Zandieh (2000), dass die Ableitung als Steigung der Tangente an einem Punkt des Graphen aufgefasst werden kann oder als Steigung der Geraden, die den Graphen in einer kleinen Umgebung um einen bestimmten Punkt möglichst gut approximiert.
- Ebene *ratio*, *limit*, *function*: Die Ableitung wird als Grenzwert einer Änderung beschrieben. Die Schritte umfassen die Bildung des Differenzenquotienten (*ratio*), den Übergang zum Grenzwert (*limit*) und von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion (*function*).
- Prozess-Objekt-Dualität: Grundbegriffe der Ableitung können als dynamische Prozesse oder statische Objekte interpretiert werden. So kann der Grenzwert bspw. als Annäherungsprozess oder über die Epsilon-Delta-Definition gedacht werden.

	Graphisch	Verbal	Physikalisch	Symbolisch
ratio	Sekantensteigung	Mittlere Änderungsrate	Durchschnitts-geschwindigkeit	Differenzen-quotient
limit	Tangenten-steigung	Lokale Änderungsrate	Momentan-geschwindigkeit	Differential-quotient
function	Graph der Ablei-tungsfunktion	Änderungsrate einer Funktion	Geschwindigkeits-funktion	Ableitungs-funktion

Abbildung 10: Framework zur Ableitung nach Zandieh (übernommen von Feudel, 2018, S. 29)

Eine Facette, die im Modell von Zandieh (2000) nur angedeutet bzw. nicht explizit ausgearbeitet wird, ist die formale Definition der Ableitung. Gerade im hochschulischen Kontext ist diese jedoch von zentraler Bedeutung, da sie für viele Mathematiker:innen die grundlegende und bevorzugte Interpretation des Begriffs Ableitung darstellt (Zandieh, 2000). Das Modell von Greefrath et al. (2016b) berücksichtigt die formale Definition der Ableitung explizit und integriert sie in das Modell der Grundvorstellungen. Dadurch bietet es eine zusätzliche Perspektive, die insbesondere im Kontext hochschulischer Mathematikdidaktik relevant ist. Gleichzeitig zeigt sich, dass sich die beiden Modelle in vielen Aspekten ähneln, bspw. in der Betonung verschiedener Darstellungsformen. Dennoch bietet das Modell von Greefrath et al. (2016b) durch die Einbindung der formalen Definition eine Erweiterung, die es für die folgenden Ausführungen besonders geeignet macht.

Greefrath et al. (2016b) gehen zur fachlichen Klärung des Ableitungsbegriffs auf zwei Aspekte des Begriffs ein: Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten und als lokale lineare Approximation. Diese Aspekte sind entweder spezifische Realisierungen einer Definition oder können in eine Definition konvertiert werden (Greefrath et al., 2016b). Zunächst wird mit einer auf einem offenen Intervall definierten reellwertigen Funktion f und einer Geraden in Punkt $P\big(x_0, f(x_0)\big)$, welche die Funktion (in einer bestimmten Umgebung) gut widerspiegelt, gestartet – die Tangente zur Funktion f im Punkt $P\big(x_0, f(x_0)\big)$. Um diese Tangente beschreiben zu können, wird der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ betrachtet, wobei x_0 und x aus dem Intervall I ungleich sind. Anschließend werden zwei Punkte $P\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $Q(x_0 + h, f(x_0) + h)$ des Graphen betrachtet (h wird hier definiert als $h = x - x_0$). Für kleiner werdendes h streben die Sekanten (Betrachtung verschiedener Differenzenquotienten) auf die Tangente des Punktes P zu. Dieser Grenzwert der Sekanten wird als Ableitung bezeichnet, welches bereits zu einer formalen Definition (mathematische Bemerkung 3) des Ableitungsbegriffs geführt werden kann.

Mathematische Bemerkung 3 (Definition): Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten

Es sei $f: I \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion, deren Definitionsbereich I ein $\mathbb{R}$-Intervall oder eine Vereinigung aus $\mathbb{R}$-Intervallen ist. Man sagt, f ist *differenzierbar im Punkt* $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet und *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in x_0 genannt.

Anstelle von $f'(x_0)$ werden auch die Bezeichnungen $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{d}{dx}f(x_0)$ verwendet.

Mit $D_{x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ wird der Differenzenquotient bezeichnet.

Burg et al. (2017, S. 204)

Die Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten wird oftmals als Einführung des Ableitungsbegriffs genutzt, da es gleichzeitig eine gute geometrische Veranschaulichung darstellt. Es gibt allerdings auch weitere (gleichwertige) Definitionen, wie z. B. die Ableitung als lokale Linearisierung (z. B. zu finden in Greefrath et al., 2016a, S. 144), die insbesondere darauf anspielt, dass sich differenzierbare Funktionen lokal besonders gut durch eine Gerade approximieren lassen. Ein Beispiel für eine differenzierbare Funktion findet sich in der mathematischen Bemerkung 4.

Mathematische Bemerkung 4 (Beispiel): Ableitung

Es sei $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ konstant. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \ (x \neq x_0).$$

Damit ist $f'(x_0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Anknüpfend an die Aspekte und den verbundenen Definitionen der Differenzierbarkeit liefern Greefrath et al. (2023) vier Grundvorstellungen, die beim Verständnisaufbau und (Er-)Lernen des Konzepts der Ableitung in einer Veränderlichen helfen sollen (Abbildung 11): Lokale Änderungsrate, Tangentensteigung, Lokale Linearität und die Ableitung als Verstärkungsfaktor kleiner Veränderungen. Diese vier Grundvorstellungen werden im Folgenden auf Basis der Ausarbeitung von Greefrath et al. (2016a) vorgestellt.

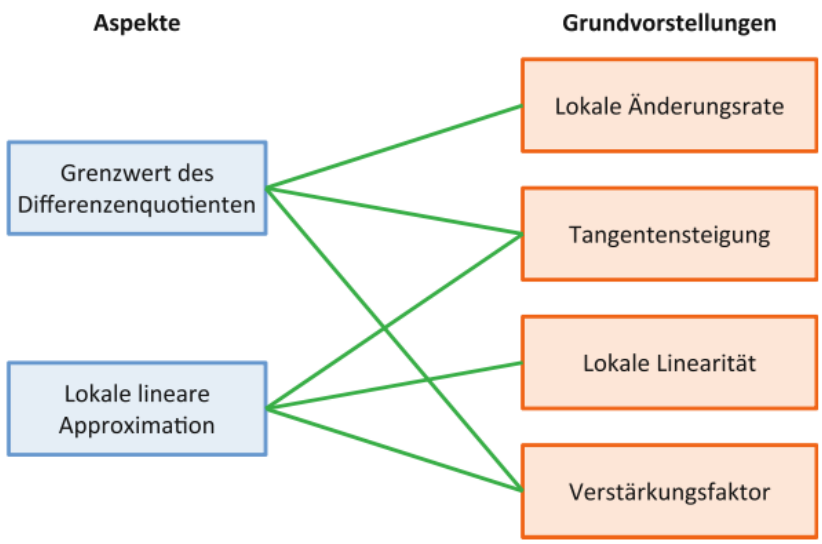


Abbildung 11: Aspekte und Grundvorstellungen in der Differentialrechnung (Greefrath et al., 2016a, S. 147)

Lokale Änderungsrate

Die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate beruht auf den Begriffen der absoluten Änderung $f(x) - f(x_0)$ und der relativen bzw. mittleren Änderungsrate $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, die bereits in der Schule in verschiedenen Kontexten eingesetzt werden und aufeinander aufbauen. Die mittlere Änderungsrate bezieht sich auf ein bestimmtes Intervall und kann durch den Differenzenquotienten berechnet werden. Im Übergang zur lokalen Änderungsrate wird dieses Intervall immer weiter verkleinert, sodass der Funktion an einer Stelle ein lokales Änderungsverhalten zugeschrieben werden kann. Die lokale Änderungsrate fordert demnach einen weiteren Schritt, und zwar ist sie im Allgemeinen nicht ein direkt berechenbarer Quotient, sondern durch Grenzwertbildung des Differenzenquotienten definiert. Dies wird durch den Grenzwert des

Differenzenquotienten ausgedrückt. Besonders in physikalischen Kontexten ist diese Grundvorstellung hilfreich. Die mittlere Änderungsrate kann bspw. als mittlere Geschwindigkeit in Abhängigkeit einer Wegstrecke und die lokale Änderungsrate folglich als Momentangeschwindigkeit konzeptualisiert werden.
Um die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate umfassend zu verstehen, sollte zunächst die Vorstellung über die Existenz einer Momentangeschwindigkeit, z. B. bei Bewegungskontexten bestehen, die oftmals als leichter zugänglich angenommen wird. Die Momentangeschwindigkeit gibt in Kontexten von Bewegungsvorgängen an, wie schnell sich ein Objekt zu einem bestimmten Zeitpunkt bewegt. Es gehört weiterhin die Vorstellung dazu, dass es eine Steigung in einem Punkt einer Funktion gibt. Sie gibt an, wie stark sich die Funktion an einer Stelle ändert. Zuletzt gehört ebenfalls die Vorstellung dazu, dass die Änderung der abhängigen Variablen durch $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ gegeben ist. Aus dieser Formel resultiert außerdem die Näherung der Ableitung $f'(x)$ durch den Quotienten von Δy und Δx. Unter Maschinenbaustudierenden scheint die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate präferiert zu werden (Bingolbali et al., 2007). Dies kann daran liegen, dass sie eng mit physikalischen Kontexten, wie z. B. die Bewegungsvorgänge, verbunden ist.
Schon länger ist bekannt, dass Lernende Schwierigkeiten damit haben, die Beziehung zwischen mittlerer Änderungsrate eines Intervalls und der lokalen Änderungsrate in einem Punkt sowohl bei linearen als auch bei nicht-linearen Funktionen zu erkennen (Orton, 1983). Im Allgemeinen scheint das Verstehen der Rate bzw. Änderungsrate schwierig zu sein, da es verschiedene Betrachtungsweisen erlaubt (z. B. Feudel & Biehler, 2021; Zandieh, 2000). McDermott et al. (1987) stellen z. B. fest, dass in physikalischen Kontexten Schwierigkeiten dabei entstehen, Verbindungen zwischen verschiedenen Änderungsraten und der Steigung eines Graphen herzustellen. Allerdings sind physikalische Kontexte gerade dann hilfreich, um die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate besser zu erlernen (Chau et al., 2021). Die Schwierigkeit, den Quotienten als Maß für die relative Änderung zweier Größen aufzufassen, kann das Verständnis für die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate beeinträchtigen (Byerley et al. 2012). Beim Aufbau dieser Grundvorstellung ist es daher sinnvoll, die Bedeutung der abhängigen und unabhängigen Variable hervorzuheben (vom Hofe & Blum, 2016), um die relative Änderung des Quotienten erkennen zu können.

Tangentensteigung

Die Grundvorstellung der Tangentensteigung stellt die Ableitung in einem Punkt als Steigung einer Tangenten in den Fokus. Bei dieser Vorstellung muss eine konzeptuelle Hürde zur Erweiterung des Tangentenbegriffs überwunden werden. In der Geometrie werden Tangenten zunächst so definiert, dass sie eine Figur nur an einer Stelle berühren bzw. genau einen Punkt gemeinsam haben. Dies kann

nicht problemlos in der Analysis auf Funktionen übertragen werden, da eine Tangente zwar lokal den Graphen an einer Stelle berührt, aber es durchaus möglich ist, dass dieselbe Tangente den Graphen global ein weiteres Mal berührt oder schneidet. Um eine solche Begriffserweiterung zu ermöglichen, muss sich die Tangente lokal in einer kleinen Umgebung vorgestellt werden. Die Tangente spiegelt den Graphen einer Funktion lokal gut wider (Biza, 2011), wobei sie global auch noch weitere Punkte mit dem Funktionsgraphen gemeinsam haben können. Die Tangentenvorstellung kann zusätzlich in eine statische und eine dynamische Sichtweise aufgeteilt werden. Bei der statischen Sichtweise wird eine beliebig kleine Umgebung dieses Punktes betrachtet. Je kleiner die Umgebung um einen Punkt gewählt wird, desto mehr nähert sich optisch die Tangente dem Graphen an, sodass bei beliebig nahem Zoom kaum noch Unterschiede zwischen Tangente und Graph sichtbar sind. Elschenbroich und Seebach (2014) beschreiben dies als „Funktionenlupe“. Mit der dynamischen Sichtweise wird sich entlang des Graphs bewegt, wodurch sich jeweils die resultierende Tangente verändert. Somit wird ebenfalls die jeweilige Bewegungsrichtung durch die Richtung der Tangente angegeben.
Zur umfassenden Vorstellung der Tangentensteigung gehört demnach die Betrachtung der Tangente als Gerade, die den Graphen der Funktion lokal widerspiegelt sowie dass die Tangente in einem Punkt mit dem Graphen die gleiche Steigung besitzt. Darüber hinaus ist zu berücksichtigen, dass die Tangente die lokale Richtung einer Kurve angibt. Diese lokale Sichtweise bezüglich der Grundvorstellung ist eine zentrale Idee der Analysis, welche für Lernende neu ist (Greefrath et al., 2016b).
Die größte Hürde beim Verständnis und Aufbau der Grundvorstellung der Tangentensteigung geht mit der Erweiterung des Tangentenbegriffs einher (Greefrath et al., 2023). Das Konzept der Tangente muss aus der Elementargeometrie auf die Analysis übertragen und so erweitert werden, dass sich von der Sichtweise „ein einzelner Kontaktpunkt“ gelöst wird (Tall, 2013). Stattdessen ist die Tangente so zu verstehen, dass sie sich an den Graphen anschmiegt und nicht lediglich in genau einen Punkt mit dem Graphen gleich ist, sondern sogar in mehreren Punkten identisch sein kann (Biza, 2011).

Lokale Linearität

Die Grundvorstellung der lokalen Linearität kann ähnlich wie bei der Tangentensteigung mit dem „Zoomen“ beschrieben werden. Kirsch (1979) nimmt sich dabei das „Funktionsmikroskop“ zur Hilfe. Die Idee dabei ist, dass je näher an den Graphen einer differenzierbaren Funktion herangezoomt wird, desto mehr sieht der Graph wie eine gerade Linie aus. Dies kann mit spezifischen Softwares umgesetzt werden und wirkt daher für diese Grundvorstellung unterstützend. Der Graph einer differenzierbaren Funktion wird demnach an einer Stelle des Graphen möglichst gut durch eine lineare Funktion lokal approximiert (Teague, 1996). Die

Differenzierbarkeit als Approximierbarkeit durch eine lineare Funktion zu verstehen, stellt Merkl (2017, S. 118) als wichtigste Bedeutung der Ableitung heraus. So gesehen wird genau die Gerade durch den einen Punkt des Graphen gesucht, die den Graphen insofern am besten approximiert, als hier der relative Fehler gegen 0 konvergiert[22] – und genau dies ist die Steigung $f'(x_0)$. Dies knüpft damit an den Aspekt der lokalen linearen Approximation von Greefrath et al. (2016b) an. Da die Funktion lokal linear approximierbar ist, folgt zum einen, dass die Ableitung f' in einer Umgebung von x_0 nahezu konstant ist und zum anderen mit welchem Faktor sich kleine Änderungen der unabhängigen Variable auf die unabhängige Variable auswirken (Greefrath et al., 2016a, S. 151).
Die Grundvorstellung der lokalen Linearität hilft vor allem bei Anwendungen numerischer Verfahren wie der Taylor-Abschätzung, Fehlerrechnung und Newton-Verfahren, welche im Ingenieurstudium eine wichtige Rolle spielen. Außerdem ist die Grundvorstellung verallgemeinerbar, sodass die gleichen Vorstellungen auch für höhere Dimensionen gelten. Studierende können von dieser Grundvorstellung auch im zweiten Semester profitieren, indem der Begriff der Ableitung auf höhere Dimensionen erweitert wird.
Demnach sind die zwei Elemente, die zu einer ausgeprägten Grundvorstellung der Ableitung über die lokale Linearität dazugehören, zum einen das „Sehen" einer geraden Linie, wenn stark an den Graphen einer differenzierbaren Funktion herangezoomt wird. Zum anderen, dass für kleine Änderungen der unabhängigen Variable die Funktion linear erscheint.

Verstärkungsfaktor

Die Grundvorstellung der Ableitung als Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen ist eng mit dem Aspekt der lokalen Linearisierung verbunden. Im Fokus dieser Grundvorstellung steht die Änderung der unabhängigen Variable und wie sich diese auf die abhängige Variable auswirkt. Wenn die Funktionswerte der Ableitung nah an der Null sind, besitzt die Funktion eine geringe Änderung, und wenn die Funktionswerte der Ableitung groß sind, dann ist die Änderung der Funktion ebenfalls signifikant (Greefrath et al., 2023). Werden z. B. Extrempunkte einer Funktion betrachtet, dann lässt sich feststellen, dass in der Umgebung eines Extrempunkts kleine Veränderungen wenig Auswirkungen auf die unabhängige Variable ausüben. Greefrath et al. (2016a, S. 152) beschreiben dies als „Änderungsdetektor". Wird allerdings von der Ableitung ausgegangen, die bspw. große Werte an einer Stelle annimmt, dann kann daraus abgeleitet

22 Die Gerade $g(x) = t(x_0) + (x - x_0) \cdot m$ hat im Punkt x_0 die Differenz zur Funktion f $r(h) = f(x_0 + h) - g(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - h \cdot m$. Für alle m-Werte geht dies gegen Null, wenn $x \to x_0$. Für einen spezifischen m-Wert geht auch der relative Fehler gegen Null: $\lim\limits_{h\to\infty} \frac{r(h)}{h} = 0$ (Greefrath et al., 2016b).

werden, dass sich kleine Änderungen der unabhängigen Variable stark auf die abhängige Variable auswirkt.
Die Grundvorstellung der Ableitung als Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen ist sowohl für den Differentialquotienten als auch den Differenzenquotienten nutzbar (Malle, 2003). Damit kann mit dieser Vorstellung eine Möglichkeit dargestellt werden, wie Studierende Schwierigkeiten bezüglich des Grenzwerts in der Ableitung und des Übergangs von Differenzen- zu Differentialquotient überwinden können. Außerdem kann sie in Anwendungen, insbesondere bezüglich der Ingenieurwissenschaften im Bereich der Physik, unterstützend wirken. Ein Beispiel wäre eine Schwingungsgleichung, mit der Zeit und Ort eines bestimmten Objekts beschrieben wird und deren Ableitung, die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit darstellt. Ist die Periodendauer der Zeit-Ort Bestimmung einer Schwingung sehr lang, dann resultiert daraus nur eine kleine Änderung in der Geschwindigkeit der Schwingung.
Zu einer umfassenden Vorstellung der Grundvorstellung der Ableitung als Verstärkungsfaktor gehören demnach die Auffassung, wie sich kleine Änderungen der unabhängigen Variablen auf die abhängige Variable auswirken, sowie hohe Werte der Ableitung starke Änderungen der Funktionswerte bedeuten. Außerdem existiert für kleine Änderungen ein multiplikativer Zusammenhang zwischen Änderungen der unabhängigen und abhängigen Variablen ($\Delta y \approx \Delta x \cdot m$).
Mamolo und Zazkis (2012) konnten feststellen, dass Studierende Schwierigkeiten mit Aufgaben aufweisen, welche die Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor" benötigen. Darüber hinaus wurde festgestellt, dass die Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor" bei Studierenden am wenigsten ausgeprägt ist (Greefrath et al., 2023). Dies könnte daran liegen, dass diese Grundvorstellung nur in spezifischen Situationen als nützlich angesehen wird.

Weitere Empirie zum Ableitungsbegriff

Schwierigkeiten beim Verständnis des Konzepts der Ableitung lassen sich auf verschiedenen Ebenen feststellen (Bressoud et al., 2016; Thompson & Harel, 2021). Dies trifft nicht nur auf die Schule, sondern auch auf Studierende in der Universität zu (Fuentealba et al., 2017). Häufig lässt sich beobachten, dass Lernende die verschiedenen Repräsentationen der Ableitung nicht kennen oder Schwierigkeiten haben, sie untereinander zu verbinden (Hähkiöniemi, 2006; vom Hofe, 1998). Außerdem scheint eine weitere Schwierigkeit der Übergang der mittleren zur lokalen Änderungsrate zu sein (z. B. vom Hofe, 1998). Darüber hinaus ist die Änderungsrate in Kontextanwendungen ebenfalls eine Hürde für Studierende. Dies äußert sich dadurch, dass Studierende die Verbindung zwischen der Funktion und ihrer Änderungsrate in einem kinematischen Kontext nicht herstellen konnten (Beichner, 1994). Des Weiteren gibt es einige Studien, welche aufzeigen, dass Studierende in der grafischen Darstellung zwischen einem Zeit-

Distanz-Graph und Zeit-Geschwindigkeit-Graph Ähnlichkeiten vermuten (Carlsson et al., 2010; Nemirovsky & Rubin, 1992).

4.3.3 Die Ableitungsregeln

Mit der Definition des Begriffs der Ableitung können Kalküle entwickelt werden, die sich in Problemstellungen der Differentialrechnung als hilfreiche Werkzeuge herausstellen. Mit algebraischen Umformungen an dem Differentialquotienten lassen sich Ableitungsregeln herleiten, die auf differenzierbare Funktionen angewendet werden können.
Zunächst muss allerdings der Übergang von differenzierbar in einem Punkt einer Funktion zu differenzierbar in jedem Punkt einer Funktion erfolgen. Die Definition der Differenzierbarkeit gibt letztendlich eine Aussage über Differenzierbarkeit in einem Punkt einer Funktion. Dabei werden die Überlegungen an einer fest gewählten Stelle durchgeführt. Diese fest gewählte Stelle wird im nächsten Schritt nicht mehr als fest, sondern als veränderlich angesehen.

Mathematische Bemerkung 5 (Definition): Ableitungsfunktion

Sei f eine reelle Funktion. Die Funktion f', die jedem x-Wert, bei dem f differenzierbar ist, den Wert $f'(x_0)$ zuordnet, heißt *Ableitungsfunktion* von f.

Greefrath et al. (2016a, S. 166)

Die Änderung liegt dabei in der Deutung der Variable x im Differentialquotienten. Die Variable x ist demnach nicht mit dem Einzelzahlaspekt, wie in der Definition der Differenzierbarkeit, sondern mit dem Veränderlichenaspekt zu betrachten. Deutlich wird dies daran, dass eine feste, aber beliebige Stelle oftmals mit dem Term x_0 und im gesamten Funktionsterm frei veränderlich mit x bezeichnet wird.

Ableitung verknüpfter Funktionen

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass im Folgenden nicht alle Ableitungsregeln in ihrer Tiefe aufbereitet werden. Dies liegt daran, dass nur wenige Ableitungsregeln für die erhobenen empirischen Daten dieser Arbeit bedeutend sind. Aus dem Grund werden die Summenregel, Kettenregel sowie die Ableitung von Potenzfunktionen dargestellt.
Für das Ableiten komplizierterer Funktion gibt es einige Regeln, die den Umgang mit Ableitungen bzw. Ableitungsfunktionen auf ihrem Definitionsbereich erleichtern.

Mathematische Bemerkung 6 (Satz): Ableitung verknüpfter Funktionen

Die Funktionen f und g seien differenzierbare Funktionen. Dann gilt für die Ableitungen der verknüpften Funktionen bzw. für die Kehrwertfunktion:

1. $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$ (Summenregel und Differenzregel),
2. $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Produktregel),
3. $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ (Kehrwertregel),
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x')}$ (Quotientenregel).

Büchter und Henn (2010, S. 209)

Mathematische Bemerkung 7 (Beweis): Summenregel

Wir bilden jeweils den Differenzenquotienten an der Stelle x und formen ihn so um, dass wir den Grenzwert bilden können und die Ableitung erhalten.

$$\frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Der Grenzwert $\Delta x \to 0$ führt zu

$$f'(x) + g'(x)$$

Analog behandelt man die Differenzregel.

Büchter und Henn (2010, S. 209)

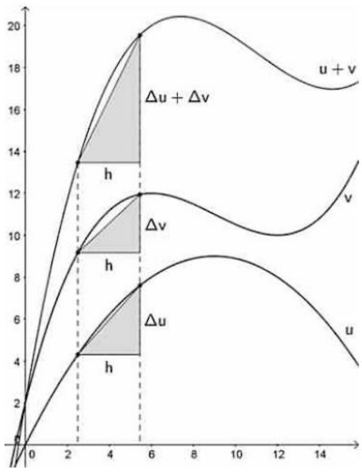


Abbildung 12: Steigungsdreieck zur Summenregel (Greefrath et al., 2016a, S.169)

Die Abbildung 12 zeigt auf, dass sich die Summenregel mithilfe der Grundvorstellung der Tangentensteigung nachvollziehen lassen kann. Der Graph der Summenfunktion (in der Abbildung mit $u + v$ dargestellt) ergibt sich aus den Graphen der einzelnen Funktionen u und v. Dabei werden „punktweise" an jeder Stelle x die y-Werte von u und v aufaddiert. Gleiches ergibt sich für das Steigungsdreieck des Differenzenquotienten für die Summenfunktion $u + v$ mit der Breite h, welches sich aus den Steigungsdreiecken der einzelnen Funktionen u und v mit der Breite h zusammensetzt.

Mathematische Bemerkung 8 (Beispiel): Summenregel

Es soll die Ableitung der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ werden. Dafür wird die Summenregel benutzt und wir erhalten:

$$f'(x) = 4x^2 + 3$$

Die weiteren Regeln aus der mathematischen Bemerkung 6 werden in Büchter und Henn (2010, ab Seite 209) behandelt.

Kettenregel

Mittels der bisherigen Ableitungsregeln lassen sich einfache Funktionen differenzieren. Allerdings reichen diese nicht mehr aus, wenn nach der Ableitung einer ineinander geschachtelten (bzw. verkettete) Funktion gefragt ist. Wird bspw. die Geschwindigkeit einer harmonisch schwingenden Masse gefordert, muss die zeitliche Ableitung $y(t)$ der nachfolgenden Funktion y gebildet werden (Papula, 2018).

$$y = y(t) = A \cdot sin(\omega t + \varphi), \quad t \geq 0$$

Die Funktion y setzt sich dabei aus zwei elementaren Funktionen zusammen. Zum einen aus der Sinusfunktion $u = sin\, v$ und zum anderen der linearen Funktion $v = \omega t + \varphi$. Der Sinus ist in diesem Beispiel zum einen abhängig von der linearen Funktion u und zum anderen von der Zeit t. In solchen Fällen von ineinander geschachtelten Funktionen kann die Kettenregel[23] angewendet werden.

---

23 Ein intuitives Beispiel kann helfen, diese Form der Kettenregel zu verstehen. In einem Rennen bewegt sich der Gepard doppelt so schnell wie ein Löwe, welcher sich wiederum drei Mal so schnell wie eine Katze bewegt. Wie viel schneller bewegt sich also der Gepard als die Katze?

$$\frac{dGepard}{dKatze} = \frac{dGepard}{dLöwe} \cdot \frac{dLöwe}{dKatze} = 2 \cdot 3 = 6$$

Mathematische Bemerkung 9 (Satz): Kettenregel

Ist $g: I_0 \to I_1$ in $x \in I_0$ differenzierbar, und ist $f: I_1 \to I_2$ in $z = g(x)$ differenzierbar, so ist die Verkettung $f \circ g: I_0 \to I_2$ in x differenzierbar, und es gilt die

Kettenregel: $(f \circ g)'(x) = f'(z)g'(x)$.

Mit anderen Worten: Zur Bildung der Ableitung zweier verketteter Funktionen werden die Ableitungen der beiden Funktionen, genommen an entsprechenden Stellen, einfach multipliziert.

Zur Schreibweise: Mit den Leibnizschen Bezeichnungen

$$\frac{dy}{dz} = f'(z), \frac{dz}{dx} = g'(x), \frac{dy}{dx}(f \circ g)'(x)$$

erhält man die einprägsame Form

Kettenregel: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Man nennt $\frac{dy}{dz}$ auch die *äußere* Ableitung und $\frac{dz}{dx}$ die *innere* Ableitung. Damit erhalten wir zur Durchführung der Kettenregel folgende *Merkregel*: »*Äußere und innere Ableitung sind zu multiplizieren*.«

Burg et al. (2017, S. 216)

Mathematische Bemerkung 10 (Beispiel): Kettenregel

Es soll

$$y = F(x) = (x^2 + 7x - 1)^5$$

differenziert werden. Mit

$$z = g(x) = x^2 + 7x - 1 \text{ und } y = f(z) = z^5$$

folgt nach der Kettenregel

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 5z^2 \cdot (2x + 7) = 5(x^2 + 7x - 1)^4(2x + 7)$$

Burg et al. (2017, S. 217)

Mathematische Bemerkung 11 (Beweis): Kettenregel

Seien f und g differenzierbare Funktionen mit den Voraussetzungen wie in MB 9.

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{x - x_0}$$

$$= \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Dabei wurde $y = g(x)$ und $y_0 = g(x_0)$ gesetzt. Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)$$

In Anlehnung an Rießinger (2013, S. 299)

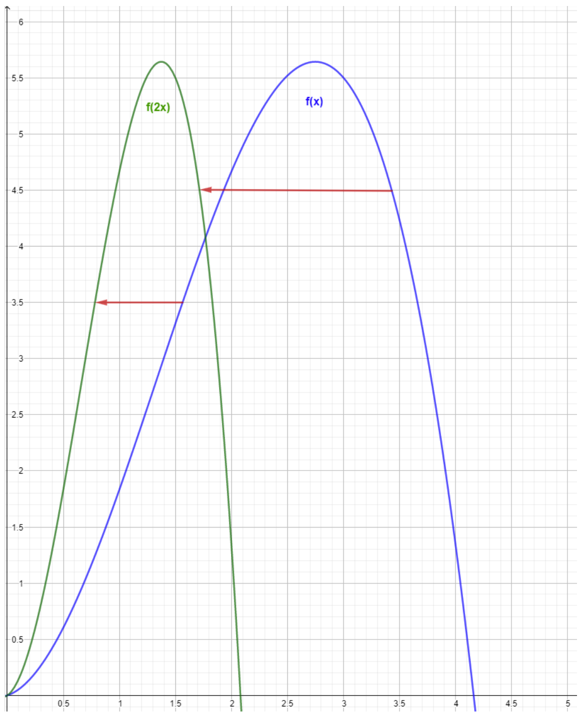


Abbildung 13: Visuelle Interpretation der Kettenregel

Eine visuelle Interpretation der Kettenregel kann Abbildung 13 liefern. Wenn das Argument einer Funktion mit 2 multipliziert wird, verdoppelt sich die Steigung bei der jeweiligen Stelle der neuen Funktion (siehe an den Pfeilen in der Abbildung 13). Das Einsetzen von $x = 2$ in $f(2x)$ ergibt den gleichen Wert, wie das Einsetzen $x = 4$ in $f(x)$. Obwohl die y-Werte für $x = 2$ in $f(2x)$ und $x = 4$ in $f(x)$ gleich sind, stimmt dies nicht für die Tangenten der Punkte. Stauchen des Graphen in x-Richtung führt dazu, dass die Steigung steiler wird. Wenn in diesem Beispiel nun die Ableitung $f'(2x)$ gebildet wird, dann muss diese mit 2 (also $f'(2x) \cdot 2$) multipliziert werden (da die Steigung doppelt so hoch ist). Im Allgemeinen bedeutet dies, dass die Funktion g für das schnellere oder langsamere Durchlaufen einer Funktion f entscheidend ist. Um nun also die Steigung bzw. die Ableitung von $f(g(x))$ zu finden, muss zunächst die Steigung von f an dem x-Wert $g(x)$ ermittelt werden. Anschließend wird mit dem Wert multipliziert bzw. skaliert und bestimmt wie g das Durchlaufen der y-Werte schneller oder langsamer macht (stauchen oder strecken in Richtung der x-Achse). Damit erhält man die Kettenregel.

Ableitung der Potenzfunktion

Für Potenzfunktionen ergibt sich eine weitere Ableitungsregel.

Mathematische Bemerkung 12 (Satz): Ableitung von Potenzfunktionen

Für die Ableitung in der in $\mathbb{R}$ definierten Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, aber $n \neq 0$, gilt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Für $n = 0$ und $x \neq 0$ liegt eine konstante Funktion mit $f(x) = 1$ und Ableitung $f'(x) = 0$ vor.

Büchter und Henn (2010, S. 213)

Mathematische Bemerkung 13 (Beispiel): Ableitung der Potenzfunktion

Für die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^8$ ergibt sich nach der Potenzregel:

$$f'(x) = 8 \cdot x^{8-1} = 8x^7$$

Der Beweis der Potenzregel kann anhand von algebraischen Umformungen am Differenzenquotienten mithilfe des binomischen Lehrsatzes durchgeführt werden (der Beweis für positiv-ganzzahlige Exponenten z. B. zu finden in Papula, 2018, S. 330).

Empirische Ebene zu den Ableitungsregeln

Clark et al. (1997) haben 41 Studierende an einer amerikanischen Universität interviewt, die bereits mindestens zwei Semester „single variable calculus“ abgeschlossen haben. In dem Interview mussten die Studierenden Fragen beantworten, die auf ihr Verständnis der Kettenregel abzielen. Die Autoren der Studie haben die Antworten der 82 Studierenden auf ihre Richtigkeit kodiert und festgestellt: Nur eine der vier ausgewerteten Fragen wurde von 75,6 % (62 von

82) aller Studierenden vollständig richtig beantwortet. Die anderen drei Fragen wurden von allen Studierenden mit 7,3 %, 39 % und 34,1 % richtig beantwortet. Die Autoren kommen zu dem Schluss, dass die Schwierigkeiten im Umgang mit der Kettenregel bei den meisten Studierenden ihrer Stichprobe auf Mangel im Verständnis von Funktionen zurückzuführen sind. Sie fordern daher eine stärkere Fokussierung, Zusammensetzungen bzw. Verkettungen von Funktionen erkennen und damit umgehen zu können. Zusätzlich sei es wichtig, diese in Beziehung zu verschiedenen Problemsituationen zu setzen, für deren Lösung die Kettenregel benötigt wird. Cottrill (1999) konnte in seiner Untersuchung ebenfalls Hinweise dazu finden, dass das Verstehen von zusammengesetzten Funktionen für das Verständnis der Kettenregel ausschlaggebend ist.

4.3.4 Der Mittelwertsatz

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist ein wichtiger Bestandteil des Theorieaufbaus, aus denen einige Folgerungen abgeleitet werden können (z. B. die Regel von L´Hospital).

Mathematische Bemerkung 14 (Satz): Mittelwertsatz

Ist die reelle Funktion f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar mindestens auf (a, b), so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Burg et al. (2017, S. 223)

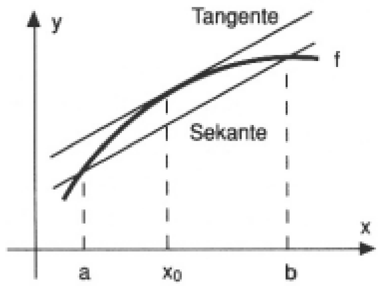


Abbildung 14: Geometrische Interpretation zum Mittelwertsatz (Burg et al., 2017, S. 222)

Anschaulich sagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus, dass die Kurventangente für mindestens ein x_0 aus (a, b) parallel zur Sehne AB ist. Dies lässt sich in Abbildung 14 erkennen. Dabei ist zu beachten, dass es nicht nur eine Stelle x_0 geben muss, welche die Aussage erfüllt – mehrere Stellen der Funktion können dafür in Frage kommen. Man könnte demnach die Sehne AB nehmen und sie so verschieben (dabei muss die Steigung natürlich gleich bleiben, um die Parallelität zu erhalten), dass sie zur Tangente des Graphs wird. Alle Punkte der Funktion, bei der die Sehne AB parallel zur Kurventangente ist, erfüllen den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Büchter und Henn (2010) bezeichnen das Verschieben der Sehne AB als Grundvorstellung zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung.
Für ein Beispiel der Aussage des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung sei f eine Funktion, welche den zurückgelegten Weg eines Objekts in Abhängigkeit der Zeit beschreibt. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sagt dann aus, dass zu mindestens einem Zeitpunkt t_0 in einem Zeitintervall $a \leq t \leq b$ die durchschnittliche Geschwindigkeit des Zeitintervalls tatsächlich erreicht wird. In anderen Worten ist zu mindestens einem Zeitpunkt innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls die Momentangeschwindigkeit gleich der durchschnittlichen Geschwindigkeit. Verallgemeinert bedeutet dies, dass die lokale Änderungsrate zu mindestens einem Punkt gleich der durchschnittlichen Änderungsrate in einem Zeitintervall ist.
Der Beweis des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung wird oftmals auf den Satz von Rolle zurückgeführt. Dabei wird eine Hilfsfunktion eingeführt, sodass der Satz von Rolle angewendet werden kann. Der Beweis dazu kann in Burg et al. (2017, S. 223) nachgelesen werden.

Mathematische Bemerkung 15 (Satz): Satz von Rolle

Ist die reelle Funktion f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar mindestens auf (a, b), und gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Burg et al. (2017, S. 223)

Mathematische Bemerkung 16 (Beweis): Mittelwertsatz

Man subtrahiert von f eine Geradenfunktion g mit der Steigung der Sekante durch a und b, und zwar $g(x) = \frac{x \cdot (f(b) - f(a))}{b-a}$. Für die Differenz $F(x) = f(x) - g(x)$ errechnet man $F(a) = F(b)$. Der Satz von Rolle liefert dann die Existenz eines $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = F'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - (a)}{b - a}$$

Burg et al. (2017, S. 223)

Empirische Ebene zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Es gibt bislang keine mir bekannten empirischen Studien zu dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Allerdings wurde eine Studie zum Beweisverständnis des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung mit Studierenden aus dem ersten Semester durchgeführt (Kolahdouz et al., 2020). Die Teilnehmenden der Studie waren an einer Universität im Iran für das Fach Mathematik eingeschrieben. In einem Test-Format wurden 35 Studierenden acht Fragen zu verschiedenen Aspekten des Beweisverständnisses zum verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung gestellt. Im Fokus der Studie lag demnach, inwiefern Studierende die mathematische Symbolsprache verstehen, Zusammenhänge zwischen Behauptungen, anderen Sätzen und Schlussfolgerungen erkennen sowie die Gültigkeit von Aussagen bewerten. Dabei hat sich herausgestellt, dass etwa die Hälfte der Studierenden keine Probleme mit der mathematischen Symbolsprache haben, allerdings in allen anderen Bereichen des Beweisverständnisses erhebliche Probleme bestehen. Bezüglich des mathematischen Inhalts konnte festgehalten werden, dass bei Studierenden Schwierigkeiten aufgetreten sind, wenn die Voraussetzung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung verändert worden ist und im Anschluss die Auswirkung auf eine schlussfolgernde Aussage angepasst werden sollten. Außerdem konnten nur zwei der 35 teilnehmenden Studierenden zwei vorgegebene Beispiele korrekt einordnen, ob sie den Voraussetzungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung genügen. Es ist fraglich, inwiefern sich die Ergebnisse dieser Studie auf den Mittelwertsatz der Differentialrechnung übertragen lassen. Zumindest bei dem Überprüfen der Voraussetzungen an vorgegebenen Beispielen kann davon ausgegangen werden, dass ähnliche Ergebnisse zu vermuten sind, da sich die Voraussetzungen der beiden Sätze im Vergleich nicht ändern.

4.3.5 Die Regel von L´Hospital

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung kann die Regel von L´Hospital abgeleitet werden, die sich mit der Berechnung bestimmter Grenzwerte befasst. Es handelt sich dabei um Grenzwerte von Quotienten, deren Funktionen gegen Null konvergieren oder bestimmt divergieren. Nach der Regel von L´Hospital können Grenzwerte dieser Form mithilfe der ersten Ableitung ermittelt werden.

Mathematische Bemerkung 17 (Satz): Regel von L´Hospital

Es seien f und g differenzierbare reelle Funktionen auf dem Intervall (a, b), für die

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to b} g(x) = \pm\infty$$

gilt. Es sei ferner $g'(x) \neq 0$ auf (a, b). Damit folgt

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (a < x < b),$$

sofern der rechtsstehende Grenzwert existiert oder $\pm\infty$ ist. (Hierbei ist auch $a = \infty$ oder $b = -\infty$ zugelassen.)

Zur Schreibweise: Das Nutzen der Regel von L´Hospital wird oftmals mit dem Ausdruck "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" angedeutet.

Burg et al. (2017, S. 235)

Gemäß der Regel von L´Hospital lässt sich an einer fraglichen Stelle jedes differenzierbares Funktionenpaar f und g durch ihr dortiges Tangentenpaar annähern. Auf die Darstellung eines Beweises wird hier verzichtet, da weitere mathematische Inhalte genutzt werden, die den Rahmen des Kapitels übersteigen würden. Ein Beweis ist zu finden in Heuser (2009, S. 287). Für Ingeneur:innen ist vor allem die Anwendung des Satzes relevant (Burg et al., 2016, S. 236). Visuell (Abbildung 15) lässt sich erkennen, dass die Tangenten an der fraglichen Stelle in einer hinreichend kleinen Umgebung um den Berührpunkt das

Änderungsverhalten der Funktionen sehr gut beschreiben. Der Grenzwert des Quotienten der Funktionswerte kann somit grafisch an der fraglichen Stelle durch den Quotienten der Tangentensteigung ersetzt werden.

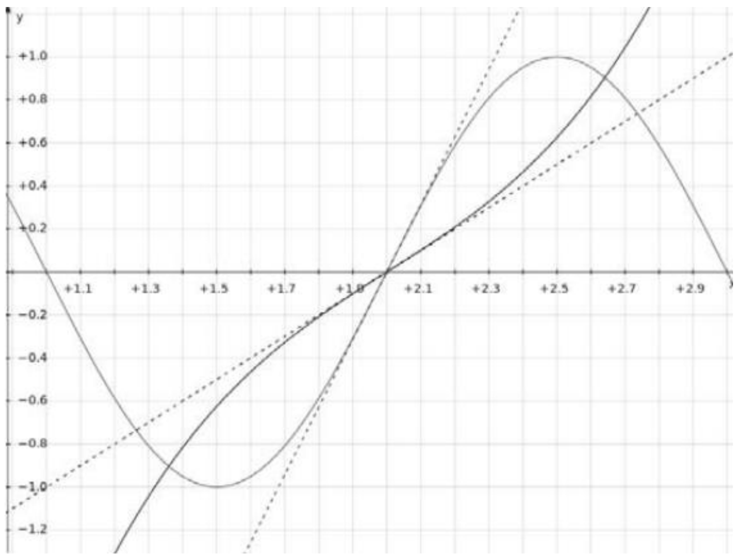


Abbildung 15: Zwei Funktion, angenähert durch ihre Tangenten (gestrichelt)

Mathematische Bemerkung 18 (Beispiel): Regel von L´Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \to \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

Wir wenden die Regel von L´Hospital an und erhalten:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\ \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$$

Papula (2018, S. 627)

Empirische Ebene zur Regel von L´Hospital

Ähnlich wie für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für die Regel von L`Hospital ebenfalls keine mir bekannten empirischen Studien. In einer Studie von Mrdja et al. (2015) wurden allerdings die Bearbeitungen von Ingenieurstudierenden einer Universität in Bosnien und Herzegowina beim Berechnen eines Grenzwerts untersucht. Für die Berechnung des Grenzwerts wird in dieser Studie unter anderem die Anwendung der Regel von L´Hospital benötigt. In den Bearbeitungen der Studierenden konnte zum einen festgestellt werden, dass in 22 von 24 Fällen die Voraussetzungen für die Regeln von L`Hospital ignoriert worden sind. Zum anderen wurde die Regel von L`Hospital in 17 von 24 Fällen nicht korrekt angewandt.

4.3.6 Bezug der Inhalte im Übergang Schule-Hochschule+

Auf Ebene der Schule wird von Lernenden aus der Oberstufe in Nordrhein-Westfalen verlangt, dass die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate oder Tangentensteigung sowie zusätzlich im Leistungskurs mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen gedeutet werden soll (Ministerium für Schule und Bildung des Landes NRW, 2023). Studierende sollten demnach insbesondere hinsichtlich der lokalen Änderungsrate oder der Tangentensteigung über Vorwissen verfügen. Beide Grundvorstellungen können auf die Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten zurückgeführt werden (Greefrath et al, 2016b). Wird die Ableitung im hochschulischen Kontext ebenfalls über diese Definition eingeführt, können Studierende auf Vorerfahrungen bezüglich der Grundvorstellungen zurückgreifen. Lediglich Lernende aus dem Leistungskurs werden mit der Ableitung als Approximation durch lineare Funktion konfrontiert (Ministerium für Schule und Bildung des Landes NRW, 2023), wobei es dadurch ungleiche Lernvoraussetzungen geben kann, wenn die eingeführte Definition in der Hochschule stark auf die Vorstellung der lokalen Linearität angelehnt wird.

Die Thematisierung der Ableitungsregeln findet ebenfalls in der Schule statt. Bis zum Ende der Einführungsphase werden Potenz-, Summen- sowie Faktorregel und in den Grund- und Leistungskursen sowohl Produkt- als auch Kettenregel behandelt (Ministerium für Schule und Bildung des Landes NRW, 2023). Studierende sind daher mit den verschiedenen Techniken von Ableitungsregeln vertraut und können sich auf ihre vorherigen Erfahrungen stützen.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung als auch die Regel von L´Hospital spielen in der Schule weder in Grund- noch Leistungskursen eine Rolle (Ministerium für Schule und Bildung des Landes NRW, 2023). Obwohl auf notwendige Vorerfahrung mathematischer Inhalte wie Funktionen, Grenzwerte und Ableitungsregeln zurückgegriffen werden kann, sind der Mittelwertsatz der

Differentialrechnung und die Regel von L´Hospital punktuell Neuheiten für Studierende.

4.4 Zusammenfassung und Einordnung in die Wissensmatrix

Die Differentialrechnung stellt einen wichtigen mathematischen Aspekt im Ingenieurstudium dar, welcher sich in vielen ingenieurtypischen Anwendungen wiederfindet (vgl. Kapitel 4.1). Bevor eine Thematisierung der Differentialrechnung möglich ist, müssen einige innermathematische Grundlagen geklärt werden: Darunter fallen Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit (vgl. Kapitel 4.2). Unter Berücksichtigung dieser Begriffe wurden mithilfe des Vier-Ebenen-Ansatzes (Hußmann & Prediger, 2016) ausgewählte[24] Inhalte der Differentialrechnung dargestellt (Kapitel 4.3). Dabei wurde der umfangreiche Lerngegenstand der Differentialrechnung mittels der formalen, semantischen und empirischen Ebene strukturiert (Hußmann & Prediger, 2016). Für die formale Ebene als auch die semantische Ebene kann anhand der Wissensmatrix eine feinere Aufteilung in die Wissensfacetten vorgenommen werden (Kapitel 4.3.1). Die theoretischen Inhalte zur Differentialrechnung lassen sich nun mittels der Wissensmatrix strukturieren. Eine Darstellung, der in Kapitel 4.3 behandelten mathematischen Inhalte befindet sich in Tabelle 7.

Der Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion wird als Konzept und der Mittelwertsatz als Zusammenhang dargestellt. Beide mathematischen Inhalte werden somit dem konzeptuellen Wissen zugeordnet.

Es bleibt zu diskutieren, inwiefern die Ableitungsregeln und die Regel von L´Hospital im Sinne der Wissensmatrix dem prozeduralen oder konzeptuellen Wissen zu verorten sind. Die Regel von L´Hospital wird in vielen mathematischen Lehrbüchern zunächst formal als Satz eingeführt (z. B. Burg et al., 2017; Meyberg & Vachenhauer, 2015; Westermann, 2015). Laut der Wissensmatrix ist ein mathematischer Satz mit dem Zusammenhang gleichzusetzen. Dies spricht dafür, dass die Regel von L´Hospital in der Wissensmatrix als Zusammenhang eingeordnet wird. Dies hätte wiederum zur Folge, dass die Regel von L´Hospital dem konzeptuellen Wissen zugeordnet wird. Aus einigen Lehrbüchern wird allerdings auch deutlich, dass es sich bei der Regel von L´Hospital um ein Werkzeug handelt, welches bei der Berechnung von Funktionsgrenzwerten nützlich ist: „Wir wenden uns nun wieder dem Berechnen von Funktionsgrenzwerten zu. […] Die Regel von L´Hospital liefert eine Methode auch den Grenzwert zu berechnen, wenn $g(x_0) = f(x_0) = 0$“ (Westermann, 2015, S. 284). Dies würde dafür sprechen, dass die Regel von

24 Die Auswahl der Inhalte der Differentialrechnung, die in dem Kapitel 4.3 dargestellt wurden, hängt von den Daten ab, die in dieser Arbeit ausgewertet worden sind. Es wurden daher nur die notwendigen mathematischen Inhalte dargestellt.

L´Hospital als Verfahren eingeordnet wird. Letztlich wäre die Regel von L´Hospital demnach Teil des prozeduralen Wissens.
In der mathematikdidaktischen Diskussion zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen wird immer wieder auf den Kontext von Situationen verwiesen (z. B. Rittle-Johnson & Schneider, 2014; Smith et al., 1996). Mathematische Informationen können für die eine Person neu sein, während sie für die andere Person bereits im Wissensnetzwerk integriert sind und möglicherweise ein Automatismus bezüglich dieses Wissens vorhanden ist. Genauso ist es möglich, dass die Regel von L´Hospital bereits in einem Wissensnetzwerk einer Person integriert ist und diese für das Berechnen von Grenzwerten benutzt wird, während sich eine andere Person zunächst die Regel von L´Hospital „erarbeitet" und somit das eigene Wissensnetzwerk erweitert. Die Einordnung der Regel von L´Hospital als konzeptuelles Wissen oder prozedurales Wissen ist demnach personenabhängig. Im Kontext einer Erstsemesterveranstaltung an der Universität kann davon ausgegangen werden, dass die Regel von L`Hospital für Studierende neuartig ist, da sie zum einen in der Schule nicht im Lehrplan steht (für NRW: Ministerium für Schule und Bildung des Landes NRW, 2023) und zum anderen keine vorherigen Veranstaltungen an der Universität stattfinden, die diese Regel lehren.
Wird ein Blick auf die Facetten gelegt, lässt sich die Regel von L´Hospital sowohl in das prozedurale als auch das konzeptuelle Wissen einordnen. Die *mathematische Bemerkung 17 (Satz): Regel von L´Hospital (MB17)* kann bezüglich der Facette *Explizite Formulierung* sowohl als ausformulierter Satz, allerdings auch als Anleitung des Verfahrens verstanden werden. Bezüglich der Facette *Konkretisierung & Abgrenzung* deckt *MB17* auf der prozeduralen Seite ebenfalls die Bedingung der Anwendbarkeit ab (wobei in dieser Arbeit keine Spezialfälle[25] vorgestellt werden), während *MB18* ein Beispiel für die konzeptuelle Seite aufzeigt. Für die Facette *Bedeutung & Vernetzung* kann Abbildung 15 sowohl als (anschauliche) Begründung als auch als Vorstellung / Begründung aufgefasst werden. Auch der Beweis (z. B. in Heuser, 2009, S. 287) für die Regel von L´Hospital kann in beide Wissenselemente dieser Facette eingeordnet werden. Die Facette *Konventionelle Festlegungen* bleibt auf beiden Wissensseiten leer, da es keine bestimmten Namen bzw. Bezeichnungen oder nicht begründbare Festlegungen für die Regel von L´Hospital gibt.
Zuletzt wird nochmal die pragmatische Perspektive eingenommen, wie die Regel von L´Hospital im Kontext des Ingenieurstudiums in der Universität genutzt wird. In der Vorlesung wird die Regel von L´Hospital theoretisch eingeführt, allerdings meistens als Werkzeug für die Berechnung von bestimmten Grenzwerten. Somit liegt ein starker Fokus auf den Anwendungskontext, der vor allem in den

---

25 Spezialfälle sind allerdings durchaus vorhanden. Ein möglicher Spezialfall, bei der die Regel von L´Hospital anwendbar ist, aber versagt, da sich „im Kreis gedreht" wird: $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Übungsblättern bzw. Hausaufgaben deutlich wird. Die Regel von L´Hospital stellt eine klare Anleitung dar, wie bestimmte Grenzwerte zu berechnen sind und welcher Schritt dafür unternommen werden muss. Eine solche „Schritt-für-Schritt-Anleitung“ ist aus theoretischer Perspektive als Prozedur zu verstehen, welche Teil des prozeduralen Wissens ist (Star, 2005).

Die verschiedenen Perspektiven haben anhand der Regel von L´Hospital gezeigt, dass die Einordnung von mathematischem Inhalt in die Wissensmatrix gelegentlich nicht selbsterklärend ist. Es gibt sowohl Gründe, die Regel von L´Hospital als Zusammenhang (und somit dem konzeptuellen Wissen zuzuordnen) oder als Verfahren (und somit dem prozeduralen Wissen zuzuordnen) aufzufassen. Da in dieser Arbeit Bearbeitungsprozesse von Studierenden untersucht werden und das Ziel der Aufgaben das Nutzen und Üben der Regel von L´Hospital ist, wird die Regel von L´Hospital als Verfahren aufgefasst. Die gleichen Argumente gelten ebenfalls für die Ableitungsregeln.

Zuletzt bleibt noch anzumerken, dass die dargestellte Wissensmatrix in Tabelle 7 weder bezüglich der Differentialrechnung noch bezüglich der einzelnen Facetten der jeweiligen Konzepte, Zusammenhänge und Verfahren vollständig ist (z. B. fehlt die Darstellung von Gegenbeispielen für die Differenzierbarkeit). Darüber hinaus wurden in dieser Arbeit selbst nicht alle Wissenselemente vollständig ausgearbeitet (vor allem für die *Konventionellen Festlegungen*).

Mathematischer Inhalt	**Explizite Formulierung**	**Konkretisierung & Abgrenzung**	**Bedeutung & Vernetzung**	**Konventionelle Festlegungen**
Konzept: Differenzierbarkeit	MB3	MB4	Grundvorstellungen	MB3
Zusammenhang: Mittelwertsatz	MB14		Abb. 4.7 und MB16	
Verfahren: Summenregel	MB6	MB8	Abb. 4.5 und MB7	
Verfahren: Kettenregel	MB9	MB10	MB11 und Abb. 4.6	MB9
Verfahren: Ableitung der Potenzfunktion	MB12	MB13	Papula (2018, S. 330)	
Verfahren: L´Hospital	MB17	MB18	Abb. 4.8 und Heuser (2009, S. 287)	MB17

Tabelle 7: Einordnung der mathematischen Inhalte in die Wissensmatrix

5 Methodische Ansätze und Entscheidungen zur Untersuchung der Problembearbeitungsprozesse

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den methodologischen Ansätzen zur Untersuchung von Problembearbeitungsprozessen. Es beginnt mit der methodischen Einordnung sowie einigen Vorüberlegungen zur Datenerhebung und -auswertung (Kapitel 5.1). Anschließend wird im Studiendesign (Kapitel 5.2) der konkrete Rahmen der Untersuchung vorgestellt. Im weiteren Verlauf folgt eine stoffdidaktische Analyse der drei Aufgaben (Kapitel 5.3), zu denen in dieser Untersuchung die Problembearbeitungsprozesse untersucht werden. Abschließend werden die Auswertungsmethoden für die Prozesse (Kapitel 5.4) sowie die Produkte (Kapitel 5.5) der Problembearbeitungsprozesse erläutert.

5.1 Methodische Einordnung und Vorüberlegungen

Um die Forschungsfragen zu beantworten, bedarf es passender Methoden zur Datenerhebung und -auswertung. Diesbezüglich werden Vorüberlegungen dargestellt, die ebenfalls als Begründungen für das Forschungsvorgehen gelten.
Im Folgenden soll die vorgestellte Studie knapp umrissen werden, um weitere methodische Entscheidungen treffen zu können. Das Forschungsinteresse dieser Arbeit besteht darin, die Problembearbeitungsprozesse von Studierenden in einem natürlichen Setting zu untersuchen. Für die Studie wurden demnach fünf Lerngruppen in einem alltäglichen Setting videographiert: Während der Bearbeitung von mathematischen Hausaufgaben im Themenbereich der Differentialrechnung. Die Bearbeitungen der Studierenden wurden nach jeder Videoaufnahme eingesammelt oder abfotografiert. Anschließend folgte die Transkription der Videoaufnahmen. Sowohl die Videoaufnahmen als auch die Transkripte und Bearbeitungen (der Hausaufgaben) der Studierenden wurden genutzt, um die Problembearbeitungsprozesse der Studierenden beschreiben zu können. Die Bearbeitungsprozesse wurden aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet, wobei *Steuerung* (Kapitel 2.3), *Wissen* (Kapitel 2.4) und *Heurismen* (Kapitel 2.5) im Mittelpunkt stehen. Die grundlegende Forschungsausrichtung der Studie ist somit qualitativ.

5.1.1 Einordnung in das qualitative Forschungsparadigma

Das qualitative Forschungsparadigma zielt primär darauf ab, innerhalb eines bestimmten Kontextes Phänomene verstehend-interpretativ zu rekonstruieren (Döring & Bortz, 2016). Genau dies beabsichtigt die übergeordnete Forschungsfrage dieser Arbeit: Der zu untersuchende Kontext ist in dieser Studie die Bearbeitung von Hausaufgaben in einer mathematischen, hochschulischen Lehrveranstaltung für Ingenieur:innen. Das zu untersuchende Phänomen sind die

Problembearbeitungsprozesse. Die verstehend-interpretative Rekonstruktion geschieht durch die Auswertung der erhobenen Daten. Da in der bisherigen Forschung wenig zum mathematischen Problemlösen im hochschulischen Kontext geforscht wurde, steckt ebenfalls ein exploratives Ziel in dieser Arbeit. Es sollen neue Einsichten gewonnen werden, Theorie entwickelt und ggfs. weiterführende Fragen aufgestellt werden. Die Studie dieser Arbeit erfüllt damit den Anspruch der qualitativen Forschung, ein besseres Verständnis der sozialen Wirklichkeit zu erhalten sowie auf Abläufe, Deutungsmuster und Strukturmerkmale aufmerksam machen (Flick et al., 2012).
Des Weiteren ist das Problemlösen durch die vier Kategorien (*Steuerung, Wissen*, *Heurismen*, *Beliefs*) ein facettenreiches Phänomen. Deshalb wird durch eine qualitative Forschung der Erhalt von Komplexität des zu untersuchenden Forschungsgegenstandes für die geplante Analyse garantiert (Mey & Ruppel, 2018). Es stehen ebenfalls detaillierte Einzelfallbetrachtungen im Fokus der Untersuchung, wodurch ein tieferes Verständnis über das mathematische Problemlösen erlangt werden soll. Darüber hinaus ist die Untersuchungssituation in einem alltäglichen Setting (das Bearbeiten von Hausaufgaben ist in mathematischen Veranstaltungen eine typische Handlung von Studierenden) angelegt, welche nicht für eine spezifische Fragestellung konstruiert wird. Der Alltagsbezug bleibt erhalten, weshalb der Untersuchungsgegenstand in seiner Ganzheitlichkeit untersucht werden kann (Döring & Bortz, 2016, S. 65). Ein solcher Einblick lässt sich mit qualitativen Methoden besser untersuchen, da man dem Phänomen näher ist als mit anderen Forschungsstrategien (Flick et al., 2012). Aus diesen Gründen wurde für diese Arbeit keine quantitative Studie angelegt. Eine Laborsituation oder bspw. standardisierte Fragebögen beziehen sich auf vorformulierte Theorien oder auf gezielte Aspekte, wodurch das Problemlösen nicht in seiner Ganzheitlichkeit untersucht werden könnte. Ebenfalls ist das Problemlösen stark an das jeweilige Problem gebunden, wodurch vor allem die Kategorie des Wissens und der Heurismen nur schwach mit standardisiertem Vorgehen untersucht werden kann. Letztendlich ist das mathematische Problemlösen zwar auf schulischem Niveau bereits mehr in der Forschungslandschaft vertreten (z. B. Herold-Blasius, 2019; Rott, 2013), allerdings müssen auf hochschulischem Niveau zunächst weitere Einsichten in das mathematische Problemlösen gefunden werden, um die aufgestellten Hypothesen und Theorien mit quantitativen Methoden zu testen.

5.1.2 Methodische Überlegungen zur Erhebung von Problembearbeitungsprozessen

Bisherige Studien haben unterschiedliche Methoden genutzt, um das Lernverhalten bzw. Problembearbeitungsprozesse von Lernenden zu untersuchen. Obwohl die einzelnen Studien unterschiedlichen Forschungsinteressen nachgegangen sind, können die gewonnenen methodischen

Erkenntnisse dabei helfen, das Forschungsvorgehen der vorliegenden Arbeit zu diskutieren. Folgende methodische Ansätze wurden gewählt: Beobachtungen von erkennbarem Verhalten, Videoaufnahmen, (aufgabenbasierte) Interviews, lautes Denken, Fragebögen, Leistungstests sowie Strategie-Inputs (z. B. Herold-Blasius, 2019; Jacobse & Harskamp, 2012; Kani & Sharill, 2015; Montague et al., 2011; Rott, 2013; Stenzel, 2023a). Diese Methoden lassen sich allgemein in Selbstberichts- bzw. Beobachtungsverfahren einordnen. Beide Verfahren liefern sowohl Vor- als auch Nachteile für die Erhebung von Daten bezüglich allgemeiner Lernprozesse. Besonders in der Literatur für das Untersuchen von Lernstrategien bzw. zum selbstregulierten Lernen wurde bereits vermehrt über die unterschiedlichen Erhebungsmethoden diskutiert (z. B. Spörer & Brunstein, 2006). Obwohl das selbstregulierte Lernen einen etwas allgemeineren Lernprozess beschreibt, sind Lernstrategien (auf fachlicher Ebene) stark verwandt mit Heurismen des Problemlösens. Lernstrategien können nah an dem mathematischen Inhalt aufgefasst werden (wie im LimSt-Fragebogen, Liebendörfer et al., 2021). Gleiches gilt für Heurismen, die bei der Bearbeitung konkreter mathematischer Aufgaben genutzt werden. Einige Überlegungen können daher für Problembearbeitungsprozesse übernommen werden (Kapitel 2.5.1).

Selbstberichtsverfahren setzen voraus, dass die Befragten sich zum einen bei ihrem Vorgehen über ihre eingesetzten Strategien bewusst sind und zum anderen in der Lage sind, die eingesetzten Strategien in Worte zu fassen bzw. davon zu berichten. Dazu kommt, dass die Befragten ihr Vorgehen selbst interpretieren und daher auch eigenständig entscheiden, welche Informationen überhaupt berichtenswert sind (z. B. Artelt, 2000). In Fragebögen ist bspw. bereits vorgegeben, was aus Sicht der forschenden Person als berichtenswert angesehen wird. Allerdings müssen die Befragten in der Lage sein, ihr Vorgehen bzw. ihre genutzten Strategien in den Items des Fragebogens wiederzuerkennen. Dabei ist weiterhin unklar, wie bestimmte Worte wie „oft“, „immer“, „selten“, „meistens“, „häufig“, etc. einzuordnen sind. Solche Präpositionen weisen stets einen subjektiven Charakter auf. Eine Verstärkung dieser Probleme tritt dann auf, wenn die Befragung zeitlich in gewisser Entfernung zur tatsächlichen Handlung liegt. Die befragten Personen können sich möglicherweise nicht mehr an konkrete Situationen erinnern oder vergessen komplizierte kognitive Gedankengänge, die Aufschluss über eingesetzte Strategien bzw. Wissensnutzung geben könnten. Göller (2020, S. 228f.) sowie Kolbe und Wessel (2022) vermuten, dass die geringe Berichterstattung von kognitiven Strategien von Studierenden in mathematischen Veranstaltungen an der fehlenden Spezifität einer gewissen Situation liegen könnte. Mittels des Selbstberichtverfahrens ist es allerdings leicht zu erfassen, welche generellen Vorgehensweisen Studierende nutzen (Ericsson & Simon, 1980), wie z. B. die Wahl zusätzlicher Hilfsmittel bei der Hausaufgabenbearbeitung aus dem letzten Semester geholfen haben.

Das Beobachtungsverfahren zur Erhebung von Strategien wird oftmals bei jungen Kindern eingesetzt (Perels et al., 2020), um einigen Problemen des Selbstberichtsverfahren entgegenzuwirken. Nach Turner (1995) gibt es drei Vorteile gegenüber dem Selbstberichtsverfahren. (1) Die Beobachtenden müssen nicht die Fähigkeit besitzen, ihre Strategien zu formulieren. (2) Beobachtungsverfahren verbinden das Verhalten einer Person direkt mit den Gegebenheiten der Situation. (3) Die Körpersprache der beobachteten Person kann mit einbezogen werden. Der Nachteil an Beobachtungen ist allerdings, dass bei den untersuchten Lernenden kaum kognitive oder metakognitive Prozesse abzuleiten sind.

„Observing students engaged in studying, is really not a very rewarding research method. There is simply not much to observe. We can measure the time spent on reading the text, we can examine the underlinings and notes made, but such data do not provide useful information (Marton & Säljö, 2005, S. 110)."

Nach Marton und Säljö (2005) scheint es so, dass durch das reine Beobachten von Studierenden kaum relevante Informationen zu den tatsächlichen Prozessen erlangt werden können.

Schlussfolgerungen für die Auswahl der Erhebungsmethode

In dieser Studie sollen mathematische Problembearbeitungsprozesse von Studierenden in alltäglichen Situationen untersucht werden. Daraus ergeben sich aus den vorherigen Ausführungen folgende Schlussfolgerungen:
Das mathematische Problemlösen ist ein Prozess, der stark von der jeweiligen Aufgabenbearbeitung abhängt. Es bietet sich daher an, dass die Untersuchung ebenfalls möglichst nah an dem Prozess durchgeführt wird. Dies bedeutet, dass der zeitliche Abstand im Fall einer Befragung zum jeweiligen Problembearbeitungsprozess möglichst klein gehalten werden sollte. Die zeitliche Nähe erlaubt es den untersuchten Personen, sich an wichtige Details des Problembearbeitungsprozesses zu erinnern. Vor allem komplexe (meta-)kognitive Prozesse bleiben unter Umständen nur im Kurzzeitgedächtnis und gehen nicht in das Langzeitgedächtnis über. Zu einem späteren Zeitpunkt sind sie damit nicht mehr abrufbar. Eine Erhebung, welche in zeitlicher Ferne zum Problembearbeitungsprozess liegt, kommt daher nicht infrage. Um den zeitlichen Aspekt auszuschließen, bietet sich eine Erhebungsmethode an, die unmittelbar am Problembearbeitungsprozess beteiligt ist: Beobachtung. Das reine Beobachten von Studierenden während eines Problembearbeitungsprozesses scheint aber wenig sinnvoll zu sein, da kaum relevante Informationen sichtbar werden (Marton & Säljö, 2005). Besonders die (meta-)kognitiven Prozesse sowie Strategienutzung sind für die Analyse der Problembearbeitungsprozesse interessant. Eine Möglichkeit, die Problembearbeitungsprozesse zu untersuchen, sind aufgabenbasierte Interviews (wie z. B. in Stenzel, 2023a), um nach spezifischen Strategien oder spezifischer Wissensnutzung fragen zu können.

Allerdings ist dabei zu bedenken, dass die interviewleitende Person mit solchen Fragen, die mitunter Anlass für neue Gedanken oder Denkanstöße sind, einen Einfluss (wie z. B. beschrieben in Assad, 2015; Maher & Sigley, 2014) auf den Problemlöseprozess der Studierenden haben könnte. Darüber hinaus kann jeder Eingriff einer außenstehenden Person auch einen negativen Einfluss auf die Problembearbeitungsprozesse bewirken. Jede Frage kann eine Ablenkung für Studierende darstellen, da sie den roten Faden ihrer Gedankengänge verlieren könnten. In Hinblick auf ein natürliches Setting wäre es allerdings sinnvoll den Einfluss von außenstehenden Personen weitestgehend zu eliminieren. Um möglichst wenig Einfluss auf den Problembearbeitungsprozess zu haben und trotzdem Strategien und Nutzung von Wissen sichtbar zu machen, kann das laute Denken (Ericsson & Simon, 1980) hilfreich sein. In den aufgabenbasierten Interviews, die Stenzel (2023a) durchgeführt hat, mussten einige Problembearbeitungsprozesse ausgeschlossen werden, weil für eine sinnvolle Auswertung zu wenig gesprochen wurde. Das laute Denken „zwingt“ die untersuchten Personen allerdings dazu, ihre Gedanken zu verbalisieren, sodass im bestmöglichen Szenario keine Gedankengänge verloren gehen und der natürliche Problembearbeitungsprozess in seiner Ganzheitlichkeit angemessener als in einer Interviewsituation abgebildet werden kann.
Für die Studie dieser Arbeit scheint demnach die Erhebungsmethode des lauten Denkens geeignet zu sein. Ähnlich wie bei Göller (2020, S. 121ff.) wird sich demnach darauf verlassen, dass Studierende in der Lage sind, ihre Gedanken (zumindest zu einem ausreichenden Grad) zu verbalisieren. Dennoch wird sich gegen den Einsatz von Interviews entschieden, da diese entweder den Problembearbeitungsprozess beeinflussen oder zeitlich zu weit von der eigentlichen Handlung entfernt sind. Der große Vorteil des lauten Denkens ist seine ausgeprägte Prozessbezogenheit (Konrad, 2010). Für die Untersuchung beim Problemlösen, welches eben ein solcher Prozess ist, wird die Methode des lauten Denkens ausgenutzt.

5.1.3 Lautes Denken als Erhebungsmethode

Seit Anfang der 1970er-Jahre wächst die Popularität der Methode des *lauten Denkens*, vor allem in Studien zur Problemlöseforschung bzw. zu Aspekten kognitiver Prozesse (Konrad, 2010). Lautes Denken (Ericsson & Simon, 1980) ist mittlerweile ein etablierter methodischer Ansatz, um Gedankenprozesse der jeweiligen aktuellen Situation aufzudecken. Dabei müssen die geäußerten Gedanken nicht zwingend logisch oder gut strukturiert sein, allerdings geben sie die jeweiligen Denkhandlungen wieder. Dadurch lassen sich detaillierte Erkenntnisse über die während der Handlung stattfindenden Denkprozesse ableiten (Sandmann, 2014). Die Grundannahme zu dem theoretischen Modell des lauten Denkens bezieht sich auf die menschliche Informationsverarbeitung. Dabei wird angenommen, dass spezifische kognitive Strukturen sowie steuerbare

Prozesse des Individuums zur Informationsaufnahme und -verarbeitung existieren (Ericsson & Simon, 1980).

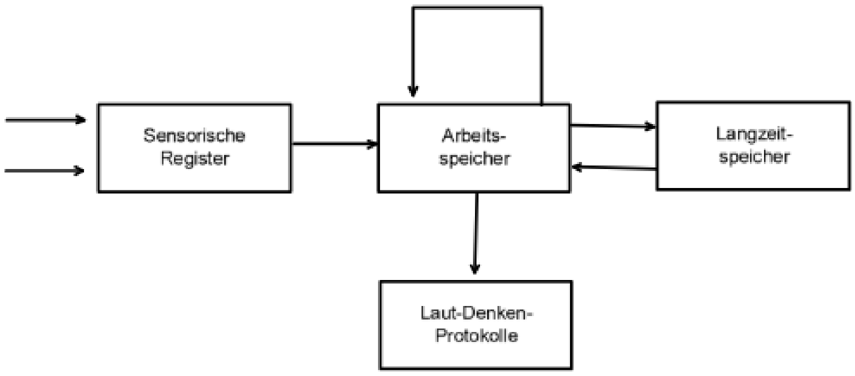


Abbildung 16: Gedächtnismodell (Konrad, 2010, S. 478)

Abbildung 16 liefert für die Informationsaufnahme und -speicherung ein Modell, welches in Sensorisches Register, Arbeitsspeicher (Ultrakurzzeit- und Kurzzeitgedächtnis) und Langzeitspeicher (Langzeitgedächtnis) unterscheidet. Das Modell besagt, dass die Aufnahme von Informationen aus der Umwelt zunächst für wenige Sekunden im Sensorischen Register gespeichert werden. Ein kleiner Teil dieser Informationen wird vom Individuum eine gewisse Aufmerksamkeit zugeschrieben, wodurch sie in das Kurzzeitgedächtnis gelangen. Die Informationen im Kurzzeitgedächtnis werden entweder durch neue Informationen aus dem sensorischen Register verdrängt oder durch verschiedene Techniken[26] in das Langzeitgedächtnis transferiert (Konrad, 2010). Ericsson und Simon (1993) unterscheiden im Rahmen dieses Modells zwischen drei Ebenen der Verbalisierung:

1. Verbalisierungsebene 1 (talk aloud): Auf dieser Verbalisierungsebene werden Informationen, die dem Individuum bereits in verbal kodierter Form vorliegen, aus dem Kurzzeitgedächtnis lediglich laut ausgesprochen.
2. Verbalisierungsebene 2 (think aloud): Auf dieser Verbalisierungsebene werden Informationen, die dem Individuum noch nicht in verbal kodierter Form vorliegen, zunächst in verbaler Form enkodiert. Dieser

26 Informationen gelangen zum Beispiel durch ständige Wiederholung in das Langzeitgedächtnis. Effektivere Techniken für den Transfer sind Elaborations- oder Organisationsstrategien (Konrad, 2010).

Enkodierungsprozess benötigt etwas Zeit, wodurch die primäre Handlung insgesamt etwas länger dauert.

3. Verbalisierungsebene 3 (reflection prompts): Auf dieser Verbalisierungsebene werden untersuchte Personen explizit dazu aufgefordert, gewissen Gedankengänge zu erklären, zu interpretieren oder zu hinterfragen. Dabei handelt es sich, entgegen der intendierten natürlichen Situation der qualitativen Forschung, um eine Laborsituation.

Verbale Berichte verlangsamen den primären Prozess, wobei sich auf den ersten beiden Verbalisierungsstufen die kognitiven Verfahren als auch die zeitliche Abfolge derer, nicht ändert (Ericsson & Simon, 1980; Sasaki, 2003). Somit entsprechen die Verbalisierungen den unmittelbaren Gedanken des Kurzzeitgedächtnisses.
Die kognitiven Prozesse der dritten Ebene benötigen hingegen mehr Zeit, da zusätzliche Aspekte dazukommen. Vielmehr werden die kognitiven Prozesse der Individuen durch die Aufforderungen und Unterbrechungen des Forschenden bei der Bearbeitung der Primäraufgabe beeinflusst (Bannert, 2007). Die gespeicherten Informationen aus dem Kurzzeitgedächtnis werden sich somit verändern (Konrad, 2010).
Daraus lässt sich ableiten, dass insbesondere die Verbalisierungsebenen 1 und 2 für die Untersuchung dieser Arbeit interessant sind. Beide Ebenen spiegeln dabei eine natürliche Situation wider, während die äußeren Aspekte der Ebene 3 mathematische Problembearbeitungsprozesse beeinflussen. Kommentare und Nachfragen von Forschenden haben dabei das Potenzial, die kognitiven Prozesse der untersuchten Person auf bestimmte Aspekte zu lenken, wodurch kein natürlicher Problembearbeitungsprozess entsteht. Im Sinne des Forschungsinteresses sollen keine mathematischen Problembearbeitungsprozesse einer Laborsituation untersucht werden. Aus diesem Grund wird davon abgesehen, während der Bearbeitungen der Studierenden inhaltlich zu intervenieren, um einen natürlichen Problembearbeitungsprozess entstehen zu lassen.
Der Einsatz der Methode des lauten Denkens findet sich in verschiedenen Forschungsbereichen wieder. Die pädagogisch-psychologische und naturwissenschaftsdidaktische Lehr-Lernforschung nutzt lautes Denken vor allem für Problemlöse- und Lernstrategieforschung (Sandmann, 2014). In der mathematikdidaktischen Forschung wird lautes Denken häufig in Problembearbeitungsprozessen genutzt, um metakognitive und kognitive Prozesse (z. B. Jacobse & Harskamp, 2012) sowie Strategien, Fehlvorstellungen und Hürden (z. B. Montague et al., 2011) zu beobachten. Typischerweise werden bei diesen Untersuchungen aus theoretischer Perspektive Problemlöseaufgaben gestellt, um die Prozesse der untersuchten Personen zu erforschen bzw.

analysieren. Dabei wird mit der Prozessbezogenheit genau die Stärke des lauten Denkens ausgenutzt (Konrad, 2010). Es gibt allerdings auch Nachteile, die durch das laute Denken auftreten können. Es ist nicht klar, ob die untersuchten Personen tatsächlich in der Lage sind, all ihre Gedanken zu verbalisieren. Vor allem scheint es so, dass besonders abstrakte Gedanken nicht gut wiedergegeben werden können, weil sie zunächst für die Sprache simplifiziert werden müssen (Charters, 2003). Dabei ist zum Beispiel ein Prozess gemeint, welcher in der Verbalisierungsebene 2 stattfindet. Komplexe Sachverhalte müssen manchmal für die Sprache enkodiert werden. Diese Simplifizierung kann die Aufmerksamkeit der problemlösenden Person von dem eigentlichen Lernprozess ablenken. Zusätzlich ist es möglich, dass automatisierte geistige Operationen nicht unbedingt verbalisiert werden, da diesen Prozessen keine Aufmerksamkeit zugewiesen wird (Waern, 1988). Letztlich stellt sich die Frage, inwiefern das laute Denken die kognitive Leistung beeinflusst. Die Studienlage scheint dazu keine Einigkeit zu erreichen. Es existieren Studien, die keine Performanzunterschiede (z. B. Biggs et al., 1993), positive Effekte (z. B. Franzen & Merz, 1988) oder negative Effekte (Schooler et al., 1993) für die primäre Beschäftigung festgestellt haben.

Methoden der Datenaufnahme und -dokumentation

Durch das Anwenden der Methode des lauten Denkens geben untersuchte Personen ihre Gedanken während einer primären Handlung preis. Typischerweise ist während dieser Handlung zumindest eine forschende Person in räumlicher Nähe. Die forschende Person stellt dabei sicher, dass der Forschungsrahmen des lauten Denkens eingehalten wird. Dies geschieht bspw. durch eine Erinnerung an das laute Denken, falls die untersuchte Person nach einer gewissen Zeit nicht mehr spricht. Das Forschungsdesign erhält damit automatisch einen beobachtenden Charakter, indem die forschende Person an der Lebenswelt der untersuchten Person teilnimmt.
Während einer Beobachtung werden oftmals Feldnotizen erstellt, um sie später auswerten zu können. Das Forschungsinteresse dieser Arbeit ist allerdings komplex sowie vielschichtig und bezieht sich nicht nur auf einzelne Aspekte. Da die Daten zeitgleich mit der Beobachtung erfasst werden, würde die Fülle und Frequenz an Informationen leicht zu einer Überforderung bei der forschenden Person führen (Döring & Bortz, 2016). Dabei scheint es unvermeidlich, dass wichtige Aspekte übersehen werden und für die spätere Auswertung verloren gehen. Eine Abhilfe schafft dabei das mediale Aufzeichnen (Video- und Audioaufnahme) der beobachtenden Verhaltensweisen und Aussagen. Durch das Aufzeichnen sind somit eine zeitversetzte Analyse und Interpretation der Verhaltensweisen sowie Aussagen der untersuchten Personen möglich (Döring & Bortz, 2016). Die Aufnahmen dienen demnach als „Konservierung“ der sozialen

Wirklichkeit und gestatten Forschenden einen wiederholten Zugriff auf das Geschehen, so wie es sich original zugetragen hat (Tuma & Schnettler, 2019).

5.1.4 Qualitative Inhaltsanalyse als Auswertungsmethode

Durch die gewählte Erhebungsmethode wird in dieser Arbeit eine umfangreiche Menge an Material gesammelt, die sowohl aus nonverbaler (Handlungen und Mitschriften der Studierenden) als auch verbaler Kommunikation (Gedanken mittels des lauten Denkens) besteht. Der methodische Ansatz der qualitativen Inhaltsanalyse beschäftigt sich mit Materialien, die genau aus dem Bereich der Kommunikation entstammen.
Es gibt verschiedene Ansätze und Definitionsversuche zur qualitativen Inhaltsanalyse. Mayring (2022, S. 12f.) arbeitete diesbezüglich sechs Punkte heraus, um die Besonderheiten der Auswertungsmethode darzustellen und von anderen Auswertungsmethoden abzugrenzen:

1. Die Inhaltsanalyse befasst sich mit der *Kommunikation*. In den meisten Fällen bezieht sich dies auf die Sprache, es können allerdings auch andere Arten von Kommunikation (z. B. Musik, Bilder, Videos, etc.) zum Gegenstand der Inhaltsanalyse gemacht werden.
2. Die Inhaltsanalyse arbeitet mit symbolischen Materialien (Texten, Bildern, Noten, etc.), welche in einer protokollierten Form vorliegen. Es handelt sich um eine *fixierte* Kommunikation.
3. Die Inhaltsanalyse geht *systematisch* vor. Dies steht im Gegensatz zu freien Interpretationen oder impressionistischen Ausdeutungen des zu analysierenden Materials.
4. Das systematische Vorgehen zeichnet sich dadurch aus, dass in der Analyse *regelgeleitet* vorgegangen wird. Im Sinne der intersubjektiven Nachvollziehbarkeit (Kapitel 5.1.5) besteht die Möglichkeit, die einzelnen Schritte der Analyse zu verstehen, nachzuvollziehen und zu überprüfen.
5. Das systematische Vorgehen lässt sich ebenfalls daran erkennen, dass die Analyse *theoriegeleitet* vorgeht. Dies bedeutet, dass das Material bezüglich einer theoretisch ausgewiesenen Fragestellung analysiert wird. Außerdem werden die Ergebnisse bezüglich des theoretischen Hintergrunds interpretiert.
6. Die Inhaltsanalyse erhebt den Anspruch, das Material als Teil des Kommunikationsprozesses zu analysieren und ist daher eine schlussfolgernde Methode. Mit Aussagen des zu analysierenden Materials werden *Rückschlüsse auf bestimmte Aspekte der Kommunikation* gezogen.

Auf die sechs Punkte wird im späteren Verlauf bei der Darstellung der einzelnen Erhebungsmethoden zurückgegriffen.
Die allgemeine Vorgehensweise einer qualitativen Inhaltsanalyse lässt sich der Abbildung 17 entnehmen.

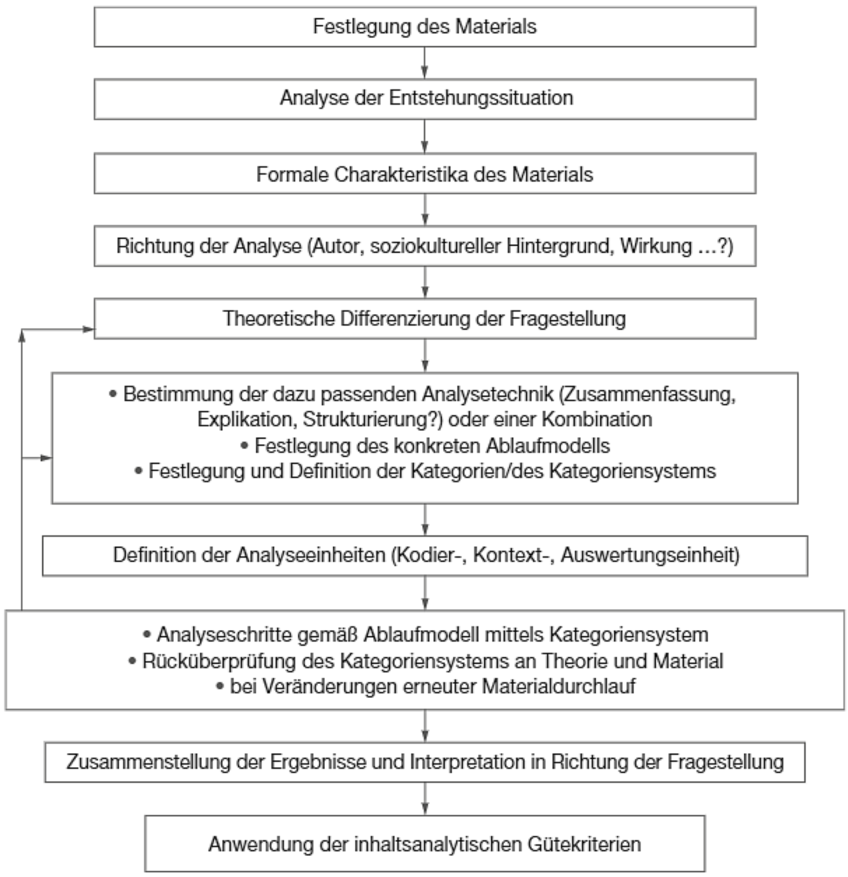


Abbildung 17: Allgemeines inhaltsanalytisches Ablaufmodell (Mayring, 2022, S. 61)

Zunächst wird der Umfang des zu untersuchenden Materials festgelegt und ggfs. eine repräsentative Teilmenge des Materials selektiert. Dabei wird berücksichtigt, dass relevante Daten ausgesucht werden, die sich auf die Forschungsfrage beziehen. Für die Entstehungssituation ist es wichtig zu klären, in welchem Zusammenhang die Materialien produziert wurden (Wer hat teilgenommen?

Soziale Bedingungen der Teilnehmenden? Atmosphäre der Situation, etc.). Außerdem sollten das zu analysierende Material bezüglich der formalen Charakteristika genau bestimmt und dokumentiert werden (meistens in Transkriptionen). Anschließend wird die Richtung der Analyse festgelegt, indem entschieden wird, über welche Aspekte des vorhandenen Materials Aussagen getroffen werden sollen. Darüber hinaus sollten aus der bereits bestehenden Theorie die konkreten Forschungsfragen angebunden werden. Letztlich erfolgt die Festlegung, welches inhaltsanalytische Verfahren als Analysetechnik angewandt wird (Zusammenfassung, Explikation, Strukturierung[27]). Die Analyseeinheiten definieren wie minimal oder maximal die Kodiereinheiten sein sollen. Abschließend wird die Materialanalyse anhand der Analysetechnik und -einheit durchgeführt, um die Ergebnisse schlussendlich zusammenzustellen und in Richtung der Fragestellung zu interpretieren.
Eine detailliertere Beschreibung des Vorgehens befindet sich in Mayring (2022, S. 53ff).

5.1.5 Berücksichtigung qualitativer Gütekriterien im Rahmen dieser Arbeit

Für Forschungsarbeiten im Rahmen des qualitativen Forschungsparadigmas stellt sich die Frage, wie die Qualität von qualitativer Forschung sichergestellt werden kann. Dabei gibt es verschiedene Sichtweisen, die diskutiert werden (Steinke, 2017, S. 319ff): Die Übernahme von quantitativen Kriterien, die Entwicklung eigener Kriterien oder die Ablehnung jeglicher Kriterien. Steinke (2017, S. 323ff) legt dabei einige Kernkriterien fest, an denen sich qualitative Forschung orientieren kann, wobei die Spezifität der Untersuchung berücksichtigt werden sollte.

Intersubjektive Nachvollziehbarkeit

Im Gegensatz zur quantitativen Forschung kann die qualitative Forschung nicht intersubjektiv überprüft werden. Eine qualitative Forschung lässt sich kaum identisch replizieren, weshalb stattdessen die intersubjektive Nachvollziehbarkeit herangezogen wird. Aus dieser können Rückschlüsse auf eine Bewertung der Ergebnisse gezogen werden. Steinke (2017, S. 324) schlägt für die Sicherung und Prüfung der intersubjektiven Nachvollziehbarkeit drei Wege vor: Dokumentation

27 Zusammenfassung: Ziel der Analyse ist es, das Material so zu reduzieren, dass die wesentlichen Inhalte erhalten bleiben, durch Abstraktion einen überschaubaren Corpus zu schaffen, der immer noch Abbild des Grundmaterials ist (Mayring, 2022, S. 66).
Explikation: Ziel der Analyse ist es, zu einzelnen fraglichen Textteilen (Begriffen, Sätzen, …) zusätzliches Material heranzutragen, das das Verständnis erweitert, das die Textstelle erläutert, erklärt, ausdeutet (Mayring, 2022, S. 66).
Strukturierung: Ziel der Analyse ist es, bestimmte Aspekte aus dem Material herauszufiltern, unter vorher festgelegten Ordnungskriterien einen Querschnitt durch das Material zu legen oder das Material aufgrund bestimmter Kriterien einzuschätzen (Mayring, 2022, S. 66).

des Forschungsprozess, Interpretation in Gruppen sowie Vorgehen nach kodifizierten Verfahren.
Die Dokumentation des Forschungsprozesses ist eine zentrale Technik. Dies bedeutet, dass lesenden Personen die Möglichkeit gegeben wird, den Forschungsprozess Schritt für Schritt nachzuvollziehen. Zu der Dokumentation des Forschungsprozesses gehören die Dokumentation des Vorverständnisses (Kapitel 1 bis Kapitel 4), die Dokumentation der Erhebungsmethoden (Kapitel 5.1.3) und Erhebungskontext (Kapitel 5.2), die Dokumentation der Transkriptionsregeln (Anhang), die Dokumentation der Daten (Kapitel 5.2), die Dokumentation der Auswertungsmethoden (Kapitel 5.4), die präzise Dokumentation der Informationsquellen (Kapitel 5.2) sowie die Dokumentation von Entscheidungen und Problemen (z. B. Änderungen der Kategoriensysteme, Darstellung von Problemen bei der Kodierung). Hinsichtlich der (Material-)Interpretation in Gruppen wurde ein Teil der Analyse in einem Doktorandenkolloquium sowie auf verschiedenen Tagungen diskutiert (ICME-Beitrag, GDM-Poster, GDM-Beitrag). Dies dient zur Herstellung von Intersubjektivität und Nachvollziehbarkeit im Umgang und Interpretation der Daten. Letztlich wird ebenfalls ein kodifiziertes Verfahren angewandt (Kapitel 5.1.4).

Indikation des Forschungsprozesses

Das Kriterium der Indikation des Forschungsprozesses besagt, inwiefern die gesamte Forschung als angemessen angesehen werden kann. Steinke (2017, S. 326ff.) legt dafür einige untergeordnete Aspekte fest.
Zunächst wurde bereits diskutiert, warum der qualitative Forschungsrahmen (Kapitel 5.1.1) sowie die Auswahl der Erhebungsmethoden (Kapitel 5.1.3) für die aufgeworfenen Forschungsfragen ausgewählt wurde. Die Transkription wurde semantisch-inhaltlich durchgeführt und erfolgte durch Rückbezug auf die Literatur (Dresing & Pehl, 2018). Die expliziten Transkriptionsregeln befinden sich im Anhang. Bezüglich des Sampling wurde die Rekrutierung der Teilnehmenden auf freiwillige Basis durchgeführt, wodurch keine Auswahl durch die forschende Person getätigt wurde. Möglicherweise kann dies dazu führen, dass keine echte Teilmenge aller Ingenieurstudierenden betrachtet wird. Dies kann allerdings auch noch weiter diskutiert werden, denn die Untersuchung hat nur an der Universität Paderborn stattgefunden. Es hätten z. B. noch Ingenieurstudierende aus anderen Universitäten als Informanten aufgenommen werden können. Dies spricht unter anderem auch die Limitationen der Verallgemeinerbarkeit (Steinke, 2017, S. 329f) der Studie an.

Empirische Verankerung

Die empirische Verankerung verlangt, dass sowohl Theorien als auch Hypothesen durch die vorliegenden Daten begründet werden (Steinke, 2017, S. 328f). Dafür wird sichergestellt, dass die Analysen und Interpretationen auf Grundlage der Videoaufnahmen, Transkripte bzw. Material der Studierenden aufbauen. Dabei eignen sich die Videoaufnahmen besonders gut, damit der ursprüngliche Kontext erhalten bleibt und wiederholt zur Analyse verwendet werden kann. Dies ermöglicht zudem die angemessene Verankerung des Materials und wurde daher vor den Feldnotizen bevorzugt. Letztlich werden mehrere Textbelege (Auszüge aus den Transkripten bzw. Material der Studierenden) für Begründungen und Interpretationen dargelegt.

Glaubwürdigkeit und Validierung

In der qualitativen Forschung gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, Glaubwürdigkeit und Validität sicherzustellen (Elliott et al., 1999, S. 222). In dieser Arbeit wird der Aspekt vor allem durch das Hinzuziehen anderer Forscher bedient, womit die Validität gewährleistet werden soll (Bortz & Döring, 2006, S. 328). Damit ist die interpersonale Konsensbildung (konsensuelle Validierung) gemeint (z. B. für die Kodierung zur Wissensmatrix in Kapitel 5.4.2), bei der sich Forschende auf die Glaubwürdigkeit und Bedeutungsgehalt des Materials einigen können. Obwohl es für qualitative Forschung eher ungewöhnlich ist, kann auch eine Intercoder-Übereinstimmung bestimmt werden (z. B. für die Episodenkodierung in Kapitel 5.4.1). Die qualitative Inhaltsanalyse muss sich solchen quantitativen Analyseschritten nicht verschließen, sondern kann diese (wie z. B. die Intercoder-Übereinstimmung) gut begründet einbeziehen (Mayring, 2017, S. 471).

5.2 Studiendesign

Eine vorangegangene Pilotierung bildete die Grundlage für das Studiendesign der vorliegenden Arbeit. Ziel dieser Pilotierung war es, die geplanten Verfahren zu testen und mögliche Optimierungen vorzunehmen. Die Ergebnisse wurden auf der GDM-Tagung 2022 in Form eines Posters präsentiert und führten zur Entwicklung des endgültigen Studiendesigns. Im Folgenden wird zunächst der Kontext der Studie (Kapitel 5.2.1) beschrieben, um die thematische Einbettung zu verdeutlichen. Anschließend wird auf authentische Lernsituationen (Kapitel 5.2.2) eingegangen, die einen zentralen Bestandteil der Untersuchung darstellen.

5.2.1 Kontext der Studie

Die Studie wurde in der Veranstaltung „Mathematik 1 für Maschinenbauer“ an der Universität Paderborn durchgeführt. In der Regel nehmen Studierende im ersten Semester an dieser Veranstaltung teil. Es werden die typischen Termine einer mathematischen Veranstaltung angeboten (Abbildung 18): Im wöchentlichen Rhythmus gibt es zwei Vorlesungen, eine Zentralübung sowie Kleingruppenübungen/Tutorien[28]. In der Vorlesung wurde der mathematische Inhalt präsentiert, welcher in den Tutorien mittels Übungsaufgaben gemeinsam mit den Tutor:innen oder in Einzelarbeit eingeübt wurde. Außerdem dienten die Übungsaufgaben aus den Tutorien als Vorbereitung für die Aufgaben der Hausübungen, da sie oftmals ein ähnliches Anforderungsprofil aufzeigten. Die Hausaufgaben durften von Studierenden freiwillig abgegeben werden und waren nicht Teil einer Studienleistung. Allerdings konnten die Studierenden mit erfolgreicher Abgabe der Hausaufgaben maximal 8 % Bonuspunkte für die Klausur sammeln. Die Regelung zum Bonuspunktesystem kommt aber erst dann zum Einsatz, wenn die Klausur bereits ohne die Bonuspunkte bestanden wurde. Die abgegebenen Hausaufgaben wurden eine Woche später in der Zentralübung besprochen.

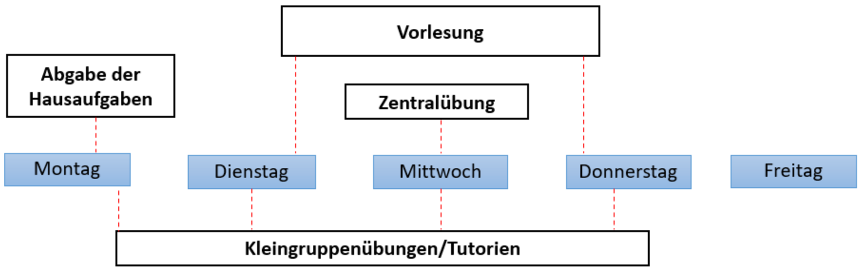


Abbildung 18: Struktur der Veranstaltung "Mathematik für Maschinenbauer I"

Innerhalb der Veranstaltung hat die Datenerhebung mit dem Hausaufgabenblatt 12 begonnen, welches in der ersten Vorlesungswoche nach den Weihnachtsferien abgegeben werden musste. Das Thema der Differentialrechnung wurde in fünf Vorlesungen behandelt, wodurch auf drei Hausübungsblättern Aufgaben zu dem Themengebiet gestellt wurden. Die zentralen Inhalte der Vorlesungen waren: Begriff der Differenzierbarkeit, n-te Ableitung, Differentiationsregeln, Ableitungsregeln, die Regel von L`Hospital, Taylorsche Formel mit Restglied, Bestimmung von Extremstellen und Kurvendiskussion. Die Datenerhebung endete mit der Abgabe von Hausübungsblatt 14.
Die Teilnahme an der Studie erfolgte freiwillig, wobei jede teilnehmende Person eine Aufwandsentschädigung von 30 Euro erhalten hat. Insgesamt haben sich

28 im Folgenden nur noch als Tutorium benannt, da Studierende diesen Ausdruck genutzt haben.

zehn Studierende bereit erklärt, an der Studie teilzunehmen. Darunter zwei Lerngruppen, die jeweils aus zwei bzw. vier Studierenden bestanden, sowie vier Studierende, die ohne Lerngruppe teilgenommen haben. Die Vierer-Lerngruppe bestand aus vier weiblichen Studierenden, die restlichen Teilnehmenden waren männlich. Neun der zehn Studierenden haben an der Veranstaltung zum ersten Mal teilgenommen, während ein Studierender die Veranstaltung zum zweiten Mal besucht hat.

Gruppe	Name	Studiengang	Fachsem ester	Abiturnote allgemein	Abiturnote Mathematik
G1	David	Maschinenbau	1	k.A.	8 Punkte
G2	Simon	W-Ing (Maschbau)	3	2,4	8 Punkte
G3	Thomas	Maschinenbau	1	2,4	12 Punkte
	Alex	Maschinenbau	1	2,6	11 Punkte
G4	Sarah	W-Ing (Maschbau)	1	1,9	10 Punkte
	Lisa	W-Ing (Maschbau)	1	1,6	11 Punkte
	Paula	W-Ing (Maschbau)	1	2,0	10 Punkte
	Lea	W-Ing (Maschbau)	1	1,4	12 Punkte
G5	Nick	W-Ing (Maschbau)	1	2	11 Punkte
G6	Lukas	W-Ing (Maschbau)	1	2,5	6 Punkte

Tabelle 8: Informationen zu den Studienteilnehmenden

Durch die freiwillige Teilnahme an der Studie ist es möglich, dass es sich bezüglich der Stichprobe um eine Positivauswahl handelt. Studierende, die besonders motiviert sind oder sich die Bearbeitung der Hausaufgaben in einer Studiensituation (aus inhaltlicher als auch aus organisatorischer Sicht) zutrauen, nehmen womöglich am ehesten an einer solchen Studie teil. Außerdem muss erwähnt werden, dass eine Voraussetzung für die Teilnahme der Studie war, dass Studierende außerhalb der Veranstaltungstermine die Hausaufgaben bearbeiten. Da die Bearbeitung der Hausaufgaben in der Veranstaltung freiwillig abgegeben werden konnten, haben an der Studie nur Studierende teilgenommen, die ohnehin eine Hausaufgabenbearbeitung anstrebten bzw. dies geplant hatten. Es kann gefolgert werden, dass die Arbeitsmotivation der Studierenden vergleichsweise hoch war.

Aus der Tabelle 8 lässt sich erkennen, dass sich die Teilnehmenden der Studie bezüglich der allgemeinen Abiturnote fast alle in einem guten Bereich befinden (außer Lea mit Note 1,4 und Alex mit Note 2,6). Bezüglich der Mathematik-

Abiturnote befinden sich die Teilnehmenden größtenteils in dem Notenspektrum zwischen gut und befriedigend (außer Lukas mit 6 Punkten). In dieser Stichprobe ist jedoch auffällig, dass vor allem die Studierenden in einer Lerngruppe bessere Mathematiknoten im Abitur erhalten haben, als Studierende, die sich ohne Kommiliton:innen mit den Hausaufgaben beschäftigen (außer Nick mit 11 Punkten).
Obwohl sich die Teilnehmenden der Studie größtenteils im ersten Semester befinden, lässt sich davon ausgehen, dass viele organisatorische Herausforderungen des Übergangs von der Schule zur Hochschule inzwischen besser bewältigt werden. Die Studierenden haben sich vermutlich bereits an Dinge wie das Zurechtfinden im Studium und das Bilden von Lerngruppen gewöhnt. Hinsichtlich der fachlichen Eingewöhnung hingegen könnte es sein, dass die Studierenden noch immer in Anpassungsprozessen stecken, da die Umstellung auf die neue Art der Wissensvermittlung weiterhin Herausforderungen mit sich bringen könnte.

5.2.5 Datenerhebung in authentischen Lernsituationen

Das Ziel der Studie ist es, eine möglichst natürliche bzw. authentische Lernsituation von Studierenden abbilden zu können. Innerhalb dieser Lernsituation ist der Problembearbeitungsprozess eingebettet. Eine authentische Lernsituation lässt sich dadurch beschreiben, dass sie der Realität entspricht und durch keine anderen Faktoren beeinflusst wird. Um solche Lernsituationen zu erfassen, die möglichst authentisch sind, wurden mehrere Maßnahmen ergriffen. Dabei erfolgte ein möglichst minimaler Eingriff in die Lernsituation der Studierenden, während gleichzeitig die notwendigen Aufnahmen zur Datensammlung erhoben wurden, die für eine Auswertung geeignet sind. Die Balance der Einhaltung von authentischen Lernsituationen und einer sinnvollen Erhebung von Daten für die Studie wird im Folgenden dargestellt.

Bearbeitung von Aufgaben

Zunächst wurde bezüglich der bearbeiteten Aufgaben vor der Durchführung der Studie nicht mit den verantwortlichen Personen der Veranstaltung abgestimmt, welche Aufgaben von Studierenden zum Thema der Differentialrechnung bearbeitet werden sollen. Die Aufgaben dieser Studie entstammen demnach aus dem normalen Semesterbetrieb und wurden von den verantwortlichen Personen der Veranstaltung festgelegt. Darüber hinaus wurde den teilnehmenden Studierenden der Studie vom Studienleiter nicht vorgegeben, welche Aufgaben der Hausaufgabe bearbeitet werden sollten. Dies haben sich die Studierenden selbst ausgesucht, wobei nahezu jede Aufgabe von den teilnehmenden Studierenden bearbeitet wurde.

Lernort und Lernzeit

Ein weiterer Aspekt des Lernens sind der Lernort und die Lernzeit. Während die Termine der Veranstaltung an festgelegten Zeitpunkten und Räumen in der Woche stattfinden, können sich Studierende ihren eigenen Lernort sowie ihre Lernzeit selbständig festlegen. Eine Vorgabe bezüglich der Zeit sowie des Orts würde daher ein Eingriff in die natürliche Lernsituation der Studierenden darstellen. Um dies zu beachten, wurden die teilnehmenden Studierenden zwei Wochen vor Beginn der Studie gebeten, einen Selbstbericht zu ihrem typischen Lernverhalten abzugeben. Im Stil eines Lerntagebuchs (Landmann & Schmitz, 2007) erhielten die Studierenden vorstrukturierte Fragen, die auf gewisse Routinen in ihrem mathematischen Lernverhalten abzielen. Dabei hat sich herausgestellt, dass die Studierenden sowohl zeitlich als auch räumlich wenig bis keine festgelegten Routinen besitzen, sodass eine Terminabsprache mit den Studierenden flexibel abgestimmt werden konnte. Die einzige zeitliche Bedingung war, dass die Studierenden die Hausaufgaben erst nach dem Besuch des eigenen Tutoriums bearbeiten wollten. Bezüglich eines Raums haben die Studierenden die Hausaufgaben vor der Studie meistens in leeren Räumen der Universität bearbeitet. Für den Zeitraum der Studie wurde den teilnehmenden Studierenden zugesichert, dass sie einen freien Lernraum der Universität nutzen können, in dem sie ungestört an den Hausaufgaben arbeiten können. Dieser Lernraum wurde während der Studie von allen teilnehmenden Studierenden zu jeder ihrer Lernsessions in Anspruch genommen. Die Vorbereitung des Raumes durch den Studienleiter begünstigte eine zweckdienliche Videografie.

Videografie

Die Videografie der Bearbeitungsprozesse zu den Hausaufgaben stellte den ersten Eingriff in die authentische Lernsituation dar. Die Dokumentation der Bearbeitungsprozesse von Studierenden ist allerdings notwendig, um diese anschließend nach wissenschaftlichen Standards auswerten zu können. Für Studierende ist es eine ungewöhnliche Situation, dass während des Lernens eine Kamera auf sie gerichtet ist. Im Sinne der sozialen Erwünschtheit (Paulhus & Delroy, 2002; Sandmann, 2014) ist es deshalb durchaus denkbar, dass sich die Studierenden mit ihrem Verhalten der ungewohnten Videosituation anpassen. Darüber hinaus können Studierende durch den beobachtenden Charakter der Kameras atypisch zu ihrem gewohnten Verhaltensmuster agieren.

Lautes Denken29

Zur Zweckdienlichkeit der Datenauswertung wurden die Studierenden gebeten, dass sie während des Lernens laut denken sollen. Es besteht die Notwendigkeit

29 Theoretische Überlegungen zum Lauten Denken wurden bereits in Kapitel 5.1.3 vorgestellt.

verbale Aussagen zu erheben, um in der folgenden Analyse Ergebnisse zum mathematischen Problembearbeitungsprozess ableiten zu können. Aus diesem Grund ist die Methode des lauten Denkens unabdingbar.
Eine typische Lernsitzung in einem Studiensetting mit lautem Denken verläuft wie folgt (Sandmann, 2014):

1. Einführung in die Lernsitzung
2. Erklärung des Ziels der Lernsitzung und der Lernaufgabe
3. Instruktion zum lauten Denken
4. Übungsaufgaben zum lauten Denken
5. Bearbeitung des Lernmaterials
6. Technische Datensicherung

Dieses Vorgehen wurde in der ersten Lernsitzung mit den teilnehmenden Studierenden umgesetzt. In anschließenden Lernsitzungen wurde nur noch bei Punkt fünf gestartet.
Bezüglich des vierten Punktes ist es ratsam, dass problemlösende Personen vor dem eigentlichen Start der Studie mit der Methode anhand einer Übungsaufgabe für das laute Denken sensibilisiert werden sollten (Sandmann, 2014). Dabei sollte beachtet werden, dass Verbalisierungen sich darauf konzentrieren, „WAS“ Studierende denken, statt zu thematisieren, „WARUM“ so gedacht wird (Wolcott et al., 2021). Damit soll vermieden werden, dass die teilnehmenden Studierenden nicht in die Verbalisierungsebene 3 (Kapitel 5.1.3) rutschen und versuchen ihre Gedanken zu erklären bzw. zu interpretieren. Um den Studierenden ein Beispiel des lauten Denkens zu geben, wurde demnach vor der ersten Lernsession eine zufällig ausgewählte FERMI-Aufgabe vom Studienleiter bearbeitet. Im Anschluss haben sich die Studierenden selbstständig mit einer weiteren zufällig ausgewählten FERMI-Aufgabe beschäftigt. FERMI-Aufgaben sind offene, realitätsnahe Schätzaufgaben, die mit begrenzten Informationen auskommen und kreatives bzw. problemlösendes Denken fördern, indem gewisse Annahmen getroffen werden müssen. Typischerweise verlangt das Lösen einer FERMI-Aufgabe demnach kreative Ansätze und wird daher als Üben für das laute Denken als geeignet erachtet. Sowohl der Studienleiter als auch die Studierenden haben während des Lösens der FERMI-Aufgaben laut gedacht.

Studienleiter

Ein weiterer Aspekt ist die Rolle des Studienleiters während der Lernsituation. Um sicherzustellen, dass sowohl die technischen Bedingungen (Kamera, Mikrofone, Akku) als auch die Methode des lauten Denkens von den Studierenden eingehalten werden, wird der Studienleiter unvermeidlich ebenfalls Teil der Lernsituation sein. Bezüglich der Methode des lauten Denkens greift der Studienleiter nur dann in den Prozess ein, wenn längere Ruhephasen entstehen

(Wolcott et al., 2021). In solchen Momenten erinnert der Studienleiter die Studierenden an das laute Denken. Obwohl der Studienleiter nicht mit der Veranstaltung „Mathematik für Maschinenbau I" assoziiert ist, kann dies trotzdem, erneut im Sinne der sozialen Erwünschtheit (Paulhus & Delroy, 2002; Sandmann, 2014), einen Einfluss auf das Verhalten der Studierenden haben. Dennoch schafft die Nicht-Assoziation des Studienleiters mit der Veranstaltung eine Möglichkeit, eine lockere Atmosphäre für die Studierenden zu schaffen. Vor allem durch den vorhergegangenen Selbstbericht und die flexiblen Terminabsprachen kann bereits ein freundschaftliches Verhältnis erzeugt werden, wodurch Studierenden mögliche Unsicherheiten genommen werden können.

(Technisches) Setup

Um die Anwesenheit des Studienleiters zu minimieren, wird das Set-Up (Abbildung 19) der Lernsituationen so aufgebaut, dass sich der Studienleiter außerhalb des Sichtfelds der Studierenden befindet. Die Platzierung der Kameras wurde im Vorhinein abgestimmt (Mondada, 2006). Da nicht zu erwarten ist, dass Studierende sich von ihrem Sitzplatz bewegen, können die Kameras stationär aufgestellt werden. Dazu werden jeweils zwei Mikrofone und Kameras auf die Studierenden gerichtet, wobei der Fokus der ersten Kamera auf dem Material der Studierenden und der Fokus der zweiten Kamera auf den Studierenden selbst liegt.

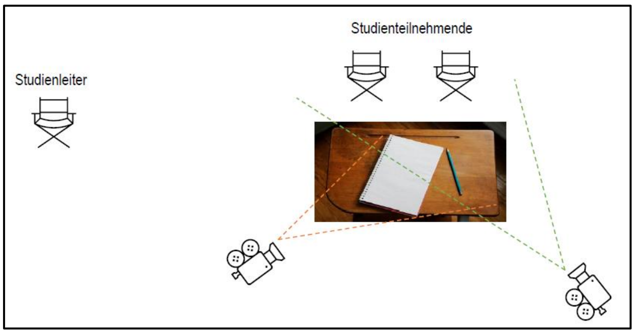


Abbildung 19: Set-up der Lernsituation (im Bild für eine Zweier-Lerngruppe)

Dauer der Lernsessions

Ähnlich wie bei dem Lernort und der Lernzeit können die Studierenden die Dauer ihrer Lernsessions selbstständig festlegen, was während der Erhebung berücksichtigt wird. Die Länge der Lernsessions, mitsamt möglichen Unterbrechungen, wird daher nicht im Vorhinein (durch den Studienleiter) festgelegt. Vor den Lernsessions wird allerdings vom Studienleiter erfragt, mit welchem zeitlichen Umfang die Studierenden ungefähr planen, um mögliche Terminkollisionen mit Lernsessions von anderen teilnehmenden Studierenden zu vermeiden.

Einsammeln von Materialien

Wenn sich die Studierenden entschließen, die Lernsituation zu beenden, werden alle Materialen der Studierenden „eingesammelt“. Die schriftlichen Produkte der Studierenden zu den Hausaufgaben wurden entweder vom Studienleiter abfotografiert (falls Studierende mit Zettel und Stift gearbeitet haben) oder von den Studierenden an den Studienleiter geschickt (falls Studierende mit einem iPad oder Ähnlichem gearbeitet haben).

5.3 Stoffdidaktische Analyse der bearbeiteten Aufgaben

Bevor empirisch auf die Problembearbeitungsprozesse eingegangen wird, erfolgt an dieser Stelle die Darstellung stoffdidaktischer Überlegungen bezüglich der drei Aufgaben („Differenzierbarkeit prüfen“ in Kapitel 5.3.1; „Mittelwertsatz“ in Kapitel 5.3.2; „L´Hospital in Kapitel 5.3.3). „Dies dient dem besseren Verständnis der gefilmten Prozesse – denn nur, wenn man eine Aufgabe (selbst) durchdrungen hat, kann man ihre Bearbeitung durch andere Personen vernünftig nachvollziehen.“ (Rott, 2013, S. 133). Dafür sollen die Anforderungen der Aufgabe sowie ein typischer Lösungsprozess skizziert werden. Um dies abbilden zu können, wird sich auf die Idee der erweiterten Musterlösungen von Ableitinger und Hermann (2011) berufen:

> „Wir haben etwa ausführliche Musterlösungen verfasst, die die in den Aufgaben steckenden Anforderungen explizit machen sollten. Dabei wurden z. B. die Aufgabenstellungen so umformuliert, dass die ihnen zugrundeliegenden Probleme deutlich sichtbarer werden. Es wurden wichtige Ideen in den Lösungen akzentuiert, Handlungsalternativen aufgezeigt und eventuelle Sichtweisenwechsel explizit gemacht. Es wurde – um es auf den Punkt zu bringen – versucht, jeden einzelnen Lösungsschritt und die ihn steuernden Begleitüberlegungen möglichst genau offenzulegen“ (Ableitinger, 2012, S. 91).“

Das schriftlich festgehaltene mathematische Endprodukt einer Aufgabenlösung spiegelt oftmals nicht den typischen Prozess wider, den problemlösende Personen durchlaufen. Der Ansatz von ausführlichen Musterlösungen kommt daher einem mathematischen Lösungsprozess näher als eine möglichst knapp gehaltene Lösung. Darüber hinaus können die steuerlichen Begleitüberlegungen stärker die Überlegungen zu den Vorgehensweisen aufzeigen.
Für die Erstellung der ausführlichen Musterlösungen dienen zunächst die Lösungsvorschläge der Veranstaltung „Mathematik für Maschinenbau I“ als Ausgangspunkt. Die knapp gehaltenen Lösungsvorschläge wurden anschließend im Sinne der ausführlichen Musterlösungen (Ableitinger & Hermann, 2011) mit

steuerlichen Begleitüberlegungen erweitert. Damit die angefertigte ausführliche Musterlösung immer noch die Anforderungen der Aufgaben widerspiegelt, wurde dem Dozenten eine erste Version der ausführlichen Musterlösung der Veranstaltung zugeschickt. Diese wurde auf mathematische Präzision und sprachliche Korrektheit überprüft, sowie um weitere Kommentare bzw. Überlegungen ergänzt. Zusätzlich wurden gemeinsam mit dem Dozenten der Veranstaltung mögliche Schwierigkeiten bzw. Hürden identifiziert, die während der Aufgabenbearbeitung auftreten können.

Bezüglich des mathematischen Wissens, welches für die Bearbeitung einer Aufgabe notwendig ist, wird die Wissensmatrix (Kapitel 2.4.4; Prediger et al., 2011) herangezogen. Sie liefert dabei aus theoretischer Perspektive eine Möglichkeit, den mathematischen Inhalt einzuordnen. Die zuvor erstellte ausführliche Musterlösung stellt demnach die Basis für das Wissen dar, welches für die Lösung der jeweiligen Aufgabe benötigt wird. Aus der ausführlichen Musterlösung wird herausgefiltert, welche Definitionen, Sätze und/oder Verfahren benötigt werden. Das mathematische Wissen wird im Anschluss zum prozeduralen bzw. konzeptuellen Wissen der Wissensmatrix zugeordnet. Die Einordnung der mathematischen Inhalte wurde von verschiedenen Mitarbeiter:innen aus der eigenen Arbeitsgruppe unabhängig durchgeführt und jeweils einzeln mit dem Verfasser der Arbeit besprochen. Anschließend wurde die Einordnung auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten untersucht und konsensuell validiert (Bortz & Döring, 2006, S. 328). Während der Auseinandersetzung mit der Erstellung der Wissensmatrix für die jeweiligen Aufgaben ist dennoch aufgefallen, dass es unterschiedliche Auffassungen darüber geben kann, wie diese gestaltet werden können. Ein wichtiger Aspekt ist, in welchem Maße Inhalte zusammengefasst werden, wie bspw. Funktionen als Oberkategorie, oder detaillierter untergliedert, etwa durch Exponentialfunktion als spezifische Unterkategorie. Ein weiterer Aspekt ist die Einbeziehung mathematischer Inhalte in ihrem Detailgrad, wie etwa Variablen. Letztlich gab es auch Unstimmigkeiten, inwieweit spezielle Inhalte eher als konzeptuelles oder prozedurales Wissen eingeordnet werden (dies wurde bereits in Kapitel 4.4 diskutiert).

Des Weiteren werden mögliche Hürden bzw. Fehlerquellen bezüglich der Aufgabe skizziert. Hürden sind zwar individuell von der bearbeitenden Person abhängig, allerdings lassen sich einige Stellen der Bearbeitung als besonders schwierig bzw. problematisch antizipieren. Bei der kurzen Darstellung werden allerdings nur mögliche Hürden aufgelistet, die speziell für die Aufgaben bzw. den Aufgabentyp vorkommen können. Dabei werden z. B. arithmetische Grundrechenarten nicht als mögliche Hürden angesehen, da diese aufgabenunabhängig auftreten können. Die antizipierten Hürden wurden auf Grundlage der Erfahrungen des Dozenten der Veranstaltung gemeinsam mit dem Verfasser der Arbeit identifiziert und basieren auf den jeweiligen ausführlichen Lösungen der Aufgaben.

Zuletzt wird ebenfalls die Aufgabe aus dem Tutorium vorgestellt. In dem Kontext der Veranstaltung besuchen Studierende zunächst ein Tutorium, bevor sie die Hausaufgaben selbstständig bearbeiten. Die Aufgaben aus dem Tutorium sollen vorbereitend auf die Hausaufgaben bearbeitet und besprochen werden. Dabei sind die Aufgaben aus dem Tutorium ähnlich, allerdings nicht unmittelbar im Vorgehen zu kopieren. Unterschiede und Ähnlichkeiten zu der Aufgabe der Hausübung werden skizziert.
Abschließend folgt in Kapitel 5.3.4 eine Begründung für die Auswahl der drei Aufgaben.

5.3.1 Aufgabe: Differenzierbarkeit

Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \, cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right), x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\quad , x = 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle 0 differenzierbar ist, und bestimmen Sie $f'(0)$.

Ausführliche Lösung:
In dieser Aufgabe liegt eine abschnittsweise definierte Funktion vor. Die Aufgabe verlangt, dass die Differenzierbarkeit in Punkt $x_0 = 0$ der Funktion f nachgewiesen werden soll.
Dennoch sollte vorher klar sein, dass die Funktionen $x \mapsto x^2\cos\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}^2}\right)$ für x≠0 und $x \mapsto 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind. Die Funktion f aus der Aufgabe ist demnach zunächst überall differenzierbar, außer an der Stelle $x_0 = 0$, die es nun zu untersuchen gilt.

Dafür wird die Definition der Differenzierbarkeit benötigt.
Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion (I ein offenes Intervall). Die Funktion f ist differenzierbar in $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} D_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. D_{x_0} bezeichnet dabei den Differenzenquotienten, wobei $x \neq x_0$ beachtet werden muss.

Die Funktion f wird in den Differentialquotienten eingesetzt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \cdots$$

In diesem Schritt werden für die x_0 überall eine 0 eingesetzt. Dies ist daher klar, weil die Differenzierbarkeit laut Aufgabenstellung in dem Punkt $x_0 = 0$ untersucht werden soll.

$$... = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \cdots$$

Nach Voraussetzung in der Aufgabenstellung ist $f(x_0) = f(0) = 0$. Außerdem kann der Ausdruck „-0" sowohl im Zähler als auch Nenner gestrichen werden. Damit bleibt nur noch der Ausdruck $\frac{f(x)}{x}$ übrig, mit dem noch nicht weitergerechnet werden kann.

$$... = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right)}{x} = \cdots$$

Der Grenzwertbegriff besagt, dass für das x niemals die 0 eingesetzt werden kann. Nach Aufgabenstellung ist die Funktion f für genau alle Werte $\neq 0$ durch $x \mapsto x^2 \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ definiert, daher konnte dies für $f(x)$ eingesetzt werden.

$$... = \lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = \cdots$$

Durch Kürzen von x im Zähler und Nenner erhält man den obigen Ausdruck.

Bei dem Versuch den Grenzwert $x \to 0$ von $x \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ zu bestimmen, wird das Argument des Kosinus beliebig groß. Aufgrund der Periodizität der Kosinusfunktion kann auf diesem direkten Wege kein Grenzwert ermittelt werden. Es muss als eine andere Möglichkeit gefunden werden, um den Grenzwert zu bestimmen.

Dafür wird zunächst die Kosinusfunktion genauer betrachtet.
Aus der Definition der Kosinusfunktion weiß man nämlich, dass diese auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt ist und nur Werte zwischen -1 und 1 angenommen werden können.

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$$

Für die Kosinusfunktion aus der Aufgabe bedeutet dies konkret, dass für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right) \leq 1$$

gilt.

Mit der Information, dass der Kosinus immer nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen kann, kann das das Sandwich-Kriterium auf die Grenzwertbestimmung angewendet werden:

$$-x \leq x \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right) \leq x$$

Nach der Multiplikation mit x entspricht dies genau der Funktion, dessen Grenzwert bestimmt werden soll. Für $x \to 0$ sind die Grenzwerte von $-x$ und x beide jeweils 0.

$$0 \leq \lim_{x\to 0} x \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right) \leq 0 \text{ für } x \to 0.$$

Nach dem Sandwich-Kriterium muss der Grenzwert also auch 0 sein. Insgesamt erhält man dann

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right)}{x} = 0 \text{ für } x \to 0.$$

Da der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} D_{x_0}(x) = 0$ existiert, ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(0) = 0$.

Anmerkung: Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} x \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ könnte auch folgendermaßen aufgefasst werden: $\lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$. Damit kann argumentiert werden, dass der erste Faktor eine Nullfolge ist und sich der zweite Faktor durch die Beschränktheit immer zwischen -1 und 1 befindet. Dadurch erhält man: $\lim_{x\to 0} x \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = 0$. Dies ist allerdings nur eine hilfsweise Überlegung und fachlich nicht korrekt, da ein nicht existenter Grenzwert betrachtet wird.

Theoretische Einordnung des benötigten Wissens

In Tabelle 9 ist die theoretische Einordnung der mathematischen Inhalte auf Grundlage der ausführlichen Lösung zu der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" in die Wissensmatrix zu erkennen.

	Mathematischer Inhalt	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Differenzierbarkeit				
	Konzept: Funktionen				
	Konzept: Abschnittsweise definierte Funktionen				
Prozedurales Wissen	Verfahren: Differenzierbarkeit prüfen				
	Verfahren: Grenzwert von Funktionen berechnen				
	Verfahren: Sandwich-Kriterium				

Tabelle 9: Einordnung zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" in die Wissensmatrix (EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

Für die Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" wird nach Einordnung in die Wissensmatrix sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen benötigt. In der Aufgabe wird verlangt, eine Funktion auf Differenzierbarkeit zu prüfen. Um die Aufgabe zu lösen, muss bezüglich des konzeptuellen Wissens der Begriff der Differenzierbarkeit auf der Ebene des Konzepts bekannt sein, da ansonsten die Aufgabenstellung nicht verstanden werden kann. Das Konzept der Funktionen wurde in verschiedene Funktionstypen gegliedert. Die Funktion f ist eine abschnittsweise definierte Funktion, die für $x \neq 0$ als Verkettung einer Polynom- und Kosinusfunktion definiert ist. Das Prüfen einer Funktion auf Differenzierbarkeit ist als prozedurales Wissen eine notwendige Gelingensbedingung für das Lösen der Aufgabe. Durch die Anwendung der Definition der Differenzierbarkeit ist darin das Verfahren der Grenzwertbestimmung (von Funktionen) inbegriffen. Letztlich kann ebenfalls das Sandwich-Kriterium angewendet werden, um den Grenzwert zu bestimmen.

Antizipierte Hürden

- **Verwenden der Definition der Differenzierbarkeit**: Die formale Definition wird in der Schule in der Regel nicht behandelt, wodurch das Verwenden für Studierende eine Neuheit darstellt.
- **Einsetzen der Funktion in den Differentialquotienten**: Die formale Schreibweise für abschnittsweise Funktionen könnte Studierende verwirren. Die könnte erschweren, welcher Ausdruck für $f(x)$ in den Differentialquotienten eingesetzt werden muss.
- **Berechnen des Grenzwerts**: Die Berechnung des Grenzwerts funktioniert nicht mit „einfachen" Methoden. Entweder muss das Sandwich-Kriterium verwendet oder über die Multiplikation der Nullfolge mit der beschränkten Kosinusfunktion argumentiert werden.
- **Zu starkes Kopieren des Vorgehens aus dem Tutorium**: Die Aufgabe aus dem Tutorium kann als ähnliche Aufgabe genutzt werden und liefert eine Vorgehensweise, die allerdings nicht gänzlich kopiert werden kann.

Ähnlichkeit zur Aufgabe des Tutoriums

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x|x|$$

auf Differenzierbarkeit. An welchen Stellen ist die Funktion differenzierbar? Gibt es Stellen, an denen die Funktion nicht differenzierbar ist?
Bestimmen Sie die Ableitung an den Stellen, an denen f differenzierbar ist.

Der Fokus der Aufgabe aus dem Tutorium liegt darauf, den Studierenden deutlich zu machen, wie die Differenzierbarkeit einer Funktion nachgewiesen werden kann. Die Aufgabe beschränkt sich allerdings nicht nur darauf, einen kritischen Punkt, sondern die gesamte Funktion zu untersuchen und außerdem selbstständig herauszufinden, ob überhaupt kritischen Stellen vorhanden sind. Mithilfe der Produktregel lässt sich die Ableitung für alle Stellen $x \neq 0$ bestimmen. Für die kritische Stelle $x = 0$ wird mit dem Differentialquotienten untersucht, ob ein Grenzwert existiert, sodass die Funktion auch für die Stelle 0 eine Ableitung besitzt.
Sowohl in der Aufgabe des Tutoriums als auch in der Hausaufgabe, muss das Verfahren angewendet werden, um die Differenzierbarkeit nachzuweisen. Im Groben kann das Vorgehen aus dem Tutorium demnach für die Hausaufgabe verwendet werden, wobei in der Hausaufgabe bereits der kritische Punkt vorgegeben ist. Ein weiterer Unterschied liegt darin, dass in der Aufgabe aus dem Tutorium die Ableitungsfunktion f' bestimmt werden soll, während in der

Hausaufgabe lediglich der Wert der Ableitung an der Stelle $x = 0$ untersucht wird.

5.3.2 Aufgabe: Mittelwertsatz

Beweisen Sie die folgende Ungleichung mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$|cos(e^{-x}) - cos(e^{-y})| \leq |x - y| \text{ für } 0 \leq y \leq x.$$

(Anmerkung: Die Ungleichung gilt sogar für beliebige nichtnegative x und y.)

Ausführliche Lösung:
Es soll die Ungleichung $|cos(e^{-x}) - cos(e^{-y})| \leq |x - y|$ für $0 \leq y \leq x$ mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung bewiesen werden. Zu Beginn wird der Satz nochmal ins Gedächtnis gerufen. Dieser lautet:

Die Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Zunächst kann festgestellt werden, dass die Ungleichung aus der Aufgabenstellung nicht von derselben Form wie der Mittelwertsatz ist. Zur Aufgabenlösung wird daher als Strategie gewählt, den Mittelwertsatz als Ausgangspunkt zu wählen und durch Umformungen zu der Ungleichung aus der Aufgabenstellung zu gelangen.

Um den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anzuwenden, wird eine Funktion benötigt. Aus der Aufgabenstellung kann abgelesen werden, dass die Funktion $f(t) = cos(e^{-t})$ auf dem Intervall $[y, x]$ betrachtet wird. Durch Ausprobieren findet man die Funktion $f(t)$. Wenn für $f(t)$ der Mittelwertsatz angewandt wird, erhält man:

Es existiert ein $t_0 \in (y, x)$ mit $f'(t_0) = \frac{cos(e^{-x})-cos(e^{-y})}{x-y}$.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung kann hier benutzet werden, weil die Funktion $f(t) = cos(e^{-t})$ stetig und differenzierbar auf dem Intervall (y, x) ist und somit die Voraussetzung des Satzes erfüllt.

Durch Umformungen der Gleichung erhält man

$$|cos(e^{-x}) - cos(e^{-y})| = |x - y||f'(t_0)|$$

Diese Gleichung nähert sich der Ungleichung aus der Aufgabenstellung an, wobei der Ausdruck $|f'(t_0)|$ noch „zu groß“ ist. Wenn nun durch Abschätzung gezeigt werden kann, dass $|f'(t_0)| \leq 1$ ist, führt es zur behaupteten Aussage, da dann die rechte Seite der Gleichung als Ganzes kleiner gleich $|x-y|$ ist.

$\forall t \in (y,x)$ ist nach Kettenregel $|f'(t)| = |e^{-t}\, sin(e^{-t})| = |e^{-t}||sin(e^{-t})|$.

Der Ausdruck $|e^{-t}|$ ist dabei $\forall t \in (y,x)$ immer kleiner oder gleich 1, weil t nach Voraussetzung $0 \leq y \leq x$ nur positive Werte annehmen kann und die e-Funktion mit negativem Exponenten auf dem Intervall $(0,\infty)$ nur Werte zwischen 1 und 0 annimmt.

Der Ausdruck $|sin(e^{-t})|$ ist ebenfalls $\forall t \in (y,x)$ kleiner oder gleich 1. Die Sinusfunktion nimmt per Definition immer nur Werte zwischen -1 und 1 an, wobei hier zusätzlich der Betrag der Sinusfunktion betrachtet wird und deshalb nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt.

Schlussendlich können die Erkenntnisse auf die Gleichung übertragen werden, woraus folgende Ungleichung resultiert:

$|cos(e^{-x}) - cos(e^{-y})| \leq |x-y|\ max|f'(t_0)|$ wobei $max|f'(t_0)| \leq 1$ für $t_0 \in (y,x)$.

Eine letzte Umformung ergibt:

$|cos(e^{-x}) - cos(e^{-y})| \leq |x-y|$ für $0 \leq y \leq x$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Anmerkung in der Aufgabenstellung gibt an, dass die Ungleichung auch für beliebige nichtnegative x und y gilt. Im Beweis könnten x und y auch vertauscht werden und alle Argumentationen würden weiterhin gelten.
Anmerkung: Im Fall, dass $x = y$ kann direkt aus der Behauptung gefolgert werden, dass die Ungleichung erfüllt ist, da dies zu $0 \leq 0$ führen würde. Erst für $0 \leq y < x$ benötigen wir die Ausführungen mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Theoretische Einordnung des benötigten Wissens

In Tabelle 10 ist die theoretische Einordnung der mathematischen Inhalte auf Grundlage der ausführlichen Lösung zu der Aufgabe „Mittelwertsatz“ in die Wissensmatrix zu erkennen.

	Mathematischer Inhalt	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Stetigkeit einer Funktion				
	Konzept: Differenzierbarkeit				
	Konzept: Funktion				
	Konzept: Abschätzung				
	Konzept: Betrag				
	Zusammenhang: Mittelwertsatz der Differentialrechnung				
PW	Verfahren: Kettenregel				

Tabelle 10: Einordnung zur Aufgabe „Mittelwertsatz“ in die Wissensmatrix (PW = Prozedurales Wissen; EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

Für die Aufgabe „Mittelwertsatz“ wird nach Einordnung in die Wissensmatrix sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen benötigt, wobei konzeptuelles Wissen deutlich überwiegt. In der Aufgabe wird verlangt, eine Ungleichung mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung zu lösen. Bezüglich des konzeptuellen Wissens müssen gleich mehrere Konzepte (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Funktion) bekannt sein, um nicht nur die Aufgabe zu verstehen, sondern ebenfalls weitere Überlegungen anzustellen. Für die Argumentation im Lösungsprozess wird ebenfalls das Konzept der Abschätzung benötigt, um die Ungleichung zu beweisen. Darüber hinaus wird bei den Überlegungen ebenfalls das Konzept des Betrags benötigt. Die Aufgabenstellung verlangt nach einer Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, sodass dieser mathematische Zusammenhang obligatorisch ist. Bezüglich des prozeduralen Wissens wird das Verfahren der Kettenregel verwendet, um die konkrete Ableitungsfunktion zu finden.

Antizipierte Hürden

- **Verwenden des Mittelwertsatzes**: Der formale Satz wird in der Schule in der Regel nicht behandelt, wodurch das Verwenden für Studierende eine Neuheit darstellt.
- **Finden der Funktion**: Für die Anwendung des Mittelwertsatzes wird eine Funktion verwendet, die nicht explizit aus der Aufgabenstellung abgelesen werden kann. Das Finden dieser Funktion, die zu der Ungleichung „passt", kann eine Hürde darstellen.
- **Verknüpfung Mittelwertsatz mit der Ungleichung**: Eine typische Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung ist das Beweisen einer Ungleichung. Die Verbindung zwischen einer Ungleichung und dem Mittelwertsatz zu erkennen, ist für die Studierenden allerdings nicht trivial. Zudem beschreibt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung eine Gleichung, während in der Aufgabe eine Ungleichung vorliegt.
- **Verwendung der Betragsstriche**: Die notwendige Verwendung der Betragsstriche kann für die Studierende eine zusätzliche Hürde während der Umformungen sein.
- **Zu starkes Kopieren des Vorgehens aus dem Tutorium**: Die Aufgabe aus dem Tutorium kann als ähnliche Aufgabe genutzt werden und liefert eine Vorgehensweise. Dennoch können nicht die exakt gleichen Schritte unternommen werden, welches an den unterschiedlichen Eigenschaften der betrachteten Funktionen liegt.

Ähnlichkeit zur Aufgabe des Tutoriums

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass für alle $x > 1$ die Ungleichung

$$1 + ln(x) \leq x$$

gilt.

In der Aufgabe wird ebenfalls verlangt, dass eine Ungleichung mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung bewiesen werden soll. Das Vorgehen zur Lösung der Aufgabe aus dem Tutorium kann dabei für die Hausaufgabe verwendet werden, wobei die Gleichung $1 + ln(x) \leq x$ aus der Aufgabe des Tutoriums noch mit der „Null" durch den Term $ln(1)$ erweitert werden muss, um die Form des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung zu erhalten. Nach der Anwendung des Mittelwertsatzes auf $f(x) = ln(x)$ ist die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$, wodurch die Abschätzung schon direkt gegeben ist und lediglich nur noch kleine Umformungen für den Beweis notwendig sind. In der Hausaufgabe müssen dagegen noch weitere Überlegungen mit dem Maximum der Sinusfunktion angestellt werden. Letztlich befindet sich der Unterschied zwischen den beiden Aufgaben darin, dass unterschiedliche Funktionen untersucht werden, die spezielle Anforderungen für die Lösung der Aufgaben stellen. Die allgemeine Vorgehensweise bleibt allerdings dieselbe.

5.3.3 Aufgabe: L´Hospital

Es sei $a > 1$. Berechnen Sie

$$\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$$

Ausführliche Lösung:
Bei der Aufgabe wird gefordert, den Grenzwert eines Quotienten zu berechnen. Zunächst wird damit gestartet, den Grenzübergang durchzuführen30.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a} = \frac{a^a - a^a}{a^a - a^a} = \frac{0}{0}$$

Mit dem Ausdruck $\frac{0}{0}$ kann zunächst nicht weitergearbeitet werden, allerdings ist dies ein Indikator für die Regel von L'Hospital. Sie kann in dem besonderen Fall helfen, um einen möglichen Grenzwert zu bestimmen. Die Regel von L´Hospital lautet:

Es seien $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ und $g: (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiter gelte $\lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^+} g(x) = 0$ oder es gelte $\lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^+} g(x) = \pm\infty$. Analoges gilt, wenn $\lim_{x \to b^+}$ durch $\lim_{x \to b^-}$ ersetzt wird. Weiter sei $g'(x) \neq 0$ auf (a, b). Dann folgt in jedem Falle $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Anmerkung: Die Aussage gilt, sofern der rechte Grenzwert konvergiert oder bestimmt divergiert. Bei unbestimmter Divergenz kann man nichts aussagen.

Eine der Voraussetzung für die Anwendung der Regel von L'Hospital ist durch den Grenzwert $\frac{0}{0}$ gegeben. Außerdem sind sowohl die Funktion im Zähler mit $f(x) = x^a - a^x$ als auch die Funktion im Nenner mit $g(x) = a^x - a^a$ differenzierbare Funktionen. Es gilt noch zu prüfen, ob die Ableitung des Nenners

---

30 In dieser Lösung wird der Ausdruck $\frac{0}{0}$ verwendet. Dies wird lediglich als Schreibweise genutzt, um die Anwendung der Regel von L´Hospital anzudeuten.

$g'(x) = \left(e^{x\ln(a)} - a^a\right)' \neq 0$ für $x \neq a$ ist. Dabei ist nach Kettenregel und Potenzgesetz

$$g'(x) = \left(e^{x\ln(a)} - a^a\right)' = \ln(a)\, a^x.$$

Da nach Voraussetzung $a > 1$ und die Logarithmus-Funktion im Intervall $(1, \infty)$ und die Exponentialfunktion mit der Vorschrift $a^x\ \forall x \in \mathbb{R}$ ebenfalls nur positive Werte annimmt, ist das Produkt der beiden Faktoren positiv. Somit folgt $g'(x) \neq 0\ für\ alle\ x\epsilon\mathbb{R}$.

Für $f'(x) = (x^a - a^x)'$ (verwende für den zweiten Summanden erneut Kettenregel und Potenzgesetz) gilt

$$f'(x) = ax^{a-1} - \ln(a)a^x$$

Insgesamt ergibt sich dadurch mit der Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a} = \lim_{x\to a} \frac{ax^{a-1} - a^x \ln(a)}{a^x \ln(a)} = \frac{a^a - a^a \ln(a)}{a^a \ln(a)} = \frac{1 - \ln(a)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} - 1.$$

Theoretische Einordnung des benötigten Wissens

In Tabelle 11 ist die theoretische Einordnung der mathematischen Inhalte auf Grundlage der ausführlichen Lösung zu der Aufgabe „L´Hospital" in die Wissensmatrix zu erkennen.

	Mathematischer Inhalt	EF	K&A	B&V	KF
KW	Konzept: Funktion				
Prozedurales Wissen	Verfahren: Regel von L´Hospital				
	Verfahren: Grenzwert von Funktionen berechnen				
	Verfahren: Kettenregel				
	Verfahren: Potenzregel				

Tabelle 11: Einordnung zur Aufgabe „L´Hospital" in die Wissensmatrix (KW = Konzeptuelles Wissen; EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

Für die Aufgabe „L´Hospital“ wird nach Einordnung in die Wissensmatrix fast ausschließlich prozedurales Wissen benötigt. Zu einem kleinen Teil ist auch konzeptuellen Wissens (Konzept Funktion) notwendig, da die Aufgabe darauf abzielt, den Grenzwert eines Quotienten zu bestimmen. Dies ist eine typische Aufgabe, auf welche die Regel von L´Hospital angewandt werden kann. Nach den Prüfungen der Voraussetzungen werden durch Anwendung von L´Hospital die Zähler- und Nennerfunktion abgeleitet, die in dieser speziellen Aufgabe mittels Ketten- als auch Potenzregel ermittelt werden können.

Antizipierte Hürden

- **Verwenden der Regel von L´Hospital**: Der formale Satz wird in der Schule in der Regel nicht behandelt, wodurch das Verwenden für Studierende eine Neuheit darstellt. Dazu kommt, dass einige Voraussetzung überprüft werden müssen, bevor die Regel angewandt werden kann.
- **Handwerkliche Operationen**: Die handwerkliche Arbeit des Ableitens an sich könnte die Studierenden vor Probleme stellen. Sowohl die notwendigen Umformungen (Exponential- und Logarithmusfunktion) als auch das Anwenden der Kettenregel kann Hürden darstellen.

Ähnlichkeit zur Aufgabe des Tutoriums

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)+3x-1}{2x}$, b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2\ln(x)}{x^2}$

In der Aufgabe aus dem Tutorium werden zwei Aufgaben angeboten, die in beiden Fällen die Anwendung der Regel von L´Hospital ermöglichen. Dabei können die Quotienten in beiden Aufgabenteilen ohne jegliche Umformungen abgeleitet werden. Die Aufgabe aus der Hausaufgabe hat vermeintlich kompliziertere Umformungen, bevor die Regel von L´Hospital mit den üblichen Ableitungsregeln angewandt werden kann. Das Verfahren kann allerdings aus dem Tutorium übernommen werden.

5.3.4 Begründung für die Auswahl der Aufgaben

Das Thema der Differentialrechnung wurde in der Veranstaltung „Mathematik für Maschinenbau I“ auf drei Aufgabenblättern behandelt. Insgesamt können neun Aufgaben der Hausaufgaben dem Thema der Differentialrechnung zugeordnet werden. Für die detaillierte Auswertung in dieser Arbeit werden allerdings lediglich die drei vorgestellten Aufgaben herangezogen.

Die Auswahl der drei Aufgaben wurde im Hinblick auf die Datenauswertung getätigt. Das Ziel dieser Arbeit ist es, Bearbeitungsprozesse von Studierenden zu untersuchen, wobei der Fokus dabei auf Problembearbeitungsprozesse liegt. Ob während der Bearbeitung einer Aufgabe tatsächlich ein Problem vorliegt, hängt von individuellen Voraussetzungen der Studierenden ab. Aus theoretischer Perspektive ist allerdings bereits anzunehmen, dass es Aufgaben gibt, die womöglich ein Problem für Studierende in einer hochschulischen Veranstaltung darstellen. Aus diesem Grund wurden für die Datenauswertung bereits diejenigen Aufgaben aussortiert, welche von den Studierenden z. B. lediglich das Ableiten einer speziellen Funktion[31] verlangt hat. Die Ableitungsregeln werden bereits in der Schule behandelt und sollten daher für die Studierenden bekannt sein. Daher kann angenommen werden, dass Aufgaben dieser Art eher keine Problemaufgaben für Studierende sind. Stattdessen wurden Aufgaben für die detaillierte Datenauswertung ausgewählt, die einen neuen inhaltlichen Input bezüglich der Differentialrechnung geben und somit eher ein Problem darstellen könnten. Die Aufgaben sind damit typische Aufgaben, die in einer mathematischen Erstsemesterveranstaltung behandelt werden (Kapitel 4.3.6).

5.4 Auswertungsmethoden zu den Prozessen der Problembearbeitungen

Die Bearbeitungsprozesse der Studierenden werden mit verschiedenen Methoden ausgewertet. Jede Auswertungsmethode setzt dabei einen Fokus bezüglich drei (*Steuerung*, *Wissen*, *Heurismen*) der vier Kategorien, die einen Einfluss auf das Problemlösen nach Schoenfeld (1985) haben. Die geplanten Auswertungsmethoden werden in den folgenden Kapiteln ausführlich beschrieben und erläutert.

5.4.1 Nutzung der Episoden nach Schoenfeld zur Rekonstruktion der Steuerung

Sogenannte „protocol coding schemes“ werden erstellt, um objektive Anzeichen von offenkundigen Handlungen und Aussagen zu erfassen, die von problemlösenden Personen während des Bearbeitungsprozesses getätigt werden (z. B. Schoenfeld, 1985, S. 294ff.). Das Ergebnis der Kodierung eines Bearbeitungsprozesses wird dabei Protokoll genannt. In der Vergangenheit wurde diese Art von Kodier-Schema bereits häufig sowohl in AI (*Artificial Intelligence*) als auch der mathematikdidaktischen Forschung eingesetzt. Die AI nutzt die erstellten Protokolle, um z. B. Ähnlichkeiten in verschiedenen Problembearbeitungsprozessen zu finden, sodass sie anschließend für idealisierte

---

31 Beispiel: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = cos(x) \cdot sin(x)$$

Prozesse in Programme eingebaut werden können. In der mathematikdidaktischen Forschung ist es häufig das Ziel, qualitative Analysen von Problembearbeitungsprozessen durchzuführen. Dazu gehören das Verstehen von Problembearbeitungsprozessen verschiedener Individuen (sowohl Experten als auch Novizen), aber auch die Identifikation von erfolgreichen und weniger erfolgreichen Strategien bzw. Heurismen während Problembearbeitungsprozessen.

Schoenfeld (1985, Kapitel 9) hat sich als Teil seiner mathematikdidaktischen Forschung ebenfalls mit solchen „protocol coding schemes" auseinandergesetzt. Dabei hat er Hinweise für ein Kodier-Schema erstellt, welches auch in heutiger mathematikdidaktischer Problemlöseforschung aufgegriffen und ausgeweitet wird (z. B. Rott, 2013; Stenzel, 2023a). In seinen theoretischen Ausarbeitungen verwendet Schoenfeld (1985) den Begriff Phasen im Problembearbeitungsprozess, während für die Kodierung der Begriff Episode genutzt wird. Rott (2013), Herold-Blasius (2019) und Stenzel (2023a) nutzen ebenfalls in ihren Ausarbeitungen den Begriff Episode anstelle von Phase. Ein Ziel der Episodenkodierung nach Schoenfeld (2016) ist es, verschiedene Problembearbeitungsprozesse miteinander vergleichen zu können. Dafür stellt Schoenfeld sieben Episodentypen vor: *Reading*, *Analysis*, *Exploration*, *Planning*, *Implementation*, *Verification* und *Transition*. Diese Episodentypen weisen eine starke Ähnlichkeit zu den Phasen von Polya auf (Kapitel 2.3.3 und Abbildung 20). Außerdem ist zu erkennen, dass den theoretischen Ausarbeitungen von Schoenfeld (1985) die Episode *Reading* sowie *Transition* hinzugefügt wurde. Beide Episoden haben sich in den empirischen Daten aufgetan und wurden den theoretisch ausgearbeiteten Episoden ergänzt.

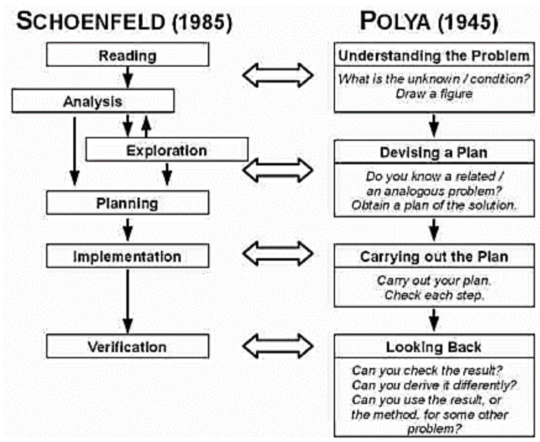


Abbildung 20: Analogie zwischen Schoenfeld (1985) Episoden und Schritten von Pólya (1945)

Um die Episoden zu beschreiben, wird das Kodiermanual von Stenzel (2023a, S. 93ff.) übernommen. Stenzel hat dies wiederum aus den Arbeiten von Rott (2013) und Schoenfeld adaptiert (1985). An einigen Stellen des Kodiermanuals von Stenzel (2023a, S. 93ff.) wurden allerdings leichte Anpassungen durchgeführt, um eine einheitliche Darstellung der Episoden zu erzeugen. Dabei wurden zusätzlich einige Beschreibungen der Episoden leicht vergrößert und um weitere Beschreibungen bzw. Erklärungen ergänzt. Des Weiteren zeigten die ersten Versuche der Kodierung, dass gewisse Zeitabschnitte auf zwei Episoden gleichzeitig zutreffen können. Dies liegt womöglich am Interpretationsspielraum der unterschiedlichen kodierenden Personen. Infolgedessen wurde eine genauere Beschreibung der Unterschiede zwischen den Episoden hinzugefügt, sodass jeder Zeitabschnitt nur einer Episode zugeordnet werden kann.

Reading: Diese Episode umfasst das Lesen der Aufgabenstellung. Für die Kodierung der Episode *Reading* ist dabei die Art des Lesens, ob laut oder leise, unerheblich. Die Kodierung beginnt, sobald die problembearbeitende Person verbal mit dem Lesen der Aufgabe beginnt oder der Blick für längere Zeit auf das Aufgabenblatt gerichtet wird. Der gesamte Prozess fängt demnach in der Regel mit dem Lesen des Aufgabentextes an. Sowohl das Abschreiben als auch das Zusammenfassen der Aufgabenstellung wird für die Kodierung ebenfalls unter der Episode *Reading* verstanden. Allerdings ist für das Abschreiben der Aufgabenstellung wichtig, dass keine Paraphrasierung durch die problemlösenden Personen vorgenommen wird. Gleiches gilt für Zusammenfassungen der Aufgabenstellung, wobei darunter auch das Wiederholen von einzelnen Aspekten der Aufgabenstellung fällt. Falls das Notieren der Aufgabenstellung hingegen über das Abschreiben oder eine Zusammenfassung hinausgeht, z. B. durch Umformulierungen, wird dies nicht als *Reading*, sondern als *Analysis* kodiert. Im weiteren Verlauf des Bearbeitungsprozesses wird die Episode *Reading* nur dann kodiert, wenn für einen längeren Zeitraum gelesen wird. Kurzes Nachschauen einzelner Aspekte der Aufgabenstellung wird nicht als *Reading* kodiert.

Analysis: Diese Episode umfasst Aktivitäten, die dazu dienen, die Aufgabe (besser) zu verstehen. Für die Kodierung der Episode *Analysis* zählen vor allem Umformulierungen und Darstellungswechsel der Voraussetzung oder der Behauptung (Klären von Definitionen, Äquivalente Formulierungen, Skizzen, Aufstellen von Gleichungen etc.). Aber auch bereits das Paraphrasieren der Aufgabenstellung gehört dazu. Falls die problembearbeitende Person nach dem Lesen der Aufgabenstellung keine Idee für das weitere Vorgehen besitzt, folgt zumeist die Episode der *Analysis*, um die Aufgabe (besser) zu verstehen. *Analysis* wird nur dann im Prozess kodiert, wenn es wirklich um das Verstehen der Aufgabenstellung geht. Aussagen wie „Ich versuche noch zu verstehen...“

bezogen auf die Aufgabe sind ein Indiz für die Episode *Analysis*, auch wenn zwischendurch vereinzelt explorative Aussagen getätigt werden. Häufig schließt nach der Episode *Analysis* die Episode *Planning* an. Die Episode der *Analysis* kann allerdings auch übersprungen werden, falls die problembearbeitende Person direkt eine Idee für die Lösung hat. Dies kann vor allem in kalkülorientierten Aufgaben der Fall sein.

Exploration: Diese Episode umfasst Aktivitäten, die dazu dienen, Lösungsmöglichkeiten zu suchen. Für die Kodierung der Episode *Exploration* gehören jegliche Erkundungen, die weder direkt an der Aufgabenstellung orientiert sind (*Analysis*), noch einen gezielten Plan verfolgt (*Planning* und *Implementation*). Oftmals zeichnet sich der Beginn der Episode Exploration dadurch ab, wenn die Aufgabenstellung noch nicht oder nicht vollständig verstanden wurde, die problemlösende Person aber schon eine (vermeintliche) Idee davon hat, was von ihr verlangt wird und eine grobe Richtung einschlägt. In dieser Episode werden mitunter viele verschiedene Ansätze ausprobiert, das Vorgehen an sich ist aber eher unsicher und nicht wirklich zielgeleitet. Außerdem ist es für Episoden der *Exploration* typisch, dass verschiedene Heurismen (Suche nach Analogien, Suche nach ähnlichen Aufgaben, etc.) bei Problemlösenden zu erkennen sind. Folgen in einem Bearbeitungsprozess zwei Episoden der *Exploration* aufeinander, z. B. durch Ausprobieren verschiedener Ansätze, dann werden diese auch als einzelne Episode der *Exploration* kodiert. Idealerweise hilft die Episode der *Exploration*, um an eine Information zu gelangen, die in weiteren Episoden, z. B. *Analysis, Planning* oder *Implementation* genutzt werden kann.

Planning: Diese Episode umfasst die Entwicklung eines Plans, der ein bestimmtes inhaltliches (Zwischen-)Ziel verfolgt. Für die Kodierung der Episode *Planning* genügt es nicht, dass problemlösende Personen lediglich ein Ziel beschreiben. Es muss zusätzlich deutlich werden, dass die problemlösende Person eine Idee besitzt, wie dieses Ziel zu erreichen ist. Der Beginn einer Episode *Planning* kann demnach dadurch erkannt werden, dass ein Plan und (Zwischen-)Ziel festgelegt wurden sowie das weitere Vorgehen nicht durch explorative Aktivitäten voranschreitet. Es ist nicht unüblich, dass *Planning* nach *Reading* und *Analysis* auftritt, wobei *Planning* durchaus auf *Exploration* folgen kann. Dies ist vor allem dann der Fall, wenn in der Episode *Exploration* wichtige Informationen gefunden wurden. Auf Planning folgt meistens die Episode *Implementation*. Oft gehören *Planning* und *Implementation* zusammen, allerdings muss nicht jeder Plan auch implementiert werden. Wenn *Planning* und *Implementation* als getrennte Episoden zu erkennen sind, sollten sie auch entsprechend kodiert werden.

Implementation: Diese Episode umfasst die Umsetzung eines Plans. Für die Kodierung der Episode Implementation muss erkennbar sein, dass den problemlösenden Personen bereits hier bewusst ist, wie in etwa vorgegangen werden muss. Dies zeichnet sich vor allem durch einen Plan aus, der vorher aufgestellt wird. Teilweise wird explizit ein Plan formuliert, teilweise muss auf die Existenz eines implizit vorhandenen Plans geschlossen werden. Dennoch muss diese Episode nicht immer geradlinig verlaufen. Sie kann z. B. auch beinhalten, dass ein Plan verworfen wird. Falls es bei der Durchführung noch Unsicherheiten gibt oder an einigen Stellen das weitere Vorgehen noch nicht klar ist, wird *Exploration* kodiert. Kleinere Hindernisse, die sich schnell aus dem Weg schaffen lassen, gehören aber zur *Implementation*. Es kann durchaus vorkommen, dass ein Plan auch zeitgleich mit der *Implementation* entwickelt wird, sich die Planung über einen sehr kurzen Zeitraum erstreckt oder nicht expliziert wird. In diesen Fällen werden *Planning* und *Implementation* gleichzeitig kodiert.

Verification: Diese Episode umfasst Aktivitäten, die zur Überprüfung des Bearbeitungsprozesses beitragen. Für die Kodierung der Episode *Verification* zählen die Überprüfung oder Kontrolle von Ergebnissen oder von Teilergebnissen. Dazu gehören insbesondere Kontrollen und Evaluationen der Argumentation oder des Rechenwegs. Der Beginn von *Verification* lässt sich oftmals dadurch erkennen, wenn das Vorgehen zu einem vorher festgelegten Ziel untersucht wird. Die Episode *Verification* dient häufig als Abschluss eines Bearbeitungsprozesses.

Transition: Diese Episode umfasst Übergänge zwischen zwei Episoden. Für die Kodierung der Episode *Transition* ist es wichtig, dass die vorhergehende Episode bereits abgeschlossen ist, die neue aber noch nicht angefangen hat. Viele *Transitions* haben keine zeitliche Ausdehnung, werden demnach nicht extra kodiert. Die Kodierung von *Transition* beginnt oftmals, wenn problemlösende Personen metakognitive Aktivitäten (Beurteilung des bisherigen Vorgehens, Entscheidungen über das weitere Vorgehen) ausführen. Diese signalisieren bewusste Richtungsentscheidungen. Es können auch *Transitions* zwischen zwei gleichnamigen Episoden vorkommen (z. B. *Exploration – Transition – Exploration*). Hier wird bspw. ein Ansatz verworfen, das weitere Vorgehen geplant und dann ein neuer Ansatz verfolgt. Zu dieser Episode zählen allerdings weder Schweigen (nichts Sichtbares passiert) noch organisatorische Tätigkeiten, da solchen Aktivitäten in Bezug zur vorherigen Episode kodiert werden.

In der Episodenkodierung bei Stenzel (2023a) wurde zusätzlich die Episode „Sonstiges“ hinzugefügt, um nicht-inhaltliche Aktivitäten zu erfassen. Da nicht-inhaltliche Aktivitäten in den vorliegenden Daten allerdings kaum bis gar nicht vorgekommen sind und die Studienteilnehmenden die gesamte Aufnahmezeit die

vollständige Aufmerksamkeit auf die Bearbeitungen gerichtet haben, wurde von der Hinzunahme von „Sonstiges“ abgesehen. Kurze nicht-inhaltliche Aktivitäten haben deshalb keinen Einfluss auf die Episode. Stenzel (2023a) berichtet in seiner Dissertation ebenfalls von selten auftretenden nicht-inhaltlichen Aktivitäten.
Im Verlauf der Datenauswertung wurde mit einer zweiten kodierenden Person gearbeitet, wodurch es teilweise zu unterschiedlichen Kodierungen kam. Die Diskussion der Unterschiede zwischen beiden kodierenden Personen hat gezeigt, dass die Grenzen zwischen den Beschreibungen der Episoden Spielraum für Interpretationen bieten. Anhand der konkreten Situation wurde sich auf Grenzen der Kategorien geeinigt, mit denen im weiteren Verlauf kodiert werden konnte. Besonders die Unterschiede zwischen *Exploration* und *Analysis* sowie *Exploration* und *Planning* werden im Folgenden dargestellt.

Unterschiede zwischen Episoden

Der Unterschied zwischen den Episoden der *Exploration* und *Analysis*: In der Episode *Analysis* versucht die problemlösende Person speziell die Aufgabenstellung zu verstehen. Dies lässt sich an Unternehmungen bzw. Aussagen feststellen, die mit den Bedingungen der Aufgabe oder dem unmittelbaren Ziel der Aufgaben zu tun haben. Sobald eine Unternehmung den Charakter hat, dass eine Lösung für das Problem erzeugt werden soll bzw. gesucht wird, wird es der Episode der *Exploration* zugeschrieben. Die nicht immer leicht zu identifizierenden Unterschiede zwischen *Analysis* und *Exploration* können auch in der Struktur und dem Inhalt erkannt werden. In einer Episode der *Analysis* arbeiten die Problemlösenden insbesondere dicht am Aufgabentext und gehen eher strukturiert vor. In einer Episode der *Exploration* kann das Vorgehen unstrukturiert sein und ist meistens weiter von der Aufgabenstellung entfernt. Die häufige Verwechslung zwischen den beiden Episoden *Analysis* und *Exploration* ist Schoenfeld (1992b, S. 194) selbst schon aufgefallen.
Der Unterschied zwischen den Episoden der *Exploration* und *Planning*: In der Episode *Planning* muss deutlich werden, wie die problembearbeitende Person die Aufgabe lösen möchte. Meistens zeigt sich dies durch die inhaltliche Natur des Plans. Charakterisierend sind Aussagen wie: „Ich würde hier in die Definition einsetzen, damit dann den Grenzwert bestimmen. Was dann rauskommt, ist ja dann das Ergebnis“. In der Episode *Exploration* wird zwar auch eine Richtung eingeschlagen, allerdings ist der problemlösenden Person zu Beginn nicht klar, ob dies wirklich zur Lösung beitragen könnte. Charakterisierend sind Aussagen wie: „Dann lass uns das doch mal versuchen“, „lass uns das doch mal ausprobieren, vielleicht hilft das ja“, „wollen wir das dann auch erstmal so machen wie in der Übung?“

Vorgehen beim Kodieren der Episodenkodierung

An dieser Stelle wird auf Beispiele der einzelnen Episoden verzichtet. Dies liegt unter anderem auch daran, dass die Kodierung anhand von Videomaterial durchgeführt wurde. Stattdessen wird in Kapitel 6.1.1 eine Fallanalyse (Häder, 2019, S. 371ff.; Hering & Schmidt, 2014) zur Episodenkodierung einer Bearbeitung der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ (Kapitel 5.3.1) dargestellt. Während der Bearbeitung durchläuft die Lerngruppe jede Episode mindestens ein Mal, wodurch der Prozess ein gutes Beispiel darstellt. Die Kodierung von Prozessen anhand des Videomaterials wurde bereits von Schoenfeld (1985, Kap. 9), Rott (2013) und Stenzel (2023a) verwendet. Es liegt daher nahe, dass die Kodierung der Episoden in dieser Arbeit ebenfalls anhand des Videomaterials durchgeführt wird.

Die einzelnen Episoden in einem gesamten Prozess müssen dabei keine einheitliche Zeitlänge besitzen, sondern sind lediglich von der Handlung bzw. den Aussagen der problemlösenden Personen abhängig. Der gesamte Problembearbeitungsprozess kann allerdings zu jedem Zeitpunkt anhand einer Episode beschrieben werden, wodurch ein lückenloses Protokoll entsteht. Es handelt sich dabei um ein Event-Sampling Verfahren (Schoenfeld, 1985). Zwischen zwei Episoden kann *Transition* kodiert werden, oder es findet ein direkter Übergang zu einer weiteren Episode statt. Es wurden im Vorhinein keine festen Segmente festgelegt, zu denen die Kategorien zugeordnet wurden, stattdessen wurden die Segmente erst während des Kodierens bestimmt (Rädiker & Kuckartz, 2019, S. 295).

Stenzel (2023a, S. 97) setzt eine Mindestlänge von 30 Sekunden für einzelne Episoden fest. Damit rücken auch die bereits angesprochenen Hauptentscheidungen in den Vordergrund der Kodierung. Zu kurze Episoden würden der Übersichtlichkeit schaden und den Fokus von den Hauptentscheidungen verlagern. Allerdings wurden Ausnahmen für die Episoden *Reading*, *Planning* und *Transition* getätigt, da diese Episoden in der Regel sehr kurz sind. Die Überlegungen von Stenzel (2023a) werden in dieser Arbeit übernommen, allerdings wird die Mindestlänge einzelner Episoden auf 15 Sekunden festgelegt. Dies schadet der Übersichtlichkeit kaum und es kann vor allem zu Beginn eines Bearbeitungsprozesses genauer dargestellt werden, in welcher Phase sich problemlösende Personen befinden. Zusätzlich werden in dieser Arbeit auch Lerngruppen untersucht, bei denen zeitlich kürzere Episoden oftmals durch eine Person angestoßen und recht zügig durch eine andere Person der Lerngruppe geschlossen wird. Solche Episodenwechsel, die eher kürzerer Natur sind, würden durch eine hohe Mindestlänge für Episoden verloren gehen. Um sich nicht im Detail des Prozesses zu verlieren, erfolgte die Einteilung der Episoden ebenfalls wie in Stenzel (2023a) und Rott (2013) an dem Videomaterial. Die Kodierung am Transkript könnte einen ganzheitlichen Blick des Prozesses verstellen.

In der Studie von Schoenfeld (1985) erhielten die problemlösenden Personen ein Zeitlimit von 20 Minuten pro Problem. In dieser Arbeit wurde den Studierenden kein Zeitlimit gesetzt, da es sich um eine möglichst authentische Situation des typischen Lernprozesses von Studierenden handeln sollte (Kapitel 5.2.2). Die Studienteilnehmenden haben demnach selbstständig das Ende ihrer Bearbeitungsprozesse festgelegt.
Die authentischen Lernsituationen haben zur Folge, dass nicht nur Einzelpersonen beim Lösen von Aufgaben beobachtet wurden, sondern zusätzlich Lerngruppen aus zwei bis vier Studierenden. Die Beteiligung mehrerer Personen an einem Prozess kann dazu führen, dass zwischen den Episoden häufiger gesprungen wird. Eine mögliche Ursache ist, dass vor allem mentale Aktivitäten bei den Teilnehmenden während der Bearbeitung nicht jederzeit synchron verlaufen müssen. Für Übergänge einer Episode sind daher meistens einzelne Teilnehmende verantwortlich, die einen Impuls anregen und die anderen Teilnehmenden der Lerngruppe in den Gedankenvorgang einbeziehen. Zu Problemen bezüglich der Episodenkodierung führt dies erst dann, wenn z. B. eine Lerngruppe aus mehreren Personen besteht, die verschiedene Aktivitäten ausführen. In einer Lerngruppe mit vier Personen könnten unter Umständen zwei Zweier-Gruppen entstehen, die sich jeweils in unterschiedlichen Episoden befinden.
Wie bereits beschrieben, wurde die Kodierung der Daten mit zwei unabhängigen Kodierenden durchgeführt. Zunächst wurden in einem Schulungsprozess zwei Problembearbeitungsprozesse unabhängig voneinander kodiert und direkt im Anschluss gemeinsam besprochen. Es folgte eine Identifikation von Gemeinsamkeiten und Unterschiede sowie eine konsensuelle Validierung an nicht übereinstimmenden Stellen (Bortz & Döring, 2006, S. 328). Daraufhin wurden (wie bereits oben beschrieben) kleine Anpassungen an dem Kodiermanual von Stenzel (2023a) vorgenommen. Mit diesen Anpassungen wurden erneut unabhängig voneinander einige Problemlöseprozesse kodiert, etwa 33 % der gesamten Daten. Mit dem Analyse-Tool von maxQDA wurde eine Intercoder-Übereinstimmung bestimmt. Dabei wurde eine Codeüberlappung an Segmenten von mindestens 95 % festgelegt (Rädiker & Kuckartz, 2019, S. 295). Die Literatur empfiehlt bei 95 % zu starten: „In den meisten Fällen wird man jedoch mit etwa 95 % minimaler Überlappung testweise starten…“ (Rädiker & Kuckartz, 2019, S. 295). Eine Codeüberlappung von 100 % wird dann empfohlen, wenn bspw. vorher fest definierte Segmente festgelegt worden sind. Der Grund dafür ist, dass die Kodierenden möglicherweise die gleiche Szene kodiert haben, allerdings das Ende der Szene eine Sekunde später angesetzt haben. Solche inhaltlich unproblematischen Differenzen würden durch eine Codeüberlappung von 100 % eine Nichtübereinstimmung liefern. Eine Mindestübereinstimmung von 95 % ignoriert solche minimalen Unterschiede, liefert aber dennoch eine ausreichend hohe Qualität über die Aussage der Übereinstimmung. Mit diesem Verfahren

wurde zwischen den beiden unabhängigen Kodierenden ein Kappa Score von .89 erreicht[32]. Obwohl die Feststellung eines Kappa Scores eher in einem quantitativen Forschungsdesign als intersubjektive Überprüfbarkeit genutzt wird, kann dieser dahingehend interpretiert werden, dass die beiden unabhängigen Kodierenden in einer hohen Anzahl von Fällen zu einem gleichen Zeitpunkt die gleiche Episode kodiert haben[33]. Die Methode der Intercoder-Übereinstimmung wurde für die Episodenkodierung gewählt, da bereits Schoenfeld (1992b, S. 194) beobachtete, dass die Grenzen zwischen den einzelnen Episoden oftmals nicht eindeutig sind. Dieses methodische Vorgehen trägt dazu bei, schwierig voneinander zu trennende Episoden dennoch voneinander abzugrenzen und die Konsistenz der Kodierung zu gewährleisten. Die restlichen Problembearbeitungsprozesse wurden anschließend nur von einer Person kodiert.

Zusammenfassung der Episodenkodierung

Wie bereits erwähnt wurde, hat die Episodenkodierung nicht das Ziel, jedes einzelne geäußerte Wort zu analysieren und einer Episode zuzuschreiben. Vielmehr ist das Ziel der Episodenkodierung, die allgemeine Vorgehensweise einer problemlösenden Person zu erfassen. Dies bedeutet, dass Hauptentscheidungen des Bearbeitungsprozesses neue Episoden bzw. Übergänge von Episoden signalisieren und damit entscheidend für die Kodierung sind. Als Beispiel stellen wir uns eine Person vor, die sich in der Episode *Implementation* befindet. Eine problembearbeitende Person führt in der Episode *Implementation* eine Rechnung durch und kontrolliert direkt im Anschluss (keine bis kaum Zeitverzögerung) den getätigten Umformungsschritt: „Konnte ich das x da jetzt wirklich rauskürzen? … Hmm … Ja, doch, das stimmt so. Gut, dann weiter im Text“. Dies ist zwar eine Aussage, die verifizierenden Charakter hat, allerdings liegt im Sinne der Episodenkodierung das Hauptaugenmerk auf der *Implementation*. Dies wird unter anderem auch dadurch angedeutet, dass die Person direkt mit der Lösung fortfahren möchte. Deshalb wird für diese kurze Aussage nicht die Episode der *Verification* kodiert. Dagegen kann eine ganz ähnliche Aussage die Episode der *Verification* einläuten. Dies kann man bspw.

---

32 maxQDA nutzt bei der Bestimmung des Kappa Scores den Vorschlag von Brennan und Prediger (1981), bei der die erwartete Zufallsübereinstimmung über die Anzahl der Kategorien statt über die Randverteilung bestimmt wird (Rädiker & Kuckartz, 2019, S. 299ff.).

33 Die prozentuale Übereinstimmung (Rädiker & Kuckartz, 2019, S. 297) zwischen den beiden Kodierenden liegt bei 90,91 %. Die Unterschiede in den Kodierungen in dieser Arbeit liegen darin, dass zwar die gleiche Episode kodiert wurde, allerdings nicht in einem Überlappungsintervall von 95 %. Dies bedeutet, dass der Grund für die Nichtübereinstimmungen meistens die Länge der Episoden ist. Gerade bei kürzeren Episoden wie Reading und Verification kommt es dadurch leicht zu Nichtübereinstimmungen, wenn der Nebensatz davor oder danach noch „dazu kodiert“ bzw. nicht „dazu kodiert“ wird.

daran erkennen, dass eine problembearbeitende Person den gesamten Bearbeitungsverlauf oder den gesamten Rechenweg kontrolliert. „Ich gucke mir nochmal die Aufgabe an, ob wir da alles gemacht haben […]“. Ggfs. überprüft die problembearbeitende Person dabei auch ihre methodische Vorgehensweise. Oftmals lassen sich Episoden der *Verification* nach dem Erreichen eines (Zwischen-)Ziels wiederfinden.
In einem idealisierten Problembearbeitungsprozess würde man davon ausgehen, dass zunächst das Problem gelesen wird. Im Anschluss werden Aktivitäten durchgeführt, um die Aufgabe (besser) zu verstehen. Danach wird ein Plan entworfen und durchgeführt. Schlussendlich wird das Vorgehen kontrolliert. Dies entspricht der *Reading*-*Analysis*-*Planning*-*Implementation*-*Verification*-Sequenz. In einigen Aufgaben kann es sein, dass Phasen übersprungen werden, wenn z. B. das Problem direkt verstanden wurde, sodass in diesem Prozess die Episode der *Analysis* entfällt. In weiteren Fällen kann auch zusätzlich die Episode Planning entfallen und direkt mit der Implementation gestartet werden, falls der problemlösenden Person bereits klar ist, wie bei der Bearbeitung der Aufgabe vorgegangen werden muss.
Die beschriebene Auswertungsmethode lässt sich somit als qualitative Inhaltsanalyse (Mayring, 2022, S. 12f.) auffassen.

1. Kommunikation: Es dient der Analyse von Sprache und Bildern (hier: die Bearbeitungsprozesse der Studierenden)
2. Fixierte Kommunikation: Sprache und Bilder liegen in protokollierter Form vor (hier: Videos)
3. Systematisch: Die Analyse geht systematisch vor (z. B. keine freien Interpretationen)
4. Regelgeleitet: Die Analyse geht regelgeleitet vor und ist damit nachvollziehbar und überprüfbar (durch die Kategorien und die Intercoder-Übereinstimmung)
5. Theoriegeleitet: Es basiert auf dem theoretischen Hintergrund des mathematischen Problemlösens
6. Rückschlüsse: Durch die Analyse können Rückschlüsse über das analysierte Material gezogen werden

Die Episodenkodierung nach Schoenfeld erfüllt die herausgearbeiteten Spezifika (Mayring, 2022, S. 12f) einer qualitativen Inhaltsanalyse und grenzt sich dadurch von anderen Methoden ab.

5.4.2 Verwendung der Wissensmatrix zur Rekonstruktion von Angebot und Nutzen mathematischen Wissens

Die Wissensmatrix kann für verschiedene Zwecke eingesetzt werden. Sie wird in dieser Arbeit bereits genutzt, um theoretisch einzuordnen, welches Wissen für die jeweiligen Aufgaben dieser Studie benötigt wird (Kapitel 5.3). Auf Grundlage dieser vorhergegangen Analyse kann die Wissensmatrix noch weitere Funktionen übernehmen. Sie wird zum einen herangezogen, um zu beschreiben, welches Angebot eine Veranstaltung bezüglich des vorher festgestellten theoretischen Wissens bezüglich einer Aufgabe bereitstellt. Zum anderen können mithilfe der Wissensmatrix die Wissenselemente, die Studierende im Bearbeitungsprozess nutzen, rekonstruiert werden.

Angebot

Um das Wissensangebot einer Veranstaltung abzubilden, werden die Materialien der Veranstaltung gesichtet und dargestellt, ob und in welcher Weise mathematische Inhalte mit ihren verschiedenen Facetten präsentiert werden. Ausgangspunkt ist demnach die Wissensmatrix, in der die mathematischen Definitionen, Sätze und Verfahren in die Spalte mathematischer Inhalt entweder dem konzeptuellem oder prozeduralem Wissen zugeordnet wurde. Die Vorlesung der Veranstaltung „Mathematik 1 für Maschinenbauer" wird zu diesen mathematischen Inhalten untersucht und es wird festgehalten, mit welchen Wissensfacetten das Wissen für Studierende präsentiert wurde. Um das Wissensangebot der Veranstaltung zu ermitteln, kann die Wissensmatrix in ihrer Form genutzt werden, so wie sie ursprünglich zum Systematisieren und Sichern von mathematischen Inhalten entwickelt wurde (Prediger et al., 2011).

	Mathematischer Inhalt	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Differenzierbarkeit				
	Konzept: Funktionen				
	Konzept: Abschnittsweise definierte Funktionen				
Prozedurales Wissen	Verfahren: Differenzierbarkeit prüfen				
	Verfahren: Grenzwert von Funktionen berechnen				
	Verfahren: Sandwich-Kriterium				

Tabelle 12: Angebot der Veranstaltung zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" in die Wissensmatrix (IN = Implizite Nutzung; EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

Ausschnitt für die Facette Explizite Formulierung:

Definition 4.1 Die Funktion f ist *differenzierbar* in $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} D_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall wird er mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt *Ableitung* (oder *Differentialquotient*) von f in x_0.

Ausschnitt für die Facette Konkretisierung & Abgrenzung:

(b) $\underline{f(x) = x^2}$. Dann gilt mit $x = x_0 + h$ (wir setzen also $h := x - x_0$), $h \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2hx_0 + h^2}{h} = 2x_0 + h.$$

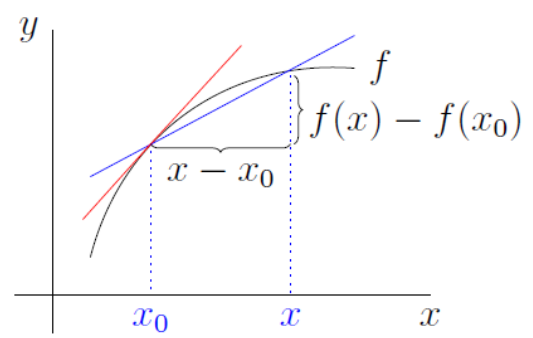
Für $x \to x_0$ (d.h. $h \to 0$) folgt dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$$

Also ist $f'(x_0) = 2x_0$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$. Mit anderen Worten

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x.$$

Ausschnitt für die Facette Bedeutung & Vernetzung:



Ausschnitt für die Facette Konventionelle Festlegung:

existiert. In diesem Fall wird er mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt *Ableitung* (oder *Differentialquotient*) von f in x_0.

Zur Schreibweise: Statt $f'(x_0)$ schreibt man auch $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder $\frac{d}{dx} f(x_0)$.

Abbildung 21: Ausschnitte der Wissensfacetten zum Konzept Differenzierbarkeit aus der Veranstaltung „Mathematik 1 für Maschinenbau“

Tabelle 12 zeigt dabei auf, welche Wissensfacetten der vorher festgelegten mathematischen Inhalte bezüglich der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" (Kapitel 5.3.1) in der Veranstaltung zu identifizieren waren. Die dunkel hinterlegten Zellen zeigen auf, welche Wissensfacetten in der Veranstaltung identifiziert werden konnten. Beispielhaft für die Identifikation der Wissensfacetten werden Ausschnitte für das Konzept Differenzierbarkeit aus der Veranstaltung dargestellt.
Abbildung 21 zeigt einige Ausschnitte zu den Wissensfacetten, die zum Konzept Differenzierbarkeit zugeordnet werden konnten. Bezüglich der *Expliziten Formulierung* wurde die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten definiert (Abbildung 21), wobei der Differenzenquotient vorweg ebenfalls formal festgelegt wurde. Für die Facette *Konkretisierung & Abgrenzung* wird in Abbildung 21 nur ein Beispiel gezeigt, wobei in der Vorlesung mehrere Beispiele für differenzierbare Funktionen mittels der Definition aufgezeigt worden sind. Außerdem wurde im weiteren Verlauf der Vorlesung noch das typische Gegenbeispiel der Betragsfunktion besprochen und welche in $x = 0$ nicht differenzierbar ist. Gleiches gilt für die Facette *Bedeutung & Vernetzung*. In der Vorlesung wurde die Differenzierbarkeit zunächst über den physikalischen Kontext der „Momentangeschwindigkeit" motiviert, welches auf der Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate beruht (Kapitel 4.3.2). Nachdem die Differenzierbarkeit formal eingeführt wurde, wurde die Tangentensteigung als eine geometrische Veranschaulichung (Abbildung 21) der Definition dargestellt. Letztlich wurde noch ein Hinweis dazu gegeben, wie die Tangenten mithilfe der Ableitung als Funktion dargestellt werden kann, was wiederum die Grundvorstellung der lokalen linearen Approximation widerspiegelt. Sowohl die Facette *Konkretisierung & Abgrenzung* als auch *Bedeutung & Vernetzung* wurden intensiv und umfangreich mittels verschiedener Perspektiven behandelt. Bezüglich der Facette der *Konventionellen Festlegungen* wurden sowohl Schreibweisen als auch Bezeichnungen für den Umgang mit der Differenzierbarkeit festgelegt (Abbildung 21). Insgesamt wurde bezüglich der Facetten der Wissensmatrix das Konzept der Differenzierbarkeit in der Veranstaltung umfänglich vorgestellt und teilweise wurden verschiedene Perspektiven in den einzelnen Facetten behandelt.

Nutzung

Letztlich kann die Wissensmatrix beschreiben, welches Wissen Studierende während Bearbeitungsprozessen Aufgaben im Rahmen eines mathematikhaltigen Studiums nutzen.
Dazu wird der Bearbeitungsprozess der Studierenden untersucht, um zu identifizieren, welche mathematischen Inhalte als auch welche Wissensfacetten genutzt werden. Als Grundlage dient dabei die bereits vorher erstellte Wissensmatrix zu den theoretischen Überlegungen, welche mathematische

Wissen für eine Aufgabe benötigt wird (Kapitel 5.3), als auch die Untersuchung, welches Angebot die Veranstaltung bezüglich des Wissens bereitstellt. Für die Nutzung wird allerdings noch eine weitere Wissensfacette zur Wissensmatrix hinzugefügt – *Implizite Nutzung*. Diese wird durch die Ausführungen von Vollrath und Roth (2012, S. 48ff.) motiviert. Dabei betonen sie bezüglich mathematischer Verfahren das Beherrschen und bezüglich mathematischer Sachverhalte den Anwendungskontext. Diese Idee wird für die Facette der *Impliziten Nutzung* übernommen. Demnach wird unter der Facette der *Impliziten Nutzung* bezüglich des prozeduralen Wissens die korrekte Ausführung eines Verfahrens verstanden. Dies könnte z. B. die korrekte Anwendung der Kettenregel sein. Bezüglich des konzeptuellen Wissens wird die *Implizite Nutzung* als Anwendungskontext für ein Konzept bzw. einen Zusammenhang verstanden. Dies könnte für das Konzept z. B. die Anwendung der Definition der Differenzierbarkeit sein, die typischerweise bei der Überprüfung von Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt Anwendung findet.

Sobald der Bearbeitungsprozess der Studierenden startet, wird jeweils dann ein Wissenselement kodiert, wenn Studierende ein Wissenselement adressieren. Die Kodierung bezieht sich dabei auf bestimmte Impulse, bei denen nicht unbedingt eine zeitliche Länge festgelegt wird. Aussagen, Handlungen oder schriftliche Produkte werden nur dann kodiert, wenn der kodierenden Person klar ersichtlich war, dass sie sich zu einer Wissensfacette zuordnen lassen. Implizite Handlungen, welche bei Studierenden womöglich automatisiert sind, lassen sich somit kaum erkennen. Zusätzlich wird die Kodierung in „Turns" dargestellt. In jedem „Turn" wird ein Wissenselement kodiert, wobei einige Aussagen bzw. Handlungen eng miteinander verknüpft sind und dadurch zwei Wissenselemente pro „Turn" kodiert werden (Beispiele werden in dem Kapitel 6.2.5 diskutiert). Außerdem wird nur dann kodiert, wenn sich Studierende mit einer Wissensfacette ernsthaft auseinandergesetzt haben. Damit ist gemeint, dass Handlungen bzw. Aussagen wie „Wir können das doch mal visualisieren" erst dann kodiert werden, wenn tatsächlich eine Visualisierung vorgenommen wird. Der alleinige Vorschlag reicht in diesem Fall nicht aus. Die Kodierung bezüglich der Wissensmatrix wurde anhand des Videomaterials, des Transkripts[34] und der schriftlichen Produkte, die während der Bearbeitungsprozesses der Studierenden entstanden sind, durchgeführt. Während des Bearbeitungsprozess kann es durchaus vorkommen, dass Studierende anderes oder weiteres Wissen nutzen, was nicht unbedingt für die Lösung der Aufgabe notwendig gewesen wäre. In solchen Fällen wird das genutzte Wissen der Wissensmatrix hinzugefügt und ebenfalls die dazugehörigen Wissenselemente kodiert.

---

34 Für die Kodierung bezüglich der Wissensmatrix wurde zusätzlich ein Transkript erstellt. Dies hat den Grund, dass eine Identifikation bzw. Rekonstruktion von aktivierten Wissenselementen unter Hinzunahme eines Transkripts leichter gefallen ist, als diese lediglich aus dem Videomaterial zu kodieren.

Die Kodierung der Wissensnutzung wird umfangreich in Kapitel 6.2.2 mittels eine Fallanalyse (Häder, 2019, S. 371ff.; Hering & Schmidt, 2014) dargestellt. Dennoch soll die Kodierung an dieser Stelle beispielhaft an einem kleinen Ausschnitt von Davids Problembearbeitungsprozess illustriert werden. In der Anfangsphase seines Prozesses liest sich David die Definition der Differenzierbarkeit aus der Vorlesung (Abbildung 22) durch und ergänzt sie kurze Zeit später zu seinen Aufzeichnungen der Aufgabe. Er schreibt die Definition nicht in vollständiger, sondern verkürzter Form auf. Außerdem ersetzt er dabei schon die Variable x_0 durch 0, da er die kritische Stelle der Aufgabe bereits als 0 identifiziert hat. An diesen Stellen im Bearbeitungsprozess wurde jeweils die Facette *Explizite Formulierung* des Konzepts Differenzierbarkeit als aktiviertes bzw. genutztes Wissenselement kodiert.

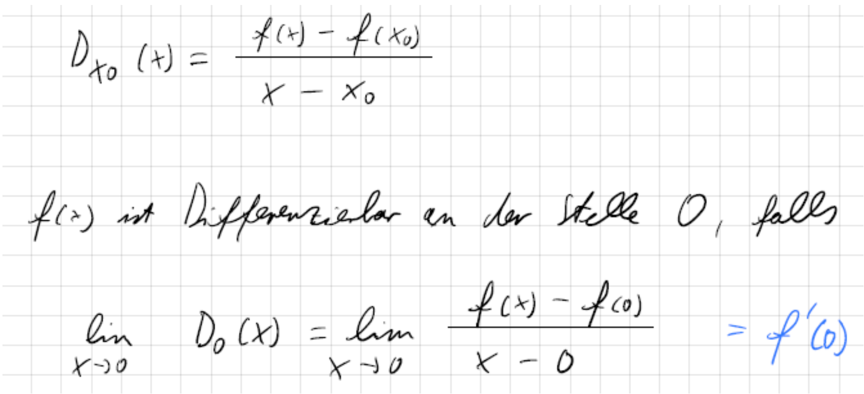


Abbildung 22: Ausschnitt aus Davids Aufzeichnungen zur Aufgabenbearbeitung

Um sich die Bedeutung der Definition zu erschließen, greift David zunächst auf die geometrische Veranschaulichung (Abbildung 21) der Differenzierbarkeit aus der Vorlesung zurück und studiert diese. Er nutzt demnach die Facette *Bedeutung & Vernetzung* des Konzepts Differenzierbarkeit. Des Weiteren geht David die Beispiele aus der Vorlesung (Abbildung 21) durch und versucht diese nachzuvollziehen, weshalb die Facette *Konkretisierung & Abgrenzung* des Konzepts Differenzierbarkeit kodiert wird.
Da David in seiner Durchführung nicht auf die *implizite Nutzung* der Differenzierbarkeit zurückgegriffen hat, wird für dieses Beispiel die Bearbeitung von Thomas und Alex herangezogen. Zu Beginn ihrer Bearbeitung haben sie nach dem Lesen der Aufgabenstellung zügig entschieden, die Definition der Differenzierbarkeit anzuwenden: „Ah, jetzt müssen wir quasi den äh, die die Definition nehmen, ne, mit dem, ähm mit dem Grenzwert quasi direkt“. Sie sind

sich bewusst, in welchem Kontext die Definition der Differenzierbarkeit Anwendung findet.
Die Kodierung der Wissensnutzung von Studierenden wurde durch zwei unabhängig kodierende Person durchgeführt. Dabei wurden die Kodierungen miteinander verglichen und konsensuell validiert (Bortz & Döring, 2006, S. 328). Ein ausführliches Beispiel für weitere Kodierung zur Nutzung von Wissen wird in Kapitel 6.2.2 vorgestellt.

Induktive Rekonstruktion von Schwierigkeiten im Problembearbeitungsprozess

Die Analyse der Schwierigkeiten der Studierenden erfolgt durch eine induktive Herangehensweise. Schwierigkeiten werden hierbei als Hindernisse bzw. Hürden definiert, die im fachspezifischen Kontext den Fortschritt oder die korrekte Bearbeitung der Aufgabe beeinträchtigen.
Die Identifikation der Schwierigkeiten in den Prozessen basiert auf einer systematischen Analyse der Handlungen und Äußerungen. Dabei wird das Videomaterial der Bearbeitungssituation, die Transkripte sowie schriftliche Abgaben der Studierenden herangezogen sowie jede Stelle markiert, die auf eine Schwierigkeit hinweist.
Im Detail bedeutet dies, dass eine Schwierigkeit dann kodiert wird, wenn Studierende zum einen explizit äußern, dass sie aktuell Schwierigkeiten haben oder nicht wissen, wie sie bei der Bearbeitung weiter vorgehen sollen („Hm, ja so richtig verstanden habe ich es auch nicht …"). Zum anderen werden auch fachliche Fehler in den Bearbeitungen sowie fehlendes fachliches Wissen, das notwendig für die Bearbeitung ist, als Schwierigkeit kodiert („was heißt denn, oh, überhaupt differenzierbar?"). Fachliche Fehler, die rein sprachlicher Natur sind, wie bspw. Versprecher oder leicht ungenaue Formulierungen mathematischer Inhalte werden nicht berücksichtigt. Dies liegt vor allem an der verwendeten Methode des lauten Denkens. In einem solchen Kontext kann es des Öfteren zu spontanen, nicht immer perfekten sprachlichen Ausdrücken kommen, die jedoch nicht notwendigerweise auf fachliche Schwierigkeiten hinweisen. Falls jedoch bestimmte Konzepte, Zusammenhänge oder Verfahren wiederholt fehlerhaft ausgesprochen werden, wird dies als eine tieferliegende Unsicherheit und als Schwierigkeit aufgefasst.
Nach der Identifikation der Schwierigkeiten erfolgt deren Zuordnung zu Wissenselementen. Dabei dient die Wissensmatrix als Grundlage, um die Zuordnung entlang der Dimensionen Wissensart und Wissensfacette vorzunehmen. Diese Zuordnung kann Aufschluss darüber geben, welche Arten bzw. Facetten von Wissen Schwierigkeiten für die Studierenden darstellen.
Die Kodierung sowie Zuordnung der Schwierigkeiten wurden von einer kodierenden Person vorgenommen. Dieser Prozess erfolgte in zwei getrennten Runden, die mit einem zeitlichen Abstand von zwei Monaten durchgeführt wurden. Mit diesem Verfahren soll die Konsistenz der Kodierung überprüft

werden (Mayring, 2022, S. 115). Anschließend wurden die Kodierungen der beiden Runden miteinander verglichen und an einigen Stellen Anpassungen vorgenommen.

Zusammenfassung zur Wissensmatrix

In dieser Arbeit wird die Wissensmatrix in verschiedenen Funktionen als Analysewerkzeug eingesetzt. Dabei baut sich die Wissensmatrix sukzessive auf den Anforderungen der Aufgaben, die Bereitstellung von mathematischen Inhalten der Veranstaltung sowie der Nutzung des mathematischen Wissens von Studierenden bei der Bearbeitung der Aufgaben auf. Aufgrund der theoretischen Auseinandersetzung mit einer speziellen Aufgabe wird der benötigte mathematische Inhalt identifiziert. Darauf basierend wird die Veranstaltung auf die Wissensfacetten dieser mathematischen Inhalte überprüft und festgestellt, welches Wissen zu den mathematischen Inhalten angeboten wird. Letztendlich wird die Nutzung der Wissenselemente durch die Studierenden bei der Bearbeitung der Aufgabe untersucht. Ein Vergleich zwischen dem Angebot (Welches Wissens stellt die Veranstaltung bereit?) und der Nutzung (Welches Wissen nutzen die Studierenden?) wird dadurch ermöglicht.
Die beschriebenen Auswertungsmethoden zur Wissensmatrix lassen sich wie die Episodenkodierung nach Schoenfeld (Kapitel 5.4.1) als qualitative Inhaltsanalyse (Mayring, 2022, S. 12f.) auffassen.

1. Kommunikation: Es dient der Analyse von Sprache und Bildern (hier: die Bearbeitungsprozesse der Studierenden)
2. Fixierte Kommunikation: Sprache und Bilder liegen in protokollierter Form vor (hier: Videos, Transkripte und Material der Studierenden)
3. Systematisch: Die Analyse geht systematisch vor (z. B. keine freien Interpretationen)
4. Regelgeleitet: Die Analyse geht regelgeleitet vor und ist damit nachvollziehbar und überprüfbar (aufgrund der Kategorien sowie der teilweisen konsensuellen Validierung)
5. Theoriegeleitet: Es basiert auf dem theoretischen Hintergrund zur Unterteilung des mathematischen Wissens in Wissensarten und -facetten
6. Rückschlüsse: Durch die Analyse können Rückschlüsse über das analysierte Material gezogen werden

5.4.3 Darstellung des Kategoriensystems zur Rekonstruktion von Heurismen

Für die Kodierung der Heurismen wurde auf ein bestehendes Kategoriensystem zurückgegriffen. Ähnlich wie bei der Kodierung der Episoden von Schoenfeld wurde das Kategoriensystem von Stenzel (2023a, S. 100f.) übernommen, wobei dies ebenfalls von dem bereits bestehenden Kodiermanual von Rott (2013, S.

204ff.) adaptiert wurde. Rott (2013) hat das Kodiermanual induktiv entwickelt, wobei theoretische Überlegungen sowie stoffdidaktische Analysen für die Validierung von Heurismen und die daraus resultierenden Kodes genutzt worden sind. Dabei lassen sich die Heurismen zu heuristischen Strategien, Prinzipien und Hilfsmitteln zuordnen, wobei die Heurismen weiterhin unabhängig von den Phasen des Problemlösen sind.

Rott (2013) hat sein Kategoriensystem zu Kodierung von Heurismen im Kontext von mathematischen Schulaufgaben eingesetzt, weshalb Stenzel (2023a) eine Anpassung vorgenommen hat, um das Kategoriensystem auf mathematische Aufgaben auf Hochschulniveau anwenden zu können. Dabei wurden einige Kategorien zusammengefasst (z. B. *informative Figur* und *operative Figur* wurden zu *Skizze* zusammengefasst), da diese Heurismen eher unüblich für mathematische Hochschulaufgaben erscheinen. Es wurden allerdings auch Kategorien induktiv hinzugefügt, wie zum Beispiel die *Nutzung aller Voraussetzungen*. In den Untersuchungen von Kilpatrick (1967) haben Schüler:innen kein Verhalten gezeigt, welches auf das Nutzen von grundlegenden Begriffen der Aufgabenstellung schließen lässt. Im hochschulischen Kontext scheint das *Nutzen von Voraussetzungen* allerdings durch die formale mathematische Schreibweise und Notation wieder an Bedeutung zu gewinnen. Die *Nutzung von Voraussetzungen* („Was ist gegeben?“, „Was sind die Voraussetzungen?“) zeigt sich auch als hilfreicher Gedankengang für Pólya´s (1945) erste Phase „Verstehen einer Aufgabe“ des Problemlösens.

Die Dauer eines Heurismus ist häufig weder eindeutig messbar noch besonders aussagekräftig, da solche Aktivitäten zeitlich stark variieren können. Stattdessen werden Heurismen als Impulse bzw. Auslöser für bestimmte Tätigkeiten verstanden, bei denen nur der Zeitpunkt ihres Auftretens erfasst, jedoch nicht ein exakter Start- und Endwert festgelegt wird.

Vorgehensweise beim Kodieren

Das bestehenden Kodiermanual von Stenzel (2023a) dient demnach als Grundlage, um die Heurismen in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden zu identifizieren und zu kodieren. Die Kodierung wurde von zwei Kodierenden durchgeführt. Zunächst wurde ein zufällig gewählter kleiner Teil der Daten (ca. zehn Prozent) unabhängig voneinander kodiert. Unterschiede und (einige) Gemeinsamkeiten in den vergebenen Kodes wurden besprochen, um mögliche Fehlinterpretationen des Kodiermanuals auszuschließen. Anschließend kodierten beide Kodierenden unabhängig voneinander die restlichen Daten. Diese Kodierungen wurden erneut überprüft und konsensuell validiert (Bortz & Döring, 2006, S. 328).

Nach der Kodierung hat sich herausgestellt, dass einige Kodes von beiden Kodierenden nicht vergeben worden sind. Aus diesem Grund wurden folgende Kategorien aus dem ursprünglichen Kodiermanual von Stenzel (2023a) gestrichen: *Hilfselemente*, *Tabelle*, *Gleichung*, *Symmetrieprinzip*. Das Nicht-Auftreten dieser Kodes kann z. B. durch die spezifischen Aufgabenstellungen begründet werden. Für die Lösung der Aufgaben, die in dieser Arbeit als Datengrundlage genutzt werden, würde aus theoretischer Sicht bspw. eine *Tabelle* dem Lösungsfortschritt wenig bis gar nicht helfen.

Darüber hinaus wurden zwei weitere Änderungen vorgenommen. Die Kategorie *Suche nach nützlichen Ergebnissen* wurde leicht verändert und in *Suche nach nützlichen Hinweisen* umbenannt. Außerdem wurde die Beschreibung der Kategorie etwas weiter aufgefasst, da Studierende nicht nur im Skript nach nützlichen Hinweisen, sondern auch im Internet oder im restlichen Material der Veranstaltung gesucht haben. Ferner wurde die beiden Kategorien *Ähnliche Aufgaben* und *Analogieprinzip* zu einer Kategorie zusammengelegt (*Ähnliche Aufgaben*). Eine Unterscheidung der beiden Kategorien hat sich in der Kodierung als schwierig herausgestellt. Dies liegt möglicherweise an dem Kontext der Studie, da bereits ähnliche Aufgaben in Form des Tutoriums vorlagen. Dies wissen auch die Studierenden, weshalb aus den Aussagen der Studierenden nicht ersichtlich wird, ob sie die Aufgabe bewusst heranziehen, weil sie das Verfahren kopieren möchten oder ob die Aufgabe möglicherweise einen Ansatz auf abstraktem Niveau liefert.

Zusätzlich wurde die Spalte der Beispiele mit Zitaten aus den eigenen Daten ergänzt. Allgemeinere Handlungsbeschreibungen von Beispielen wurden für die speziellen Aufgaben dieser Untersuchung adaptiert (Tabelle 13).

Die beschriebene Auswertungsmethode lässt sich ebenfalls wie die Episodenkodierung nach Schoenfeld (Kapitel 5.4.1) als auch das Analysevorgehen mit der Wissensmatrix (Kapitel 5.4.2) als qualitative Inhaltsanalyse (Mayring, 2022, S. 12f.) auffassen.

1. Kommunikation: Es dient der Analyse von Sprache und Bildern (hier: die Bearbeitungsprozesse der Studierenden)
2. Fixierte Kommunikation: Sprache und Bilder liegen in protokollierter Form vor (hier: Videos und Transkripte)
3. Systematisch: Die Analyse geht systematisch vor (z. B. keine freien Interpretationen)
4. Regelgeleitet: Die Analyse geht regelgeleitet vor und ist damit nachvollziehbar und überprüfbar (aufgrund der Kategorien und der Intercoder-Übereinstimmung)
5. Theoriegeleitet: Es basiert auf dem theoretischen Hintergrund des mathematischen Problemlösens (Kapitel 2.5)
6. Rückschlüsse: Durch die Analyse können Rückschlüsse über das analysierte Material gezogen werden

Kode	**Beschreibung**	**Beispiele**
Begriffe klären (Bkl)	Die Bedeutung von Begriffen/Begrifflichkeiten wird geklärt, ohne dass mit den Begriffen bereits gearbeitet wird. Das Klären von Begriffen kann z. B. mittels Nachschlagens im Skript oder in Kombination mit dem Heurismus „Skizze“ passieren.	(1) In den Materialien wird nach einer Definition oder Erklärung gesucht, ggfs. wird dies auch abgeschrieben. (2) „Da ist die Frage, was heißt denn, oh, überhaupt differenzierbar? Das heißt, ich schaue in der Vorlesung.“ (3) „Warum ist denn das x_0 da unten?“ – „Weil das die, guck dir mal die Grundform für den Mittelwertsatz an.“
Skizze (Skiz)	Das Anfertigen einer Skizze, eines Diagramms, eines Graphen bzw. das Anfertigen einer Figur sowie die weitere Arbeit damit.	(1) Zeichnen eines Graphen oder Eingeben einer Funktion, um den Graphen zu visualisieren. (2) Nutzung einer Zeichnung, um Argumente für die Aufgabe zu nutzen bzw. zu validieren. (3) „Das ist hier blauer Graph. Das ist der Kosinus. Sekante, Schnittpunkt an zwei Punkten im Intervall. … Ja, der Betrag der Steigung, ja zwischen a und b mindestens eine Stelle gibt, wo die Kosinusfunktion, also wo die Steigung der Funktion identisch ist.“ (4) „Ich gebe das Ganze mal in GeoGebra ein, ich will einfach sehen, wie das aussieht.“
Imaginäre Figur (imF)	Zeichnen einer fiktiven Abbildung in der Luft/auf dem Tisch oder bildliches Vorstellen eines Sachverhalts.	(1) Es wird ein Sachverhalt, z. B. die Kosinusfunktion „in die Luft gemalt“. (2) Es wird erwähnt, dass man sich bildlich etwas vorstellt.
Spezialfall (SpF)	Betrachten von besonderen Fällen, die angenommen werden können, etwa zur Vereinfachung eines Beweises.	(1) Es wird ein Sachverhalt mit einem Beispiel erklärt. (2) Es werden bestimmte Zahlen genutzt, um sich von allgemeinen Argumenten zu überzeugen bzw. sich selbst verständlich zu machen, z. B. ob ein Grenzwert existiert. (3) „Nehmen wir mal irgendeine Zahl. Wenn ich das richtig habe und ich 100 habe und davon den ln, … ist das was anderes, als ich dachte.“
Fallunterscheidung (FU)	Hier werden zum Lösen der Aufgabe verschiedene Fälle unterschieden.	(1) „Hier mache ich auch wieder zwei Fallunterscheidungen. Einmal für den Fall, dass f ungleich, also

		dass x in f ungleich 0. Ähm einmal, dass $x = 0$ ist.“
Nutzung aller Voraussetzungen (Nvor)	Es wird geprüft, ob alle in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingungen einbezogen worden sind.	(1) „Ja, aber wir dürfen nicht vergessen, dass a, a wächst nicht. a ist konstant, ne. a ist eine Konstante größer 1.“ (2) „Naja, $x - y$, wobei $y < x$ ist. Das ist wichtig, weil sonst wäre hier was Negatives […]. Das heißt, dass das Relationszeichen dreht sich nicht um.“
Systematisierungshilfen (SyH)	Das Einführen ordnender Elemente, die bei der Ausführung und Überwachung einer Tätigkeit/eines Plans helfen.	(1) Es werden Markierungen jeglicher Art genutzt. (2) „Ich schreibe es nochmal in den richtigen Farben, dass ich das besser sehe.“
Metapher (Met)	In der Aufgabe vorkommende Aspekte werden mittels anschaulicher Metaphern beschrieben.	(1) Sinus „schwingt“ zwischen Minus Eins und Eins (2) Es ist etwas unendlich klein an Null dran.
Rückführungsprinzip (RfP)	Bezugnahme auf bekannte Fakten, Ergebnisse oder Bezugnahme auf Teilergebnisse der Aufgabe. Im Gegensatz zu ähnlichen Aufgaben werden keine Verfahren übertragen. Dieser Heurismus wird auch dann kodiert, wenn sich nonverbal z. B. auf Teilergebnisse der Aufgabe bezogen wird.	(1) Bezugnahme auf bereits erreichte (Zwischen-)Ergebnisse (2) Bezugnahme auf bereits bekannte Fakten, wie z. B. bestimmte Ableitungen.
Ähnliche Aufgabe (Ähn)	Das Heranziehen bekannter Verfahren und Methoden durch Bezug auf andere, vergleichbare Aufgaben, Sätze oder Beweise, die sich auf (vermutlich) ähnliche Weise lösen lassen.	(1) Suche nach möglichen Ansätzen im Internet oder im Veranstaltungsmaterial. (2) Suche nach einer speziellen Aufgabe, die im gegebenen Kontext helfen soll. (3) „Hier hat man es einfach aufgelöst bis man … eine einfache Zahl auf einer Seite hatte.“ (4) „Ich gucke nochmal in die Beispielaufgabe“.
Suche nach nützlichen Hinweisen (nüHi)	Dieser Heurismus ist eine Vorstufe zu „RfP, Ähn bzw. Ana“. Es wird gezielt überlegt oder im Veranstaltungsmaterial und/oder im Internet geschaut, welche Elemente einem für das zu lösende Problem weiterhelfen können.	(1) „Ein bisschen googlen, ne, … was das große, weite Internet dazu sagt.“ (2) „Ich schaue jetzt nochmal in der Vorlesung, ob wir dazu was aufgeschrieben haben“ (3) „dafür hole ich meine Karteikarten raus.“

Rückwärtsar beiten (RüA)	Betrachtung des Zielzustandes/des Gesuchten. Es wird überlegt, was man zeigen muss, damit die Behauptung erfüllt ist. Davon ausgehend wird versucht, zum Anfangszustand zu gelangen.	(1) Ausgehend vom Mittelwertsatz Umformungen anstellen, um zur Formel der Aufgabenstellung zu gelangen.
Vorwärtsarbe iten (VwA)	„Drauf los"-Arbeiten vom Anfangszustand. Das Gegebene wird verwendet, um zum Zielzustand zu gelangen. Bei Beweisaufgabe wird von den Voraussetzungen ausgegangen.	(1) Eine vorgegebene Gleichung wird manipuliert, um zu sehen, ob man mit dem Ergebnis weiterkommt. (2) „Ja, das ist, muss man glaube ich mit L´Hospital machen."

Tabelle 13: Das Kodiermanual bezüglich Heurismen dieser Studie

5.5 Auswertungsmethode zu den Produkten der Problembearbeitungen

In dieser Arbeit werden Problembearbeitungsprozesse in den Fokus gestellt. Da die Problembearbeitungsprozesse der Studierenden in dieser Studie in den normalen Semesterbetrieb eingebettet sind, entsteht aus diesen Prozessen in der Regel ein resultierendes Produkt. Dieses Produkt sind die Beantwortungen der Hausaufgaben und werden von den Studierenden abgegeben, um eine Leistungsbewertung zu erhalten.

Wenn Problembearbeitungsprozesse untersucht werden, sollten sich ebenfalls die Ergebnisse der Prozesse (=Produkte) angeschaut werden (Rott, 2013, S. 179). Nur dann lassen sich Aussagen über Erfolg und Misserfolg treffen. Somit kann das Produkt mit dem Prozess (im folgenden Kapitel) in Beziehung gesetzt und das Finden von Zusammenhängen ermöglicht werden.

Für die Bewertung des Produkts können verschiedene Maßstäbe herangezogen werden. Zunächst stellt sich die Frage, inwiefern die Produktbewertung das Einbeziehen des Prozesses erlaubt. Sollten Zwischenergebnisse, Weggestrichenes oder einzelne Gedanken bewertet werden? Es wurde sich dagegen entschieden, solche Informationen aus dem Prozess mit einzubeziehen. Aufgrund der Anforderungen der Veranstaltung wird von den Studierenden ohnehin erwartet, dass sie eine umfassende, sorgfältige und alle notwendigen Informationen enthaltende Lösung vorlegen. Es wird davon ausgegangen, dass die teilnehmenden Studierenden daher alle ihnen wichtig erscheinenden Informationen, die im Prozess gewonnen wurden, auf ein Blatt Papier geschrieben werden. Es bietet sich daher an, dass lediglich die tatsächliche Abgabe bewertet wird. Es wurde dabei bedacht, dass die Studierenden nach der Videoaufnahme weiterhin an ihren Abgaben arbeiten könnten und damit letztendlich ihr Produkt aufbessern, bevor sie es abgeben. Die Materialien bzw. die Mitschriften der

Studierenden wurde daher direkt nach der Videoaufnahme gesammelt, sodass nachträgliche Verbesserungen bzw. Veränderungen für die Analyse der Daten in dieser Arbeit ausgeschlossen werden können.

Weiterhin würde es sich anbieten, die Leistungsbewertungen der Veranstaltungen zu übernehmen. Problematisch ist dabei allerdings, dass die teilnehmenden Studierenden in unterschiedlichen Tutorien angemeldet und daher nicht zwangsläufig von denselben Korrekteur:innen bewertet worden sind. Eine einheitliche Bewertung der Produkte wäre damit nicht gewährleistet. In der Beweis- als auch Problemlöseforschung gibt es aber bereits einige Vorarbeiten, die dem jeweiligen Produkt eine Leistungsbewertung unterziehen. Die verschiedenen Ansätze grenzen sich dadurch ab, dass die Bewertung des Produkts ganzheitlich (z. B. Kempen & Biehler, 2019) oder detailliert, teilweise mittels verschiedener Merkmalsdimensionen (z. B. Füllgrabe & Eichler, 2019), durchgeführt wird. Detaillierte bzw. komplexere Ansätze haben dabei den Vorteil, dass über einzelne Ausprägungen[35] des Produkts Aussagen getroffen und bessere Schlussfolgerungen über das Produkt an sich gezogen werden können. In dieser Arbeit steht die Untersuchung des Produkts allerdings nicht im Fokus. Vielmehr soll die Bewertung des Produkts genutzt werden, um den Fortschritt der Lösung festzuhalten, damit Rückschlüsse auf erfolgreiche bzw. weniger erfolgreiche Problembearbeitungsprozesse gezogen werden können. In dieser Untersuchung ist daher ein ganzheitliches als auch eindimensionales Bewertungsschema passend.

Sowohl das Bewertungsschema von Kirsten (2020) als auch das Bewertungsschema von Rott (2013) beschreiben den Fortschritt der Lösung eines Beweis- bzw. Problemlöseprodukts. Kirsten (2020) hat das Bewertungsschema von Malone et al. (1980) übernommen und adaptiert. Rott (2013) hat sein Bewertungsschema selbst entwickelt, allerdings auf Grundlage bereits bestehender Schemata (z. B. Zielinski, 1992). In beiden Bewertungsschemata sind die einzelnen Kategorien als Qualitätsabstufungen zu verstehen, wobei Kirsten (2020, S. 155) dafür fünf und Rott (2013, S. 185) vier Kategorien verwendet. Es handelt sich demnach um einen kriteriumsorientierten Maßstab, bei dem die Bewertung nicht nach Punkten, sondern anhand von Kategorien festgestellt wird. Durch einen solchen Maßstab entsteht das Risiko, dass (mögliche) unterschiedliche Schwierigkeitsniveaus von Aufgaben untereinander verglichen werden. Der Vorteil einer solchen Bewertung ist allerdings, dass Ergebnisse verschiedener Aufgaben leicht miteinander verglichen werden können.

Die Kategorien bei Kirsten (2020) und Rott (2013) haben fast die gleichen Beschreibungen, wobei durch die zusätzliche Kategorie die Abstufungen bei

---

35 In der Bewertung von Beweisen sind mögliche Ausprägungen z. B. Vollständigkeit der Argumentationskette, seine globale Struktur, Gültigkeit der Schlüsse, etc. (Füllgrabe & Eichler, 2019)

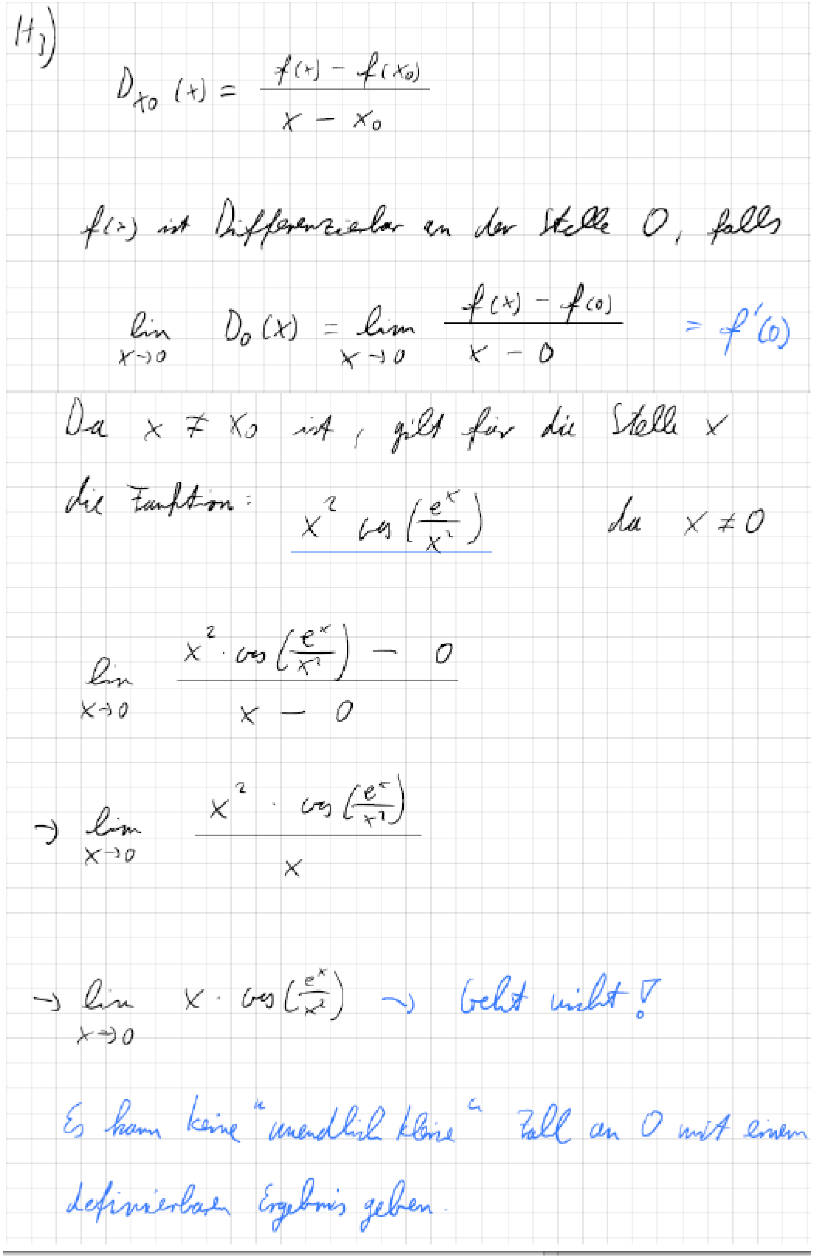
Kirsten etwas detaillierter als bei Rott sind. Für die Bewertung des Produkts wurde sich in dieser Arbeit jedoch dazu entschieden, das vierstufige Kategoriensystem von Rott (2013, S. 185) zu übernehmen (Tabelle 14). Dies hat den einfachen Grund, dass der Wortlaut bereits auf das Problemlösen abgestimmt ist. Außerdem wird davon ausgegangen, dass eine vierstufige Kategorisierung ausreichend ist, um die Lösungsprodukte der Studierenden einzuordnen.

Kategorie	Code	Beschreibung
Kein Ansatz	L1	Die Aufgabe wurde nicht sinnvoll bearbeitet und / oder es wurde keine Lösung abgegeben
Einfacher Ansatz	L2	Das Problem wurde zu Teilen korrekt bearbeitet, dabei zeigen sich aber deutliche Mängel; wenn die Lösung Erklärungen erfordert, fehlen diese.
Erweiterter Ansatz	L3	Das Problem wurde zu großen Teilen korrekt bearbeitet; wenn die Lösungen Erklärungen erfordert, sind zumindest Ansätze dazu vorhanden
Korrekter Ansatz	L4	Das Problem wurde korrekt gelöst; wenn die Lösung Erklärungen erfordert, sind diese angemessen gegeben.

Tabelle 14: Bewertungsschema zum Lösungsprodukt nach Rott (2013, S. 185)

Im Folgenden wird ein Beispiel für die Kodierung vorgestellt (Abbildung 23). Dabei wird absichtlich ein Grenzfall hinsichtlich der Kodierung des Produkts dargestellt.

In seinem Lösungsprodukt schreibt David zunächst alles detailliert und korrekt auf, bis zu seiner letzten Umformung des Differentialquotienten. Bei dem Ausdruck $\lim_{x \to 0} x \cdot cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ folgert David, dass dies nicht gehen würde und ein Grenzwert dadurch nicht bestimmt werden kann. Nach dem Kategorienkatalog (Tabelle 14) kann sowohl für L2 als auch L3 plädiert werden. Tatsächlich wird das Problem von David zu großen Teilen (korrekt) bis zum letzten Schritt bearbeitet, welches auf L3 hindeuten würde. Allerdings ist die Bestimmung des tatsächlichen Grenzwerts womöglich der wichtigste Schritt in dieser Aufgabe. Dadurch könnte ebenfalls argumentiert werden, dass das Problem nur zu Teilen korrekt gelöst wurde und somit L2 kodiert werden sollte. Letztendlich wurde sich für die Lösungsqualität L3 entschieden.



H_1)

$$D_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f(x) ist Differenzierbar an der Stelle 0, falls

$$\lim_{x \to 0} D_0(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

Da $x \neq x_0$ ist, gilt für die Stelle x

die Funktion: $x^2 \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ da $x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right) - 0}{x - 0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right)}{x}$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0} x \cdot \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right) \rightarrow$$ Geht nicht!

Es kann keine „unendlich kleine" Zahl an 0 mit einem definierbaren Ergebnis geben.

Abbildung 23: David Produkt zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen"

Die beschriebene Auswertungsmethode lässt sich somit als qualitative Inhaltsanalyse (Mayring, 2022, S. 12f.) auffassen.

1. Kommunikation: Es dient der Analyse von Sprache und Bildern (hier: die Bearbeitungsprodukte der Studierenden)
2. Fixierte Kommunikation: Sprache und Bilder liegen in protokollierter Form vor (hier: Bilder, Dateien der Studierenden)
3. Systematisch: Die Analyse geht systematisch vor (z. B. keine freien Interpretationen)
4. Regelgeleitet: Die Analyse geht regelgeleitet vor und ist damit nachvollziehbar und überprüfbar (durch die Kategorien)
5. Theoriegeleitet: Es basiert auf dem theoretischen Überlegungen zur Produktbewertung
6. Rückschlüsse: Durch die Analyse können Rückschlüsse über das analysierte Material gezogen werden

6 Analyse und Ergebnisse

Im Rahmen der empirischen Studie werden mathematische Problembearbeitungsprozesse von Studierenden untersucht. Die Ergebnisse teilen sich dabei in vier Kapitel auf: Fokus auf die *Steuerung* (Kapitel 6.1), das *Wissen* (Kapitel 6.2), die *Heurismen* (Kapitel 6.3) und eine gemeinsame Betrachtung der Kategorien (Kapitel 6.4). Die gemeinsame Betrachtung der Kategorien baut dabei auf den Kodierungen der drei vorherigen Kapitel auf.
Ein kurzer Überblick über die analysierten Problembearbeitungsprozesse verdeutlicht den Rahmen der Untersuchung. Diese wurde während der Vorlesungszeit durchgeführt und konzentrierte sich auf die Bearbeitung von Hausaufgaben. Dabei wurde besonderer Wert darauf gelegt, die Studiensituation so authentisch wie möglich zu gestalten (Kapitel 5.2.2). Den teilnehmenden Studierenden wurde nicht vorgeschrieben, jede Aufgabe der Hausaufgabe zu bearbeiten; die Entscheidung, welche Aufgaben bearbeitet wurden, lag vollständig bei ihnen. Für die Analyse wurden letztendlich drei von neun Aufgaben ausgewählt (Kapitel 5.3), wodurch 13 Problembearbeitungsprozesse in dieser Arbeit untersucht werden (Tabelle 15).

Gruppe	**Name**	**Differenzierbarkeit prüfen**	**Mittelwertsatz**	**L´Hospital**	**Gesamt**
G1	David	39:48 min	33:05 min	49:33 min	2:02:26 h
G3	Thomas	27:34 min	22:09 min	14:29 min	1:04:12 h
	Alex				
G4	Sarah	06:56 min	23:21 min	27:15 min	0:57:32 h
	Lisa				
	Paula				
	Lea				
G5	Nick	11:08 min	15:47 min	08:09 min	0:35:04 h
G6	Lukas	18:13 min	-	-	0:18:13 h
Gesamtlänge		1:43:39 h	1:34:22 h	1:39:26 h	4:57:27 h
Durchschnitt		20:44 min	23:36 min	24:52 min	22:53 min

Tabelle 15: Übersicht der Problembearbeitungsprozesse

Die Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ (Kapitel 5.3.1) war Teil von Hausaufgabenblatt 12, während die Aufgaben „Mittelwertsatz“ (Kapitel 5.3.2) und „L´Hospital“ (Kapitel 5.3.3) Teil von Hausaufgabenblatt 13 waren. Lukas hat die Hausaufgabe 13 nicht bearbeitet, sondern in seiner Lernzeit die Aufgaben aus dem Tutorium wiederholt. Dadurch fließt lediglich seine Bearbeitung zu einer Aufgabe in die Untersuchung ein. Die Bearbeitungen von Simon (G2) wurden aus der Analyse gestrichen, da er die relevanten Aufgaben entweder nicht bearbeitet oder nach dem Abschreiben der Aufgabe sofort abgebrochen hat.

Die Bearbeitungszeit der einzelnen Aufgaben liegt zwischen 06:56 Minuten (Lea, Lisa, Sarah und Paula, „Differenzierbarkeit prüfen“) und 49:33 Minuten (David, „L´Hospital“). Durchschnittlich beträgt die Bearbeitungszeit pro Aufgabe etwa 22:53 Minuten. David beschäftigte sich durchschnittlich am längsten mit den Aufgaben, während Nick durchschnittlich die kürzeste Bearbeitungszeit aufweist. Innerhalb der Aufgaben gibt es zeitlich größere Unterschiede in den jeweiligen Prozessen, allerdings ist die durchschnittliche Bearbeitungszeit zwischen den Aufgaben über die Lerngruppen hinweg sehr ähnlich.

6.1 Rekonstruktion von Steuerung in den Problembearbeitungsprozessen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Problembearbeitungsprozessen der Studierenden und stellt die Rekonstruktion der Steuerung in den Fokus. Für die Beschreibung der Steuerung wurde sich für die Schoenfeld Episoden entschieden (Kapitel 5.4.1). Die Anwendung der Schoenfeld Episoden wird in Kapitel 6.1.1 durch eine Fallanalyse des Prozesses von Alex und Thomas dargestellt. Anschließend wird über die Kodierungen der Schoenfeld Episoden sowohl ein Gesamtüberblick (Kapitel 6.1.2) als auch ein Überblick über die Prozesse der einzelnen Lerngruppen gegeben (Kapitel 6.1.3). Daraufhin erfolgt eine Analyse der Prozesse anhand spezifischer Merkmale. Zunächst erfolgt eine Rekonstruktion der Reihenfolge von Episoden (Kapitel 6.1.4), gefolgt von der Untersuchung des Verhaltens „wild goose chase“ (Kapitel 6.1.5). Zudem wird der Zusammenhang mit Erfolg bzw. Misserfolg betrachtet (Kapitel 6.1.6). Abschließend lassen sich die zentralen Ergebnisse zur Steuerung festhalten (Kapitel 6.1.7).

6.1.1 Fallanalyse zur Steuerung mithilfe der Episoden nach Schoenfeld

In diesem Abschnitt werden die verschiedenen Episodentypen nach Schoenfeld anhand einer Fallanalyse (Häder, 2019, S. 371ff.; Hering & Schmidt, 2014) eines Problembearbeitungsprozesses vorgestellt. Diese Fallanalyse dient nicht ausschließlich der Beantwortung der Forschungsfragen, sondern ebenfalls zur detaillierten Darstellung der verschiedenen Episodentypen. Da im methodischen Teil (Kapitel 5.4.1) dieser Arbeit auf die Darstellung von Beispielen zu den Episoden verzichtet wurde, veranschaulicht die Fallanalyse zusätzlich, wie die Durchführung der Kodierung erfolgt. Der detaillierte Problembearbeitungsprozess von Alex und Thomas beinhaltet jede Episode mindestens einmal und dient somit als anschauliches Beispiel. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(S1) *Welche Episoden durchlaufen Ingenieurstudierende bei mathematischen Problembearbeitungsprozessen?*

Alex und Thomas haben sich in der Regel nach dem Tutorium getroffen, um gemeinsam an den Aufgaben zu arbeiten. Ihre Lernsessions dauerten typischerweise zwischen 90 und 120 Minuten und sie waren durchgehend auf die Bearbeitung der Aufgaben fokussiert. Dabei gingen sie meist in der vorgegebenen Reihenfolge der Aufgaben vor.
Die Bearbeitung der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" (Kapitel 5.3.1) wurde von der Lerngruppe (Alex und Thomas) nach einem ersten Versuch unterbrochen, allerdings zu einem späteren Zeitpunkt in der gleichen Lernsession erneut aufgenommen und zu Ende geführt. In dem Bearbeitungsprozess wird deutlich, dass sich die Lerngruppe besonders lange damit beschäftigt, eine Hürde im Lösungsprozess (in der Ausführung des Verfahrens) zu überwinden. Zum Ende können sie diese bewältigen und kommen zu einer korrekten Lösung. Während der Bearbeitung der Aufgabe wird wenig auf einem Blatt Papier oder auf einem Tablet geschrieben, sondern viel mündlich besprochen bzw. Ideen ausgetauscht.
Im Folgenden wird zunächst die kodierte Episode und der zugehörige Zeitabschnitt in Klammern angegeben. Im ersten Absatz wird kurz zusammengefasst, was in der Episode geschieht. Im anschließenden Absatz folgt eine Interpretation (und somit auch gleichzeitig die Erklärung zur Kodierung) zu den Handlungen oder Aussagen der Studierenden (außer bei *Reading* und einer zeitlich kurzen *Transition*). Letztlich werden die Kodierungen zusammenfassend in einer Übersicht dargestellt.

Reading (00.00 – 00.10): Der Bearbeitungsprozess beginnt mit dem Überfliegen der Aufgabenstellung, wobei Alex die Aufgabe teilweise laut vorliest.

Planning (00.11 – 01.21): Alex schlägt vor, dass die Aufgabe dadurch gelöst werden kann, indem man die Definition der Differenzierbarkeit nutzt. „Ah, jetzt müssen wir quasi den äh, die die Definition nehmen, ne, mit dem, ähm mit dem Grenzwert quasi direkt" (00.11). Thomas stimmt zunächst zu, sagt aber, dass er sich dies nochmal anschauen müsse. Beide suchen daraufhin in ihren Unterlagen aus dem Tutorium und verschaffen sich einen kurzen Überblick darüber (ab 00.19). Alex beruft sich daraufhin erneut auf seine Idee, den Funktionswert aus der Aufgabenstellung in die Definition der Differenzierbarkeit einsetzen zu müssen. Des Weiteren stellt Alex heraus, dass es sich in der Aufgabe um $x_0 = 0$ handelt, wobei er dies als Frage an Thomas formuliert (01.04). Thomas schweigt daraufhin.
Bis zum jetzigen Zeitpunkt bestehen die Aktivitäten von Alex und Thomas darin, die Bearbeitung der Aufgabe zu planen, wobei Alex ausschlaggebend für die Generierung von Ideen ist. Der vorgeschlagene Ansatz von Alex erweist sich als

treffend, weil das Verfahren „Differenzierbarkeit prüfen" der typische Lösungsweg für diese Aufgabe wäre. Durch Nachschlagen in den Unterlagen des Tutoriums versucht Alex seine Idee abzusichern. Durch mehrmaliges Nachfragen zeigt sich jedoch, dass Alex Unsicherheiten hinsichtlich des Vorgehens aufweist, was Anlass für die folgende Episode ist.

Analysis (01.22 – 02.07): Alex und Thomas schauen noch einmal eine kurze Zeit über die Aufgabenstellung und diskutieren, was genau $f'(0)$ im Kontext der Aufgabe bedeutet. Alex erklärt, dass dies mit der Definition der Differenzierbarkeit bestimmt werden kann. Um seine Aussagen zu bekräftigen, deutet er dabei auf die Aufgabe aus dem Tutorium und weist auf die Ähnlichkeit der Aufgabe hin: „Weil das ist ja quasi genau das gleiche".
Aufgrund der vorhergehenden Episode *Planning* entscheiden sich Alex und Thomas, einen Schritt zurückzugehen und die Aufgabenstellung erneut zu betrachten. Es werden Aktivitäten durchgeführt, um die Aufgabe genauer zu analysieren, da einerseits der Plan von Alex zunächst unsicher formuliert wurde und andererseits Thomas nicht vollständig nachvollziehen konnte, was mit $f'(0)$ gemeint ist. Nach kurzer Überlegung und Vergleich mit der Aufgabe aus dem Tutorium ist sich Alex aber sicher, dass dies durch die Definition der Differenzierbarkeit bestimmt werden kann. Er bezieht sich bei der Aussage auf die Aufgabe aus dem Tutorium, wobei Alex die Ähnlichkeit der Aufgabe herausstellt.

Implementation (02.08 – 02.57): Alex und Thomas schreiben die Definition der Differenzierbarkeit auf. Alex spricht dabei laut mit und ersetzt sukzessive die Variablen aus der Definition der Differenzierbarkeit mit den Informationen, die sie aus der Aufgabenstellung herausgefiltert haben. Schlussendlich gelangen beide zu einem Ausdruck $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$, bei dem sich die Frage stellt, wie der nächste Schritt erfolgen kann.
Auf Basis der vorhergegangen Episoden *Planning* und *Analysis* können Alex und Thomas mit der Umsetzung des Plans beginnen. Allerdings stoßen Alex und Thomas dabei auf das Problem, wie die abschnittsweise definierte Funktion aus der Aufgabenstellung eingesetzt werden kann. Da dies im Sinne der Kodierung keine kleine Unsicherheit während der *Implementation* ist (wie im Folgenden nachgelesen werden kann), markiert dies den Beginn der nächsten Episode. Im weiteren Verlauf des Lösungsprozess wird sich herausstellen, dass der Schritt des Einsetzens in die Definition der Differenzierbarkeit eine Hürde für die Lerngruppe darstellt.

Exploration (02.58 – 04.18): Alex und Thomas schauen beide in Unterlagen aus dem Tutorium und vergleichen die dort angewandte Vorgehensweise mit der aktuell vorliegenden Aufgabe. Alex macht dabei seine Irritation deutlich, warum

das gleiche Vorgehen nicht in der aktuellen Aufgabe funktioniert. Nach kurzer Zeit fällt Alex auf, worin der Unterschied liegt: „Ja, aber die Grundfunktion ist ja trotzdem äh, also er hat als $f(x)$ das gegeben[36]. […] wir haben halt $f(x)$ die zwei Bedingungen gegeben [Thomas nickt]". Für Alex ergibt sich dabei aber das Problem, wie $f(x)$ nun in die Formel ersetzt werden kann.
Der Grund für die Kodierung der *Exploration* ist, dass sie während der *Implementation* auf eine größere Hürde gestoßen sind und nun nach Möglichkeiten suchen, um diese zu überwinden. Dabei ist die erste Anlaufstelle erneut die Aufgabe aus dem Tutorium, wobei bei dieser Betrachtung ein Vergleich zwischen den beiden Aufgaben, insbesondere bezüglich der gegebenen Funktionen, gezogen wird. Ein zielführender Fortschritt für den Lösungsprozess konnte dabei allerdings nicht erzielt werden.

Exploration[37] (04.19 – 04.56): Thomas wirft einen neuen Ansatz in den Raum und möchte die Ableitung der Funktion bilden. Alex stimmt zunächst zu, zweifelt nach kurzer Zeit allerdings an dem Vorgehen, weil die Ableitungsregeln für verkettete Funktion in der Vorlesung noch nicht behandelt worden sind.
Thomas sagt zwar, dass er die Ableitung bilden möchte, allerdings meint er damit nicht die vermeintlich korrekte Vorgehensweise (Verfahren: Differenzierbarkeit prüfen), um die Aufgabe zu lösen. Stattdessen geht er davon aus, dass die einzelnen Intervalle der Funktion unabhängig voneinander abgeleitet werden sollen. Die Aussage, dass sie dies einfach mal probieren können, um zu schauen, „ob wir da eine gescheite [Ableitung] kriegen", zeigt den explorativen Charakter (Erkundungen im Lösungsraum) dieser Episode.

Exploration (04.57 – 05.56): Thomas bringt einen neuen Ansatz ein, indem er sich an einer weiteren Aufgabe aus dem Tutorium orientiert. Dabei werden kurze Überlegungen angestellt, die sie aber schnell verwerfen.
Die Orientierung an einer weiteren Aufgabe aus dem Tutorium lässt darauf schließen, dass im Lösungsprozess kaum Fortschritte erzielt wurden. In der Aufgabe aus dem Tutorium handelt es sich um die Überprüfung von Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt. Zwar wird dort ebenfalls mit Grenzwerten argumentiert, jedoch entspricht dies inhaltlich nicht der richtigen Herangehensweise. Es wird dadurch eher deutlich, dass versucht wird, mit jeglichen Mitteln an eine Lösung bzw. Hilfe zu kommen.

---

36 Funktionsterm aus der Aufgabe des Tutoriums: $f(x) = |x|x$

37 An dieser Stelle schließt eine Episode *Exploration* einer weiteren Episode *Exploration* an. Die Kodierung wurde so vorgenommen, um zu signalisieren, dass an dieser Stelle ein neuer Ansatz verfolgt wird. Dennoch bleiben Alex und Thomas grundlegend in der Episode *Exploration*. Diese Art von Kodierung taucht in diesem Problembearbeitungsprozess noch weitere Male auf.

Transition (05.57 – 06.43): Nach einer kurzen Phase des Schweigens fragt sich Alex erneut, ob das Einsetzen in die Definition der Differenzierbarkeit der richtige Ansatz ist. Er will aber weiterhin daran festhalten, weil er glaubt, dass die Aufgabe damit gelöst werden müsse. Im Anschluss folgt wieder eine Phase des Schweigens.
Alex beweist mit seiner Aussage, dass er die richtige Intuition für die Aufgabe entwickelt hat. Vermutlich erkennt er auch, dass das Problem eher darin liegt, wie eine abschnittsweise definierte Funktion in die Definition der Differenzierbarkeit eingesetzt werden kann.

Exploration (06.44 – 08.40): Thomas schlägt vor, in der Vorlesung nach Beispielen zu schauen. Beide suchen daraufhin in ihren Unterlagen, wobei sich Thomas erneut auf ein Beispiel konzentriert, bei dem die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt überprüft werden soll (07.26). Thomas bringt daraufhin die Idee ein, sich von beiden Seiten der Funktion der 0 anzunähern, um die Funktion nach einem Sprung zu untersuchen. Alex drängt wiederum darauf hin, dass man einfach mal probieren könnte, die Funktion in die Definition der Differenzierbarkeit einzusetzen, wobei dies erneut nicht durchgeführt wird.
Thomas erkundet weiterhin den Lösungsraum, um an Informationen zu gelangen, die im weiteren Verlauf der Bearbeitung hilfreich sein könnten. Es zeigt sich allerdings, dass Thomas bereits Schwierigkeiten damit hat, eine geeignete ähnliche Aufgabe zu finden.

Exploration (08.41 – 11.30): Alex schlägt vor, sich die Funktion aus der Aufgabe visualisieren zu lassen (Abbildung 24), wobei dies einige Zeit in Anspruch nimmt. Alex gibt dabei nur den Teil der Funktion ein, welcher nicht in 0 definiert ist. Beide schauen sich den Graphen der Funktion genauer an, wobei Alex sagt, dass der Graph der Funktion ganz komisch aussehen würde und die Ableitung nicht sinnvoll sei (11.17). Für seine Vermutung gibt er allerdings keinen Grund an.

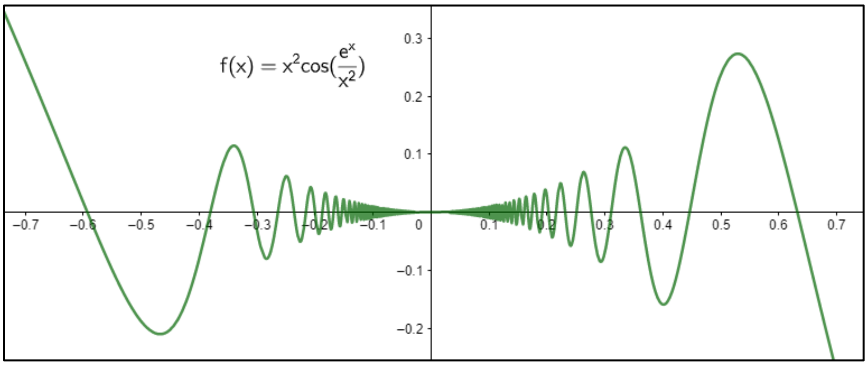


Abbildung 24: Graph der Funktion f, den Alex und Thomas betrachten

Alex entscheidet sich, die Funktion aus der Aufgabe zu visualisieren. Es wird allerdings nicht deutlich, wieso er erneut nicht seinen eigenen vorgeschlagenen Ansatz des Einsetzens in die Definition der Differenzierbarkeit verfolgt. Vielmehr geht er den Ansatz nach, den Thomas vorgeschlagen hat: Untersuchen nach einem Sprung in der Stelle 0. Dies bringt allerdings auch keinen zielführenden Fortschritt in der Aufgabe.

Exploration (11.31 – 14.17): Alex vermutet, dass die Ableitung der Funktion im Punkt 0 auch 0 ist, woraufhin Thomas dem zustimmt. Der Grund dafür wäre die Bedingung aus der Aufgabe. Thomas erklärt: „Die obere Funktion ist ja gesamt f [Alex zustimmend] und für die, wo sie nicht definiert ist für x_0, ist 0 als Ersatzwert. Und wenn du dann die Ableitung für $f'(0)$ machst, ist das 0, weil Ableitung von 0 ist 0“ (12.10). Alex hadert mit dieser Aussage und fragt sich erneut, ob man dann nicht einfach in die Definition der Differenzierbarkeit einsetzen könne. Thomas entgegnet, dass man dann durch 0 teilt, wenn man den Differentialquotienten bilden würde. Alex stimmt zu. Daraufhin wechseln sie wieder zur visuellen Ansicht des Graphen der Funktion f und versuchen grafisch die Steigung im Punkt 0 zu bestimmen. Alex merkt an dabei an, dass die Steigung in 0 auch nach 0 aussieht (12.53). Thomas versucht hingegen nach Nullstellen zu schauen, wobei Alex entgegnet, dass dies keine gute Idee ist, weil dies „ultra viele“ (13.33) sind. Beide einigen sich daraufhin, dass Nullstellen ihnen beim Lösungsprozess nicht helfen.
Alex und Thomas wechseln zum Ende der Episode zwischen verschiedenen Ansätzen hin und her, allerdings ohne tiefergehend darüber zu diskutieren. Dabei gelangen sie zu keinem Hinweis, der für die Lösung helfen könnte. Sie verwerfen dabei erneut den vermeintlich richtigen Weg, weil sie davon ausgehen, dass sie

dann durch 0 teilen würden. Dies ist nicht der Fall, da sich zuvor das x im Nenner mit einem x aus dem Zähler kürzen ließe.

Transition (14.18 – 14.32): Alex und Thomas entscheiden sich, zu einem späteren Zeitpunkt in der Lernsession nochmal zur Aufgabe zurückzukehren. In der Zwischenzeit bearbeiten sie eine andere Aufgabe.

Exploration (14.33 – 17.02): Nach der Rückkehr zur Aufgabe fängt Alex damit an, den Suchbegriff „Differenzierbarkeit prüfen“ in Google einzugeben. Thomas entscheidet sich, im Mathebuch[38] nachzuschauen, welches parallel zur Veranstaltung empfohlen wird. Nach eingehender Suche bemerkt Alex, dass die im Internet gefundenen Beispielaufgaben ebenfalls die Definition der Differenzierbarkeit verwenden (16.33). Diese Methode würde in der eigenen Bearbeitung der Aufgabe allerdings zu Problemen beim Einsetzen der Funktion in die Definition der Differenzierbarkeit führen.
Die Wiederaufnahme der Bearbeitung zu der Aufgabe fängt direkt mit der Suche nach Lösungsmöglichkeiten an, was den explorativen Charakter der Episode widerspiegelt. Für Alex führt dies erneut zu dem Problem, bei dem sie bereits vorher nicht weitergekommen sind.

Exploration (17.03 – 19.33): Thomas wirft ein Beispiel ein, welches er im Buch gefunden hat. Dabei handelt es sich ebenfalls um eine abschnittsweise definierte Funktion, die auf Differenzierbarkeit überprüft wird[39]. Thomas liest die Ausführungen aus dem Buch vor und resümiert, dass man für die unterschiedlichen Intervalle zwei verschiedene Werte erhält, wodurch ein Sprung entsteht. Beide stellen fest, dass darin der Unterschied zur eigenen Aufgabe liegt: In der Beispielaufgabe hat die Funktion einen Knick, die Funktion aus der eigenen Aufgabe „ist halt differenzierbar“ (19.06).
Das Beispiel aus dem Buch will den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit zeigen, bzw. dass es Funktionen gibt, die zwar in einem Punkt stetig, aber nicht differenzierbar sind. In ihrer Diskussion zur Beispielaufgabe ignorieren sie den aufgeführten Differenzenquotienten und sprechen nur davon, dass sich die Funktion an der Stelle 0 sowohl von links als auch von rechts der 0 annähert. Es lässt sich vermuten, dass die Methode des Prüfens von Stetigkeit mit der Methode des Prüfens der Differenzierbarkeit einer Stelle einer Funktion von Alex und Thomas verwechselt wird. Dies zeigt sich möglicherweise auch in der Aussage von Alex, der als Fazit abgibt, dass die Funktion aus der Aufgabe differenzierbar ist, obwohl Alex und Thomas auf der bildlichen Ebene (Annäherung an einen Punkt der Funktion von links und von rechts) von der Stetigkeit gesprochen haben.

---

38 gemeint ist das Buch „Höhere Mathematik für Ingenieure Band I“ von Burg et al. (2017)
39 zu finden auf Seite 211f. in Burg et al. (2017)

Exploration (19.34 – 19.59): Thomas zeigt ein weiteres Beispiel, welches erneut zum altbekannten Problem führt, dass der Funktionsterm der Aufgabe nicht in die Definition der Differenzierbarkeit eingesetzt werden kann, weil man durch 0 teilen würde.
Thomas findet ein weiteres Beispiel, welches allerdings keinen zielführenden Fortschritt zur Lösung beitragen kann.

Planning (20.00 – 20.22): Alex unterbreitet erneut den Vorschlag, den Funktionsterm einfach mal in die Definition der Differenzierbarkeit einzusetzen. Er führt weiter aus: „…, weil du kannst ja ein x einfach rauskürzen. […] Du kannst bei Grenzwertbestimmung darfst du ja, das darfst du das ja rauskürzen".
Trotz ihrer vorherigen Ansicht, dass das Einsetzen in die Definition der Differenzierbarkeit aufgrund einer Division durch 0 nicht zielführend ist, schlägt Alex vor, es dennoch zu versuchen. Aufgrund der konkreten Idee, wie sie ihre Hürde überwinden (ein x aus dem Bruch zu kürzen), wird somit die Episode *Planning* kodiert.

Planning und Implementation (20.23 – 21.22): Alex ersetzt nun die Variablen aus der Definition der Differenzierbarkeit mit den Voraussetzungen aus der Aufgabe, kürzt das x aus dem Bruch und folgert, dass der übriggebliebene Ausdruck gegen 0 laufen muss. Beide schlussfolgern aufgrund der Rechnung, dass die Funktion damit differenzierbar ist.
Zunächst wird *Planning* und *Implementation* zur selben Zeit kodiert, weil Alex einerseits das Vorgehen plant, dies aber gleichzeitig umsetzt.

Implementation (21.23 – 22.50): Alex und Thomas schreiben nun auf, was sie in der vorherigen Episode besprochen haben. Alex sagt dabei, dass es ja 0 werden muss, weil das x in dem Ausdruck immer dominiert. Dabei ist es egal, was mit dem Kosinus ist, weil dieser Wert ohnehin zwischen 0 und 1 bleibt und damit beschränkt ist.
Während der Umsetzung des Plans stoßen Alex und Thomas auf die Hürde, wie sie nun den gekürzten Grenzwert berechnen sollen. Schließlich gelangen sie zum richtigen Endergebnis.

Verification (22.51 – 24.08): Alex fragt sich, ob mit der Bestimmung des Grenzwerts gleichzeitig schon $f'(0)$ bestimmt wurde. Thomas stimmt dem zu und fügt hinzu, dass es aufgrund der Bedingung aus der Aufgabe ohnehin so sein müsse: „$f(x) = 0$ für $x = 0$. Damit weißt du doch schon, was $f'(0)$ ist. Ist schon direkt mit angegeben" (23.19). Alex widerspricht dem und beantwortet damit seine eingangs gestellt Frage selbst. Er ergänzt, dass die Funktion nur die

Steigung 0 hat, weil es mit der Definition der Differenzierbarkeit nachgewiesen wurde.
Alex möchte mit seiner Frage zunächst Bestätigung von Thomas erhalten, dass die Aufgabe nun vollständig gelöst ist. Die Bestätigung erhält er, allerdings fügt er mit seiner Antwort die Fehlvorstellung hinzu, dass die einzelnen Intervalle der Funktion unabhängig voneinander abgeleitet werden. Die gleiche Aussage hat Thomas bereits vorher im Bearbeitungsverlauf getätigt. Es deutet darauf hin, dass Thomas mit dem Lösen der Aufgabe diese Wissenslücke nicht schließen konnte.

Verification (24.09 – 25.36): Thomas stellt die Frage, ob sich die Funktion der 0 wie eine Parabel annähert. Damit erklärt er sich, dass in $x = 0$ der Funktion auch die Steigung 0 vorhanden ist. Beide diskutieren über den Graphen der Funktion, wobei sie versuchen zu verstehen, wieso die Form einer Parabel entsteht. Alex wirft ein, dass die Kosinusfunktion der Grund dafür ist.
Thomas und Alex versuchen anhand des Graphens der Funktion ihr Ergebnis zu validieren. Dabei diskutieren sie aber primär über das Aussehen des Graphens, anstatt über die kritische Stelle bei 0 zu sprechen.

Verification (25.37 – 27.34): Alex und Thomas gehen den eigenen Rechenweg gemeinsam durch und finden dabei keinen Fehler. Sie sind sich einig, dass sie alles richtig gemacht haben und entscheiden sich, die Lösung weiter aufzuschreiben. Dabei notiert Alex, dass das x dominiert, weil der Kosinus sich zwischen -1 und 1 bewegt. Damit ist der Grenzwert des Differenzenquotienten der Funktion 0.
Am Ende der Bearbeitung kontrollieren Alex und Thomas ihr Vorgehen und sind sich dabei einig, dass die Aufgabe vollständig gelöst wurde.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \cdot \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} x \cdot \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = 0$$

x dominiert, da cos immer zwischen 1 und -1 $\Rightarrow f'(0) = 0$

Abbildung 25: Vollständige schriftliche Lösung zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ von Alex

Alex und Thomas schaffen es zum Ende ihrer Bearbeitung zu einer Lösung zu gelangen (Abbildung 25). Dabei sind sie gemäß der Kodierung jeden Episodentyp mindestens einmal durchlaufen.

6.1.2 Überblick zur Steuerung in den Problembearbeitungsprozessen

	R	A	E	P	I	V	T	LQ
				Alex und Thomas				
Diffbar	0,6	2,7	57,4	9,9	8,9	17,2	3,3	L3
MWS	0	0	38,8	2,5	56,1	0	5	L3
L´Hospital	4	0	63,4	5,6	28,8	0	0	L3
Schnitt	1,5	0,9	53,2	6	31,3	5,7	2,8	
				Lea, Lisa, Sarah und Paula				
Diffbar	0	0	11,5	4,6	46,4	34,6	2,9	L3/4
MWS	1,4	6,5	36,7	11,5	28,1	16,8	4	L4
L´Hospital	0,4	0	36,3	11,3	50,4	11,1	1,2	L4
Schnitt	0,6	2,2	28,2	9,1	41,6	20,8	2,7	
				David				
Diffbar	1,7	51,5	34,6	0	0	1,6	10,6	L3
MWS	4,8	34,7	59	0	0	0	1,5	L1
L´Hospital	2,9	3	68,7	0	17,7	0	7,7	L3
Schnitt	3,1	29,7	54,1	0	5,9	0,5	6,6	
				Nick				
Diffbar	10	0	27,8	7,6	50	0	6	L1
MWS	6,7	27,6	45,4	0	20,3	0	0	L1
L´Hospital	8	0	73,7	0	6,3	4,3	13,3	L1
Schnitt	8,2	9,2	48,8	2,5	25,5	1,4	6,4	
				Lukas				
Diffbar	4,2	0	73,7	4,9	11,6	0	6,7	L1
				Alle Problembearbeitungsprozesse				
Schnitt	3,5	8,4	51,6	4,5	23,2	5,7	5	

Tabelle 16: Übersicht über die Kodierungen aller Problembearbeitungsprozesse (R = Reading, A = Analysis, E = Exploration, P = Planning, I = Implementation, V = Verification, T = Transition, LQ = Lösungsqualität, Diffbar = Differenzierbarkeit prüfen, MWS = Mittelwertsatz)

Die vorangegangenen Ausführungen zeigen eine ausführliche Beschreibung des Problembearbeitungsprozesses von Alex und Thomas zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“. Es geht in dieser Arbeit jedoch weniger darum, die analysierten Problembearbeitungsprozesse deskriptiv in derselben Detailtiefe wie im Beispiel von Alex und Thomas darzustellen, sondern vielmehr um den Vergleich verschiedener Prozesse. Ein Abstraktionsschritt ermöglicht es, die Gesamtheit aller Fälle parallel zu betrachten (Tabelle 16). Dabei werden die Problembearbeitungsprozesse anhand der Schoenfeld Episoden sowie der Lösungsqualität (LQ) gegenübergestellt. Hinsichtlich der Schoenfeld Episoden wird der prozentuale Zeitanteil angegeben, den die Episoden in dem Problembearbeitungsprozess der Studierenden jeweils pro Aufgabe und über alle Prozesse der Gruppe im Schnitt eingenommen haben. Die Werte sind dabei auf eine Nachkommastelle gerundet. Außerdem können aufgrund der Kodierregeln die Episoden *Planning* und *Implementation* zusammenfallen, wodurch in einigen Prozessen die Addition aller Episoden zu etwas mehr als 100 % führt. In der letzten Zeile wird ebenfalls der prozentuale Zeitanteil der einzelnen Episoden über die Gesamtheit aller Prozesse dargestellt. Zusätzlich wird die Bewertung des Produkts (Kapitel 5.5) der Studierenden bezüglich der Aufgabe in der rechten Spalte angegeben. In der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ (Tabelle 16; Lea, Lisa, Sarah und Paula) stehen zwei Bewertungen, da die Studierenden ihre Lösungen unterschiedlich formuliert haben und diese individuell bewertet wurden.
Insgesamt lässt sich erkennen, dass der Großteil der Zeit durchschnittlich in der Episode *Exploration* (51,6 %) verbracht wird. Nur Lea, Lisa, Paula und Sarah stellen eine Ausnahme dar, bei denen sich die meiste Zeit auf die Episode *Implementation* verteilt. *Implementation* stellt über alle Lerngruppen hinweg durchschnittlich die zweitgrößte Episode (23,2 %) dar. Die restlichen Episoden befinden sich durchschnittlich etwa auf einem ähnlichen Zeitniveau zwischen 3,5 % und 8,4 %.

6.1.3 Darstellung und Gegenüberstellung der Problembearbeitungsprozesse der Lerngruppen

Im Folgenden werden die Problembearbeitungsprozesse zu den drei Aufgaben (Kapitel 5.3) der einzelnen Lerngruppen fokussiert. Dabei werden auf Unterschiede, Gemeinsamkeiten und mögliche Interpretationen zu den einzelnen Prozessen eingegangen. Zur Darstellung der Prozesse wird der Bearbeitungsverlauf anhand der Schoenfeld Episoden und der zeitlichen Ausprägung dargestellt (wie z. B. Abbildung 26).

Schoenfeld Episoden in den Problembearbeitungsprozessen von Alex und Thomas

Im Folgenden werden die drei Problembearbeitungsprozesse von Alex und Thomas dargestellt (Abbildung 26).

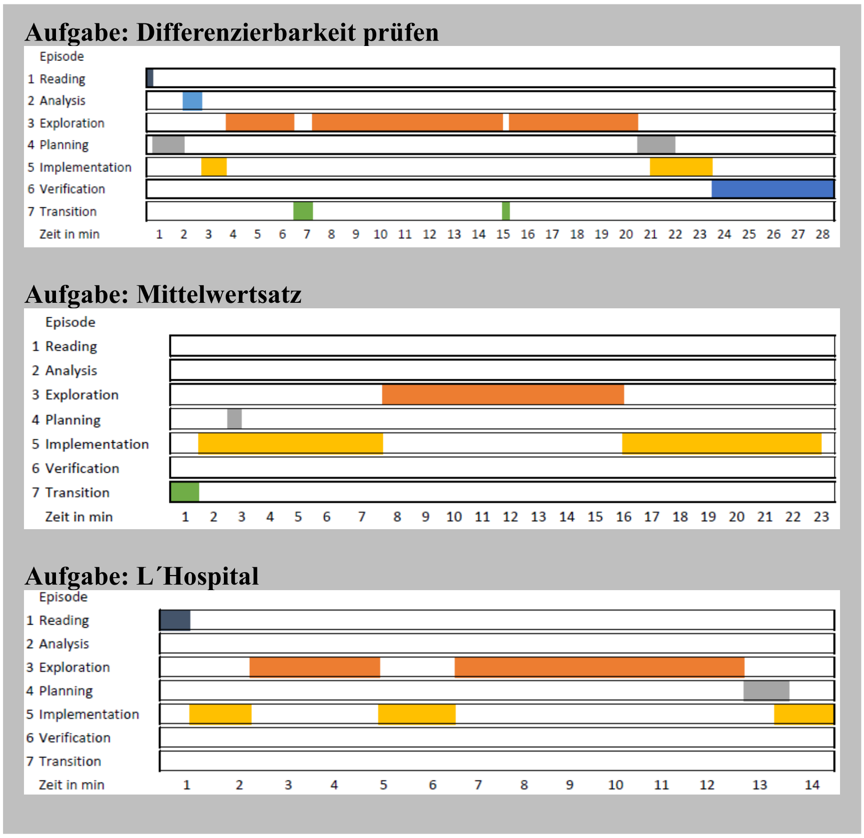


Abbildung 26: Darstellung der Problembearbeitungsprozesse von Alex und Thomas anhand der Kodierung der Schoenfeld Episoden

Alex und Thomas starten zu Beginn ihrer drei Problembearbeitungsprozesse zügig in die Produktion einer Lösung, ohne sich großartig mit den eigentlichen Aufgabenstellungen auseinanderzusetzen. Sowohl *Reading* als auch *Analysis* (lediglich in Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“) stellen daher einen geringen Teil ihrer Problembearbeitungsprozesse dar. Stattdessen ist zu erkennen, dass Alex und Thomas sich in den drei Bearbeitungsprozessen sehr zeitnah nach dem

Start in die Episode *Implementation* begeben. Während der *Implementation* erzielen Alex und Thomas zwar einen Lösungsfortschritt, allerdings wechseln sie jedes Mal in die *Exploration*. In diesen Episoden suchen Alex und Thomas nach nützlichen Informationen, die ihnen bei der Lösung der Aufgaben weiterhelfen. Letztendlich kehren sie in die *Implementation* zurück, womit die Bearbeitungsprozesse immer enden. In der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" nehmen sie zusätzlich Zeit in Anspruch, um die eigene Lösung zu kontrollieren (*Verification*). Während des gesamten Problembearbeitungsprozesses wird nur gelegentlich vor der *Implementation* ein *Plan* expliziert.
Aus den Bearbeitungsprozessen lassen sich anhand der Episoden ableiten, dass Alex und Thomas wenig bis gar nicht versuchen, die Aufgabe (besser) zu verstehen, sondern direkt mit der Bearbeitung beginnen. Dies könnte darauf hindeuten, dass beide sofort in einen Bearbeitungsversuch starten, ohne viel darüber nachzudenken, was sie genau tun. Allerdings ist das Überspringen von *Reading* und *Analysis* sowie der unmittelbare Übergang in die *Implementation* in dem Fall von Alex und Thomas eher so zu deuten, dass beide bereits ein gutes Gespür dafür haben, was für die Lösung der Aufgabe verlangt ist. Die Hausaufgaben haben Alex und Thomas immer direkt im Anschluss des Tutoriums bearbeitet. Da die Aufgaben in dem Tutorium sich den Hausaufgaben ähneln, lässt sich auf eine klare Vorstellung von Alex und Thomas schließen, wie die Aufgaben formuliert sind und welche Anforderungen diese besitzen. Aus dem gleichen Grund wird vermutlich teilweise kein *Plan* expliziert. Des Weiteren kann durch die langen Episoden *Exploration* vermutet werden, dass sie sich in einem Lösungsweg verlieren, der zu keinem Ergebnis führt. Allerdings werden die Episoden der *Exploration* bei Alex und Thomas dadurch initiiert, dass sie in der *Implementation* an bestimmten Stellen auf Hürden stoßen. Dies veranlasst den Übergang in die *Exploration*, in denen sie nach Informationen suchen, die ihnen für das weitere Vorgehen des Bearbeitungsprozessen helfen können. Die ausbleibenden Verifikationsprozesse schließen darauf, dass nach einer gefundenen Lösung der Prozess direkt abgebrochen wird. Allerdings finden bereits viele kleinere Verifikationen während des gesamten Problembearbeitungsprozess statt, sodass eine abschließende *Verification* als nicht notwendig empfunden wird.

Schoenfeld Episoden in den Problembearbeitungsprozessen von Lea, Lisa, Sarah und Paula

Im Folgenden werden die Problembearbeitungsprozesse von Lea, Lisa, Sarah und Paula dargestellt (Abbildung 27).

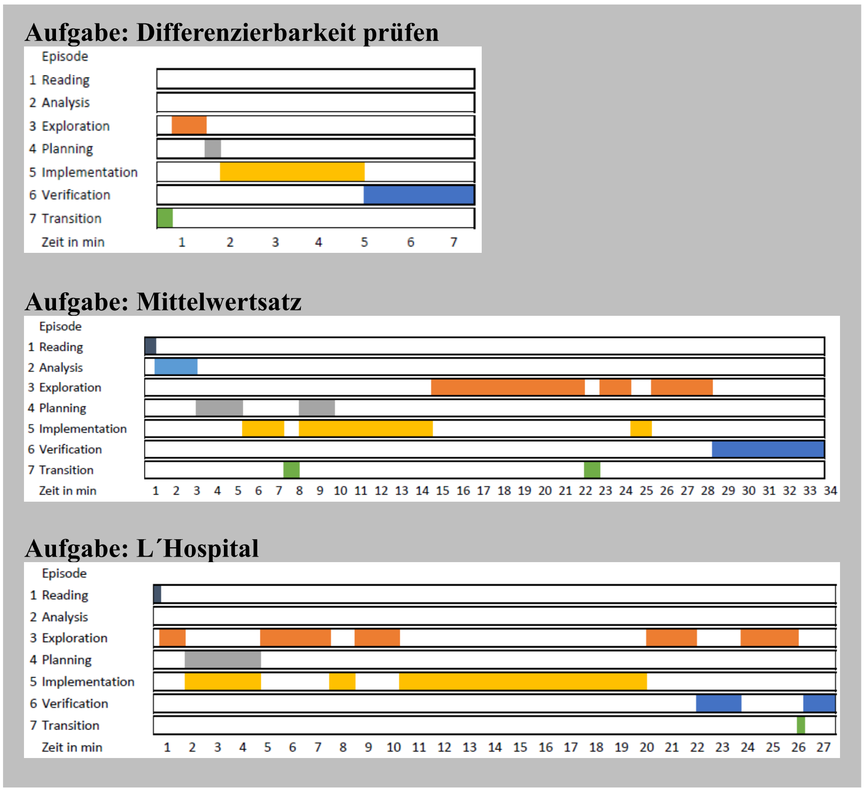


Abbildung 27: Darstellung der Problembearbeitungsprozesse von Lea, Lisa, Sarah und Paula anhand der Kodierung der Schoenfeld Episoden

In den drei Problembearbeitungsprozessen von Lea, Lisa, Sarah und Paula wird ebenfalls deutlich, dass wenig Zeit in den Episoden *Reading* und *Analysis* verbracht wird. Allerdings kann in allen drei Problembearbeitungsprozessen eine grobe *Planning-Implementation-Verification*-Sequenz identifiziert werden. Zu Beginn ihrer Bearbeitung wird ein *Plan* expliziert, der anschließend in längeren *Implementationen* umgesetzt wird. Durch Unklarheiten bei der Umsetzung des eigenen Plans kommt es in den Aufgaben zum „Mittelwertsatz" und „L'Hospital" zu kleinen Wechseln zwischen *Implementation* und *Exploration*. Zuletzt werden die eigenen Bearbeitungen kontrolliert (*Verification*).
Aus den Bearbeitungsprozessen lassen sich anhand der Episoden ableiten, dass Lea, Lisa, Sarah und Paula ebenfalls wenig Zeit für die Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung (*Reading* und *Analysis*) verwenden. In der

Aufgabenbearbeitung zu „Differenzierbarkeit prüfen“ wird sogar gar kein *Reading* und *Analysis* kodiert, da die Aufgabenstellung womöglich schon vor der Bearbeitung bekannt war. Bevor sie allerdings mit einer *Implementation* starten, wird zuvor immer ein *Plan* formuliert. Dabei legen sie fest, wie und mit welchen Methoden sie die Aufgabe lösen wollen. Während *Planning* nimmt sich die Lerngruppe viel Zeit, um herauszuarbeiten, was für die Lösung der Aufgabe benötigt wird. Teilweise werden dabei bereits einzelne Lösungsschritte besprochen. Es wird zudem deutlich, dass etwa ebenso viel Zeit in die Besprechung und Kontrolle (*Verification*) der getätigten Arbeitsschritte verwendet wird. Zwischen *Planning* und *Verification* befindet sich die Lerngruppe in der *Implementation*, wobei es an einigen Stellen einen Wechsel in *Exploration* gibt, da bei einigen Zwischenschritte Hürden auftreten. Diese Hürden werden entweder in der *Exploration* aufgeklärt oder in die abschließende *Verification* mitgenommen. Insgesamt weisen die Problembearbeitungsprozesse in dieser Lerngruppe über die verschiedenen Aufgaben hinweg einen ähnlichen Ablauf (*Planning-Implementation*/*Exploration-Verification*) auf, wobei viel Wert darauf gelegt wird, dass die Lösung der Aufgabe sinnvoll geplant und über die eigenen Gedanken reflektiert wird.

Schoenfeld Episoden in den Problembearbeitungsprozessen von David

Im Folgenden werden die Problembearbeitungsprozesse von David vorgestellt (Abbildung 28). Die Problembearbeitungsprozesse von David haben die Besonderheit, dass er in allen drei Prozessen jeweils die Bearbeitung der Aufgabe abgebrochen und die Bearbeitung an einem anderen Tag erneut aufgenommen hat. In Abbildung 28 ist dies daran zu erkennen, dass der gesamte Problembearbeitungsprozess pro Aufgabe in zwei „Zeilen“ aufgeteilt wurde. Somit könnte im Fall David von sechs unterschiedlichen Prozessen gesprochen werden.

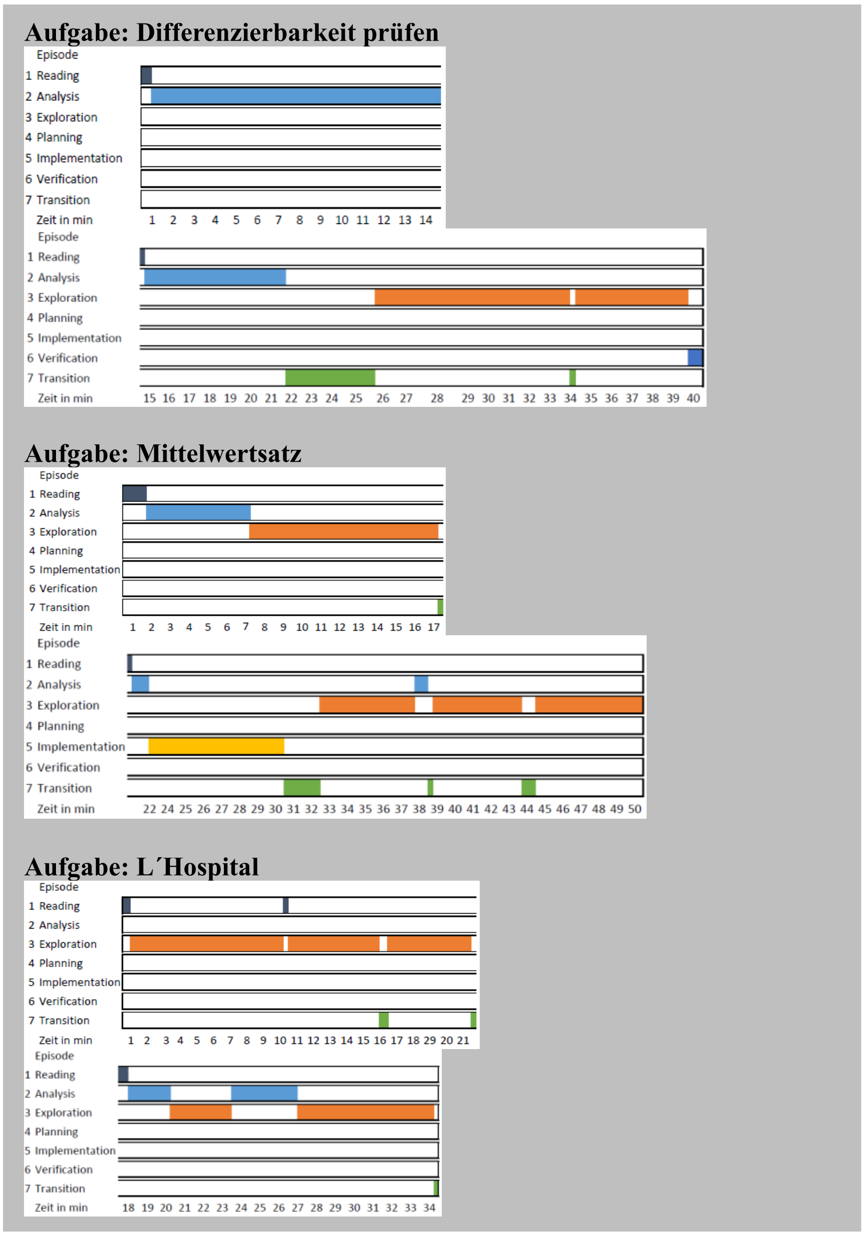


Abbildung 28: Darstellung der Problembearbeitungsprozesse von David anhand der Kodierung der Schoenfeld Episoden

In allen Prozessen startet David mit *Reading*. Abgesehen von der ersten Bearbeitung zur „L´Hospital“ Aufgabe schließt David *Analysis* daran an. In vier seiner Bearbeitungen folgt auf die *Analysis* eine *Exploration*, mit der die Problembearbeitungsprozesse enden. In einem Prozess (2. Prozess „L´Hospital“) befindet sich David nach der *Analysis* in der *Implementation*, da er einen Hinweis anwendet, den er für die weitere Bearbeitung der Aufgabe erhalten hat. Allerdings endet dieser Prozess ebenfalls mit *Exploration*.
In den Problembearbeitungsprozessen von David ist zunächst zu erkennen, dass viel Zeit in die *Analysis* der Aufgabe investiert wird. Dies unterscheidet ihn stark zu anderen Lerngruppen in dieser Studie. Vor allem in den Aufgaben „Differenzierbarkeit prüfen“ und „Mittelwertsatz“ versucht David die beiden Begriffe mithilfe verschiedener Unterlagen für sich zu klären, bevor eine Lösung für die Aufgabe angestrebt wird. Das Nachschlagen der Begriffe hilft David zwar die Aufgaben besser zu verstehen, allerdings weiß er nicht, wie er auf eine Lösung der Aufgabe kommen soll. Dies zeichnet sich durch die *Exploration* aus, in der er nach Lösungsmöglichkeiten sucht. In den meisten Fällen sucht er so lange nach Lösungsmöglichkeiten, bis er für sich selbst entscheidet, dass er an dieser Stelle nicht weiterkommt und die Bearbeitung der Aufgabe abbricht. Da David sich durch die *Analysis* wichtige und für ihn notwendige Informationen über die mathematischen Inhalte zusammengesucht hat, hätte *Planning* womöglich dazu führen können, die langen *Explorationen* zu vermeiden. Obwohl in den *Explorationen* kurze *Transitions* zu erkennen sind, in denen David sein Vorgehen hinterfragt, bleibt er anschließend dabei, wie gehabt weiter zu verfahren. Dies liegt vermutlich daran, dass er keine Alternative hat, die Aufgabe zu lösen.

Schoenfeld Episoden in den Problembearbeitungsprozessen von Nick

Im Folgenden werden die Problembearbeitungsprozesse von Nick dargestellt (Abbildung 29).

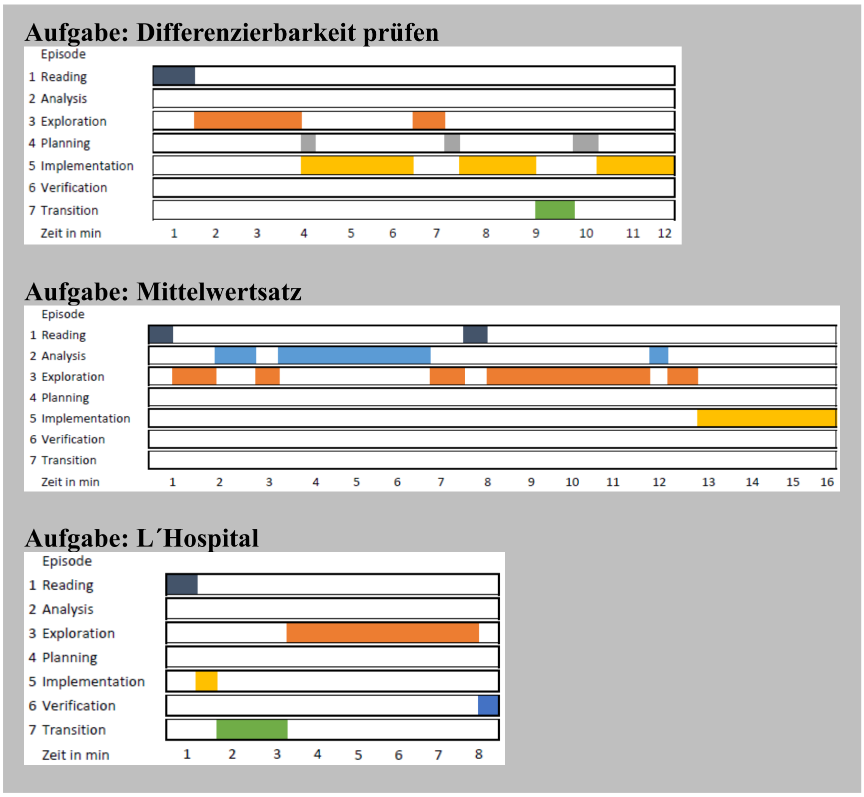


Abbildung 29: Darstellung der Problembearbeitungsprozesse von Nick anhand der Kodierung der Schoenfeld Episoden

Die drei Problembearbeitungsprozesse von Nick starten immer mit *Reading*. Darüber hinaus befinden sich ebenfalls *Exploration* und *Implementationen* in allen Bearbeitungen, allerdings lässt sich daraus kein allgemeines Muster erkennen. Nach *Reading* verlaufen die Bearbeitungsprozesse verschieden: In der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ wird mehrfach von *Exploration* zu *Planning* zu *Implementation*, in der Aufgabe „Mittelwertsatz“ zwischen *Exploration* und *Analysis* gewechselt. Die Bearbeitung endet mit einer *Implementation*. Die Aufgabe „L´Hospital“ beginnt mit einer kurzen *Implementation* und endet mit *Exploration* sowie einer kurzen *Verification*.
Insgesamt lässt sich aus den Bearbeitungsprozessen erkennen, dass Nick wenig Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben aufbringt. Dabei geht er direkt nach dem Lesen der Aufgabe dazu über, eine Lösung für die Aufgabe zu suchen

(*Exploration*) bzw. zu produzieren (*Implementation*). In den Bearbeitungsprozessen wird allerdings deutlich, dass Nick wenig bis keine Zeit investiert, um die Aufgabenbearbeitung explizit zu planen oder diese zu überprüfen bzw. zu kontrollieren.

Schoenfeld Episoden in den Problembearbeitungsprozessen von Lukas

Im Folgenden wird der Problembearbeitungsprozess von Lukas dargestellt (Abbildung 30). Für Lukas wird nur die Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" herangezogen, da er die anderen beiden Aufgaben nicht bearbeitet hat.

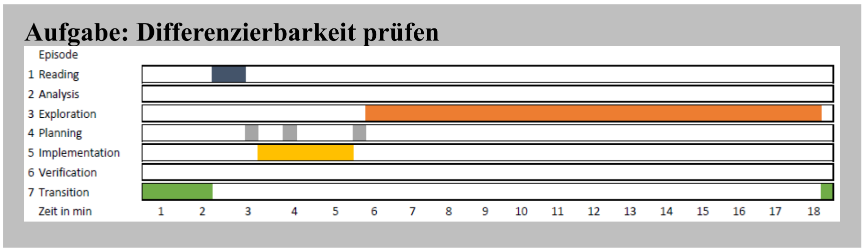


Abbildung 30: Darstellung des Problembearbeitungsprozesses von Lukas anhand der Kodierung der Schoenfeld Episoden

Lukas beginnt seinen Problembearbeitungsprozess der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen", indem er sich an Tipps seines Tutors erinnert (*Transition*). Nach *Reading* der Aufgabenstellung *plant* er die Tipps anzuwenden (*Implementation*), bis er zwar einen weiteren *Plan* aufstellt, sich aber aufgrund von Unsicherheiten von dort aus aber auf die Suche nach Lösungsmöglichkeiten begibt (*Exploration*). Mit der *Exploration* endet ebenfalls die Bearbeitung. Für die Auswertung dieser Studie ist bei Lukas zwar nur die Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" relevant, allerdings sind weitere Aufgaben mit einer ähnlichen Vorgehensweise bearbeitet worden.

Abschließender Vergleich zwischen den Lerngruppen

Die Gruppen von Alex und Thomas sowie Lea, Lisa, Sarah und Paula sind erfolgreicher[40] in der Bearbeitung, da sie bestehende Hürden systematisch angehen. Während Alex und Thomas dies durch flexibles Wechseln zwischen Implementation und Exploration erreichen, zeichnet sich die zweite Gruppe durch eine strukturierte Planung und intensive Kontrolle aus. David und Lukas hingegen

40 In Kapitel 6.1.6 werden erfolgreiche bzw. nichterfolgreiche Prozesse detaillierter besprochen.

scheitern häufig an mangelnder Planung, die zu langen und wenig produktiven Explorationsphasen führt. Nick zeigt ein breites Spektrum an Ansätzen, bleibt jedoch aufgrund fehlender Konsistenz und Kontrolle weniger effektiv.

6.1.4 Episodenwechsel in den Problembearbeitungsprozessen

Im Folgenden erfolgt eine Betrachtung der Episodenwechsel. Damit lässt sich bestimmen, ob die Problembearbeitungsprozesse linear bzw. nicht-linear (Kapitel 2.3.3) verlaufen. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(S2) *Welche Episodenwechsel treten in den Problembearbeitungsprozessen auf? Verlaufen die Prozesse linear?*

Bei der Betrachtung der 13 verschiedenen Problembearbeitungsprozesse fällt auf, dass in jedem Prozess zahlreiche Wechsel zwischen Episoden stattfinden (Tabelle 17). Die Episodenwechsel können wertvolle Hinweise auf das Steuerungsverhalten der Studierenden liefern und werden daher im Detail untersucht. Ein Episodenwechsel wird demnach dann gezählt, wenn Studierende von einer in die nächste Episode wechseln. Der erste Episodenwechsel findet dabei zwischen der ersten und zweiten Episode statt. Es muss angemerkt werden, dass *Planning* und *Implementation* zu einem Zeitpunkt gleichzeitig auftreten können. In diesem Fall wird dies wie eine gemeinsame Episode behandelt und nur ein Episodenwechsel gezählt. Dies geschieht in der Form, dass nach einer gemeinsamen Episode von *Planning* und *Implementation* in eine normale *Implementation* ohne *Planning* übergegangen wird.

Anzahl der Episodenwechsel

Die durchschnittlichen Episodenwechsel pro Aufgabenbearbeitung liegen bei ca. 9,1. Innerhalb der Lerngruppen weist Nick durchschnittlich die wenigstens (7,6) und David die meisten (11) Episodenwechsel auf. Dieses Ergebnis hängt womöglich mit der Bearbeitungszeit zusammen. Nick hat für die Bearbeitung durchschnittlich ebenfalls die wenigste Zeit und David die meiste Zeit benötigt.
Werden einzelne Problembearbeitungsprozesse betrachtet, zeigen sich allerdings auch Prozesse, die besonders wenige (Lea, Lisa, Sarah und Paula sowie Nick mit 4 Episodenwechseln) bzw. viele Episodenwechsel (David mit 16 Episodenwechsel) besitzen. In dem Prozess von Lea, Lisa, Sarah und Paula zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ treten vier Episodenwechsel auf: *Transition* → *Exploration* → *Planning* → *Implementation* → *Verification*. Insgesamt hat dieser Prozess sieben Minuten gedauert. Die Lerngruppe bearbeitet die Aufgabe zügig und strukturiert. Der Prozess verläuft durchgehend flüssig, sodass keine zusätzlichen Episodenwechsel erforderlich sind. Demgegenüber

treten in dem Prozess von David zur Aufgabe „L´Hospital" 16 Episodenwechsel auf. David zeigt durch diese Episodenwechsel selbstregulatorische Ansätze, allerdings befindet er sich sowohl davor als auch danach in einer *Exploration*. Dadurch wird deutlich, dass zwar erkannt wird, dass unstrukturiert vorgegangen, allerdings kein Weg bzw. kein inhaltlicher Ansatz gefunden wird, in der Lösung zur Aufgabe anders vorzugehen.

	Differenzierbarkeit prüfen	**Mittelwertsatz**	**L´Hospital**	**Summe**
Alex und Thomas	12	6	7	25
Lea, Lisa, Sarah und Paula	4	12	12	28
David	8	9	16	33
Nick	9	10	4	23
Lukas	9			9

Tabelle 17: Häufigkeiten der Episodenwechsel, dargestellt für alle drei Aufgaben

In einer Studie von Herold-Blasius (2019) wurden ebenfalls die Episodenwechsel in Problembearbeitungsprozessen untersucht, allerdings von Kindern im Alter von 7 und 10 Jahren. Dort wurden durchschnittlich pro Aufgabe etwa drei Episodenwechsel vollzogen. Im Vergleich liegt der Durchschnitt der Episodenwechsel in dieser Studie etwas mehr als drei Mal so hoch. Die hohe Anzahl an Episodenwechsel kann verschiedene Gründe haben. Zum einen sind die Aufgaben, die in dieser Arbeit bearbeitet wurden, mehrschrittiger als Aufgaben für Grundschulkinder. Komplexere Aufgaben erfordern mehrschrittige Überlegungen, wodurch möglicherweise mehr Potenzial für Episodenwechsel vorhanden ist. Dies kann sich beispielsweise durch die Festlegung von Zwischenzielen, unerwarteten Schwierigkeiten usw. bemerkbar machen. Zum anderen könnte die längere Bearbeitungszeit Grund für die hohe Anzahl der Episodenwechsel darstellen. Im Vergleich zu den berichteten Werten (13:34 Minuten) von Herold-Blasius (2019) liegt die durchschnittliche Bearbeitungszeit in dieser Studie (22:53 Minuten) fast doppelt so hoch. Letztlich lässt sich jedoch für jede Aufgabe, unabhängig von ihrer Komplexität oder ihrem Schwierigkeitsgrad, nicht unbedingt festlegen, wie viele Episodenwechsel eine Person benötigen sollte.

In den Problembearbeitungsprozessen der Studierenden treten verschiedene Handlungsweisen auf, zwischen denen häufig gewechselt wird. Dadurch lassen sich Rückschlüsse auf die selbstregulatorischen Fähigkeiten von Studierenden schließen. Diese werden in den Prozessen deutlich, indem die Studierenden selbstständig (erkannt und) entschieden haben, einen Richtungswechsel in der Herangehensweise einzuschlagen.

Lineare und nicht-lineare Problembearbeitungsprozesse

	Reihenfolge der Episoden	Linear oder nicht-linear
Differenzierbarkeit prüfen		
G3	P A I E P I V	Nicht-linear
G4	E P I V	Linear
David	A E V	Linear
Nick	E I E I E I P I	Nicht-linear
Lukas	I P I P E	Nicht-linear
Mittelwertsatz		
G3	I P I E I	Nicht-linear
G4	A I E I E V	Nicht-linear
David	A E A E A E	Nicht-linear
Nick	E A E A E A I	Nicht-linear
L´Hospital		
G3	I E I E P I	Nicht-linear
G4	E P I E I E I E V E V	Nicht-linear
David	E A I E A E	Nicht-linear
Nick	I E A E V	Nicht-linear

Tabelle 18: Lineare bzw. nicht-lineare Prozesse (A=Analysis, E=Exploration, P=Planning, I=Implementation, V=Verification, G3 = Alex und Thomas, G4 = Lea, Lisa, Sarah und Paula)

Eine weitere interessante Beobachtung bezüglich der Episodenwechsel ist die Reihenfolge, in der diese auftreten. Eine Beschreibung und Einordnung kann mit den Ansätzen verschiedener Problemlösemodelle getätigt werden. Es stellt sich daher die Frage, ob die Problembearbeitungsprozesse der Studierenden linear (z. B. wie in Polyas Modell) oder zyklisch bzw. nicht-linear (wie es z. B. in Schoenfelds Modell bzw. Rotts Modell möglich ist) verlaufen. Um einen (nicht-)linearen Prozess zu definieren, wird sich auf die Ausführungen von Rott (2013, S. 296ff.) berufen. Ein linearer Prozess besitzt die Reihenfolge der Episoden *Analysis* → *Exploration* → *Planning* → *Implementation* → *Verification*. Ein Prozess wird darüber hinaus als linear angesehen, falls einige der Episodentypen

fehlen, wiederholt auftreten oder *Planning* und *Implementation* gemeinsam auftreten. Ein nicht-linearer Prozess hingegen durchbricht die oben angegebene Reihenfolge, unabhängig von Auslassungen oder Wiederholungen. Es werden *Reading* und *Transition* ausgeschlossen, wodurch demnach nur die inhaltlichen Episodentypen betrachtet werden (Rott, 2013, S. 275).
Mithilfe dieser Definition lässt sich ableiten, dass in dieser Studie zwei der 13 Problembearbeitungsprozesse linear und elf Problembearbeitungsprozesse nicht-linear verlaufen (Tabelle 18). Die beiden linearen Prozesse sind lediglich in der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" vorgekommen (Lea, Lisa, Sarah und Paula sowie David). Der Großteil der Problembearbeitungsprozesse in dieser Studie lassen sich demnach als nicht-lineare Prozesse einstufen. Im Vergleich zu der Studie von Rott (2013) ergibt sich somit ein anderes Bild. In seinen Daten wurden lediglich etwa ein Drittel der Prozesse (30 von 98 Prozessen) als nicht-linear eingestuft. Ähnlich wie bereits bei der Feststellung der Anzahl von Episodenwechseln kann es an der Komplexität der Aufgabenstellung liegen, sodass gegebenenfalls im Prozess nochmal zur Aufgabe zurückgekehrt werden oder der Plan angepasst werden muss. Aus diesem Grund wird die Art der nicht-linearen Prozesse untersucht. An welchen Stellen der Bearbeitung gibt es einen zyklischen Prozess bzw. aus welchen Gründen gelangen Studierende in eine Schleife? Nach der vorher festgelegten Definition von nicht-linearen Prozessen gibt es in den Problembearbeitungsprozessen mindestens eine Stelle, in der die Reihenfolge *Analysis* → *Exploration* → *Planning* → *Implementation* → *Verification* durchbrochen wird. In den vorliegenden elf nicht-linearen Prozess gibt es jeweils mindestens zwei Stellen (außer bei Nick in der Aufgabe „L´Hospital" nur eine Schleife), an denen jeder Prozess zyklisch wird. Insgesamt ergibt sich, dass

- zwölf Mal von *Implementation* → *Exploration*
- sieben Mal von *Exploration* → *Analysis*
- vier Mal von *Implementation* → *Planning*
- ein Mal von *Planning* → *Analysis*
- ein Mal von *Planning* → *Exploration* und
- ein Mal von *Verification* → *Exploration*

gewechselt wurde. Für eine genauere Betrachtung wird auf die drei häufigsten Wechsel eingegangen. Die anderen drei Episodenwechsel konnten nur einmal identifiziert werden.
Der Wechsel von *Implementation* → *Exploration* kann in allen Lerngruppen beobachtet werden. Dieser Wechsel zeichnet sich dadurch aus, dass Studierende in der *Implementation* auf eine Hürde stoßen. In der anknüpfenden *Exploration* wird nach Informationen gesucht, die ihnen in der *Implementation* helfen können. Die *Implementation* wird demnach durch eine *Exploration* unterbrochen,

wodurch sich folgender Zyklus als allgemeines Muster ergibt *Implementation* → *Exploration* (→ ggfs. *Planning*) → *Implementation*. Dieses Problemlöseverhalten deckt sich ebenfalls mit dem zuvor beschriebenen Vermeiden eines „wild goose chases“ (Kapitel 6.1.5). Am deutlichsten lässt sich dies in den drei Bearbeitungen von Alex und Thomas erkennen. Es scheint symptomatisch für Alex und Thomas zu sein, dass in der Bearbeitung zügig mit einer Produktion der Lösung gestartet wird, ohne viel Zeit in das *Planning* zu investieren. Es kann angenommen werden, dass dadurch Hürden während der *Implementation* auftreten. Allerdings zeigen die Bearbeitungen von Lea, Lisa, Sarah und Paula, dass auch mit vorangegangenen und zeitlich ausführlicherem *Planning* während der Bearbeitung auf Hürden gestoßen werden kann, wodurch eine *Exploration* ausgelöst wird.

Der Wechsel von *Exploration* → *Analysis* lässt sich in drei Problembearbeitungsprozessen (2x David, 1x Nick) wiederfinden. Dieser Wechsel zeichnet sich dadurch aus, dass eine unstrukturierte Suche nach einer Lösung bzw. Hinweise für eine Lösung nicht weitergeholfen haben und daher der Schritt zurück zur Aufgabenstellung getätigt wird. Außerdem ist in den Problembearbeitungsprozessen zu erkennen, dass in solchen Fällen eine Art Wechselspiel zwischen den beiden Episodentypen entsteht, wodurch ein wiederholender Zyklus als allgemeines Muster entsteht: *Exploration* → *Analysis* → *Exploration* → *Analysis* usw. Besonders in den Bearbeitungen von Nick und David zu der Aufgabe „Mittelwertsatz“ wird mehrfach zwischen diesen beiden Episoden gewechselt. David sucht zunächst in seinen Unterlagen nach dem Mittelwertsatz und unternimmt Aktivitäten, diesen zu verstehen (*Analysis*). Darauf aufbauend versucht er unstrukturiert eine Lösung zu generieren (*Exploration*). Nachdem er damit scheitert, geht er einen Schritt zurück und versucht erneut den Mittelwertsatz (und damit gleichzeitig die Aufgabe) besser zu verstehen (*Analysis*).

Der Wechsel *Implementation* → *Planning* kann in vier Problembearbeitungsprozessen von vier unterschiedlichen Lerngruppen identifiziert werden. Dieser Wechsel zeichnet sich dadurch aus, dass in der *Implementation* bislang Teilschritte der Lösung erzielt worden sind und das Vorgehen weiteres *Planning* benötigt. Ein allgemeines Muster lässt sich hier nicht ableiten. Zu dem Wechsel *Implementation* → *Planning* muss erwähnt werden, dass Studierende bereits in der vorangegangenen Episode einen Plan entwickelt haben könnten, diesen allerdings nicht explizit verbalisieren.

6.1.5 Identifikation von „wild goose chases“

In den bisherigen Darstellungen der Ergebnisse zeigt sich, dass *Exploration* eine besondere Stellung einnimmt. Dieser Episodentyp kann in allen Problembearbeitungsprozessen identifiziert werden und ist zudem in vielen Prozessen mit einem erheblichen Anteil der gesamten Bearbeitungszeit vertreten (siehe Tabelle 16). *Exploration* könnte ein Hinweis auf „wild goose chases" sein (Schoenfeld, 1992a; Kapitel 2.3.1), bei denen die Studierenden in einem scheinbar fruchtlosen Lösungsversuch steckenbleiben. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(S3) *Inwiefern lassen sich „wild goose chases" in den Problembearbeitungsprozessen identifizieren und inwiefern können Studierende dieses Verhalten vermeiden?*

Schoenfeld (1985) beschreibt das Problemlöseverhalten „wild goose chase", in dem es im Wesentlichen darum geht, dass problemlösende Personen einen Ansatz wählen und diesen so lange verfolgen bis die Bearbeitungszeit abgelaufen ist (Schoenfeld, 1992b, S. 190). Während des Prozesses werden demnach keine selbstregulatorischen Aktivitäten (=Episodenwechsel) unternommen. Die Operationalisierung dieses Verhaltens legt Schoenfeld mit den Episoden *Reading* → *Exploration* fest. Ein Problembearbeitungsprozess startet somit mit dem Lesen der Aufgabenstellung, wechselt anschließend zügig in eine langanhaltende Erkundung des Ergebnisraums, womit der Prozess letztendlich endet. Grundlegend für einen „wild goose chase" ist somit die Episode *Exploration*, welche fast ausschließlich den gesamten Problemlöseverlauf beschreibt. Rott (2013, S. 302) erweitert die Operationalisierung und erlaubt zwischen dem Lesen der Aufgabe und dem Verfolgen des Ansatzes noch eine kurze Phase, in der versucht wird, die Aufgabe zu verstehen[41]: Mit dieser Auffassung sind alle Prozesse gemeint, die entweder nur *Exploration* oder *Analysis* und *Exploration* beinhalten[42]. *Reading* wird als nicht-inhaltlicher Episodentyp in der Operationalisierung ausgeklammert.
Mit der Anwendung der Operationalisierung von Schoenfeld lässt sich in den Problembearbeitungsprozessen dieser Studie kein „wild goose chase" identifizieren. Hingegen kann gemäß der Operationalisierung von Rott der Prozess von David zu der Aufgabe „Mittelwertsatz" als „wild goose chase" beschrieben werden. Durch die bereits beschriebenen vielen Episodenwechsel innerhalb der einzelnen Prozesse konnte bereits vermutet werden, dass eine solche strenge Operationalisierung wenig „wild goose chases" ausfindig machen kann. Sowohl Rott als auch Schoenfeld haben in ihren Kodierungen allerdings in 25 von 32 Prozessen (Rott, 2013, S.302) bzw. ungefähr 60 % von mehr als 100 Prozessen (Schoenfeld, 1992a) ein solches Problemlöseverhalten gefunden. In

41 „Nun ist es auch möglich, dass Problemlöser kurz versuchen, die ihnen gestellte Aufgabe zu verstehen, bevor sie eine Bearbeitungsidee bis zum (erfolglosen) Ende der Bearbeitung ungeprüft verfolgen" (Rott, 2013, S. 302)

42 Rott beschreibt zwar die Reihenfolge *Reading* → *Analysis* → *Exploration*, in der Kodierung ist allerdings nur der Prozesstyp entscheidend. Die Reihenfolge wird demnach ausgeklammert.

den beiden Studien liegen allerdings andere Rahmenbedingungen vor. Zum einen ist der Prozess in der vorliegenden Arbeit nicht auf 20 Minuten beschränkt und zum anderen beinhalten die bearbeitenden Aufgaben ein anderes Aufgabenniveau. Dazu muss beachtet werden, dass die Problembearbeitung bei Rott (2013) von Schüler:innen durchgeführt wurde und in den vorliegenden Prozessen dagegen Studierende beteiligt sind. Es lässt sich vermuten, dass Studierende über eine bessere Selbstregulation verfügen, woraus häufiger Episodenwechsel resultieren und somit keinem „wild goose chase" verfallen. Weiterhin sind die Aufgabenbearbeitungen in der vorliegenden Arbeit deutlich länger als in den Untersuchungen von Rott (2013). Es ist dadurch nicht auszuschließen, dass nach längeren Zeiträumen automatisch ein Episodenwechsel stattfindet. In einem ähnlichen Setting wie in dieser Studie konnte Stenzel (2023a, S. 122) in seinen Daten keinen „wild goose chase" identifizieren. Als Begründung liefert er, dass die betrachteten Aufgaben eher begrifflich als rechnerisch geprägt sind. Dadurch würde es weniger Möglichkeiten geben, sich in irgendwelchen wenig hilfreichen Berechnungen zu verlieren. In der vorliegenden Arbeit kann dies nicht vollständig behauptet werden, da in jeder Aufgabe rechnerische Anteile vorhanden sind. Ein weiterer Grund könnte ebenfalls der Grad der Offenheit der Aufgaben sein. Während hochschulische Aufgaben oft klare Anfangs- und Endzustände aufweisen, werden typische Problemaufgaben in der Mathematikdidaktik eher als offene Aufgaben mit unklar definierten Endzuständen beschrieben (Bruder, 2000). Solche offenen Aufgaben bieten potenziell mehr Raum für explorative oder sogar ineffektive Lösungsansätze, was wiederum die Wahrscheinlichkeit eines „wild goose chase" erhöhen könnte.
Es bleibt bemerkenswert, dass trotz des hohen Anteils von *Exploration* in vielen Problembearbeitungsprozessen lediglich ein „wild goose chase" identifiziert werden konnte. Dies wirft die Frage auf, ob sich dennoch Charakteristika finden lassen, die einen „wild goose chase" beschreiben können. Möglicherweise erfordert dies eine Anpassung der Definition oder der Operationalisierung, um den beobachteten Umständen besser gerecht zu werden. Wird die Operationalisierung etwas weiter gefasst, finden sich in einigen Prozessen durchaus Charakteristika eines „wild goose chases" wieder. Weiter gefasst bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Prozesse (wie in Rotts Operationalisierung) überwiegend aus *Exploration* und *Analysis* bestehen können, allerdings auch zeitlich kurze Abschnitte des gesamten Prozesses aus einem anderen Episodentyp hervorgehen können. Besonders in den Prozessen von David lässt sich dies erkennen. Typisch für die Prozesse von David sind, dass viel Zeit in den Episoden *Exploration* und *Analysis* verbracht wird. Dabei ist seine Bearbeitung zum „Mittelwertsatz" nach Rotts (2013, S. 302) Operationalisierung des „wild goose chase" ein solches typisches Problemlöseverhalten. In der Bearbeitung wird zunächst die Aufgabe gelesen sowie versucht diese (besser) zu verstehen. Anschließend wird unstrukturiert ein Ansatz verfolgt. In dieser

Bearbeitung kommt es allerdings immer wieder zu Wechseln zwischen *Analysis* und *Exploration*. Dennoch endet die Bearbeitung mit einer zeitlich langen *Exploration*, bevor die Bearbeitung abgebrochen wird[43]. Die beiden übrigen Problembearbeitungsprozesse spiegeln ein sehr ähnliches Bearbeitungsmuster ab, wobei in der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" abschließend das inhaltliche Vorgehen kurz kontrolliert (*Verification*) und in der Aufgabe „L´Hospital" ein strukturiertes Vorgehen identifiziert wurde (*Implementation*).
Weitere Problembearbeitungsprozesse, die Charakteristika eines „wild goose chases" aufzeigen, sind Prozesse von Nick zur Aufgabe „L´Hospital" und von Lukas zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen". Obwohl Lukas zu Beginn einen *Plan* verfolgt und diesen anschließend umsetzt, verfällt er anschließend in eine *Exploration*, die bis zum Ende des Prozesses anhält. Er möchte die Ableitung der Funktion bestimmen und sucht dabei im Internet in Videos nach Hilfe. Letztlich resultiert die Suche damit, dass er keine für ihn nützliche Informationen finden konnte und die Bearbeitung der Aufgaben damit beendet wird. Im Prozess von Nick wird inhaltlich ebenfalls mit einer *Implementation* gestartet, die nach kurzer Zeit bereits in eine *Exploration* übergeht. Nick versucht in dieser *Exploration* die Regeln von L´Hospital anzuwenden, woran er letztlich allerdings scheitert und die Aufgabe beendet: „Nee, das wird nicht gegen Null und Unendlich laufen. Äh, damit bin ich fertig".

Vermeidung eines „wild goose chases"

Schoenfeld (1985, 1992a) beschreibt „wild goose chase", indem sich problemlösende Personen fast ausschließlich in einer *Exploration* befinden, mit welcher der Prozess auch endet. Obwohl in dieser Arbeit *Exploration* zeitlich in den meisten Problembearbeitungsprozessen dominiert, wurden nur fünf Prozesse identifiziert, die Charakteristika eines „wild goose chases" aufweisen. Es müssen daher einige Prozesse dieses spezielle Verhalten erfolgreich vermieden haben. Solche Prozesse beschreibt Schoenfeld (1985, S. 116) vor allem als Typ B (vgl. Kapitel 2.3.1), wobei Typ C Prozesse ebenfalls darunter aufgefasst werden können. Im Folgenden wird daher untersucht, wie Studierende (trotz zeitlich langer *Exploration*) keinem „wild goose chase" verfallen. Dafür kommen in dieser Arbeit einige Prozesse in Frage. Die Problembearbeitungsprozesse, die einem „wild goose chase" vermeiden, enden nicht zwingend mit einer *Exploration*, enthalten allerdings einen erheblichen Anteil *Exploration* im gesamten Prozess. Folgende Prozesse sind damit gemeint: Alle Prozesse von Alex und Thomas, ein Prozess von Lea, Lisa, Sarah und Paula („Mittelwertsatz") sowie zwei Prozesse von Nick („Differenzierbarkeit prüfen" und „Mittelwertsatz").

---

43 In den Prozessen von David endet die Bearbeitung immer damit, dass er seine Bearbeitung selbstständig abbricht. Dies wird durch die Episode *Transition* deutlich, in der lediglich zum Schluss gekommen wurde, dass es jetzt keinen Sinn mehr hat, weiter an der Aufgabe zu arbeiten.

In allen dieser Prozesse zeigt sich, dass die Studierenden nach der *Exploration* entweder einen expliziten *Plan* entwickeln oder direkt in eine *Implementation* übergehen. Die *Exploration* hat damit (neue) Informationen geliefert, welche für die weitere Aufgabenbearbeitung helfen. Dies zeigt sich bspw. bei Alex und Thomas in der Bearbeitung zur Aufgabe „Mittelwertsatz“. In der *Exploration* gelangen sie zu der Information (bzw. Schlussfolgerung), wie sie den Term $(-e^{-x_0}) \cdot (-sin(e^{-x_0}))$ abschätzen können. Diese Information wird in der anschließenden *Implementation* genutzt. Lediglich Nick stellt im Prozess zur Aufgabe „Mittelwertsatz“ eine kleine Ausnahme dar. Bevor er in seiner letzten *Exploration* die notwendigen Informationen erlangt (und mit *Implementation* fortführt), hat er zuvor drei Mal nach der Episode *Exploration* in *Analysis* gewechselt, da diese *Explorationen* fruchtlos verliefen. Dennoch hat Nick in diesen Momenten erkannt, dass mit dem aktuellen Vorgehen kein Fortschritt erzielt wird, wodurch die Übergänge in andere Episoden zustande kommen.
Interessant ist allerdings nicht nur der Übergang von *Exploration* zur nächsten Episode, sondern ebenfalls, wie Studierende in die *Exploration* gelangen. Hier zeigt sich ein Unterschied zwischen den Prozessen von Nick zu Alex und Thomas sowie Lea, Lisa, Sarah und Paula. Sowohl bei Alex und Thomas als auch Lea, Lisa, Sarah und Paula geht der *Exploration* eine *Implementation* voraus. Daraus wird deutlich, dass zuvor bereits strukturiert vorgegangen wurde. Allerdings gelangen sie durch Hürden in der *Implementation* in eine *Exploration*. Für die Prozesse von Alex und Thomas sowie von Lea, Lisa, Sarah und Paula befindet sich die *Exploration* zwischen zwei *Implementationen*. Sie weisen damit letztlich ein strukturiertes Vorgehen auf, welches durch Hürden unterbrochen wird. Ein Abweichen in ein „wild goose chase“ ist damit für Prozesse dieser Art eher unwahrscheinlich. Anders sieht es allerdings bei Nick aus. In seinen Prozessen startet er, wie von Schoenfeld (1992a) beschrieben, nach *Reading* mit einer *Exploration*. Die Voraussetzung für einen „wild goose chase“ wären damit vorhanden. Wie bereits beschrieben, wechselt Nick allerdings ebenfalls im Laufe des Prozesses in ein strukturiertes Vorgehen, weil er in seiner *Exploration* hilfreiche Informationen gefunden hat.

6.1.6 Vergleich von erfolgreicher und nichterfolgreicher Steuerung

Da Steuerung einen Einfluss auf den Erfolg des Problemlösens hat (Kapitel 2.2; Schoenfeld, 1985), wird im Folgenden die erfolgreiche und nicht erfolgreiche Steuerung der Problembearbeitungsprozesse in Bezug auf die zugehörigen Lösungen untersucht. Dabei erfolgt eine Analyse hinsichtlich der Aspekte Episodenwechsel, „wild goose chases“, strukturierter Lösungsansätze sowie verifizierende Prozesse. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(S4) *Inwiefern hängen die Episoden nach Schoenfeld mit dem Erfolg bzw. Misserfolg eines Problembearbeitungsprozesses zusammen?*

Einfluss auf Episodenwechsel

Episodenwechsel wurden als ein Merkmal in den Problembearbeitungsprozessen untersucht (Kapitel 6.1.4). Wird die Anzahl der Episodenwechsel in einem Prozess mit dem Lösungserfolg in Verbindung gebracht, lässt sich nur schwierig ein Zusammenhang feststellen. Sowohl eine hohe sowie eine niedrige Anzahl von Episodenwechsel (Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen": Vier Episodenwechsel und „L´Hospital": Zwölf Episodenwechsel bei Lea, Lisa, Sarah und Paula) kann zum Erfolg führen. Genauso hat sich gezeigt, dass eine hohe sowie eine niedrige Anzahl von Episodenwechsel zu Misserfolg führen kann (Aufgabe „Mittelwertsatz": Zehn Episodenwechsel und „L´Hospital": Vier Episodenwechsel bei Nick). Auch bei der Betrachtung der beiden Problembearbeitungsprozesse mit den wenigsten Episodenwechseln (jeweils vier) zeigt sich ein unterschiedliches Bild. Nick erreicht mit L1 die geringste Lösungsqualität, während Lea, Lisa, Sarah und Paula L3/L4 erreichen. Lediglich in den Problembearbeitungsprozessen, welche die meisten Episodenwechsel[44] aufweisen, zeigt sich durchweg mindestens eine Lösungsqualität von L3. Demnach wird die Aussage unterstützt, dass man von einer hohen Anzahl von Episodenwechsel auf (gute) selbstregulatorischen Fähigkeiten der problemlösenden Personen zurückschließen kann. Es lässt sich diskutieren, ob einzelne Episoden bzw. einzelne Episodenwechsel innerhalb des Prozesses notwendig bzw. mitentscheidend für den Erfolg gewesen sind, allerdings haben die Studierenden in diesen Prozessen zufriedenstellende Lösungsqualitäten erreicht. Diese vier Prozesse haben zum einen gemeinsam, dass sie zwar (wie jeder weitere Prozess in diesen Daten) einige Zeit in der *Exploration* verbringen, es zum anderen allerdings auch schaffen, aus der *Exploration* (zumindest kurzzeitig) in ein strukturiertes Vorgehen überzugehen.
Neben der Anzahl der Episodenwechsel wurde auch die Reihenfolge der durchlaufenden Episoden betrachtet. Dabei wurde zwischen linearen und nicht-linearen Problembearbeitungsprozessen unterschieden. Allgemeingültige Aussagen im Zusammenhang mit dem Erfolg abzuleiten, sind in diesen Daten allerdings kaum möglich, da lediglich zwei lineare Prozesse vorhanden sind. Allerdings sind beide Prozesse[45] mindestens mit einer Lösungsqualität von L3 kodiert. Bezüglich der nicht-linearen Prozesse gibt es sowohl Prozesse, die

44 Die Problembearbeitungsprozesse mit den meisten Episodenwechseln sind bei David (Aufgabe „L´Hospital" mit 16 Episodenwechsel), Lea, Lisa, Sarah und Paula (Aufgabe „Mittelwertsatz" und „L´Hospital" mit 12 Episodenwechsel) sowie Alex und Thomas (Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" mit 12 Episodenwechsel).

45 Beide linearen Prozesse sind zu der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" bei David und Lea, Lisa, Paula und Sarah entstanden.

erfolgreich als auch nicht-erfolgreich geendet sind. Zu erwähnen ist allerdings, dass die nicht-linearen Prozesse sich mit den Prozessen des Vermeidens eines „wild goose chase“ decken. Dies wird im Folgenden erneut aufgegriffen.

Wild goose chases

In den Beschreibungen von Schoenfeld lässt sich vermuten, dass „wild goose chases“ negativ mit dem Erfolg zusammenhängen:

> „While pursuing wild geese they failed to examine and exploit potentially useful ideas that arose periodically during their solution attempt. These absences of executive behavior guaranteed that they would be unsuccessful” (Schoenfeld, 1985, S. 316).

In einem weiteren Ausschnitt kontrastiert Schoenfeld (1992b, S. 195) „wild goose chases“ sogar mit erfolgreichen Bearbeitungen. Es bleibt zu zeigen, ob sich diese Aussagen in dem Kontext dieser Studie bestätigen lassen.
Zuvor wurden alle Prozesse von David als auch jeweils ein Prozess von Nick und von Lukas mit Charakteristika eines „wild goose chases“ identifiziert (Kapitel 6.1.5). In drei Prozessen (jeweils eine Bearbeitung von Lukas, Nick und David) lässt sich der vermutete Zusammenhang bestätigen. In allen drei Produkten wurde kein sinnvoller Ansatz gefunden (L1), der für eine gute Lösung ausreicht. Demnach entschied man sich für den Ansatz, welcher bis zum Misserfolg bzw. Abbruch verfolgt wurde. Eine andere Tendenz lässt sich allerdings in den beiden übrigen Prozessen von David beobachten. Die beiden Lösungen wurden als Erweiterter Ansatz (L3) gewertet. Obwohl von einem ähnlichen Problembearbeitungsprozess gesprochen werden kann, unterscheiden sich die Produkte in ihrer Lösungsqualität stark voneinander. Auf den ersten Blick lässt sich feststellen, dass David in seinen Bearbeitungen neben der *Exploration* ebenfalls viel Zeit in der *Analysis* verbringt, was in den Prozessen bei Nick bzw. Lukas nicht der Fall ist. Bevor David einen Ansatz verfolgt, verbringt er in der Bearbeitung zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ zunächst viel Zeit damit, die Aufgabe (besser) zu verstehen. Dabei setzt er sich tiefgründig mit dem Begriff Differenzierbarkeit auseinander. Letztendlich könnte vermutet werden, dass nach längerer Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung und dem Klären verschiedener Begriffe ein expliziter *Plan* entwickelt und dieser anschließend ausgeführt (*Implementation*) werden kann. In seinem Prozess verlässt David die *Analysis* allerdings immer noch mit einigen Unklarheiten, ist jedoch der Meinung, dass es nun an der Zeit wäre, eine Lösung aufzuschreiben, bzw. mit der Produktion einer Lösung zu beginnen. Daraus resultiert ein unstrukturiertes Vorgehen (*Exploration*), in welchem er gleichzeitig Fortschritte zur Lösung der Aufgabe erzielt. In der Bearbeitung zur Aufgabe „L´Hospital“ fängt David zwar sehr schnell mit einem unstrukturierten Lösungsversuch (*Exploration*) an, in einem zweiten Anlauf ist es aber erneut die Analysis, die zunächst zu einem strukturierten Vorgehen (*Implementation*) führt. In dieser Phase entsteht zeitgleich der meiste Lösungsfortschritt (Abbildung 31), während in dem

restlichen Bearbeitungsprozess die Lösung nur durch Kleinigkeiten ergänzt werden konnte.

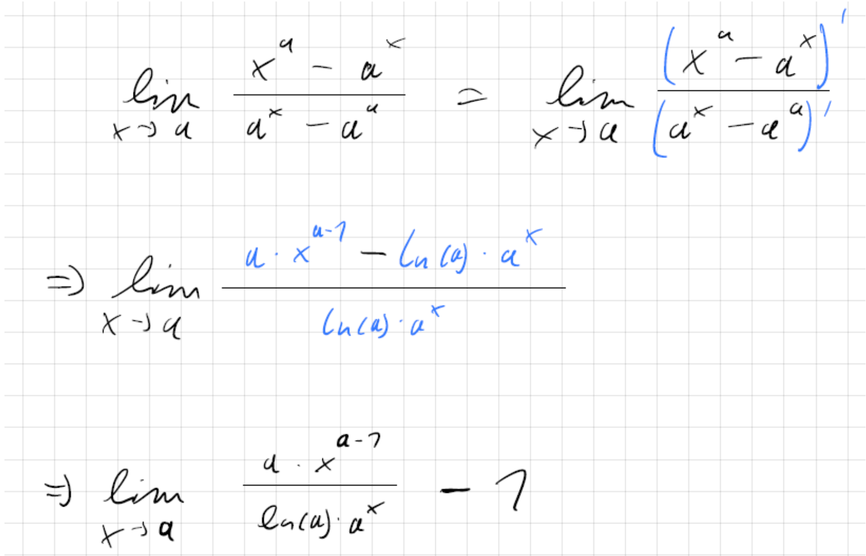


Abbildung 31: David Lösungsfortschritt in der Implementation (Aufgabe „L´Hospital“)

In beiden erfolgreichen Prozessen (L3) von David, die Charakteristika eines „wild goose chases“ aufweisen, sind Hinweise zu erkennen, dass abseits der *Exploration* Lösungsfortschritte erzielt worden sind. Sowohl die *Analysis* als auch die *Implementation* scheinen dabei wichtige Rollen einzunehmen. Die *Exploration* hat dabei nur teilweise (in der Bearbeitung zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ bei David) zum Erfolg beigetragen.
Die Problembearbeitungsprozesse, die ein „wild goose chase“ vermeiden konnten, zeigen in Bezug auf Erfolg kein einheitliches Bild. Es lassen sich allerdings die theoretischen Typen B und C von Schoenfeld (1985, S. 116) identifizieren. Paula, Lea, Lisa und Sarah haben in ihrem Prozess zur Aufgabe „Mittelwertsatz“ eine vollständig korrekte Lösung (L4) erreicht. Damit fallen sie unter den Typ C, da ihre Steuerung zum einen den „wild goose chase“ abwendet und darüber hinaus Heurismen sowie Wissen für die vollständige Lösung anwenden. Typ B ist hingegen im Prozess von Nick zu erkennen (L1). Nick vermeidet zwar einen „wild goose chase“, indem er in ein strukturiertes Vorgehen übergeht, allerdings entwickelt er einen nicht-zielführenden *Plan* (in Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“), bzw. verfolgt einen falschen Ansatz

(*Implementation* in Aufgabe „Mittelwertsatz“). Er setzt sein Wissen und die Heurismen daher nicht angemessen ein. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass es nicht ausreichend ist, lediglich einen „wild goose chase“ zu vermeiden, um eine erfolgreiche Lösung zu produzieren. Darüber hinaus ist es von zentraler Bedeutung, dass das strukturierende Vorgehen zielführend für die Lösung der Aufgabe ist.

Strukturierte Problembearbeitungsprozesse

Aus den fünf Problembearbeitungsprozessen, die Charakteristika eines „wild goose chases“ aufweisen, lässt sich festhalten, dass unstrukturiertes Vorgehen (*Exploration*) wenig zum Erfolg bzw. erfolgreichen Lösungsfortschritt einer Aufgabe beiträgt. Dagegen gehen erfolgreiche Problemlösende „systematischer vor als weniger erfolgreiche Problemlöser“ (Zimmermann, 1982, S. 193). Es stellt sich daher die Frage, inwiefern strukturierte Prozesse Einfluss auf den Erfolg nehmen.
Als ein strukturierter Problembearbeitungsprozess wird ein Prozess angesehen, welcher *Planning* enthält. Dies bedeutet, dass in der Bearbeitung ein inhaltliches Ziel festgelegt sowie der Weg zum Erreichen des Ziels expliziert wird. Das strukturierte Vorgehen wird durch das Ausführen des Plans vervollständigt. Es werden demnach Prozesse betrachtet, in denen *Planning* und *Implementation* vorkommen. Auf den ersten Blick der Übersicht (Tabelle 16) kann ein positiver Zusammenhang vermutet werden. Sowohl Alex und Thomas sowie Lea, Lisa, Sarah und Paula beinhalten in jedem Problembearbeitungsprozess sowohl *Planning* als auch *Implementation* und erreichen mindestens L3. Allerdings weisen Nick und Lukas ebenfalls sowohl *Planning* und *Implementation* in jeweils einem Prozess auf. Beide Prozesse wurden mit L1 bewertet. Demnach muss es einen weiteren Grund dafür geben.
Bevor Nick in seinem Bearbeitungsprozess zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ einen Plan entwickelt, sucht er zunächst in seinen Unterlagen nach möglichen Lösungsansätzen. Er beschäftigt sich dabei mit der Lösung einer ähnlichen Aufgabe aus dem Tutorium, bis er zu dem Entschluss kommt, dieses Vorgehen zu übernehmen. „Hier ist bisschen anders. Hier könnte ich dann auch wieder in drei Fälle unterscheiden. Das werde ich auch machen“ (*Planning*: 03:37). Das Vorgehen aus der Aufgabe des Tutoriums kann zwar teilweise übertragen werden, allerdings ist eine Fallunterscheidung in der eigentlichen Aufgabe nicht zielführend. In der vorangegangenen *Exploration* hat Nick erkannt, dass sich die Funktionen der beiden Aufgaben unterscheiden: „Ja, also dort war die Funktion nicht aufgeteilt, nicht so wie hier, einmal ungleich Null, gleich Null ist die Funktion jeweils anders“ (*Exploration*: 02.14). Dennoch plant er, die gleichen Schritte zu unternehmen. Im weiteren Bearbeitungsverlauf stellt Nick erneut einen Plan auf: „Gut, äh ich sollte überprüfen, ob die Funktion differenzierbar ist. Also würde ich erstmal [in die Definition der

Differenzierbarkeit] einsetzen“ (*Planning*: 6:47). Der aufgestellt Plan ist dabei zielführend, allerdings unterlaufen ihm sowohl bei dem Einsetzen als auch in den folgenden Rechenschritten (*Implementation*) einige Fehler. Zum Ende seines Bearbeitungsprozesses entscheidet sich Nick dazu, f' zu bilden: „Ja, bestimmen Sie $f'(0)$ [19 Sek.] Okay. Dafür soll ich erstmal f' bilden […]. Hier mache ich wieder zwei Fallunterscheidungen. Einmal für den Fall, dass f ungleich, also dass x in f ungleich Null ist“ (*Planning*, 09:15). In der folgenden *Implementation* wird deutlich, dass er dafür die Ableitungsregeln nutzen möchte. Dieser Plan ist ebenfalls nicht zielführend, erst recht, da Nick durch seinen vorherigen Plan bereits $f'(0)$ bestimmt hat. In diesem Prozess wäre für Nick entscheidend gewesen, sich nicht nur mit der Lösung der Tutoriumsaufgabe zu beschäftigen, sondern ebenfalls mit der Aufgabenstellung. Beide Aufgaben unterscheiden sich in ihren Anforderungen, wodurch möglicherweise aufgefallen wäre, dass sowohl eine Fallunterscheidung als auch das „nochmalige“ Bestimmen von f' in der eigentlichen Aufgabe nicht zielführend ist. Für den aufgestellten Plan, der zielführend für die Lösung der Aufgabe ist, wurden die Erfolgschancen durch die vielen Fehler zunichte gemacht.

In der Bearbeitung von Lukas zeigt sich ein ähnliches Bild. Obwohl er die Aufgabenstellung nochmal vorliest, wendet er sich davor und danach nur dem Tipp zu, den er von einem Tutor erhalten hat. Diesen Tipp übernimmt er und formuliert damit seinen *Plan*, wobei ihm in der *Implementation* Fehler unterlaufen. Lukas möchte anschließend, ebenfalls wie in der Bearbeitung von Nick, die Ableitung von f bilden, da in der Aufgabe die Bestimmung von $f'(0)$ verlangt ist. Um die Ableitung zu bestimmen, sucht Lukas im Internet nach nützlichen Ableitungsregeln, die ihm weiterhelfen können. Da seine Suche nicht erfolgreich war, bricht er die Aufgabe an dieser Stelle ab.

In der Bearbeitung von Lea, Lisa, Sarah und Paula zur Aufgabe „L´Hospital“ wird schon zu Beginn der Aufgabe von Sarah vermutet, dass die Regeln von L´Hospital zur Lösung führen können. Dabei überlegt die Lerngruppe zunächst, wie die Regeln von L´Hospital anzuwenden sind, indem sie beispielhaft Werte für a einsetzen. Paula versucht dies dann allgemeiner aufzufassen, wodurch Sarah die Vorgehensweise beschreibt: „Aber guck mal, da steht doch Limes x gegen a. Das muss man auch einsetzen. […] Dann hast du da stehen, dann hast du da ja stehen, a hoch a minus a hoch a und das ist Null“ (*Planning* + *Implementation*, 01:11). Anschließend entscheiden sie sich, die Ableitung der Zähler- und Nennerfunktion zu bilden, da sie den Fall Null durch Null erhalten und somit die Regeln von L´Hospital anwenden können. In der folgenden *Implementation* kommt es zwischendurch zu kleinen Hürden, allerdings werden diese gemeinsam in der Gruppe aufgelöst, wodurch sie letztendlich zu einem korrekten Ergebnis gelangen. Einen positiven Einfluss auf die Lösung hat dabei der zielführende *Plan* eingenommen. Dieser konnte dadurch formuliert werden, dass zuvor die Aufgabe verstanden wurde.

Verifizierende Problembearbeitungsprozesse

Bisherige Studien zeigen, dass in Problembearbeitungsprozessen in seltenen Fällen eine Rückschau auftritt (z. B. Pugalee, 2004). In den vorliegenden Daten lassen sich allerdings in knapp der Hälfte (sechs von 13) der Prozesse eine *Verification* identifizieren (Kapitel 6.1.3). Dabei fällt auf, dass in jedem Bearbeitungsprozess von Lea, Lisa, Sarah und Paula eine *Verification* vorhanden ist. Hinsichtlich ihrer Lösungen wurde mindestens L3 kodiert. Weiterhin wurde *Verification* in einem Prozess von Alex und Thomas sowie von David identifiziert, dessen Produkte ebenfalls mit L3 bewertet sind. Lediglich das Produkt von Nick wurde mit L1 bewertet, obwohl der Prozess eine *Verification* beinhaltet. Auf den ersten Blick könnte daher vermutet werden, dass ein positiver Zusammenhang zwischen *Verification* und einer erfolgreichen Lösung besteht.
Es stellt sich die Frage, welche Aktivitäten in *Verification* durchgeführt wurden. In den jeweiligen Episoden überprüfen die Studierenden jeweils ihre Lösung bzw. ihr Vorgehen. Die *Verification* der Gruppen (Alex und Thomas sowie Lea, Lisa, Sarah und Paula) nehmen dabei einen zeitlich höheren Anteil des Prozesses ein, weil darüber hinaus inhaltlich über die eigene Lösung diskutiert wurde. Zum Beispiel ordnen Alex und Thomas ihr Ergebnis, dass die Funktion in 0 differenzierbar ist, grafisch ein, indem sie sich die Funktion visualisieren. Insgesamt hat der Episodentyp *Verification* allerdings wenig Einfluss auf den gesamten Bearbeitungsverlauf, da sie am Ende der Bearbeitung auftreten. In allen Prozessen tritt *Verification* als Letztes im Prozess auf. Nur bei der Aufgabe „L´Hospital“ von Lea, Lisa, Sarah und Paula wird *Verification* durch eine kurze *Exploration* unterbrochen. Inhaltlich verändern die Studierenden in keinem der Prozesse etwas an ihrer Lösung.

6.1.7 Zusammenfassung der Ergebnisse zur Analyse der Steuerung

Abschließend werden für das Kapitel 6.1 die zentralen Ergebnisse der Analyse hinsichtlich Steuerung zusammengefasst:

- Die untersuchten Studierende verbringen durchschnittlich am meisten Zeit in der *Exploration* (51 % der Zeit). Die zweitmeiste Zeit nimmt *Implementation* ein (23 %) (Kapitel 6.1.2).
- Die Problembearbeitungsprozesse von derselben Lerngruppe verlaufen zu verschiedenen Aufgaben ähnlich. Eine Ausnahme zeigen die Prozesse von Nick (Kapitel 6.1.3).
- Die Problembearbeitungsprozesse verlaufen eher zyklisch als linear (11 vs. 2) (Kapitel 6.1.4).
- Die Problembearbeitungsprozesse enthalten durchschnittlich 9,1 Episodenwechsel pro Prozess (Kapitel 6.1.4).
- Die Problembearbeitungsprozesse weisen keine typischen „wild goose chase“ (Schoenfeld, 1985) auf, allerdings lassen sich in fünf Prozessen Charakteristika eines „wild goose chases“ identifizieren (Kapitel 6.1.5).
- (Zielführendes) strukturiertes Vorgehen scheint erfolgreich zu sein. Prozesse mit Charakteristika eines „wild goose chases“ sind weniger erfolgreich. Es konnte kein Zusammenhang zwischen Episodenwechsel und Erfolg identifiziert werden (Kapitel 6.1.6).

6.2 Rekonstruktion von Wissen in den Problembearbeitungsprozessen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem Wissensangebot der Veranstaltung und der Wissensnutzung von Studierenden während der Problembearbeitungsprozesse.

Für die Rekonstruktion von Wissen wird die Wissensmatrix herangezogen (Kapitel 2.4.4). Dabei ermöglichen die Wissensarten und -facetten die Darstellung des Wissensangebots der Veranstaltung sowie die Wissensnutzung durch die Studierenden. Die Rekonstruktion mit Hilfe der Kategorien der Wissensmatrix auf das Angebot der Veranstaltung wird in Kapitel 6.2.1 vorgestellt. Die Rekonstruktion mit Hilfe der Kategorien der Wissensmatrix bezüglich der Wissensnutzung von Studierenden wird anhand eines gesamten Problembearbeitungsprozesses in Kapitel 6.2.2 dargestellt. Anschließend wird in Kapitel 6.2.3 ein Überblick über die rekonstruierten Wissenselemente aller Prozesse gegeben. In Kapitel 6.2.4 wird der Fokus der Prozesse bezüglich der Wissensarten und Wissensfacetten aufgeteilt. Die einzelnen Prozesse liefern Gemeinsamkeiten und Besonderheiten, welche in Kapitel 6.2.5 diskutiert werden. Darauf folgt eine Darstellung inhaltlicher Schwierigkeiten in Kapitel 6.2.6, denen die Studierenden während der Bearbeitung begegnen. Die Ausführungen hinsichtlich des Angebots und der Nutzung werden in einem zusammenfassenden Rahmen in Kapitel 6.2.7 verglichen. Darüber hinaus erfolgt eine Untersuchung der Prozesse auf Erfolg und Misserfolg bezüglich der Wissensnutzung in Kapitel

6.2.8. Abschließend werden die zentralen Ergebnisse zum Wissen festgehalten (Kapitel 6.2.9).

6.2.1 Rekonstruktion des Wissensangebots

Im Folgenden wird das Wissensangebot der Veranstaltung rekonstruiert. Die theoretische Einordnung des benötigten mathematischen Wissens erfolgte bereits in Kapitel 5.3. Aufbauend darauf wurde in Kapitel 5.4.2 das Wissensangebot am Beispiel der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" dargestellt, wobei das Konzept der Differenzierbarkeit in all seinen Facetten detailliert präsentiert wurde. In den folgenden Ausführungen wird das Wissensangebot für die drei Aufgaben rekonstruiert, jedoch ohne die ausführliche, detaillierte Einordnung (mit Ausschnitten aus der Veranstaltung für jede Facette), wie sie in Kapitel 5.4.2 für das Konzept der Differenzierbarkeit vorgenommen wurde. Sofern ein Wissenselement in der Veranstaltung angeboten wird, wird dies in den folgenden Tabellen grau markiert. Die folgenden Ausführungen adressieren somit die Forschungsfrage:

(W1) *Welches Wissen wird von der Veranstaltung angeboten?*

	Mathematischer Inhalt	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Differenzierbarkeit				
	Konzept: Funktionen				
	Konzept: Abschnittsweise definierte Funktionen				
Prozedurales Wissen	Verfahren: Differenzierbarkeit prüfen				
	Verfahren: Grenzwert von Funktionen berechnen				
	Verfahren: Sandwich-Kriterium				

Tabelle 19: Wissensangebot zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" (EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

Das theoretische Wissen, das für die Bearbeitung der Aufgabe "Differenzierbarkeit prüfen" benötigt wird (Kapitel 5.3.1), wird im Rahmen der Veranstaltung angeboten. Dabei werden 20 von insgesamt 24 möglichen Wissensfacetten abgedeckt (Tabelle 19).

	Mathematischer Inhalt	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Stetigkeit einer Funktion				
	Konzept: Differenzierbarkeit				
	Konzept: Funktion				
	Konzept: Abschätzung				
	Konzept: Betrag				
	Zusammenhang: Mittelwertsatz der Differentialrechnung				
PW	Verfahren: Kettenregel				

Tabelle 20: Wissensangebot zur Aufgabe „Mittelwertsatz“ (PW = Prozedurales Wissen; EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

Das theoretische Wissen, das für die Bearbeitung der Aufgabe "Mittelwertsatz" benötigt wird (Kapitel 5.3.2), wird im Rahmen der Veranstaltung angeboten. Dabei werden 24 von insgesamt 28 möglichen Wissensfacetten abgedeckt (Tabelle 20).

	Mathematischer Inhalt	EF	K&A	B&V	KF
KW	Konzept: Funktion				
Prozedurales Wissen	Verfahren: Regel von L´Hospital				
	Verfahren: Grenzwert von Funktionen berechnen				
	Verfahren: Kettenregel				
	Verfahren: Potenzregel				

Tabelle 21: Wissensangebot zur Aufgabe „L´Hospital“ (KW = Konzeptuelles Wissen; EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

Das theoretische Wissen, das für die Bearbeitung der Aufgabe "L'Hospital" benötigt wird (Kapitel 5.3.3), wird im Rahmen der Veranstaltung angeboten. Dabei werden 15 von insgesamt 20 möglichen Wissensfacetten abgedeckt (Tabelle 21).

Insgesamt lässt sich erkennen, dass das theoretisch benötigte mathematische Wissen bezüglich aller Aufgaben in der Vorlesung angeboten wird. Sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen wird behandelt. Dabei existiert ein vielfältiges Angebot bezüglich der Wissensfacetten. Einige mathematische Inhalte treten in mehr als nur einer Aufgabe auf. Sofern diese Dopplungen unberücksichtigt bleiben, werden insgesamt 41 von 52 möglichen Wissenselementen in der Vorlesung vermittelt[46]. Lediglich zwei mathematische Inhalte werden mit nur zwei von vier möglichen Wissenselementen dargestellt. Dazu zählt das Sandwich-Kriterium (Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“) sowie die Regeln von L´Hospital (Aufgabe „L´Hospital“).

Am häufigsten (6-mal) fehlt in dem Angebot das Wissenselement bezüglich der *Konventionellen Festlegungen*. Allerdings liegt dies daran, dass es nicht zu jedem mathematischen Inhalt spezielle Fachwörter, Namen, Bezeichnungen und/oder nicht begründbare Festlegungen existieren (müssen). Andernfalls gibt es einige *Konventionelle Festlegungen*, die bereits aus der Schule bekannt sein sollten und daher nicht erneut in der Vorlesung erneut aufgegriffen bzw. festgelegt werden. 4-mal werden Wissenselemente bezüglich der Facette *Bedeutung & Vernetzung* im Angebot ausgelassen. Möglicherweise werden diese ausgelassen, da sie als weniger relevant empfunden werden. Bspw. geht es bei dem Sandwich-Kriterium vor allem um die Anwendung und weniger um die Entwicklung einer (anschauliche) Vorstellung / Begründung. Zusätzlich ist das Sandwich-Kriterium ebenfalls „nur“ eine Technik, die unter das Bestimmen eines Grenzwerts fällt. Letztlich wird die Facette *Explizite Formulierung* (Grenzwert von Funktion berechnen) 1-mal nicht angeboten, wohingegen *Konkretisierung & Abgrenzung* in jedem Fall bereitgestellt wird. Beide Facetten scheinen demnach eine wichtige Rolle einzunehmen. Bezüglich der *Expliziten Formulierung* deckt sich dies mit der besonderen Rolle, die der formalen Mathematik in der Hochschule zugeschrieben wird. Ebenso spielen Beispiele bzw. Gegenbeispiele (*Konkretisierung & Abgrenzung*) eine wichtige Rolle. Diese können helfen, ähnliche Probleme in unterschiedlichen Kontexten zu lösen, was unter die Kompetenz des Problemlösen für Ingenieur:innen fällt (Alpers et al., 2013). Im expliziten Fall dieser Studie lassen sich zukünftige Hausaufgaben durch ähnliche Beispiele aus der Vorlesung einfacher lösen.

---

46 Die Auflistung für die einzelnen Aufgaben. Hier wird die Dopplung nicht betrachtet. Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“: 20 von 24 möglichen Wissenselementen, Aufgabe „Mittelwertsatz“: 23 von 28 möglichen Wissenselementen, Aufgabe „L´Hospital“: 15 von 20 möglichen Wissenselementen.

6.2.2 Fallanalyse zur Wissensnutzung

In diesem Abschnitt wird die Wissensnutzung mittels einer Fallanalyse (Häder, 2019, S. 371ff.; Hering & Schmidt, 2014) eines Problembearbeitungsprozesses dargestellt. Diese Fallanalyse dient nicht nur zur Beantwortung der Forschungsfrage, sondern auch zur Präsentation eines vollständigen Bearbeitungsverlaufs. Im methodischen Teil (Kapitel 5.4.2) wurde die Kodierung bereits anhand von Beispielen erläutert, jedoch wird hier durch die Fallanalyse ein zusammenhängender Problembearbeitungsprozess gezeigt, der die Wissensnutzung in ihrer Gesamtheit veranschaulicht. Der detaillierte Problembearbeitungsprozess von Lea, Lisa, Sarah und Paula enthält viele Aspekte der Wissensnutzung und dient somit als umfassendes Beispiel. Damit fokussiert dieses Kapitel die folgende Forschungsfrage:

(W2) *Wie lässt sich die Wissensnutzung in Problembearbeitungsprozessen mithilfe der Wissensmatrix rekonstruieren?*

Im Folgenden wird der Problembearbeitungsprozess chronologisch dargestellt. Dabei werden sogenannte „Turns“ genutzt, die jeweils ein aktiviertes bzw. genutztes Wissenselement adressieren. Diese werden in der Reihenfolge, wie sie im Prozess aufgetreten sind, dargelegt.
Während der Prozesse bezüglich der Aufgabe „Mittelwertsatz“ haben die Studierenden häufig die Sinusfunktion und die Exponentialfunktion genutzt. Daher wurde das Konzept Funktion um die beiden weiteren Konzepte Sinusfunktion und Exponentialfunktion ergänzt (siehe Tabelle 22). Anschließend erfolgt eine Darstellung des Nutzungsverlaufs in der Wissensmatrix.

Problembearbeitungsprozess von Lea, Lisa, Paula und Sarah zur Aufgabe Mittelwertsatz

Der Problembearbeitungsprozess von Lea, Lisa, Sarah und Paula zur Aufgabe „Mittelwertsatz“ besitzt eine durchschnittliche Länge (23:21 Minuten; Kapitel 6). Der Prozess wurde daher gewählt, weil in ihm viele verschiedene Wissenselemente aktiviert werden. Die Darstellung dieses Prozesses zeigt zum einen, wie die Wissensnutzung mit der Wissensmatrix rekonstruiert werden kann, und liefert zum anderen eine Ergänzung zur Kodierung, die bereits beispielhaft in Kapitel 5.4.2 aufgezeigt wurde. Die Lerngruppe verbringt im Prozess viel Zeit damit, sich mit den mathematischen Inhalten der Abschätzung und des Betrags zu beschäftigen. Sie gehen dabei häufig auf die Exponential- und Sinusfunktion ein. Zum Ende erreichen sie eine vollständig korrekte Lösung.

Turn 1: Mittelwertsatz der Differentialrechnung – *Implizite Nutzung*

Die Aufgabenstellung verlangt, dass die Ungleichung mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung bewiesen werden soll. Dies wird von der Lerngruppe zügig aufgegriffen, indem sie die Ungleichung umformen, um sie der Aussage aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung anzupassen (Abbildung 32).

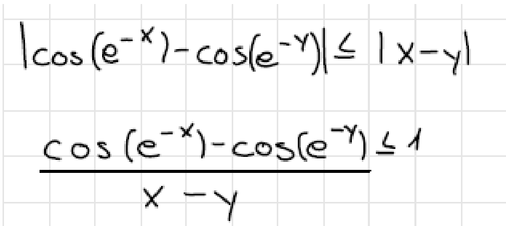


Abbildung 32: Ausschnitt aus Paulas Mitschriften zur Aufgabe „Mittelwertsatz“

Turn 2: Betrag – *Implizite Nutzung*
Während der Umformungen überlegen sie, welche Rolle die Betragsstriche spielen, da sie in der Ungleichung der Aufgabe vorkommen. Dabei werden verschiedene Aussagen zum Betrag getätigt. Zum einen wie damit umgegangen werden soll: „Macht es vielleicht Sinn, wenn wir die Betragsstriche wegmachen?“ (Lisa), „ich würde die Betragsstriche einfach stehen lassen“ (Sarah). Zum anderen wofür die Betragsstriche in der Aufgabe überhaupt da sind: „Wieso sind dann überhaupt die Betragsstriche?“ (Lea). Diese Überlegungen werden durch die Voraussetzung und Anmerkung[47] in der Aufgabenstellung angeregt. Schlussendlich heißt es bezüglich der Betragsstriche: „Wir lassen die einfach“ (Sarah).

Turn 3: Mittelwertsatz der Differentialrechnung – *Implizite Nutzung*
„So, jetzt haben wir den Mittelwertsatz. Und wie müssen wir dann weitermachen?“ (Sarah). Lisa stößt daraufhin an, dass sie die Ableitung an der Stelle x_0 betrachten müssen. Dafür definieren sie eine Funktion, um damit weiterarbeiten zu können.

Turn 4: Mittelwertsatz der Differentialrechnung – *Konventionelle Festlegung*
Während die Lerngruppe die Funktion definiert, wird die Frage gestellt, wie genau diese aufgeschrieben werden muss. In der Aussage aus dem Skript würde x_0 benutzt werden. Da sowohl x und y in der Aufgabenstellung bereits verwendet werden, entscheiden sie sich den Buchstaben a zu nehmen (Abbildung 33).

---

47 Voraussetzung: $0 \leq y \leq x$, Anmerkung: Die Ungleichung gilt sogar für beliebige nichtnegative x und y.

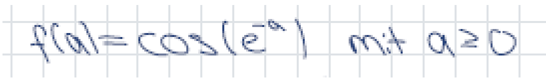


Abbildung 33: Ausschnitt aus Lisas Mitschriften zur Aufgabe „Mittelwertsatz"

Turn 5: Kettenregel – *Implizite Nutzung*
Nach dem Definieren der Funktion soll diese abgeleitet werden, um den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden zu können. Dabei wird die Kettenregel verwendet. Die Berechnung nimmt einige Zeit in Anspruch, da die Funktion von jeder Lernenden selbst abgeleitet wird. Dabei kommt es zu verschiedenen Zwischenfragen und Validierungen untereinander: „Weil innere Ableitung ist ja $-e^{-x}$, oder nicht?" (Paula).

Turn 6: Stetigkeit einer Funktion – *Implizite Nutzung*
Während die Lerngruppe die Ableitung bestimmt, fragt sich Lea, ob noch die Stetigkeit der Funktion geklärt werden muss.

Turn 7: Differenzierbarkeit – *Implizite Nutzung*
Nach kurzer Diskussion wirft Paula ebenfalls ein, ob man Gleiches auch mit Differenzierbarkeit machen müsse.

Turn 8: Mittelwertsatz der Differentialrechnung – *Bedeutung & Vernetzung*
Nach kurzer Zeit klären Sarah und Lea auf: „Aber das muss man mit dem Mittelwertsatz nicht schreiben …, weil es geht ja hier um den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Davon gehen wir schon aus. Passt schon." Sie gehen dabei nicht auf die *Explizite Formulierung* ein, sondern greifen auf ihre Vorstellung zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung zurück.

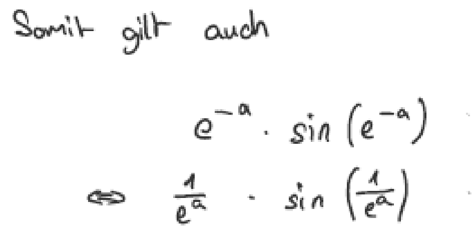
Turn 9: Kettenregel – *Implizite Nutzung*
Nach dieser Diskussion konzentriert sich die Lerngruppe erneut auf das Ableiten mithilfe der Kettenregel. Schließlich gelangen sie zu der korrekten Ableitung der Funktion.

Turn 10: Abschätzung – *Implizite Nutzung* sowie Exponential- und Sinusfunktion – *Bedeutung & Vernetzung*[48]

48 Obwohl die Lerngruppe zuerst die Abschätzung erwähnt und im Anschluss über die Wertebereiche der speziellen Exponential- und Sinusfunktion gesprochen hat, wurde dies dennoch zum gleichen Turn kodiert. Dies liegt daran, dass die Überlegungen zu den speziellen Funktionen immer im Zusammenhang mit der Abschätzung durchgeführt worden sind.

Anschließend konzentriert sich die Lerngruppe auf die Abschätzung, die ≤ 1 sein soll. Um eine sinnvolle Abschätzung zu finden, überlegen sie sich, welche Werte sowohl die Exponential- als auch Sinusfunktion annehmen können. sin sei beschränkt und e würde niemals negativ werden, was sie durch eine Zeichnung untermalen. Zusätzlich lassen sie sich auf dem Tablet e^{-x} zeichnen. Zuletzt lassen sie sich ebenfalls die Ableitungsfunktion $e^{-x} \cdot sin(e^{-x})$ auf dem Tablet anzeigen und erkennen, dass diese immer Werte unter 1 annimmt. „Aber wie können wir das beweisen?" (Paula).

Turn 11: Betrag – *Implizite Nutzung* sowie Exponential- und Sinusfunktion – *Bedeutung & Vernetzung*
Während die Lerngruppe geeignete Umformungen für die Abschätzung sucht (Abbildung 34), wird überlegt, inwiefern die Betragsstriche dabei helfen können. Sie überlegen, wie sich die Betragsstriche auf ihre Umformungen auswirken würde. Dabei entsteht bezüglich der Sinusfunktion Verwirrung, da diese auch negative Werte annehmen kann. Dies stellt für die Lerngruppe zunächst eine Hürde dar, mit der sie nicht weiterarbeiten können: „Weiß halt nicht, wie man mit dem sin umgeht" (Lisa).


Somit gilt auch

$$e^{-a} \cdot sin\left(e^{-a}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{a}} \cdot sin\left(\frac{1}{e^{a}}\right)$$

Abbildung 34: Ausschnitt aus Leas Mitschriften zur Aufgabe „Mittelwertsatz"

Turn 12: Sinusfunktion – *Bedeutung & Vernetzung*
Um die Verwirrung aufzulösen, wird über den Wertebereich der Sinusfunktion diskutiert. Darüber hinaus visualisieren sie sich $sin\left(\frac{1}{x}\right)$, da diese Funktion der eigenen ähnelt. Dies stellen sie anschließend auch mittels der Visualisierung fest. Dennoch erzielt die Lerngruppe mit dieser Information keinen weiteren Fortschritt in ihrer Lösung.

Turn 13: Mittelwertsatz der Differentialrechnung – *Konkretisierung & Abgrenzung*

Da sie zu dem Zeitpunkt nicht wissen, wie sie weiter verfahren sollen, schlägt Lea vor, in den Mitschriften des Tutoriums nachzuschauen. Dabei stellen sie einen Vergleich zwischen den beiden verschiedenen Aufgaben an.

Turn 14: Abschätzung – *Implizite Nutzung* sowie Exponential- und Sinusfunktion – *Bedeutung & Vernetzung*
Die Lerngruppe diskutiert im Zusammenhang der Abschätzung erneut über den Wertebereich der Sinusfunktion. Dabei gelingt der Lerngruppe der Durchbruch.

Lea: „Wir fragen uns nur, warum es nicht unter Null geht?"
Lisa: „Aber ist das nicht egal?"
…
Paula: „Aber wir müssen einfach nur beweisen, dass das Maxima Eins gilt."
...
Sarah: „Ja, weil das wird nie größer als Eins [zeigt auf $sin(e^{-a})$] und das hier wird nie größer als Eins [zeigt auf e^{-a}]. Dann wird das insgesamt nie größer als Eins."

Paula fasst mit ihrer Aussage die Kenntnisse der Lerngruppe zusammen.

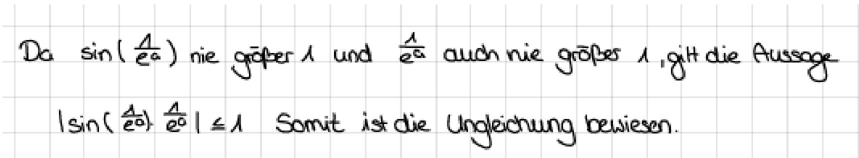

Da $\sin(\frac{1}{e^a})$ nie größer 1 und $\frac{1}{e^a}$ auch nie größer 1, gilt die Aussage
$|\sin(\frac{1}{e^a}) \frac{1}{e^a}| \leq 1$ Somit ist die Ungleichung bewiesen.

Abbildung 35: Ausschnitt aus Sarahs Mitschriften zur Aufgabe „Mittelwertsatz"

Turn 15: Betrag – *Implizite Nutzung*
Beim Aufschreiben der Erkenntnisse (Abbildung 35) wird erneut über die Rolle der Betragsstriche diskutiert. Die Lerngruppe ist sich nicht sicher, ob man die Betragsstriche einfach um die Funktion bzw. die einzelnen Produkte der Funktionen setzen darf. Es wird außerdem hinterfragt, ob das Setzen der Betragsstriche überhaupt einen Unterschied für die Ungleichung bedeuten würde. Sie versuchen zusätzlich, den Sinn der Betragsstriche in einen Zusammenhang mit der Anmerkung zu bringen. Letztendlich einigen sie sich darauf, dass die Betragsstriche um die Funktion geschrieben werden kann, dies aber keinen großen Unterschied bewirken würde.

Turn 16: Exponential- und Sinusfunktion – *Bedeutung & Vernetzung*
Zum Ende des Prozesses wird erneut auf die Skizzen Rückbezug genommen. Dort wird nochmal der Graph der Funktion $e^{-x} \cdot sin(e^{-x})$ angeschaut und die eigene Bearbeitung validiert. Damit endet der Prozess.

Die vorhergegangenen Ausführungen zeigen eine ausführliche Beschreibung der genutzten bzw. aktivierten Wissenselemente während des Problembearbeitungsverlaufs von Lea, Lisa, Sarah und Paula zur Aufgabe „Mittelwertsatz“. Um den Prozess kompakter darlegen zu können, wird eine andere Darstellungsform benötigt. Dafür wird erneut die Wissensmatrix verwendet (Tabelle 22).
Die Zahlen in der Wissensmatrix markieren die Turns der genutzten bzw. aktivierten Wissenselemente. Z. B. wurde in dem Prozess der Zusammenhang Mittelwertsatz der Differentialrechnung als erstes (Turn 1) und die Konzepte Exponential- und Sinusfunktion als letztes (Turn 16) aktiviert bzw. genutzt.

	Mathematischer Inhalt	**IN**	**EF**	**K&A**	**B&V**	**KF**
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Stetigkeit einer Funktion	6				
	Konzept: Differenzierbarkeit	7				
	Konzept: Funktion					
	Konzept: Exponentialfunktion				10, 11, 14, 16	
	Konzept: Sinusfunktion				10, 11, 12, 14, 16	
	Konzept: Abschätzung	10, 14				
	Konzept: Betrag	2, 11, 15				
	Zusammenhang: Mittelwertsatz der Differentialrechnung	1, 3		13	8	4
PW	Verfahren: Kettenregel	5, 9				

Tabelle 22: Wissensnutzung bzw. -aktivierung von Lea, Lisa, Sarah und Paula zur Aufgabe „Mittelwertsatz“ (PW = Prozedurales Wissen; EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

6.2.3 Überblick über die Wissensnutzung

Die vorhergegangenen Ausführungen zeigen eine ausführliche Beschreibung des Problembearbeitungsprozesses von Lea, Lisa, Sarah und Paula zur Aufgabe „Mittelwertsatz“. Da der Fokus dieser Arbeit weniger darauf liegt, alle analysierten Prozesse deskriptiv in gleicher Detailtiefe darzustellen, sondern vielmehr darin besteht, verschiedene Prozesse miteinander zu vergleichen, ermöglicht ein Abstraktionsschritt, die Gesamtheit aller Fälle (parallel) zu betrachten. Um einen ersten Einblick in die Wissensnutzung bzw. -aktivierung in dieser Arbeit zu gewinnen, wird eine Darstellung mit Häufigkeiten gewählt. Diese erste Überblicksdarstellung ist allerdings komprimiert, da nur auf die Wissensarten (konzeptuell und prozedural) und Wissensfacetten (*Implizite Nutzung*, *Explizite Formulierung*, *Konkretisierung & Abgrenzung*, *Bedeutung & Vernetzung*, *Konventionelle Festlegung*) eingegangen wird. Anschließend wird ebenfalls ein Überblick über die Wissensnutzung der jeweiligen Aufgaben gegeben. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(W3) *Welche Wissenselemente werden von den Studierenden häufig genutzt?*

Wissensart	**Anzahl**		
Konzeptuelles Wissen	93		
Prozedurales Wissen	84		
Wissensfacette		Davon konzeptuell	Davon prozedural
Implizite Nutzung	63	21	42
Explizite Formulierung	18	13	5
Konkretisierung &Abgrenzung	52	23	29
Bedeutung & Vernetzung	30	29	1
Konventionelle Festlegungen	14	7	7

Tabelle 23: Häufigkeiten der Nutzung bezüglich Wissensarten bzw. Wissensfacetten von allen Problembearbeitungsprozessen

Tabelle 23 zeigt die Häufigkeiten zum einen bezüglich der Wissensarten und zum anderen bezüglich der Wissensfacetten über alle Problembearbeitungsprozesse. Für die Wissensfacetten wird zusätzlich die Wissensart in Betracht gezogen. Auf den ersten Blick zeigt sich, dass prozedurales (84-mal) und konzeptuelles (93-mal) Wissen nahezu gleich oft aktiviert bzw. genutzt worden sind. Hinsichtlich der Wissensfacetten zeigt sich eine unterschiedliche Verteilung. Am häufigsten treten *Implizite Nutzung* (63-mal) als auch *Konkretisierung & Abgrenzung* (52-mal) auf. Am wenigsten wird auf *Konventionelle Festlegungen* (14-mal) eingegangen. Dazwischen liegen *Bedeutung & Vernetzung* (30-mal) sowie *Explizite Formulierung* (18-mal).

Bei genauerer Betrachtung der Facetten zeigt sich, dass einige eher im prozeduralen bzw. konzeptuellen Wissen angesteuert werden. Am deutlichsten ist dies bei *Bedeutung & Vernetzung* zu erkennen. Fast ausschließlich geschieht das nur im konzeptuellen Wissen (29-mal). Die Begründung bzw. die Vorstellung eines Verfahrens wird nur 1-mal genutzt bzw. aktiviert. Eine mögliche Erklärung liegt dabei in der Auslegung der Wissensmatrix. Eine Vorstellung bzw. Begründung über das Verfahren Differenzierbarkeit prüfen wird z. B. über alle Wissensfacetten des Konzepts Differenzierbarkeit möglich gemacht. Prediger et al. (2011) sehen dieses Wissenselement auch als Verknüpfung zu konzeptuellen Gehalten[49]. Aus diesem Grund kann dies auch einen Einfluss auf die Kodierung haben.

Weiterhin weist die Facette *Explizite Formulierung* eine stärkere Tendenz zum konzeptuellen (13-mal) als zum prozeduralen (5-mal) Wissen auf. Dies könnte auf der einen Seite darauf hindeuten, dass die ausformulierten Definitionen bzw. Sätze eine wichtigere Rolle in den Problembearbeitungsprozessen einnehmen als die Anleitung eines Verfahrens. Auf der anderen Seite könnte es bedeuten, dass Studierende die Anleitung der notwendigen Verfahren bereits internalisiert[50] haben und vielmehr die formalen Definitionen bzw. Sätze aktivieren bzw. in Erinnerung rufen müssen.

Zwei Facetten werden dagegen eher im prozeduralen Wissen angesteuert. Darunter zeigt sich bezüglich *Konkretisierung & Abgrenzung*, dass primär (Gegen-)Beispiele von Verfahren (29-mal) als von Konzepten bzw. Zusammenhängen (23-mal) genutzt werden. Die hohe Anzahl bezüglich des prozeduralen Wissens ist nicht verwunderlich, da die Aufgabe aus dem Tutorium bereits ein Beispiel für einen ähnlichen Aufgabentyp liefert. Das Zurückgreifen auf einen ähnlichen Aufgabentyp zeigt somit ein Beispiel für die Anwendung eines Verfahrens auf kann daher darüber hinaus eine sinnvolle Strategie sein (Pólya, 1949, S.60). Allerdings werden (Gegen-)Beispiele von Konzepten und Zusammenhängen ebenfalls genutzt, um sich diese verständlicher zu machen und die Anwendung vorzubereiten.

---

49 Es kann auch diskutiert werden, dass dadurch jedem Verfahren zusätzlich eine eigene Zeile im konzeptuellen Wissen in der Wissensmatrix zugeordnet werden sollte.

50 Falls Studierende ein Verfahren bereits internalisiert haben, kann dies in dieser Arbeit nicht festgestellt werden.

Die Facette *Implizite Nutzung* tendiert etwas deutlicher zum prozeduralen Wissen (42-mal). Da in den Prozessen bestimmte Verfahren angewendet werden müssen, ist das häufige Zurückgreifen keine Überraschung. Allerdings zeigt sich auch für das konzeptuelle Wissen (21-mal), dass Konzepte und Zusammenhänge systematisch in Verbindung mit dem Anwendungskontext gesetzt werden. Insgesamt überrascht es nicht, dass die *Implizite Nutzung* am häufigsten angesteuert wird, da die Studierenden in einem Kontext sind, bei dem sie aktiv mathematischen Wissen in einer Aufgabe anwenden müssen.
Letztlich ist die Aufteilung bezüglich der Facette *Konventionelle Festlegungen* ausgeglichen. Sie wurde sowohl im konzeptuellem als auch prozeduralem Wissen jeweils 7-mal angesteuert.
Tabelle 23 zeigt einen Überblick über alle Aufgaben und integriert dabei ebenfalls die Lerngruppen. Da die Aufgaben unterschiedliche mathematische Inhalte verlangen sowie unterschiedliche mathematische Inhalte von den Studierenden genutzt werden, wird im Folgenden jeweils eine Häufigkeitstabelle pro Aufgabe gewählt. In dieser Darstellung wird der spezielle mathematische Inhalt hinzugefügt. Außerdem wird die Wissensart mit der Wissensfacette gekreuzt, wodurch die Häufigkeit eines Wissenselements gezählt wird. Dabei werden die einzelnen Wissenselemente mit der Anzahl der Nutzung bzw. Aktivierung versehen, sowie aus den resultierenden Zahlen eine Heat-Map erstellt. In der Heat-Map sind die Problembearbeitungsprozesse der verschiedenen Lerngruppen zu einer Aufgabe zusammengefasst.

	Mathematischer Inhalt	IN	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Differenzierbarkeit	3	6	3	1	4
	Konzept: Funktionen	0	0	0	3	0
	Konzept: Abschnittsweise definierte Funktion	2	0	0	0	0
	Sonstige Konzepte und Zusammenhänge[51]	1	0	0	1	0
Prozedurales Wissen	Verfahren: Differenzierbarkeit prüfen	11	0	9	1	4
	Verfahren: Grenzwert von Funktionen berechnen	6	1	2	0	0
	Verfahren: Sandwich-Kriterium	0	0	0	0	0
	Sonstige Verfahren	1	1	4	0	0

Tabelle 24: Heat-Map zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ (EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

In den fünf Problembearbeitungsprozessen zu der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ (Tabelle 24) wird insgesamt 64-mal (24-mal konzeptuell, 40-mal prozedural) ein spezifisches Wissenselement genutzt bzw. aktiviert. Dabei fällt auf, dass Differenzierbarkeit als Konzept, aber auch als Verfahren am häufigsten angesteuert wird. Es spiegelt sich in jedem Prozess wider, dass Studierende sowohl auf das konzeptuelle als auch das prozedurale Wissen bezüglich der Differenzierbarkeit zurückgreifen. Das prozedurale Wissen wird allerdings häufiger beansprucht. Besonders stechen dabei die Facetten *Implizite Nutzung* sowie *Konkretisierung & Abgrenzung* heraus, die häufig in einem Wechselspiel zueinander genutzt bzw. aktiviert werden. Es fällt ebenso auf, dass kaum Wissen zu den beiden Konzepten bezüglich Funktionen von den Studierenden angesprochen wird. Darüber hinaus findet das Sandwich-Kriterium bei der Bestimmung des Grenzwerts in keinem der Lösungsversuche Anwendung.

---

51 Sonstige Konzepte und Zusammenhänge (sowie Verfahren weiter unten in der Tabelle) sind alle Konzepte bzw. Zusammenhänge, die Studierende angewendet haben, allerdings nicht notwendig für die Aufgabe waren. Für die Einfachheit der Darstellung werden diese in Tabelle 24 zusammengefasst. In den Lösungsversuchen werden bei dieser Aufgabe das Verfahren Stetigkeit prüfen (Alex und Thomas), die Produktregel (Nick), die Kettenregel und das Konzept Polarkoordinaten (beide Lukas) genutzt.

	Mathematischer Inhalt	IN	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Stetigkeit einer Funktion	1	0	0	0	0
	Konzept: Differenzierbarkeit	1	0	0	0	0
	Konzept: Funktion	0	0	0	1	0
	Konzept: Exponentialfunktion	0	0	2	6	0
	Konzept: Sinusfunktion	0	0	2	6	0
	Konzept: Abschätzung	4	0	0	1	0
	Konzept: Betrag	4	0	0	0	0
	Zusammenhang: Mittelwertsatz der Differentialrechnung	5	6	5	6	3
PW	Verfahren: Kettenregel	3	0	0	0	0
	Sonstige Verfahren[52]	1	0	1	0	0

Tabelle 25: Heat-Map zur Aufgabe „Mittelwertsatz" (PW = Prozedurales Wissen; EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

In den vier Problembearbeitungsprozessen zu der Aufgabe „Mittelwertsatz" (Tabelle 25) wird insgesamt 58-mal (53-mal konzeptuell, 5-mal prozedural) ein spezifisches Wissenselement genutzt bzw. aktiviert. Dabei fällt auf, dass dies fast ausschließlich konzeptuelles Wissen der Fall ist. Es muss allerdings bedacht werden, dass eine Vielzahl verschiedener mathematische Inhalte des konzeptuellen Wissens und nur ein Verfahren bezüglich des prozeduralen Wissens für die Lösung der Aufgabe benötigt werden. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung wird am häufigsten herangezogen, wobei alle seine Facetten berücksichtigt werden. Bezüglich der Konzepte werden Betrag, Abschätzung und die Exponential- als auch Sinusfunktion häufig verwendet, dabei oftmals im direkten Zusammenhang oder im Wechselspiel. Die Konzepte Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden nur in einem Prozess aktiviert bzw. genutzt. In Bezug

52 In den Lösungsversuchen werden bei dieser Aufgabe das Verfahren Vollständige Induktion (David) und Produktregel (Nick) genutzt.

auf das prozedurale Wissen wird lediglich die Kettenregel[53] hinsichtlich der Facette *Implizite Nutzung* aktiviert.

	Mathematischer Inhalt	IN	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Funktion	0	0	0	0	0
	Konzept: Exponentialfunktion	0	1	7	1	0
	Konzept: Logarithmusfunktion	0	0	4	3	0
Prozedurales Wissen	Verfahren: Regel von L´Hospital	4	0	5	0	0
	Verfahren: Grenzwert von Funktionen berechnen	9	2	7	0	3
	Verfahren: Kettenregel	3	1	1	0	0
	Verfahren: Potenzregel	4	0	0	0	0

Tabelle 26: Heat-Map zur Aufgabe „L´Hospital“ (EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

In den vier Problembearbeitungsprozessen für die Aufgabe „L´Hospital“ (Tabelle 26) wird insgesamt 55-mal (16-mal konzeptuell, 39-mal prozedural) ein spezifisches Wissenselement genutzt bzw. aktiviert. Dabei fällt auf, dass für die Aufgabe sowohl auf konzeptuelles als auch prozedurales Wissen zurückgegriffen wird. Das prozedurale Wissen überwiegt dabei, wobei das Verfahren der Grenzwertbestimmung am häufigsten aktiviert bzw. genutzt wurde. Insgesamt sticht die *Implizite Nutzung* besonders im prozeduralen Wissen hervor. Das konzeptuelle Wissen wird bezüglich der Exponential- und Logarithmusfunktion verwendet. Dabei zeigt sich, dass vor allem die Facetten *Konkretisierung & Abgrenzung* häufig angesteuert wird. Betrachtet man die gesamte Aufgabe, scheinen vor allem *Implizite Nutzung* sowie *Konkretisierung & Abgrenzung* im Vordergrund zu stehen.

Die Darstellung der Häufigkeiten bietet eine gute Möglichkeit, einen Überblick hinsichtlich der Wissensnutzung von Studierenden während der Problembearbeitungsprozesse zu erhalten. Allerdings geht damit ein Verlust an

53 Bezüglich des prozeduralen Wissens nutzt David in seinem Problembearbeitungsprozess die vollständige Induktion und Nick die Produktregel. Diese werden in dieser Überblicksdarstellung unter Sonstige Verfahren zusammengefasst.

Detailinformationen einher. Einige Merkmale können nur bei Betrachtung einzelner Prozesse herausgearbeitet werden. Aus diesem Grund werden sich die weiteren Ausführungen detaillierter mit der Wissensnutzung einzelner Prozesse widmen.

6.2.4 Wissensfokus der Problembearbeitungsprozesse

Als nächstes wird der Blick auf den *Fokus* der einzelnen Prozesse gerichtet. Dabei wird untersucht, welche Wissensarten und Wissensfacetten die Studierenden in ihren Prozessen besonders häufig ansteuern. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(W4) *Auf welche Wissenselemente setzen Studierende einen Fokus während der Prozesse?*

Lerngruppe	Aufgabe	Wissensart	Wissensfacetten
Alex und Thomas	Differenzierbarkeit prüfen	Prozedural	IN, K&A
	Mittelwertsatz	Konzeptuell	IN, B&V
	L´Hospital	Prozedural	IN, K&A
Lea, Lisa, Sarah und Paula	Differenzierbarkeit prüfen	Prozedural	IN, K&A
	Mittelwertsatz	Konzeptuell	IN, B&V
	L´Hospital	Prozedural	IN, K&A
David	Differenzierbarkeit prüfen	Konzeptuell	K&A, EF, IN
	Mittelwertsatz	Konzeptuell	EF, K&A, B&V
	L´Hospital	Prozedural	K&A, IN
Nick	Differenzierbarkeit prüfen	Prozedural	IN
	Mittelwertsatz	Konzeptuell	K&A, EF, B&V
	L´Hospital	Prozedural	IN, K&A
Lukas	Differenzierbarkeit prüfen	Prozedural	IN, K&A

Tabelle 27: Wissensfokus der einzelnen Problembearbeitungsprozesse

Tabelle 27 stellt den *Fokus* des genutzten bzw. aktivierten Wissens der einzelnen Prozesse dar. Ein Prozess hat den *Fokus* prozedural, wenn mehr Wissenselemente bezüglich des prozeduralen Wissens genutzt bzw. aktiviert werden (oder umgekehrt für konzeptuelles Wissen). Hinsichtlich der Wissensfacetten ist der *Fokus* auf die zwei am häufigsten angesteuerten Wissenselemente gerichtet. Die erstgenannte Wissensfacette wird am häufigsten und die zweitgenannte Wissensfacette am zweithäufigsten angesteuert. Einige Prozesse haben mehr als zwei Wissensfacetten als *Fokus*. Dies liegt daran, dass zwei Facetten gleich häufig angesteuert werden. Im Prozess von Nick zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ konzentriert sich Nick hauptsächlich auf die *Implizite Nutzung*, während drei weitere Facetten mit gleicher Häufigkeit als zweithäufigste angesteuert werden. Da diese Facetten allerdings nur jeweils 1-mal genutzt werden, kann in diesem Prozess wenig mit einem echten *Fokus* argumentiert werden. Daher ist für diesen Prozess lediglich die *Implizite Nutzung* als Fokus festgelegt worden.

Prozess mit prozeduralem Fokus

Es ist auffällig, dass die prozeduralen Problembearbeitungsprozesse bezüglich der Wissensfacetten fast alle einen gleichen Fokus setzen. Prozedurale Prozesse befinden sich vor allem im Bereich der *Impliziten Nutzung* sowie *Konkretisierung & Abgrenzung*. Als Beispiel wird auf die relevanten Stellen des Prozesses von Alex und Thomas zur Aufgabe „L´Hospital“ eingegangen (Tabelle 28).

	Mathematischer Inhalt	IN	EF	K&A	B&V	KF
Konz. Wissen	Konzept: Funktion	0	0	0	0	0
	Konzept: Exponentialfunktion	0	0	1	0	0
	Konzept: Logarithmusfunktion	0	0	0	1	0
Prozedurales Wissen	Verfahren: Regel von L´Hospital	1	0	1	0	0
	Verfahren: Grenzwert von Fkt. berechnen	2	0	1	0	0
	Verfahren: Kettenregel	1	0	1	0	0
	Verfahren: Potenzregel	1	0	0	0	0

Tabelle 28: Prozess mit prozeduralem Fokus von Alex und Thomas (EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

In dem Prozess von Alex und Thomas zeigt sich, dass fast ausschließlich *Implizite Nutzung* sowie *Konkretisierung & Abgrenzung* genutzt bzw. aktiviert wurde. Lediglich 1-mal haben sie auf die Facette *Bedeutung & Vernetzung* zurückgegriffen, da sie sich zum Ende des Prozesses den Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion visualisiert haben. Der Prozess von Alex und Thomas beschreibt bezüglich des *Fokus* ein nahezu perfektes Beispiel für die Verallgemeinerung eines prozeduralen Prozesses.

In dem restlichen Prozess haben sie sich entweder Beispiele von Verfahren angeschaut (Regel von L´Hospital und Kettenregel), sich ein Beispiel selbst erstellt (Grenzwert berechnen), sowie diese Verfahren ebenfalls angewendet (zuzüglich der Potenzregel). Das Beispiel zur Kettenregel wurde speziell bezüglich der Exponentialfunktion ausgewählt, wodurch ebenfalls die *Konkretisierung & Abgrenzung* im konzeptuellen Wissen angesteuert wurde.

Prozess mit konzeptuellem Fokus

Für die konzeptuellen Prozesse können zwei verschiedene *Fokusse* identifiziert werden. Die erste Art von konzeptuellen Prozessen befindet sich vor allem in der *Impliziten Nutzung* sowie *Bedeutung & Vernetzung*. Als Beispiel wird der Prozess von Lea, Lisa, Sarah und Paula zur Aufgabe „Mittelwertsatz" herangezogen (Tabelle 29).

	Mathematischer Inhalt	IN	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Stetigkeit einer Funktion	1	0	0	0	0
	Konzept: Differenzierbarkeit	1	0	0	0	0
	Konzept: Funktion	0	0	0	0	0
	Konzept: Exponentialfunktion	0	0	0	4	0
	Konzept: Sinusfunktion	0	0	0	5	0
	Konzept: Abschätzung	2	0	0	0	0
	Konzept: Betrag	3	0	0	0	0
	Zusammenhang: MWS	2	0	1	1	1
PW	Verfahren: Kettenregel	2	0	0	0	0

Tabelle 29: Prozess mit konzeptuellem Fokus von Lea, Lisa, Sarah und Paula (PW = Prozedurales Wissen; EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

Lea, Lisa, Sarah und Paula nutzen bzw. aktivieren in ihrem Prozess fast ausschließlich die Wissensfacetten *Implizite Nutzung* und *Bedeutung & Vernetzung*. Lediglich bezüglich des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung werden die beiden Facetten *Konkretisierung & Abgrenzung* und *Konventionelle*

Festlegung genutzt[54]. Dabei wurde zum einen auf die Aufgabe des Tutoriums zurückgegriffen und zum anderen über die Rolle von x_0 in der Gleichung des Mittelwertsatzes diskutiert.
In dem restlichen Prozess diskutiert die Lerngruppe über den Anwendungskontext (Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Mittelwertsatz der Differentialrechnung) und wendet Konzepte (Abschätzung, Betrag) sowie Verfahren an (Kettenregel). Hinsichtlich der *Bedeutung & Vernetzung* beschäftigt sich die Lerngruppe vor allem mit der Exponential- als auch Sinusfunktion. Dabei werden die Graphen verschiedener Exponential- und Sinusfunktionen visualisiert sowie über die verschiedene Wertebereiche dieser diskutiert. Motiviert wird dies an einigen Stellen auch im Zusammenhang mit der Abschätzung (Was hat das einen Einfluss auf die Abschätzung?) und dem Betrag (Was verändert sich für diese Funktionen, wenn wir einen Betrag drum setzen?).
Die zweite Art von konzeptuellen Prozessen befindet sich vor allem in der *Konkretisierung & Abgrenzung* sowie *Expliziten Formulierung*. Als Beispiel wird der Prozess von David zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" herangezogen (Tabelle 30).

	Mathematischer Inhalt	IN	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Differenzierbarkeit	0	4	3	1	3
	Konzept: Funktion	0	0	0	1	0
	Konzept: Abschnittsweise definierte Funktion	1	0		0	0
Prozedurales Wissen	Verfahren: Differenzierbarkeit prüfen	2	0	1	0	0
	Verfahren: Grenzwert von Funktionen berechnen	1	0	2	0	0
	Verfahren: Sandwich-Kriterium	0	0	0	0	0

Tabelle 30: Prozess mit konzeptuellem Fokus von David (EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

54 Es mag leicht verwunderlich sein, dass die Facette *Explizite Formulierung* in dem Prozess nicht aktiviert bzw. genutzt wird. Dies liegt allerdings daran, dass sie lediglich mit dem mathematischen Ausdruck $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gearbeitet haben und sich nie explizit auf den Satz bezogen haben. Woher sie diesen Ausdruck entnommen haben, ist mittels Videomaterial und Transkript unklar geblieben. Eine Vermutung ist: Aus den Unterlagen des Tutoriums.

David nutzt bzw. aktiviert in seinem Prozess alle Wissensfacetten. Am häufigsten befindet er sich in der *Konkretisierung & Abgrenzung*, anschließend die *Explizite Formulierung* sowie die *Implizite Nutzung*. Hinsichtlich des konzeptuellen Wissens sticht die *Explizite Formulierung* für die Differenzierbarkeit besonders hervor. 4-mal bezieht sich David in seinem Prozess auf die ausformulierte Definition und anschließend auf spezielle Schreibweisen (*Konventionelle Festlegung*). Darüber hinaus versucht er mittels Beispiele (*Konkretisierung & Abgrenzung*) dem Begriff näher zu kommen. Bezüglich des prozeduralen Wissens kommt noch der weitere Fokus der *Impliziten Nutzung* hinzu, welcher durch die Anwendung der verschiedenen Verfahren entsteht. Außerdem greift er auf Beispiele von Verfahren zurück (*Konkretisierung & Abgrenzung*).

Zusammenfassung und Fazit zu Problembearbeitungsprozessen mit Wissensfokus

Bezüglich des *Fokus* lassen sich demnach drei verschiedene Arten identifizieren. Der prozedurale Prozess befindet sich vor allem in der *Impliziten Nutzung* und *Konkretisierung & Abgrenzung*. Dieser Fokus scheint für prozedurale Prozesse wenig verwunderlich zu sein. Es geht bei den Aufgaben darum, Verfahren anzuwenden (*Implizite Nutzung*). Darüber hinaus können Beispiele (*Konkretisierung & Abgrenzung*) dabei helfen, das Vorgehen zu erschließen. Besonders die vorherige Aufgabe aus dem Tutorium bietet eine gute Vorlage. Unabhängig davon greifen Studierende auch auf Beispiele zurück, wenn das Tutorium keine ähnliche Aufgabe liefert. Eine oft genutzte Ressource für das Suchen von Beispielen ist z. B. das Internet (Kempen & Liebendörfer, 2021; Kolbe & Wessel, 2022). Prozedurale Prozesse kommen dabei wenig mit *Expliziten Formulierungen* aus. Diese werden allerdings teilweise implizit in den Beispielen mitgeliefert, weshalb bspw. auf die Anleitung des Verfahrens nicht explizit zurückgegriffen wird. Außerdem wird wenig *Bedeutung & Vernetzung* angesteuert. Dies kann daran liegen, dass Verfahren ohne eine Bedeutungsbezogenheit auskommen (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 8). Ingenieur:innen sind möglicherweise nicht daran interessiert, warum ein Verfahren funktioniert, sondern wie es funktioniert. Dies kann allerdings nicht aus den vorliegenden Ergebnissen geschlussfolgert werden.
Für den konzeptuellen Prozess gibt es zwei Unterarten. Zum einen mit dem *Fokus* auf *Implizite Nutzung* und *Bedeutung & Vernetzung* und zum anderen mit dem *Fokus* auf *Konkretisierung & Abgrenzung* und *Explizite Formulierung*. Obwohl die beiden *Fokusse* unterschiedlich sind, haben die konzeptuellen Prozesse dennoch die Gemeinsamkeit, dass die Bedeutung der relevanten Konzepte und Zusammenhänge hinsichtlich der Aufgabe noch nicht verstanden wurden. Der Unterschied im Umgang wird in Bezug auf die Wissensfacetten deutlich. In der ersten Unterart zeigt sich dies durch die *Implizite Nutzung* der Konzepte und Zusammenhänge. Dabei wird versucht diese mit weiteren Konzepten mittels der Facette *Bedeutung & Vernetzung* zu verbinden. Dieses Vernetzen von

Wissenselementen spiegelt den Anspruch konzeptuellen Wissens wider (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 3f.). Die weiteren Wissensfacetten werden in der ersten Unterart kaum genutzt bzw. aktiviert. In der zweiten Unterart zeigt sich dies durch das häufige Bezugnehmen auf die *Explizite Formulierung* (vor allem für den Zusammenhang Mittelwertsatz). Darüber hinaus wird zusätzlich versucht, in irgendeiner Form Beispiele (*Konkretisierung & Abgrenzung*) zu finden, die weiterhelfen können. Die Facetten werden von den Studierenden nicht verknüpfend betrachtet, wodurch ebenfalls keine Verbindungen zwischen Wissensfacetten explizit werden. In der zweiten Unterart von konzeptuellen Prozessen liegt der Fokus zwar auf der *Expliziten Formulierung* und *Konkretisierung & Abgrenzung*, allerdings werden auch weitere Wissensfacetten genutzt. Dies ist ein Unterschied zu den anderen Arten, in denen fast ausschließlich Wissen aus dem spezifischen *Fokus* genutzt bzw. aktiviert wird.
Erath (2017, S. 209f.) hat in ihrer Dissertation Unterrichtsbeiträge von Schüler:innen einer kognitiven Qualität zugeordnet. Dabei hat sie den Wissenselementen einer gewissen kognitiven Qualität in Form von anspruchsvoll oder weniger anspruchsvoll zugewiesen. Kurz gefasst sind die Facetten *Explizite Formulierung* sowie *Bedeutung & Vernetzung* eher kognitiv anspruchsvoll und *Konventionelle Festlegung* eher weniger kognitiv anspruchsvoll. Für die Facette *Konkretisierung & Abgrenzung* wird für konzeptuelles (kognitiv anspruchsvoll) und prozedurales Wissen (weniger kognitiv anspruchsvoll) unterschieden. *Implizite Nutzung* wird bei der Operationalisierung ausgelassen, da Erath diese nicht als Wissensfacette aufgenommen hat. Wird die Operationalisierung von Erath hinsichtlich der kognitiven Qualität übernommen, zeigt sich für den *Fokus* der Prozesse dieser Arbeit, dass die konzeptuellen Prozesse beider Unterarten kognitiv anspruchsvoll, während sechs von acht der prozeduralen Prozesse eher weniger kognitiv anspruchsvoll sind. Die beiden restlichen prozeduralen Prozesse können als kognitiv anspruchsvoll eingestuft werden, da ein Verfahren verstanden wird, wenn verschiedene Ebenen (hier: Facetten) angesteuert werden.
Aus Tabelle 27 ist ebenfalls zu erkennen, dass die prozeduralen Prozesse ausschließlich in den Aufgaben „Differenzierbarkeit prüfen“ und „L´Hospital“ auftreten. Die konzeptuellen Prozesse kommen in der Aufgabe „Mittelwertsatz“ vor. Der einzige Prozess, welcher nicht dieser Zuteilung entspricht, ist der Prozess von David zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ (weiter oben als Beispiel beschrieben). Der Prozess von David ist ein konzeptueller, weil er zunächst versucht, den Begriff Differenzierbarkeit zu verstehen. Dabei greift er auf viele verschiedene Wissenselemente bezüglich des Begriffs Differenzierbarkeit zurück. Nachdem David den „Verstehens-Teil“ abgeschlossen hat, ähnelt sein Prozess wieder dem typischen prozeduralen (mit einem Fokus auf *Implizite Nutzung* und *Konkretisierung & Abgrenzung*).
Insgesamt lässt sich daraus vermuten, dass der *Fokus* der Wissensnutzung mit einer spezifischen Aufgabe zusammenhängt. Werden die Anforderungen

herangezogen (vgl. Kapitel 5.3), bestätigt sich, dass in der Aufgabe „L´Hospital" vor allem prozedurales Wissen und in der Aufgabe „Mittelwertsatz" vor allem konzeptuelles Wissen gefordert wird. Dies deckt sich mit dem Fokus der Wissensnutzung. Lediglich für die Aufgabe Differenzierbarkeit sind die Anforderungen der Aufgabe ausgeglichen, während der *Fokus* der Wissensnutzung prozedural ist. Als Anmerkung soll erwähnt werden, dass für die Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" sowohl das Konzept Funktion als auch das Konzept abschnittsweise definierte Funktion aufgenommen wurden. Fasst man diese beiden Konzepte zu einem zusammen, würden die Anforderungen dieser Aufgabe eher auf dem prozeduralen Wissen liegen.

6.2.5 Auffälligkeiten im Prozess

Einige Gemeinsamkeiten und Unterschiede bezüglich der verschiedenen Problembearbeitungsprozesse konnten bereits durch die Häufigkeiten (Kapitel 6.2.3) und dem *Fokus* (Kapitel 6.2.4) dargestellt werden. Diese Analysen haben sich auf den gesamten Prozess bezogen. Im Folgenden werden einzelne Abschnitte der Prozesse näher beleuchtet, da in bestimmten Bereichen zwei auffällige Merkmale zu beobachten sind.

Die Reihenfolge K&A → IN

Es zeichnet sich eine Gemeinsamkeit ab, die in fast jedem Prozess auftritt. Die Gemeinsamkeit besteht darin, dass im direkten Anschluss der Wissensfacette *Konkretisierung & Abgrenzung* in den meisten Fällen die *Implizite Nutzung* folgt. Diese Reihenfolge lässt sich in zwölf von 13 Prozessen mindestens 1-mal wiederfinden. Der Wechsel (*K&A → IN*) wird anhand von relevanten Beispielen des Prozesses von Alex und Thomas zur Aufgabe Differenzierbarkeit dargestellt. Der Prozess von Alex und Thomas zur Aufgabe Differenzierbarkeit wurde bereits in Kapitel 6.1.1 ausführlich präsentiert.
Alex und Thomas aktivieren bereits früh in ihrem Prozess die Facette *Konkretisierung & Abgrenzung* (Turn 2), in der sie sich ihre Aufzeichnungen aus dem Tutorium anschauen. Dabei wollen sie ermitteln, wie die Aufgabe aus dem Tutorium gelöst wurde, da sie eine ähnliche Vorgehensweise für die eigentliche Aufgabe vermuten. Sie nutzen demnach ein Beispiel, um das Vorgehen (Differenzierbarkeit prüfen) übertragen zu können. Genau dies wird im Anschluss auch umgesetzt, sie versuchen das gleiche Vorgehen auf ihre eigentliche Aufgabe anzuwenden (*Implizite Nutzung*, Turn 3). Nach kurzer Unterbrechung im Bereich der *Konventionellen Festlegung* findet sich ein weiteres Mal das gleiche Muster (*K&A → IN*) in dem Prozess wieder. Alex und Thomas schauen sich erneut die Mitschriften aus dem Tutorium an (Turn 5) und versuchen dieses Verfahren auf die eigene Aufgabe anzuwenden (Turn 6).

Da Alex und Thomas die Aufgabe in ihrem ersten Versuch nicht lösen konnten, setzten sie sich zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal mit der Aufgabe auseinander. Dennoch kann erneut die gleiche Reihenfolge der Wissensfacetten *Konkretisierung & Abgrenzung* → *Implizite Nutzung* (Turn 14 zu Turn 15; Turn 18 zu Turn 19) bezüglich des Verfahrens Differenzierbarkeit prüfen identifiziert werden.

An einigen Stellen findet der Übergang von *Konkretisierung & Abgrenzung* zur *Impliziten Nutzung* zwischen unterschiedlichen mathematischen Inhalten statt. Ein Beispiel dafür kann in dem Prozess von Lea, Lisa, Sarah und Paula zur Aufgabe „Mittelwertsatz" gefunden werden. Zunächst wollen sie auf ein Beispiel für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung zurückgreifen (Turn 13). Anschließend werden diese Informationen genutzt, um dies mit der Abschätzung zu verbinden (Turn 14), die in der Aufgabe zu beweisen ist.

Der Übergang (*K&A* → *IN*) beschreibt ein typisches Muster in den Problembearbeitungsprozessen. Besonders für bestimmte Vorgehensweisen scheint dies ein sinnvolles Muster zu sein, da Beispiele als Vorlage für eigenes Verhalten genutzt werden können. Dieses Verhalten ähnelt stark den Überlegungen des Lernens am Modell (Bandura, 1977). Dabei lernen Menschen genau dann, wenn sie Handlungen anderer beobachten, um es in eigenes Handeln umzusetzen. Durch die Ausarbeitungen des Tutoriums liegt ein Modell vor, aus dem Studierende kopieren können.

Verknüpfung von Wissenselemente

Eine weitere Auffälligkeit zeichnet sich durch die zeitgleiche[55] Verwendung (und somit gleichzeitig Verknüpfung) von Wissensfacetten eines unterschiedlichen mathematischen Inhalts ab. Diese können vor allem in den Prozessen zum Mittelwertsatz identifiziert werden.

Die Verknüpfung von verschiedenen Wissensfacetten bezieht sich auf die *Implizite Nutzung* mit der *Bedeutung & Vernetzung*. Insbesondere betrifft dies das konzeptuelle Wissen. Sowohl das Konzept der Abschätzung als auch der Betrag wird mit den speziellen Funktionen (Exponential- und Sinusfunktion) bei der Aufgabe „Mittelwertsatz" verknüpft. Die Studierenden möchten eine Abschätzung finden, allerdings müssen sie dies mit den gegebenen Funktionen verbinden.

Paula: „Aber wir müssen einfach nur beweisen, dass das Maxima Eins gilt."

...

Sarah: „Leute, Sinus wird doch eh nie größer als Eins. Deswegen ist es ja egal.

…

55 „Wenn wir das mit dem Kosinus abschätzen …". In diesem Beispiel wird zwar zuerst der Kosinus erwähnt, allerdings im Zusammenhang mit der Abschätzung. In diesem Fall wird von zeitgleich (gleicher Turn in der Kodierung) gesprochen.

Sarah: „Ja, weil das wird nie größer als Eins [zeigt auf $sin(e^{-a})$] und das hier wird nie größer als Eins [zeigt auf e^{-a}]. Dann wird das insgesamt nie größer als Eins.“

Dabei diskutieren sie sowohl über die Wertebereiche der allgemeinen als auch der (in der Aufgabe vorgegebenen) speziellen Exponential- und Sinusfunktion. Außerdem visualisieren sie diese Funktionen und legen darüber hinaus beispielhaft Werte fest, um Veränderungen wahrzunehmen und festzustellen.
Im Gegensatz dazu finden Verknüpfungen von Facetten bezüglich des prozeduralen Wissens fast gar nicht statt. David verknüpft auf prozeduraler Ebene bspw. das Verfahren zum Grenzwert berechnen mit einigen speziellen Beispiel-Funktionen. Dabei versucht er den Grenzwert für bestimmte Werte zu berechnen, um sich verständlicher zu machen, was der echte Grenzwert[56] sein könnte.

David: „So, ich setze mal für x 199 ein und für a einmal 200. Jetzt haben wir 200^{199}, geteilt durch 199^{200}. […] Zu hohe Zahlen. Alles ändern auf 20 und 19 [ändert Zahlen im Taschenrechner]. Kommt da raus -0.324, okay. […] Und wenn ich daraus jetzt $19{,}9$ mache, [ändert Zahlen im Taschenrechner], dann $-0{,}63$ [wird notiert]. Wenn ich Komma Neun Neun mache, … $0{,}66$. […] wahrscheinlich $-0{,}667$ … läuft das Ganze gegen.“

Insgesamt spiegelt dies die Ausführungen von Hiebert und Lefevre (1986, S. 3f.) wider. Konzeptuelles Wissen zeichnet sich durch Verbindungen zwischen Informationen aus. Diese Verbindungen zwischen Wissenselementen können vor allem in den (konzeptuellen) Prozessen zur Aufgabe „Mittelwertsatz“ identifiziert werden. Hingegen können in den anderen beiden Aufgaben fast keine solche Verbindungen zwischen Wissenselementen gefunden werden. Im (prozeduralen) Prozess von David (siehe Transkriptausschnitt) bleibt die Verknüpfung zwischen dem Verfahren und den speziellen Funktionen auf Ebene der *Konkretisierung & Abgrenzung*. Obwohl an dieser Verbindung zwischen der *Impliziten Nutzung* und *Konkretisierung & Abgrenzung* geschaffen werden, bleibt diese Verknüpfung auf einer weniger anspruchsvollen Qualität (Erath, 2017, S. 209f.). Dies deutet darauf hin, dass konzeptuelle Prozesse eher bedeutungsbezogen sind und sich durch eine stärkere Verknüpfung von Wissenselementen auszeichnen.

6.2.6 Schwierigkeiten im Prozess

Alex: „Hm, ja so richtig verstanden habe ich es auch nicht …“

Die Aussage hat Alex in dem Problembearbeitungsprozess zur Aufgabe „Mittelwertsatz“ getätigt. Diese Art von Aussage ist jedoch auch in weiteren Prozessen (explizit und implizit) aufgetreten. Herausforderungen mit mathematischen Inhalten werden in vielen Studien berichtet (Kapitel 4.2 und 4.4), jedoch fanden kaum Untersuchungen von authentischen Lernsituationen statt,

---

56 David versucht den Grenzwert aus der Aufgabe „L´Hospital“ zu bestimmen: $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{a^x - x^a}$

insbesondere zum Mittelwertsatz und zur Regel von L´Hospital. Daher werden im Folgenden die Schwierigkeiten (Hindernisse, Hürden; Kapitel 5.4.2) bezüglich der jeweiligen Aufgaben dargestellt, die in den Prozessen aufgetreten sind. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(W5) *Welche Schwierigkeiten können während der Problembearbeitungsprozesse identifiziert werden?*

Schwierigkeiten in den Prozessen zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“

Viele Schwierigkeiten sind bezüglich der einzelnen Prozesse individuell. Allerdings lässt sich eine Gemeinsamkeit finden, die in vier von fünf Prozessen als Schwierigkeit identifiziert werden kann. Es handelt sich dabei um die Kenntnis des Verfahrens Differenzierbarkeit prüfen.

Paula: „Warte. Und dann müssen wir doch den Grenzwert ausrechnen. … Weil das hat er doch hier auch gemacht.“

Zu dem Zeitpunkt der Aussage haben Lea, Lisa, Sarah und Paula die Aufgabe bereits vollständig (und korrekt) gelöst. Paula zeigt mit der Aussage allerdings, dass sie das Verfahren noch nicht tiefgehend verstanden hat. Die restliche Lerngruppe klärt in der anschließenden Diskussion auf, dass keine weiteren Schritte mehr unternommen werden müssen. Bezüglich der Wissensfacetten lässt sich hier eine Schwierigkeit in der *Expliziten Formulierung* zuordnen, da die Anleitung der Schritte nicht klar ist. Darüber hinaus verweist Paula zusätzlich auf eine Beispielbearbeitung einer ähnlichen Aufgabe. Dies bedeutet, dass die Schwierigkeit ebenfalls der Wissensfacette *Konkretisierung & Abgrenzung* zugeordnet werden kann, da sie das Verfahren nicht aus dem Beispiel extrahieren kann. Es lässt sich weiter diskutieren, ob die Schwierigkeiten ebenfalls der *Bedeutung & Vernetzung* zugeordnet werden kann. Vollrath und Roth (2011, S. 50) betonen, dass das Wissen, warum ein Verfahren funktioniert zum Verständnis dazugehört. Für die Aussage scheinen allerdings die anderen beiden genannten Wissensfacetten schlüssiger.
Ähnliche Schwierigkeiten bei der Kenntnis des Verfahrens (*Explizite Formulierung*) zeigen sich in den Bearbeitungen von Nick und Lukas. In beiden Bearbeitungen verwenden sie zwar das korrekte Verfahren, wollen im Anschluss aber noch $f'(0)$ bestimmen. Bei der Anwendung kommt es allerdings auch zu Schwierigkeiten und das Verfahren wird fehlerhaft durchgeführt. Dies zeigt für beide, dass sie die Anleitung des Verfahrens noch nicht verstanden haben und darüber hinaus, was mit dem Verfahren überhaupt erreicht wird. Sie planen beide, dass die Funktion f mit den Ableitungsregeln abzuleiten und anschließend an der Stelle 0 auszuwerten. Beide stoßen dabei auf Schwierigkeiten bei der Anwendung der Ableitungsregeln.

Thomas begegnet dem Hindernis, dass noch nicht verstanden wurde, was mit dem Verfahren Differenzierbarkeit prüfen erreicht wird. Er argumentiert auch mithilfe der Ableitungsregeln.

Alex: „Ich tippe aber irgendwie, dass die Funktion äh, also dass die, dass $f'(0) = 0$ ist.“
Thomas: „Ja muss es ja. […] Weil das die Bedingung sagt [zeigt auf die Funktion].
…
Thomas: „Die obere Funktion ist ja gesamt f und für die, wo sie nicht definiert ist für x_0, ist 0 als Ersatzwert. […] Und wenn du da die Ableitung für $f'(0)$ machst, ist das 0, weil Ableitung von 0 ist 0.“

In dem Prozess von Alex und Thomas stockt die Bearbeitung ebenfalls aufgrund des Verfahrens, allerdings liegt die Schwierigkeit nicht in der Kenntnis des Verfahrens, sondern bei der Ausführung (*Implizite Nutzung*). Dabei ist ihnen bewusst, was sie tun sollen, allerdings nicht wie. Das Einsetzen der Funktion f in die Definition der Differenzierbarkeit stellt sich für beide als Schwierigkeit heraus, da die Funktion abschnittsweise definiert ist. Darüber hinaus stolpern sie darüber, dass durch das Einsetzen der Werte im Nenner eine Null stehen würde.

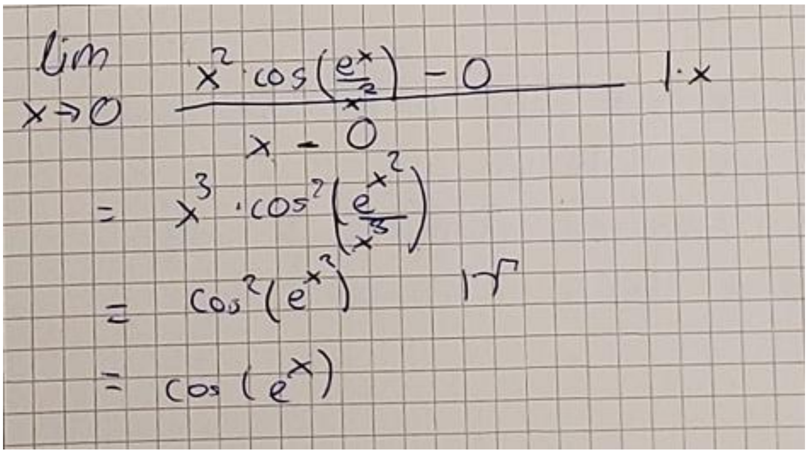


Abbildung 36: Nicks Umformungen beim Differentialquotienten

Des Weiteren zeigen sich bei der Anwendung des Verfahrens allerdings auch Schwierigkeiten bei vermeintlich leichten Umformungen (bei Nick siehe in Abbildung 36). Allerdings kann daraus abgeleitet werden, dass Nick nicht weiß, wie der Grenzwert berechnet wird (*Explizite Formulierung*).

David zeigt in seinem Problembearbeitungsprozess zusätzlich Schwierigkeiten auf der Begriffsebene bezüglich der Differenzierbarkeit.

David: „… ich soll beweisen oder ähm ja oder zeigen, dass die Funktion an der Stelle 0 differenzierbar ist. Da ist die Frage, was heißt denn, oh, überhaupt differenzierbar? Das heißt, ich schaue in die Vorlesung."

Daraus kann interpretiert werden, dass David mit dem Begriff Differenzierbarkeit nicht vertraut ist. In seinem Prozess verbringt er viel Zeit damit, den Begriff bzw. das Konzept zu verstehen und steuert bis auf *Implizite Nutzung* jede Wissensfacette (mindestens 1-mal) an, bevor er damit beginnt, eine Lösung für die Aufgabe zu produzieren.

Schwierigkeiten in den Prozessen zur Aufgabe „Mittelwertsatz"

In den Problembearbeitungsprozessen zur Aufgabe „Mittelwertsatz" zeigt sich in allen Prozessen, dass die Studierenden mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung Schwierigkeiten haben. An vielen Stellen der Bearbeitung wird sich auf den ausformulierten Satz bezogen (*Explizite Formulierung*) und versucht Beispiele (*Konkretisierung & Abgrenzung*) sowie anschauliche Begründungen bzw. Visualisierungen (*Bedeutung & Vernetzung*) heranzuziehen. Durch das Nutzen der verschiedenen Facetten zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung scheint sich im Verlaufe des Prozesses das Verständnis zu verbessern, wobei die Visualisierung am meisten weiterhilft. Nick fasst in dieser Aussage eine Visualisierung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung in eigenen Worten zusammen.

Nick[57]: „… zwischen a und b mindestens eine Stelle gibt, wo die Steigung der Kosinusfunktion, ... also wo die Steigung der Funktion identisch ist … zur Steigung der Geraden."

Allerdings bleibt die Schwierigkeit hinsichtlich des Anwendungskontextes (*Implizite Nutzung*). Die Studierenden wissen nicht, wie sie den Mittelwertsatz auf die Ungleichung anwenden sollen.

David[58]: „Wir sollen das beweisen über, aber über den Mittelwertsatz. Aber wie beweise ich das mit dem Mittelwertsatz? … Jetzt habe ich so eine Formel stehen. … Aber was bringt mir das?"

Die Lerngruppe mit Lea, Lisa, Sarah und Paula schaffen es, diesen Schritt zu überwinden, stoßen aber während der Anwendung auf zwei weitere Schwierigkeiten. Die erste Schwierigkeit ist die Abschätzung (*Implizite Nutzung*)

---

57 Nick fasst in dieser Aussage eine Visualisierung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung in eigene Worte zusammen.

58 David tätigt diese Aussage, nachdem er sich bereits 30 Minuten mit der Aufgabe und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung auseinandergesetzt hat.

bezüglich der Sekante und der Steigung der Ableitung in einem Punkt. Es soll gezeigt werden, dass die Ableitung $e^{-a} \cdot sin(e^{-a}) \leq 1$ ist. Für die Lerngruppe stellt dies eine Schwierigkeit dar, da sie nicht wissen, welche Werte die beiden Funktionen im Einzelnen, annehmen können. Dies wird zwar für beide Funktionen im Folgenden mehrfach korrekt herausgearbeitet, allerdings ist das Ergebnis der Verkettung beider Funktionen ein Problem:

Lisa: „Ja. Aber wie kommt man dann /. Dann muss man das, … multipliziert man das ja nochmal."
Paula: „Ja."
Lisa: „Warum ist es dann trotzdem ≤ 1?"

Die zweite Schwierigkeit wird durch die Betragsstriche (*Implizite Nutzung*) ausgelöst, die zunächst ignoriert werden. Die Lerngruppe überlegt, inwiefern sie den Betrag noch in die (Un-)Gleichung unterbringen und ob ihnen das möglicherweise hilft zu zeigen, dass die Ableitung der Funktion ≤ 1 ist.

Lisa: „Oder wir machen weiter und kommen am Ende dabei raus, dass das vielleicht auch … Negatives sein kann und dann sagen wir dann, weil da oben Betrag ist."
…
Lea: „Oder für, äh wir machen die Betragsstriche dadurch, dass 0 immer, äh y und x immer größer als 0 sein müssen."

Beide Schwierigkeiten lösen sich erst dann auf, als die Lerngruppe erkennt, dass die Ungleichung $e^{-a} \cdot sin(e^{-a}) \leq 1$ auch noch dann gilt, wenn die Sinusfunktion unter 0 fällt[59]. Dabei würde der Betrag sogar noch helfen, da der Sinus nun nur noch Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann.
Alex und Thomas stoßen in ihrer Bearbeitung ebenfalls auf Schwierigkeiten mit dem Betrag und der Abschätzung. Obwohl Aussagen[60] von beiden getätigt werden, dass sie nicht wissen, wie sie weiter machen sollen, können sie die Schwierigkeiten zügig überwinden. Insgesamt zeigt sich, dass in beiden Lerngruppen die Verknüpfung zweier mathematischer Inhalte (Abschätzung und Betrag mit den beiden speziellen Exponential- und Sinusfunktion) eine Schwierigkeit darstellt.
Auch wenn die Lerngruppen von Lisa, Lea, Paula und Sarah sowie Alex und Thomas die Schwierigkeiten in ihrem Prozess überwinden und zu einer akzeptablen Lösung gelangen, bleibt trotzdem ersichtlich, dass für alle Studierenden die Beweismethode eine Schwierigkeit ist.

David: „Wie beweise ich das jetzt? […] Was waren denn nochmal dies Beweismethoden?"

---

59 Ein Transkriptausschnitt der relevanten Stelle wurde bereits in Kapitel 6.2.5 gezeigt.
60 Alex: „Und jetzt sind wir gerade an einem Punkt, wo wir das abschätzen müssen. Aber ich weiß nicht, wie wir das abschätzen sollen."

Die Beweismethode an sich lässt sich keinem bestimmten Inhalt zuordnen. Es lässt sich jedoch vermuten, dass ein besseres Verständnis über den Mittelwertsatz zu weniger Schwierigkeiten führen könnte. Daraus wird deutlicher, dass es zunächst darum geht, den Term $|cos(e^{-x}) - cos(e^{-y})| \leq |x - y|$ in die Form des Mittelwertsatzes umzuformen (*Explizite Formulierung*) und diesen mit der Ableitung $f'(x_0)$ zu ersetzen, welche anschließend abgeschätzt werden soll. David kommt in seiner Bearbeitung zu einer nicht zielführenden Umformung (Abbildung 37), die durch ein solches Verständnis möglicherweise nicht entstanden wäre.

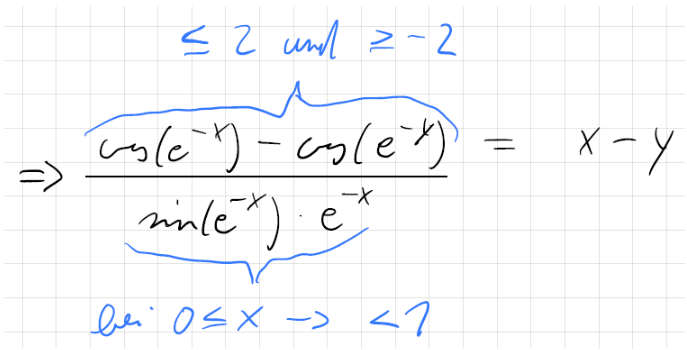


Abbildung 37: Davids Überlegungen zur Aufgabe „Mittelwertsatz“

Schwierigkeiten inden Prozessen zur Aufgabe „L´Hospital“

Eine gemeinsame Schwierigkeit, welche sich über alle Problembearbeitungsprozesse zeigt, bezieht sich auf die Bestimmung des Grenzwerts. Dies äußert sich vor allem bezüglich der *Impliziten Nutzung* als auch der *Expliziten Formulierung*.
In der Lerngruppe von Lea, Lisa, Sarah und Paula wird dies zu Beginn der Bearbeitung deutlich, da sie versuchen, bestimmte Werte für a einzusetzen.

Lea: „Ja, aber dafür müsst ihr was einsetzen. Setzt ihr jetzt 1 ein? Weil es ist ja eigentlich $a > 1$.“
Sarah: „Du weißt ja, dass […] $a > 1$ ist. Da musst du jetzt gucken, was dann da rauskommt, wenn $a > 1$ ist.
Lea: „Ach so. Also erstmal 1 einsetzen. Doch, das kann sein.“
Lisa: „Ne, > 1“
Sarah: „Ne, du setzt nicht 1 ein. Du nimmst einfach an …“
Lisa: „2 oder was? Ja, man könnte ja mal 2 einsetzen […].
Lea: „Könnte man machen, ja.“

Diese Vorgehensweise zeigt sich ebenfalls bei David. Er setzt allerdings nicht nur Werte für a ein, sondern zusätzlich für x. Er schaut sich demnach den Grenzwert für viele verschiedene Fälle an und versucht diesen so auszurechen. Für a einen bestimmten Wert (> 1) einzusetzen und ein Beispiel zu betrachten, kann zunächst hilfreich sein. Allerdings ist es nicht im Sinne des Grenzwerts, ebenfalls für x einen Wert einzusetzen und den Quotienten zu bestimmen. Die beschriebene Schwierigkeit lässt sich zur *Expliziten Formulierung* zuordnen, da deutlich wird, dass die Anleitung des Verfahrens nicht vollständig vorhanden ist.
Alex und Thomas stoßen ebenfalls auf Schwierigkeiten bei der Bestimmung des Grenzwerts, nachdem sie die Regel von L´Hospital angewandt haben (Abbildung 38). Sie kommen zu dem Ergebnis, dass der Nenner schneller als der Zähler wächst, wodurch der Grenzwert -1 sein muss. Diese Schwierigkeit zu einer Facette zuzuordnen ist dabei nicht offensichtlich. Zum einen unterläuft in der Anwendung des Verfahrens (*Implizite Nutzung*) ein Fehler. Es wird auch die Anleitung des Verfahrens (*Explizite Formulierung*) zur Bestimmung des Grenzwerts nicht beachtet, da für das „x nicht a eingesetzt" wird. Bei Alex und Thomas war die Anleitung allerdings zuvor bei der Anwendung der Regel von L´Hospital korrekt vorhanden. Dies liefert auch einen Hinweis, dass die Anleitung des Verfahrens noch nicht komplett verstanden wurde. Darüber hinaus zeigt sich, dass der Vergleich der beiden Funktionen nicht korrekt durchgeführt wurde. Im Kontext der Aufgabe ist sowohl $ax^{a-1} = a^a$ als auch $a^x = a^a$, wenn der Grenzwert $x \to a$ angewendet wird. Alex und Thomas kommen jedoch zu dem Entschluss, dass a^x schneller wächst als x^{a-1} und ignorieren damit den Faktor a im Zähler (*Implizite Nutzung*).

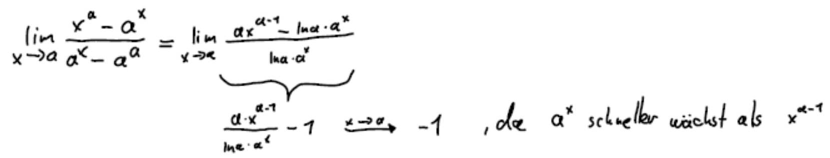


Abbildung 38: Alex´ Bestimmung des Grenzwerts

Nick erkennt in seiner Bearbeitung (Abbildung 39), dass die Aufgabe womöglich mit der Regel von L´Hospital bearbeitet werden soll. In seinen Berechnungen kommt er dennoch zu dem Schluss, dass die Voraussetzungen für die Anwendung der Regel von L´Hospital nicht gegeben sind. Die Grenzwerte der Zähler- und Nennerfunktion sind nicht beide gleich 0 oder ∞. Damit zeigt sich bei Nick ebenfalls eine Schwierigkeit in der Anwendung bezüglich der Bestimmung des Grenzwerts (*Implizite Nutzung*).

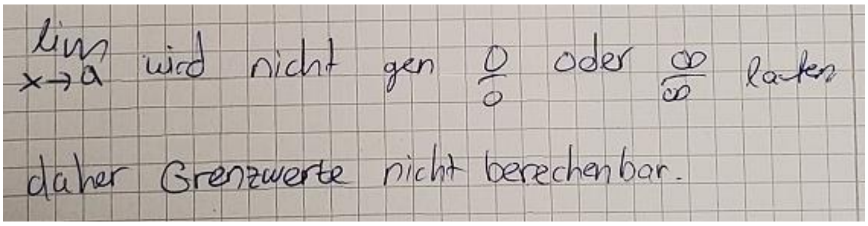


Abbildung 39: Nicks Lösung zur Aufgabe „L´Hospital“

Eine letzte kleinere Schwierigkeit liegt bei der Ableitung von a^x, wenn nach x abgeleitet werden soll. In keinem Prozess konnte diese Ableitung sofort bestimmt werden (*Explizite Formulierung*). Diese Schwierigkeit wurde allerdings zügig überwunden, indem die Studierenden im Internet oder alten Unterlagen nach der Ableitung und den dazugehörigen Umformungen recherchiert haben.

Fazit und Zusammenfassung zu Schwierigkeiten im Prozess

In den Aufgaben zeigen sich bei den Studierenden verschiedene Schwierigkeiten. Für die Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ ist vor allem das Verfahren zur Bestimmung der Differenzierbarkeit eine Schwierigkeit. Für die Aufgabe „Mittelwertsatz“ treten mehrere Schwierigkeiten auf. Zunächst ist es das Verständnis des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Darüber hinaus zeigen sich insbesondere in der Anwendung bei der Abschätzung der Ungleichung sowie der Anwendung des Betrags Schwierigkeiten. Letztlich ist die allgemeine Vorgehensweise hinsichtlich der Beweisführung eine Schwierigkeit. Für die Aufgabe „L´Hospital“ zeigen sich die Schwierigkeiten vor allem im Bereich der Bestimmung des Grenzwerts. Insgesamt treten in den beiden Aufgaben „Differenzierbarkeit prüfen“ und „L´Hospital“ Schwierigkeiten überwiegend auf prozeduraler Ebene auf, während sie bei der Aufgabe „Mittelwertsatz“ eher konzeptueller Natur sind.
Da jede Aufgabe unterschiedliche Anforderungen stellt, ist es nicht verwunderlich, dass sich die Schwierigkeiten der Aufgaben im Vergleich zueinander unterscheiden. Es fällt allerdings auf, dass die Bestimmung des Grenzwerts sowohl in der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ als auch „L´Hospital“ vorkommt. Bei der Überprüfung der Differenzierbarkeit ließ sich bei der Grenzwertbestimmung bezüglich der *Expliziten Formulierung* keine Schwierigkeit (außer bei Nick) feststellen, während die Grenzwertbestimmung in der Aufgabe „L´Hospital“ zu Schwierigkeiten in jedem Prozess führt. Woran könnte dies liegen? Eine mögliche Erklärung wäre, dass in der Aufgabe „L´Hospital“ eine weitere Variable (a) hinzukommt. Im Prozess von David wird besonders deutlich, dass die zusätzliche Variable zu Unsicherheiten führt und er

nicht weiß, wie er damit umgehen soll. Eine zusätzliche Variable ist möglicherweise eine Schwierigkeit, die Auswirkung auf das Verständnis der Anleitung des Verfahrens Grenzwert hat.
An dieser Stelle soll erwähnt werden, dass Schwierigkeiten nicht mit Fehlern gleichzusetzen sind. In einigen Prozessen sind Schwierigkeiten zu erkennen, die aber im Laufe des Prozesses aufgelöst werden. Dies lässt sich auch in der Lösungsqualität der einzelnen Abgaben feststellen. Obwohl in jedem Prozess (kleinere bzw. größere) Schwierigkeiten identifiziert werden konnten, gibt es einige Abgaben, die mit mindestens L3 eingestuft werden (vgl. Tabelle 16). Einige Schwierigkeiten bleiben allerdings auch bis zum Ende der Bearbeitung, wodurch erst dann ein Fehler entsteht.
Besonders in den Prozessen von Lea, Lisa, Sarah und Paula ist zu erkennen, dass einzelne Teilnehmerinnen der Lerngruppe eine Schwierigkeit haben, die im Folgenden durch eine andere Teilnehmerin beseitigt wird. Dies besteht meistens aus einer kurzen Frage-Antwort-Interaktion. Ähnlich ist es auch in den Prozessen von Alex und Thomas. Durch das Gespräch lassen sich die inhaltlichen Schwierigkeiten zügig besprechen und beseitigen. Dadurch werden im Verlauf der Prozesse einige Fehler vermieden, da sich die Studierenden untereinander helfen können. Falls die Lerngruppe aus nur einer Person besteht, lassen sich solche Schwierigkeiten nicht so zeiteffizient beseitigen.
Werden in den einzelnen Prozessen die Schwierigkeiten und der Fokus (Kapitel 6.2.4) verglichen, so lässt sich ein Zusammenhang vermuten. In Davids Prozess zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" konnten Schwierigkeiten bezüglich des Konzepts Differenzierbarkeit als auch im Bereich der Grenzwertbestimmung festgestellt werden. Dies ist genau der Bereich, den David bezüglich der Wissenselemente häufig aktiviert bzw. nutzt (siehe Tabelle 30). Diese Gemeinsamkeit zeigt sich jedoch nicht ausschließlich in Davids Prozess. Gleichzeitig ist anzumerken, dass in den Prozessen auch Schwierigkeiten bei den Wissensfacetten festgestellt wurden, die nur selten oder kaum angesteuert wurden. Demnach weist die Häufigkeit des Ansteuerns einer Wissensfacette mit Schwierigkeiten eher keinen Zusammenhang auf. Möglicherweise sind den Studierenden diejenigen Schwierigkeiten bewusst, bei denen häufig eine Wissensfacetten angesteuert wird, während Schwierigkeiten, bei denen keine Wissensfacette angesteuert wird, unbewusst sind.
Letztlich ist anzumerken, dass die Zuordnung der Schwierigkeiten zu den mathematischen Inhalten einfacher ist als die Zuordnung zu den Wissensfacetten. Es ist eindeutig zu identifizieren, wenn z. B. eine prozedurale Schwierigkeit in der Anwendung (*Implizite Nutzung*) und auch in der Anleitung des Verfahrens (*Explizite Formulierung*) unterläuft. Deutlich schwieriger ist dies bei den restlichen Facetten. Dies liegt möglicherweise auch daran, dass zum einen die formale Fachsprache (also *Explizite Formulierung*) bedeutend für die hochschulische Mathematik ist und zum anderen die Bearbeitungen in einem

Anwendungskontext (als *Implizite Nutzung*) stattfinden. Besonders Vorstellungen und Begründungen (*Bedeutung & Vernetzung*) sind oft nicht notwendig, um eine Aufgabe bearbeiten zu können. Möglicherweise werden Schwierigkeiten der restlichen Facetten in anderen Kontexten (wie z. B. Laborsituationen, in denen bestimmtes Verständnis abgefragt wird) eher ersichtlich.

6.2.7 Vergleich zwischen Wissensangebot und -nutzung

In den vorherigen Ausführungen wurde sowohl das Wissensangebot der Veranstaltung (vgl. Kapitel 6.2.1) als auch die Wissensnutzung der Studierenden zu unterschiedlichen Aspekten (vgl. Kapitel 6.2.2 bis 6.2.6) rekonstruiert. Der Vergleich zwischen Angebot und Nutzung bildet dabei den übergreifenden Rahmen. Dieses Kapitel bietet somit eine zusammenfassende Übersicht über das Wissensangebot und die Wissensnutzung. Detaillierte Beschreibungen sind in den jeweiligen Kapiteln zu finden. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(W6) *Welches Wissensangebot wird von der Veranstaltung angeboten und inwiefern wird dies von den Studierenden in ihren Bearbeitungen genutzt?*

Für eine geeignete Darstellung werden die Wissensmatrizen aus dem Kapitel 6.2.1 und Kapitel 6.2.3 kombiniert. Die Darstellung des Angebots liefert eine Übersicht, welche Wissenselemente durch die Veranstaltung angeboten (in grau hinterlegt) und nicht angeboten (in weiß hinterlegt) werden. Aufgrund der Nutzung von Studierenden wurde für das Angebot in dieser Darstellung das Konzept Funktion weiter aufgeteilt. Für einen Vergleich zwischen Angebot und Nutzung sollte auf der Seite der Nutzung ebenfalls festgestellt werden, ob ein spezifisches Wissenselement genutzt wurde. In der Darstellung werden die Wissenselemente mit einer Zahl bezüglich Häufigkeit der Nutzung versehen. Außerdem werden die vergleichenden Darstellungen aufgabenweise abgebildet.
Zunächst wurde das Wissensangebot bezüglich der *Impliziten Nutzung* nicht untersucht. Dies liegt daran, dass im Skript-Tutorium-Format eine Abgrenzung zwischen *Impliziter Nutzung* und *Konkretisierung & Abgrenzung* schwierig festzulegen ist. Für das Konzept Differenzierbarkeit kann ein Beispiel für Differenzierbarkeit in einem Punkt gleichzeitig als Anwendungskontext bzw. Anwendung aufgefasst werden. Gleiches gilt für Verfahren. Ein Beispiel für die Regel von L´Hospital ist gleichzeitig die Anwendung des Verfahrens. Für diese Wissensnutzung fällt die Trennung leichter, da auf Beispiele zurückgegriffen (*Konkretisierung & Abgrenzung*) werden kann und die eigene Anwendung bzw. der eigene Anwendungskontext (*Implizite Nutzung*) im Fokus steht.

	Mathematischer Inhalt	IN	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Differenzierbarkeit	3	3	6	3	4
	Konzept: Funktionen				3	
	Konzept: Abschnittsweise definierte Funktionen	2				
Prozedurales Wissen	Verfahren: Differenzierbarkeit prüfen	11		9	1	4
	Verfahren: Grenzwert von Funktionen berechnen	6	1	2		
	Verfahren: Sandwich-Kriterium					

Tabelle 31: Vergleich Angebot und Nutzung zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ (EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

	Mathematischer Inhalt	IN	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Stetigkeit einer Funktion	1				
	Konzept: Differenzierbarkeit	1				
	Konzept: Funktion				1	
	Konzept: Exponentialfunktion			2	6	
	Konzept: Sinusfunktion			2	6	
	Konzept: Abschätzung	4				
	Konzept: Betrag	4				
	Zusammenhang: Mittelwertsatz der Differentialrechnung	5	6	5	6	3
PW	Verfahren: Kettenregel	3				

Tabelle 32: Vergleich Angebot und Nutzung zur Aufgabe „Mittelwertsatz“ (PW = Prozedurales Wissen; EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

Hinsichtlich der Aufgabe "Differenzierbarkeit prüfen" wird das vielfältige Angebot für das gleichnamige Konzept und Verfahren von den Studierenden

umfassend genutzt. Die weiteren angebotenen Wissenselemente (obwohl angeboten) finden hingegen nur geringe Anwendung (Tabelle 31).
Hinsichtlich der Aufgabe "Mittelwertsatz" wird das vielfältige Angebot für den zugehörigen Zusammenhang von den Studierenden breit genutzt. Außerdem greifen Studierende im Bereich der Funktionen (Exponential- und Sinusfunktion) ebenfalls auf das Angebot zurück, während die restlichen angebotenen Wissenselemente gar nicht aufgegriffen werden (Tabelle 32).

	Mathematischer Inhalt	IN	EF	K&A	B&V	KF
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Funktion					
	Konzept: Exponentialfunktion		1	7	1	
	Konzept: Logarithmusfunktion			4	3	
Prozedurales Wissen	Verfahren: Regel von L´Hospital	4		5		
	Verfahren: Grenzwert von Funktionen berechnen	9	2	7		3
	Verfahren: Kettenregel	3	1	1		
	Verfahren: Potenzregel	4				

Tabelle 33: Vergleich Angebot und Nutzung zur Aufgabe „L´Hospital“ (EF = Explizite Formulierung; K&A = Konkretisierung & Abgrenzung; B&V = Bedeutung & Vernetzung; KF = Konventionelle Festlegungen)

Hinsichtlich der Aufgabe "L’Hospital" wird das begrenzte Angebot zur Regel von L’Hospital nur in geringem Maße genutzt (ausschließlich zur *Konkretisierung & Abgrenzung*). Dennoch wird das übrige theoretisch notwendige Wissen für die Bearbeitung der Aufgabe umfassend angewendet (Tabelle 33).
Abgesehen von der *Impliziten Nutzung* stellt die Veranstaltung ein vielfältiges Angebot der relevanten Inhalte zu Verfügung. Viele der angebotenen Wissenselemente werden von den Studierenden genutzt bzw. aktiviert. Im Vergleich zwischen Wissensangebot und Wissensnutzung fällt auf, dass Studierende zwei Wissenselemente nutzen, welche nicht in der Veranstaltung angeboten worden sind. Die *Explizite Formulierung* für das Verfahren zur Berechnung von Grenzwerten (von Funktionen) wird von der Veranstaltung nicht bereitgestellt, allerdings wird dies in zwei von drei Aufgabe genutzt bzw. aktiviert. Zuvor wurde in der Vorlesung bereits die Grenzwertbestimmung von Folgen thematisiert, wodurch es womöglich keine Spezifizierung für die Anleitung bezüglich Funktionen gegeben hat. Letztlich haben Studierende

allerdings nach einer Anleitung für die Grenzwertbestimmung von Funktionen gesucht und sind in anderen Materialien (Internet und ein weiteres Skript aus einem Vorkurs) fündig geworden. Die *Konventionelle Festlegung* für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung wird von der Veranstaltung nicht speziell thematisiert, allerdings haben die Studierenden in zwei Prozessen die Bezeichnungen des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung (und deren Bedeutung im Kontext ihrer Bearbeitung) diskutiert.
Wird die *Implizite Nutzung* ausgeschlossen, nutzen die Studierenden alle angebotenen mathematischen Inhalte bis auf das Konzept abschnittsweise definierte Funktion und das Verfahren Sandwich-Kriterium (beide in der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“)[61]. Insgesamt greifen die Studierenden auf 23 von 53 angebotenen Wissenselementen zurück[62].
Zuletzt soll angemerkt werden, dass sich das Wissensangebot der Veranstaltung durch weitere Analysen sicherlich detaillierter untersuchen ließe (z. B. Qualität, Umfang, etc.). Eine solche vertiefte Analyse würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit überschreiten.

6.2.8 Vergleich von erfolgreicher und nichterfolgreicher Wissensnutzung

Nach Schoenfeld (1985, Kapitel 2.2) ist Wissen ein entscheidender Faktor für den Verlauf und Erfolg von Problembearbeitungsprozessen. Im Folgenden werden die Prozesse daher bezüglich des Zusammenhangs zwischen der Wissensnutzung und Erfolg bzw. Misserfolg betrachtet. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(W7) *Inwiefern hängt die Wissensnutzung mit dem Erfolg bzw. Misserfolg eines Problembearbeitungsprozesses zusammen?*

Zunächst bietet es sich an, den *Fokus* der Problembearbeitungsprozesse zu betrachten. In dieser Arbeit haben sich Prozesse mit prozeduralem und konzeptuellem Fokus herauskristallisiert, wobei die Prozesse mit konzeptuellem Fokus in zwei Unterarten aufgeteilt werden (vgl. Kapitel 6.2.4).
Vergleicht man die prozeduralen Prozesse mit den Lösungsqualitäten, dann zeichnet sich kein einheitliches Bild ab. Die Prozesse von Alex und Thomas, die Prozesse von Lea, Lisa, Sarah und Paula und der Prozess von David werden mindestens mit einer Lösungsqualität von L3 eingestuft. Die Prozesse von Nick

61 In der Aufgabe „L´Hospital“ wird ebenfalls das Konzept Funktion nicht genutzt, allerdings werden die „Unterkonzepte“ Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion genutzt.

62 Anmerkung: Die Gesamtmenge 53 übersteigt die Menge aller Wissenselemente (52) aus Kapitel 6.2.1, weil hier dem Konzept Funktion weitere Unterkonzepte hinzugefügt worden sind. Dopplungen von mathematischen Inhalten werden in dieser Zählweise nicht doppelt gezählt.

und der Prozess von Lukas werden mit einer Lösungsqualität von L1 eingestuft. Ferner liefert die Betrachtung der Häufigkeiten bezüglich der Wissensnutzung keine weiteren Zusammenhänge für Erfolg. Werden darüber hinaus allerdings die Schwierigkeiten hinzugezogen, gibt es einen wenig überraschenden Unterschied innerhalb der prozeduralen Prozesse. In allen Prozessen konnten an verschiedenen Stellen Schwierigkeiten identifiziert werden. In den Prozessen mit einer hohen Lösungsqualität (L3 und L4) werden diesen Schwierigkeiten im Prozess beseitigt, während sie in Prozessen mit niedriger Lösungsqualität (L1 und L2) nicht überwunden werden. Besonders entscheidend stellt sich dabei für die Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ das gleichnamige Verfahren in der Facette *Explizite Formulierung* und der Aufgabe „L´Hospital“ das Verfahren der Grenzwertbestimmung ebenfalls in der Facette *Explizite Formulierung* heraus. Die Facette *Explizite Formulierung* erweist sich somit in prozeduralen Prozessen als bedeutend. Dieses Ergebnis ist ebenfalls wenig überraschend. In Aufgaben, welche die Anwendung eines Verfahrens verlangen, sollte die Anleitung des genutzten Verfahrens verstanden sein. Obwohl viele Studierende auf die Aufgabe des Tutoriums zurückgegriffen haben, zeigt sich somit auch, das bloßes Kopieren aus einem ähnlichen Beispiel (*Konkretisierung & Abgrenzung*) nicht ausreicht, wenn zusätzlich die Anleitung des Verfahrens nicht nachvollzogen wird.
Vergleicht man die konzeptuellen Prozesse mit den Lösungsqualitäten, dann lässt sich zwischen den beiden Untergruppen eine Tendenz ableiten (Tabelle 34).

Lerngruppe	**Aufgabe**	**Fokus**	**Wissens-facetten**	**Lösungs-qualität**
Thomas, Alex	Mittelwertsatz	Konzeptuell	IN, B&V	L3
Lea, Lisa, Sarah, Paula	Mittelwertsatz	Konzeptuell	IN, B&V	L4
David	Differenzierbarkeit prüfen	Konzeptuell	K&A, EF, IN	L3
David	Mittelwertsatz	Konzeptuell	EF, K&A, B&V	L1
Nick	Mittelwertsatz	Konzeptuell	K&A, EF, B&V	L1

Tabelle 34: Prozesse mit konzeptuellem Fokus und ihre Lösungsqualität

Für die erste Untergruppe, bei denen der Fokus auf der *Impliziten Nutzung* und *Bedeutung & Vernetzung* liegt, wird die Lösungsqualität mit mindestens L3 eingestuft. Für die zweite Untergruppe, bei denen der Fokus auf der *Expliziten Formulierung* und *Konkretisierung & Abgrenzung* liegt, wird 2-mal die Lösungsqualität L1 und 1-mal die Lösungsqualität L3 eingestuft. Es scheint demnach so, dass die erste Untergruppe eher erfolgreich ist, während in der zweiten Untergruppe gemischte Ergebnisse erzielt werden. Warum erreichen die

Prozesse der ersten Untergruppe gute Ergebnisse? Dies liegt womöglich daran, dass sie versuchen, Zusammenhänge und Konzepte anzuwenden (*Implizite Nutzung*). Diese werden darüber hinaus mit weiteren Konzepten bezüglich der Facette *Bedeutung & Vernetzung* verknüpft (Kapitel 6.2.5). Diese Verknüpfung von Wissenselementen ist elementar für das konzeptuelle Wissen (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 3f.). Möglicherweise werden durch diese Stärkung bzw. Erschaffung von Verknüpfungen ebenfalls die Schwierigkeiten, auf welche die Studierenden zuvor gestoßen sind, überwunden. Daraus resultieren die höheren Lösungsqualitäten.

Für die zweite Untergruppe wird zunächst auf die beiden Prozesse von David und Nick zur Aufgabe „Mittelwertsatz" eingegangen. Beide Studierenden fokussieren sich auf den ausformulierten Mittelwertsatz (*Explizite Formulierung*) und dazugehörige Beispiele (*Konkretisierung & Abgrenzung*). Warum erreichen diese Prozesse keine guten Ergebnisse? Zunächst versuchen sie den Mittelwertsatz zu verstehen, weshalb sie zusätzlich auf die Visualisierung (*Bedeutung & Vernetzung*) eingehen. Zwischen diesen Facetten wird hin- und hergewechselt, wobei darüber hinaus kaum ein weiterer mathematischer Inhalt angesteuert wird. Hier fehlt womöglich die Verknüpfung von verschiedenen Wissenselementen über verschiedene mathematische Inhalte, um in der Lösung voranzuschreiten. Des Weiteren gehen diese Bearbeitungen nicht in die Anwendung bzw. in den Anwendungskontext (*Implizite Nutzung*) über. Letztendlich können David sowie Nick in ihren Bearbeitungen ihre Schwierigkeiten nicht überwinden, wodurch ihre Lösungen mit L1 eingestuft worden sind. Ein Unterschied zeigt sich dagegen in der Bearbeitung von David zur Aufgabe Differenzierbarkeit. Er nutzt bzw. aktiviert zwar ebenfalls verschiedene Facetten bezüglich des Konzepts Differenzierbarkeit, allerdings wechselt er anschließend in den Anwendungskontext. Dies liegt womöglich daran, dass er den Begriff der Differenzierbarkeit besser verstanden, somit gleichzeitig seine Schwierigkeiten mit der Aufgabe überwunden und aus diesem Grund eine Lösungsmöglichkeit generiert hat. In dem speziellen Fall von David wird ersichtlich, dass ihm vor allem das Untersuchen von Beispielen bzw. ähnlichen Aufgaben (*Konkretisierung & Abgrenzung*) geholfen hat. Daraus konnte er das Verfahren extrahieren und auf die aktuelle Aufgabe anwenden (*Implizite Nutzung*)[63]. Nach dem Wechsel in den Anwendungskontext übernimmt dieser Prozess von David die Eigenschaften eines prozeduralen Prozesses mit dem Fokus auf *Implizite Nutzung* und *Konkretisierung & Abgrenzung*.

Des Weiteren zeigt sich ein Unterschied in den konzeptuellen Prozessen zwischen der Lösungsqualität und der Häufigkeit hinsichtlich der Nutzung von Wissenselementen. In den erfolgreichen Prozessen werden deutlich mehr und verschiedene Wissenselemente angesteuert als in den nicht erfolgreichen

63 Inwiefern er das Verfahren bezüglich der anderen Facetten verstanden hat, kann aus den Daten nicht abgeleitet werden.

Prozessen. Dies knüpft erneut an den vorherigen Ausführungen an, dass für das konzeptuelle Wissen verschieden Facetten sowie die Verknüpfungen von Informationen bzw. Facetten entscheidend sind (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 3f.). Da für die Aufgabe „Mittelwertsatz" vor allem konzeptuelles Wissen für die Lösung der Aufgabe benötigt wird (Kapitel 5.3.2), ist das häufige Nutzen und Verknüpfen von Wissenselementen ebenfalls fördernd für die Lösungsqualität.

6.2.9 Zusammenfassung der Ergebnisse zur Analyse des Wissens

Abschließend werden für das Kapitel 6.2 die zentralen Ergebnisse der Analyse hinsichtlich des Wissens zusammengefasst:

- Die Veranstaltung bietet ein umfangreiches Wissensangebot zu den jeweiligen Aufgaben (Kapitel 6.2.1).
- Die Wissensmatrix kann zur Darstellung des Wissensangebots als auch für die Darstellung der Wissensnutzung der Studierenden genutzt werden (Kapitel 6.2.1 und 6.2.2).
- Die Wissensnutzung hinsichtlich der Wissensarten hängt von den Anforderungen der Aufgabe ab (Kapitel 6.2.3).
- Es wurde drei Arten von Prozessen identifiziert: (1) Die prozeduralen Prozesse haben einen Fokus auf *Implizite Nutzung* sowie *Konkretisierung & Abgrenzung*. Die konzeptuellen Prozesse haben einen Fokus auf (2a) *Implizite Nutzung* sowie *Bedeutung & Vernetzung* oder (2b) *Explizite Formulierung* und *Konkretisierung & Abgrenzung* (Kapitel 6.2.4).
- Schwierigkeiten sind aufgabenabhängig. In den prozeduralen Inhalten lassen sich diese vor allem in der *Impliziten Nutzung* und *Expliziten Formulierung* identifizieren. In den konzeptuellen Inhalten lassen sich diese in allen Facetten feststellen (Kapitel 6.2.6).
- Die Studierenden nutzen in ihren Bearbeitungen etwa knapp die Hälfte der angebotenen Wissenselemente (Kapitel 6.2.7).
- Erfolgreiche prozedurale Prozesse zeichnen sich dadurch aus, dass Schwierigkeiten hinsichtlich der Facette *Explizite Formulierung* beseitigt werden. Erfolgreiche konzeptuelle Prozesse nutzen vor allem die Facette *Implizite Nutzung* und *Bedeutung & Vernetzung*. Weniger erfolgreiche Prozesse fokussieren stark auf *Explizite Formulierung* und *Konkretisierung & Abgrenzung* (einzelner Konzepte bzw. Zusammenhänge) (Kapitel 6.2.8).

6.3 Rekonstruktion von Heurismen in den Problembearbeitungsprozessen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Nutzung von Heurismen in den Problembearbeitungsprozessen der Studierenden.
Entgegen der Betrachtung von Steuerung (Kapitel 6.1) und Wissen (Kapitel 6.2) wird dieses Kapitel nicht mit einer beispielhaften Bearbeitung beginnen, da in Kapitel 5.4.3 bereits einige Beispiele der jeweiligen Heurismen aufgeführt worden sind. In Kapitel 6.3.1 wird mit einer Übersicht zur Nutzung der Heurismen begonnen. Dabei werden häufige und selten genutzte Heurismen diskutiert. In Kapitel 6.3.2 wird ein besonderer Fokus auf die Abhängigkeit der Heurismennutzungen von den jeweiligen Aufgaben bzw. Lerngruppen gelegt. Anschließend wird in Kapitel 6.3.3 die Heurismennutzung mit dem Erfolg bzw. Misserfolg in Zusammenhang gesetzt. Abschließend werden die zentralen Ergebnisse zu den Heurismen festgehalten (Kapitel 6.3.4).

6.3.1 Überblick über die Nutzung der Heurismen

In diesem Abschnitt wird die Nutzung der Heurismen dargestellt. Damit fokussiert dieses Kapitel die folgende Forschungsfrage:

(H1) *Welche Heurismen treten in den Problembearbeitungsprozessen auf?*

Für einen ersten Überblick über die Nutzung der Heurismen werden die Häufigkeiten in der Tabelle 35 zusammengestellt.
Zunächst werden einige Beobachtungen aus Tabelle 35 abgeleitet. Insgesamt konnten 167 Nutzungen von Heurismen rekonstruiert werden. Dabei zeigen sich größere Unterschiede zwischen den unterschiedlichen Lernenden bzw. Lerngruppen. Z. B. verwendet David in seinen Problembearbeitungsprozessen 63-mal einen speziellen Heurismus, während Nick lediglich 18 Heurismen nutzt. Dies scheint vorerst einen erheblichen Unterschied darzustellen. Die Häufigkeit der Heurismennutzung steht jedoch in direktem Zusammenhang mit der Bearbeitungszeit. David wendet mit 63 die meisten Heurismen an und benötigt auch die meiste Zeit für die drei Aufgaben (siehe Tabelle 16). Im Gegensatz dazu verwendet Lukas lediglich drei Heurismen, beschäftigt sich jedoch nur mit einer Aufgabe und hat dementsprechend auch die kürzeste Bearbeitungszeit. Nick nutzt 18 Heurismen, was nach Lukas die zweitniedrigste Anzahl darstellt, und hat ebenfalls die zweitkürzeste Bearbeitungszeit. Lediglich bei den beiden Lerngruppen von Alex und Thomas sowie Lea, Lisa, Sarah und Paula kehrt sich dieses Muster um. Insgesamt lässt sich dennoch ableiten, dass eine längere Bearbeitungszeit tendenziell mit einer höheren Heurismennutzung einhergeht.

Heurismus	**David**	**G3**	**G4**	**Nick**	**Lukas**	**Gesamt**
Begriffe klären	8	2	2	4	0	16
Skizze	4	5	7	1	0	17
Imaginäre Figur	7	1	4	0	0	12
Spezialfall	11	2	1	0	0	14
Fallunterscheidung	0	0	0	2	0	2
Nutzung aller Voraussetzungen	3	4	8	0	0	15
Systematisierungshilfen	10	0	0	0	0	10
Metapher	3	2	4	0	0	9
Rückführungsprinzip	1	0	5	0	0	6
Ähnliche Aufgabe	7	9	10	9	0	35
Suche nach neuen Hinweisen	5	4	1	1	2	13
Rückwärtsarbeiten	0	0	1	0	0	1
Vorwärtsarbeiten	5	5	5	1	1	17
Gesamt	63	34	48	18	3	167

Tabelle 35: Häufigkeit der Nutzung bezüglich der Heurismen (G3 = Alex und Thomas; G4 = Lea, Lisa, Sarah und Paula)

Geringe Nutzung von Heurismen

In der Gesamtbetrachtung (Tabelle 35) treten insbesondere die am seltensten sowie am häufigsten angewandten Heurismen deutlich hervor. Am wenigsten konnte der Heurismus *Rückwärtsarbeiten* (1-mal) identifiziert werden. „Die Frage ist, worauf wollen wir jetzt hinaus? Und das habe ich mich jetzt schon in der Übung gefragt“ (Lea, Aufgabe „Mittelwertsatz“). Lea dreht mit dieser Aussage den Kontext und fragt sich, was überhaupt das Ziel ist und was dafür im Vorhinein verlangt wird. Damit initiiert Lea in ihrer Lerngruppe einen Impuls und leitet eine kurze Diskussion ein, um auf Basis der Ungleichung aus der Aufgabenstellung Umformungen vorzunehmen, die mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung durchgeführt werden können. Es muss allerdings erwähnt werden, dass nach dieser kurzen Diskussion die generell, globale

Vorgehensweise des Rückwärtsarbeiten nicht weiter ersichtlich und es bei dem einzelnen Impuls geblieben ist.
Ebenfalls kann der Heurismus *Fallunterscheidung* (2-mal) selten identifiziert werden. Dies kann daran liegen, dass eine *Fallunterscheidung* aus theoretischer Perspektive wenig sinnvoll bei der Bearbeitung der Aufgaben erscheint. Allerdings wird eine Fallunterscheidung bei der Lösung einer ähnlichen Aufgabe des Tutoriums genutzt. Dies ist gleichzeitig der Grund, weshalb Nick in seiner Bearbeitung zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" ebenfalls an zwei verschiedenen Stellen eine *Fallunterscheidung* durchführt (Abbildung 40). „Hier könnte ich auch wieder in drei Fälle unterscheiden" sowie „hier mache ich auch wieder zwei Fallunterscheidungen".

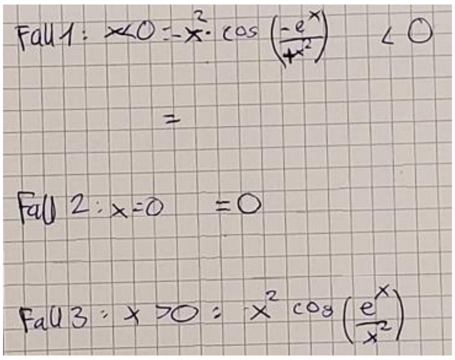


Abbildung 40: Nicks Fallunterscheidung

Häufige Nutzung von Heurismen

Als nächstes wird auf drei Heurismen eingegangen, die in fast jedem Problembearbeitungsprozess identifiziert werden können. Bei dem ersten Heurismus handelt es sich dabei um *Ähnliche Aufgabe*, welcher auch gleichzeitig (mit Abstand) am häufigsten (35-mal) genutzt wird. Die Nutzung zeigt sich vor allem dadurch, dass auf die Aufgabe aus dem Tutorium (vgl. Kapitel 5.3) zurückgegriffen wird. Sie hilft dabei, eine Idee zu generieren, was überhaupt gemacht werden soll oder während der Bearbeitung nachgeschaut wird, ob man auf dem richtigen Weg ist und die eigene Vorgehensweise absichern möchte. In einigen Fällen werden im Skript oder Internet nach *Ähnlichen Aufgaben* gesucht. Das Suchen bzw. Nutzen von *Ähnlichen Aufgaben* aus dem Internet ist für die Studierenden in dieser Stichprobe, außer Lukas, allerdings erst die letzte Option. Obwohl dieser Heurismus in fast jedem Prozess vorkommt, wird in der Aufgabe „Mittelwertsatz" und „Differenzierbarkeit prüfen" vermehrt auf *Ähnliche*

Aufgaben zurückgegriffen, während dieser in der Aufgabe „L´Hospital" kaum, aber mindestens 1-mal genutzt wird. Letztendlich ist die hohe Nutzung dieses Heurismus keine Überraschung, da der Kontext der Veranstaltung eine vorbereitende Übungsaufgabe zu Verfügung stellt. Dieser Ablauf wurde das gesamte Semester durchgeführt, wodurch den Studierenden bewusst ist, dass die Aufgaben aus dem Tutorium in gewisser Weise eine Hilfe für die Hausaufgabenbearbeitungen darstellen.

Der zweite Heurismus, welcher in fast jedem Problembearbeitungsprozess identifiziert werden konnte, wird nicht sofort aus der Gesamtübersicht (Tabelle 35) deutlich, da dieser nur 16-mal genutzt wurde. Es handelt sich dabei um den Heurismus *Begriffe klären*. Ein Unterschied zur *Ähnlichen Aufgabe* liegt darin, dass dieser Heurismus in den Prozessen meistens nur 1-mal pro Prozess genutzt wird. In den jeweiligen Aufgaben werden die Begriffe Differenzierbarkeit, Mittelwertsatz und L´Hospital nachgeschaut. Dabei signalisiert David, dass er sich mit dem gesamten Begriff vertraut machen möchte. Dies zeigt sich auch in Davids Nutzung von Wissen (bezüglich der Begriffe nutzt bzw. aktiviert David verschiedene Wissensfacetten). Aus diesem Grund schlägt er die Begriffe im Skript nach und versucht die Ausführungen nachzuvollziehen. In den anderen Lerngruppen werden eher Teile des Begriffs herangezogen. Alex und Thomas beziehen sich z. B. auf die Bedeutung einzelner Symbole und deren Schreibweise: „Warum ist denn das x_0 da unten" (Mittelwertsatz prüfen)? Nick bezieht sich auf die Voraussetzungen für die Anwendung der Regel von L´Hospital: „Also, wenn einer dieser beiden Fälle auftritt, $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ [und] der Zähler und Nenner jeweils differenzierbar sind, [dann] kann man den Zähler und Nenner einfach so ableiten."

Der dritte Heurismus ist das *Vorwärtsarbeiten*. Im Gegensatz zum *Rückwärtsarbeiten* wirkt das „Drauf-los"-Arbeiten vom Anfangszustand als das bevorzugte Vorgehen. In den Aufgaben scheint den Studierenden der Anfangszustand, sowie in einigen Fällen der Endzustand klar zu sein. *Rückwärtsarbeiten* besitzt an dieser Stelle das Potenzial, eine Lösung zu ermitteln. Insbesondere in der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen", da die Aufgabenstellung schon das Endergebnis suggeriert. Ohne weiter über den Endzustand zu reflektieren, bleibt oftmals lediglich das Vorwärtsarbeiten, also beginnend von den Bedingungen und Voraussetzungen, übrig. Insbesondere in der Aufgabe „L´Hospital" wird dies deutlich. Die Aufgabenstellung verlangt die Berechnung eines Grenzwerts, wobei der Endzustand nicht komplett unklar, aber auch nicht vollständig klar ist. Es ist nicht ersichtlich, ob Divergenz, Konvergenz, unbestimmte Divergenz oder ein bestimmter Grenzwert nachgewiesen werden soll. Es bleibt für die Studierenden demnach nichts anderes übrig, als Schritt-für-Schritt vom Startpunkt auszugehen. In der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" zeigt sich das *Vorwärtsarbeiten* durch das Einsetzen in die Definition der Differenzierbarkeit sowie anschließender Grenzwertbestimmung und in der

Aufgabe „Mittelwertsatz“ durch die Versuche des Umformens bezüglich der Ungleichung.

6.3.2 Aufgaben- bzw. lerngruppenabhängige Heurismen

Laut der Theorie können Heurismen entweder aufgabenspezifisch (Rott, 2013, S. 136ff.) oder lerngruppenabhängig (Stenzel, 2023a, S. 31) sein. Durch den Gesamtüberblick und die vorherigen Ausführungen konnte bereits festgestellt werden, dass es Heurismen gibt, die kaum oder in fast jeder Bearbeitung genutzt werden (vgl. auch Tabelle 35). In beiden Fällen lässt sich daher nicht von einer Aufgaben- bzw. Lerngruppenabhängigkeit sprechen. Die beiden gering genutzten Heurismen (*Rückwärtsarbeiten* und *Spezialfall*) scheinen Einzelfälle zu sein. Die häufig genutzten Heurismen (*Ähnliche Aufgabe*, *Begriffe klären* und *Vorwärtsarbeiten*) werden zwar in fast jedem Prozess genutzt, wirken daher jedoch nicht speziell, sondern eher allgemein anwendbar[64]. Die Aufgabenabhängigkeit bzw. Lerngruppenabhängigkeit wird im Folgenden tiefergehend analysiert. Damit wird folgende Forschungsfrage adressiert:

(H2) *Ist die Nutzung von Heurismen aufgabenabhängig? Ist die Nutzung von Heurismen lerngruppenabhängig?*

Zunächst soll darauf hingedeutet werden, dass im Kontext der kleinen Stichprobe in dieser Arbeit kaum von einer Abhängigkeit bzw. eines typischen Verhaltens bezüglich der Nutzung Heurismen gesprochen werden kann. Die folgenden Ausführungen sind demnach lediglich Tendenzen, die auf eine Abhängigkeit bzw. typisches Nutzungsverhalten hindeuten. Diese Tendenzen werden ebenfalls in der Tabelle 36 dargestellt. In dieser Tabelle beschreibt das *X*, ob in einem Prozess ein spezifischer Heurismus (mindestens 1-mal) verwendet wird.

64 Dies lässt sich allerdings auch anders deuten. Da die Heurismen in fast jedem Bearbeitungsprozess benutzt werden, können diese auch als typische Heurismen für die Bearbeitung dieser Aufgaben aufgefasst werden.

	Differenzierbarkeit prüfen					Mittelwertsatz				L'Hospital			
	David	G3	G4	Nick	Lukas	David	G3	G4	Nick	David	G3	G4	Nick
Bkl	X	X	X	X		X	X		X	X		X	X
Skiz	X	X				X	X	X	X		X	X	
imF	X	X				X		X		X			
SpF						X	X			X	X	X	
FU				X									
NVor	X		X			X	X	X		X	X	X	
SyH	X					X				X			
Met	X	X						X		X			
RfP								X		X		X	
Ähn	X	X	X	X		X	X	X	X	X		X	X
nüHi	X	X			X	X			X	X	X	X	
RüA								X					
WvA		X	X		X	X	X	X		X	X	X	X

Tabelle 36: Verwendung der Heurismen

Heurismus: Skizze

Skizze ist einer der häufiger genutzten Heurismen (17-mal). Bei der Nutzung von David und Nick wird die *Skizze* im Zusammenhang mit dem Heurismus *Begriffe klären* genutzt, indem sie versuchen, die relevanten Begriffe nachzuvollziehen. Dabei beziehen sie sich auf die Visualisierungen der Begriffe aus dem Skript. Die restliche Nutzung des Heurismus *Skizze* beschränkt sich ausschließlich auf das Visualisieren von spezifischen Funktionsgraphen.

- Alex und Thomas visualisieren sich den Graphen der Funktion $x^2 \, cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$, um grafisch zu überlegen, ob die Funktion differenzierbar sein kann.
- In der Aufgabe „L´Hospital" wird der Graph der natürlichen Logarithmusfunktion visualisiert, um zu überprüfen, welche Werte dieser annehmen kann.
- In der Aufgabe „Mittelwertsatz" werden sowohl die speziellen als auch allgemeinen Graphen der Exponential- und Sinusfunktion einzeln und als Verkettung visualisiert, um zu untersuchen, welche Werte sie annehmen können.

Der Heurismus *Skizze* kann in den Prozessen zu jeder Aufgabe identifiziert werden (Tabelle 36). Darüber hinaus zeigt sich, dass die *Skizze* in jedem Prozess zur Aufgabe „Mittelwertsatz" genutzt wird. Demnach kann die Tendenz vermutet werden, dass der Einsatz des Heurismus *Skizze* typisch für die Aufgabe „Mittelwertsatz" ist. Bei dieser Formulierung muss bedacht werden, dass der Heurismus mit zwei verschiedenen Verwendungen in der Aufgabe eingesetzt wird. Zum einen im Zusammenhang mit der Begriffsklärung des Mittelwertsatzes und zum anderen für die Visualisierung von Funktionen. Hinsichtlich der Lerngruppenabhängigkeit kann zwar geschlossen werden, dass der Heurismus *Skizze* populär ist, aber lediglich Alex und Thomas in jedem Prozess darauf zurückgreifen.

Heurismus: Spezialfall

Spezialfälle (14-mal, vgl. Tabelle 35) können lediglich in den Problembearbeitungsprozessen der beiden Aufgaben „Mittelwertsatz" und „L´Hospital" identifiziert werden (Tabelle 36). David nutzt besonders häufig *Spezialfälle*, um sich verschiedene Beispiel-Grenzwerte in der Aufgabe „L´Hospital" anzuschauen und bestimmt diese anschließend. Durch das Einsetzen von Zahlen versucht er, sich dem allgemeinen Ergebnis anzunähern. Auch die Lerngruppe Alex und Thomas sowie Lea, Lisa, Sarah und Paula wenden diese Strategie in der Aufgabe „L´Hospital" an. In der Aufgabe „Mittelwertsatz" sind es erneut Alex und Thomas sowie David, welche *Spezialfälle* nutzen. Aufgrund

der Voraussetzung $0 \leq y \leq x$ setzen sie Zahlen für y und x in die vorgegebene Ungleichung der Aufgabe sowie Gleichung des Mittelwertsatzes ein. Zum einen versuchen sie, damit den Sinn dieser Voraussetzung herausfinden und zum anderen mögliche Auswirkungen auf die (Un-)Gleichung festzustellen.
Auf den ersten Blick lässt sich die Tendenz ableiten, dass für die Grenzwertbestimmung mit L´Hospital die Nutzung von *Spezialfällen* typisch scheint. Allerdings liegt dies eher an der Funktion, die Teil der Aufgabe ist. In der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" muss ebenfalls ein Grenzwert bestimmt werden, wobei in den Prozessen zu dieser Aufgabe keine *Spezialfälle* genutzt werden[65]. Möglicherweise ist die Exponentialfunktion mit zwei Unbekannten für die Studierenden schwierig zu begreifen, wodurch durch das Einsetzen von Zahlen ein besseres Verständnis für die Aufgabe entwickelt werden kann. Bezüglich der Lerngruppenabhängigkeit lässt sich schwierig von einer Tendenz sprechen, obwohl Alex und Thomas sowie David diesen Heurismus in zwei von drei Prozessen nutzen. Allerdings ist es nur David, der diesen Heurismus in besonders umfangreichem Maße anwendet (11-mal).

Heurismus: Suche nach Hinweisen

Die *Suche nach Hinweisen* (im Veranstaltungsmaterial oder externen Materialien) wird dann von Studierenden genutzt, wenn sie Probleme damit haben, ein Vorgehen für die Lösung einer Aufgabe zu finden oder wenn sie auf Schwierigkeiten im Lösungsprozess stoßen. Die inhaltlichen Gründe in den Problembearbeitungsprozessen sind dabei vielfältig. David sucht z. B. nach einer passenden Beweismethode im Skript, Thomas sucht im „Mathe-Buch" nach weiteren Hilfen zur Differenzierbarkeit, Lukas versucht aus YouTube-Videos Ableitungen für den Kosinus zu finden und die Lerngruppe um Lea, Lisa, Sarah und Paula suchen nach konkreten Ableitungsregeln in verschiedenen Materialien. Lediglich David nutzt diesen Heurismus in jedem seiner Prozesse (Tabelle 36). Dabei ist auffällig, dass die *Suche nach neuen Hinweisen* erst spät in seinen Prozessen identifiziert werden kann. Dies deutet darauf hin, dass dies eine Problemlösestrategie ist, welche erst zum Einsatz kommt, wenn andere Heurismen nicht zu einer zufriedenstellenden Lösung geführt haben. In den Prozessen der anderen Studierenden zeigt sich die Anwendung dieses Heurismus ebenfalls erst ab etwa der Mitte des Prozesses.
Bezüglich der Aufgabenabhängigkeit kann keine Tendenz festgestellt werden.

Heurismus: Nutzung aller Voraussetzungen

Der Heurismus *Nutzung aller Voraussetzungen* kann zwar in Prozessen zu allen Aufgaben identifiziert werden (Tabelle 36), allerdings zeigt sich die häufige

---

65 Fast die identische Überlegung kann auch für den Heurismus *Rückführungsprinzip* (siehe weiter unten) festgestellt werden.

Anwendung vor allem in den beiden Aufgaben „Mittelwertsatz“ und „L´Hospital“. In der Aufgabe „Mittelwertsatz“ wird insbesondere auf die Voraussetzung $0 \leq y \leq x$ und die Betragsstriche in der Ungleichung Bezug genommen. Dabei überlegen sich die Studierenden, inwiefern diese beiden Voraussetzungen zusammenpassen bzw. voneinander abhängig sind. Lisa: „Aber vielleicht ist das auch mit den Betragsstrichen einfach nur mit diesen, mit dieser Anmerkung. Wenn man jetzt nämlich zum Beispiel nicht die Definition hätte, dass $y \leq x$.“ Die Aussage zeigt, dass die Voraussetzungen die Studierenden etwas verunsichern und sie nicht genau wissen, was es damit genau auf sich hat.
In der Aufgabe „L´Hospital“ wird sich auf die (einzige) Voraussetzung $a > 1$ bezogen. Sowohl Alex: Ja, aber wir dürfen nicht vergessen, dass a, a wächst nicht. […] a ist eine Konstante > 1“ und Paula: „Ah, deswegen darf das auch niemals 1 sein, weil das $ln(a)$ ist ja immer 0 und du darfst ja nicht durch 0 teilen“ fassen die Erkenntnisse gut zusammen.
Obwohl die beiden Lerngruppen Alex und Thomas sowie Lea, Lisa, Sarah und Paula als auch David diesen Heurismus in ihrer Bearbeitung nutzen, kann dennoch nicht von einer Lerngruppenabhängigkeit ausgegangen werden. Bezüglich der Aufgabenabhängigkeit lässt sich ebenfalls keine Tendenz erkennen.

Heurismus: Systematisierungshilfen

Systematisierungshilfen werden in den Problembearbeitungsprozessen lediglich von David genutzt (Tabelle 36). David ordnet sein Vorgehen, indem er wichtige Formeln farbig markiert, mathematische Aussagen markiert oder unterstreicht sowie Spezialfälle mit verschiedenen Farben darstellt (z. B. in Abbildung 41).

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

Abbildung 41: Davids Systematisierungshilfe

Während der Prozesse sind die *Systematisierungshilfen* für David keinesfalls einmalige Nutzungen, sie stellen eher ein ständiges heuristisches Mittel für ihn dar, auf welches in jeder Aufgabe zurückgegriffen wird. Daraus lässt sich ableiten, dass der Heurismus *Systematisierungshilfen* typisch für David ist.

Heurismus: Metapher und imaginäre Figur

Die beiden Heurismen *imaginäre Figur* und *Metapher* werden an dieser Stelle zusammengelegt. Beide Heurismen sind theoretisch eng miteinander verwandt und auch in dieser Studie weisen sie eine starke Näher zueinander auf. Darüber hinaus konnten in den Problembearbeitungsprozessen mit einer Ausnahme[66] entweder keiner oder jeweils beide Heurismen identifiziert werden (Tabelle 36). Generell zeigt sich, dass die Studierenden in den Aufgaben die beiden Heurismen nutzen, wenn sie über spezielle Funktionsgraphen sprechen. Vor allem das „Hin- und Herspringen" bzw. das „Schwingen" der „Wellenfunktionen" Kosinus und Sinus wird am meisten diskutiert. Darüber hinaus nutzt David diese Heurismen, um über die Annäherung beim Grenzwertübergang zu sprechen. Eine Besonderheit stellt David in seiner Bearbeitung zur Aufgabe „L´Hospital" dar. Seine Nutzung der *imaginären Figur* wird „innerhalb" des Heurismus *Spezialfall* identifiziert. Dabei stellt er sich bildlich vor, was mit den beispielhaft eingesetzten Zahlen beim Grenzwertübergang passiert.
Letztendlich kann keine Tendenz bezüglich der Aufgabenabhängigkeit erkannt werden, allerdings nutzt David in allen seinen Bearbeitungen diese beiden Heurismen.

Heurismus: Rückführungsprinzip

Das *Rückführungsprinzip* wird in den Daten dieser Arbeit kaum von den Studierenden genutzt (6-mal, vgl. Tabelle 35). Zunächst klingt dies überraschend, da der Kontext der Veranstaltung durch die Aufgabe aus dem Tutorium bereits mögliche Hinweise anbietet. Allerdings liefern diese Aufgaben keine Fakten oder Aussagen, welche bei der Bearbeitung der Hausaufgaben helfen, sondern Verfahren, die übertragen werden können. Aus diesem Grund wird bei diesem Verhalten eher der Heurismus *Ähnliche Aufgabe* kodiert. Letztlich überwiegt das *Rückführungsprinzip* bei der Bearbeitung der Aufgabe „L´Hospital", bei der David und die Lerngruppe um Lea, Lisa, Sarah und Paula jeweils die Ableitung für a^x aus Karteikarten, Mitschriften aus der Schulzeit und dem Internet heraussuchen. Darüber hinaus lässt sich Sarah mithilfe eines Rechners im Internet den Grenzwert bestimmen. Bei der Aufgabe „Mittelwertsatz" nutzt die Lerngruppe um Lea, Lisa, Sarah und Paula das *Rückführungsprinzip*, um Unklarheiten zu den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung zu diskutieren.
Insgesamt zeigt sich, dass das *Rückführungsprinzip* eher in der Aufgabe „L´Hospital" genutzt wird. Allerdings liegt das an der speziellen Funktion, die abgeleitet werden muss. Müsste bei der Nutzung der Regel von L`Hospital bspw. $sin(x)$ abgeleitet werden, wäre das *Rückführungsprinzip* möglicherweise nicht identifizierbar gewesen. Eine Tendenz zur Aufgabenabhängigkeit lässt sich daher

66 Im Prozess zum Mittelwertsatz nutzt David eine *imaginäre Figur*, aber keine *Metapher*.

nicht erkennen, da es eher auf die spezielle Ableitung ankommt. Gleiches gilt für die Lerngruppenabhängigkeit.

6.3.3 Vergleich von erfolgreicher und nichterfolgreicher Heurismennutzung

Nach Schoenfeld (1985; Kapitel 2.2) sind Heurismen ein entscheidender Faktor für den Verlauf und Erfolg von Problembearbeitungsprozessen. Im Folgenden werden die Problembearbeitungsprozesse bezüglich des Zusammenhangs zwischen der Heurismennutzung und Erfolg bzw. Misserfolg der zugehörigen Lösungen betrachtet. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(H3) *Inwiefern hängt die Nutzung der Heurismen mit dem Erfolg bzw. Misserfolg eines Problembearbeitungsprozesses zusammen?*

Zunächst werden Zusammenhänge zwischen (Miss-)Erfolg des Lösungsprodukts und Heurismennutzung bezüglich der Häufigkeit bzw. des Vorhandenseins einer speziellen Heurismusnutzung in einem Prozess untersucht. Wird die Häufigkeit der genutzten Heurismen (wie in Tabelle 35) mit den Lösungsprodukten der Studierenden verglichen, dann zeigt sich kein einheitliches Ergebnis. Als Beispiel werden die Problembearbeitungsprozesse von Lea, Lisa, Sarah und Paula herangezogen. In allen Prozessen erreichen sie eine Lösungsqualität von entweder L3 oder L4. Die Häufigkeit der Heurismennutzung unterscheidet sich in ihren drei Prozessen allerdings stark. In der Aufgabe Differenzierbarkeit konnten lediglich sechs Stellen identifiziert werden, an denen Heurismen verwendet werden, während für die Aufgabe „Mittelwertsatz" 27 und für die Aufgabe „L´Hospital" 15 entsprechende Stellen festgestellt werden konnten. Ähnliche Unterschiede zeigen sich auch in den weniger erfolgreichen Prozessen. Es gibt wenig erfolgreiche Prozesse, in denen nur an drei Stellen Heurismen (z. B. Lukas „Differenzierbarkeit prüfen") und denen an 18 Stellen Heurismen verwendet werden (z. B. David „Mittelwertsatz").
Wird die Häufigkeit des Auftretens verschiedener Heurismen (wie in Tabelle 36) in Betracht gezogen, lässt sich allerdings eine Tendenz erkennen. Problembearbeitungsprozesse in denen wenig verschiedene Heurismen verwendet werden, erreichen auch eher eine schlechtere Lösungsqualität. Andersrum haben die Prozesse, in denen viele verschiedene Heurismen verwendet werden, eher eine hohe Lösungsqualität. Es muss bedacht werden, dass die Häufigkeit des Auftretens verschiedener Heurismen in einem Prozess durchaus abhängig von der Lerngruppe bzw. eines Studierenden abhängig sein kann. David nutzt z. B. in jedem Prozess die meisten verschiedenen Heurismen (acht, neun und zehn), wobei zwei Lösungsprodukte mit L3 und ein Lösungsprodukt mit L1 eingeschätzt werden. Darüber hinaus muss auch gesagt werden, dass Studierende in allen Prozessen auf Schwierigkeiten gestoßen sind

und die Anwendung von Heurismen für die Überwindung dieser notwendig sind. In dem kurzen Prozess von Lea, Lisa, Sarah und Paula („Differenzierbarkeit prüfen"), in dem nur kleine Schwierigkeiten aufgekommen sind, mussten auch kaum Heurismen (vier verschiedene) verwendet werden.

Im nächsten Schritt werden einzelne Heurismen untersucht, indem erfolgreiche Prozesse betrachtet werden, um herauszufinden, welche spezifischen Heurismen diese Prozesse charakterisieren. Dabei zeigt sich, dass erfolgreiche Prozesse nahezu immer die folgenden Heurismen enthalten: *Begriffe klären*, *Skizze*, *Nutzung aller Voraussetzungen*, *Ähnliche Aufgaben*, *Vorwärtsarbeiten*.

Diese Heurismen lassen sich allerdings auch in den weniger erfolgreichen Prozessen identifizieren, wobei das *Nutzen aller Voraussetzungen* nur in einem der weniger erfolgreichen Prozesse vorkommt. Es bleibt die Frage, welchen Einfluss dieser Heurismus auf einen positiven Lösungsverlauf hat. Zunächst deutet die Beschreibung dieses Heurismus darauf hin, dass ein (Zwischen-)Ergebnis kontrolliert wird[67]. Dies zeigt sich bspw. in der Bearbeitung von Lea, Lisa, Sarah und Paula. Sarah möchte nochmal in die Aufgabenstellung gucken und schauen, ob sie die Aufgabe vollständig bearbeitet haben: „Ich gucke mir nochmal die Aufgabe, ob wir alles gemacht [haben]." In diesem Moment werden zwar Unklarheiten in der Lerngruppe diskutiert (siehe Kapitel 6.2.6), diese haben aber keine Auswirkung mehr auf die bereits vorhandene (vollständig korrekte) Lösung. Dennoch kann vermutet werden, dass dadurch das Verständnis bei Sarah hinsichtlich der Aufgabe bzw. der Verwendung des Wissens für diese Aufgabe verbessert wurde. Weitere Verwendungen des Heurismus *Nutzung aller Voraussetzungen* deuten ebenfalls darauf hin, dass kein großer, direkter Einfluss auf das Fortschreiten der Lösung, sondern vielmehr auf das Verständnis der Studierenden genommen wird. In den Prozessen zum „Mittelwertsatz" liefern vor allem die Aussagen und Diskussionen über die Voraussetzung $0 \leq y \leq x$ Aufschluss über die Rolle der Betragsstriche. Noch deutlicher wird dies in den Prozessen zur Aufgabe „L´Hospital". Durch Aussagen und Diskussion über die Voraussetzung $a > 1$ wird den Studierenden klar, warum diese Bedingung für die Aufgabenstellung notwendig ist. Paula: „Ah, deswegen darf das auch niemals 1 sein, weil das $ln(a)$ ist ja immer 0 und du darfst ja nicht durch 0 teilen." Insgesamt scheint der Heurismus *Nutzung aller Voraussetzungen* keinen großen Einfluss auf das Fortschreiten der Lösung zu haben.

Ein weiterer Heurismus, welcher zwar nicht alle erfolgreichen Prozesse charakterisiert, aber ausschließlich in solchen vorkommt, ist das *Rückführungsprinzip*. In der Aufgabe „L´Hospital" haben sich die Studierenden die Ableitung von a^x aus verschiedenen Materialien herausgesucht und sich einen

---

67 Die Beschreibung des Heurismus *Nutzung aller Voraussetzungen*: „Es wird geprüft, ob alle in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingungen einbezogen worden sind." Dabei wird deutlich, dass die Bearbeitung (bzw. die Überlegungen) bereits in eine gewisse Richtung vorangeschritten sein muss.

speziellen Grenzwert anzeigen lassen. Die Ableitung ist essenziell für die Anwendung der Regel von L´Hospital, um zu einer korrekten Lösung der Aufgabe zu gelangen. Das Anzeigen des Grenzwerts wurde genutzt, um die eigene Lösung zu vergleichen. Damit wird die eigene Lösung zwar nicht effektiv vorangetrieben, allerdings abgesichert. Dies kann auch als Fortschreiten der Lösung aufgefasst werden. In der Aufgabe „Mittelwertsatz" wurde der Heurismus verwendet, um Unklarheiten hinsichtlich des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung zu beseitigen. Damit wurde möglicherweise ein nicht zielführendes Verhalten abgewendet. Insgesamt zeigt sich daher die Tendenz, dass die Verwendung dieses Heurismus einen positiven Einfluss auf das Fortschreiten der Lösung haben kann. Dennoch muss erwähnt bleiben, dass dieser Heurismus nicht allein für eine korrekt Lösung verantwortlich ist, sondern in manchen Fällen dazu beitragen kann. Es liegen darüber hinaus weitere Prozesse vor, die erfolgreich enden, ohne das *Rückführungsprinzip* anzuwenden.
Schließlich werden gezielt einzelne Stellen („Barrierestellen") der jeweiligen Prozesse betrachtet, in denen die Verwendung von Heurismen zu einem Fortschritt im Lösungsprozess beitragen. Dabei ist insbesondere der Heurismus *Skizze* hervorzuheben. In den Prozessen zu allen drei Aufgaben lässt sich beobachten, dass Visualisierungen von Funktionen einen wesentlichen Fortschritt im Lösungsweg der Studierenden bewirken. Diese Visualisierungen helfen den Studierenden Vermutungen aufzustellen (Ist eine Funktion differenzierbar?), Wertebereiche festzulegen und zu überprüfen (von speziellen Funktionen), Vermutungen zu bestätigen (hinsichtlich Abschätzungen) sowie das Verständnis zu erweitern (z. B. Grenzwertverhalten von ln sowie Begriffsbildung). Ähnlich wie beim Heurismus *Skizze* helfen den Studierenden *Metaphern* und *imaginäre Figuren* über den Sachverhalt von Funktionen zu sprechen und damit ihre Argumentationen voranzutreiben.
Weitere Verwendungen eines Heurismus, der an mehreren Stellen zum Lösungsfortschritt beiträgt, ist *Ähnliche Aufgabe*. Dieser Heurismus hilft bei der Planung und Ideengenerierung für das eigene Vorgehen. Darüber hinaus werden *Ähnliche Aufgaben* genutzt, um das Vorgehen in der eigenen Lösung abzusichern bzw. zu vergleichen. Dabei zeigt sich, dass die vorbereitende Aufgabe aus dem Tutorium für die Studierenden eine wertvolle Quelle ist. Das Übertragen aus der Aufgabe des Tutoriums erweist sich jedoch nicht in jedem Fall als erfolgreich. So sind auch viele Anwendungen des Heurismus erfolglos oder führen Studierende sogar in eine falsche Richtung und behindern damit den Lösungsprozess. Die Gründe dafür sind unter anderem fehlendes Wissen, um das Vorgehen für die eigene Aufgabe zu abstrahieren, sowie fehlendes Kontrollverhalten, um Wissen korrekt einzusetzen.
Es werden noch zwei Heurismen erwähnt, die teilweise sogar einen negativen Einfluss auf den gesamten Lösungsprozess ausüben. Zum einen ist dies die *Suche nach neuen Hinweisen*. Bei der Verwendung dieses Heurismus haben Studierende

keine wertvollen Informationen gefunden, die für die Aufgabenlösung hilfreich sein könnten. Dabei hatte diese Suche sogar noch Potenzial, die Lösung in eine falsche Richtung zu lenken (z. B. statt der Differenzierbarkeit, die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt zeigen). Gleiches gilt für die Verwendung des Heurismus *Spezialfälle*. Zunächst können *Spezialfälle* hilfreiche Elemente sein, um bspw. ein Gefühl für die Grenzwertbestimmung oder den Wertebereich einer Funktion zu bekommen. Dies muss allerdings auf den allgemeinen Fall übertragen werden, sodass nicht nur auf der Ebene des Beispiels geblieben wird (siehe in Davids Bearbeitungen).

6.3.4 Zusammenfassung der Ergebnisse zur Analyse der Heurismen

Abschließend werden für das Kapitel 6.3 die zentralen Ergebnisse der Analyse hinsichtlich Heurismen zusammengefasst:

- Der Heurismus *Ähnliche Aufgabe* wird am meisten genutzt (35-mal) (Kapitel 6.3.1).
- Die Nutzung von verschiedenen Heurismen liegt pro Problembearbeitungsprozess zwischen 2-10 (Tabelle 36 in Kapitel 6.3.2).
- Wenig Hinweis sowohl auf eine aufgabenabhängige noch lerngruppenabhängige Nutzung von Heurismen. Eine (kleine) Ausnahme hinsichtlich lerngruppenabhängiger Nutzung von Heurismen zeigen Davids Prozesse (Kapitel 6.3.2).
- Die Anzahl genutzter Heurismen deuten keine Auswirkung auf Erfolg hin. Die Vielfalt verschieden genutzter Heurismen deutet darauf hin, dass eine höhere Anzahl vorteilhaft ist (Kapitel 6.3.3).
- *Rückführungsprinzip*, *Ähnliche Aufgabe* und *Skizze* zeigen Hinweise auf einen positiven Einfluss auf den Prozess (Kapitel 6.3.3).
- *Suche nach nützlichen Hinweisen* und *Spezialfälle* weisen negatives Potenzial für den Prozess auf (Kapitel 6.3.3).

6.4 Gemeinsame Analyse der Kategorien zu Problembearbeitungsprozessen

In den vorherigen Ausführungen wurden die Problembearbeitungsprozesse anhand der Kategorien nach Schoenfeld (1985) strukturiert und voneinander getrennt betrachtet. Da es einige Wechselwirkungen zwischen den Kategorien gibt (Schoenfeld, 1985, S. 44), werden diese in den folgenden Ausführungen zusammen betrachtet.

Um sich dem Zusammenspiel zwischen den Kategorien zu nähern, werden im Folgenden zunächst die Interaktionen der jeweiligen Kategorien betrachtet

(Kapitel 6.4.1). Anschließend wird der Frage nachgegangen, welche Aspekte für die Episodenwechsel in einem Problembearbeitungsprozess ausschlaggebend sind (Kapitel 6.4.2). Außerdem werden die bisherigen Analysen herangezogen, um festzustellen, ob die Aufgaben tatsächlich Probleme für die Studierenden darstellen (Kapitel 6.4.3). Abschließend werden die zentralen Ergebnisse zu den gemeinsamen Betrachtungen festgehalten (Kapitel 6.4.4).

6.4.1 Interaktion der Kategorien des Problemlösens

Im Folgenden werden die Interaktionen zwischen den einzelnen Kategorien betrachtet. Dabei werden jeweils zwei Kategorien miteinander verglichen. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(Z1) *Welche Interaktionen lassen sich zwischen Steuerung, Heurismen und Wissen identifizieren?*

Interaktion zwischen Steuerung und Heurismen

Zu Beginn der Analyse wird die Interaktion von Steuerung und Heurismen betrachtet. In allen von Schoenfeld beschrieben Episoden lässt sich die Nutzung von Heurismen klar identifizieren (Abbildung 42).

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...
Begriffe klären (Bkl)		10	3			3	
Skizze (Skiz)		4	8		2	3	
Imaginäre Figur (imF)		1	7		2	2	
Spezialfall (SpF)	1		13		2	1	2
Fallunterscheidung (FU)				2	2		
Nutzung aller Voraussetzungen (NVor)		2	8	1	2	3	1
Systematisierungshilfen (SyH)		1	7		1		1
Metapher (Met)			6		1	2	
Rückführungsprinzip (RfP)			4		1		1
Ähnliche Aufgaben (Ähn)	2	8	19	5	8	1	3
Suche nach nützlichen Hinweisen (nüHi)		1	12				
Rückwärtsarbeiten (RüA)				1			
Vorwärtsarbeiten (VwA)	2	1	5	6	9	1	

Abbildung 42: Interaktion zwischen Steuerung und Heurismen (Code-Relations-Browser aus maxQDA)

Abbildung 42 zeigt die Häufigkeit der Interaktionen bestimmter Heurismen und Episoden aller Problembearbeitungsprozesse. Dabei sind bestimmte Interaktionen zwischen Heurismen und verschiedener Phasen im

Problembearbeitungsprozess charakteristisch. Die Episoden *Reading* (fünf Interaktionen zwischen Heurismen und Episoden nach Schoenfeld) und *Transition* (acht Interaktionen) werden an dieser Stelle nicht weiter betrachtet, da in den jeweiligen Episoden zu wenig Heurismen auftauchen.

Analysis (28 Interaktionen): In der Episode *Analysis* zeigt sich, dass der Fokus auf der *Klärung von Begriffen* sowie das Heranziehen von *Ähnlichen Aufgaben* liegt. Es geht den Studierenden darum, das jeweilige Konzept (Differenzierbarkeit), den Zusammenhang (Mittelwertsatz) und das Verfahren (L´Hospital) zu verstehen sowie den Anwendungskontext der Inhalte anhand ähnlicher Aufgaben zu analysieren.
Exploration (92 Interaktionen): In der Episode *Exploration* wird ein breites Spektrum verschiedener Heurismen genutzt. Die drei häufigsten Heurismen sind *Ähnliche Aufgabe*, *Suche nach neuen Hinweisen* und der Rückgriff auf einen *Spezialfall*.
Planning und **Implementation** (15 und 30 Interaktionen): Während *Planning* dominieren vor allem die Heurismen *Vorwärtsarbeiten* und *Ähnliche Aufgaben*. Beide Heurismen bleiben auch in der *Implementation* von zentraler Bedeutung. In diesen beiden Episoden wird der Fokus auf das schrittweise Voranschreiten in Richtung einer Lösung sowie der Rückgriff auf die Tutoriumsaufgabe gelegt.
Verification (16 Interaktionen): In der *Verification* werden ebenfalls eine Vielzahl von verschiedenen Heurismen genutzt. Allerdings lässt sich hierbei kein klarer Schwerpunkt auf spezifische oder typische Heurismen erkennen.

Die gleichen Tendenzen (wie oben aufgeführt) sind auch dann erkennbar, wenn die Heurismen hinsichtlich der Episoden aufgabenweise untersucht werden (siehe Anhang). Es existieren aufgrund der kleinen Stichprobe jedoch Einzelfälle, die herausstechen, wie zum Beispiel die häufige Nutzung des *Spezialfalls* in der Aufgabe „L´Hospital“, insbesondere durch den Prozess von David, der diesen Heurismus intensiv und an mehreren Stellen seines Prozesses verwendet hat.
Insgesamt ist die Menge und Vielfalt der angewandten Heurismen während der *Exploration* am größten. Dies bestätigt die Aussage von Schoenfeld, dass die *Exploration* das Herzstück des Problemlösens bildet (Schoenfeld, 1985, S. 110). Es ist jedoch erwähnenswert, dass verschiedene Heurismen auch in jeder weiteren Episode vorkommen, darunter insbesondere die *Implementation* (bzw. die dritte Phase in Pólyas Modell), auch wenn dies seltener geschieht. Diese Beobachtung wird durch die Ergebnisse von Rott (2013, S. 355) gestützt, der ebenfalls Heurismen in allen Episoden identifizieren konnte. Damit widerspricht dies zunächst den bestehenden Modellen zum Einsatz von Heurismen in bestimmten Phasen des Problembearbeitungsprozesses (vgl. Kapitel 2.5.2). Allerdings zeigt sich, dass die Häufigkeit der Verwendung spezifischer Heurismen durchaus dem theoretischen Modell von Bruder und Collet (2011) entspricht. Heuristische

Prinzipien (für das Finden von Lösungsideen), lassen sich vor allem in der *Exploration* wiederfinden. Während heuristische Hilfsmittel vor allem in der *Analysis* erwartet werden (und dies auch tun) sind sie ebenfalls stark in der *Exploration* vertreten. Dies könnte allerdings damit zusammenhängen, dass *Exploration* generell in den Problembearbeitungsprozessen dieser Arbeit einen großen Anteil einnimmt. Darüber hinaus zeigt sich, dass heuristische Strategien in allen Episoden des Problemlöseprozesses eine Rolle spielen, was ihren globalen Charakter verdeutlicht. Ihr Einfluss zeigt sich besonders in *Planning* und *Implementation*. Dies deutet ebenfalls auf einen lokalen Charakter einiger Heurismen der heuristischen Strategien hin, der bereits von Rott (2018) diskutiert wurde.
Der Heurismus *Ähnliche Aufgabe* spielt eine zentrale Rolle im gesamten Problembearbeitungsprozess und wird in jeder Episode des Prozesses genutzt. Dies liegt nahe, dass dieser Heurismus nicht auf eine spezifische Episode beschränkt ist, sondern vielmehr als allgemeiner Lösungsansatz in den meisten Problembearbeitungsprozessen benutzt wird. Im Kontext dieser Stichprobe könnte damit argumentiert werden, das *Ähnliche Aufgabe* primär einen algorithmischen Charakter besitzt und somit weniger als klassischer Heurismus verstanden werden kann. Insbesondere in der Episode *Exploration* kommt dieser Heurismus verstärkt zum Einsatz, wobei *Ähnliche Aufgaben* auch in den weiteren Episoden im Vergleich zu anderen Heurismen häufig genutzt werden.

An dieser Stelle soll die Interaktion der Kodiersysteme zwischen Heurismen und Steuerung näher betrachtet werden. Heurismen wurden so operationalisiert (Kapitel 5.4.3), dass sie theoretisch nicht strikt einer Phase bzw. Episode des Problemlöseprozesses (Kapitel 5.4.1) zugeordnet werden können. Dennoch zeigt sich, dass einige Heurismen eher für spezifische Phasen bzw. Episoden prädestiniert zu sein scheinen, was durch ihre häufige Nutzung in diesen Phasen bzw. Episoden bestätigt wird (Abbildung 42). Zwei dieser Heurismen werden im Folgenden beispielhaft kurz diskutiert. Zum einen ist dies *Begriffe klären* in der *Analysis*. *Begriffe klären* kann theoretisch und empirisch in anderen Phasen bzw. Episoden auftreten, allerdings scheint es insbesondere in der *Analysis* wichtig zu sein, diesen Heurismus anzuwenden, um weiterhin sinnvolle Phasen bzw. Episoden daran anzuschließen. Würde bereits an der Lösung gearbeitet werden, ohne zuvor alle Begriffe geklärt zu haben, wären diese zwangsläufig explorativer, da die Aufgabe noch nicht vollständig verstanden wäre. Zum anderen ist dies die *Suche nach nützlichen Hinweisen*, welcher insbesondere in die *Exploration* passt. Gerade dann, wenn Studierende nach irgendwelchen Hinweisen suchen, bewegen sie sich im Lösungsraum und suchen nach Informationen, die sie in irgendeiner Weise weiterbringen können. Dies zeigt sich ebenfalls darin, dass dieser Heurismus fast ausschließlich in der *Exploration* identifiziert werden kann.

Interaktion zwischen Steuerung und Wissen

Im Folgenden wird die Interaktion von Steuerung und Wissen aller Problembearbeitungsprozesse betrachtet. Das Wissen wird dabei jeweils hinsichtlich der Wissensarten (Abbildung 43) und der Wissensfacetten (Abbildung 44) unterschieden.

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...
Konzeptuelles Wissen	4	23	30	5	9	5	8
Prozedurales Wissen	2	4	40	13	26	2	6

Abbildung 43: Interaktion zwischen Steuerung und Wissensart (Code-Relations-Browser aus maxQDA)

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...
Implizite Nutzung	2	2	21	13	28	3	5
Explizite Formulierung		9	6		1		
Konkretisierung & Abgrenzung	4	8	29	4	3		4
Bedeutung & Vernetzung		5	12	1	4	2	1
Konventionelle Festlegungen		3	4	1	2	2	2

Abbildung 44: Interaktion zwischen Steuerung und Wissensfacette (Code-Relations-Browser aus maxQDA)

In allen analysierten Episoden lassen sich jeweils konzeptuelles als auch prozedurales Wissen identifizieren (Abbildung 43). Ebenso können die meisten Wissensfacetten in nahezu allen Episoden beobachtet werden (Abbildung 44). Insgesamt sind bestimmte Zusammenspiele zwischen Wissen und verschiedener Episoden bzw. Phasen im Problemlöseprozess charakteristisch. Die Episoden *Reading* (sechs Interaktionen zwischen Wissen und Episoden nach Schoenfeld) und *Verification* (sieben Interaktionen) werden an dieser Stelle nicht weiter betrachtet, da in den jeweiligen Episoden zu wenig Wissen genutzt wird.

Analysis (27 Interaktionen): In dieser Episode steht vor allem konzeptuelles Wissen im Vordergrund. Bezüglich der Wissensfacetten kommen alle Facetten zum Einsatz, jedoch dominieren hier die *Explizite Formulierung* sowie *Konkretisierung & Abgrenzung*.
Exploration (70 Interaktionen): Diese Episode zeichnet sich durch einen hohen Anteil sowohl an konzeptuellem als auch prozeduralem Wissen aus. Alle Facetten werden verwendet, jedoch sind die *Konkretisierung & Abrenzung* sowie die *Implizite Nutzung* besonders stark ausgeprägt.

Planning und **Implementation** (18 und 35 Interaktionen): Sowohl in *Planning* als auch in *Implementation* wird eher prozedurales als konzeptuelles Wissen genutzt. Hinsichtlich der Facetten zeigt sich ebenfalls ein ähnliches Muster. In beiden Episoden dominiert die *Implizite Nutzung*, wobei die *Explizite Formulierung* in *Planning* gar nicht auftaucht. Insgesamt zeigen beide Episoden eine sehr ähnliche Struktur bezüglich Wissensarten und Wissensfacetten.
Transition (14 Interaktionen): In dieser Episode sind konzeptuelles und prozedurales Wissen ausgewogen vertreten. Bei den Facetten stehen *Implizite Nutzung* sowie *Konkretisierung & Abgrenzung* im Vordergrund.

Die meisten Interaktionen von Steuerung und Wissen (Abbildung 43 und 44) lassen sich grundsätzlich auf die verschiedenen Aufgaben übertragen, wobei es jedoch einige Unterschiede gibt (siehe Anhang). In der *Exploration* wird in den Aufgaben „Differenzierbarkeit prüfen“ und „L´Hospital“ hauptsächlich prozedurales Wissen genutzt, während in der Aufgabe „Mittelwertsatz“ überwiegend konzeptuelles Wissen zum Einsatz kommt. Dieser Unterschied zeigt sich ebenfalls in der *Implementation*. Dieser Befund ist auf Grundlage der spezifischen Anforderungen der jeweiligen Aufgabe wenig überraschend, da somit die kognitiven Anforderungen der Aufgaben in der Wissensanwendung angemessen widergespiegelt werden. Ein weiterer Unterschied liegt im Einsatz von konzeptuellem Wissen in der *Analysis*. In den Aufgaben „Differenzierbarkeit prüfen“ und „Mittelwertsatz“ wird konzeptuelles Wissen jeweils 11-mal verwendet, während dies in der Aufgabe „L`Hospital“ nur 1-mal der Fall ist.
Bemerkenswerterweise zeigt sich bei den Wissensfacetten eine nahezu identische Verteilung über die Aufgaben hinweg, was angesichts der inhaltlichen Unterschiede der Aufgaben außergewöhnlich konstant ist. Allerdings lässt sich ein Unterschied feststellen. In den Aufgaben „Differenzierbarkeit prüfen“ und „L´Hospital“ wird bei *Planning* und *Implementation* verstärkt die Facette *Konkretisierung & Abgrenzung* genutzt, während in der Aufgabe „Mittelwertsatz“ die Facette *Bedeutung & Vernetzung* in diesen Episoden im Vordergrund steht. Insgesamt liefert die Übereinstimmung einen Hinweis, dass die Wissensfacetten unabhängig von den spezifischen Anforderungen der einzelnen Aufgaben in ähnlicher Weise aktiviert werden.

Die Kodiersysteme der Wissensarten und der Wissensfacetten (Kapitel 5.4.2) ist generell unabhängig von den verschiedenen Episoden des Problembearbeitungsprozesses (Kapitel 5.4.1). Allerdings zeigen sich auch hier in den empirischen Daten bestimmte Muster, die darauf hindeuten, dass Wissensarten und einige Wissensfacetten eher für spezifische Episoden prädestiniert sind, wie dies in Abbildung 43 und 44 deutlich wird. Diese Interaktionen werden im Folgenden beispielhaft kurz diskutiert.

Für die Wissensart wird dies an der Interaktion von konzeptuellem Wissen und *Analysis* deutlich. In den Problembearbeitungsprozessen dieser Arbeit versuchen Studierende, Konzepte und Zusammenhänge zu verstehen. Dies ist ein direkter Ausdruck von konzeptuellem Wissen, da es darauf ankommt, diese abstrakten Ideen korrekt zu verstehen und anzuwenden. Darüber hinaus gibt es weitere Aktivitäten in der *Analysis* (z. B. Paraphrasieren oder Darstellungswechsel), die ebenfalls Charakteristika von konzeptuellem Wissen sind.
Für die Wissensfacetten wird dies beispielhaft an zwei Interaktionen verdeutlicht. Das vermehrte Anwenden von *Impliziter Nutzung* ist in *Planning* und *Implementation* wenig überraschend, da es in dieser Episode die Anwendung von Wissen im Vordergrund steht. Im Vergleich dazu werden in der *Implementation* nur wenig andere Wissensfacetten herangezogen, was die Fokussierung auf die praktische Umsetzung unterstreicht. Bei *Planning* ist *Implizite Nutzung* eher ein Hinweis darauf, dass während der Planungsprozesse die Lösung berücksichtigt wird. Im Gegensatz dazu zeigt sich in der *Exploration* eine deutlich höhere Nutzung der Wissensfacette *Konkretisierung & Abgrenzung*. Dies hängt damit zusammen, dass in dieser Episode noch kein klarer Plan entwickelt wurde und Beispiele, wie in der Tutoriumsaufgabe, dabei helfen, sich im Lösungsraum zu orientieren und verschiedene Ansätze zu explorieren. Die Verwendung von Beispielen unterstützt dabei den Prozess, eine passende Lösungsstrategie zu finden, bevor z. B. ein detailliertes *Planning* erfolgen kann.

Interaktion zwischen Heurismen und Wissen

Im Folgenden wird die Interaktion von Heurismen und Wissen betrachtet. Das Wissen wird dabei nach Wissensarten und Wissensfacetten unterschieden.

Codesystem	Begrif...	Skizze...	Imagi...	Spezi...	Fallun...	Nutzu...	Syste...	Meta...	Rückf...	Ähnlic...	Suche...	Rück...	Vorwä...
Konzeptuelles Wissen	21	16	9	9		7	2	4	1	11	2		4
Prozedurales Wissen	3	1	1	12		5	2	1	3	24	11		7

Abbildung 45: Interaktion zwischen Heurismen und Wissensart (Code-Relations-Browser aus maxQDA)

Codesystem	Begrif...	Skizze...	Imagi...	Spezi...	Fallun...	Nutzu...	Syste...	Meta...	Rückf...	Ähnlic...	Suche...	Rück...	Vorwä...
Implizite Nutzung	1	4	3	5		7	1	3	3	14	2		9
Explizite Formulierung	10	1	1							1	3		
Konkretisierung & Abgrenzung	5		2	10		4	2			21	6		1
Bedeutung & Vernetzung	4	15	6			1		3	1		1		
Konventionelle Festlegungen	5	1								1	1		1

Abbildung 46: Interaktion zwischen Heurismen und Wissensfacette (Code-Relations-Browser aus maxQDA)

Der Zusammenhang zwischen Wissen und Heurismen zeigt, dass sich diese Kategorien in bestimmten Bereichen interagieren (Abbildung 45 und 46). Besonders auffällig ist jedoch, dass diese Interaktionen stark von den spezifischen Anforderungen der jeweiligen Aufgabe abhängen (siehe Anhang). Bezüglich der Wissensarten ist lediglich die Interaktion des Heurismus *Skizze* mit dem konzeptuellen Wissen konstant über jede Aufgabe zu identifizieren. Im Hinblick auf die Wissensfacetten sind die Interaktionen mit Heurismen ebenfalls sehr vielfältig und aufgabenspezifisch. Es lassen sich dennoch Gemeinsamkeiten für alle Aufgaben feststellen, die ebenfalls in Abbildung 46 zu erkennen sind. So lässt sich etwa der Heurismus *Ähnliche Aufgabe* stets mit der *Impliziten Nutzung* sowie der *Konkretisierung & Abgrenzung* in Verbindung setzen. Der Heurismus *Skizze* zeigt stets eine Interaktion mit *Bedeutung & Vernetzung* und der Heurismus *Vorwärtsarbeiten* immer mit der *Impliziten Nutzung*. Diese Beobachtungen verdeutlichen, dass bestimmte Heurismen mit bestimmtem Wissen verknüpft sind.

Heurismen und Wissen können grundsätzlich unabhängig voneinander kodiert werden. Dennoch zeigen sich empirisch einige Interaktionen, die auch theoretisch sinnvoll scheinen. Ein gutes Beispiel ist der Heurismus *Begriffe klären*. Dieser Heurismus ist eng mit konzeptuellem Wissen verbunden, da das Klären von Begriffen und deren Bedeutung eine tiefere Auseinandersetzung mit Definitionen und mathematischen Konzepten erfordert. Beim Klären von Begriffen geht es nicht nur darum, eine Definition zu finden, sondern auch darum, den Begriff im Kontext zu verstehen. Dieses Vorgehen ist daher stark auf das konzeptuelle Wissen angewiesen.
Auch die sogenannten „visuellen" Heurismen (*Skizze*, *Imaginäre Figur* und *Metapher*) zeigen eine starke Verbindung zum konzeptuellen Wissen. Bei diesen Heurismen werden visuelle Darstellungen von mathematischen Konzepten oder Zusammenhängen genutzt, um das Verständnis zu erleichtern. Diese Hilfsmittel erfordern ein grundlegendes Verständnis der Konzepte und Zusammenhänge, die sie darstellen, und sind daher eng mit dem konzeptuellen Wissen verknüpft. Bei spezifischen mathematischen Verfahren (prozedurales Wissen), die weniger anschaulich oder visuell zugänglich sind, ist diese Art von Heurismus allerdings weniger hilfreich.

6.4.2 Zusammenhang zwischen Wissen, Heurismen und Episodenwechseln

Im Folgenden werden die Episodenwechsel (Kapitel 6.1.4) erneut betrachtet, diesmal unter Einbezug der Kategorien Heurismen und Wissen. Episodenwechsel stellen kritische Momente in einem Problemlöseprozess dar (Schoenfeld, 1985, S. 292; Kapitel 5.4.1), weshalb es wichtig ist, genau zu untersuchen, was in diesen Übergängen passiert. Dabei wird aufgezeigt, inwiefern Heurismen und Wissen eine Rolle beim Wechsel von Episoden spielen. Die Analyse dieser beiden

Kategorien hilft dabei besser zu verstehen, wie diese Wechsel den Verlauf des Problemlösens beeinflussen. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(Z2) *Welche Rolle spielen Wissen und Heurismen bei einem Episodenwechsel?*

Zu Beginn wird festgelegt, dass diese Frage nicht hinsichtlich aller Episodenwechsel untersucht wird. Stattdessen wird ein Fokus auf Episodenwechsel gelegt, die in eine *Exploration* münden. Die Auswahl der *Exploration* als Schwerpunkt ist aus mehreren empirischen als auch theoretischen Gründen gerechtfertigt. Erstens zeigen die bereits vorliegenden Daten, dass Studierende empirisch betrachtet in der *Exploration* die meiste Zeit verbringen (Kapitel 6.1.2) und sie damit eine besondere Episode darstellt. Zweitens birgt die Episode nachweislich das Potenzial, in einem „wild goose chase“ zu münden (Kapitel 6.1.5). Dies kann laut Schoenfeld (1985, S. 116) und den eigenen Daten einen Einfluss auf den Erfolg ausüben (Kapitel 6.1.6). Drittens stellt die *Exploration* das Herzstück des Problemlösen dar (Schoenfeld, 1985, S. 110). Aus diesem Grund werden viele Heurismen und die Nutzung von Wissen erwartet. Sowohl die Interaktionen zwischen *Exploration* und Heurismen als auch Wissen bestätigen dies bereits (Kapitel 6.4.1). Es bleibt lediglich zu zeigen, inwiefern Wissen und Heurismen den Episodenwechsel beeinflussen.
Bei der Betrachtung der Episodenwechsel lassen sich drei wesentliche Fälle identifizieren, die den Zusammenhang zwischen einem Episodenwechsel und einer Kategorie charakterisieren (Abbildung 47). Dies wird beispielhaft mit der Kategorie Heurismus dargestellt.
Fall A: Ein Heurismus wird bereits in der „alten“ Episode angewendet und bleibt auch nach dem Wechsel in die neue Episode (*Exploration*) weiterhin bestehen.
Fall B: Der Einsatz eines Heurismus beginnt genau mit dem Episodenwechsel zur *Exploration*. Entscheidend ist nicht die Dauer der Identifikation, sondern nur der gleiche Startpunkt mit der Episode.
Fall C: Ein Heurismus kommt erst nach dem Episodenwechsel zur Anwendung, d. h., er wird erst in der *Exploration* selbst genutzt. Auch hier kommt es nicht auf die Länge des Heurismus an, sondern dass der Startpunkt nach dem Episodenwechsel stattfindet.

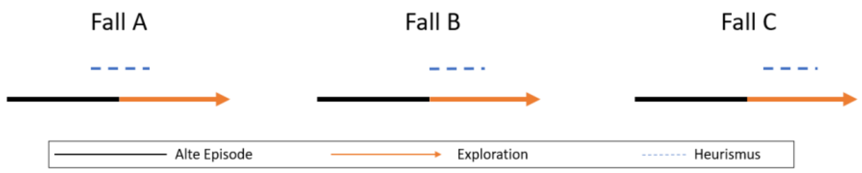


Abbildung 47: Fälle von Episodenwechseln

Für die Fälle A und B wird definiert, dass der betreffende Heurismus einen Einfluss auf den Wechsel in die *Exploration* hat, indem dieser den Übergang mitgestaltet oder unterstützt. Im Gegensatz dazu wird im Fall C festgelegt, dass der Heurismus den Episodenwechsel selbst nicht beeinflusst, sondern lediglich in der neuen Episode eine Rolle spielt. Möglicherweise hat im Fall C sogar die Episode einen Einfluss auf den Heurismus.
Anhand dieser beschriebenen drei Fälle wird untersucht, inwiefern Wissen oder bzw. und Heurismen den Episodenwechsel zur *Exploration* beeinflussen. Insgesamt wurden den Daten dieser Arbeit in 33 Episodenwechsel in die *Exploration* identifiziert. Tabelle 37 fasst zusammen, welche Falltypen bei den Episodenwechseln aufgetreten sind und verdeutlicht, ob der Wechsel zur *Exploration* durch die Verwendung eines Heurismus, den Einsatz von Wissen, eine Kombination aus beidem oder keines von beiden ausgelöst wird.

Episodenwechsel wird beeinflusst durch …	**Anzahl**
Nur Wissen	5
Nur Heurismen	7
Kombination aus Wissen und Heurismen	10
Weder Wissen noch Heurismen	11

Tabelle 37: Verwendung von Heurismen und Wissen bei einem Episodenwechsel in *Exploration*

In Tabelle 37 wird deutlich, dass in etwa zwei Drittel der Episodenwechsel entweder Heurismen, Wissen oder beides einen Einfluss auf den Wechsel zur *Exploration* haben. Diese Fälle werden kurz anhand eines Beispiels beschrieben.

Nur Wissen: Der Wechsel in die *Exploration* wird bei Lea, Lisa, Sarah und Paula in der Aufgabe „Mittelwertsatz“ dadurch ausgelöst, dass sie beginnen, sich intensiv über die Betragsstriche auszutauschen. Ein Heurismus wird dabei jedoch nicht verwendet.
Nur Heurismus: Der Wechsel in die *Exploration* wird bei Alex und Thomas in der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ dadurch ausgelöst, indem sie die *Suche nach nützlichen Hinweisen* initiieren. Darüber hinaus nutzen sie kein spezifisches *Wissen*.
Kombination aus Wissen und Heurismen: Der Wechsel in die *Exploration* bei Nick erfolgt, indem er eine *Ähnliche Aufgabe* hinzuzieht. Dabei aktiviert er gleichzeitig die Facette *Konkretisierung & Abgrenzung* des prozeduralen Wissens, sodass sowohl Wissen als auch Heurismen eine Rolle beim Episodenwechsel spielen.

Letztlich stellt sich die Frage, ob bestimmtes Wissen oder spezifische Heurismen maßgeblich für Episodenwechsel hin zu *Exploration* verantwortlich sind. Besonders die häufigen Interaktionen zwischen diesen Kategorien (Kapitel 6.4.1) könnten dabei eine Rolle spielen. Betrachtet man die Heurismen, zeigt sich, dass in sieben von 18 Fällen der Heurismus *Ähnliche Aufgabe* an einem Episodenwechsel zur *Exploration* beteiligt ist. In den übrigen Fällen kommen andere Heurismen zum Einsatz, allerdings mit deutlich geringerer Häufigkeit. Hinsichtlich des Wissens fällt auf, dass in elf von 16 Fällen die Wissensfacette *Konkretisierung & Abgrenzung* eine Rolle spielt, während in vier weiteren Fällen *Implizite Nutzung* den Übergang beeinflusst. Zusammengefasst zeigt sich, dass die festgestellten, häufigen Interaktionen zwischen spezifischem Wissen und Heurismen mit der *Exploration* primär für die Übergänge zu dieser Episode verantwortlich sind.

Weder Wissen noch Heurismen: In einem Drittel der Episodenwechsel erfolgt der Übergang zur *Exploration* allerdings komplett unabhängig von Wissen oder Heurismen. Diese Fälle werfen die Frage auf, wie ein Wechsel zur *Exploration* ohne diese beiden Kategorien zustande kommt und was letztendlich den Ausschlag für einen Episodenwechsel gibt.
In diesen Fällen scheint die Metakognition bzw. selbstregulatorische Aspekte[68] eine entscheidende Rolle zu spielen, was im Folgenden an Beispielen verdeutlicht wird. So initiiert David etwa den Wechsel in die *Exploration*, indem er sein aktuelles Vorgehen hinterfragt („Ist das richtig?") und sich anschließend in seinen zugehörigen Materialien verliert. Ein weiteres Beispiel zeigt sich darin, dass David mit den aktuell vorhandenen Informationen einen Versuch wagen möchte („Ich schreibe einfach mal auf"). Eine weitere Auffälligkeit ist der Wechsel von *Implementation* zu *Exploration*, der bereits in Kapitel 6.1.4 thematisiert wurde. Hier zeigt sich erneut, dass das Erkennen eigener Herausforderungen diesen Episodenwechsel einleitet, was wiederum auch auf lokaler Ebene auf selbstregulative Prozesse hinweist.

Ob ein Episodenwechsel durch Wissen, Heurismen, einer Kombination von beidem oder durch keines von beidem beeinflusst wird, hat letztendlich keinen erkennbaren Einfluss darauf, ob die folgende Episode in einem „wild goose chase" endet. Insgesamt lässt sich allerdings festhalten, dass Wissen, Heurismen und Steuerung (auf lokaler Ebene) einen Episodenwechsel zur *Exploration* bewirken können. Darüber hinaus sind allerdings weitere Episodenwechsel interessant zu untersuchen. Neben der *Exploration* erscheint als bedeutsames Gegenstück das strukturierte Vorgehen (*Planning* + *Implementation*). Die Abgrenzung zwischen diesen beiden Verhaltensansätzen könnte aufschlussreich sein, welche Aspekte zum Wechsel in einen explorativen bzw. strukturierten Vorgehen führen. Zudem kann es auch relevant sein, wie der Wechsel aus einer spezifischen Episode heraus erfolgt. Ein Beispiel hierfür ist das Vermeiden eines „wild goose chases". Solche Situationen werfen die Frage auf, welche

68 Damit ist das präskriptive (lokale) Level von Steuerung gemeint (Kapitel 2.3).

Mechanismen und kognitiven Prozesse einer problemlösenden Person helfen, eine festgefahrene oder ineffiziente Episode zu erkennen und zu verlassen. Bei der Rolle von Steuerung auf lokaler Ebene wären allerdings noch weitere Untersuchungen sinnvoll, um diesen Zusammenhang besser zu verstehen. Dies könnte beispielweise durch zusätzliche Kodiersysteme erfolgen, so wie Rott (2013, S. 375ff.) bereits einige Episodenwechsel kodiert hat.

6.4.3 Empirische Entscheidung zu Problemlöseprozessen

Im Folgenden wird die Diskussion bezüglich Routine- und Problemaufgaben aufgegriffen (Kapitel 2.2). Es stellt sich die Frage, ob die Prozesse der Studierenden empirisch anhand der Auswertung zu den Kategorien als Problemlöseprozesse (und demnach als Probleme) aufgefasst werden können. Die folgenden Ausführungen adressieren demnach die Forschungsfrage:

(Z3) *Kann empirisch entschieden werden, ob die Aufgaben für die Studierenden Probleme darstellen?*

Zunächst folgt eine kurze Betrachtung der Aufgaben, bevor auf die Nutzung der drei Kategorien des Problemlösens durch die Studierenden eingegangen wird.
Eine dichotome Einteilung von Aufgaben in Routine und Nicht-Routine (bzw. Probleme) erweist sich in verschiedenen Kontexten als problematisch (z. B. Berry et al., 1999). Auch in dieser Arbeit gestaltet sich die eindeutige Zuordnung der drei Aufgaben als schwierig. Für die Aufgabe „Mittelwertsatz“ (Tabelle 10) wird überwiegend konzeptuelles Wissen (ca. 86 %) gefordert, während für die Aufgabe „L´Hospital“ (Tabelle 11) überwiegend prozedurales Wissen (ca. 80 %) benötigt wird. In beiden Aufgaben wird lediglich ein mathematischer Inhalt (Konzept, Zusammenhang oder Verfahren) der jeweils anderen Wissensart erfordert. Für beide Aufgaben könnte man daher nach dem Ausschlussprinzip folgern, dass sie zur Routine- bzw. Problemaufgabe zugeordnet werden. Die Aufgabe „Mittelwertsatz“ ist nahezu vollständig ohne ein Verfahren zu lösen, während die Aufgabe „L’Hospital“ fast ausschließlich durch die Anwendung von Verfahren bewältigt wird. Deutlich schwieriger wird die Zuordnung für die Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“ (Tabelle 9), da die Anforderungen der Aufgabe zur Hälfte aus dem konzeptuellen und prozeduralen Wissen bestehen. Muss an dieser Stelle demnach von einem Aufgabentyp gesprochen werden, welcher dazwischen liegt (Rott, 2013, S. 26)? Besonders hinsichtlich des konzeptuellen und prozeduralen Wissens ist eine solche Einteilung von Aufgaben nicht leicht voneinander zu trennen (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). Vielmehr existieren auch solche Aufgaben, die nicht einer Wissensart zugeordnet werden können, sondern in denen sich Wissensarten gegenseitig ergänzen bzw. unterstützen (Kolbe & Liebendörfer, 2024). Anhand der (theoretischen) Einordnung bezüglich der Aufgaben bestätigt sich zumindest für die Aufgabe „Differenzierbarkeit

prüfen“, dass eine Einteilung in Routine- bzw. Problemaufgabe nicht ausreichend ist.
Im Folgenden werden die Auswertungen zu den Kategorien von Schoenfeld (1985) herangezogen, um Hinweise dafür zu identifizieren, ob es sich bei den Aufgaben um Probleme handelt.
Die Analyse der Kodierung der Schoenfeld Episoden liefert einige aufschlussreiche Hinweise zur Art des Prozesses der Studierenden. Zunächst zeigt sich, dass die Episode *Exploration* den größten Teil der Bearbeitungszeit in Anspruch nimmt und in jedem Prozess vorkommt (Kapitel 6.1.2 und 6.1.3). Dies ist bedeutsam, da *Exploration* laut Schoenfeld (1985, S. 110) das Herzstück des Problemlösens darstellt und daher ein Indiz dafür sein könnte, dass die Studierenden tatsächlich vor einem Problem standen, das mehr als eine routinemäßige Lösung erfordert. Darüber hinaus treten Charakteristika eines „wild goose chases“ auf (Kapitel 6.1.5), die auf typisches Problemlöseverhalten hindeuten. Die Studierenden verfolgen dabei keinen klar strukturierten Lösungsweg, was auf eine fehlende Routine in der Herangehensweise hindeutet. Des Weiteren lassen die vielen Wechsel zwischen den Episoden (Kapitel 6.1.4) auf den ersten Blick auf eine gute Selbstregulation schließen. Allerdings sollte bemerkt werden, dass bei Routineaufgaben weniger selbstregulative Aspekte zu erwarten sind, da diese Aufgaben meistens eine festgelegte Abfolge von Schritten voraussetzen. Zyklische Prozesse deuten dabei auf einen typischen Problembearbeitungsverlauf hin (Kapitel 2.3.3). Viele Episodenwechsel im Prozess weisen möglicherweise eher auf kleine Barrieren in der Bearbeitung hin, die durch einen Verhaltenswechsel umgangen werden.
Hinsichtlich der Kodierung des Wissens können ebenfalls einige Hinweise diskutiert werden, die auf Existenz eines Problembearbeitungsprozesses hindeuten. Obwohl im Gesamtüberblick (Tabelle 23) konzeptuelles und prozedurales Wissen ausgeglichen benutzt bzw. aktiviert worden sind, erkennt man aus der aufgabenweisen Betrachtung, dass dies nicht für jede Aufgabe gleichermaßen gilt. In den beiden Aufgaben „Differenzierbarkeit prüfen“ (ca. 63 % der genutzten Wissenselemente) und „L´Hospital“ (ca. 70 %) überwiegt die Nutzung des prozeduralen Wissens mit kleineren Anteilen des konzeptuellen Wissens, während für die Aufgabe „Mittelwertsatz“ (ca. 91 %) die Nutzung des konzeptuellen Wissens deutlich überwiegt. Diese Häufigkeitsverteilung ähnelt den unterschiedlichen Anforderungen der Aufgaben, die bereits in Kapitel 5.3 festgestellt worden sind. Es ist schwierig aus dem Nutzungsverhalten der Studierenden eine eindeutige Aussage darüber abzuleiten, ob eine Aufgabe als Routine- oder Problemlöseaufgabe eingestuft werden kann. Prozedurale Aufgaben erfordern naturgemäß mehr prozedurales Wissen, während konzeptuelle Aufgaben eher konzeptuelles Wissen verlangen (Kapitel 6.2.3). Aus der Wissensnutzung der Studierenden auf die Art der Aufgabe zu schließen, führt jedoch zu einem Zirkelschluss. Prozedurale Aufgaben werden im Vorhinein

aufgrund des algorithmischen Vorgehens häufig als Routineaufgaben betrachtet, und eine Analyse, die diese Annahme auf Basis der Wissensnutzung bestätigt, wäre daher unlogisch und zirkulär. Die Analyse der Schwierigkeiten hat darüber hinaus gezeigt, dass in jeder Aufgabe inhaltliche Schwierigkeiten auftreten (Kapitel 6.2.6), was auf Barrieren in der Bearbeitung hindeutet (Heinrich et al., 2015). Obwohl die Schwierigkeiten vielseitig sind, hat sich herausgestellt, dass in den Aufgaben „Differenzierbarkeit prüfen" und „L´Hospital" vor allem prozedurale Schwierigkeiten und in der Aufgabe „Mittelwertsatz" vor allem konzeptuelle Schwierigkeiten auftreten.
Die Analyse zur Kodierung der eingesetzten Heurismen liefert ebenfalls wertvolle Hinweise zur Art des Prozesses. In jedem Prozess ist die Nutzung von Heurismen nachweisbar, wobei deren Häufigkeit variiert. Während einige Prozesse eine geringe Nutzung von Heurismen aufweisen, zeigen andere eine deutlich intensivere Anwendung. Die Präsenz von Heurismen deutet allerdings darauf hin, dass ein Problembearbeitungsprozess vorliegt (Kapitel 2.5.1). Allerdings lässt sich der am häufigste angewandte Heurismus *Ähnliche Aufgabe* durchaus diskutieren. Im Kontext der Veranstaltung deutet es potenziell eher auf ein algorithmisches Vorgehen hin, da der Heurismus häufig und in jeder Episode des Prozesses eingesetzt wird. Algorithmisches Vorgehen grenzt sich eher von einem Heurismus ab und ist damit auch kein Teil des Problemlösen.
Aus den bisherigen Ausführungen lassen sich verschiedene Indikatoren identifizieren, die auf einen Problembearbeitungsprozess hinweisen können. Diese Indikatoren werden nun herangezogen und im Folgenden operationalisiert. Hinsichtlich der Steuerung werden drei Indikatoren operationalisiert.

1. Im Prozess wird mindestens 33 % der Zeit in der Episode *Exploration* verbracht (***33 %***).
2. Im Prozess sind Charakteristika eines „wild goose chases" zu erkennen (***WGC***).
3. Der Prozess weist entweder eine zyklische Struktur oder mindestens acht Episodenwechsel auf (***ZYK***).

Hinsichtlich des Wissens wird ein Indikator operationalisiert.

4. Im Prozess treten Schwierigkeiten auf (***SCH***).

Hinsichtlich der Heurismen wird ein Indikator operationalisiert.

5. Im Prozess werden an acht verschiedenen Stellen Heurismen identifiziert oder insgesamt vier verschiedene Heurismen (***HEU***).

Die Untergrenzen hinsichtlich der Nutzung von Heurismen werden festgelegt, um den zufälligen Einsatz von Heurismen sowie eine systematische (algorithmische) Anwendung spezifischer Heurismen ausschließen zu können.
Zusätzlich gibt es eine ergänzende allgemeine Kategorie, die ebenfalls Hinweise auf einen Problembearbeitungsprozess liefert. Dabei werden zwei Indikatoren operationalisiert.

6. Der Prozess wurde eigens abgebrochen, da keine zufriedenstellende Lösung erzielt wird (***ABB***). Zu einem späteren Zeitpunkt kann der Lösungsprozess wieder aufgenommen werden.
7. Im gesamten Prozess wurde lediglich ein falscher bzw. nicht zielführender Lösungsweg verfolgt (***FLW***).

	33 %	**WGC**	**ZYK**	**SCH**	**HEU**	**ABB**	**FLW**	***Σ***
Differenzierbarkeit prüfen								
G3	X		X	X	X	X		5
G4				X	X			2
David	X	X		X	X	X		5
Nick			X	X			X	3
Lukas	X	X	X	X		X	X	6
MWS								
G3	X		X	X	X			4
G4	X		X	X	X			4
David	X	X	X	X	X	X		6
Nick	X		X	X	X			4
L´Hospital								
G3	X		X	X	X			4
G4	X		X	X	X			4
David	X	X	X	X	X	X		6
Nick	X	X	X	X	X			4
33 % = 33 % *Exploration*; WGC = wild goose chase; ZYK = zyklisch; SCH = Schwierigkeiten; HEU = Heurismen; ABB = Abbruch; FLW = Falscher Lösungsweg								

Tabelle 38: Empirische Entscheidung zu Problembearbeitungsprozessen

In Tabelle 38 wird deutlich, dass in allen Prozessen Hinweise darauf vorliegen, dass sie Problembearbeitungen enthalten. Besonders fällt die Lerngruppe, bestehend aus Lea, Lisa, Sarah und Paula auf, die nur zwei Indikatoren für einen Problembearbeitungsprozess erfüllt und damit die wenigsten Anzeichen für ein Problem zeigt. Dieser Prozess verläuft zudem zeitlich sehr kurz und zeichnet sich dadurch aus, dass Schwierigkeiten zwar auftreten, aber schnell überwunden werden. Trotz der kurzen Dauer werden in diesem Prozess vier verschiedene Heurismen eingesetzt. Letztlich hat die Lerngruppe die Aufgabe vollständig korrekt gelöst. Im Gegensatz dazu gibt es drei Prozesse, in denen sechs von sieben

möglichen Indikatoren eines Problembearbeitungsprozesses erfüllt werden. In dieser Arbeit wird ein Prozess dann als Problembearbeitungsprozesses gewertet, wenn mindestens vier Indikatoren identifiziert werden können. Vier Indikatoren erscheinen eine angemessene Zahl zu sein, um sicherzustellen, dass ein Prozess nur dann als Problemlöseprozess eingestuft wird, wenn Indikatoren aus mindestens zwei der vier Kategorien identifiziert werden können. Ausgehend von dieser Definition zeigen elf von 13 untersuchten Prozessen Merkmale eines Problembearbeitungsprozesses, während nur zwei Prozesse nicht als solche klassifiziert werden.
Bezogen auf die zugrunde liegenden Aufgaben lässt sich durch die Analyse der vorliegenden Daten feststellen, dass die Aufgaben zum „Mittelwertsatz“ und „L´Hospital“ in diesem Kontext als Problemaufgaben für die Studierenden einzustufen sind, während die Aufgabe zur Überprüfung der Differenzierbarkeit gemischte Merkmale aufweist.

6.4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse zur Analyse der gemeinsamen Betrachtung

Abschließend werden für das Kapitel 6.4 die zentralen Ergebnisse der Analyse hinsichtlich der gemeinsamen Betrachtung zusammengefasst:

- Die Episode *Analysis* interagiert vor allem mit dem *Klären von Begriffen* und konzeptuelles Wissen mit den Facetten *Explizite Formulierung* sowie *Konkretisierung & Abgrenzung* (Kapitel 6.4.1).
- Die Episode *Exploration* interagiert vor allem mit *Suche nach Hinweisen*, *Spezialfall* und den Facetten *Konkretisierung & Abgrenzung* sowie *Implizite Nutzung* (Kapitel 6.4.1).
- Die Episoden *Planning + Implementation* interagieren vor allem mit *Vorwärtsarbeiten* und den Facetten *Implizite Nutzung* und *Explizite Formulierung* (Kapitel 6.4.1).
- Visuelle Heurismen (*Skizze*, *imaginäre Figur und Metapher*) und *Begriffe klären* interagieren häufig mit *konzeptuellem* Wissen.
- Wissen und Heurismen können (alleine oder gemeinsam) einen Einfluss auf Episodenwechsel haben. Es gibt auch Episodenwechsel unabhängig von Wissen und Heurismen (Kapitel 6.4.2).
- Die Bearbeitungsprozesse stellen sich empirisch als Problembearbeitungen heraus. Die Aufgaben stellen damit Probleme für Ingenieurstudierende dar (Kapitel 6.4.3).

7 Diskussion

In diesem Kapitel wird die vorliegende Studie diskutiert und in den wissenschaftlichen Kontext eingeordnet. Zunächst erfolgt eine kurze Zusammenfassung der empirischen Studie (Kapitel 7.1). Anschließend werden die Ergebnisse weiterverarbeitet und reflektiert. Dabei werden die Forschungsfragen zusammenfassend beantwortet, die Ergebnisse mit ähnlichen Studien (falls vorhanden) verglichen und theoretischen Implikationen abgeleitet (Kapitel 7.2). Darauf aufbauend werden praktische Implikationen aufgezeigt, die sich aus den Ergebnissen für die Anwendung in der Praxis ableiten lassen (Kapitel 7.3). Die eingesetzten Methoden werden kritisch diskutiert, um deren Eignung und potenzielle Schwächen zu beleuchten (Kapitel 7.4). Ein Ausblick auf zukünftige Forschungsvorhaben rundet das Kapitel ab, wobei offene Fragen und weiterführende Forschungsansätze skizziert werden (Kapitel 7.5).

7.1 Kurzzusammenfassung der empirischen Studie

Die empirische Studie untersucht mathematische Problembearbeitungsprozesse von Ingenieurstudierenden in einem authentischen Setting (Kapitel 5.2.2) an der Universität Paderborn. Dabei wurden Studierende (teilweise) in Lerngruppen bei der Bearbeitung von Hausaufgaben zur Differentialrechnung beobachtet. Die teilnehmenden Studierenden wurden gebeten, ihre Gedanken während der Bearbeitungsprozesse zu verbalisieren („Lautes Denken"). Die Studie analysiert 13 Prozesse von fünf Lerngruppen zu drei Aufgaben: „Differenzierbarkeit prüfen", „Mittelwertsatz" und „L´Hospital" (Kapitel 5.3).
Für die Analyse dieser Studie wurden die vier Kategorien des mathematischen Problemlösens nach Schoenfeld (1985) herangezogen, wobei der Fokus dieser Studie auf den drei Kategorien *Steuerung*, *Wissen* und *Heurismen* lag. Zur Feststellung der Kategorie Steuerung wurden die Schoenfeld Episoden verwendet, um die verschiedenen Phasen des Problemlösens zu identifizieren (Kapitel 5.4.1). Zur Erfassung des Wissensangebots und der Wissensnutzung wurde die Wissensmatrix (Prediger et al., 2011) herangezogen (Kapitel 5.4.2). Außerdem wurde ein bestehendes Kategoriensystem für Heurismen (Rott, 2013; Stenzel, 2023a) übernommen und leicht adaptiert, um spezifische Problemlösestrategien zu erfassen (Kapitel 5.4.3). Abschließend wurden die drei Kategorien unter Berücksichtigung der vorherigen Analysen gemeinsam betrachtet.
Die Ergebnisse der Auswertung befinden sich in detaillierter Form in den jeweiligen Kapiteln der Kategorien (für Steuerung in Kapitel 6.1; für Wissen in Kapitel 6.2; für Heurismen in Kapitel 6.3; für gemeinsame Betrachtung in Kapitel 6.4). Diese Ergebnisse werden nun genutzt, um die Forschungsfragen zu beantworten.

7.2 Beantwortung der empirischen Forschungsfragen und Einordnung in die Theorie

In diesem Kapitel wird die Struktur aus dem vorangegangenen Abschnitt übernommen, um die gewonnenen Erkenntnisse weiter zu verarbeiten. Dabei werden die Ergebnisse herangezogen, um die Forschungsfragen zu beantworten und in den theoretischen Kontext einzuordnen. Der Fokus liegt dabei auf den Kategorien der *Steuerung* (Kapitel 7.2.1), des *Wissens* (Kapitel 7.2.2), der *Heurismen* (Kapitel 7.2.3) und der gemeinsamen Betrachtung (Kapitel 7.2.4). Abschließend erfolgt eine Einbettung der Ergebnisse in den Kontext mathematischer Lernprozesse (Kapitel 7.2.5).

7.2.1 Zur Rekonstruktion von Steuerung

(S1) Welche Episoden durchlaufen Ingenieurstudierende bei mathematischen Problembearbeitungsprozessen

Jeder Problembearbeitungsprozess ist individuell. In der ausführlich dargestellten Fallanalyse von Alex und Thomas (Kapitel 6.1.1) wird deutlich, wie ein solcher Prozess aussehen kann. Alex und Thomas beginnen mit einem strukturierten Vorgehen, stoßen auf Schwierigkeiten, die sie überwinden und gelangen zu einem Ergebnis, welches sie verifizieren. Die Schoenfeld Episoden helfen dabei, den Prozess zu abstrahieren und darzustellen. Mittels eines Gesamtüberblicks (Kapitel 6.1.2) lässt sich feststellen, dass Studierende durchschnittlich am meisten Zeit in der *Exploration* (51,6 %) verbringen. Obwohl in anderen Studien nicht immer ein spezifischer Durchschnittswert für die Dauer der einzelnen Episodentypen angegeben wird, lässt sich dennoch aus den Ergebnissen ableiten, dass die problemlösenden Personen den größten Teil ihrer Zeit in der *Exploration* verbracht haben (z. B. Herold-Blasius, 2019, S. 214; Stenzel, 2023a). Besonders deutlich wird dies in der Untersuchung von Schoenfeld (1992b), in der über 60 % der beobachteten Prozesse fast ausschließlich aus explorativen Aktivitäten bestehen. In dieser Studie nimmt *Implementation* (23,2 %) etwa ein Viertel der Zeit ein. Dies scheint im Vergleich zu anderen Studien eher ungewöhnlich hoch zu sein (z. B. Herold-Blasius, 2019, S. 214). In den restlichen Episoden befinden sich Studierende durchschnittlich nur zu einem geringen Teil (3,5 % – 8,4 %).
Die durchschnittlichen Werte geben einen groben Rahmen vor. Zwischen den Lerngruppen in dieser Studie gibt es allerdings Unterschiede, wobei sich die Verläufe innerhalb einer Lerngruppe über verschiedene Aufgaben ähneln (Kapitel 6.1.3). Z. B. ist es für die Prozessverläufe von Alex und Thomas auffällig, dass sie zügig in eine Bearbeitung starten, dabei allerdings auf Schwierigkeiten treffen (*Implementation* → *Exploration*). Lea, Lisa, Sarah und Paula hingegen planen ihr Vorgehen, bevor sie dieses umsetzen (*Planning*/*Implementation* → *Exploration* → *Implementation* → *Verification*). David setzt sich intensiv mit der

Aufgabenstellung auseinander, um anschließend nach Lösungsmöglichkeiten zu suchen (*Analysis* → *Exploration*). Lukas[69] plant sein Vorgehen oftmals mit den Tipps, welche er aus dem Tutorium erhalten hat, gelangt anschließend allerdings immer in Schwierigkeiten und sucht nach Lösungsmöglichkeiten (*Planning*/*Implementation* → *Exploration*). Nur Nick zeigt in den drei Aufgaben jeweils ein unterschiedliches Verhalten. Das Problemlöseverhalten könnte daher (in vier von fünf Fällen) lerngruppenabhängig verlaufen. Die unterschiedlichen Aufgaben scheinen dabei nur einen Einfluss auf das Verhalten von Nick zu haben. Insgesamt legen die Ergebnisse nahe, dass die Problembearbeitungsprozesse hinsichtlich der Steuerung in stärkerem Maße von der Lerngruppe als der spezifischen Aufgabe abhängen.

(S2) Welche Episodenwechsel treten in den Problembearbeitungsprozessen auf? Verlaufen die Prozesse linear?

In der Stichprobe dieser Studie gibt es durchschnittlich 9,1 Episodenwechsel pro Problembearbeitungsprozess (Kapitel 6.1.4). Im Vergleich zu Prozessen von Schüler:innen (2,78 Episodenwechsel) ist dies deutlich höher (Herold-Blasius, 2019, S. 218ff). Mögliche Gründe können zum einen der Unterschied zwischen der Komplexität der Aufgaben sein und zum anderen eine im Vergleich zu Kindern erhöhte selbstregulatorische Kompetenz von Studierenden.
Die Prozesse lassen sich weiterhin in lineare (zwei von 13) und nicht-lineare Prozesse (elf von 13) einteilen. Problembearbeitungsprozesse von Schüler:innen hingegen sind zum großen Teil (68 von 98) linear (Rott, 2013, S. 298). Die hohe Anzahl von linearen Prozessen bei Schüler:innen passt ebenfalls mit der geringen Anzahl von Episodenwechseln (in Herold-Blasius, 2019, S. 218ff.) zusammen. Insgesamt zeigt sich in den Prozessen, dass die vorliegenden hochschulischen Problembearbeitungsprozesse nicht-linear verlaufen. Damit bestätigen sich die theoretischen Annahmen (z. B. Newell & Simon, 1972; Schoenfeld, 1985; Rott, 2013), dass Problembearbeitungsprozesse nicht immer linear verlaufen.
Hinsichtlich der nicht-linearen Prozesse lassen sich in der vorliegenden Studie vor allem drei nicht-lineare Episodenwechsel herausstellen: *Implementation* → *Exploration* (12-mal), *Exploration* → *Analysis* (7-mal), *Implementation* → *Planning* (4-Mal).

69 In dieser Untersuchung wurde nur eine Aufgabe von Lukas ausführlich analysiert. Weitere Aufgabenbearbeitungen, die nicht für diese Arbeit analysiert werden, verlaufen allerdings ähnlich.

(S3) Inwiefern lassen sich „wild goose chases“ in den Problembearbeitungsprozessen identifizieren und inwiefern können Studierende dieses Verhalten vermeiden?

Das Problemlöseverhalten „wild goose chase“ wird in einigen Studien zum Problemlösen untersucht (z. B. Herold-Blasius, 2019; Rott, 2013; Schoenfeld, 1985; Stenzel, 2023a). Die meisten Prozesse in diesen Studien weisen eine hohe Anzahl dieses Verhaltens auf. Lediglich in der Studie von Stenzel (2023a) wurde kein solches Verhalten ausfindig gemacht. Gemäß der strengen Operationalisierung von Schoenfeld (der Prozess umfasst nur *Exploration* und ggf. vorausgehendes *Reading*) zeigt sich in dieser Studie ebenfalls kein „wild goose chase“. Dieser Unterschied kann auf verschiedene Gründe zurückgeführt werden:

- Merkmale der Aufgabe: In der Studie von Stenzel (2023a) und in dieser Studie werden Aufgaben aus dem hochschulischen Lehrkontext genutzt, während in Rott (2013) und Herold-Blasius (2019) Schulaufgaben als Basis dienen.
- Kontext der Situation: In der Studie von Stenzel (2023a) und in dieser Studie werden authentische Problembearbeitungsprozesse genutzt, während die anderen Studien in einer Laborsituation durchgeführt worden sind. Motivationale Aspekte, insbesondere extrinsische Faktoren, könnten in dieser Studie eine zusätzliche Rolle spielen, da eine Aussicht auf Bonuspunkte für die Klausur besteht. Dadurch werden ggfs. mehr Ansätze (besser) durchdacht und nicht so leicht aufgegeben.
- Zeitlimit: In Schoenfelds Studien (z. B. 1985) wurde die Bearbeitung auf 20 Minuten festgelegt. Dies beeinflusst die Steuerung, indem diese von extrinsischen Faktoren (zum Ende der 20 Minuten) übernommen wird. Die Studierenden in dieser Studie können die Bearbeitungszeit selbst festlegen und steuern ihren Prozess somit komplett selbstständig.

Erst wenn die Operationalisierung unter Berücksichtigung der oben genannten Gründe angepasst wird, lassen sich in fünf Problembearbeitungsprozessen Charakteristika eines „wild goose chase“ erkennen (Kapitel 6.1.5). Nach der neuen Operationalisierung zeichnet sich ein solcher Prozess dadurch aus, dass der Großteil der Zeit vor allem in den Episoden *Exploration* und *Analysis* verbracht wird, während auch kurze Episoden anderer Typen zugelassen sind.
Studierende vermeiden einen „wild goose chase“, indem sie die *Exploration* entweder durch einen expliziten Plan verlassen oder direkt in die *Implementation* übergehen, wie bei Alex, Thomas sowie Lea, Lisa, Sarah und Paula zu beobachten ist. Zudem hilft es, ineffektive *Explorationen* rechtzeitig zu erkennen und die Strategie anzupassen, wie Nick es in seinen Prozessen zeigt.

(S4) Inwiefern hängen die Schoenfeld Episoden mit dem Erfolg bzw. Misserfolg eines Problembearbeitungsprozesses zusammen?

Bezüglich der Episodenwechsel sowie der Reihenfolge der Episoden konnte kein Zusammenhang zu Erfolg bzw. Misserfolg hergestellt werden (Kapitel 6.1.6). Es gibt allerdings Hinweise, dass eine hohe Anzahl von Episodenwechseln zu einer erfolgreichen Lösung führen kann. Der Grund dafür könnte in einer guten selbstregulatorischen Fähigkeit der problemlösenden Personen liegen (Herold-Blasius, 2019, S. 218), die durch verschiedene Richtungsänderungen während des Prozesses zu einer erfolgreichen Lösung gelangen.
Unter der erweiterten Operationalisierung des „wild goose chases" sind nur zwei von fünf Prozessen teilweise erfolgreich (Kapitel 6.1.6). In diesen zwei Prozessen sind allerdings die zeitlich kurzen Episoden *Analysis* bzw. *Implementation* für das Fortschreiten der Lösung mitverantwortlich. Insgesamt lässt sich festhalten, dass „wild goose chases" in den Problembearbeitungsprozessen dieser Arbeit ebenfalls als nicht erfolgreiche Prozesse eingestuft werden können. Dies deckt sich mit den Aussagen (Prozesstyp A) von Schoenfeld (1985, S. 116) und Ergebnissen von Rott (2013, S. 307). Längere *Explorationen*, die besonders am Ende eines Problembearbeitungsprozesses auftreten, stellen sich dabei als Indikator für einen ausbleibenden Lösungserfolg. Allerdings sind die Prozesse, die einem „wild goose chase" entkommen, damit nicht automatisch erfolgreich, auch hier gibt es durchaus nicht erfolgreiche Prozesse. In den Prozessen dieser Arbeit lassen sich sowohl Prozesse des Typs B (Steuerung nimmt neutralen Einfluss auf Prozess) und Typs C (Steuerung nimmt positiven Einfluss auf Prozess) nach Schoenfeld (1985, S. 116) identifizieren.
Bezüglich strukturierten Vorgehens ist sowohl bei Nick als auch bei Lukas zu erkennen, dass die Aufgabe nicht vollständig verstanden wurde. Es haben zwar beide einen *Plan* aufgestellt und diesen verfolgt, allerdings ist dies kein Vorgehen, welches die Aufgabe löst. Bei beiden hätte es möglicherweise geholfen, wenn sie sich vorher nochmal mit der Aufgabe auseinandergesetzt hätten, um einen Plan zu entwickeln, der zur Aufgabenstellung passt. Demgegenüber ist eine Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung aber nicht immer unbedingt notwendig, da Alex und Thomas in jeder Aufgabe einen Plan erstellen, welcher mit korrekter Ausführung zu einer korrekten Lösung führen kann. Durch den zielführenden Plan könnte man allerdings vermuten, dass die Aufgabenstellung bereits verstanden wurde. Dies könnte damit zusammenhängen, dass Alex und Thomas bereits im Tutorium den Aufgabentypen besser nachvollzogen haben. Möglicherweise hat daher bereits außerhalb der Videoaufnahme automatisch eine erste *Analysis* der Aufgabe stattgefunden. Allerdings scheitert es bei Alex und Thomas eher an der *Implementation*. Ähnliches gilt für die Prozesse von Lea, Lisa, Sarah und Paula, die den Eindruck vermitteln, dass bereits zu Beginn klar ist, was die Aufgabe verlangt. Das strukturierte Vorgehen scheint daher nur dann zu helfen, wenn man mit der Aufgabenstellung vertraut ist (Kapitel 6.1.6). Dies

bekräftigt Schoenfelds (2016) Aussage, dass nicht nur strukturiertes Vorgehen ein wichtiger Aspekt für den Prozess ist, sondern (hier: in einigen Fällen) auch die Aufgabenanalyse. Dies begünstigt die Entwicklung eines zielführenden strukturierten Vorgehens.
Obwohl die Prozesse mit *Verification* eher erfolgreich sind (vier von fünf), kann trotzdem kein Schluss über den Zusammenhang zwischen dem Episodentyp und Erfolg gezogen werden (Kapitel 6.1.6). Dies liegt daran, dass *Verification* am Ende aller Prozesse auftritt und in den vorliegenden Daten keine inhaltlichen Fortschritte an der Lösung unternommen wurden. Die Lösungen werden lediglich kontrolliert bzw. die Schritte validiert.

7.2.2 Zur Rekonstruktion von Wissen

(W1) Welches Wissen wird von der Veranstaltung angeboten?

Die Analyse der Veranstaltung (Vorlesung und Tutorien) mithilfe der Wissensmatrix (Kapitel 5.4.2) hat zunächst ergeben, dass die theoretisch benötigten mathematischen Inhalte für alle Aufgaben angeboten werden (Kapitel 6.2.1). Dabei zeigt sich, dass für alle mathematischen Inhalte mindestens drei von vier verschiedenen Wissensfacetten (außer für das Sandwich-Kriterium und die Regel von L´Hospital jeweils nur zwei) bereitgestellt werden. Insgesamt werden durch das Kreuzen der Wissensarten mit den Wissensfacetten 41 von 52 möglichen Wissenselementen in der Veranstaltung angeboten, auf die Studierende zurückgreifen können[70]. Erwähnenswert ist, dass *Konventionelle Festlegungen* (6-mal) am häufigsten und *Konkretisierung & Abgrenzung* kein einziges Mal fehlt. In Summe bietet die Veranstaltung ein umfangreiches Wissensangebot, sowohl für das konzeptuelle als auch prozedurale Wissen. Das große Angebot hinsichtlich der Wissensarten als auch der verschiedenen Facetten bietet die Möglichkeit, die mathematischen Inhalte umfassend zu durchdringen und zu verstehen (Prediger et al., 2011; Vollrath & Roth, 2011; Winter, 1983).

(W2) Wie lässt sich die Wissensnutzung in Problembearbeitungsprozessen mithilfe der Wissensmatrix rekonstruieren?

Die Kodierung mit der Wissensmatrix erfolgt, indem Wissenselemente erfasst werden, wenn Studierende diese adressieren. Dabei werden Aussagen, Handlungen oder Produkte einer spezifischen Wissensfacette zugeordnet. Kodiert wird nur, wenn eine ernsthafte Auseinandersetzung mit der Wissensfacette stattfindet (Kapitel 5.4.2). Das ausführlich beschriebene Beispiel von Lea, Lisa, Sarah und Paula zeigt einen Problembearbeitungsprozess sowie die Zuordnung des Wissens in die adaptierte Wissensmatrix (Kapitel 6.2.2). Im Prozess steuert

70 Die Beantwortung der Forschungsfrage W6 zielt darauf ab, zu untersuchen, inwiefern Studierende dieses angebotene Wissen nutzen.

die Lerngruppe verschiedene Wissenselemente an, die durch die Wissensmatrix dargestellt werden können (siehe Tabelle 22). Die Lerngruppe beginnt, die Ungleichung mithilfe des Mittelwertsatzes umzuformen (Turn 1) und diskutiert die Rolle der Betragsstriche (Turn 2). Sie definieren die Funktion, leiten diese mit der Kettenregel (Turn 5, 9) ab und überlegen, inwieweit sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit miteinbeziehen müssen (Turn 6, 7). Sie nutzen dafür ihre Vorstellung zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Turn 8). Bei der Abschätzung (Turn 10, 14) untersuchen sie die Exponential- und Sinusfunktion (Turn 10, 12, 14), greifen auf die Aufgabe aus dem Tutorium zurück (Turn 13) und klären schließlich, dass das Maximum der Ungleichung 1 ist (Turn 14). Abschließend validieren sie ihre Erkenntnisse mit Skizzen und prüfen erneut die Bedeutung der Betragsstriche (Turn 15, 16). Letztlich ist es möglich, die Wissensmatrix (Prediger et al., 2011) für einen anderen Zweck als das Systematisieren und Sichern zu verwenden (z. B. wie in Erath, 2017 im Kontext von Beiträgen im Unterricht) und die Nutzung von Wissen während Problembearbeitungsprozessen dazustellen. Durch die Kreuzung von Wissensart und -facette ermöglicht die Wissensmatrix eine detaillierte Darstellung der Wissensnutzung von Studierenden.

(W3) Welche Wissenselemente werden von den Studierenden häufig genutzt?

Insgesamt lässt sich feststellen, dass die Studierenden die verschiedenen Wissensarten in etwa gleicher Häufigkeit nutzen. In den gesamten Prozessen konnte 93-mal das Nutzen von konzeptuellem und 84-mal das Nutzen von prozeduralem Wissen identifiziert werden (Kapitel 6.2.3). Hinsichtlich der Wissensfacetten wird *Implizite Nutzung* (63-mal) und *Konkretisierung & Abgrenzung* (52-mal) am häufigsten verwendet. Am wenigsten werden *Konventionelle Festlegungen* (14-mal) und *Explizite Formulierungen* (18-mal) verwendet. *Bedeutung & Vernetzung* wird 30-mal genutzt.
Es wurde außerdem eine Aufteilung vorgenommen. Dabei ergibt sich, dass die Nutzung des prozeduralen Wissens für die Aufgaben „Differenzierbarkeit prüfen“ (ca. 63 % der genutzten Wissenselemente) und „L´Hospital“ (ca. 70 %) überwiegt, während dies für die Aufgabe „Mittelwertsatz“ bei der Nutzung des konzeptuellen Wissens (ca. 91 %) der Fall ist. Werden die theoretisch herausgearbeiteten relevanten mathematischen Inhalte der jeweiligen Aufgaben herangezogen (Kapitel 5.3), stellen diese einen ähnlichen Anteil der Wissensarten wie das Nutzungsverhalten der Studierenden dar: „Differenzierbarkeit prüfen“ (50 % prozeduralen Wissen), „L´Hospital“ (80 % prozedurales Wissen) und „Mittelwertsatz“ (86 % konzeptuelles Wissen). Die Analyse zeigt, dass die von den Studierenden genutzten und für die Bearbeitung erforderlichen Wissensarten eine gute Passung aufweisen.

(W4) Auf welche Wissenselemente setzen Studierende einen Fokus während der Prozesse?

Anknüpfend an die Häufigkeit bezüglich der Nutzung von Wissenselementen wird der *Fokus*[71] der Prozesse herausgestellt (Kapitel 6.2.4). Dabei wird zwischen prozeduralen und konzeptuellen Prozessen unterschieden. Die prozeduralen Prozesse setzen alle einen Fokus auf die *Implizite Nutzung* und *Konkretisierung & Abgrenzung*. Für die konzeptuellen Prozesse wird in zwei Unterarten aufgeteilt. Zum einen wird ein Fokus auf *Implizite Nutzung* und *Bedeutung & Vernetzung* und zum anderen ein Fokus auf *Explizite Formulierung* und *Konkretisierung & Abgrenzung* gelegt.
Es lässt sich vermuten, dass der *Fokus* der Wissensnutzung stark auf die jeweiligen Anforderungen der Aufgabe abgestimmt ist. Sowohl für die Aufgabe „L´Hospital" als auch „Mittelwertsatz" lässt sich ein prozeduraler bzw. konzeptueller Fokus erkennen. Nur für die Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" sind die Anforderungen eher ausgeglichen, wobei der *Fokus* eher prozedural ist.

(W5) Welche Schwierigkeiten können während der Problembearbeitungsprozesse identifiziert werden?

Schwierigkeiten wurden als Hindernisse bzw. Hürden definiert, die im fachspezifischen Kontext den Fortschritt oder die korrekte Bearbeitung der Aufgabe beeinträchtigen (Kapitel 5.4.2). Bezüglich der drei Aufgaben konnten verschiedene Schwierigkeiten festgestellt werden (Kapitel 6.2.6). Hinsichtlich der Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" ergeben sich bei den Studierenden hauptsächlich Schwierigkeiten mit dem gleichnamigen Verfahren. Diese treten vor allem bei der *Expliziten Formulierung* auf und sind teilweise bei der *Impliziten Nutzung* zu beobachten. Der Ableitungsbegriff wurde in der Forschung bereits intensiv untersucht (Kapitel 4.3.2), wobei auf verschiedenen Wissensebenen Schwierigkeiten identifiziert wurden. Auch in dieser Studie können mit Schwierigkeiten bezüglich zwei Facetten an der bestehenden Forschung angeknüpft werden. In den Prozessen zur Aufgabe „Mittelwertsatz" haben die Studierenden ebenfalls Schwierigkeiten mit dem gleichnamigen Zusammenhang. Diese verteilen sich über alle Wissensfacetten. In einem vergleichbaren Kontext beobachten Kolahdouz et al. (2020) gleichfalls Schwierigkeiten in verschiedenen Wissensfacetten zum (Beweis-)Verständnis des verallgemeinerten Mittelwertsatz. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung scheint demnach eine Herausforderung für Studierende dazustellen. Darüber hinaus stellen die Abschätzung sowie die Rolle der Betragsstriche die Studierenden vor eine Herausforderung. Letztlich stellt die Beweismethode bzw. der Ansatz für den Beweis ebenfalls eine Schwierigkeit dar, wobei

71 Damit ist gemeint, welche Wissensarten und -facetten Studierende in ihren Prozessen häufig ansteuern.

Beweiskonstruktionen allgemein für Studierende herausfordernd sind (Weber, 2001). Bezüglich der Aufgabe „L´Hospital“ befinden sich die Schwierigkeiten im Bereich der Grenzwertbestimmung (*Implizite Nutzung* und *Explizite Formulierung*). Im Gegensatz zu den Ergebnissen von Mrdja et al. (2015) haben die Studierenden weniger ein Problem mit der Regel von L´Hospital an sich, sondern insbesondere mit der integrierten Grenzwertbestimmung.
Insgesamt lassen sich für die Aufgabe „Mittelwertsatz“ konzeptuelle Schwierigkeiten und in den beiden Aufgaben „Differenzierbarkeit prüfen“ und „L´Hospital“ primär prozedurale Schwierigkeiten feststellen. Damit entsprechen die Schwierigkeiten weitgehend den ausgearbeiteten theoretischen Anforderungen der jeweiligen Aufgabe hinsichtlich der Wissensarten (Kapitel 5.3).
Interessanterweise treten Schwierigkeiten sowohl bei häufig genutzten als auch selten genutzten Wissenselementen auf. Dies deutet darauf hin, dass die Häufigkeit der Nutzung kein verlässlicher Indikator für die Schwierigkeit eines Wissenselements ist. Häufig genutzte Wissenselemente könnten Schwierigkeiten verursachen, weil sie komplex oder anspruchsvoll sind, während bei selten genutzten Elementen der Mangel an Vertrautheit oder Übung eine Rolle spielen könnte.

(W6) Welches Wissensangebot wird von der Veranstaltung angeboten und inwiefern wird dies von den Studierenden in ihren Bearbeitungen genutzt?

In dem Vergleich zwischen Wissensangebot der Veranstaltung und Wissensnutzung der Studierenden wird die *Implizite Nutzung* ausgeschlossen. Insgesamt zeigt sich ein vielfältiges Angebot, welches von den Studierenden genutzt werden kann (Kapitel 6.2.7). Von den Studierenden wird jedoch nur auf knapp die Hälfte (23 von 53) der angebotenen Wissenselemente zurückgegriffen. Wird ein Wissenselement nicht angeboten, aber trotzdem genutzt bzw. aktiviert, werden weitere Materialien wie das Internet herangezogen.

(W7) Inwiefern hängt die Wissensnutzung mit dem Erfolg bzw. Misserfolg eines Problembearbeitungsprozesses zusammen?

Für die Untersuchung von Erfolg bzw. Misserfolg wird erneut auf den Fokus der Problembearbeitungsprozesse zurückgegriffen (Kapitel 6.2.8). Bei prozeduralen Prozessen wird deutlich, dass eine hohe Lösungsqualität (L3, L4) oft mit der erfolgreichen Beseitigung von Schwierigkeiten verbunden ist, während dies bei niedriger Lösungsqualität nicht gelingt. Die Beseitigung der Schwierigkeiten bezüglich der Facette *Explizite Formulierung* stellt sich dabei als besonders wichtig heraus. Für konzeptuelle Prozesse werden zwei Untergruppen betrachtet. Die erste, mit Fokus auf *Implizite Nutzung* und *Bedeutung & Vernetzung*, erreicht durchgängig hohe Lösungsqualitäten (mindestens L3). Die zweite, mit Fokus auf *Explizite Formulierung* und *Konkretisierung & Abgrenzung*, zeigt gemischte

Ergebnisse. Erfolgreiche konzeptuelle Prozesse zeichnen sich durch die Verknüpfung verschiedener Wissenselemente und deren Anwendung aus. Studierende, die auf solche Verknüpfungen sowie die Anwendung von Konzepten und Zusammenhängen setzen, erzielen bessere Ergebnisse, da sie ihre Schwierigkeiten überwinden und (gleichzeitig möglicherweise) konzeptuelles Wissen aufbauen können. Dies würde den Zusammenhang zwischen Lernen und Problemlösen bestätigen (Leuders, 2017; Stenzel, 2023a, S. 31f.). Durch die Ähnlichkeit dieser beiden Prozesse wird nicht nur ein Problem gelöst, sondern darüber hinaus ein Lerneffekt erzielt und konzeptuelles Wissen aufgebaut. Im Gegensatz dazu scheitern Studierende, die sich stark auf *Explizite Formulierungen* und *Konkretisierungen & Abgrenzungen* einzelner Konzepte und Zusammenhänge beschränken. Zusätzlich ist bei dieser Studierendengruppe keine Verknüpfung von Wissenselementen zu beobachten.

7.2.3 Zur Rekonstruktion von Heurismen

(H1) Welche Heurismen treten in den Problembearbeitungsprozessen auf?

Insgesamt können in den Problembearbeitungsprozessen 167 Anwendungen von Heurismen identifiziert werden (Kapitel 6.3.1). Der am häufigsten eingesetzte Heurismus ist *Ähnliche Aufgabe*, der 35-mal verwendet wird. Ein wesentlicher Faktor ist dabei der Kontext der Veranstaltung, der durch vorbereitende Tutoriumsaufgaben die Bearbeitung der Hausaufgaben unterstützt. Aufgrund der häufigen Nutzung von *Ähnlichen Aufgaben* weist dieser Heurismus nahezu einen algorithmischen Charakter auf. Die beiden Heurismen *Rückwärtsarbeiten* (1-mal) und *Fallunterscheid*ung (2-mal) kommen am seltensten vor. Die restlichen Heurismen werden zwischen sechs- und 17-mal herangezogen (vgl. Tabelle 35). In dieser Studie haben Studierende zwischen 2-10 verschiedene Heurismen pro Aufgabe genutzt (Tabelle 36), während die Anzahl in einer Studie mit Schüler:innen lediglich bei 1,5-6 liegt (Herold-Blasius, 2019, S. 240). Dieser leichte Unterschied des Maximus lässt vermuten, dass die Aufgaben in dieser Studie für die problemlösenden Personen komplexer sind und daher eine vielfältigere Herangehensweise bzw. mehr Flexibilität und Kreativität beim Problemlösen erfordern. Möglicherweise bieten die Aufgaben ein höheres Potenzial, das den Einsatz unterschiedlicher Lösungsstrategien fördert. Dies spiegelt auch den generellen Anwendungscharakter hochschulischer Aufgaben zu schulischen Aufgaben wider. Dabei darf allerdings nicht vergessen werden, dass die durchschnittliche Bearbeitungszeit in dieser Studie höher (als bei Herold-Blasius) und dadurch mehr Raum für die Nutzung verschiedener Heurismen gegeben ist. Abschließend ist bezüglich der Einteilung von Bruder und Collet (2011) auffällig, dass hinsichtlich heuristischer Strategien fast ausschließlich *Vorwärtsarbeiten* genutzt wird. Dies deckt sich mit den Untersuchungen von Lehmann (2018), in der *Vorwärtsarbeiten* ebenfalls die am häufigsten verwendete

Strategie ist. Bezüglich der Kategorien heuristische Hilfsmittel und Prinzipien (Bruder & Collet, 2011) werden die jeweiligen Heurismen ausgeglichen genutzt.

(H2) Ist die Nutzung von Heurismen aufgabenabhängig? Ist die Nutzung von Heurismen lerngruppenabhängig?

Die Beantwortung dieser Frage gestaltet sich aufgrund der kleinen Stichprobe schwierig. Es können allerdings Tendenzen festgestellt werden (Kapitel 6.3.2). Zunächst lässt sich die Verwendung der drei Heurismen *Ähnliche Aufgabe*, *Begriffe klären* sowie *Vorwärtsarbeiten* in fast allen Problembearbeitungsprozessen identifizieren. Für diese Heurismen lässt sich daher keine Abhängigkeit feststellen. Gleiches gilt für die beiden Heurismen *Rückwärtsarbeiten* und *Fallunterscheidung*, die nur in Einzelfällen auftreten. Hinsichtlich der restlichen Heurismen wird sowohl die Häufigkeit der Nutzung als auch die Frage, ob ein bestimmter Heurismus verwendet wird, berücksichtigt. Dabei stellen sich folgende Tendenzen heraus.

- *Skizze* wird in jedem Prozess zur Aufgabe „Mittelwertsatz“ verwendet, aber sonst auch vereinzelt in Prozessen der anderen Aufgaben.
- *Spezialfall* wird eher in Prozessen zur Aufgabe „L´Hospital“ verwendet, wobei der Ursache für die Verwendung eher in der speziellen Funktion innerhalb der Aufgabe liegt.
- *Nutzung aller Voraussetzungen* ist eher lerngruppenabhängig (David; Alex und Thomas; Lea, Lisa, Sarah und Paula).
- *Metapher* und *imaginäre Figur* ist eher lerngruppenabhängig (David).
- *Systematisierungshilfen* sind eher lerngruppenabhängig (David).
- *Suche nach neuen Hinweisen* ist eher lerngruppenabhängig (David).

Insgesamt lassen sich somit für wenige Heurismen Tendenzen hinsichtlich der Aufgaben- bzw. Lerngruppenabhängigkeit feststellen. Den Ausführungen von Stenzel (2023a, S. 140) zufolge ist der Einsatz bestimmter Heurismen aufgabenabhängig. In dieser Arbeit kann die Frage jedoch nicht in dieser Deutlichkeit beantwortet werden. Tatsächlich konnte kaum eine Aufgabenabhängigkeit identifiziert werden. Ein möglicher Grund dafür ist, dass die Aufgaben in den beiden Studien (ohne einen umfangreichen Vergleich zwischen den Aufgaben) unterschiedlicher Art sind. In Stenzel (2023a) haben die Aufgaben einen stärker beweisenden Charakter. Zudem gehören alle Aufgaben in dieser Arbeit zum Inhaltsgebiet der Differentialrechnung, was zu inhaltlichen Überschneidungen führt (Kapitel 6.2.1). Dies zeigt sich beispielsweise darin, dass in der Aufgabe „L'Hospital“ zwar *Spezialfälle* verwendet werden, diese jedoch durch die spezielle Funktion bedingt sind, die auch in anderen Aufgaben hätte vorkommen können. Hinsichtlich der Lerngruppenabhängigkeit können zwar einige Heurismen als solche identifiziert werden, allerdings liegt dies vor allem an David, welcher somit einen Einzelfall darstellt. An dieser Stelle würde (wie in Stenzel, 2023a, S. 142) eine Analyse weiterer Lerngruppen zu aufschlussreicheren Ergebnissen hinsichtlich der Lerngruppenabhängigkeit führen.

(H3) Inwiefern hängt die Nutzung der Heurismen mit dem Erfolg bzw. Misserfolg eines Problembearbeitungsprozesses zusammen?

Die Frage kann aus verschiedenen Perspektiven beantwortet werden (Kapitel 6.3.3). Zunächst kann festgestellt werden, dass die Häufigkeit der angewandten Heurismen bei der Bearbeitung von Aufgaben kein konsistentes Muster in Bezug auf Erfolg oder Misserfolg zeigt. Dabei sollte ohnehin bedacht werden, dass sich Aufgaben, die eine problemlösende Person überfordern, auch nicht mit einer zahlreichen Nutzung von Heurismen lösen lässt (Rott, 2013, S. 120). Bei Betrachtung der Anzahl verschieden verwendeter Heurismen zeigt sich jedoch, dass eine geringe Vielfalt an genutzten Heurismen eher mit einer niedrigen Lösungsqualität einhergeht, während eine größere Vielfalt an genutzten Heurismen tendenziell zu einer besseren Lösungsqualität führt. Ein Heurismus, der in nahezu allen Prozessen mit hoher Lösungsqualität und nur in einem Prozess mit niedriger Lösungsqualität angewendet wird, ist das *Nutzen aller Voraussetzungen*. Bei genauerer Betrachtung dieser Stellen im Prozess lässt sich allerdings schließen, dass dieser Heurismus keinen positiven Einfluss auf den Prozess nimmt. Anders ist dies für den Heurismus *Rückführungsprinzip*. Dieser taucht zwar nur in einigen, aber ausschließlich in Prozessen mit positiver Lösungsqualität auf. An den Stellen im Prozess zeigt sich ein positiver Einfluss auf den Lösungsverlauf.
Abschließend werden weitere Stellen im Problembearbeitungsprozess untersucht, die einen positiven Einfluss auf den Prozessverlauf ausüben. Dabei stellen sich vor allem die beiden Heurismen *Ähnliche Aufgaben* als auch *Skizze* heraus. Demgegenüber weisen die beiden Heurismen *Suche nach neuen Hinweisen* und *Spezialfälle* das Potenzial auf, den Prozessverlauf negativ zu beeinflussen.
Stenzel (2023a, S. 148) stellt in seiner Arbeit fest, dass Heurismen wie *Nutzen aller Voraussetzungen*, *Rückführungsprinzip* sowie heuristische Hilfsmittel (*Tabelle*, *Skizze*, *Spezialfall*, etc.) in Kombination der *Analysis*-Phase hilfreich sind, um neue Ideen im Problembearbeitungsprozess zu generieren. Obwohl sich die Art der Aufgaben zwischen beiden Studien unterscheiden, werden mit Ausnahme von *Spezialfall* (und *Tabelle*[72]), bei dem sogar das Potenzial für eine negative Auswirkung festgestellt werden kann, diese Heurismen auch in dieser Arbeit im Zusammenhang mit erfolgreichen Problembearbeitungsprozessen diskutiert. Darüber hinaus zeigt sich in der Studie von Lehmann (2018, S. 236

---

72 Der Heurismus *Tabelle* konnte in den Problembearbeitungsprozesse dieser Arbeit kein Mal identifiziert werden.

und S. 252), dass heuristische Hilfsmittel einen positiven Einfluss auf die Lösung besitzen. Allerdings wird dort festgestellt, dass das *Vorwärtsarbeiten* für den Lösungsprozess von Bedeutung ist, wobei es sich sowohl in dieser Studie als auch in der Studie von Stenzel (2023a) nicht als besonders erfolgreich herausstellt. Hier sollten weitere Aufgaben (mit unterschiedlichen Inhalten) untersucht werden, ob auch für weitere hochschulische Mathematikaufgaben ähnliche Ergebnisse gewonnen werden können. Letztlich ist das Verwenden von *Ähnlichen Aufgaben* auf den Kontext der Veranstaltung zurückzuführen, da die Tutoriumsaufgaben einen hilfreichen Ausgangspunkt für die Bearbeitung der eigentlichen Aufgabe liefern.
Demgegenüber stehen die Ergebnisse von Rott (2013, S. 390), der in den Problembearbeitungsprozessen von Schüler:innen die *Suche nach Mustern* und das *Rückwärtsarbeiten* als wichtige Strategien herausstellen kann. Die unterschiedlichen Ergebnisse zwischen Schule und Hochschule lassen vermuten, dass der Erfolg von Heurismen vom Kontext, Niveau der jeweiligen Aufgabenstellung und möglicherweise auch von der Offenheit der Aufgabe (Bruder, 2000) abhängt.

7.2.4 Zur gemeinsamen Betrachtung von Steuerung, Wissen und Heurismen

(Z1) Welche Interaktionen lassen sich zwischen Steuerung, Heurismen und Wissen identifizieren?

Zwischen den einzelnen Kategorien lässt sich ein interaktives Auftreten beobachten (Kapitel 6.4.1), was die Ausführungen von Schoenfeld (1985, S. 44) empirisch stützt, wonach die Kategorien nicht strikt voneinander abgegrenzt sind. Besonders auffällig ist, dass Studierende in jeder Episode des Problembearbeitungsprozesses Heurismen einsetzen, was den theoretischen Annahmen widerspricht (z. B. König, 1992). Gleichzeitig zeigt sich jedoch, dass in der *Exploration* die meisten Heurismen angewandt werden, was die bestehenden Theorien unterstützt (Schoenfeld, 1985, S. 298). Die Ergebnisse zeigen zudem, dass die Kategorisierung von Heurismen nach Bruder und Collet (2011) in heuristische Hilfsmittel, Prinzipien und Strategien hilfreich ist, um ihre Rolle in unterschiedlichen Phasen zu verstehen. Heuristische Prinzipien finden sich vor allem in der *Exploration*, während heuristische Hilfsmittel sowohl in der *Analysis* als auch stark in der *Exploration* auftreten. Darüber hinaus sind spezifische Heurismen bestimmten Phasen zuzuordnen, etwa ***Begriffe klären*** in der *Analysis*, ***Suche nach Hinweisen*** und ***Spezialfall*** in der *Exploration* sowie ***Vorwärtsarbeiten*** in *Planning* und *Implementation*. Zudem lassen sich spezifische Wissensarten oder Wissensfacetten eher bestimmten Episoden bzw. Heurismen zuordnen. In der ***Analysis*** dominiert konzeptuelles Wissen mit Fokus auf *Explizite Formulierung* und *Konkretisierung & Abgrenzung*, während in der ***Exploration*** *Konkretisierung & Abgrenzung* und *Implizite Nutzung* im

Vordergrund stehen. In ***Planning* und *Implementation*** sind prozedurales Wissen und *Implizite Nutzung* prägend. Bei den jeweiligen Interaktionen mit den Wissenskategorien muss allerdings angemerkt werden, dass diese durch die spezifische Aufgabe unterschiedlich sind. So ist in der Aufgabe „Mittelwertsatz“ die Interaktion mit *Planning* und *Implementation* eher konzeptuell, während sie in den anderen beiden Aufgaben eher prozedural ist. Dies ist jedoch zu erwarten, da es den Anforderungen der Aufgabe entspricht (Kapitel 5.3).

(Z2) Welche Rolle spielen Wissen und Heurismen bei einem Episodenwechsel?

Für die Beantwortung dieser Forschungsfrage werden nur Episodenwechsel betrachtet, die in eine *Exploration* münden (Kapitel 6.4.2). Dabei stellt sich heraus, dass diese Episodenwechsel in zwei Drittel (22 von 33) der Fälle durch Wissen und Heurismen oder einer Kombination aus beiden beeinflusst werden. Insbesondere der Heurismus *Ähnliche Aufgabe* und die Facette *Konkretisierung & Abgrenzung*, die ohnehin häufig Interaktionen aufweisen, scheinen dabei starke Auslöser für den Episodenwechsel zu sein. Dies ist wenig überraschend, da die *Exploration* per Definition durch ein unstrukturiertes Vorgehen gekennzeichnet ist. Das Heranziehen von Beispielen oder Beispielaufgaben dient hierbei als ein Mittel, eine grobe Orientierung zu entwickeln und erste Ansätze zu finden. Die spezifische Nutzung dieser Beispiele kann jedoch maßgeblich beeinflussen, ob das unstrukturierte Vorgehen in ein strukturiertes übergeht. Je nach Verwendung der Beispiele können sie dazu beitragen, die *Exploration* in eine zielgerichtete und strukturierte Herangehensweise zu transformieren. Im Fall dieser Arbeit wäre es wichtig gewesen, die Tutoriumsaufgabe auf das eigene Beispiel zu abstrahieren, um potenzielle Unterschiede zu identifizieren und darauf aufbauend das eigene Vorgehen zu strukturieren.

In nur einem Drittel (elf von 33) erfolgt der Episodenwechsel unabhängig von Wissen oder Heurismen. Eine genauere Betrachtung dieser Fälle deutet darauf hin, dass selbstregulatorische Aktivitäten verantwortlich für Episodenwechsel sind. Allerdings wurden im Rahmen dieser Arbeit selbstregulatorische Aktivitäten auf dem lokalen Level nicht explizit untersucht. Die vorliegenden Ergebnisse bieten, ähnlich wie bei Rott (2013, S. 375ff.), lediglich einen ersten Ansatz zur Betrachtung der Rolle selbstregulatorischer Aktivitäten bei Episodenwechseln.

In dieser Arbeit wurden nur Episodenwechsel am Startpunkt der *Exploration* beleuchtet. Zukünftig wäre es jedoch interessant, auch andere Wechsel zu untersuchen, etwa das Austreten aus einer *Exploration* (**„wild goose chase“)** oder den Übergang zu strukturierten Phasen wie ***Planning***, um ein umfassenderes Verständnis von Problembearbeitungsprozessen zu gewinnen.

(Z3) Kann empirisch entschieden werden, ob die Aufgaben für die Studierenden Probleme darstellen?

Zur Beantwortung dieser Forschungsfrage wurden zunächst Indikatoren für Problembearbeitungsprozesse operationalisiert. Dabei konnten sieben Indikatoren herausgearbeitet werden. Die Entscheidung, ob ein Problembearbeitungsprozess vorliegt, basiert auf der Erfüllung von vier[73] der sieben Indikatoren. Insgesamt zeigen elf von 13 untersuchten Prozessen mindestens vier Indizien, was die definitorische Schwelle für einen Problembearbeitungsprozess übertrifft (Kapitel 6.4.3).
Wenn die Ergebnisse der empirischen Analyse auf die einzelnen Aufgaben übertragen werden, zeigt sich, dass alle Prozesse der Aufgaben **„L'Hospital“** und **„Mittelwertsatz“** mehr als vier der definierten Indikatoren für einen Problembearbeitungsprozess erfüllen. Dies deutet darauf hin, dass diese Aufgaben für die Studierenden der vorliegenden Stichprobe **ein Problem darstellen**. Im Gegensatz dazu erfüllt die Aufgabe **„Differenzierbarkeit prüfen“** nur in drei von fünf untersuchten Prozessen mindestens vier Indikatoren, was darauf hinweist, dass diese Aufgabe **nicht einheitlich als Problem wahrgenommen wird**. Daher lässt sich zusammenfassen, dass die Aufgaben zum „Mittelwertsatz“ und „L'Hospital“ empirisch als Problemaufgaben für die Studierenden gelten, während die Aufgabe zur Differenzierbarkeit eine gemischte Wahrnehmung aufweist und nicht in jedem Fall als Problem identifiziert werden kann. Die Annahme von Stenzel (2023a, S. 13), dass viele Aufgaben von Studierenden als problematisch wahrgenommen werden, findet in dieser Studie durch zusätzliche Hinweise Bestätigung.
Es ist jedoch wichtig zu beachten, dass es noch weitere Aufgaben gibt, wie bspw. das Ableiten von Funktionen, die ebenfalls typische Aufgaben in der Ingenieurmathematik sind, diese jedoch bislang noch nicht untersucht worden sind. Diese Aufgaben sind stärker aus der Schule bekannt und könnten einen anderen „Problemgrad“ aufweisen.

7.2.5 Theoretische Einordnung im Kontext mathematischer Lernprozesse

Die vorherigen Ausführungen konzentrierten sich explizit auf die Beantwortung der Forschungsfragen, die stark auf das mathematische Problemlösen ausgerichtet waren. Im Weiteren werden diese Ergebnisse auf allgemeine mathematische Lernprozesse übertragen.
Die vorliegende empirische Studie bietet einen umfassenden Einblick in authentische mathematische Lernprozesse von Ingenieur:innen während ihres

---

73 Vier Indikatoren erscheinen eine angemessene Zahl zu sein, um sicherzustellen, dass ein Prozess nur dann als Problemlöseprozess eingestuft wird, wenn Indikatoren aus mindestens zwei der vier Kategorien (Steuerung, Wissen, Heurismen, allgemeine Kategorie) identifiziert werden können.

Studiums. Obwohl solche Prozesse, wie bspw. die Bearbeitung von Hausaufgaben, eine zentrale Rolle im Studium spielen, ist die Forschung hierzu bislang begrenzt (Kapitel 1).
In der durchgeführten Studie wurden Aufgaben mit unterschiedlichen Anforderungen hinsichtlich prozeduralen und konzeptuellen Wissens untersucht (Kapitel 5.3). Ein interessantes Ergebnis zeigt sich bei der Analyse der Aufgabe "L'Hospital", die überwiegend als prozedurale Aufgabe eingeordnet wird und daher typischerweise ein (routinemäßiges) Verfahren zur Lösung verlangt. Trotz dieser Klassifikation stellte sich heraus, dass die Aufgabe für die Studierenden ein Problem darstellt (Kapitel 6.4.3). Dieses Ergebnis verdeutlicht, dass eine reine Klassifikation von Aufgaben in prozedural und konzeptuell nicht ausreicht, um zu bestimmen, ob es sich tatsächlich um ein Problem für die Lernenden handelt. Darüber hinaus zeigt es, dass auch prozedurale Aufgaben durchaus Schwierigkeiten bereiten können und nicht ausschließlich Beweisaufgaben Probleme darstellen. Besonders im Kontext von Ingenieur:innen, die möglicherweise eine andere Einstellung gegenüber der Mathematik aufweisen als Studierende aus rein mathematischen Fachstudiengängen, wird dies relevant. Für diese Zielgruppe können auch prozedurale Aufgaben Herausforderungen mit sich bringen, die Problemlösekompetenzen fördern und erfordern. Somit könnte auch in Aufgaben, die vordergründig prozedural erscheinen, ein bedeutendes Potenzial zur Entwicklung von Problemlösefähigkeiten liegen.
Der Fokus dieser Untersuchung lag auf dem Themengebiet der Differentialrechnung. Abgesehen vom Begriff der Differenzierbarkeit bzw. dem Ableitungsbegriff existieren wenig Studien, die sich mit dem Mittelwertsatz (siehe Kapitel 4.3.4) und der Regel von L´Hospital (siehe Kapitel 4.3.5) beschäftigen – insbesondere hinsichtlich der Anwendung in (authentischen) Lernsituationen. Besonders die Aufgabe „Mittelwertsatz", die einen stark beweisenden Charakter hat, zeigt, dass Studierende konzeptuelle Schwierigkeiten in allen Facetten dieses Zusammenhangs aufweisen. Dabei bestätigt sich außerdem, dass Studierende allgemeine Schwierigkeiten mit dem Beweisen haben, insbesondere bei der Entwicklung einer Beweisidee oder -strategie (Weber, 2001). Letztendlich wurden jedoch auch prozedurale Schwierigkeiten identifiziert, insbesondere bei der Anwendung (*Impliziten Nutzung*) und Anleitung (*Expliziten Formulierung)* von Verfahren.
Darüber hinaus lässt sich auch ein Lerneffekt durch das Bearbeiten mathematischer Probleme beobachten. Wie in Kapitel 6.4.3 erläutert, stellen die Problembearbeitungsprozesse für die Studierenden einerseits eine Herausforderung dar, bieten andererseits aber auch die Möglichkeit, mathematische Inhalte weiter einzuüben. Obwohl in dieser Arbeit kein Wissensstand vor und nach der Bearbeitung erhoben wurde, konnte festgestellt werden, dass während der Prozesse Lernfortschritte erzielt wurden. In allen Problembearbeitungsprozessen stoßen die Studierenden auf Schwierigkeiten

(Kapitel 6.4.3), die oftmals während der Prozesse gelöst und somit als überwundene Hürde betrachtet werden können. Zum einen versteht z. B. David in seinem Prozess zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" den gleichnamigen Begriff besser und kann damit im Anwendungskontext arbeiten. Zum anderen werden Wissenslücken, wie die Rolle der Betragsstriche bei Lea, Lisa, Sarah und Paula zur Aufgabe „Mittelwertsatz", ausgeglichen. Diese Ergebnisse legen nahe, dass das Bearbeiten von Problemen nicht nur zum Problemlösen selbst beiträgt, sondern auch Lernfortschritte begünstigt (und diese wiederum die Problemlösefähigkeit verbessern). In diesen Situationen ist das propagierte Lernen durch Problemlösen (Holzäpfel et al., 2018, S. 169; Leuders, 2017) beobachtbar. Diese Lernprozesse können dann erfolgreich sein, wenn die drei Kategorien (Steuerung, Wissen und Heurismen) in den Prozess integriert und miteinander verknüpft werden, sodass sie sich gegenseitig unterstützen und den Lernprozess fördern. Es hat sich gezeigt, dass ein Prozess allein aufgrund einer bestimmten Kategorie, wie bspw. einer zeitlich langen *Exploration*, nicht grundlegend als erfolgreich oder weniger erfolgreich bewertet werden kann. Ebenso verhält es sich mit den anderen Kategorien, wie Wissen und Heurismen. Jede dieser Kategorien trägt auf ihre Weise zum Lernprozess bei, und ihr Zusammenspiel ist entscheidend. Erst wenn alle Kategorien in einem Wechselspiel agieren, wird das Lernen effektiv gefördert und die Problemlösungsfähigkeit der Lernenden optimiert.

In diesem Kontext kann erneut die Verbindung zwischen verschiedenen Heurismen und Lernstrategien thematisiert werden. Insbesondere im Hinblick auf das Überwinden von Schwierigkeiten bzw. das Schließen von Wissenslücken bieten sich vielversprechende Ansätze, die durch gezielte Heurismen oder Lernstrategien unterstützt werden können. Insbesondere Lernstrategien, welche die *Explizite Formulierung* mathematischer Inhalte unterstützen, könnten in diesem Zusammenhang besonders wertvoll sein. Die Überwindung von Schwierigkeiten in dieser Facette hat bereits zu Lösungsfortschritten beigetragen (Kapitel 6.2.8), was diese Strategien vielversprechend für den Lernprozess macht.

7.3 Praktische Implikationen

Wie Neumann et al. (2015) bereits herausstellten, ist ein gezieltes Training von Problemlösefähigkeiten essenziell für die Verbesserung der Leistung von Studierenden. Dies umfasst neben der Vermittlung von mathematischen Inhalten (Wissen) insbesondere die Vermittlung von Heurismen und Strategien zur Steuerung des Lösungsprozesses. Die Bedeutung mathematischen Problemlösens wird auch im SEFI-Katalog für das Ingenieurstudium (Kapitel 1.1) deutlich hervorgehoben: Problemlösen gilt als eine der zentralen Schlüsselkompetenzen für Ingenieur:innen. Dabei reicht es nicht aus, ausschließlich Fachwissen in der Mathematik zu vermitteln. Ingenieur:innen sollen zwar mathematikhaltige

Probleme lösen können, doch dies erfordert darüber hinaus den gezielten Einsatz von Heurismen sowie eine bewusste Steuerung der Lösungsprozesse. Diese Fähigkeiten müssen anschließend nicht nur auf mathematische Fragestellungen beschränkt sein, sondern lassen sich möglicherweise auch auf andere Problembereiche übertragen, was ihre Relevanz für die berufliche Praxis erheblich steigert. Die Forschungsergebnisse dieser Arbeit zeigen zudem, dass das Zusammenspiel mehrerer Kategorien beim Problemlösen von entscheidender Bedeutung für gelungene Problembearbeitungsprozesse ist. Daher sollte ein Training bzw. eine Unterstützungsmaßnahme kategorienübergreifend und umfassend gestaltet sein, um alle Kategorien ausreichend abzudecken. Dabei kann es ebenfalls sinnvoll sein, Beliefs mit einzubeziehen, die in dieser Arbeit jedoch nicht behandelt worden sind.

Betrachtet man mathematische Übungszettel an Hochschulen, fällt auf, dass viele Aufgaben nahezu ausschließlich einen inhaltlichen Fokus besitzen, was das Potenzial zur Förderung von Problemlösekompetenzen möglicherweise einschränkt. In den Aufgaben könnte expliziter auf Kompetenzen eingegangen werden, insbesondere auf Problemlösefähigkeiten, da diese eine wichtige Kompetenz für Ingenieurstudierende darstellen (Alpers et al., 2013). Derzeit wird jedoch häufig stillschweigend davon ausgegangen, dass die Studierenden diese Fähigkeiten nebenbei erlernen und entwickeln. Ein Potenzial, um die Problemlösekompetenz bei der Aufgabenstellung in den Fokus zu rücken, liegt bspw. darin, in Aufgabenstellungen Hinweise zu integrieren, die auf den Einsatz von gewissen Heurismen hinweisen. Dabei kann es sich um einfache Formulierungen handeln, wie z. B. das Erstellen von Tabellen oder das Suchen und Erkennen von Mustern. Da die Aufgabenstellung zur Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen" bereits das Ergebnis suggeriert, könnten Studierende dazu angeregt werden, „rückwärts zu arbeiten". In der untersuchten Veranstaltung bietet sich der Heurismus *Ähnliche Aufgabe* als ein gezielter Ansatzpunkt an, um die Problemlösekompetenzen der Studierenden zu stärken. Da die gestellten Aufgaben zwischen Tutorium und Hausaufgaben häufig ähnlich aufgebaut sind (Kapitel 5.3), könnten die Studierenden dazu angeleitet werden, die Unterschiede zwischen den Aufgaben systematisch zu analysieren. Ein Schwerpunkt könnte hierbei auf die Aufgabenanalyse gelegt werden, um die potenziellen Auswirkungen auf die Bearbeitung der neuen Aufgabe herauszuarbeiten. Dies würde den Studierenden ermöglichen, nicht nur die Gemeinsamkeiten der Aufgaben zu erkennen, sondern auch kritisch zu reflektieren, wie die Unterschiede die Lösungsstrategien beeinflussen können. Insbesondere in Tutorien könnte dieses Verfahren implementiert werden. Dort bietet sich die Gelegenheit, mit anderen Studierenden und Tutor:innen gemeinsam zu diskutieren. Ggfs. können in den Tutorien auch einfachere Einstiegsaufgaben erarbeitet und besprochen werden (Stenzel, 2023a, S. 211), die eine gewisse Übertragbarkeit auf die Hausaufgaben ermöglichen.

Ein weiterer Ansatz besteht in der Bereitstellung ausführlicher Musterlösungen, wie sie von Ableitinger und Herrmann (2011) und Ableitinger (2012) beschrieben werden (Kapitel 5.3). Solche Lösungen könnten die in den jeweiligen Aufgaben genutzte Heurismen sowie metakognitiven Aktivitäten explizit hervorheben und deren Nutzen verdeutlichen. Diese praxisorientierten Lösungen würden nicht nur den Lernprozess unterstützen, sondern auch eine Brücke zwischen der theoretischen Vermittlung und der praktischen Anwendung schlagen.

Sofern Heurismen expliziter Teil der Lehre werden, sollte darauf aufmerksam gemacht werden, dass es keinen „one-size-fits-all"-Heurismus gibt, der in jeder Situation hilfreich ist. Stattdessen ist es entscheidend, ein breites Repertoire an Heurismen aufzubauen, die flexibel und situationsgerecht eingesetzt werden können, da sich dies als erfolgsversprechend herausgestellt hat (Kapitel 6.3.3). Dies setzt allerdings voraus, dass Heurismen in der Veranstaltung (sowohl Vorlesung als auch Übungsaufgaben) vielfältig angeregt werden. Ein großes Repertoire an Heurismen ermöglicht es den Studierenden, auf unterschiedliche Herausforderungen angemessen zu reagieren und je nach Kontext die passende Strategie auszuwählen. Aus bisherigen Unterstützungsmaßnahmen ist jedoch bekannt, dass Studierende nicht mit einer Liste von verschiedenen Heurismen überfrachtet werden sollten (Stenzel, 2023a, S. 186). Stattdessen wäre ein gezielter Fokus hilfreich. In den Ergebnissen hat sich gezeigt, dass strukturierte Vorgehensweisen, insbesondere mit einer gründlichen Aufgabenanalyse, zum Erfolg führen (Kapitel 6.1.6). Auf Basis der Ergebnisse zu häufigen Interaktionen in der *Analysis* (Kapitel 6.4.1) wäre es daher sinnvoll, den Heurismus *Begriffe klären* vorrangig mit den Studierenden zu besprechen. Dieser Ansatz deckt sich mit den Überlegungen, die Stenzel (2023a, S. 187) nach der Evaluation seiner Trainingsmaßnahme formuliert hat. Zusätzlich wäre eine Entscheidung, ob eine *Skizze* für die Aufgabenanalyse hilfreich sei, ebenfalls schnell entschieden. Auf der Wissensebene könnte dieser Fokus auf die Aufgabenanalyse erweitert werden, indem die Studierenden sich gezielt mit Begriffen und Zusammenhängen beschäftigen. Aufgrund der Interaktionen zeigt sich, dass in Unterstützungsvorhaben vor allem die Facetten *Explizite Formulierung* und *Konkretisierung & Abgrenzung* hervorgehoben werden sollten.

Die Ergebnisse stellen heraus, dass Studierende bei der Bearbeitung von Aufgaben vor allem auf die Beispiel-Aufgaben aus dem Tutorium zurückgreifen. Dies wird sowohl durch die *Konkretisierung & Abgrenzung* als auch die Verwendung des Heurismus *Ähnliche Aufgabe* deutlich. Obwohl dies vermeintlich auf die Organisation der Veranstaltung zurückzuführen ist, bestätigt eine Vorstudie ein vergleichbares Verhalten: Studierende berichten häufig, dass sie gezielt nach Beispielen im Internet suchen, um sich bei der Aufgabenbearbeitung an diesen zu orientieren (Kolbe & Wessel, 2022). Darüber hinaus konnte beobachtet werden, dass Studierende sich nicht nur auf Beispiele stützen, sondern häufig versuchen, die Vorgehensweise direkt zu kopieren. Diese

Tendenz verdeutlicht die Notwendigkeit, Lehrveranstaltungen entsprechend darauf vorzubereiten. Wenn Studierende ohnehin nach Beispielen (z.B. im Internet) suchen, ist es von Vorteil, gezielt Beispiele bereitzustellen, welche die inhaltlichen Aspekte der Aufgaben klären und besser auf die eigenen Hausaufgaben vorbereiten.

Beispiele bzw. Beispielaufgaben bieten im Ingenieurstudium ein zusätzliches Potenzial, indem sie eine Brücke zwischen mathematischen Verfahren und deren Anwendung im Ingenieurkontext schlagen. Dieser Ansatz kann nicht nur das Verständnis der Studierenden vertiefen, sondern auch ihre Motivation steigern. Wolf (2017) hat in diesem Zusammenhang Anwendungsaufgaben entwickelt, die speziell auf die Verbindung von Mathematik und Maschinenbau ausgerichtet sind. Auf diesen Fundus könnte zurückgegriffen werden, um erste Maßnahmen in der Lehre zu ergreifen und Studierenden einen praxisnahen Zugang zu mathematischen Inhalten zu bieten.

Die Ergebnisse zeigen, dass Studierende einen erheblichen Teil ihrer Zeit in der Phase der *Exploration* verbringen (Kapitel 6.1.2). Obwohl die Exploration oftmals mit dem „wild goose chase“ und seinen negativen Einfluss auf die Problemlöseprozesse assoziiert werden, ist dies erstmal nichts Negatives. Insbesondere die *Exploration* ist ein Indikator eines Problemlöseprozesses (Kapitel 6.4.3). Dennoch sollten Studierende dazu angeleitet werden, ihren Problemlösungsprozess regelmäßig zu reflektieren und zu überprüfen, ob ihr derzeitiges Vorgehen tatsächlich zielführend ist. Dabei spielen metakognitive Fähigkeiten eine entscheidende Rolle, da sie den Studierenden helfen, ineffektive *Explorationen* zu erkennen und einem „wild goose chase“ zu entkommen bzw. gezielt in eine andere Problemlösungsepisode überzugehen. Um diesen Prozess zu unterstützen, sollten Lehrende den Studierenden konkrete Strategien („Inwiefern bringt uns das weiter? Brauchen wir noch mehr Informationen? Stimmt es wirklich, was wir da gemacht haben?“) vermitteln, mit denen sie ihre *Explorationen* systematischer gestalten können.

Die Ergebnisse heben außerdem hervor, dass sowohl konzeptuelles Wissen als auch die Fähigkeit, Verknüpfungen zwischen unterschiedlichen Inhalten herzustellen, von zentraler Bedeutung sind (Kapitel 6.2.5). Diese Aspekte sind essenziell, um mathematische Beziehungen zu verstehen und Konzepte, Zusammenhänge sowie Verfahren in verschiedenen Anwendungskontexten erfolgreich nutzen zu können. Die Wissensmatrix kann hierbei eine unterstützende Rolle spielen. Sie bietet die Möglichkeit, spezifische Facetten des Wissens explizit zu vermitteln und gleichzeitig Verknüpfungen zwischen verschiedenen Inhalten für die Studierenden sichtbar zu machen. Auf diese Weise wird es den Studierenden erleichtert, die Struktur und den Zusammenhang mathematischer Inhalte zu erkennen sowie ihr Verständnis nachhaltig zu vertiefen.

7.4 Reflexion zur methodischen Herangehensweise

Im Folgenden wird die methodische Herangehensweise der Studie (Kapitel 5) diskutiert. Zunächst wird auf die Erhebungsmethode des Lautens Denkens sowie die damit einhergehende Beobachtungssituation eingegangen (Kapitel 7.4.1). Anschließend erfolgt eine Reflexion der drei Auswertungsmethoden in Bezug auf die Kategorien Steuerung, Wissen und Heurismen im Kontext der Problembearbeitungsprozesse (Kapitel 7.4.2). Abschließend wird sich mit dem Einfluss des Kontextes auf die Ergebnisse auseinandergesetzt (Kapitel 7.4.3) und die Verallgemeinerbarkeit der Studienergebnisse hinterfragt (Kapitel 7.4.4).

7.4.1 Diskussion zum Lauten Denken und der Beobachtungssituation

Bei der Anwendung der Methode des Lauten Denkens zeigen sich in dieser Studie einige Limitationen, welchem die Validität und Aussagekraft der erhobenen Daten beeinflussen können.

Ein zentraler Punkt betrifft die Gruppengröße und deren Einfluss auf die Authentizität der Situation. Konrad (2010) beschreibt, dass die Art des Lauten Denkens durch die soziale Dynamik innerhalb der Gruppe beeinflusst werden kann (z.B. bei Lea, Lisa, Sarah und Paula). Insbesondere größere Gruppen können dazu führen, dass die Teilnehmenden ihre Gedanken weniger frei äußern, was die Authentizität und Spontanität der Verbalisierungen beeinträchtigen könnte. Eine weitere Schwäche der Methode liegt in der potenziellen Nicht-Verbalisierung automatisierter bzw. prozeduraler Prozesse (Sandmann, 2014, S. 188). Konrad (2010) hebt hervor, dass Teilnehmende dazu neigen, vor allem bewusste und reflektierte Gedankengänge zu äußern, während routinemäßige Abläufe oft unkommentiert bleiben. Dies stellt eine Herausforderung dar, da gerade diese nicht-verbalisierten Aspekte für ein umfassendes Verständnis der Denkprozesse relevant sein können. In der vorliegenden Studie zeigt sich, dass diese Schwäche insbesondere Auswirkungen auf das prozedurale Wissen in der Kodierung ausüben kann. Die Nutzung bzw. Aktivierung dieses Wissens wird aus diesem Grund vermutlich unterschätzt, da entsprechende kognitive Abläufe nicht explizit verbalisiert und dementsprechend für eine Analyse nicht zugänglich sind. Obwohl in der Studie auch Videos für die Auswertung herangezogen wurden, die es ermöglichen, Handlungen zu erkennen, ist es dennoch nicht immer möglich, jede Prozedur vollständig zu rekonstruieren.

Hinzu kommt die Problematik der Beobachtungssituation, vor allem das Dabeisein der forschenden Person während der Durchführung. Mondana (2006, S. 52) weist darauf hin, dass die Präsenz einer beobachtenden Person die Teilnehmenden in ihrem Verhalten beeinflussen kann. Diese sogenannten Beobachtungseffekte können dazu führen, dass die Teilnehmenden ihre Denkprozesse unnatürlich anpassen oder sich weniger offen äußern. Darüber hinaus betrifft die besondere Beobachtungsituation auch die „Echtheit“ der

Ergebnisse. Am Beispiel von Nicks Bearbeitungsprozessen konnte beobachtet werden, dass er nervös wirkte und sich nur darauf konzentrierte, die Aufgaben möglichst schnell abzuschließen. Dabei können selbstregulatorische Entscheidungen, die den Fortschritt bei der Lösungsfindung gefördert hätten, von Nick ausgespart worden sein.

Trotz dieser Einschränkungen wird die Gesamtwirkung dieser Limitationen auf die Studie als gering eingeschätzt. Dies liegt daran, dass während der Durchführung eine freundschaftliche Atmosphäre zwischen Studienleiter und Teilnehmenden gepflegt wurde. Vor oder nach der Lernsituation wurden bspw. Gespräche über nicht-mathematische Themen geführt, was (vor allem in der ersten Sitzung) deutlich zur Entspannung der Teilnehmenden beigetragen hat. Darüber hinaus wurden während der Studie auch positive Effekte rund um die Situation des lauten Denkens beobachtet. Erstens haben die Teilnehmenden keinerlei Anzeichen von Ablenkung gezeigt, sondern waren durchgehend auf die Aufgaben konzentriert. Zweitens spiegelt sich dies in einer Bearbeitung von David wider, der ohne die besondere Situation die Bearbeitung der Aufgaben bereits vorzeitig abgebrochen hätte und nun einen Motivationsschub bekommen hat: „Also ich bin relativ ehrlich. Ich glaube, normalerweise würde ich diese Aufgabe jetzt aufgeben, […], aber ich versuche es mal weiter." Dies wirft die Frage auf, ob das laute Denken nicht nur eine Beobachtungsmethode war, sondern auch aktiv das Bearbeitungsverhalten verändert hat. Diese mögliche Wechselwirkung sollte bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden.

Insgesamt verdeutlichen die Ergebnisse dieser Studie, dass das mathematische Problemlösen nur mit einer Methode, die nah am Prozess ansetzt, umfassend untersucht werden kann. Dabei wurden verschiedene Maßnahmen ergriffen, um die Authentizität der Lernsituation so weit wie möglich zu erhalten (Kapitel 5.2.2). Nur eine solche detaillierte und prozessnahe Analyse ermöglicht es, die „ehrlichen" (meta-)kognitiven Prozesse der Teilnehmenden sichtbar zu machen, natürliche (mathematische) Lernprozesse zu erfassen und ein tiefergehendes Verständnis für deren Denk- und Lösungsstrategien zu gewinnen. Dabei lag in dieser Untersuchung ein Fokus auf Steuerung, Wissen und Heurismen. Die Erhebungsmethoden, mit denen diese Kategorien untersucht wurden, werden im Folgenden detaillierter diskutiert.

7.4.2 Diskussion zu den Auswertungsmethoden der Problembearbeitungsprozesse

Schoenfeld Episoden

Die Anwendung des Episodenmodells von Schoenfeld (1985) zur Analyse von Problembearbeitungsprozessen birgt ebenfalls mehrere Limitationen. Ein wesentlicher Kritikpunkt betrifft das Definitionsproblem der Episoden (Rott, 2013, S. 192). Dabei wird hervorgehoben, dass die Definitionen der Episoden oftmals vage bleiben. Schoenfeld (1992b) selbst gibt zu, dass die Abgrenzung zwischen den Episoden Exploration und Analysis nicht ganz eindeutig ist und es zu Verwechslungen kommen kann (Kapitel 5.4.1). Die Kategorien geben demnach einen gewissen Interpretationsspielraum, was zu Uneinigkeiten bei der Kodierung führen kann. Es ist sogar möglich, dass gleiche Handlungen, wie das Nachschlagen im Skript, je nach Kontext unterschiedlichen Episoden zugeordnet werden kann. Entscheidend ist, warum die Handlung erfolgt (ergibt sich z. B. durch vorherige Handlungen), da der Kontext die zugrunde liegende Episode klärt. Zudem sollte die Verbindung zwischen Erfolg und den einzelnen Episoden mit Vorsicht betrachtet werden. Die Definitionen der Kategorien implizieren teilweise bereits eine Bewertung, was insbesondere bei *Exploration* und *Planning* (*+Implementation*) zu einer voreingenommenen Interpretation führen kann. So können Problembearbeitungsprozesse mit einem zielführenden Vorgehen eher in *Planning* (*+Implementation*) und weniger zielführendes Vorgehen in *Exploration* eingeordnet werden.

Des Weiteren ist die Episodenkodierung von Schoenfeld vielmehr für einen ganzheitlichen Blick (=globales Level der Steuerung) des Problembearbeitungsprozess geeignet. Dabei spielt ebenfalls das Zeitlimit der kodierenden Episoden eine Rolle, die dazu führen, dass kürzere metakognitive Aussagen bzw. Handlungen (=lokales Level der Steuerung) nicht unbedingt in der Kodierung berücksichtigt werden konnten. In Kapitel 5.4.1 wird ebenfalls angedeutet, dass bspw. kürzere *Verifications* bzw. reflektive Aktivitäten in gewissen Episoden eingebettet sind.

Die Lerngruppengröße stellt eine weitere Limitation dar, die insbesondere bei der Analyse von Lea, Lisa, Sarah und Paula deutlich wird. In solcher Konstellation entsteht häufig eine Vielfalt von Einflussfaktoren, die den ständigen Wechsel zwischen Episoden begünstigen. Die Analyse solcher Prozesse gestaltet sich besonders herausfordernd, da die einzelnen Beiträge der verschiedenen Personen schwer eindeutig einer Episode zugeordnet werden können. In der Bearbeitung von Lea, Lisa, Sarah und Paula ist es bspw. vorgekommen, dass zwei Studierende die Aufgabe bereits als vollständig bearbeitet angesehen haben, während die anderen beiden Studierenden noch in der Episode der *Verification* vertieft waren.

Wissensmatrix

In dieser Studie wurde die Wissensmatrix (Prediger et al., 2011) für verschiedene Aspekte eingesetzt.

Die Wissensmatrix bietet vielfältige Möglichkeiten, mathematische Inhalte als prozedurales bzw. konzeptuelles Wissen einzuordnen (siehe z. B. Kapitel 4.4). Diese Möglichkeiten sind jedoch im Hinblick auf die Auswertung und die theoretische Einordnung in die Anforderungen der Aufgaben kritisch zu betrachten. Um eine fundierte theoretische Einordnung zu gewährleisten, wurden

Diskussionen mit mehreren Mitarbeiter:innen der Mathematikdidaktik geführt (siehe Kapitel 5.3). Durch konsensuelle Validierung konnte ein gemeinsamer Nenner gefunden werden, jedoch wurde in den Diskussionen auch deutlich, dass alternative Einordnungen ebenfalls sinnvoll erscheinen. Eine unterschiedliche Einordnung der mathematischen Inhalte würde ebenfalls einen Einfluss auf die Auswertung ausüben. Ein Beispiel dafür ist die Einordnung der Regel von L´Hospital (eine Diskussion dazu in Kapitel 4.4): Wenn diese als konzeptuelles und nicht als prozedurales Wissen aufgefasst wird, verschiebt sich die Wissensnutzung der Studierenden ebenfalls stärker in Richtung des konzeptuellen Wissens.

Ein weiterer Aspekt betrifft die Möglichkeit, das Angebot mit der Wissensmatrix noch präziser zu untersuchen. Hierzu könnte eine Analyse der Veranstaltungsmaterialien hinsichtlich der Quantität (Wie oft bzw. intensiv wird die Facette behandelt?) und Qualität (Wird die Facette vollumfänglich dargestellt?) der dargestellten mathematischen Inhalte beitragen. Eine solche Analyse würde es ermöglichen, detailliertere Aussagen über den Vergleich zwischen Angebot und Nutzung zu treffen, anstatt lediglich festzustellen, ob ein Angebot genutzt wurde.

Die Integration der Wissensfacette *Implizite Nutzung* hat sich im Kontext von Bearbeitungsprozessen als besonders nützlich erwiesen, da sie sich als meistgenutzte Wissensfacette herausstellte. Dies ist nachvollziehbar da es bei Hausaufgaben oft um die Anwendung bzw. den Anwendungskontext von Konzepten, Zusammenhängen und Verfahren geht. Zusammen mit der *Expliziten Formulierung* spiegelt die *Implizite Nutzung* die definitorischen Ansätze des prozeduralen Wissens gut wider (Kapitel 2.4.2). Daher konnten für diese beiden Facetten Schwierigkeiten in den Bearbeitungen der Studierenden leicht zugeordnet werden. Im Gegensatz dazu erwies sich die Interpretation anderer Facetten, insbesondere von *Bedeutung & Vernetzung*, als weniger eindeutig und war mit größerem Interpretationsspielraum verbunden. Dies hängt möglicherweise damit zusammen, dass die Facette *Bedeutung & Vernetzung* in der ursprünglichen Wissensmatrix einen starken Bezug zum konzeptuellen Wissen aufweist.

Es zeigt sich genauso wie bei den Schoenfeld Episoden, dass die Kodierung in einem Gruppensetting herausfordernd ist. In kurzen Zeitspannen werden oft verschiedene Wissenselemente angedeutet, was es schwierig macht, alle Aspekte mit der Wissensmatrix abzubilden. Hier stößt die Wissensmatrix an ihre Grenzen, insbesondere wenn es darum geht, dynamische und komplexere Interaktionen zu erfassen.

Letztendlich hat der Einsatz der Wissensmatrix auch forschungspraktische Implikationen. Zum einen bietet die Wissensmatrix die Möglichkeit, mathematische Inhalte auf hochschulischer Ebene zu systematisieren und zu strukturieren, was ihrem ursprünglichen Zweck für schulische Inhalte entspricht.

Mit der Anpassung und Weiterentwicklung der Wissensmatrix für die Hochschulforschung wurde sie jedoch auch in einer Weise verwendet, die über ihren ursprünglichen Entwurf hinausgeht. Sie wurde zweckentfremdet, um die Nutzung von Wissen in Problembearbeitungsprozessen darzustellen. In diesem neuen Kontext bietet sie wertvolle Einsichten in die Art und Weise, wie Studierende Wissen anwenden und zwischen verschiedenen Wissensarten differenzieren. Dabei ermöglicht die Wissensmatrix nicht nur eine differenzierte Analyse der Wissensnutzung, sondern auch eine tiefere Untersuchung der Lernprozesse und ihrer Dynamik.

Heurismen

Für diese Studie wurde für die Kodierung von Heurismen auf ein bereits bestehendes Kategoriensystem von Stenzel (2023a) zurückgegriffen. Dieses Kategoriensystem ist auf einige Aufgaben für den hochschulischen Mathematikkontext angepasst. Obwohl die Aufgaben in der Studie unterschiedlich waren, hat sich dennoch gezeigt, dass der bestehende Kategorienkatalog (mit kleinen Anpassungen) auch für diese Untersuchung geeignet ist. Eine Ergänzung des Heurismus „systematisches Probieren“ hätte jedoch vorgenommen werden können, da es insbesondere bei der Anwendung von *Spezialfällen* Hinweise darauf gab, wie etwa bei David zur Aufgabe „L´Hospital“. Hier wurden durch das Einsetzen verschiedener Werte *Spezialfälle* betrachtet, was bei mehrfachem Einsetzen als systematisches Probieren interpretiert werden könnte. In weiteren Studien im hochschulischen Kontext müssen ggfs. weitere Anpassungen bzw. Ergänzungen an dem Kategorienkatalog vorgenommen werden.

7.4.3 Diskussion zum Kontext der Studie

Im Rahmen der Studie wurde festgestellt, dass Studierende typischerweise erst eine Lernsession zur Bearbeitung der Hausaufgaben mit dem Studienleiter vereinbart haben, nachdem sie in derselben Woche zuvor das Tutorium besucht hatten. Es ist möglich, dass diese (auch von der Veranstaltung intendierte) Reihenfolge die untersuchten Problembearbeitungsprozesse beeinflusst haben.
Die Struktur der Veranstaltung könnte insbesondere die frühen Phasen des Problemlöseprozesses, wie *Reading* oder *Analysis*, prägen. Da die Aufgaben im Tutorium und in den Hausaufgaben eine starke Ähnlichkeit aufweisen (siehe Kapitel 5.3) und dazu in derselben PDF-Datei bereitgestellt werden, ist denkbar, dass Studierende durch die Arbeit im Tutorium bereits erste Analysen oder Ansätze entwickeln. Es ist auch nicht auszuschließen, dass Tutoren im Tutorium in Nebensätzen auf die Hausaufgaben eingehen oder eine kurze Aufgabenanalyse vorwegnehmen. Dieses Verhalten könnte erklären, warum manche Studierende, wie Alex und Thomas, direkt nach dem Tutorium mit der Bearbeitung der

Hausaufgaben beginnen und schnell einen Plan entwickeln. Solche Bedingungen könnten sich zudem auf die Wahl und Nutzung von Heurismen sowie Wissen auswirken. Besonders der Heurismus *Ähnliche Aufgabe* scheint in diesem Kontext eine bedeutende Rolle einzunehmen, da die Aufgabenformate ebenfalls eng verwandt sind. Gleiches gilt für die Facette *Konkretisierung & Abgrenzung*.
Darüber hinaus wirft die Authentizität der Bearbeitungssituation interessante Fragen auf. Ein Vergleich mit der Studie von Schoenfeld (z.B. 1985) legt nahe, dass die Struktur eines festgelegten Zeitrahmens andere Problemlöseprozesse hervorbringen könnte als freiere, alltägliche Kontexte (siehe z. B. an dem Verhalten "wild goose chase"). Gleichzeitig könnten die zusätzlichen Anreize, wie Bonuspunkte für die Klausur, eine besondere Motivation geschaffen haben, die Problembearbeitung mit einem pragmatischen Ziel zu verbinden. Dies könnte die Dynamik der Prozesse ebenfalls beeinflusst haben.
Es ist davon auszugehen, dass für die (Erstsemester-)Studierenden zum Zeitpunkt der Studie die organisatorischen Herausforderungen des Übergangs von der Schule zur Hochschule weitgehend bewältigt waren. Die Abläufe des Semesters und die Bedeutung regelmäßiger Aufgabenbearbeitungen sollten zu diesem Zeitpunkt etabliert sein. Allerdings könnte die fachliche Eingewöhnung nach wie vor Anpassungsprozesse erfordern, da die spezifische Herangehensweise und Wissensvermittlung der Mathematik in diesem Studiengang weiterhin Herausforderungen mit sich bringen könnten (Stoffels, 2020, S. xii). Diese Überlegungen deuten darauf hin, dass die Ergebnisse durch die fortlaufende Eingewöhnung in die fachlichen Anforderungen, jedoch nicht durch organisatorische Unsicherheiten beeinflusst wurden.
Abschließend lässt sich festhalten, dass mathematisches Problemlösen idealerweise als dynamischer Prozess untersucht werden sollte. Ohne diesen Fokus wären viele Beobachtungen, wie etwa die Nutzung spezifischer Heurismen, Wissenselemente und die spezifischen Verläufe der einzelnen Prozesse, unerkannt geblieben.

7.4.4 Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse

Obwohl die Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse in qualitativen Studien in der Regel eher eine untergeordnete Rolle spielt, soll dieser Aspekt dennoch beleuchtet werden.
Gegen die Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse dieser Studie spricht, dass sie ausschließlich mit Studierenden an einer einzelnen Universität durchgeführt wurde und auf einen spezifischen Kurs beschränkt ist. Dadurch ist die Anzahl an teilnehmenden Studierenden begrenzt. Eine solche Fokussierung auf einen kleinen Rahmen reduziert die Möglichkeit, die Ergebnisse auf andere Universitäten bzw. Studiengänge zu übertragen. Darüber hinaus war die Teilnahme an der Studie freiwillig, was eine Positivauswahl der Studierenden begünstigt. Es ist daher davon auszugehen, dass primär motivierte Studierende an

der Studie teilgenommen haben, die ohnehin die eigene Motivation aufbringen, die wöchentlichen Hausaufgaben zu bearbeiten. Die Stichprobe der vorliegenden Arbeit repräsentiert daher möglicherweise nicht die gesamte Spannbreite an Motivation und Engagement innerhalb der Zielgruppe. Zusätzlich deuten die Abiturnoten der Studierenden darauf hin, dass es sich vorwiegend um Teilnehmende mit guten bis befriedigenden schulischen Leistungen (mit der Ausnahme von Lukas) und somit ausreichendem Vorwissen handelt. Dieser Umstand schließt möglicherweise jene Studierende aus, die eher unterdurchschnittliche Leistung erbringen, wodurch ein verzerrtes Bild der Zielgruppe entsteht. Es kann in dem Fall dadurch nicht von einem gesättigten Sampling im Sinne der Grounded Theory gesprochen werden (Strauss & Corbin, 1996). Die wenigen untersuchten Prozesse (N=13) waren zudem nicht einheitlich, da sie sowohl individuelle als auch Gruppenprozesse beinhalteten. Da kollaboratives Lernen nachweislich Einfluss auf den Problemlösungsprozess hat (Dahl et al., 2018; Pijls et al., 2007), sind diese Prozesse untereinander nicht direkt vergleichbar. Dies erschwert die Ableitung verlässlicher Schlussfolgerungen und reduziert die Aussagekraft der Ergebnisse in Bezug auf ihre Verallgemeinerbarkeit.
Die verwendeten Aufgaben in dieser Studie könnten jedoch Hinweise auf eine Übertragbarkeit in andere Studiengänge liefern, insbesondere etwa für das Fach- bzw. gymnasiale Lehramtstudium. Die Art der Aufgaben könnten ebenfalls in solchen Studiengängen eingesetzt werden. Allerdings wäre zu überlegen, ob diese Studierendengruppe die Aufgaben ähnlich bearbeiten. Es ist denkbar, dass die Bearbeitungsprozesse aufgrund anderer Vorkenntnisse oder Fähigkeiten im Umgang mit mathematischen Inhalten deutlich variieren würden. Während die Aufgaben im Kontext eines ingenieurwissenschaftlichen Kontextes als Probleme eingestuft werden können (Kapitel 6.4.3), können dieselben Aufgaben für Studierende der Fach- bzw. Lehramtsmathematik als eher „einfache“ Aufgaben wahrgenommen werden. Es ist dennoch naheliegend zu vermuten, dass auch Aufgaben mit Beweischarakter, wie etwa die Aufgabe zum „Mittelwertsatz“, ähnliche Probleme hervorrufen könnten.

7.5 Ausblick

In den vorherigen Kapiteln der Diskussion wurden an mehreren Stellen bereits mögliche Richtungen für zukünftige Forschungen angedeutet. Aufbauend auf den bisherigen Ausführungen werden im Folgenden diese und weitere Überlegungen explizit ausgeführt. Dabei werden verschiedene Themen aufgegriffen und mögliche Ansätze für zukünftige Forschungsarbeiten skizziert.

Verallgemeinerbarkeit Die Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse dieser Untersuchung ist in gewisser Weise limitiert, wie bereits in Kapitel 7.4.4

angesprochen. Da die Untersuchung in einem sehr spezifischen Rahmen stattgefunden hat, ist es von Interesse, wie sich die Ergebnisse in anderen Kontexten darstellen würden. Beispielsweise hat Stenzel (2023a, S. 89ff.) bereits einige Aufgaben aus dem ersten Semester von Fachstudierenden sowie gymnasialen Lehramtsstudierenden untersucht. Eine spannende anschließende Fragestellung wäre, wie mathematische Problembearbeitungsprozesse in höheren Fachsemestern ablaufen, in denen die fachmathematischen Inhalte komplexer werden, aber die Studierenden auch über mehr Erfahrung und Vorwissen verfügen. Ein weiterer interessanter Ansatzpunkt wäre die Analyse der mathematischen Problembearbeitungsprozesse von Studierenden anderer Fachrichtungen, etwa von Wirtschaftswissenschaftsstudierenden. Diese Gruppe weist aufgrund ihrer eher anwendungsorientierten Ausrichtung gewisse Parallelen zur Ingenieursmathematik auf und könnte zusätzliche Perspektiven auf die Problemlösestrategien bieten. Aber auch Untersuchungen in einem sehr ähnlichen Kontext könnten wertvolle Erkenntnisse liefern. Beispielsweise wäre es relevant zu prüfen, ob sich die Ergebnisse dieser Studie mit Ingenieurstudierenden an einer anderen Hochschule replizieren lassen. Dies würde weitere Aufschlüsse hinsichtlich der Verallgemeinerbarkeit liefern und zur Sättigung des Samplings beitragen (Strauss & Corbin, 1996).

Problemlösen in Gruppen oder als Individuum Ein weiterer Aspekt betrifft das Problemlösen in Gruppen (Liljedahl & Cai, 2021) im Vergleich zum individuellen Arbeiten. Kollaboratives Lernen zeigt, dass Lernende von ihren Gruppenmitgliedern profitieren können, indem sie bspw. neue Perspektiven einbringen oder die eigenen Ideen gemeinsam besprechen (Dahl et al., 2018; Pijls et al., 2007). Auch in der vorliegenden Studie ließ sich beobachten, wie Gruppenmitglieder voneinander profitieren: Zum einen wurden in den untersuchten Lerngruppen zahlreiche metakognitive Kommentare geäußert, wie etwa „Das müssen wir jetzt so machen, oder?“ oder „Hast du das auch so?“. Solche Beiträge, obwohl oft nur kurze „Einzeiler“, ermöglichten es den Teilnehmenden, sich schnell gegenseitig abzusichern oder gemeinsam Ideen für den weiteren Lösungsweg zu prüfen. Dadurch konnten sie den Problembearbeitungsprozess effektiv vorantreiben, was auf die potenzielle Bedeutung solcher kurzen Kommentare für den Gesamtprozess hinweist. Zum anderen wurde deutlich, dass Gruppenmitglieder in der Lage sind, andere Teilnehmende gezielt in eine bestimmte Richtung zu lenken. Bspw. zeigte sich in den Prozessen der Gruppe um Lea, Lisa, Sarah und Paula, dass durch das Eingreifen eines Gruppenmitglieds der Lösungsprozess von der *Exploration* auf einen produktiven Weg zurückgeführt wurde. Solche metakognitiven Einwände, die in Einzelsettings häufig fehlen, haben in einem Gruppensetting großes Potenzial, da sie nicht nur den Problembearbeitungsprozess strukturieren, sondern auch den Austausch von Wissen und Strategien fördern können. Darüber hinaus lässt sich vermuten, dass Gruppenarbeitsprozesse eine wichtige Rolle beim Schließen von Wissenslücken spielen. Während der Diskussion oder durch direkte Rückmeldungen zwischen den Gruppenmitgliedern könnte bisher inaktives Wissen aktiviert oder fehlendes Wissen ergänzt werden, was die Qualität und Tiefe der Problembearbeitung steigert (Pijls et al., 2007). Diese Aspekte wurden in der vorliegenden Arbeit lediglich angedeutet, könnten jedoch in einem anderen Forschungssetting, das den Vergleich zwischen Gruppen- und Einzelarbeit gezielt in den Fokus rückt, genauer untersucht werden.

Lernen durch Problemlösen Ein weiterer Aspekt, der vertieft untersucht werden könnte, ist das **Lernen durch Problemlösen**. Obwohl dieser Aspekt in der vorliegenden Untersuchung nicht explizit im Fokus stand, deutet sich an verschiedenen Stellen an, dass das Bearbeiten von Problemen einen positiven Einfluss auf das Verständnis mathematischer Konzepte, Zusammenhänge und Verfahren haben kann. Selbst in Fällen, in denen der Bearbeitungsprozess nicht zu einer erfolgreichen Lösung führte, ließen sich dennoch Verbesserungen im mathematischen Verständnis beobachten (z. B. in Davids Prozess zur Aufgabe „Mittelwertsatz“). In diesem Zusammenhang stellt sich die grundlegende Frage, wann notwendiges Wissen für die Problemlösung aufgebaut werden sollte – vor Beginn des Prozesses oder erst währenddessen? (Stenzel, 2023a, S. 209). Zukünftige Forschung könnte untersuchen, welche spezifischen Aspekte tatsächlich durch Problemlösen gelernt werden können und welche Mindestvoraussetzungen erfüllt sein müssen, damit ein Lernzuwachs möglich ist. Es stellt sich die Frage, welche Wissenslücken während des Prozesses noch ausgeglichen werden können und ab wann solche Lücken den Problembearbeitungsprozess unüberwindbar erschweren. Insbesondere das Überwinden von Schwierigkeiten innerhalb der Facette *Explizite Formulierung* hat sich als fördernd für den Problembearbeitungsprozess erwiesen. Eine vertiefte Untersuchung, wie genau diese Herausforderungen bewältigt werden, könnte wertvolle Einblicke liefern. Eine weitere Frage wäre, welche Formen von Metakognition notwendig sind, um Problemlösestrategien effektiv anzuwenden. Welche Strategien helfen, die explizite Formulierung einer Aufgabe besser zu verstehen und in eine zielführende Bearbeitung zu überführen?
Ein weiterer Aspekt, der im Kontext des Lernens durch Problemlösen vertieft betrachtet werden könnte, betrifft die **Unterscheidung zwischen Heurismen und Lernstrategien**. Heurismen wie *Ähnliche Aufgabe* sind eine oft genutzte Methode, die Studierende anwenden, um ihre eigenen Lösungen voranzutreiben. Diese Art von Heurismus fördert den Fortschritt im Lösungsprozess, und fällt gleichzeitig eher unter einer **Wiederholungsstrategie** (=Oberflächenstrategie). Interessanterweise zeigt sich, dass diese scheinbar oberflächliche Herangehensweise häufig eine positive Auswirkung auf den Problembearbeitungsprozess und damit auf den Lernprozess insgesamt hat.

Göller (2020, S. 214) hat ebenfalls schon beschrieben, dass Studierende unter anderem auch **Wiederholungsstrategien** nutzen, um Aufgaben besser zu verstehen und ihr Wissen zu vertiefen. Inwieweit solche „algorithmischen" Heurismen als Teil des „guten" Problemlösens angesehen werden sollten, ist eine relevante Frage.

Rolle von Metakognition (bei Episodenübergängen) Die Kategorie Steuerung wurde in der vorliegenden Arbeit primär auf globaler Ebene untersucht. Dabei wurden vor allem die Hauptentscheidungen berücksichtigt, wie sie durch die Episoden in Schoenfelds Modell beschrieben werden. Für zukünftige Forschung bietet es sich jedoch an, die Steuerung auch auf lokaler Ebene näher zu betrachten (z. B. mit dem Kategoriensystem von Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007). Ein solcher Ansatz würde nicht nur die Hauptentscheidungen sichtbar machen, sondern auch die metakognitiven Aktivitäten innerhalb der einzelnen Episoden beleuchten. Besonders interessant wäre in diesem Zusammenhang der Fokus auf die Übergänge zwischen den Episoden, wie bereits in Rott (2013, S. 375ff.) thematisiert und in Kapitel 6.4.2 anhand der Übergänge aus der ***Exploration*** angedeutet. Es zeigt sich, dass bestimmte Episoden stärker mit einem erfolgreichen Problembearbeitungsprozess assoziiert sind. Daraus ergibt sich die spannende Frage, welche spezifischen Aktivitäten oder Strategien dazu beitragen, dass Lernende aus weniger produktiven Episoden herausfinden und erfolgreich in andere, zielführendere Episoden eintreten können. Eine vertiefte Untersuchung der metakognitiven Aktivitäten auf lokaler Ebene könnte somit wertvolle Erkenntnisse darüber liefern, wie Steuerungsprozesse auf Mikroebene das Gesamtergebnis des Problemlösens beeinflussen und welche Faktoren gezielt gefördert werden können, um den Erfolg von Problembearbeitungsprozessen zu steigern.

Zusammenhänge und Einfluss zwischen den Kategorien In der vorliegenden Untersuchung wurde bereits thematisiert, dass es Interaktionen zwischen verschiedenen Kategorien (Steuerung, Wissen und Heurismen) gibt (Kapitel 6.4.1), die scheinbar typisch für Problembearbeitungsprozesse sind. Diese Interaktionen eröffnen eine spannende Richtung für zukünftige Forschung: Es könnte genauer untersucht werden, inwiefern einzelne Kategorien sich gegenseitig beeinflussen. Zum Beispiel wäre es interessant herauszufinden, welche Heurismen bevorzugt in bestimmte Episoden führen oder durch welche Wissenselemente ein spezifischer Heurismus begünstigt wird. Solche Analysen könnten dazu beitragen, die Wechselwirkungen zwischen Wissen, Heurismen und Steuerung besser zu verstehen und so ein umfassenderes Bild der zugrunde liegenden Mechanismen zu zeichnen.

Einbezug von Beliefs Um das Modell von Schoenfeld weiter zu vervollständigen, kann auch die Betrachtung von **Beliefs** (Überzeugungen) einbezogen werden. Diese spielen ebenfalls eine bedeutende Rolle in der Art und Weise, wie Studierende mathematische Probleme angehen und lösen (Pekrun, 2006; Schoenfeld, 1985). Überzeugungen beeinflussen sowohl die Wahrnehmung von Aufgaben als auch die Wahl der Strategien, die während des Problemlösens angewendet werden. Es könnte daher sinnvoll sein, Methoden miteinander zu verknüpfen, um die Rolle der Beliefs besser zu erfassen. Eine Kombination aus **Interviews**, **Lautem Denken** und **„Stimulated Recall“** würde es ermöglichen, sowohl die expliziten Äußerungen der Studierenden als auch ihre inneren Überzeugungen und mentalen Prozesse zu untersuchen. Diese Methoden bieten unterschiedliche Zugänge, die zusammen ein umfassenderes Bild von den Beliefs der Studierenden und deren Einfluss auf den Problembearbeitungsprozess verschaffen könnten. Der Einfluss der Beliefs bietet eine Grundlage, um unterschiedliche Herangehensweisen besser zu verstehen sowie deren Rolle beim Lernen und Problemlösen in der Mathematik zu analysieren. Eine solche Untersuchung könnte wertvolle Erkenntnisse für die zielgerichtete Gestaltung von Lernumgebungen liefern.

Mathematisches Problemlösen und allgemeines Problemlösen Die vorliegende Studie hat lediglich innermathematische Probleme untersucht. Allerdings bieten insbesondere die Anwendungsfächer der Mathematik, wie die Ingenieurstudiengänge, eine Gelegenheit, mathematikhaltige Probleme aus realistischen Anwendungskontexten zu betrachten. Solche Aufgaben, wie sie bspw. von Lehmann (2018, S. 138) genutzt werden, könnten den Problembearbeitungsprozessen von Studierenden näher an den tatsächlichen Herausforderungen eines Ingenieursberufs sein. Dies ist besonders interessant, da Problemlösen sowohl aus mathematischer Sicht als auch aus der allgemeinen Ingenieursperspektive aufgefasst werden kann (Neumann et al., 2015). Die Betrachtung solcher Aufgaben könnte die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen diesen beiden Auffassungen herausarbeiten. Dies könnte wertvolle Einblicke in die Entwicklung und den Transfer von Problemlösekompetenzen bieten. Überträgt sich bspw. die mathematische Problemlösekompetenz auf allgemeine Ingenieurprobleme?

Einbezug der Problemschwierigkeit In zukünftigen Untersuchungen zum mathematischen Problemlösen könnte die Berücksichtigung der Problemschwierigkeit eine wertvolle Erweiterung darstellen (vgl. Stiller et al., 2021, S. 4f.). Aspekte wie die Komplexität, Vernetztheit, etc. könnten systematisch in die Aufgaben- und Prozessanalysen integriert werden. Diese Faktoren, die zur Kategorie der Problemschwierigkeit gehören, haben das Potenzial, den Verlauf und die Gestaltung der Problembearbeitungsprozesse maßgeblich zu beeinflussen. Eine detaillierte Analyse könnte aufzeigen, wie unterschiedliche Schwierigkeitsgrade die Wahl von Heurismen, den Einsatz von Wissen oder die Dynamik von Episodenwechseln beeinflussen und welche Anpassungen im Vorgehen der Lernenden erforderlich sind, um solche Herausforderungen zu bewältigen. Darüber hinaus bieten diese Aspekte eine zusätzliche Perspektive, die über die übliche Einordnung in prozedurales und konzeptuelles Wissen hinausgeht. Während diese Einteilung oft den Schwerpunkt auf die Art des Wissens legt, könnten Probleme unterschiedlicher Schwierigkeit zeigen, wie sich verschiedene Arten von Wissen und Fähigkeiten dynamisch ergänzen.

Wissensmatrix als Instrument Die Wissensmatrix spielte in dieser Arbeit eine zentrale Rolle und wurde vielfältig eingesetzt. Sie diente zur Einordnung mathematischer Inhalte (Kapitel 4), zur theoretischen Analyse der Aufgaben (Kapitel 5.3) sowie zur Rekonstruktion des Wissensangebots (Kapitel 6.2.1) und der Wissensnutzung (Kapitel 6.2.2). Damit zeigt die Wissensmatrix ihr Potenzial und trug maßgeblich zur Durchführung und Auswertung dieser Arbeit bei. Allerdings wurde die Wissensmatrix in der Hochschulforschung in einem erweiterten, ursprünglich nicht vorgesehenen Kontext genutzt. Daher wäre es eine weitere Aufgabe, die Wissensmatrix weiter auszuschärfen und an spezifische Anforderungen anzupassen, um ihre Einsatzmöglichkeiten zu erweitern. Besonders im Bereich der Untersuchung von Wissensangeboten in Lehrveranstaltungen besteht weiteres Potenzial, die Wissensmatrix gezielt einzusetzen (Kapitel 7.4.2). Dabei stellt sich bspw. die Frage, wie Konzepte, Zusammenhänge und Verfahren aus anderen Inhaltsbereichen, wie etwa der Linearen Algebra, mithilfe der Wissensfacetten eingeordnet werden können.

Literaturverzeichnis

Ableitinger, C. (2012). Typische Teilprozesse beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben: Kategorienbildung und Ankerbeispiele. *Journal Für Mathematik-Didaktik, 33*(1), 87–111. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0033-y

Ableitinger, C., & Herrmann, A. (2011). *Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra: Ein Arbeits- und Übungsbuch* (1. Aufl.). Vieweg & Teubner.

Alcock, L. (2017). *Wie man erfolgreich Mathematik studiert. Besonderheiten eines nicht-trivialen Studiengangs*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-50385-0

Alpers, B. (2014). *A Mathematics Curriculum for a Practice-oriented Study Course in Mechanical Engineering*. https://www.researchgate.net/profile/Burkhard-Alpers-2/publication/358465299_A_Mathematics_Curriculum_for_a_Practice-oriented_Study_Course_in_Mechanical_Engineering/links/6203bc2d0445354498d33d86/A-Mathematics-Curriculum-for-a-Practice-oriented-Study-Course-in-Mechanical-Engineering.pdf

Alpers, B. (2016). Das SEFI Maths Working Group „Curriculum Framework Document" und seine Realisierung in einem Mathematik-Curriculum für einen praxisorientierten Maschinenbaustudiengang. In Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 645–659). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10261-6_40

Alpers, B., Demlova, M., Fant, C.-H., Gustafsson, T., Lawson, D., Mustoe, L., Olsson-Lehtonen, B., Robinson, C., & Velichova, D. (2013). *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education: A Report of the Mathematics Working Group*. European Society for Engineering Education (SEFI).

Altieri, M. (2016). *Erfolg in Mathematikklausuren ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge unter besonderer Berücksichtigung prozeduralen Wissens* [Dissertation]. Technische Universität Dortmund. https://eldorado.tu-dortmund.de/server/api/core/bitstreams/892e3733-e824-4e1c-b1d0-64903ba0a449/content

Anderson, L.-W., Krathwohl, D.-R., Airasian, P.-W., Cruikshank, K.-A., Mayer, R.-E., Pintrich, P.-R., Raths, J., & Wittrock, M.-C. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing. A revision of Bloom´s taxonomy of educational objectives*. Longman.

Arbinger, R. (1997). *Psychologie des Problemlösens. Eine anwendungsorientierte Einführung*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Artelt, C. (2000). Wie prädiktiv sind retrospektive Selbstberichte über den Gebrauch von Lernstrategien für strategisches Lernen? *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie,* 14(2/3), 72–84. https://doi.org/10.1024//1010-0652.14.23.72

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K.-E. (2001). The development of students` graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399–431. http://www.math.kent.edu/~edd/SlopeStudy.pdf

Assad, D.-A. (2015). Task-Based Interviews in Mathematics: Understanding Student Strategies and Representations through Problem Solving. *International Journal of Education and Social Science,* 2(1), 17–26.

Bandura, A. (1977). *Social Learning Theory*. Prentice-Hall.

Bannert, M. (2007). *Metakognition beim Lernen mit Hypermedien.* Waxmann.

Beichner, R.-J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American Journal of Physics*, *62*(8), 750–762. https://doi.org/10.1119/1.17449

Beitlich, J., Moll, G., Nagel, K., & Reiss, K. (2015). Fehlvorstellungen zum Funktionsbegriff am Beginn des Mathematikstudiums. In Gartmeier, M., Gruber, H., Hascher, T., & Heid, H. (Hrsg.), *Funktionen von Fehlern im Kontext individueller und gesellschaftlicher Entwicklung* (S. 211–223). Waxmann. https://www.researchgate.net/profile/Martin-Gartmeier-2/publication/278021903_Funktionen_von_Fehlern_im_Kontext_individueller_und_gesellschaftlicher_Entwicklung_Functions_of_errors_in_the_context_of_individual_and_societal_development/links/6073fdcea6fdcc5f779cb83f/Funktionen-von-Fehlern-im-Kontext-individueller-und-gesellschaftlicher-Entwicklung-Functions-of-errors-in-the-context-of-individual-and-societal-development.pdf#page=210

Bender, P. (1991). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, *44*(4), 238-243.

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 348–370. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.11.001

Berry, J., Maull, W., Johnson, P., & Monaghan, J. (1999). Routine questuons and examination performance. In Zaslavsky, O. (Hrsg.), *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Internation Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 105–112). Technion.

Beutelspacher, A. (2009). *"Das ist o.B.d.A. trivial!". Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken* (9., aktualisierte Aufl.). Vieweg + Teubner. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9599-8

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(4), 487–500. https://doi.org/10.1080/00207390010022590

Biehler, R., Fleischmann, Y., Gold, A., & Mai, T. (2017). Mathematik online lernen mit studiVEMINT. In C. Leuchter, F. Wistuba, C. Czapla, & C. Segerer (Hrsg.), *Erfolgreich studieren mit E-Learning: Online-Kurse für Mathematik und Sprach- und Textverständnis.* Symposium conducted at the meeting of RWTH Aachen University, Aachen.

Biggs, S.-F., Rosman, A.-J., & Sergenian, G.-K. (1993). Methodological issues in judgment and decision-making research: Concurrent verbal protocol validity and simultaneous traces of process. *Journal of Behavioral Decision Making,* 6(3), 187–206.

Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(6), 763–777. https://doi.org/10.1080/00207390701453579

Biza, I. (2011). Students' Evolving Meaning About Tangent Line with the Mediation of a Dynamic Geometry Environment and an Instructional Example Space. *Technology, Knowledge and Learning*, *16*(2), 125–151. https://doi.org/10.1007/s10758-011-9180-3

Blömeke, S. (2004). Empirische Befunden zur Wirksamkeit der Lehrerbildung. In Blömeke, S., Reinhold, P., Tulodziecki, G., & Wildt, J. (Hrsg.), *Handbuch Lehrerbildung* (S. 59–91). Klinkhardt/Westermann.

Bortz, J., & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation. Für Human- und Sozialwissenschaftler* (4. überarb. Aufl.). Springer Medizin.

Bressoud, D.-M., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus* (1. Aufl.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. *Theory of Mathematics Education*, *54*, 110–119.

Bruder, R. (2000). Eine akzentuierte Aufgabenauswahl und Vermitteln heuristischer Erfahrung: Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle. In Herget, W., & Flade, L. (Hrsg.), *Mathematik Lehren und Lernen Nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen*. Volk und Wissen. https://www.math-learning.com/files/extremal.pdf

Bruder, R., & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht* (1. Aufl.). Cornelsen Scriptor.

Bruner, J.-S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.

Brunetto, D., Andrà, C., & Bernardi, G. (2019). *Teaching with emerging technologies in a STEM university math class.* Fifth International Conference on Higher Education Advances. https://doi.org/10.4995/HEAD19.2019.9179

Büchter, A., & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie*. Spektrum Akademischer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2680-2

Burg, K., Haf, H., Wille, F., & Meister, A. (2017). *Höhere Mathematik für Ingenieure Band 1. Analysis* (11. Aufl.). Springer Vieweg. https://doi.org/10.1007/978-3-658-19428-4

Byerley, C., Hatfield, N., & Thompson, P.-W. (2012). Calculus student understandings of division and rate. In Brown, S., Larsen, S., Marrongelle, K., & Oehrtman, M. (Hrsg.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME)* (S. 358–363).

Canobi, K.-H. (2009). Concept-procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology*, *102*(2), 131–149.

Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment: A Tool for Assessing Students' Reasoning Abilities and Understandings. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 113–145. https://doi.org/10.1080/07370001003676587

Carlson, M.-P., Smith, N., & Persson, J. (2003). Developing and connceting calculus students´notions of rate-of-change and accumulation: The fundamental theorem of calculus. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500922.pdf

Charters, E. (2003). The use of think-aloud methods in qualitative research. An ´introduction to think-aloud methods. *Brock Educational Journal*, 12(2), 68–82.

Chau, L.-T.-H., Duc, N.-M., & Tong, D.-H. (2021). The Teaching of the Concept of Derivative in High School and Its Relationship with Physics. *Universal Journal of Educational Research*, *9*(1), 186–201.

Clark, J.-M., Cordero, F., Cottril, J., Czarnocha, B., DeVries, D.-J., St. John, D., Tolias, G., & Vidakovic, D. (1997). Constructin a Schema: The Case of the Chain Rule. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345–364. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90012-2

Clark, M., & Lovric, M. (2009). Understanding secondary–tertiary transition in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(6), 755–776. https://doi.org/10.1080/00207390902912878

Coertjens, L., Vanthournout, G., Lindblom-Ylänne, S., & Postareff, L. (2016). Understanding individual differences in approaches to learning across courses: A mixed method approach. *Learning and Individual Differences*, *51*, 69–80. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.07.003

Cohors-Fresenborg, E., & Kaune, C. (2007). Kategorisierung von Diskursen im Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Anteile. In Peter-Koop, A., & Bikner-Ahsbahs, A. (Hrsg.), *Mathematische Bildung - Mathematische Leistung* (S. 233–248). Franzbecker.

Collet, C. (2009). *Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation. Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen.* Waxmann.

Cottril, J.-F. (1999). *Students´ understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions* (Dissertation). Purdue University.

Cottril, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167–192. https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=2365c8d466082f1f81fa7ab3baaa5a333fea92c9

Cramer, E., Walcher, S., & Wittich, O. (2015). Mathematik und die „INT"-Fächer. In Roth, J., Bauer, T., Koch, H., & Prediger, S. (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 51–68). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-06727-4_4

Dahl, H., Klemp, T., & Nilssen, V. (2017). Collaborative talk in mathematics – contrasting examples from third graders. *Education 3-13*, *46*(5), 599–611.

Darlington, E. (2014). Contrasts in mathematical challenges in A-level Mathematics and Further Mathematics, and undergraduate mathematics examinations. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *33*(4), 213–229. https://doi.org/10.1093/teamat/hru021

Degener, B., Effe-Stumpf, G., Haake, H., Kurtz, M., Schellin-Conty, D., & Schluckebier, D. (2005). Fortbildungskonzept für Fachkonferenzen Mathematik Sek I. In Graumann, G. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 163–166). Franzbecker.

Dewey, J. (2002). *Wie wir denken* (Mit einem Nachwort neu herausgegeben von Rebekka Horlacher und Jürgen Oelkers). Pestalozzianum. (Originalwerk veröffentlicht 1910).

Di Martino, P., & Gregorio, F. (2019). The Mathematical Crisis in Secondary–Tertiary Transition. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(4), 825–843. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9894-y

diSessa, A.-A., Gillespie, N.-M., & Esterly, J.-B. (2004). Coherence versus fragmentation in the development of the concept of force. *Cognitive Science*, *28*(6), 843–900. https://doi.org/10.1016/j.cogsci.2004.05.003

Döring, N., & Bortz, J. (2016). Datenerhebung. In Döring, N., & Bortz, J. (Hrsg.), *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften* (5. Aufl., S. 323-578). Springer.

Dörner, D. (1987). *Problemlösen als Informationsverarbeitung* (3. Aufl.). Kohlhammer. https://fis.uni-bamberg.de/entities/publication/0a5a6d45-d08f-4394-9f68-d5eebdb95e3a

Dresing, T., & Pehl, T. (2018). *Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse. Anleitungen und Regelsysteme für qualitativ Forschende* (8. Aufl.). Eigenverlag.

Dubinsky, E., & McDonald, M.-A. (2002). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In Holten, D., Artigue, M., Kirchgräber, U., Hillel, J., Niss, M., & Schoenfeld, A.-H. (Hrsg.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICME Study* (S. 275–282). Kluwer Academic Publishers. https://people.math.wisc.edu/~rwilson/Courses/Math903/ICMIPAPE.PDF

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M.-A., & Brown, A. (2005). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An Apos-Based Analysis: Part 1.

Educational Studies in Mathematics, *58*(3), 335–359. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Dürrschnabel, K., & Wurth, R. (2015). cosh – Cooperation Schule–Hochschule. *Mitteilungen Der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *23*(3), 181-185. https://doi.org/10.1515/dmvm-2015-0067

Einhorn, H.-J., & Hogarth, R.-M. (1981). Behavioral decision theory: Process of judgement and choice. *Annual Review of Psychology, 32*, 53–88.

Elliott, R., Fischer, C.-T., & Rennie, D.-L. (1999). Evolving guidelines for publication of qualitative research studies in psychology and related fields. *The British journal of clinical psychology,* 38(3), 215–229. https://doi.org/10.1348/014466599162782

Elschenbroich, H.-J., & Seebach, G. (2014). Funktionen unter der Lupe. *Mathematik Lehren*, *187*, 1–16.

Engel, A. (1998). *Problem-Solving Strategies*. Springer.

Engelbrecht, J. (2010). Adding structure to the transition process to advanced mathematical activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 143–154. https://doi.org/10.1080/00207390903391890

Engelbrecht, J., Bergsten, C., & Kågesten, O. (2013). Conceptual and Procedural Approaches to Mathematics in the Engineering Curriculum: Student Conceptions and Performance. *Journal of Engineering Education*, *101*(1), 138–162. https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2012.tb00045.x

Erath, K. (2017). *Mathematisch diskursive Praktiken des Erklärens. Rekonstruktion von Unterrichtsgesprächen in unterschiedlichen Mikrokulturen* (Dissertation). Technische Universität Dortmund.

Ericsson, K.-A., & Simon, H.-A. (1980). Verbal Reports as Data. *Psychological Review,* 87(3), 215–251. https://doi.org/10.1037/0033-295X.87.3.215

Evans, T., & Jeong, I. (2023). Concept maps as assessment for learning in university mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *113*(3), 475–498. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10209-0

Feudel, F. (2018). *Theoretische und empirische Analysen zum benötigten, gelehrten und bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften erreichten Verständnis des Ableitungsbegriffs* (Dissertation). Universität Paderborn.

Feudel, F., & Biehler, R. (2021). Students' Understanding of the Derivative Concept in the Context of Mathematics for Economics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *42*(1), 273–305. https://doi.org/10.1007/s13138-020-00174-z

Feudel, F., & Fehlinger, L. (2023). Using a lecture-oriented flipped classroom in a proof-oriented advanced mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *54*(1), 46–73. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1949057

Feudel, F., & Panse, A. (2022). Can Guided Notes Support Students' Note-taking in Mathematics Lectures? *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *8*(1), 8–35. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00146-9

Flick, U., von Kardorff, E., & Steinke, I. (Hrsg.). (2012). *Qualitative Forschung. Ein Handbuch* (9. Aufl.). Rowohlt Taschenbuch.

Forster, O. (2016). *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen* (12., verbesserte Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-11545-6

Franzen, U., & Merz, F. (1988). Einfluss des Verbalisierens auf die Leistung bei Intelligenzprüfungen: Neue Untersuchungen. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie,* 8(2), 117–134.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Kluwer Academic Publishers. https://ebookcentral.proquest.com/lib/kxp/detail.action?docID=3035445

Friedrich, H.-F., & Mandl, H. (2006). Lernstrategien: Zur Strukturierung des Forschungsfeldes. In Mandl, H., & Friedrich, H.-F. (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 1–26). Hogrefe.

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., & Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(3), 374–392. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508

Füllgrabe, F., & Eichler, A. (2019). Analyse von Beweisprodukten. In Frank, A., Krauss S., & Binder, K. (Hrsg.), B*eiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1135–1138). Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster. https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/38901/1/BzMU19_FUELLGRABE.pdf

Gast, B. (2024). *Ingenieurmangel in Deutschland - Experte verrät, wie mittelständische Unternehmen dennoch qualifizierte Fachkräfte finden.* https://www.presseportal.de/pm/172915/5760125

Geisler, S. (2019). *Bleiben oder gehen?. Eine empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren und Motiven für frühen Studienabbruch und Fachwechsel in Mathematik* (Dissertation). Ruhr-Universität Bochum. https://hss-opus.ub.ruhr-uni-bochum.de/opus4/frontdoor/deliver/index/docId/7163/file/diss.pdf

Gick, M.-L. (1986). Problem-Solving Strategies. *Educational Psychologist*, *21*(1-2), 99–120. https://doi.org/10.1080/00461520.1986.9653026

Gildehaus, L., Göller, R., & Liebendörfer, M. (2021). Gymnasiales Lehramt Mathematik studieren: eine Übersicht zur Studienorganisation in Deutschland. *Gdm-Mitteilungen*, *111*, 27-32.

Göller, R. (2017). Students´ perceptions of and conclusion from their first assessment experience at university. In Göller, R., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.), *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline - Conference Proceedings* (S. 373-378). Universität Kassel.

Göller, R. (2020). *Selbstreguliertes Lernen im Mathematikstudium* (Dissertation). Universität Kassel. https://doi.org/10.1007/978-3-658-28681-1

Göller, R., & Gildehaus, L. (2021). Frustrated and helpless. Sources and consequences of students' negative deactivating emotion in university mathematics. In Inprasitha, M., Changsri, N., & Boonsena (Hrgs.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 370-378).

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016a). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016b). Aspects and “Grundvorstellungen” of the Concepts of Derivative and Integral. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(S1), 99–129. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0100-x

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2023). Mathematics Students' Characteristics of Basic Mental Models of the Derivative. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *44*(1), 143–169. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00207-9

Griese, B. (2017). *Learning Strategies in Engineering Mathematics. Conceptualisation, Development, and Evaluation of MP²* - MathePlus (Dissertation). Universität Paderborn. https://doi.org/10.1007/978-3-658-17619-8

Grigutsch, S., & Törner, G. (1998). *World views of mathematics held by university teachers of mathematics science*. https://duepublico2.uni-due.de/servlets/MCRFileNodeServlet/duepublico_derivate_00005249/mathe121998.pdf

Grønbæk, N., Misfeldt, M., & Winsløw, C. (2009). Assessment and Contract-Like Relationships in Undergraduate Mathematics Education. In Skovsmose, O., Valero, P., & Christensen, O.-R. (Hrsg.), *University Science and Mathematics Education in Transition* (S. 85–105). Springer.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 237–254. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6

Gueudet, G., & Pepin, B. (2018). Didactic Contract at the Beginning of University: a Focus on Resources and their Use. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(1), 56–73. https://doi.org/10.1007/s40753-018-0069-6

Guzmán, M. de, Hodgson, B. R., Robert, A., & Villani, V. (1998). Difficulties from secondary to tertiary education. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (S. 747–762). https://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/ICM98_%20Difficulties%20from%20secondary%20to%20tertiary%20education.pdf

Haak, I. (2016). Was macht eine gute Übung aus? Ein Vergleich von Vorstellungen zum physikalischen Übungsbetrieb. *Die Hochschullehre. Interdisziplinäre Zeitschrift Für Studium Und Lehre*, *2*, 1–25.

Häder, M. (2019). *Empirische Sozialforschung. Eine Einführung* (4. Aufl.). Springer.

Hähkiöniemi, M. (2006). Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(2), 170–184. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.002

Hailikari, T., Nevgi, A., & Komulainen, E. (2008). Academic self-beliefs and prior knowledge as predictors of student achievement in Mathematics: a structural model. *Educational Psychology*, *28*(1), 59–71. https://doi.org/10.1080/01443410701413753

Haite, C., Falz, C., & Domnick, I. (2008). Tipps fürs Studium. In *Berufs- und Karriere-Planer Mathematik: Schlüsselqualifikation für Technik, Wirtschaft und IT* (4. Aufl., S. 149–154). Vieweg+Teubner.

Hart, D.-K. (1991). *Building Concept-images: Supercalculators and Students´ use of multiple representations in calculus* (Dissertation). Oregon State University.

Härterich, J., & Rooch, A. (2014). *Das Mathe-Praxis-Buch. Wie Ingenieure Mathematik anwenden - Projekte für die Bachelor-Phase*. Springer Vieweg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-38306-9

Hasdorf, W. (1976). Erscheinungsbild und Entwicklung der Beweglichkeit des Denkens bei älteren Vorschulkindern. In Lompscher, J. (Hrsg.), *Verlaufsqualitäten der geistigen Tätigkeit* (S. 13-75. Volk und Wissen.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt de Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer.

Hering, L., & Schmidt, R.-J. (2014). Einzelfallanalyse. In Baur, N. & Blasius, J. (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (S. 529–541). Springer.

Herold-Blasius, R. (2019). *Problemlösen mit Strategieschlüsseln. Eine explorative Studie zur Unterstützung von Problembearbeitungsprozessen bei Dritt- und Viertklässlern* (Dissertation). Universität Duisburg-Essen.

Heublein, U., Hutzsch, C., & Schmelzer, R. (2022). *Die Entwicklung der Studienabbruchquoten in Deutschland*. https://doi.org/10.34878/2022.05.DZHW_BRIEF

Heublein, U., & Schmelzer, R. (2018). *Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. Berechnungen auf Basis des Absolventenjahrgangs 2016.* Deutsches Zentrum für Hochschul- und Wissenschaftsforschung (DZHW). https://idw-online.de/en/attachmentdata66127.pdf

Heuser, H. (2009). *Lehrbuch der Analysis. Teil 1 (17. Aufl.)*. Vieweg + Teubner.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Hiebert, J. (Hrsg.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (S. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates.

Hilger, S. (2019). *Didaktik der Analysis. Skript zur Vorlesung* (Vorlesungsskript). Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt.

Hilgert, J., Hoffmann, M., & Panse, A. (2015). *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-45512-8

Hochmuth, R., & Schreiber, S. (2016). Überlegungen zur Konzeptualisierung mathematischer Kompetenzen im fortgeschrittenen Ingenieurwissenschaftsstudium am Beispiel der Signaltheorie. In Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (1. Aufl., S. 549–566). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10261-6_35

Hoffmann, M. (2022). *Von der Axiomatik bis zur Schnittstellenaufgabe: Entwicklung und Erforschung eines ganzheitlichen Lehrkonzepts für eine Veranstaltung Geometrie für Lehramtsstudierende* (Dissertation). Universität Paderborn.

Holzäpfel, L., Lacher, M., Leuders, T., & Rott, B. (2018). *Problemlösen lehren lernen. Wege zum mathematischen Denken.* (1. Aufl.). Kallmeyer.

Hoon, T.-S., Kee, K.-L., & Singh, P. (2013). Learning Mathematics Using Heuristic Approach. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 90*, 862–869. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.07.162

Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.). (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10261-6

Hourigan, M., & O'Donoghue, J. (2007). Mathematical under-preparedness: the influence of the pre-tertiary mathematics experience on students' ability to make a successful transition to tertiary level mathematics courses in Ireland. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(4), 461–476. https://doi.org/10.1080/00207390601129279

Houston, K. (2012). *Wie man mathematisch denkt. Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger*. Springer Spektrum.

Hußmann, S. (2017). Umgangssprache - Fachsprache. In Leuders, T. (Hrsg.), *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (8. Aufl., S. 60–75). Cornelsen Scriptor.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics. A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 33-67.

Jacobse, A.-E., & Harskamp, E.-G. (2012). Towards efficient measurement of metacognition in mathematical problem solving. *Metacognition Learning*, 7(2), 133–149. https://doi.org/10.1007/s11409-012-9088-x

Janczura, S. (2023). *So sieht de Arbeitsmarkt für Ingenieur*innen wirklich aus*. https://www.vdi.de/news/detail/so-sieht-der-arbeitsmarkt-fuer-ingenieurinnen-wirklich-aus

Jaworsky, B., Treffert-Thomas, S., & Bartsch, T. (2009). Characterising the teaching of university mathematics: a case of linear algebra. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M., & Sakonidis, C. (Hrsg.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 249-256). Loughborough University.

Johns, C. (2020). Self-Regulation in First-Semester Calculus. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *6*(3), 404–420. https://doi.org/10.1007/s40753-020-00114-9

Jonassen, D., Strobel, J., & Lee, C.-B. (2006). Everyday Problem Solving in Engineering: Lessons for Engineering Educators. *Journal of Engineering Education*, *95*(2), 139–151.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press.

Kalesse, I. (1998). Change in Mathematical Views of First Year University Students II, 30–36. https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/79936152/ED418067-libre.pdf?1643575720=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DCurrent_state_of_research_on_mathematica.pdf&Expires=1731081762&Signature=H5P4K5O-yucc8qwrdYI3vNglkxVvjZI1TDcvBbnF~ZNLoaB-qSOv~MDxsysQ4oLb3Isy2mvE6TmsmJIExeGEu62FGkw7JdVaFIHqHOj6p6oIm-SliVUmJTlbQA8BuciMZ2enJeFeihhticO0il6XPrMNKEYFxjhZ8R8htntdq~BcDAjAspEisspkPEfodm4kA~FbhN63HVFPe~Rj2MZNLuFtYjbvHj63Ld6hNWZ9AEU6MNGCQQcsZ3MV3y2sJCCiwGYBGrZ-PtnMjCtutxcUwVwwiUjDLI1mr7XKsHv-I02a5Ks7tdscZz7IHEfFx~sm~SndfS1Ngzw6wSNsQeM24Q__&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA#page=32 ich finde unter dem Link nichts

Kane, M., Crooks, T., & Cohen, A. (1999). Validating Measures of Performance. *Educational Measurement: Issues and Practice*, *18*(2), 5–17. https://doi.org/10.1111/j.1745-3992.1999.tb00010.x

Kani, M.-H.-A., & Shahrill, M. (2015). Applying the Thinking Aloud Pair Problem Solving Strategy in Mathematics Lessons. *Asian Journal of Management Sciences and Education*, 4(2), 20–28. https://www.researchgate.net/profile/Masitah-Shahrill-2/publication/275643101_Applying_the_Thinking_Aloud_Pair_Problem_Solving_Strategy_in_Mathematics_Lessons/links/5541677e0cf23222273158c3/Applying-the-Thinking-Aloud-Pair-Problem-Solving-Strategy-in-Mathematics-Lessons.pdf

Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen Im Übergang Von der Schule Zur Hochschule. Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. Springer Spektrum. https://ebookcentral.proquest.com/lib/kxp/detail.action?docID=5598541

Kempen, L., & Biehler, R. (2019). Fostering first-year pre-service teachers' proof competencies. *ZDM Mathematics Education,* 51(5), 731–746. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01035-x

Kempen, L., & Liebendörfer, M. (2021). University students' fully digital study of mathematics: an identification of student-groups via their resources usage and a characterization by personal and affective characteristics. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *40*(4), 436–454. https://doi.org/10.1093/teamat/hrab020

Kendal, M., & Stacey, K. (2003). Tracing Learning of Three Representations with the Differentiation Competency Framework. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(1), 22–41.

Kilpatrick, Jeremy (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study* (Dissertation). Stanford University.

Kirn, A., & Benson, L. (2018). Engineering Students' Perceptions of Problem Solving and Their Future. *Journal of Engineering Education*, *107*(1), 87–112. https://doi.org/10.1002/jee.20190

Kirsch, A. (1979). Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *Der Mathematikunterricht*, *25*(3), 25–41.

Kirsten, K. (2020). *Beweisprozesse von Studierenden. Ergebnisse einer empirischen Untersuchung zu Prozessverläufen und phasenspezifischen Aktivitäten*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-32242-7

Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science*, *35*(2), 99–139. https://doi.org/10.1007/s11251-006-9004-3

Kolahdouz, F., Radmehr, F., & Alamolhodaei, H. (2020). Exploring students' proof comprehension of the Cauchy Generalized Mean Value Theorem. *Teaching Mathematics and its Applications*, *39*(3), 213–235. https://doi.org/10.1093/teamat/hrz016

Kolbe, T., & Liebendörfer, M. (2024). Which knowledge is required in exams on analysis 1 courses at German universities? *Teaching Mathematics and Its Applications*. https://doi.org/10.1093/teamat/hrae012

Kolbe, T., & Wessel, L. (2022). Self-regulated learning in a mathematics course for engineers in the first semester: insights into students´ reported resource management and cognitive strategies. *Proceedings of the INDRUM Conference*, Hannover.

Kolter, J., Blum, W., Bender, P., Biehler, R., Haase, J., Hochmuth, R., & Schukajlow, S. (2018). Zum Erwerb, zur Messung und zur Förderung studentischen (Fach-)Wissens in der Vorlesung „Arithmetik für die Grundschule" – Ergebnisse aus dem KLIMAGS-Projekt. In Möller, R., & Vogel, R. (Hrsg.), *Innovative Konzepte für die Grundschullehrerausbildung im Fach Mathematik* (S. 95–121). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10265-4_4

König, H. (1992). Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. *Der Mathematikunterricht*, *38*(3), 24–38.

Konrad, K. (2010). Lautes Denken. In Mey, G., & Mruck, K. (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (1. Aufl., S. 476-490). VS Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-531-92052-8_34

Körner, T.-W. (2005). Ein Lob der Vorlesungen. *Mitteilungen Der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *13*(4), 241–246. https://www.mathematik.uni-marburg.de/~agricola/material/Lob_der_Vorlesung.pdf

Kortemeyer, J. (2018). *Mathematische Kompetenzen in ingenieurwissenschaftlichen Grundlagenveranstaltungen. Normative und empirische Analysen zu exemplarischen Klausuraufgaben aus dem ersten Studienjahr in der Elektrotechnik* (Dissertation). Universität Paderborn.

Kortemeyer, J., & Frühbis-Krüger, A. (2021). Mathematik im Lehrexport – ein bewährtes Maßnahmenpaket zur Begleitung von Studierenden in der Studieneingangsphase. In Biehler, R., Eichler, A., Hochmuth, R., Rach, S., & Schaper, N. (Hrsg.), *Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik* (S. 19–46). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-62854-6_3

Kosiol, T., Rach, S., & Ufer, S. (2019). (Which) Mathematics Interest is Important for a Successful Transition to a University Study Program? *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(7), 1359–1380. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9925-8

Kuklinksi, C., Leis, E., Liebendörfer, M., & Hochmuth, R. (2019). Erklärung von Mathematikleistung im Ingenieursstudium. In Frank, A., Krauss, S., & Binder, K. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 1051–1054). WTM-Verlag. https://doi.org/10.17877/DE290R-20918

Laging, A., & Voßkamp, R. (2017). Determinants of Maths Performance of First-Year Business Administration and Economics Students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(1), 108–142. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0048-8

Lahdenperä, J., Rämö, J., & Postareff, L. (2021). Contrasting undergraduate mathematics students' approaches to learning and their interactions within two student-centred learning environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 54*(5), 1–19. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1962998

Lahme, B., & Shott, M. (2021). The Mathematics of A Watershed Year. *PRIMUS, 31*(6), 737–748. https://doi.org/10.1080/10511970.2020.1712504

Lankeit, E., & Biehler, R. (2024). The meaning landscape of the concept of the total derivative in multivariable real analysis textbooks: an analysis based on a new model of meaning. *ZDM – Mathematics Education, 56, 1361-1373.* https://doi.org/10.1007/s11858-024-01584-w

Lax, P.-D., & Terrell, M.-S. (2014). *Calculus With Applications* (2. Aufl.). Springer. http://ndl.ethernet.edu.et/bitstream/123456789/88464/1/2014_Book_CalculusWithApplications.pdf https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7946-8

Lehmann, M. (2018). *Relevante mathematische Kompetenzen von Ingenieurstudierenden im ersten Studienjahr – Ergebnisse einer empirischen Untersuchung* (Dissertation). Humboldt-Universität zu Berlin.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In Lester, F.-K. (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 763–804). Information Age Publishing.

Lesseig, K., & Krouss, P. (2017). Implementing a flipped instructional model in college algebra: profiles of student activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(2), 202–214. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1233586

Leuders, T. (2017). Problemlösen. In Leuders, T. (Hrsg.), *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (8. Aufl., S. 119–135). Cornelsen Scriptor.

Liebendörfer, M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-22507-0

Liebendörfer, M., & Göller, R. (2016). Abschreiben von Übungsblättern - Umrisse eines Verhaltens in mathematischen Lehrveranstaltungen. In Paravicini, W., & Schnieder, J. (Hrsg.), *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2014. Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 7. & 8. November 2014 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster* (S. 119–141). WTM-Verlag.

https://www.researchgate.net/profile/Michael-Liebendoerfer/publication/307209999_Abschreiben_-_Ein_Problem_in_mathematischen_Lehrveranstaltungen/links/57c46af008aeb04914357c43/Abschreiben-Ein-Problem-in-mathematischen-Lehrveranstaltungen.pdf

Liebendörfer, M., Göller, R., Biehler, R., Hochmuth, R., Kortemeyer, J., Ostsieker, L., Rode, J., & Schaper, N. (2021). LimSt – Ein Fragebogen zur Erhebung von Lernstrategien im mathematikhaltigen Studium. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42*(1), 25–59. https://doi.org/10.1007/s13138-020-00167-y

Liebendörfer, M., Göller, R., Gildehaus, L., Kortemeyer, J., Biehler, R., Hochmuth, R., Ostsieker, L., Rode, J., & Schaper, N. (2022). The role of learning strategies for performance in mathematics courses for engineers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(5), 1133–1152. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.2023772

Liebendörfer, M., Kempen, L., & Schukajlow, S. (2023). First-year university students' self-regulated learning during the COVID-19 pandemic: a qualitative longitudinal study. *ZDM – Mathematics Education*, *55*(1), 119–131. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01444-5

Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, *53*(4), 723–735.

Lo, C.-K., Hew, K.-F., & Chen, G. (2017). Toward a set of design principles for mathematics flipped classrooms: A synthesis of research in mathematics education. *Educational Research Review*, *22*, 50–73. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.08.002

Maher, C.-A., & Sigley, R. (2014). Task-based Interviews in Mathematics Education. In Lernman, S. (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education (S. 579-582)*. Springer Dordrecht.

Malle, G. (1993). *Didaktiksche Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg.

Malle, G. (2003). Vorstellungen vom Differenzenquotienten fördern. *Mathematik Lehren*, *118*, 57–62.

Malone, J.-A., Douglas, G.-A., Kissame, B.-V., & Mortlock, R.-S. (1980). *Measuring Problem Solving in School Mathematics.* Reston. National Council of Teachers of Mathematics.

Mamolo, A., & Zazkis, R. (2012). Stuck on convention: a story of derivative relationships. *Educational Studies in Mathematics, 81*(2), 161–177. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9391-0

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the Intuitive bear on the Formal; A Didactical Approach for the Understanding of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1/2), 259–288.

Maron, A.-I. (2016). Priorities of Teaching Mathematics in Universities. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *11*(9), 3339–3350. https://www.iejme.com/download/priorities-of-teaching-mathematics-in-universities.pdf

Marton, F., & Säljö, R. (2005). Approaches to learning. In Marton, F., Hounsell, D.-J. & Entwistle, N.-J. (Hrsg.), *The experience of learning. Implications for teaching and studying in higher education* (S. 39-58). Scottish Academic Press.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2008). *Mathematisch denken: Mathematik ist keine Hexerei* (5. Aufl.). Oldenbourg.

Matcha, W., Gašević, D., Uzir, N.-A., Jovanović, J., & Pardo, A. (2019). Analytics of Learning Strategies. In *Proceedings of the 9th International Conference on Learning Analytics & Knowledge* (S. 461–470). ACM. https://doi.org/10.1145/3303772.3303787

Mayring, P. (2017). Qualitative Inhaltsanalyse. In Flick, U., von Kardorff, E., & Steinke, I. (Hrsg.), *Qualitative Forschung: Ein Handbuch* (12. Aufl., S. 468-474). Rowohlt Taschenbuch.

Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (13. überarb. Aufl.). Beltz.

McDermott, L.-C., Rosenquist, M.-L., & van Zee, E.-H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, *55*(6), 503–513. http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/scienze/all/pecori/stuff/Didattica/McDermottAJP1987.pdf

McLeod, D.-B. (1992). Research on affect in mathematics eduaction: A reconzeptualization. In Grouws, D.-A. (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 575–596). Macmillan Publishing Company.

Mejia-Ramos, J.-P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 3–18. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9349-7

Merkl, F. (2017). *Analysis I* (Vorlesungsskript). Universität München.

Mey, G., & Ruppel, P.-S. (2018). Qualitative Forschung. In Decker, O. (Hrsg.), *Sozialpsychologie und Sozialtheorie* (S 205-244). Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-531-19564-3_14

Meyberg, K., & Vachenhauer, P. (2015). *Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung* (6. korrigierte Aufl.). Springer.

Ministerium für Schule und Bildung des Landes NRW. (2023). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/331/gost_klp_m_2023_06_07.pdf

Mondada, L. (2006). Video recording as the reflexive preservation and configuration of phenomenal features for analysis. In Knoblauch, H., Schnettler, B., Jürgen, R., & Soeffne, H.-G. (Hrsg.), *Video Analysis: Methodology and Methods. Qualitative Audiovisual Data Analysis in Sociology* (S. 51–67). Peter Lang.

Montague, Mar., Enders, C., & Dietz, S. (2011). Effects of Cognitive Strategy Instruction on Math Problem Solving of Middle School Students With Learning Disabilities. *Learning Disability Quarterly,* 34(4), 262–272. https://doi.org/10.1177/0731948711421762

Moser-Fendel, & Wessel, L. (2019). Relevante Fakten am Übergang Schule-Hochschule in Mathematik. *Gdm-Mitteilungen*, *107*, 8-21.

Mrdja, M., Zubac, M., & Romano, D. (2015). Analysis of students´ mental structures when incorrectly calculating the limit of functions. *Open Mathematical Education Notes, 5*, 101–113. https://www.researchgate.net/profile/Daniel-Romano-3/publication/281067969_ANALYSIS_OF_STUDENTS'_MENTAL_STRUCTURES_WHEN_INCORRECTLY_CALCULATING_THE_LIMIT_OF_FUNCTIONS/links/55d37cd708ae7fb244f58ab2/ANALYSIS-OF-STUDENTS-MENTAL-STRUCTURES-WHEN-INCORRECTLY-CALCULATING-THE-LIMIT-OF-FUNCTIONS.pdf

Müller, H. (1992). Heuristisches Arbeiten beim Lösen von Komplexaufgaben. *Der Mathematikunterricht, 38*(3), 7–23.

Nemirovsky, R., & Rubin, A. (1992). *Students´ tendency to assume resemblances between a function and its derivative.* https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED351193.pdf

Neugebauer, M., Heublein, U., & Daniel, A. (2019). Studienabbruch in Deutschland: Ausmaß, Ursachen, Folgen, Präventionsmöglichkeiten. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *22*(5), 1025–1046. https://doi.org/10.1007/s11618-019-00904-1

Neuhaus, K. (1995). Die Grundlagen der Kreativitätsuntersuchungen bei Dewey und Wallas. In Müller, K.-P. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 348–351). Franzbecker.

Neumann, I., Heinze, A., & Pigge, C. (2017). *Welche mathematischen Lernvoraussetzungen erwarten Hochschullehrende für ein MINT-Studium?* IPN Kiel. https://www.telekom-stiftung.de/sites/default/files/malemint_broschure_langfassung2.pdf

Neumann, I., Pigge, C., & Heinze, A. (2018). Mathematische Lernvoraussetzungen für MINT-Studiengänge aus Sicht der Hochschulen: Eine empirische Studie mit Hochschullehrenden zu Mindestanforderungen. *GDM-Mitteilungen, 105*, 22–26.

Neumann, I., Rösken-Winter, B., Lehmann, M., Duchhardt, C., Heinze, A., & Nickolaus, R. (2015). Measuring Mathematical Competences of Engineering Students at the Beginning of Their Studies. *Peabody Journal of Education*, *90*(4), 465–476.

Newell, A., & Simon, H.-A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs. https://learnlab.org/wiki/images/1/1d/Human_Problem_Solving.pdf

Niss, M. (2002). University Mathematics Based on Problem-oriented Student Projects: 25 Years of Experience with the Roskilde Model. In Holton, D., Artigue, M., Kirchgräber, U., Hillel, J., Niss, M., & Schoenfeld, A. (Hrsg.), *New ICMI Study Series. The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (7. Aufl., S. 153–165). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_14

Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. IMUFA.

Nordstrom, K., & Korpelainen, P. (2011). Creativity and inspiration for problem solving in engineering education. *Teaching in Higher Education, 16*(4), 439–450. https://doi.org/10.1080/13562517.2011.560379

O`Shea, A., Breen, S., & Jaworski, B. (2016). The Development of a Function Concept Inventory. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2(3), 279-296. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0030-5

Oehrtman, M., Carlson, M.-P., & Thompson, P.-W. (2008). Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in Students´ Function Understanding. In Carlson, M.-P., Rasmussen, C. (Hrsg.), Making the connection. Research and practice in undergraduate mathematics (S. 27-42). Mathematical Association of America.

Öllinger, M. (2017). Problemlösen. In Müsseler, J. & Rieger, M. (Hrsg.), *Allgemeine Psychologie* (3. Aufl., S. 587–618). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-53898-8_16

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235–250. https://doi.org/10.1007/BF00410540

Ostsieker, L. (2020). *Lernumgebungen für Studierende zur Nacherfindung des Konvergenzbegriffs. Gestaltung und empirische Untersuchung*. Springer Spektrum.

Papula, L. (2018). *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. Springer Vieweg. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21746-4

Paulhus, & Delroy, L. (2002). Socially Deirable Responding: The Evolution of a Construct. In Braun, H.-I., Jackson, D.-N., & Wiley, D.-E. (Hrsg.), *The role of contructs in psychological and educational measurement* (S. 49-69). Erlbaum.

https://www2.psych.ubc.ca/~dpaulhus/research/SDR/downloads/CHAPTERS/ETS%20chapter.pdf

Pekrun, R. (2006). The Control-Value Theory of Achievement Emotions: Assumptions, Corollaries, and Implications for Educational Research and Practice. *Educational Psychology Review, 18*(4), 315–341.

Perels, F., Dörrenbächer-Ulrich, L., Landmann, M., Otto, B., Schnick-Vollmer, K., & Schmitz, B. (2020). Selbstregulation und selbstreguliertes Lernen. In Wild, E., & Möller, J. (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (3. vollst. überarb. Aufl., S. 45-66). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-61403-7_3

Pettersson, K. (2012). The Threshold Concept of a Function - A Case Study of a Student´s Development of Her Understanding. In Bergsten, C., Jablonka, E., & Raman, M. (Hrsg.), *Evaluation and Comparison of Mathematical Achievement: Dimensions and Perspectives. Proceedings of MADIF* (S. 171–180). SMDF. http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/L9MA10/V19-1/KerPetFunktion.pdf

Pettersson, K., Stadler, E., & Tambour, T. (2013). Transformation of student´s discourse on the threshold concept of function. In Ubuz, B., Haser, C., & Mariotti, M.-A. (Hrsg.), Proceedings of the *Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (S. 2406–2415). Middle East Technical University and ERME.

Pijls, M., Dekker, R., & Van Hout-Wolters, B. (2007). Reconstruction of a Collaborative Mathematical Learning Process. *Educational Studies in Mathematics, 65*(3), 309–329.

Pintrich, P.-R., Smith, D.-A.-F., & Garcia, T., & McKeachie, W.-J. (1991). *A Manual for the Use of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ)*. University of Michigan. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED338122.pdf

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Pólya, G. (1949). *Die Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Francke.

Pólya, G. (1964). Die Heuristik. Versuch einer vernünftigen Zielsetzung. *Der Mathematikunterricht, 10*(1), 5–15.

Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T., & Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *Mathematik lehren, 164*, 2–9. http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/11-ML_164-Basisartikel-Systematisieren.pdf

Pritchard, D. (2015). Lectures and transition: from bottles to bonfires? In Croft, A.-C., Grove, M.-J., Kyle, J., & Lawson, D.-A. (Hrgs.) *Transition in Undergraduate Mathematics Education* (S. 57–69). https://strathprints.strath.ac.uk/51804/7/Pritchard_2015_Lectures_and_transition_from_bottles_to_bonfires.pdf

Pugalee, D.-K. (2004). A Comparison of Verbal and Written Descriptions of Students' Problem Solving Processes. *Educational Studies in Mathematics, 55*(1), 27–47.

Püschl, J. (2019). *Kriterien guter Mathematikübungen. Potentiale und Grenzen in der Aus- und Weiterbildung studentischer Tutorinnen und Tutoren* (Dissertation). Universität Paderborn. https://doi.org/10.1007/978-3-658-25803-0

Pyke, R. (2012). Adressing first year university mathematics and the transition from high school at Simon Fraser University. *12th International Congress on Mathematics Education*.

Rach, S. (2014). *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathema. Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester* (Dissertation). Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.

Rach, S., & Heinze, A. (2013). Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich? Zur Rolle von Selbsterklärungen beim Mathematiklernen in der Studieneingangsphase. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *34*(1), 121–147. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0049-3

Rach, S., Heinze, A., & Ufer, S. (2014). Welche mathematischen Anforderungen erwarten Studierende im ersten Semester des Mathematikstudiums? *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *35*(2), 205–228. https://doi.org/10.1007/s13138-014-0064-7

Rach, S., Siebert, U., & Heinze, A. (2016). Operationalisierung und empirische Erprobung von Qualitätskriterien für mathematische Lehrveranstaltungen in der Studieneingangsphase. In Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 601-618). Springer Spektrum.

Rädiker, S., & Kuckartz, U. (2019). *Analyse qualitativer Daten mit MAXQDA. Text, Audio und Video.* Springer VS.

Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2000). Defining as a mathematical activity: A realistic mathematics analysis. In Fernandez, M.-L. (Hrsg), *Proceedings of the 22nd Annual Meeting in the North American Chapter of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 301–305). ERIC.

Rauhut, I. (2024). *Ausbildung und Arbeitsmarkt: Wohin geht der Weg der Ingenieure?* https://www.vdi.de/themen/nachwuchs-ausbildung-arbeitsmarkt

Raza, A., Kazi, H., & Ali, M. (2016). Metacognitive Mathematics Tutor: Mathematics Tutoring System with Metacognitive Strategies. *International Journal of Computer Applications*, *153*(4), 21–31. https://doi.org/10.5120/ijca2016912000

Redish, E. (2005). Problem solving and the use of math in physics courses. *World View on Physics Education in 2005*, 1–10. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED493139.pdf

Renkl, A., & Nückles, M. (2006). Lernstrategien der externen Visualisierung. In Mandl, H. & Friedrich, H.-F. (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 135–147). Hogrefe.

Rießinger, T. (2013). *Mathematik für Ingenieure. Eine anschauliche Einführung für das praxisorientierte Studium* (9. überarb. Aufl.). Springer Vieweg. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-642-36859-2.pdf

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2014). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. In Kadosh, R.-C., & Dowker, A. (Hrsg.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition* (S. 1118-1134). Oxford University Press. https://www.uni-trier.de/fileadmin/fb1/prof/PSY/PAE/Team/Schneider/RittleJohnsonSchneiderInPress.pdf

Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen. Ergebnisse einer empirischen Studie* (Dissertation). Leibniz Universität Hannover.

Rott, B. (2014). Rethinking Heuristics - Characterization and Examples. In Ambrus, A. & Vásárhelyi, É. (Hrsg.), *Problem Solving in Mathematics Education - Proceedings of the 15th ProMath Conference* (S. 176–191). Haxel.

Rott, B. (2018). Empirische Zugänge zu Heurismen und geistiger Beweglichkeit in den Problemlöseprozessen von Fünft- und Sechstklässlern. *Mathematica Didactica*, *41*(1), 47–76.

Sandmann, A. (2014). Lautes Denken – die Analyse von Denk-, Lern- und Problemlöseprozessen. In Krüger, D., Parchmann, I. & Schecker, H. (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 179-188). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37827-0_15

Sasaki, T. (2003). Recipient orientation in verbal reports protocols: Methodological issues in concurrent think-aloud. Second Language Studies, 22 (1), 1-54. https://scholarspace.manoa.hawaii.edu/server/api/core/bitstreams/55f4e3eb-0fea-49af-9faa-dd61f1f972e7/content

Schneider, M., & Stern, E. (2009). The Inverse Relation of Addition and Subtraction: A Knowledge Integration Perspective. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1-2), 92–101. https://doi.org/10.1080/10986060802584012

Schoenfeld, A.-H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press.

Schoenfeld, A.-H. (1992a). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In Grouws, D. (Hrsg.), Handbook fpr Research an Mathematics, Teaching and Learning (S. 334-370). MacMillan.

Schoenfeld, A.-H. (1992b). On Paradigms and Methods: What Do You Do When the Ones You Know Don't Do What You Want Them to Issues in the Analysis of Data in the Form of Videotapes. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 179–214. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_3

Schoenfeld, A.-H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education*, *196*(2), 1–38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Schooler, J.-W.; Ohlsson, S., & Brooks, K. (1993). Thoughts beyond words: When language overshadows insight. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122(2), 166–183. https://doi.org/10.1037/0096-3445.122.2.166

Schreiber, A. (2011). *Begriffsbestimmungen. Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung*. Logos Verlag Berlin. https://doi.org/10.30819/2883

Schürmann, M., Gildehaus, L., Liebendörfer, M., Schaper, N., Biehler, R., Hochmuth, R., Kuklinski, C., & Lankeit, E. (2021). Mathematics learning support centres in Germany—an overview. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *40*(2), 99–113. https://doi.org/10.1093/teamat/hraa007

Schwarz, W. (2006). *Heuristisches Strategien des Problemlösens. Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik*. WTM.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In Dubinsky, E., & Harel, G. (Hrsg), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (S. 25–58). Mathematical Association of America.

Singh, Parmjit; Teoh, Sian Hoon; Cheong, Tau Han; Md Rasid, Nor Syazwani; Kor, Liew Kee; Md Nasir, Nurul Akmal (2018): The Use of Problem-Solving Heuristics Approach in Enhancing STEM Students Development of Mathematical Thinking. In: *Int Elect J Math Ed* 13 (3). DOI: 10.12973/iejme/3921.

Skutella, K., & Weygandt, B. (2021). Grenzwert und Stetigkeit – Was am Ende (des Studiums) übrig bleibt. In Girnat, B. (Hrsg.), *Mathematik lernen mit digitalen Medien und forschungsbezogenen Lernumgebungen. Innovationen in Schule und Hochschule* (S. 97–127). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-32368-4_5

Smith, G., Wood, L., Coupland, M., Stephenson, B., Crawford, K., & Ball, G. (1996). Constructing mathematical examinations to assess a range of knowledge and skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27*(1), 65–77. https://doi.org/10.1080/0020739960270109

Spörer, N., & Brunstein, J.-C. (2006). Erfassung selbstregulierten Lernens mit Selbstberichtsverfahren. Ein Überblick zum Stand der Forschung. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 20(3), 147–160. https://doi.org/10.1024/1010-0652.20.3.147

Star, J.-R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 404–411.

Star, J.-R., Pollack, C., Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., Newton, K., & Gogolen, C. (2015). Learning from comparison in algebra. *Contemporary Educational Psychology*, *40*, 41–54. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2014.05.005

Steinke, I. (2017). Gütekriterien qualitativer Forschung. In Flick, U., von Kardorff, E., & Steinke, I. (Hrsg.), *Qualitative Forschung: Ein Handbuch* (12. Aufl., S. 319-331). Rowohlt Taschenbuch.

Stenzel, T. (2023a). *Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase. Untersuchung von Bearbeitungsprozessen typischer Übungsaufgaben und zyklische Entwicklung einer Fördermaßnahme im Rahmen vorlesungsbegleitender Übungen* (Dissertation). Universität Duisburg-Essen. https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5

Stenzel, T. (2023b). Problemlösen in der Studieneingangsphase: Analyse authentischer Problembearbeitungsprozesse. In Sturm, N., Baumanns, L., & Rott, B. (Hrsg.), *Wenn es sein muss, dann halt in Distanz. Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen 2021* (S. 117–130). WTM. https://doi.org/10.37626/GA9783959872706.0.09

Stiller, D., Krichel, K., & Schwarz, W. (2021). *Heuristik im Mathematikunterricht. Bedeutung des Problemlösens in der Geschichte und seine didaktische Funktion für die Zukunft*. Springer Spektrum.

Stoffels, G. (2020). *(Re-)Konstruktion von Erfahrungsbereichen bei Übergängen von empirisch-gegenständlichen zu formal-abstrakten Auffassungen* (Dissertation). Universität Siegen.

Strauss, A., & Corbin, J. (1996). *Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung*. Beltz.

Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). Coming to Understand the Formal Definition of Limit: Insights Gained From Engaging Students in Reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 465–493. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.4.0465

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In Grouws, D.-A. (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 495–511). Macmillan.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically. Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tallman, M. A., Carlson, M. P., Bressoud, D. M., & Pearson, M. (2016). A Characterization of Calculus I Final Exams in U.S. Colleges and Universities. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(1), 105–133. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0023-9

Taraban, R., Craig, C., & Anderson, E.-E. (2011). Using Paper-and-Pencil Solutions to Assess Problem Solving Skill. *Journal of Engineering Education*, *100*(3), 498–519.

Teague, D.-J. (1996). A local Linearity approach to calculus. *Proceedings of the 8th International Conference on Mathematics Education (ICME8)*. Dazu finde ich online nichts (deswegen korrigiere ich nichts daran)

Thomas, M.-O.-J., de Freitas Druck, I., Huillet, D., Ju, M.-K., Nardi, E., Rasmussen, C., & Xie, J. (2015). Key Mathematical Concepts in the Transition from Secondary School to University. In Cho, S.-J. (Hrsg.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (S. 265–274). Springer.

Thompson, P.-W., & Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 507–519. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01270-1

Tietze, U.-P. (2000). Probleme entdecken, Probleme lösen. In Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.), *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II* (2. Aufl., S. 91–120). Vieweg+Teubner.

Trujillo, M., Atarés, L., Canet, M.-J., & Pérez-Pascual, M.-A. (2023). Learning Difficulties with the Concept of Function in Maths: A Literature Review. *Education Sciences*, *13*(5), 495. https://doi.org/10.3390/educsci13050495

Tuma, R., & Schnettler, B. (2019). Videographie. In Baur, N., & Blasius, J. (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (2. Aufl., S. 1191-1202). Springer VS.

Turner, J.-C. (1995). The Influence of Classroom Contexts on Young Children's Motivation for Literacy. *Reading Research Quarterly,* 30(3), 410–441. https://doi.org/10.2307/747624

Ufer, S., Rach, S., & Kosiol, T. (2017). Interest in mathematics = interest in mathematics? What general measures of interest reflect when the object of interest changes. *ZDM*, *49*(3), 397–409. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0828-2

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l´étude des fonctions. *Annales De Didactiques Et De Sciences Cognitives*, *16*, 149–185. https://hal.science/file/index/docid/654184/filename/Vandebrouck_annales_de_Strasbourg_vfinale.pdf

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *10*(1), 3–37. https://doi.org/10.1007/BF03338719

Vollrath, H.-J. (1992). Zur Rolle des Begriffs im Problemlöseprozeß des Beweisens. *Mathematische Semesterberichte*, *39*, 127–136. https://doi.org/10.1007/BF03186465

Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2855-4

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R. (1996). Arithmetische Grundvorstellungen und funktionales Denken. *Mathematica Didactica*, *19*(2), 28–42.

vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert - Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *19*, 257–291. https://doi.org/10.1007/BF03338877

vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 225–254. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3

Waern, Y. (1988). Thoughts on text in context: Applying the think-aloud method to text processing. *Text-Interdisciplinary Journal for the Study of Discourse,* 8(4), 327–350.

Weber, B.-J., & Lindmeier, A. (2020). Viel Beweisen, kaum Rechnen? Gestaltungsmerkmale mathematischer Übungsaufgaben im Studium. *Mathematische Semesterberichte*, *67*(2), 263–284. https://doi.org/10.1007/s00591-020-00274-4

Weber, E., & Thompson, P.-W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(1), 67–85. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9548-0

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *4*(3), 175–204.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101–119.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(2), 115–133. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.03.001

Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(4), 463–482. https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.622803

Weber, K. (2014). Proof as a cluster concept. In Nicol, C., Oesterle, S., Liljedahl, P., & Allan, D. (Hrsg.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (S. 353–360). PME. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED600029.pdf

Westermann, T. (2015). *Mathematik für Ingenieure: Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch* (7. Aufl.). Springer Vieweg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-54290-9

Widada, W., Herawati, A., Fata, R., Nurhasanah, S., Yanty, E.-P., & Suharno, A.-S. (2020). Students' understanding of the concept of function and mapping. *Journal of Physics: Conference Series*, *1657*(1), 12072. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1657/1/012072

Wild, K.-P., & Schiefele, U. (1994). Lernstrategien im Studium: Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragebogens. *Zeitschrift Für Differentielle Und Diagnostische Psychologie*, *15*(4), 185–200. https://publishup.uni-potsdam.de/opus4-ubp/frontdoor/deliver/index/docId/3182/file/schiefele1994_15.pdf

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *4*(3), 175–204.

Winter, H.-W. (2016). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik (3. aktualisierte Aufl.). Springer Spektrum. http://www.lehmanns.de/midvox/bib/9783658106041

Winter, J. de, & Dodou, D. (2011). Predicting Academic Performance in Engineering Using High School Exam Scores. *International Journal of Engineering Education*, *27*(6), 1343-1351. https://www.researchgate.net/publication/281592897_Predicting_Academic_Performance_in_Engineering_Using_High_School_Exam_Scores

Wlassak, F., & Schöneburg-Lehnert, S. (2022). Was macht Übungsaufgaben eigentlich schwer? – Kognitive Gestaltungsmerkmale von Übungsaufgaben der Analysis I. *Mathematische Semesterberichte*, *69*(2), 159–185. https://doi.org/10.1007/s00591-022-00321-2

Wolcott, M.-D. &Lobczowski, N.-G. (2021). Using cognitive interviews and think-aloud protocols to understand thought processes. *Currents in pharmacy teaching & learning,* 13(2), 181–188. https://doi.org/10.1016/j.cptl.2020.09.005

Wolf, P. (2017). *Anwendungsorientierte Aufgaben für Mathematikveranstaltungen der Ingenieurstudiengänge. Konzeptgeleitete Entwicklung und Erprobung am Beispiel des Maschinenbaustudiengangs im ersten Studienjahr* (Dissertation). Universität Paderborn.

Yusof, Y.-M., Othman, M.-F.-B., & Mahmood, A. (2014). Making Students' Thinking Explicit: Learning That They Now about Functions. In International Conference on Teaching and Learning in Computing and Engineering (S. 256-261). https://ieeexplore.ieee.org/document/6821866

Zandieh, M.-J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In Dubinsky, E., Schoenfeld, A.-H., & Kaput, J. (Hrsg.), Research in Collegiate Mathematics Education (8. Aufl.). Mathematical Association of America.

Zielinski, U. (1992). Die Abhängigkeit des Problemlöseverhaltens vom Darstellungsmodus (Dissertation). Universität Duisburg.

Zimmermann, B. (1982). Denkprozesse beim Lösen mathematischer Deduktionsaufgaben. Bericht über eine exploratorische Untersuchung. Journal für Mathematik-Didaktik, 3, 175–206. https://doi.org/10.1007/BF03338664

Zindel, C. (2018). *Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen. Eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung* (Dissertation). Technische Universität Dortmund. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-658-25054-6.pdf

Anhang

Transkriptionsregeln

1. Das Transkript beginnt ab dem Zeitpunkt, wo die Personen (-gruppe) mit der Aufgabenbearbeitung begonnen hat.
2. Die beobachtende Person wird durch ein „I:“ gekennzeichnet. Die Interviewten/Studierenden erhalten einen anonymisierten Namen. Dieser wird im Transkript angegeben und ausgeschrieben.
3. Es wird wörtlich transkribiert, also nicht lautsprachlich oder zusammenfassend. Vorhandene Dialekte werden möglichst wortgenau ins Hochdeutsche übersetzt. Wenn keine eindeutige Übersetzung möglich ist, wird der Dialekt beibehalten, zum Beispiel: Ich gehe heuer auf das Oktoberfest.
4. Wortverschleifungen werden nicht transkribiert, sondern an das Schriftdeutsch angenähert. Beispielsweise „Er hatte noch so‘n Buch genannt“ wird zu „Er hatte noch so ein Buch genannt“ und „hamma“ wird zu „haben wir“. Die Satzform wird beibehalten, auch wenn sie syntaktische Fehler beinhaltet, beispielsweise: „bin ich nach Kaufhaus gegangen“.
5. Wort- und Satzabbrüche, Stottern, Wortdopplungen etc. werden nicht geglättet, sondern so gut wie möglich im Transkript wiedergegeben. „Ganze“ Halbsätze, denen nur die Vollendung fehlt, werden mit dem Abbruchzeichen / gekennzeichnet.
6. Sprecherüberlappungen werden mit // gekennzeichnet. Bei Beginn des Einwurfes folgt ein //. Der Text, der gleichzeitig gesprochen wird, liegt dann innerhalb dieser // und der Einwurf der anderen Person steht in einer separaten Zeile und ist ebenfalls mit // gekennzeichnet. Die Zeitmarke der anderen Person bzw. des neuen Absatzes beginnt dementsprechend ab dem Zeitpunkt, wo gleichzeitig und nicht alleine gesprochen wird. Anschließende Äußerungen werden direkt dahinter transkribiert.
7. Interpunktion wird zu Gunsten der Lesbarkeit geglättet, das heißt bei kurzem Senken der Stimme oder uneindeutiger Betonung wird eher ein Punkt als ein Komma gesetzt. Dabei sollen Sinneinheiten beibehalten werden.
8. Eine Pause von zwei Sekunden wird mit „..“ markiert, eine Pause von drei Sekunden mit „…“ und eine Pause von mehr als drei Sekunden wird in eckigen Klammern gekennzeichnet (z.B. [5 Sek.].
9. Umplanungen der letzten Satzkonstruktion werden mit einem Komma

gekennzeichnet. (z.B. *„Wenn ich, also naja, wenn ich, ich denke also dass, es ist ja..“*)
10. Verständnissignale des gerade nicht Sprechenden wie „mhm, aha, ja, genau, ähm“ etc. werden ebenfalls transkribiert.

- *mhm* Partikel, zustimmend / bejahend
- *hmm* Partikel, zweifelnd (Personenabhängig!)
- *Mm / eheh* Verneinend / ablehnend (Stimme geht nach unten)
- *Ne* Bedeutet „Ja, stimme ich zu“, z.B. „Ist doch so, ne?“
- *Nee* Bedeutet „Nein“, z.B. „Nee, seh ich nicht so.“

11. Jeder Sprecherbeitrag erhält eigene Absätze. Auch kurze Einwürfe werden in einem separaten Absatz transkribiert. Mindestens am Ende eines Absatzes werden Zeitmarken eingefügt.
12. In Situationen, wo nur eine Person entweder die gesamte Zeit oder über einen längeren Zeitraum spricht, wird nach ca. ein oder zwei Minuten ein Absatz hinzugefügt, sobald der gesprochene Satz beendet wurde. Bei einem höheren Sprechtempo wird dieser nach einer Minute und bei einem langsameren nach zwei Minuten angesetzt. Dies wird innerhalb eines Transkripts einheitlich gestaltet, kann sich jedoch bei verschiedenen Transkripten unterscheiden.
13. Unverständliche Wörter werden mit (unv.) gekennzeichnet. Längere unverständliche Passagen sollen möglichst mit der Ursache versehen werden (unv., Handystörgeräusch) oder (unv., Mikrofon rauscht). Vermutet man einen Wortlaut, ist sich aber nicht sicher, wird das Wort bzw. der Satzteil mit einem Fragezeichen in Klammern gesetzt. Zum Beispiel: (Xylomethanolin?). Auch Teilsätze, bei denen man sich nicht sicher ist, werden in einer Klammer mit einem Fragezeichen gekennzeichnet.
14. Ist man sich bei einer Personengruppe nicht sicher, wer gerade spricht (falls dies bspw. in einem Video nicht erkennbar sein sollte), wird der Name, welcher vermutet wird, in Klammern geschrieben und mit einem Fragezeichen versehen (z.B. (Lisa?): …)
15. Handlungen, Interaktionen und nonverbale Äußerungen der Interviewpartner werden protokolliert, indem z.B. in eckigen Klammern notiert wird, worauf die Person gerade zeigt oder welche Handbewegungen sie macht (sofern diese für das Verständnis wichtig sind).

16. Wenn einer der Interviewten dem anderen im Gespräch zustimmt, während die andere Person aber noch spricht, wird dies im Transkript deutlich gemacht: [Emily zustimmend]. Spricht das Gegenüber gerade nicht mehr bzw. hat seinen Absatz bereits vollendet, dann wird die Zustimmung wortwörtlich in das Transkript übernommen.
17. Werden Formen, Zahlen, Gleichungen etc. vorgelesen, werden diese wörtlich ausgeschrieben.

Weitere Abbildungen

Interaktionen zwischen Steuerung und Heurismen hinsichtlich der Aufgaben

Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...
Begriffe klären (Bkl)		3	1			2	
Skizze (Skiz)		2	2			1	
Imaginäre Figur (imF)		1				1	
Spezialfall (SpF)							
Fallunterscheidung (FU)				2	2		
Nutzung aller Voraussetzungen (NVor)			1			1	
Systematisierungshilfen (SyH)			2				1
Metapher (Met)			3			1	
Rückführungsprinzip (RfP)							
Ähnliche Aufgaben (Ähn)		4	9	2	2	1	1
Suche nach nützlichen Hinweisen (nüH		1	5				
Rückwärtsarbeiten (RüA)							
Vorwärtsarbeiten (VwA)	1			3	2		

Aufgabe „Mittelwertsatz“

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...
Begriffe klären (Bkl)		6	1				
Skizze (Skiz)		2	4		2	2	
Imaginäre Figur (imF)			3		2	1	
Spezialfall (SpF)			3				
Fallunterscheidung (FU)							
Nutzung aller Voraussetzungen (NVor)		1	4	1	2	1	
Systematisierungshilfen (SyH)		1	1				
Metapher (Met)			2		1	1	
Rückführungsprinzip (RfP)							1
Ähnliche Aufgaben (Ähn)	2	4	7	2	4		1
Suche nach nützlichen Hinweisen (nüH			2				
Rückwärtsarbeiten (RüA)				1			
Vorwärtsarbeiten (VwA)			4	2	1		

Aufgabe „L´Hospital“:

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...
Begriffe klären (Bkl)		1	1			1	
Skizze (Skiz)			2				
Imaginäre Figur (imF)			4				
Spezialfall (SpF)	1		10		2	1	2
Fallunterscheidung (FU)							
Nutzung aller Voraussetzungen (NVor)		1	3			1	1
Systematisierungshilfen (SyH)			4		1		
Metapher (Met)			1				
Rückführungsprinzip (RfP)			4		1		
Ähnliche Aufgaben (Ähn)			3	1	2		1
Suche nach nützlichen Hinweisen (nüH			5				
Rückwärtsarbeiten (RüA)							
Vorwärtsarbeiten (VwA)	1	1	1	1	6	1	

Interaktionen zwischen Steuerung und Wissen hinsichtlich der Aufgaben

Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“:

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...	SUMME
Konzeptuelles Wissen		11	4	1		4	2	22
Prozedurales Wissen		2	17	8	9		4	40
∑ SUMME	0	13	21	9	9	4	6	62

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...	SUMME
Implizite Nutzung			6	6	8	2	3	25
Explizite Formulierung		4	2					6
Konkretisierung & Abgrenzung		4	11	3	1		1	20
Bedeutung & Vernetzung		2	2			1		5
Konventionelle Festlegungen		3	2			1	2	8
∑ SUMME	0	13	23	9	9	4	6	64

Aufgabe „Mittelwertsatz“:

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...	SUMME
Konzeptuelles Wissen	4	11	18	4	8	1	4	50
Prozedurales Wissen			1	2	3			6
Σ SUMME	4	11	19	6	11	1	4	56

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...	SUMME
Implizite Nutzung	1	2	7	5	9		2	26
Explizite Formulierung		5	1					6
Konkretisierung & Abgrenzung	3	2	8				1	14
Bedeutung & Vernetzung		3	7	1	4	1	1	17
Konventionelle Festlegungen			1	1	1			3
Σ SUMME	4	12	24	7	14	1	4	66

Aufgabe: „L´Hospital“

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...	SUMME
Konzeptuelles Wissen		1	8		1		2	12
Prozedurales Wissen	2	2	22	3	14	2	2	47
Σ SUMME	2	3	30	3	15	2	4	59

Codesystem	Readi...	Analysis	Explor...	Planni...	Imple...	Verific...	Transi...	SUMME
Implizite Nutzung	1		8	2	11	1		23
Explizite Formulierung			3		1			4
Konkretisierung & Abgrenzung	1	2	10	1	2		2	18
Bedeutung & Vernetzung			3					3
Konventionelle Festlegungen			1		1	1		3
Σ SUMME	2	2	25	3	15	2	2	51

Interaktionen zwischen Heurismen und Wissen hinsichtlich der Aufgaben

Aufgabe „Differenzierbarkeit prüfen“

Codesystem	Begrif...	Skizze...	Imagi...	Spezi...	Fallun...	Nutzu...	Syste...	Meta...	Rückf...	Ähnlic...	Suche...	Rück...	Vorwä...
Konzeptuelles Wissen	12	4	2					1		4			
Prozedurales Wissen		1				1		1		15	3		4

Codesystem	Begrif...	Skizze...	Imagi...	Spezi...	Fallun...	Nutzu...	Syste...	Meta...	Rückf...	Ähnlic...	Suche...	Rück...	Vorwä...
Implizite Nutzung	1					1		1		4			4
Explizite Formulierung	4		1							1			
Konkretisierung & Abgrenzung	3									15	3		
Bedeutung & Vernetzung	1	4	1					1					
Konventionelle Festlegungen	3	1											

Aufgabe „Mittelwertsatz“

Codesystem	Begrif...	Skizze...	Imagi...	Spezi...	Fallun...	Nutzu...	Syste...	Meta...	Rückf...	Ähnlic...	Suche...	Rück...	Vorwä...
Konzeptuelles Wissen	9	10	5	2		6	1	3	1	7	2		4
Prozedurales Wissen										3	1		

Codesystem	Begrif...	Skizze...	Imagi...	Spezi...	Fallun...	Nutzu...	Syste...	Meta...	Rückf...	Ähnlic...	Suche...	Rück...	Vorwä...
Implizite Nutzung		4	3	1		5		2		6			3
Explizite Formulierung	6	1											
Konkretisierung & Abgrenzung			1	2		1	1			4	2		
Bedeutung & Vernetzung	3	9	4			1		2	1		1		
Konventionelle Festlegungen	1									1			1

Aufgabe „L´Hospital“:

Codesystem	Begrif...	Skizze...	Imagi...	Spezi...	Fallun...	Nutzu...	Syste...	Meta...	Rückf...	Ähnlic...	Suche...	Rück...	Vorwä...
Konzeptuelles Wissen		2	2	7		1	1						
Prozedurales Wissen	3		1	12		4	2		3	6	7		3

Codesystem	Begrif...	Skizze...	Imagi...	Spezi...	Fallun...	Nutzu...	Syste...	Meta...	Rückf...	Ähnlic...	Suche...	Rück...	Vorwä...
Implizite Nutzung				4		1	1		3	4	2		2
Explizite Formulierung											3		
Konkretisierung & Abgrenzung	2		1	8		3	1			2	1		1
Bedeutung & Vernetzung		2	1										
Konventionelle Festlegungen	1										1		

Erklärung zur Dissertation

Hiermit erkläre ich, Tim Kolbe, Folgendes in Bezug auf meine Dissertation mit dem Titel „Mathematisches Problemlösen im Ingenieurstudium: Eine qualitative Prozessanalyse“:

1. **Kenntnis der Promotionsordnung**
   Ich bestätige, dass mir die gültige Promotionsordnung der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik der Universität Paderborn bekannt ist und ich die darin festgelegten Bestimmungen einhalte.
2. **Betreuung der Dissertation**
   Die Dissertation wurde unter der Betreuung von Prof. Dr. Lena Wessel an der Universität Paderborn, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik am Institut für Mathematik erarbeitet.
3. **Selbständige Anfertigung**
   Ich erkläre, dass ich die Dissertation eigenständig verfasst habe. Alle verwendeten Hilfsmittel, Quellen und fremden Inhalte, die in meiner Arbeit verarbeitet wurden, sind vollständig und ordnungsgemäß angegeben.
4. **Kein Einsatz von Vermittlern**
   Ich versichere, dass ich zum Zweck der Promotionsvermittlung keinen Vermittler gegen Entgelt in Anspruch genommen habe.
5. **Keine vorherige Einreichung der Dissertation**
   Die vorliegende Dissertation wurde in dieser oder einer ähnlichen Form bisher weder an anderer Stelle im Rahmen eines Promotionsverfahrens noch in einem anderen Prüfungsverfahren eingereicht.
6. **Angaben zu früheren Promotionsversuchen**
   Ich erkläre, dass ich keine früheren Promotionsversuche unternommen habe.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich die Richtigkeit und Vollständigkeit dieser Angaben.

Paderborn, Februar 2025

Tim Kolbe