



Adaptive Digitalfilter für die aktive Schalldämpfung in Röhrensystemen

Zur Erlangung des akademischen Grades

DOKTORINGENIEUR (Dr.-Ing.)

der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
der Universität Paderborn
genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Ing. Tobias Balkenhol
Paderborn

Referent: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Hilleringmann

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Reinhold Häb-Umbach

Tag der mündlichen Prüfung: 18.08.2009

Paderborn, den 18.08.2009

Diss. EIM-E/254

Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
I Akustische Modellierung	5
1 Schallausbreitung in kreisrunden Röhren	7
1.1 KIRCHHOFF-LÖSUNG für eine kreisrunde Röhre	9
1.1.1 Vorbemerkungen	10
1.1.2 Zustandsgleichung für ein ideales Gas	11
1.1.3 Die Kontinuitätsgleichung	12
1.1.4 Die NAVIER-STOKES-Gleichung	12
1.1.5 Die Wärmeleitungsgleichung	13
1.1.6 Lösung der Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen	15
1.2 Isotherme und ideal schallharte Wände	19
1.2.1 Vereinfachtes Modell nach KIRCHHOFF	20
1.2.2 Vereinfachtes Modell nach MUNJAL	23
1.2.3 Vereinfachtes Modell nach STINSON	23
1.2.4 Vereinfachtes Modell nach KEEFE	25
1.3 Isotherme und nicht-ideal schallharte Wände	25
1.4 Nicht-isotherme und ideal schallharte Wände	29
1.4.1 Vereinfachtes Modell nach FRANKEN ET AL.	33
1.4.2 Vereinfachtes Modell nach KEEFE	33
1.5 Bewertung der Approximationen	34
1.5.1 Vorbetrachtungen und Fehlermaße	34
1.5.2 Isotherme und ideal schallharte Wände	35
1.5.3 Isotherme und nicht-ideal schallharte Wände	36
1.5.4 Nicht-isotherme und ideal schallharte Wände	38

2	Modellierung von Röhrensystemen	40
2.1	Leitungsmodell für einen akustischen Wellenleiter	40
2.1.1	Charakteristische Impedanz	42
2.1.2	Zweitormodellierung	43
2.2	Modellierung einer veränderlichen Querschnittsfläche	44
2.2.1	Die WEBSTER-Gleichung	44
2.2.2	Stufenweise Approximation	46
2.3	Modellierung einer endlichen Röhrenlänge	50
2.3.1	Mündung ohne Flansch	51
2.3.2	Mündung mit unendlich ausgedehntem Flansch	52
2.4	Modellierung von Abzweigungen	52
2.5	Modellierung von nicht-idealen Schallquellen	54
2.6	Untersuchungen zur Modellierung eines Röhrensystems	56
2.6.1	Validierung	59
2.6.2	Bewertung	59
3	Strömung im Röhrensystem	62
3.1	Dämpfungsmaß	63
3.2	Zweitormodellierung eines durchströmten Wellenleiters	64
3.3	Konvektive Schallfeldgrößen	65
3.4	Modellierung einer veränderlichen Querschnittsfläche	67
3.4.1	Stufenweise Approximation nach GUPTA ET AL.	67
3.4.2	Modellierung von Querschnittssprüngen nach MUNJAL	68
II	Algorithmen für die aktive Schalldämpfung	71
4	Aktive Schalldämpfung in Röhrensystemen	73
4.1	Blockschaltbild eines ANC-Systems	73
4.1.1	<i>Feedforward</i> - und <i>Feedback</i> -Verfahren	76
4.1.2	Optimale Übertragungsfunktion	76
4.1.3	Energetische Betrachtungen	77
4.2	Sensorik und Aktorik	77
4.2.1	Referenzsignalerfassung	77
4.2.2	Fehlersignalerfassung	78
4.2.3	Strömungsinduzierter Störschall	78

5	Adaptive Digitalfilter	80
5.1	Konvergenz und <i>Tracking</i>	81
5.2	Transversale Filterstruktur	83
5.3	Rekursive Filterstruktur	84
5.4	Gradientenverfahren	85
5.4.1	Schrittweite	86
5.4.2	FxLMS-Algorithmus	87
5.5	LS-Algorithmus	88
5.6	RLS-Algorithmus	90
5.6.1	Rekursionsgleichung für den Koeffizientenvektor	91
5.6.2	Eigenschaften des RLS-Algorithmus	92
5.7	ERLS-Algorithmus	93
6	Online-Modellierung des Sekundärpfads	97
6.1	AN-Verfahren nach ERIKSSON ET AL.	98
6.2	AN-Verfahren nach ZHANG ET AL.	99
6.3	OM-Verfahren nach ERIKSSON	101
6.4	OM-Verfahren nach LOPES ET AL.	103
6.5	OM-Verfahren nach KOHNO ET AL.	105
6.6	Verbessertes OM-Verfahren	106
6.7	MCERLS-Algorithmus	107
6.7.1	Kovarianzmanagement	108
6.7.2	Vereinfachtes Kovarianzmanagement	111
6.7.3	Anmerkungen	111
7	Simulationstechnische Untersuchungen	113
7.1	Aktiver Abgasschalldämpfer	113
7.1.1	Geräuschspektrum eines Verbrennungsmotors	114
7.1.2	Stand der Forschung und Entwicklung	114
7.2	Simulationsmodell	116
7.2.1	Implementierung	118
7.2.2	Simulationsstimulus	119
7.2.3	Referenz- und Fehlersignal	121
7.2.4	Quellenparameter der Sekundärquelle	122
7.3	Simulationsergebnisse	123
7.3.1	Kovarianzmanagement	124
7.3.2	Vergleich der Verfahren zur <i>Online</i> -Modellierung	128
7.3.3	Bewertung der <i>Online</i> -Modellierung	132
7.3.4	Strömungsinduziertes Rauschen	134
	Zusammenfassung und Ausblick	137

A	Thermodynamik von Gasen	141
A.1	Viskosität	141
A.2	Thermische Wärmeleitfähigkeit	141
A.3	Schallgeschwindigkeit	142
A.4	Dichte	142
A.5	Spezifische Wärmekapazität	142
B	Bestimmung der Quellenparameter	143
B.1	Vorbemerkungen	143
B.2	Praktische Durchführung	144
B.2.1	Längenoptimierung	145
B.2.2	Untersuchungen zur Bestimmung der Quellenparameter	146
B.2.3	Quellenparameter	148
C	MF_x-Struktur und Adaptationsalgorithmen	149
C.1	MF _x -Struktur	149
C.2	Adaptationsalgorithmen	150
C.2.1	Normalisierter LMS-Algorithmus	151
C.2.2	RLS-Algorithmus	151
C.2.3	ERLS-Algorithmus	151
D	Rekursive Schätzung statistischer Größen	152
D.1	Rekursive Schätzung des Mittelwerts	152
D.2	Rekursive Schätzung der Varianz	153
	Literaturverzeichnis	155
	Danksagung	175

Ausgewählte Formelzeichen und Abkürzungen

Mathematische Operatoren und Definitionen

$\delta(\cdot)$	Delta-Funktion
$\det\{\cdot\}$	Determinante
$\text{DFT}\{\cdot\}$	Diskrete FOURIER-Transformation
$\text{diag}\{\mathbf{x}\}$	Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen \mathbf{x}
$\text{div}\{\cdot\}$	Divergenz
\vec{e}_r	Einheitsvektor in r -Richtung
\vec{e}_z	Einheitsvektor in z -Richtung
$e^{(\cdot)}$	Exponentialfunktion
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	Erwartungswert
$\text{grad}\{\cdot\}$	Gradient
$\text{IDFT}\{\cdot\}$	Diskrete inverse FOURIER-Transformation
$\text{Im}\{\cdot\}$	Imaginärteil
j	Imaginäre Einheit
$J_n(\cdot)$	BESSEL-Funktion erster Art der Ordnung n
$\mathcal{M}\{\cdot\}$	Mittelwert
$\mathcal{O}\{\cdot\}$	Mathematische Komplexität
$\text{Re}\{\cdot\}$	Realteil
$\text{rot}\{\cdot\}$	Rotation
$\{\cdot\}^T$	Transposition
$T_n(\cdot)$	TSCHEBYSCHEFF-Polynom erster Art der Ordnung n
$Y_n(\cdot)$	BESSEL-Funktion zweiter Art der Ordnung n
$*$	Diskrete Faltung
$\{\cdot\}^*$	Komplexe Konjugation
$\Delta\{\cdot\}$	LAPLACE-Operator
$\nabla\{\cdot\}$	NABLA-Operator
$\ \cdot\ _k$	k -Norm eines Vektors
$\mathbf{0}_n$	Nullelementvektor der Länge n oder Nullmatrix der Dimension $n \times n$
\mathbf{I}_n	Einheitsmatrix der Dimension $n \times n$

Allgemeines

f	Frequenz
f_S	Abtastfrequenz
h	Impulsantwort
H	Übertragungsfunktion
λ	Wellenlänge
ω	Kreisfrequenz
ω_S	Abtastkreisfrequenz
r	Radius
t	Zeit
z	z -Koordinate oder komplexe Variable

Fluideigenschaften

κ	Thermische Leitfähigkeit eines Fluids
μ, η	Dynamische Viskosität
ν	Kinematische Viskosität
ζ	Volumenviskosität

Gaseigenschaften

C_p	Spezifische Wärme pro Einheitsmasse bei konstantem Druck
C_v	Spezifische Wärme pro Einheitsmasse bei konstantem Volumen
C_{pv}	Verhältnis $C_{pv} = C_p/C_v$
D_v	Viskose Verlustrate
R	Individuelle Gaskonstante

Schallfeldgrößen

c	Schallgeschwindigkeit
P	Schalldruck
P_0	Statischer Druck
ϕ	Akustisches Potenzial
ϱ	Dichte
ρ_0	Dichte im Gleichgewichtszustand
s	Entropie
S_0	Entropie im Gleichgewichtszustand
T	Temperatur in KELVIN
T_0	Temperatur im Gleichgewichtszustand in KELVIN
\mathbf{v}	Schallschnellenvektor
\mathbf{V}_0	Schallschnelle im Gleichgewichtszustand
$\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{s}, \tilde{T}, \tilde{\mathbf{v}}$	Zeitabhängige Schallfeldgrößen
$\hat{p}, \hat{\rho}, \hat{s}, \hat{T}, \hat{\mathbf{v}}$	Komplexe Amplituden der Schallfeldgrößen

Akustischer Wellenleiter

α	Dämpfungsmaß
β	Phasenmaß verlustbehafteter Wellenleiter
β_0	Phasenmaß verlustfreier Wellenleiter
c_p	Phasengeschwindigkeit
γ	Ausbreitungsmaß
p_n	Gemittelte komplexe Amplitude des Schalldrucks am Tor n
q_n	Gemittelte komplexe Amplitude des Schallflusses am Tor n
r_n, r_w	Röhrenradius
ρ_n	Gemittelte komplexe Amplitude der Dichte am Tor n
v_n	Gemittelte komplexe Amplitude der Schallschnelle am Tor n
Z_L	Charakteristische Impedanz verlustbehafteter Wellenleiter
Z_{L0}	Charakteristische Impedanz verlustfreier Wellenleiter

Eigenschaften der Röhrenwände

C_w	Spezifische Wärmekapazität der Röhrenwände
d	Dicke der Röhrenwände
κ_w	Wärmeleitfähigkeit der Röhrenwände
ρ_w	Dichte der Röhrenwände
\hat{T}_w	Komplexe Amplitude der Wandtemperatur
Z_w	Wandimpedanz

Strömendes Medium

F_n	Reibungsfaktor
M_n	MACH-Zahl
R_n	REYNOLDS-Zahl
V_n	Strömungsgeschwindigkeit des Mediums

Zweitormodellierung

\mathbf{K}	Kettenmatrix
K_{nm}	(n, m) -Element der Kettenmatrix \mathbf{K}
\mathbf{Z}	Impedanzmatrix
Z	Zweitor

Adaptives ANC-System

d	Ausgangssignal des Primärpfads
D	Störsignaldämpfung
e	Fehler
e_p	Restschall
ε	Adaptationsparameter des MCERLS-Algorithmus
F	Physikalischer Rückkopplungspfad

$F_{\{\cdot\}}$	Übergangsmatrix
κ	KALMAN-Verstärkung
μ	Schrittweite bei den LMS-basierten Algorithmen
n	Diskreter Zeitindex
p	Impulsantwort des physikalischen Primärpfads
\hat{p}	Geschätzte Impulsantwort des Primärpfads
$\hat{\mathbf{p}}$	Koeffizientenvektor des adaptiven Primärfilters
P	Physikalischer Primärpfad
\hat{P}	Adaptives Primärfilter
$q_{\{\cdot\}}$	Skalierungsfaktor bei den ERLS-basierten Algorithmen
$\mathbf{Q}_{\{\cdot\}}$	Kovarianzmatrix bei den ERLS-basierten Algorithmen
$\mathbf{r}_{\{\cdot\}}$	Systemrauschen
s	Impulsantwort des physikalischen Sekundärpfads
\hat{s}	Geschätzte Impulsantwort des Sekundärpfads
$\hat{\mathbf{s}}$	Koeffizientenvektor des adaptiven Sekundärfilters
S	Physikalischer Sekundärpfad
\hat{S}	Adaptives Sekundärfilter
ϑ_0	Temperatur in °C
u	Störschall beziehungsweise Störsignal
$v_{\{\cdot\}}$	Messrauschen
V_0	Strömungsgeschwindigkeit des Abgases in der Zuleitung
\hat{w}	Impulsantwort des Kompensationsfilters
$\hat{\mathbf{w}}$	Koeffizientenvektor des Kompensationsfilters
\hat{W}	Kompensationsfilter
W	Fensterlänge
x	Ausgangssignal des Referenzsensors
y	Ausgangssignal des Kompensationsfilters
y_s	Ausgangssignal des Sekundärpfads
$y_{\hat{s}}$	Ausgangssignal des adaptiven Sekundärfilters
$y_{\hat{p}}$	Ausgangssignal des adaptiven Primärfilters

Abkürzungen und Indizes

$\{\cdot\}_{\text{app}}$	Approximation
$\{\cdot\}_A$	Ausgang
$\{\cdot\}_B$	Abzweigung
$\{\cdot\}^c$	Konvektive Größe
$\{\cdot\}_e$	Fehlersignal
$\{\cdot\}_E$	Eingang
$\{\cdot\}_{\text{Fr}}$	Näherung nach FRANKEN ET AL.
$\{\cdot\}_{\text{ges}}$	Gesamt
$\{\cdot\}_{\text{Hu}}$	Näherung nach HUDDE ET AL.
$\{\cdot\}_i$	Isotherme Röhrenwände
$\{\cdot\}_{\text{Ke}}$	Näherung nach KEEFE

$\{\cdot\}_{Ki}$	Näherung nach KIRCHHOFF
$\{\cdot\}_m$	Messung
$\{\cdot\}_{min}$	Minimal
$\{\cdot\}_M, M_{\{\cdot\}}$	Mikrofon
$\{\cdot\}_{Mu}$	Näherung nach MUNJAL
$\{\cdot\}_n$	Röhrenelement n
$\{\cdot\}_{n}$	Nicht-isotherme Röhrenwände
$\{\cdot\}_{opt}$	Optimal
$\{\cdot\}_p$	Physikalischer Primärpfad
$\{\cdot\}_{\hat{p}}$	Geschätzter Primärpfad
$\{\cdot\}_Q$	Querschnittssprung
$\{\cdot\}_{ref}$	Referenz
$\{\cdot\}_s$	Physikalischer Sekundärpfad
$\{\cdot\}_{\hat{s}}$	Geschätzter Sekundärpfad
$\{\cdot\}_s$	Simulation
$\{\cdot\}_{St}$	Näherung nach STINSON
$\{\cdot\}_t$	Turbulenter Einfluss
$\{\cdot\}_T$	Röhrenabschluss
$\{\cdot\}_V$	Verstärker
$\{\cdot\}_w$	Physikalisches System
$\{\cdot\}_{\hat{w}}$	Kompensationsfilter
$\{\cdot\}_x$	Referenzsignal

Weitere Abkürzungen

ANC	<u>A</u> ctive- <u>N</u> oise- <u>C</u> ontrol
FIR	<u>F</u> inite- <u>I</u> mpulse- <u>R</u> esponse
FL	<u>F</u> ull- <u>L</u> oad
IIR	<u>I</u> nfinite- <u>I</u> mpulse- <u>R</u> esponse
RL	<u>R</u> oad- <u>L</u> oad
AN	<u>A</u> dded- <u>N</u> oise
ERLS	<u>E</u> xtended- <u>R</u> ecursive- <u>L</u> east- <u>S</u> quares
FxLMS	<u>F</u> iltered- <u>x</u> - <u>L</u> east- <u>M</u> ean- <u>S</u> quare
LMS	<u>L</u> east- <u>M</u> ean- <u>S</u> quare
LS	<u>L</u> east- <u>S</u> quares
MCERLS	<u>M</u> odified- <u>C</u> ovariance- <u>E</u> xtended- <u>R</u> ecursive- <u>L</u> east- <u>S</u> quares
MFx	<u>M</u> odified- <u>F</u> iltered- <u>x</u>
MSE	<u>M</u> ean- <u>S</u> quare- <u>E</u> rror
NLMS	<u>N</u> ormalized- <u>L</u> east- <u>M</u> ean- <u>S</u> quare
OM	<u>O</u> verall- <u>M</u> odeling
RLS	<u>R</u> ecursive- <u>L</u> east- <u>S</u> quares

Einführung

Der von technischen Geräten oder Maschinen erzeugte Lärm wird häufig durch Ausnutzung von passiven Dämpfungsmechanismen in Form von Reflexion und Absorption reduziert. Die Dämpfung von tieffrequentem Störschall ist jedoch mit passiven Methoden oft nur unzureichend möglich und kann zusätzlich aufgrund der erforderlichen geometrischen Abmessungen einen großen baulichen und finanziellen Aufwand beanspruchen.

Zunehmend an Bedeutung gewinnen in den letzten Jahren die aktiven Dämpfungsmaßnahmen, die vor allem tieffrequenten Lärm effektiver mindern. Das aktive Prinzip basiert auf der Überlagerung des durch primäre Schallquellen verursachten Störschallfelds mit einem von sekundären Schallquellen gezielt erzeugten Gegenschallfeld. Das Sekundärschallfeld wird durch einen oder mehrere Lautsprecher dergestalt erzeugt, dass sich am gewünschten Ort der Lärminderung primäre und sekundäre Feldanteile durch Interferenz destruktiv überlagern.

Die praktische Umsetzung des auch als Gegen- oder Antischallverfahren bezeichneten Prinzips gestaltet sich bei dreidimensionalen Feldern wesentlich aufwändiger als für den eindimensionalen Fall. Erste Anwendungen widmeten sich daher der eindimensionalen Betrachtung von in Kanälen oder Röhren geführten Schallwellen. Diese werden beispielsweise im Bereich der Klimatechnik von Ventilatoren erzeugt oder durch Abgasleitungen von Verbrennungsmotoren geleitet.

Zielsetzung

In dieser Arbeit stehen Verfahren für die aktive Dämpfung von schmal- und breitbandigem Lärm in Röhrensystemen im Mittelpunkt. Ein Algorithmus berechnet gemäß Abbildung 1 nach dem *Feedforward*-Prinzip aus einer gemessenen Referenz- und Fehlergröße ein Gegenschallsignal, welches schließlich vom Lautsprecher abgestrahlt wird. Der Algorithmus benötigt dazu die Übertragungseigenschaften des Primär- und Sekundärpfads. Diese können im Betrieb, beispielsweise aufgrund von Änderungen der Gastemperatur, fortlaufend vari-

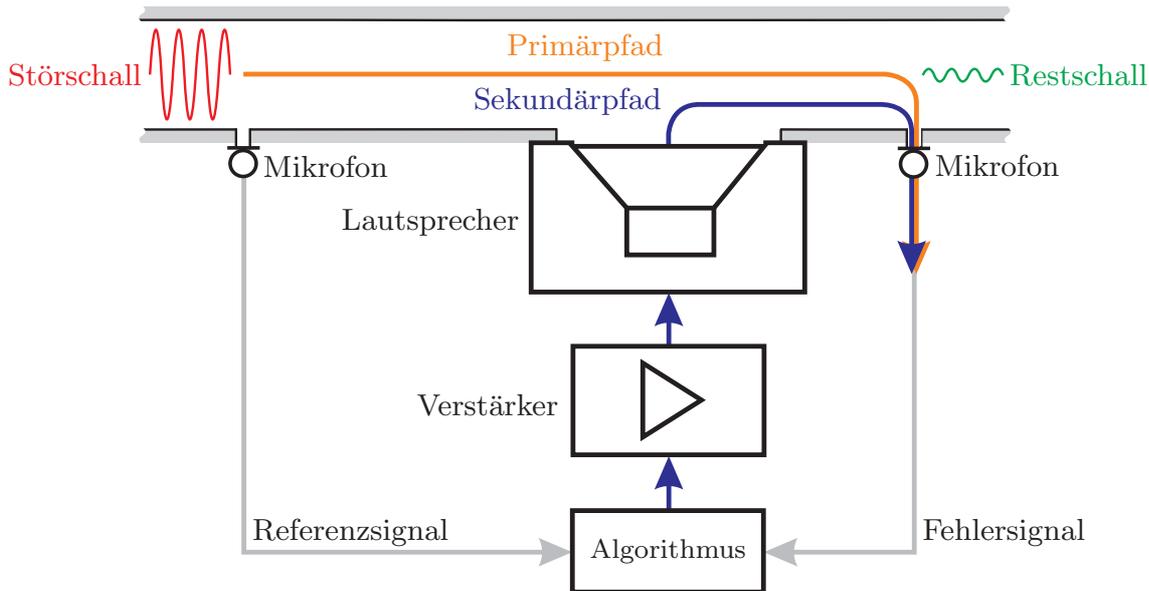


Abbildung 1: Schematische Darstellung der aktiven Schalldämpfung in einem Röhrensystem nach dem *Feedforward*-Prinzip

ieren, so dass Verfahren wünschenswert sind, die dem zeitvarianten Verhalten der Übertragungspfade gerecht werden und beim so genannten *Tracking* das Nachführen der Filterkoeffizienten ermöglichen. Von Interesse sind Algorithmen für adaptive Digitalfilter, die neben der Berechnung des Gegenschallsignals zusätzlich im Rahmen einer *Online*-Modellierung die Berücksichtigung eines zeitvarianten Sekundärpfads erlauben.

In nicht-stationärer Umgebung empfiehlt sich für die Schätzung der Filterkoeffizienten ein erweitertes *Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate*. Diese Verfahren lassen sich als eine spezielle Form des KALMAN-Filters interpretieren, bei denen mit Hilfe von Adaptationsparametern die Kovarianzmatrizen und damit das *Tracking*-Verhalten beziehungsweise die resultierende Störsignaldämpfung direkt beeinflusst werden können. Das Ziel dieser Arbeit ist es daher, neue Ansätze vorzustellen und zu untersuchen, die mit Hilfe eines Kovarianzmanagements ein verbessertes *Tracking* und zudem eine geringere Anzahl von abzustimmenden Adaptationsparametern aufweisen.

Die Untersuchung der erarbeiteten sowie der aus der Literatur bekannten Verfahren erfolgt bezüglich des *Trackings* entsprechend dem Entwicklungstrend simulationstechnisch. Die bisherigen Arbeiten zu dieser Thematik verwendeten zur Simulation eines zeitvarianten Systems häufig ein stochastisches Modell, das sich auf messtechnisch ermittelte Übertragungsfunktionen und auf GAUSS-MARKOV-Prozesse stützt. Ein solches Modell erlaubt zwar eine Beurteilung der Algorithmen, lässt jedoch nur eingeschränkte Rückschlüsse auf das Verhalten zu, wenn sich die Verfahren in einem physikalischen System unter realen Betriebsbedingungen zu bewähren haben. Dieses Dilemma wird in die-

ser Arbeit durch den Einsatz eines physikalisch motivierten mathematischen Modells eines Röhrensystems vermieden, welches den Bezug zu einer konkreten praktischen Anwendung herstellt. Für einen zu simulierenden aktiven Abgasschalldämpfer ist zu untersuchen, ob mit den neuen Ansätzen höhere Störsignaldämpfungen als mit den etablierten Verfahren erzielt werden können.

Übersicht zur Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Der erste Teil thematisiert die Modellierung des akustischen Übertragungsverhaltens von Röhrensystemen für eine Schallausbreitung im Grundmodus. Die Betrachtungen beschränken sich nicht nur auf die für die Simulation benötigten mathematischen Modelle. Losgelöst von der Intention des zweiten Teils leistet der erste auch Beiträge zur Modellierung eines akustischen Wellenleiters auf der Grundlage des Ausbreitungsmaßes, die bisher formal nicht präsentiert worden sind.

Fundiert auf den Arbeiten von KIRCHHOFF werden die aus der Literatur bekannten sowie die erarbeiteten Approximationen für das Ausbreitungsmaß vorgestellt. Diese erlauben die Charakterisierung der Schallausbreitung in kreisrunden Röhren mit konstanter Querschnittsfläche unter Berücksichtigung der an den Wänden geforderten Randbedingungen. Diesbezüglich sind insbesondere nicht-ideal schallharte Wände durch die Randbedingungen zu modellieren. Die Bewertung der approximativen Ausbreitungsmaße erfolgt mit Hilfe von Referenzlösungen, die sich aus der *exakten* Lösung von KIRCHHOFF bestimmen lassen.

Im nächsten Schritt werden Röhrensysteme betrachtet, die veränderliche Querschnittsflächen, Abzweigungen oder ein strömendes Medium enthalten können. Die Modellierung des akustischen Übertragungsverhaltens der Röhrensysteme basiert auf einer Zweitorbeschreibung, für die das Ausbreitungsmaß essenziell benötigt wird. Mit der Validierung eines mathematischen Röhrenmodells anhand eines physikalischen Röhrensystems endet der erste Teil.

Im zweiten Teil der Arbeit stehen Algorithmen im Mittelpunkt, die sich auf der Grundlage einer adaptiven Signalverarbeitung zur aktiven Schalldämpfung in Röhrensystemen eignen. Es werden Ansätze mit einer gleichzeitigen *Online*-Modellierung des Sekundärpfads präsentiert, die mit Hilfe eines Kovarianzmanagements eine einfachere Abstimmung der Adaptationsparameter ermöglichen und darüber hinaus für Anwendungen prädestiniert sind, die hohe Anforderungen an das *Tracking* stellen.

Für die simulationstechnischen Untersuchungen erfolgt die Einbettung der Algorithmen in den Kontext eines aktiven Abgasschalldämpfers. Die dafür erforderlichen Stimulussignale sind in einem Abgasstrang eines PKWs für unterschiedliche Fahrzyklen gemessen oder abgeschätzt worden. Ein Vergleich der etablierten Konzepte mit den neuen Ansätzen sowie eine Bewertung der Simulationsergebnisse beschließen diese Arbeit.

— TEIL I —

Akustische Modellierung

Schallausbreitung in kreisrunden Röhren

Der Schallausbreitung in Röhren widmeten zahlreiche Forscher ab Mitte des Neunzehnten Jahrhunderts ihre Aufmerksamkeit. So stand zunächst bei den Untersuchungen des Mathematikers STOKES und des Physikers HELMHOLTZ der Einfluss der Viskosität bei der Schallausbreitung in Röhren im Mittelpunkt ihres Interesses [Stok45, Helm63]. Neben der Viskosität gelang es dem Physiker KIRCHHOFF schließlich, den Einfluss der Wärmeleitung eines Gases in einer Röhre mit einer kreisrunden Querschnittsfläche ebenfalls zu berücksichtigen [Kirc68, Rayl68]. Das Ergebnis wird häufig als Theorie von KIRCHHOFF bezeichnet, während das von KIRCHHOFF zu Grunde gelegte Differenzialgleichungssystem oft als NAVIER-STOKES-FOURIER-Modell referenziert wird. Die KIRCHHOFF-Lösung des Differenzialgleichungssystems besitzt unter den folgenden Prämissen Gültigkeit:

- *kleine Änderungen der Schallfeldgrößen um den Gleichgewichtszustand,*
- *sinusförmige Zeitabhängigkeit der Schallfeldgrößen,*
- *ruhendes und ideales Gas als Medium,*
- *Schallausbreitung im Grundmodus,*
- *kreisrunde und konstante Querschnittsfläche bei unendlicher Röhrenlänge,*
- *ideal schallharte und isotherme Wände,*
- *Tangentialkomponente der Schallschnelle verschwindet an den Wänden.*

Um die KIRCHHOFF-Lösung für die Fälle zu erschließen, wo die obigen Bedingungen nicht erfüllt werden können, sind zahlreiche Anstrengungen unternommen worden. Auch wenn in dieser Arbeit die Betrachtung einer Schallausbreitung im Grundmodus ausreicht, ist zu erwähnen, dass es etwa ab Mitte des Zwanzigsten Jahrhunderts mit dem von CREMER eingeführten Konzept gelang, ebenfalls höhere Schallfeldmoden für kreisrunde und rechteckige Querschnittsflächen einzubeziehen [Crem48]. Sein Ansatz stützt sich auf eine Zerlegung des Schallfelds in einen primären Schallfeldanteil, der das freie Schallfeld

repräsentiert, sowie in zwei weitere Feldanteile zur Beschreibung der durch Viskosität und Wärmeleitung begründeten Ausgleichsvorgänge. Die Verknüpfung der Feldanteile erfolgt schließlich über Randbedingungen, welche sich auch mit dem von CREMER vorgestellten Konzept der akustischen Grenzschicht mit Hilfe einer Wandadmittanz formulieren lassen. Diese Grenzschicht bildet sich aufgrund der Viskosität und der Wärmeleitung des Fluids¹ in Wandnähe aus, so dass der Begriff in Anlehnung an die sich bei Strömungen ausbildende PRANDTL-Grenzschicht gewählt worden ist [POW84].

Die Arbeiten von CREMER stellten die Grundlage für verallgemeinerte Ansätze dar, das Schallfeld durch Superposition der akustischen Moden des primären Schallfelds, den Wirbelmoden zur Erfassung der viskosen Effekte und den Entropiemoden zur Beschreibung der durch Wärmeleitung bedingten Einflüsse analytisch zu formulieren [Kova53, Pier81]. Erste Arbeiten zur Schallausbreitung von höheren Moden sind unter anderem [Beat50] zu entnehmen, die einerseits den Weg für raffinierte Lösungsvarianten ebneten und andererseits das Verhalten höherer Moden im Bereich ihrer Grenzfrequenz sowie die Interaktion mit der akustischen Grenzschicht genauer erörterten [BBHK87, Hudd88, Sche04]. In [Sche05] wurden zusätzlich die Betrachtungen auf reale Gase erweitert, während in [Sche04] auch Effekte durch eine endliche Röhrenlänge Berücksichtigung fanden.

Die Berechnung des Ausbreitungsmaßes mit der klassischen Lösung von KIRCHHOFF erfordert einen hohen mathematischen Aufwand. Daher wurden in der Literatur zahlreiche vereinfachte Modelle angegeben, die sich in zwei Klassen einteilen lassen [Tijd75]. Eine Klasse basiert auf der analytischen Approximation der KIRCHHOFF-Lösung [Kirc68, West53, Rayl68, Keef84, Stin91]. Ansätze auf der Grundlage von vereinfachten Differenzialgleichungen, für die analytische [ZK49, Iber50, FCCW81, Munj87] oder numerische Lösungen bestimmt werden können [Tsao68], zählen dagegen zur anderen Klasse. Weitere Approximationen für das Ausbreitungsmaß zur Berücksichtigung von Effekten, die von den KIRCHHOFF-Hypothesen abweichen, finden sich beispielsweise in [West53, FCCW81].

In dieser Arbeit soll das akustische Übertragungsverhalten von Röhrensystemen in Analogie zu einer elektrischen Leitung auf der Grundlage des Ausbreitungsmaßes und einer Zweitormodellierung charakterisiert werden. Dieses Kapitel thematisiert dafür zunächst die verlustbehaftete Schallausbreitung in einem akustischen Wellenleiter mit kreisrunder und konstanter Querschnittsfläche im Grundmodus. Die Publikationen zu dieser Thematik widmeten sich hauptsächlich einem durch die Randbedingung an den Wänden zu berücksichtigenden Effekt und erarbeiteten für diesen eine analytische Approximation des Ausbreitungsmaßes. Dagegen sind im Folgenden, fundiert auf den Arbeiten von STINSON [Stin91], approximative und analytische Ausdrücke für das

¹Auch wenn ein Fluid sowohl Flüssigkeiten als auch Gase bezeichnet, sind in dieser Arbeit nur gasförmige Fluide relevant.

Ausbreitungsmaß auf der Basis der KIRCHHOFF-Lösung zu präsentieren, die eine Berücksichtigung der Randbedingungen

- *isotherme und ideal schallharte Wände,*
- *isotherme und nicht-ideal schallharte Wände,*
- *nicht-isotherme und ideal schallharte Wände*

erlauben. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich demnach nicht nur auf die im zweiten Teil der Arbeit benötigten mathematischen Modelle, sondern sie sollen auf der Grundlage des Ausbreitungsmaßes weitere Ansätze zur Beschreibung der Schallausbreitung in Röhren für Randbedingungen thematisieren, die in dieser Form bisher nicht präsentiert worden sind.

1.1 Kirchhoff-Lösung für eine kreisrunde Röhre

Die Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit eines Fluids sind eine Konsequenz aus der molekularen Zusammensetzung. Die Wärmeleitung basiert molekular-kinetisch auf der Diffusion von kinetischer Energie innerhalb des Fluids. Dagegen entsteht die Viskosität durch einen Impulsaustausch zwischen den im Fluid vorhandenen Molekülen. Die Viskosität lässt sich daher molekular-kinetisch als Diffusion des mechanischen Impulses deuten [MI86].

Gleiten Fluidschichten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aneinander entlang, findet eine Wechselwirkung zwischen den Molekülen statt. Moleküle aus Schichten mit einer hohen mittleren freien Weglänge beschleunigen Teilchen aus Schichten mit einer geringeren mittleren freien Weglänge. Als Resultat entsteht eine Scherung oder Schubspannung. Infolge dieser Reibungsvorgänge der Teilchen untereinander kommt es zu einer Erwärmung des Fluids. Die Viskosität spielt deshalb vor allem in der Nähe von starren Wänden eine große Rolle. Die Moleküle außerhalb des Wandbereichs besitzen eine endliche Tangentialgeschwindigkeit, während die von der Wand zurückprallenden Moleküle eine regellose Bewegung mit der mittleren Tangentialgeschwindigkeit von null ausführen und somit bedingt durch die kleine mittlere freie Weglänge scheinbar an der Wand haften bleiben [MN79, POW84, MI86, Zier93].

Aufgrund der Viskosität und der Wärmeleitung kommt es bei der Schallausbreitung in einem Gas, das als Fluid die Schallenergie transportiert, zu einer Dämpfung der Schallwelle. Die viskosen und wärmeleitenden Eigenschaften des Gases sind im freien Schallfeld, also in weiter Entfernung von begrenzenden Wänden, im hörbaren Frequenzbereich eher zu vernachlässigen. Dagegen sollten diese bei der Schallausbreitung in einer Röhre nicht ignoriert werden [Crem48].

1.1.1 Vorbemerkungen

Für die folgenden Betrachtungen wird für den Druck P , die Dichte ρ , die Temperatur T sowie die Schallschnelle \mathbf{v} eine Zeitabhängigkeit der Form

$$P(t) = P_0 + \tilde{p} = P_0 + \operatorname{Re}\{\hat{p} e^{j\omega t}\}, \quad (1.1a)$$

$$\rho(t) = \rho_0 + \tilde{\rho} = \rho_0 + \operatorname{Re}\{\hat{\rho} e^{j\omega t}\}, \quad (1.1b)$$

$$T(t) = T_0 + \tilde{T} = T_0 + \operatorname{Re}\{\hat{T} e^{j\omega t}\}, \quad (1.1c)$$

$$\mathbf{v}(t) = \tilde{\mathbf{v}} = \operatorname{Re}\{\hat{\mathbf{v}} e^{j\omega t}\} \quad (1.1d)$$

angenommen. Die Größen P_0 , ρ_0 und T_0 bezeichnen die Werte im thermodynamischen Gleichgewicht², also ohne Anregung. Dagegen stellen \hat{p} , $\hat{\rho}$ und \hat{T} als komplexe Amplituden die Abweichung von den Gleichgewichtsgrößen infolge einer Schallausbreitung dar. Mit

$$P_0 \gg |\tilde{p}| \quad \text{und} \quad \rho_0 \gg |\tilde{\rho}| \quad \text{sowie} \quad T_0 \gg |\tilde{T}| \quad (1.2)$$

werden kleine Änderungen um den Gleichgewichtszustand vorausgesetzt.³ Für die komplexen Amplituden \hat{p} , $\hat{\rho}$, \hat{T} und $\hat{\mathbf{v}}$ liegt eine Ortsabhängigkeit und eine Frequenzabhängigkeit vor, wobei im Weiteren für eine bessere Übersichtlichkeit auf die Angabe der Argumente verzichtet werden soll. Es wird somit eine lineare Schallausbreitung vorausgesetzt, so dass die Gesetze der linearen Akustik zum Einsatz kommen können. Der Ansatz mit den Gleichungen (1.1), der auch von KIRCHHOFF verwendet wurde, stellt eine Approximation erster Ordnung dar, da die Größen P , ρ und T nur durch ein zeit- und ortsabhängiges Reihenglied beschrieben werden. Dabei wäre es ebenfalls denkbar, die Größen des Schallfelds durch höhere Ordnungen zu approximieren und mit den zusätzlichen Reihengliedern bisher vernachlässigte Effekte zu berücksichtigen [Mawa54].

Schallausbreitung im homogenen Medium

Die KIRCHHOFF-Lösung setzt eine Schallausbreitung in einem homogenen Fluid voraus. Somit müssen nach [Tijd75] die Wellenlänge des Schalls und der Röhrenradius r_w groß gegenüber der mittleren freien Weglänge im Medium sein. In Anlehnung an [Stin91] können daher mit Luft als Medium für die Frequenz f und den Röhrenradius r_w zunächst die groben Abschätzungen

$$f < 10^8 \text{ Hz} \quad \text{und} \quad r_w > 10^{-2} \text{ mm} \quad (1.3)$$

angegeben werden.

²Die Temperaturabhängigkeit der Dichte ρ_0 kann für ein ideales Gas dem Anhang A entnommen werden.

³Der Gleichanteil P_0 wird auch als statischer Druck bezeichnet, während es sich bei dem zeitlich veränderlichen Anteil \tilde{p} um den Schalldruck handelt.

Schallausbreitung im Grundmodus

Schall breitet sich in einem gasförmigen Medium als Longitudinalwelle aus. Deshalb ist der Grundmodus, im Gegensatz zu elektromagnetischen Wellen in Hohlleitern, bei allen Frequenzen ausbreitungsfähig. Höhere Schallmoden sind nur oberhalb einer vom Querschnitt abhängigen Grenzfrequenz ausbreitungsfähig [Lodw97].

In einem kreisrunden Wellenleiter mit dem Radius r_w stellt der Azimutalmodus den ersten Modus mit der niedrigsten Grenzfrequenz dar. Dieser ist ab

$$\beta_0 r_w = t_{1,0} = 1,841 \quad \Leftrightarrow \quad f_{1,0} \geq 0,293 \frac{c}{r_w} \quad (1.4)$$

ausbreitungsfähig, der erste Radialmodus dagegen für

$$\beta_0 r_w = t_{0,1} = 3,832 \quad \Leftrightarrow \quad f_{0,1} \geq 0,61 \frac{c}{r_w}. \quad (1.5)$$

Die Größe $t_{m,n}$ bezeichnet die Nullstelle $n+1$ der Ableitung $dJ_m(t_{m,n})/dt_{m,n}$ der BESSEL-Funktion erster Art mit der Ordnung m [Kutt04]. Unterhalb der jeweiligen Grenzfrequenz besitzen die Moden evaneszentes Verhalten.

Um eine Schallausbreitung im Grundmodus für einen kreisrunden Wellenleiter zu gewährleisten, darf für einen vorgegebenen Radius r_w keine Anregung oberhalb der Grenzfrequenz des ersten Azimutalmodus erfolgen.

1.1.2 Zustandsgleichung für ein ideales Gas

Die Theorie von KIRCHHOFF setzt ein ideales Gas als Fluid voraus. Bei dieser Modellvorstellung bestehen keine Anziehungskräfte zwischen den Gasmolekülen und ihr Eigenvolumen kann vernachlässigt werden, so dass sie sich als Punktmassen interpretieren lassen [LJS03]. Ein ideales Gas wird durch die Zustandsgleichung

$$P = R \varrho T = \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \varrho T \quad (1.6)$$

beschrieben, wobei R die individuelle Gaskonstante bezeichnet [SSSM05].

Linearisierung der Zustandsgleichung

Im Rahmen der linearen Akustik werden nur kleine Änderungen der Schallfeldgrößen vom Gleichgewichtszustand betrachtet. Das wurde bereits mit den Gleichungen (1.1) angedeutet. Dort setzen sich die Größen aus den Gleichanteilen P_0 , ρ_0 und T_0 sowie den kleinen Schwankungen \tilde{p} , $\tilde{\rho}$ und \tilde{T} zusammen.⁴

⁴Bei der Darstellung der Schallschnelle in Gleichung (1.1d) wird davon ausgegangen, dass sich das Fluid im Ruhezustand $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$ befindet und sich die Gasteilchen mit $\tilde{\mathbf{v}}$ um den Gleichgewichtszustand bewegen.

Zur Linearisierung der Zustandsgleichung (1.6) kann diese mit $\varrho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ und $T = T_0 + \tilde{T}$ in eine TAYLOR-Reihe um den Entwicklungspunkt ρ_0 und T_0 entwickelt werden, die nach dem ersten Reihenglied abgebrochen wird. Man erhält zunächst

$$P = P_0 + \frac{P_0}{\rho_0 T_0} [\rho_0 \tilde{T} + T_0 \tilde{\rho}], \quad (1.7)$$

wobei sich mit $\tilde{p} = P - P_0$ die linearisierte Zustandsgleichung eines idealen Gases auch mit den komplexen Amplituden in der Form

$$\hat{p} = \frac{P_0}{\rho_0 T_0} [\rho_0 \hat{T} + T_0 \hat{\rho}] \quad (1.8)$$

angeben lässt.

1.1.3 Die Kontinuitätsgleichung

Nach dem Erhaltungssatz der Masse muss die Dichteänderung im Volumen gleich dem Massenfluss durch die Oberfläche des betrachteten Volumens sein. Diesen Erhaltungssatz beschreibt in der Hydrodynamik die Kontinuitätsgleichung [Pier81, POW84, MI86, LL91, Spur96]

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\{\varrho \mathbf{v}\} = 0. \quad (1.9)$$

Linearisierung der Kontinuitätsgleichung

Setzt man für die Dichte ϱ und die Schallschnelle \mathbf{v} die Definitionen (1.1) in die Kontinuitätsgleichung (1.9) ein, führt das zunächst auf

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \tilde{\rho}) + \operatorname{div}\{[\rho_0 + \tilde{\rho}] \tilde{\mathbf{v}}\} = 0. \quad (1.10)$$

Vernachlässigt man für eine Approximation erster Ordnung den Mischterm $\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}$, erhält man schließlich für die komplexen Amplituden die linearisierte Kontinuitätsgleichung [Pier81, MI86]

$$j\omega \hat{\rho} + \rho_0 \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} = 0. \quad (1.11)$$

1.1.4 Die Navier-Stokes-Gleichung

Die Impulserhaltung in einem viskosen und kompressiblen Fluid mit der örtlich konstanten Viskosität⁵ η und Volumenviskosität⁶ ζ lässt sich durch die heute

⁵Die Viskosität wird auch als Scherviskosität, dynamische Viskosität oder Zähigkeit bezeichnet. Die Viskosität bezeichnen Hydrodynamiker nach dem Vorbild englischer Forscher üblich mit μ , während Physiker dagegen für die Viskosität meist η verwenden [POW84]. Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität η kann für ein ideales Gas dem Anhang A entnommen werden.

⁶Die Volumenviskosität wird auch als zweite Zähigkeit bezeichnet. Im deutschen Sprachgebrauch werden ebenfalls die Bezeichnungen Druckviskosität oder Kompressionsviskosität verwendet [Knes49].

gebräuchliche Form der NAVIER-STOKES-Gleichung

$$\varrho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} + \left[\zeta + \frac{1}{3} \eta \right] \text{grad div } \mathbf{v} \quad (1.12)$$

beschreiben [Pier81, MI86, LL91]. Dabei stellt $\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ die substanzielle Ableitung $D\mathbf{v}/Dt$ dar. Sie gibt die Geschwindigkeitsänderung eines sich im Raum mit der Strömung mitbewegenden Teilchens an und kann demnach als Beschleunigung in einem mitbewegten System interpretiert werden [LL91]. Die Größen auf der rechten Seite von Gleichung (1.12) beschreiben die Druckkräfte und die Reibungskräfte, die auf das betrachtete Volumenelement wirken.

Linearisierung der Navier-Stokes-Gleichung

In Analogie zur Herleitung der linearisierten Kontinuitätsgleichung kann auch eine Linearisierung der NAVIER-STOKES-Gleichung (1.12) erfolgen. Das Einsetzen der Definitionen (1.1) führt zunächst auf

$$[\rho_0 + \tilde{\rho}] \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \right] = -\nabla [P_0 + \tilde{p}] + \eta \Delta \tilde{\mathbf{v}} + \left[\zeta + \frac{1}{3} \eta \right] \text{grad div } \tilde{\mathbf{v}}. \quad (1.13)$$

Für eine Approximation erster Ordnung lassen sich Mischterme und Ausdrücke höherer Ordnung sowie der Term $(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}$ vernachlässigen, so dass sich mit den komplexen Amplituden die linearisierte NAVIER-STOKES-Gleichung zu

$$\begin{aligned} j\omega \rho_0 \hat{\mathbf{v}} &= -\nabla \hat{p} + \eta \Delta \hat{\mathbf{v}} + \left[\zeta + \frac{1}{3} \eta \right] \text{grad div } \hat{\mathbf{v}} \\ &= -\nabla \hat{p} + \left[\zeta + \frac{4}{3} \eta \right] \text{grad div } \hat{\mathbf{v}} - \eta \text{rot rot } \hat{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (1.14)$$

angeben lässt [Pier81, MI86].

1.1.5 Die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitung eines Fluids mit einer örtlich konstanten thermischen Leitfähigkeit⁷ κ kann allgemein mit Hilfe der spezifischen Entropie s zu

$$\varrho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s \right] = D_v(\zeta, \eta, \mathbf{v}) + \kappa \Delta T \quad (1.15)$$

formuliert werden [Pier81, MI86, LL91]. Der Term auf der linken Seite beschreibt die vom Fluid aufgenommene Wärmemenge pro Volumeneinheit. Die

⁷Die Temperaturabhängigkeit der thermischen Leitfähigkeit κ kann für ein ideales Gas dem Anhang A entnommen werden.

nichtlineare Funktion $D_v(\zeta, \eta, \mathbf{v})$ stellt die viskose Verlustrate dar und erfasst die Energie, welche infolge der Viskosität in Wärme umgewandelt wird.⁸ Die durch die Wärmeleitung ins Volumen eingebrachte Wärme berücksichtigt der Ausdruck $\kappa\Delta T$ [LL91]. Für die spezifische Entropie⁹ s eines idealen Gases gilt mit der im Gleichgewichtszustand vorhandenen spezifischen Entropie S_0 [SSSM05]

$$s = S_0 + C_v \ln \frac{T}{T_0} - [C_p - C_v] \ln \frac{\varrho}{\rho_0}. \quad (1.16)$$

Die Größen C_p und C_v sind die spezifische Wärmekapazität oder spezifische Wärme bei konstantem Druck beziehungsweise Volumen.¹⁰

Die Kontinuitätsgleichung, die NAVIER-STOKES-Gleichung sowie die Wärmeleitungsgleichung werden auch als NAVIER-STOKES-FOURIER-Modell für ein kompressibles Fluid bezeichnet.

Linearisierung der Wärmeleitungsgleichung

Zur Linearisierung lässt sich zunächst die zeitliche Änderung der Entropiegleichung (1.16) zu

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{C_v}{T_0 + \tilde{T}} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{[C_p - C_v]}{\rho_0 + \tilde{\rho}} \frac{\partial \varrho}{\partial t} \quad (1.17)$$

angeben. Mit $T_0 \gg |\tilde{T}|$ und $\rho_0 \gg |\tilde{\rho}|$ folgt $T_0 + \tilde{T} \approx T_0$ sowie $\rho_0 + \tilde{\rho} \approx \rho_0$, so dass man obige Gleichung zunächst durch

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{C_v}{T_0} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{[C_p - C_v]}{\rho_0} \frac{\partial \varrho}{\partial t} \quad (1.18)$$

approximieren kann.

Für eine Approximation erster Ordnung sind der Ausdruck $(\mathbf{v} \cdot \nabla) s$ und die nichtlineare Funktion $D_v(\zeta, \eta, \mathbf{v})$ in Gleichung (1.15) zu vernachlässigen. Das dortige Einsetzen der Gleichung (1.18) führt mit den Definitionen (1.1) und der Vernachlässigung von Mischtermen sowie von Ausdrücken höherer Ordnung bezüglich der komplexen Amplituden auf die linearisierte Wärmeleitungsgleichung

$$\mathbf{j}\omega [\rho_0 C_v \hat{T} - T_0 [C_p - C_v] \hat{\rho}] = \kappa \Delta \hat{T}, \quad (1.19)$$

⁸Eine detaillierte Angabe der Funktion ist etwa in [Pier81, MI86, LL91] zu finden, wobei für die weitere Herleitung aus Gründen der Übersichtlichkeit die Zusammenfassung der viskosen Verluste durch die Funktion $D_v(\zeta, \eta, \mathbf{v})$ ausreicht.

⁹Die Entropie stellt eine thermodynamische Zustandsgröße dar. An der Entropieänderung $\Delta s = s - S_0$ eines adiabatischen Systems ist erkennbar, ob der Prozess reversibel ($\Delta s = 0$), irreversibel ($\Delta s > 0$) oder unmöglich ($\Delta s < 0$) ist [MS89]. Alle Prozesse bei denen Reibung auftritt, sind irreversibel. Bei einer adiabatischen Zustandsänderung wird keine Wärmeenergie zu- oder abgeführt [SSSM05].

¹⁰Die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität C_p bei konstantem Druck kann für ein ideales Gas dem Anhang A entnommen werden.

die auch als KIRCHHOFF-FOURIER-Gleichung bezeichnet wird. Den Begriff der Entropie benutzten weder KIRCHHOFF noch FOURIER. Den linken Term in der Gleichung (1.15) beschrieb FOURIER durch den Ausdruck $\rho C_p \partial T / \partial t$. Unter Vernachlässigung von $D_v(\zeta, \eta, \nu)$ lässt sich damit die Wärmeleitungsgleichung beziehungsweise Diffusionsgleichung zu $\rho C_p \partial T / \partial t = \kappa \Delta T$ angeben [Four55]. Die Herleitung von KIRCHHOFF entspricht dagegen der linearisierten Wärmeleitungsgleichung (1.19) [Kirc68].

1.1.6 Lösung der Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen

In diesem Abschnitt wird die KIRCHHOFF-Lösung des partiellen Differenzialgleichungssystems zur Beschreibung der Schallausbreitung in einer Röhre mit kreisrundem Querschnitt für ein ideales Gas mit der Viskosität η und der thermischen Leitfähigkeit κ vorgestellt. Die folgenden Ausführungen stützen sich im Wesentlichen auf die Herleitungen in [Kirc68, West53, Ray168, Stin91]. Dabei erfolgt zunächst auch eine Berücksichtigung der Volumenviskosität ζ .

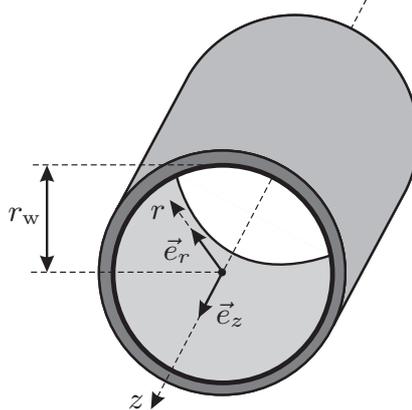


Abbildung 1.1: Die Schallausbreitung innerhalb der Röhre mit dem Radius r_w findet in \vec{e}_z -Richtung in einem Fluid mit der Viskosität η sowie der Wärmeleitfähigkeit κ statt. Die radiale Richtung ist durch \vec{e}_r vorgegeben.

Die Röhre, in der eine Schallausbreitung in \vec{e}_z -Richtung stattfindet, besitzt nach Abbildung 1.1 den Radius r_w . Der Schallschnellenvektor setzt sich aus den Komponenten

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{v}_r \vec{e}_r + \hat{v}_z \vec{e}_z \quad (1.20)$$

zusammen. Das Einsetzen der Zustandsgleichung (1.8) eines idealen Gases und der nach $\hat{\rho}$ umgeformten Kontinuitätsgleichung (1.11) in die NAVIER-STOKES-Gleichung (1.14) führt mit der kinematischen Viskosität $\nu = \eta / \rho_0$ auf

$$j\omega \hat{\mathbf{v}} = -\frac{P_0}{\rho_0 T_0} \nabla \hat{T} + \left[\frac{P_0}{j\omega \rho_0} + \left[\frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\eta} \right] \nu \right] \text{grad div } \hat{\mathbf{v}} - \nu \text{rot rot } \hat{\mathbf{v}}. \quad (1.21)$$

Setzt man die nach $\hat{\rho}$ umgeformte Kontinuitätsgleichung (1.11) in die Wärmeleitungsgleichung (1.19) ein, ergibt sich darüber hinaus mit

$$\nu' = \frac{\kappa}{\rho_0 C_v} \quad (1.22)$$

die Gleichung

$$j\omega\hat{T} + T_0 \left[\frac{C_p}{C_v} - 1 \right] \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} = \nu' \Delta \hat{T}. \quad (1.23)$$

Mit dem Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten $C_{pv} = C_p/C_v$ und der adiabatischen Schallgeschwindigkeit¹¹ $c = \sqrt{C_{pv}P_0/\rho_0}$ lässt sich das Differenzialgleichungssystem zu

$$j\omega\hat{\mathbf{v}} = -\frac{c^2}{T_0 C_{pv}} \nabla \hat{T} + \left[\frac{c^2}{j\omega C_{pv}} + \left[\frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\eta} \right] \nu \right] \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{v}}, \quad (1.24a)$$

$$\nu' \Delta \hat{T} = j\omega\hat{T} + T_0 [C_{pv} - 1] \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} \quad (1.24b)$$

formulieren.¹² Die Lösung des Differenzialgleichungssystems lautet für eine mit dem Ausbreitungsmaß¹³ γ fortschreitende Welle

$$\hat{v}_z = \left[A Q - \gamma A_1 Q_1 \left[\frac{j\omega}{\lambda_1} - \nu' \right] - \gamma A_2 Q_2 \left[\frac{j\omega}{\lambda_2} - \nu' \right] \right] e^{\gamma z}, \quad (1.25a)$$

$$\hat{v}_r = \left[-\frac{\gamma A}{\frac{j\omega}{\nu} - \gamma^2} \frac{dQ}{dr} - A_1 \left[\frac{j\omega}{\lambda_1} - \nu' \right] \frac{dQ_1}{dr} - A_2 \left[\frac{j\omega}{\lambda_2} - \nu' \right] \frac{dQ_2}{dr} \right] e^{\gamma z}, \quad (1.25b)$$

$$\hat{T} = [C_{pv} - 1] T_0 [A_1 Q_1 + A_2 Q_2] e^{\gamma z}. \quad (1.25c)$$

Für die Funktionen Q , Q_1 und Q_2 gilt

$$Q = J_0(r\sqrt{\gamma^2 - j\omega/\nu}), \quad (1.26a)$$

$$Q_1 = J_0(r\sqrt{\gamma^2 - \lambda_1}), \quad (1.26b)$$

$$Q_2 = J_0(r\sqrt{\gamma^2 - \lambda_2}). \quad (1.26c)$$

Bei $J_0(\cdot)$ handelt es sich um die BESSEL-Funktion erster Art mit der Ordnung null, während sich λ_1 und λ_2 aus der Nullstellengleichung

$$\lambda^2 \left[\frac{\nu' c^2}{j\omega C_{pv}} + \left[\frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\eta} \right] \nu \nu' \right] - \lambda \left[c^2 + j\omega \left[\left[\frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\eta} \right] \nu + \nu' \right] \right] - \omega^2 = 0 \quad (1.27)$$

¹¹Die Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit c kann für ein ideales Gas dem Anhang A entnommen werden.

¹²Das Differenzialgleichungssystem (1.24) ist für ein ideales Gas allgemein gültig und nicht an die Querschnittsflächenform des Wellenleiters gebunden.

¹³Die Bezeichnungen Ausbreitungskoeffizient oder Ausbreitungskonstante sind ebenfalls gebräuchlich.

mit der Zuordnung $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ ergeben. Die Lösung (1.25) enthält mit den Konstanten A , A_1 und A_2 sowie dem Ausbreitungsmaß γ zunächst vier unbekannte Größen, die aus den Randbedingungen zu ermitteln sind.

Die Lösung (1.25) führt zu einem mit der linearisierten Kontinuitätsgleichung (1.11) auf die Dichte

$$\hat{\rho} = -\rho_0 \left[A_1 Q_1 \left[\frac{\nu' \lambda_1}{j\omega} - 1 \right] + A_2 Q_2 \left[\frac{\nu' \lambda_2}{j\omega} - 1 \right] \right] e^{\gamma z} \quad (1.28)$$

und zum anderen mit der Zustandsgleichung (1.8) auf den Schalldruck

$$\hat{p} = -P_0 \left[A_1 Q_1 \left[\frac{\nu' \lambda_1}{j\omega} - C_{pv} \right] + A_2 Q_2 \left[\frac{\nu' \lambda_2}{j\omega} - C_{pv} \right] \right] e^{\gamma z}. \quad (1.29)$$

Relaxation und Volumenviskosität

In mehratomigen Gasen treten neben den durch Viskosität und Wärmeleitung bedingten klassischen Dämpfungsmechanismen weitere molekulare Effekte in Erscheinung, die eine zusätzliche Dämpfung der Schallwelle verursachen. Nach der kinetischen Gastheorie setzt sich die Gesamtenergie eines Gases aus den Einzelenergien der im betrachteten Volumen vorhandenen Gasmoleküle zusammen. Ein Gasmolekül kann sich als Ganzes bewegen oder um seinen Schwerpunkt rotieren, während zusätzlich die einzelnen Atome Schwingungen gegeneinander ausführen können. Im Gleichgewichtszustand ist die gesamte durch Translation, Rotation und Schwingungen präsenzte Bewegungsenergie eines Moleküls entsprechend auf die einzelnen Freiheitsgrade verteilt.

Führt man einem Gas plötzlich durch Kompression Energie zu, wird sie zunächst als Translationsenergie aufgenommen und durch Zusammenstöße der Moleküle verzögert auf die anderen Freiheitsgrade verteilt, bis sich ein neuer Gleichgewichtszustand eingestellt hat. Bei schnellen periodischen Zustandsänderungen ist aufgrund des verzögerten Energietransfers keine vollständige Umverteilung möglich. Die nicht transferierte Energie bedingt eine innere Wärmeleitung, die wie die klassische Wärmeleitung zu Verlusten bei der Schallausbreitung führt. Dieser Vorgang wird als thermische Relaxation bezeichnet und ist durch die Relaxationszeit charakterisiert [CM75, Pier81, Kutt04].

Die Relaxationsdämpfung hängt unter anderem von der Temperatur sowie der Gasart und der Zusammensetzung des Gases ab, so dass vor allem bei Gasgemischen, wie beispielsweise Luft, komplizierte Abhängigkeiten vorliegen. Die einzelnen Bestandteile beeinflussen sich gegenseitig. Bereits geringe Veränderungen in der Zusammensetzung, wie etwa des Feuchtigkeitsgehalts, können daher die Relaxationsdämpfung deutlich beeinflussen [Pier81, GA99].

Der Einfluss der Relaxation kann in der KIRCHHOFF-Lösung durch eine komplexe frequenzabhängige spezifische Wärmekapazität C_p berücksichtigt werden [SLW65]. Der Relaxationsprozess lässt sich in der NAVIER-STOKES-Gleichung jedoch auch durch die Volumenviskosität ζ berücksichtigen [Tisz42].

Diese kann als Maß für den Widerstand interpretieren werden, den ein Gas Kompressions- oder Expansionskräften entgegensetzt. Je größer die Relaxationszeit, desto größer ist die Volumenviskosität [Wald58]. Nach der Hypothese von STOKES wird die Volumenviskosität in der NAVIER-STOKES-Gleichung häufig auch für mehratomige Gase vereinfachend zu null gesetzt [GA99].

Die Beschreibung der Relaxationsprozesse durch die Volumenviskosität erscheint nur für die Schallfrequenzen geeignet, die sehr viel kleiner als die einzelnen reziproken Relaxationszeiten des Gases sind [CM75]. Bei mehratomigen Gasen ist die Schwingungsenergie gegenüber den Energien der übrigen Freiheitsgrade wesentlich kleiner. Folglich wird zum Erreichen des Gleichgewichtszustands eine größere Anzahl von Stößen benötigt. Deshalb weist der Schwingungsfreiheitsgrad im Vergleich zu den anderen Freiheitsgraden eine größere Relaxationszeit auf [Tisz42]. Dagegen sind für Frequenzen $f < 1$ MHz Relaxationsprozesse bei den Translations- und Rotationsfreiheitsgraden eher zu vernachlässigen. Im hörbaren Frequenzbereich können jedoch bereits größere Dämpfungen durch Relaxation der Schwingungsfreiheitsgrade verzeichnet werden [MI86].

Mit zunehmendem Röhrenradius reduziert sich der Einfluss der klassischen Dämpfungsmechanismen. Diese sind durch die Röhrenwände und der deswegen entstehenden akustischen Grenzschicht bedingt und lassen sich durch die Viskosität und Wärmeleitung im Medium begründen. Eigene Untersuchungen basierend auf den in [BSZ⁺95] angegebenen Gleichungen zur Berechnung der Relaxationsdämpfung in Luft zeigten, dass unter dem Atmosphärendruck von $P_0 = 101325$ Pa die Relaxationsdämpfung bei einer Temperatur von $T_0 = 293,15$ K sowie einer relativen Luftfeuchtigkeit von 20% für

$$fr_w \leq 100 \text{ m/s} \quad (1.30)$$

gegenüber der klassischen Dämpfung in einer Röhre im Mittel mehr als zehnmal kleiner ausfällt, wobei sich für Temperaturen $T_0 > 293,15$ K das Verhältnis erwartungsgemäß weiter vergrößert.¹⁴ Daher erscheint es unter der obigen Prämisse gerechtfertigt, den Einfluss von Relaxationsprozessen zu vernachlässigen, weil die klassischen Dämpfungsmechanismen in einer Röhre den größeren Einfluss ausüben. Für die Volumenviskosität kann $\zeta = 0$ angesetzt werden und eine Modifikation der KIRCHHOFF-Lösung entfällt.¹⁵

In Abbildung 1.2 sind abschließend die Dämpfungsverläufe exemplarisch dargestellt, wobei der Röhrenradius zu $r_w = 100$ mm gewählt worden ist. Für $f < 1$ kHz kann der Einfluss der Relaxation gegenüber den klassischen Dämpfungsmechanismen bei der Schallausbreitung in einer Röhre als gering

¹⁴Für die in dieser Arbeit zu untersuchenden Röhrensysteme ist Gleichung (1.30) erfüllt.

¹⁵Die Volumenviskosität wird nur in der Nullstellengleichung (1.27) der KIRCHHOFF-Lösung benötigt. Werden die Nullstellen dieser Gleichung durch Näherungen beschrieben, wie das bei den noch vorzustellenden vereinfachten Modellen der Fall sein wird, ist eine explizite Kenntnis nicht erforderlich. Ansonsten lässt sich nach [Gree59] für Luft die Volumenviskosität $\zeta = 0,6\eta$ verwenden.

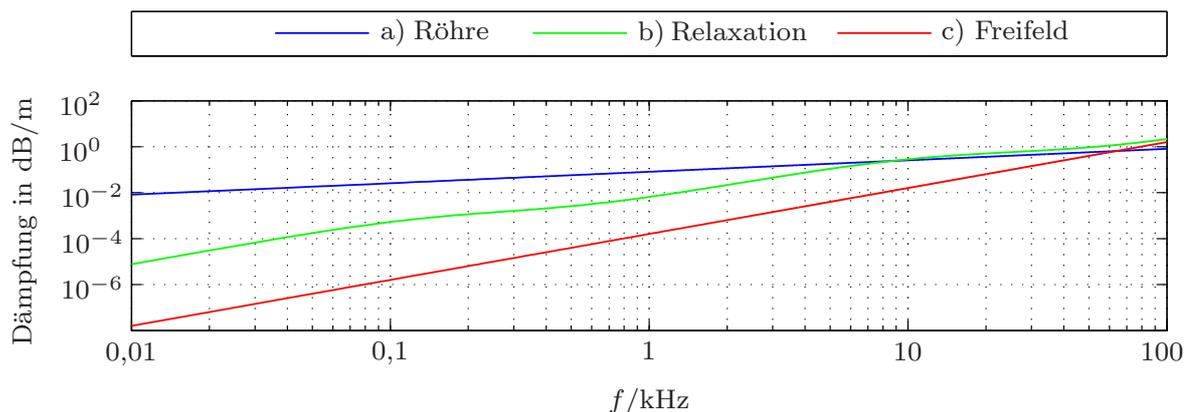


Abbildung 1.2: a) Klassische Dämpfung in einer Röhre mit dem Radius $r_w = 100$ mm nach [Stin91], b) Relaxationsdämpfung für Luft bei einer relativen Luftfeuchtigkeit von 20% nach [BSZ⁺95] und c) klassische Dämpfung im Freifeld nach [Pier81] jeweils für $T_0 = 293,15$ K und $P_0 = 101325$ Pa

bewertet werden. Das entspricht für den gewählten Röhrenradius gemäß der Abschätzung (1.30) einer oberen Frequenzgrenze von $f = 1$ kHz. Für $f > 10$ kHz wird die Relaxationsdämpfung sogar größer als die klassisch bedingte Dämpfung in der Röhre, so dass die Relaxation für eine genaue Berechnung nicht vernachlässigt werden sollte. Im Freifeld ist dagegen die klassische Dämpfung für die betrachteten Frequenzen durchgehend kleiner als die Relaxationsdämpfung.

1.2 Isotherme und ideal schallharte Wände

KIRCHHOFF setzte nach seiner Hypothese die Randbedingungen

$$\{\hat{v}_r, \hat{v}_z, \hat{T}\}|_{r_w, z_0} = 0 \quad (1.31)$$

an. Die Randbedingungen $\{\hat{v}_r, \hat{T}\}|_{r_w, z_0} = 0$ für ideal schallharte sowie isotherme Wände werden in den Abschnitten zur Berücksichtigung von nicht-ideal schallharten oder nicht-isothermen Wänden modifiziert, während die Bedingung $\hat{v}_z|_{r_w, z_0} = 0$ in dieser Arbeit aufrecht erhalten bleibt. Das erscheint gerechtfertigt, da der Effekt des Gleitens der Gasmoleküle entlang der Röhrenwände vernachlässigbar ist [West53].

Eine direkte Konsequenz der Randbedingung $\hat{T}|_{r_w, z_0} = 0$ ist, dass für die Wärmeleitfähigkeit der Röhrenwände $\kappa_w \rightarrow \infty$ gelten muss. Zur Berechnung der Schallfeldgrößen lassen sich für die obigen Randbedingungen die Konstanten in der KIRCHHOFF-Lösung (1.25) zu

$$A = j\omega\gamma A_1 \frac{Q_{1w}}{Q_w} \left[\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right] \quad \text{und} \quad A_2 = -A_1 \frac{Q_{1w}}{Q_{2w}} \quad (1.32)$$

berechnen. Die Konstante A_1 kann bei Bedarf aus einer zusätzlichen Randbedingung ermittelt werden. Die explizite Bestimmung der Konstanten A_1 ist für diese Arbeit jedoch nicht erforderlich. Zudem lässt sich mit

$$B = \frac{d \ln Q_w}{dr_w} = -\frac{1}{Q_w} \sqrt{\gamma^2 - j\omega/\nu} J_1(r_w \sqrt{\gamma^2 - j\omega/\nu}), \quad (1.33a)$$

$$B_1 = \frac{d \ln Q_{1w}}{dr_w} = -\frac{1}{Q_{1w}} \sqrt{\gamma^2 - \lambda_1} J_1(r_w \sqrt{\gamma^2 - \lambda_1}), \quad (1.33b)$$

$$B_2 = \frac{d \ln Q_{2w}}{dr_w} = -\frac{1}{Q_{2w}} \sqrt{\gamma^2 - \lambda_2} J_1(r_w \sqrt{\gamma^2 - \lambda_2}) \quad (1.33c)$$

die Bestimmungsgleichung für das Ausbreitungsmaß zu

$$\frac{j\omega\gamma^2}{\frac{j\omega}{\nu} - \gamma^2} \left[\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right] B - \left[\frac{j\omega}{\lambda_1} - \nu' \right] B_1 + \left[\frac{j\omega}{\lambda_2} - \nu' \right] B_2 = 0 \quad (1.34)$$

angeben. Die Größen Q_w , Q_{1w} und Q_{2w} bezeichnen die bei $r = r_w$ ausgewerteten Funktionen aus den Gleichungen (1.26). Die Bestimmung von γ basiert demnach auf einer numerischen Lösung von Gleichung (1.34).

Wie anhand der Gleichungen (1.27) und (1.34) ersichtlich ist, liegt der Berechnung des Ausbreitungsmaßes auf der Grundlage der *exakten* KIRCHHOFF-Lösung ein großer Aufwand zu Grunde.¹⁶ Für die meisten Anwendungen ist dieser Aufwand zu groß. Setzt man jedoch ein Gas wie Luft als Fluid voraus, lassen sich Näherungen für das Ausbreitungsmaß herleiten. Im Folgenden werden einige der etablierten Näherungen bezüglich der Randbedingungen (1.31) vorgestellt, die auf einer Approximation der KIRCHHOFF-Lösung basieren. Weitere mathematische Modelle zur Beschreibung einer dissipativen Schallausbreitung in Röhren finden sich dagegen in [ZK49, West53, Flan72, Mais94, Terh98].

1.2.1 Vereinfachtes Modell nach Kirchhoff

Das von KIRCHHOFF vorgeschlagene vereinfachte Modell besitzt für akustische Grenzschichten Gültigkeit, die klein gegenüber dem Röhrenradius sind. Die Dicken der viskosen und thermischen Grenzschicht lassen sich durch

$$d_{\text{visko}} = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho_0}} \quad \text{und} \quad d_{\text{therm}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega\rho_0 C_p}} \quad (1.35)$$

abschätzen [Pier81, MI86]. Da beide für Luft ungefähr in den gleichen Größenordnungen liegen, sind durch unterschiedliche Dicken hervorgerufene Effekte zu vernachlässigen. Für die in dieser Arbeit zu betrachtenden Röhrenradien

¹⁶Der Begriff *exakt* bezieht sich in diesem Zusammenhang auf die Lösung des Differentialgleichungssystems (1.24). Das Differentialgleichungssystem stellt dagegen eine Approximation, wie bereits erwähnt, erster Ordnung dar.

und Frequenzen erscheint die Annahme von dünnen Grenzschichten erlaubt. Vereinfachte Modelle, die auch die Berücksichtigung von großen Grenzschichtdicken ermöglichen, die sich beispielsweise bei niedrigen Frequenzen oder in sehr dünnen Röhren ausbilden, finden sich etwa in [ZK49, Rayl68, Tijd75].

Der von KIRCHHOFF verwendete Ansatz zur Vereinfachung des Ausbreitungsmaßes beruht auf einer Approximation der BESSEL-Funktionen in den Größen Q_w , Q_{1w} und Q_{2w} . Mit den Näherungen

$$\lambda_1 \approx -\omega^2/c^2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 \approx j\omega C_{pv}/\nu' \quad (1.36)$$

folgt für die Argumente der BESSEL-Funktionen zum einen

$$|\gamma^2 - \lambda_1| \ll 1 \quad (1.37)$$

und zum anderen mit $|\gamma^2| \ll |\lambda_2|$ ebenfalls

$$\gamma^2 - \lambda_2 \approx -\lambda_2. \quad (1.38)$$

Setzt man zusätzlich $|\gamma^2| \ll |j\omega/\nu|$ voraus, führt dies auf

$$\gamma^2 - j\omega/\nu \approx -j\omega/\nu. \quad (1.39)$$

Da bei kleinen Grenzschichtdicken respektive großen Röhrenradien oder hohen Frequenzen für die Argumente

$$|r_w \sqrt{-j\omega/\nu}| \gg 1 \quad \text{und} \quad |r_w \sqrt{-\lambda_2}| \gg 1 \quad (1.40)$$

angenommen werden kann, lassen sich die BESSEL-Funktionen in Q_w und Q_{2w} mit Hilfe der asymptotischen Approximation $J_0(jx) \approx e^x/\sqrt{2\pi x}$ vereinfachen. Dagegen kann Q_{1w} mit

$$|r_w \sqrt{\gamma^2 - \lambda_1}| \ll 1 \quad (1.41)$$

durch die abgebrochene Reihe $J_0(x) \approx 1 - x^2/4$ approximiert werden [AS72].

Für die logarithmischen Ableitungen der vereinfachten BESSEL-Funktionen erhält man mit den eingeführten Näherungen insgesamt die Approximationen

$$B \approx \sqrt{\frac{j\omega}{\nu}} \quad \text{und} \quad B_1 \approx -\frac{r_w}{2} [\gamma^2 - \lambda_1] \quad \text{sowie} \quad B_2 \approx \sqrt{\lambda_2}. \quad (1.42)$$

KIRCHHOFF traf zusätzlich die Annahmen

$$|1/\lambda_1| \gg |1/\lambda_2| \quad \text{und} \quad |j\omega/\lambda_1| \gg \nu', \quad (1.43)$$

die unter Verwendung von $\gamma^2 \approx -\omega^2/c^2$ im linken Term von Gleichung (1.34) mit den eingeführten Näherungen auf die Bestimmungsgleichung

$$\nu \frac{\omega^2}{c^2 \lambda_1} \sqrt{\frac{j\omega}{\nu}} + \frac{j\omega}{\lambda_1} \frac{r_w}{2} [\gamma^2 - \lambda_1] + \left[\frac{j\omega}{\lambda_2} - \nu' \right] \sqrt{\lambda_2} = 0 \quad (1.44)$$

bezüglich γ führen. Das vereinfachte Ausbreitungsmaß kann mit der Kreiswellenzahl¹⁷ $\beta_0 = \omega/c$ zu

$$\gamma_{\text{Ki}} = j\beta_0 \sqrt{1 + \frac{2}{r_w \sqrt{j\omega}} \left[\sqrt{\nu} + [C_{\text{pv}} - 1] \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0 C_p}} \right]} \quad (1.45)$$

formuliert werden. Mit $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ für $|x| < 1$ gab KIRCHHOFF zusätzlich die Vereinfachung

$$\gamma_{\text{Ki}} = j\beta_0 \left[1 + \frac{1}{r_w \sqrt{j\omega}} \left[\sqrt{\nu} + [C_{\text{pv}} - 1] \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0 C_p}} \right] \right] \quad (1.46)$$

an. Mit $\sqrt{2/j} = 1 - j$ ist für eine Interpretation der obigen Gleichung eine Zerlegung gemäß

$$\gamma_{\text{Ki}} = \alpha_{\text{Ki}} + j\beta_{\text{Ki}} \quad (1.47)$$

möglich. Das Dämpfungsmaß α_{Ki} ergibt sich zu

$$\alpha_{\text{Ki}} = \frac{\beta_0}{r_w \sqrt{2\omega}} \left[\sqrt{\nu} + [C_{\text{pv}} - 1] \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0 C_p}} \right], \quad (1.48)$$

während sich das Phasenmaß β zu

$$\beta_{\text{Ki}} = \beta_0 \left[1 + \frac{1}{r_w \sqrt{2\omega}} \left[\sqrt{\nu} + [C_{\text{pv}} - 1] \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0 C_p}} \right] \right] \quad (1.49)$$

definieren lässt.^{18,19}

Mit der Näherung $1/[1+x] \approx 1-x$ für $|x| \ll 1$ lässt sich die Phasengeschwindigkeit $c_p = \omega/\beta_{\text{Ki}}$ zu

$$c_p = c \left[1 - \frac{1}{r_w \sqrt{2\omega}} \left[\sqrt{\nu} + [C_{\text{pv}} - 1] \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0 C_p}} \right] \right] \quad (1.50)$$

angeben. Die Phasengeschwindigkeit c_p kann als die Geschwindigkeit interpretiert werden, mit der sich eine sinusförmige Schallwelle fortpflanzt. Da c_p von der Frequenz abhängt, liegt ein dispersives Medium vor. Bei der Schallausbreitung in einer Röhre mit einem dissipativen Fluid ist c_p kleiner als im Freifeld.

¹⁷Die Kreiswellenzahl wird auch als Wellenzahl bezeichnet.

¹⁸Die Größen α und β werden auch als Dämpfungskonstante und Phasenkonstante bezeichnet, obwohl sie nicht konstant, sondern Funktionen von ω sind. Ebenfalls gebräuchliche Bezeichnungen sind Dämpfungskoeffizient und Phasenkoeffizient.

¹⁹Die Berechnung des Dämpfungsmaßes mit dem Konzept der Grenzschichtadmittanz von CREMER führt ebenfalls zum Ergebnis in Gleichung (1.48) [Crem48].

1.2.2 Vereinfachtes Modell nach Munjal

Zur Herleitung eines Ausbreitungsmaßes zur Charakterisierung der Schallausbreitung in einem viskosen Fluid verfolgte MUNJAL einen anderen Ansatz als KIRCHHOFF [Munj87]. Seine Näherung basierte auf der Kontinuitätsgleichung und der NAVIER-STOKES-Gleichung sowie auf thermodynamischen Betrachtungen, die eine konstante Entropie voraussetzten. Das Ausbreitungsmaß wurde mit dem Dämpfungsmaß

$$\alpha_{\text{Mu}} = \frac{1}{r_w c} \sqrt{\frac{\omega \tilde{\eta}}{2\rho_0}} \quad (1.51)$$

zu

$$\gamma_{\text{Mu}} = j\beta_0 \left[1 + \frac{\alpha_{\text{Mu}}}{\beta_0} [1 - j] \right] \quad (1.52)$$

formuliert. Die Viskosität ohne eine Wärmeleitung im Fluid wird durch $\tilde{\eta}$ erfasst. Die Gleichungen (1.51) und (1.52) führen zunächst unter Verwendung der komplexen Umformung $1 - j = \sqrt{2}/j$ auf

$$\gamma_{\text{Mu}} = j\beta_0 \left[1 + \frac{1}{r_w \sqrt{j\omega}} \sqrt{\frac{\tilde{\eta}}{\rho_0}} \right]. \quad (1.53)$$

Die Berücksichtigung der Wärmeleitung innerhalb des Fluids wird schließlich durch eine Modifikation von $\tilde{\eta}$ ermöglicht. Um für $\tilde{\eta}$ den modifizierte Ausdruck zu bestimmen, griff MUNJAL auf das Ausbreitungsmaß von KIRCHHOFF zurück. Durch einen Vergleich der Gleichungen (1.46) und (1.53) lässt sich schließlich der Koeffizient $\tilde{\eta}$ zur gleichzeitigen Berücksichtigung einer Wärmeleitung zu

$$\tilde{\eta} = \eta \left[1 + [C_{\text{pv}} - 1] \sqrt{\frac{\kappa}{\eta C_p}} \right]^2 \quad (1.54)$$

bestimmen, wobei dieser Ausdruck ebenfalls in [Rsch63] zu finden ist.²⁰ Anhand von Gleichung (1.54) ist ersichtlich, dass sich der Koeffizient $\tilde{\eta}$ infolge einer Wärmeleitung im Fluid erhöht. Ohne Wärmeleitung gilt in einem viskosen Medium dagegen $\tilde{\eta} = \eta$.

1.2.3 Vereinfachtes Modell nach Stinson

Auf der Grundlage der KIRCHHOFF-Lösung betrachtete STINSON Röhrenradien sowie Frequenzen, für die mit Luft als Fluid die Näherungen (1.36) gültig sind und weiterhin

$$|\gamma^2| \ll |j\omega/\nu| \quad \text{und} \quad |1/\lambda_1| \gg |1/\lambda_2| \quad \text{sowie} \quad |j\omega/\lambda_1| \gg \nu' \quad (1.55)$$

²⁰Der Ausdruck in Gleichung (1.54) wurde gegenüber [Munj87] bezüglich C_p korrigiert.

vorausgesetzt werden kann.²¹ Mit diesen Annahmen reduziert sich die Bestimmungsgleichung (1.34) für das Ausbreitungsmaß auf

$$-\nu\gamma^2 \frac{1}{\lambda_1} B - \frac{j\omega}{\lambda_1} B_1 + \left[\frac{j\omega}{\lambda_2} - \nu' \right] B_2 = 0. \quad (1.56)$$

Gegenüber dem Ansatz von KIRCHHOFF wurden von STINSON die BESSEL-Funktionen nicht asymptotisch angenähert und dann die logarithmischen Ableitungen bestimmt, sondern die Argumente der BESSEL-Funktionen mit den bereits vorgestellten Näherungen approximiert. Lediglich für B_1 kam die Näherung aus Gleichung (1.42) zum Einsatz. Die Approximationen lassen sich mit

$$r_v = r_w \sqrt{\omega/\nu} \quad \text{und} \quad r_t = r_w \sqrt{\omega C_{pv}/\nu'} \quad (1.57)$$

zu

$$B \approx -\frac{r_v \sqrt{-j}}{r_w} \frac{J_1(r_v \sqrt{-j})}{J_0(r_v \sqrt{-j})}, \quad (1.58a)$$

$$B_1 \approx -\frac{r_w}{2} [\gamma^2 - \lambda_1], \quad (1.58b)$$

$$B_2 \approx -\frac{r_t \sqrt{-j}}{r_w} \frac{J_1(r_t \sqrt{-j})}{J_0(r_t \sqrt{-j})} \quad (1.58c)$$

angeben. Durch das Einsetzen der obigen Ausdrücke in Gleichung (1.56) und durch Umformung nach γ kann für das Ausbreitungsmaß nach STINSON schließlich mit

$$C_{St} = \left[1 - \frac{2}{r_v \sqrt{-j}} \frac{J_1(r_v \sqrt{-j})}{J_0(r_v \sqrt{-j})} \right]^{-1}, \quad (1.59a)$$

$$D_{St} = 1 + [C_{pv} - 1] \frac{2}{r_t \sqrt{-j}} \frac{J_1(r_t \sqrt{-j})}{J_0(r_t \sqrt{-j})} \quad (1.59b)$$

der Ausdruck

$$\gamma_{St} = j\beta_0 \sqrt{C_{St} D_{St}} \quad (1.60)$$

angeben werden.²²

Für die Schalldruckgleichung (1.29) erhält man mit den Näherungen (1.36) und den Abschätzungen $Q_1 \approx 1$ sowie $|j\omega\nu'/c^2| \ll C_{pv}$ den vereinfachten Ausdruck

$$\hat{p} \approx A_1 P_0 C_{pv} e^{\gamma_{St} z}, \quad (1.61)$$

für den keine Abhängigkeit von r vorliegt. Die Größe A_1 lässt sich beispielsweise aus der Randbedingung $\hat{p}|_{z_0} = \hat{p}_0 e^{\gamma_{St} z_0}$ bestimmen.

²¹STINSON betrachtete mit $r_w > 10^{-2}$ mm den Bereich $r_w f^{3/2} < 10^7$ mm s^{-3/2} [Stin91].

²²Obwohl bereits etwa in [Iber50, Bena68] die Ausdrücke in Gleichung (1.59) zu finden sind, wird im Weiteren diese Approximation als Modell von STINSON referenziert.

Vereinfachung für kleine Grenzschichtdicken

Für kleine Grenzschichtdicken gilt $r_v \gg 1$ sowie $r_t \gg 1$ und die BESSEL-Funktionen können asymptotisch approximiert werden. Das führt auf [AS72]

$$\frac{J_1(jx)}{J_0(jx)} = j \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \approx j. \quad (1.62)$$

1.2.4 Vereinfachtes Modell nach Keefe

Von KEEFE wurden Approximationen für die Größen C_{St} und D_{St} angegeben, die für kleine Argumente der BESSEL-Funktionen auf einer abgebrochenen Potenzreihenentwicklung und für große Argumente auf einer asymptotischen Entwicklung der BESSEL-Funktionen basieren [Keef84]. Für kleine Grenzschichtdicken ergibt sich das vereinfachte Ausbreitungsmaß nach KEEFE gemäß

$$\gamma_{Ke} = j\beta_0 \sqrt{C_{Ke} D_{Ke}} \quad (1.63)$$

auf der Grundlage einer asymptotischen Entwicklung aus

$$C_{Ke} = C_1 + C_2 \quad \text{und} \quad D_{Ke} = D_1 + D_2 \quad (1.64)$$

mit

$$C_1 = -j\sqrt{2} \left[r_v^{-1} + \frac{3}{\sqrt{2}} r_v^{-2} + \frac{15}{8} r_v^{-3} \right], \quad (1.65a)$$

$$C_2 = 1 + \sqrt{2} r_v^{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} r_v^{-3}, \quad (1.65b)$$

$$D_1 = -j\sqrt{2} [C_{pv} - 1] \left[r_t^{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} r_t^{-2} - \frac{1}{8} r_t^{-3} \right], \quad (1.65c)$$

$$D_2 = 1 + \sqrt{2} [C_{pv} - 1] \left[r_t^{-1} + \frac{1}{8} r_t^{-3} \right]. \quad (1.65d)$$

Diese Approximation wurde in [Sche04] mit dem Resultat einer Störungsrechnung in Form einer Mehrskalentwicklung in Kombination mit einer angepassten asymptotischen Entwicklung bestätigt [CDF⁺92].

1.3 Isotherme und nicht-ideal schallharte Wände

Bei der Interpretation des menschlichen Gehörgangs oder Vokaltrakts als Röhrensystem mit abschnittsweise konstanter Querschnittsfläche liegen keine ideal schallharten Wände vor [Flan72, HE98b]. Die Modellierung von nicht-ideal schallharten Wänden besitzt somit eine große praktische Relevanz. In [Flan72] erfolgte daher mit Hilfe von vereinfachten Differenzialgleichungen unter Beachtung eines wärmeleitenden Mediums und für isotherme Wände zunächst

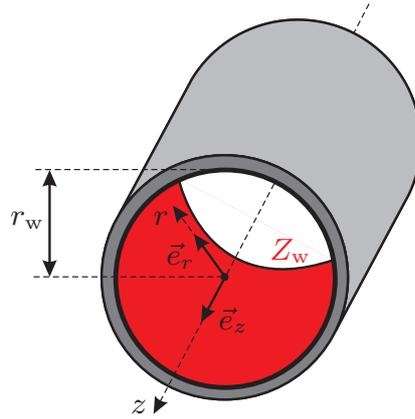


Abbildung 1.3: Röhre mit der Wandimpedanz Z_w bei $r = r_w$. Die Schallausbreitung findet in \vec{e}_z -Richtung in einem Gas mit der Viskosität η sowie der Wärmeleitfähigkeit κ statt. Die radiale Richtung ist durch \vec{e}_r vorgegeben.

die Beschreibung einer viskosen Schallausbreitung. Zur Berücksichtigung von nicht-ideal schallharten Wänden wurde eine Modifikation des dort erarbeiteten Leitungsmodells der akustischen Röhre angegeben, jedoch diese Modifikation nicht mathematisch begründet.

Bei nicht-ideal schallharten Innenwänden verschwindet die radiale Vektor-Komponente \hat{v}_r der Schallschnelle bei $r = r_w$ nicht. Das soll gemäß Abbildung 1.3 im Weiteren durch einen örtlich bei $r = r_w$ angeordneten Impedanzbelag Z_w der Dicke $d_{Z_w} \rightarrow 0$ berücksichtigt werden.²³ Die radiale Komponente ist über die Wandimpedanz

$$Z_w = \left. \frac{\hat{p}}{\hat{v}_r} \right|_{r_w, z_0} \quad (1.66)$$

mit dem Schalldruck an der Innenwand verknüpft. Setzt man weiterhin isotherme Wände voraus, gelten die Randbedingungen

$$\hat{v}_r \Big|_{r_w, z_0} = \frac{\hat{p}}{Z_w} \Big|_{r_w, z_0} \quad \text{und} \quad \{ \hat{v}_z, \hat{T} \} \Big|_{r_w, z_0} = 0. \quad (1.67)$$

Zur Vereinfachung bietet sich die Verwendung der bei $z = z_0$ ausgewerteten Schalldruckgleichung $\hat{p} \approx A_1 P_0 C_{pv} e^{\gamma z_0}$ an. Die Randbedingung für die radiale Schallschnelle \hat{v}_r führt mit den Konstanten A und A_2 aus den Gleichungen (1.32) auf die implizite Gleichung

$$A_1 Q_{1w} \left[\frac{j\omega\gamma^2}{\frac{j\omega}{\nu} - \gamma^2} \left[\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right] B - \left[\frac{j\omega}{\lambda_1} - \nu' \right] B_1 + \left[\frac{j\omega}{\lambda_2} - \nu' \right] B_2 \right] = \frac{\hat{p}}{Z_w} \quad (1.68)$$

²³Bei ideal schallharten Wänden gilt $Z_w \rightarrow \infty$, während dagegen für ideal schallweiche Wände $Z_w = 0$ angenommen werden kann.

zur Bestimmung des Ausbreitungsmaßes. Der obige Ausdruck lässt sich in Analogie zur Herleitung von STINSON mit den Näherungen (1.55) und (1.58) vereinfachen. Das Ausbreitungsmaß kann schließlich mit

$$D_w = D_{St} + \frac{2P_0 C_{pV}}{j\omega r_w Z_w} \quad (1.69)$$

und den Größen $C_w = C_{St}$ und D_{St} aus den Gleichungen (1.59) zu

$$\gamma_w = j\beta_0 \sqrt{C_w D_w} \quad (1.70)$$

formuliert werden.

	Z_F in Ns/m^3
Aluminium ^a	$17 \cdot 10^6$
Edelstahl ^a	$44 \cdot 10^6$
Gummi ^a	$2,8 \cdot 10^6$
Kupfer ^a	$42 \cdot 10^6$
Messing ^b	$35 \cdot 10^6$
PVC ^c	$2,4 \cdot 10^6$
Luft ^a bei 20°C	413

Tabelle 1.1: Übersicht der Schallkennimpedanzen für Longitudinalwellen von ausgewählten Materialien im Vergleich zu Luft aus ^a[FKS84], ^b[Pier81] und ^c[Stöc98]

Die Modellvorstellung einer örtlich konzentrierten Wandimpedanz setzt die Bedingung $|Z_w| \gg Z_{F,L} = \rho_0 c$ voraus, damit dem Schallfeld nur geringe Energie durch Z_w entzogen wird und folglich der Großteil des Energietransports weiterhin im Bereich $r < r_w$ erfolgt [Male69]. Bei der Definition von Z_w gemäß Gleichung (1.66) handelt es sich um eine Schallkennimpedanz.²⁴ In Tabelle 1.1 sind einige Materialien und Luft bezüglich ihrer Schallkennimpedanz charakterisiert.

Gehörgang als nicht-ideal schallharte Röhre

Von HUDDE ET AL. wurde das Dämpfungsmaß des menschlichen Gehörgangs aus den messtechnisch ermittelten Eingangsimpedanzen geschätzt [HE98b]. Es zeigte sich, dass die Dämpfung durchschnittlich ungefähr dreimal so groß ist, wie die Dämpfung in einer akustischen Röhre aus Messing.

²⁴Die Schallkennimpedanz wird auch als Schallfeldimpedanz, akustische Feldimpedanz oder spezifische Schallimpedanz bezeichnet. Wände mit großer Schallkennimpedanz Z_F , wie beispielsweise Stahl, werden als schallhart bezeichnet, während Wände mit niedriger Schallkennimpedanz, wie etwa biologisches Gewebe, als schallweich anzusehen sind.

Das den Gehörgang auskleidende Gewebe ist als nicht-ideal schallhart sowie nicht-ideal glatt anzusehen und begründet damit hauptsächlich die höheren Verluste. Zur Modellierung dieses Sachverhalts kann zum einen beispielsweise das Ausbreitungsmaß nach Gleichung (1.60) gemäß

$$\gamma_{\text{Hu}} = 3\text{Re}\{\gamma_{\text{St}}\} + j\text{Im}\{\gamma_{\text{St}}\} \quad (1.71)$$

an die dreimal höheren Verluste angepasst werden. Zum anderen bietet sich das Konzept einer Wandimpedanz Z_w an, bei der die nicht in γ_{St} berücksichtigten Verluste durch Z_w erfasst werden können. Der Wert von Z_w lässt sich aus einer Minimierung des Fehlerquadrats

$$e = \sum_{k=1}^L |\gamma_{\text{Hu}}(f_k) - \gamma_w(f_k)|^2 \quad (1.72)$$

für Frequenzen $f_1 \leq f_k \leq f_L$ bestimmen [PTVF07]. Unter Vorgabe einer frequenzunabhängigen und reellen Wandimpedanz führt das Optimierungsverfahren für den hörbaren Frequenzbereich, dem mittleren Gehörgangsradius von $r_w = 37$ mm aus [SL89] sowie einer Körpertemperatur von $T_0 = 310,15$ K bei $P_0 = 101325$ Pa auf einen Wert von

$$Z_{w,1} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Ns/m}^3. \quad (1.73)$$

Setzt man dagegen eine Frequenzabhängigkeit der Form $Z_w = \bar{Z}_w / \sqrt{\omega}$ voraus, liefert die Optimierung

$$Z_{w,2} = \frac{1,7 \cdot 10^7}{\sqrt{\omega}} \frac{1}{\sqrt{s}} \text{ Ns/m}^3. \quad (1.74)$$

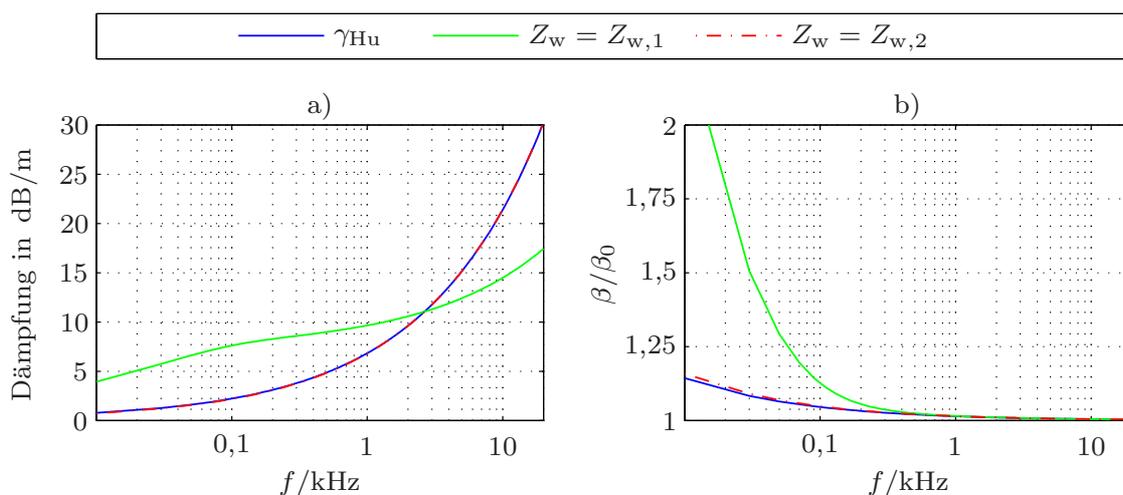


Abbildung 1.4: a) Mittlere Dämpfung im menschlichen Gehörgang und b) normiertes Phasenmaß jeweils approximiert nach Gleichung (1.71) sowie unter Verwendung der Wandimpedanz Z_w bei $r = r_w$ nach Gleichung (1.70)

In Abbildung 1.4 sind die Ergebnisse der Optimierung vergleichend zum Ausbreitungsmaß aus Gleichung (1.71) dargestellt. Die Annahme einer frequenzabhängigen Wandimpedanz erscheint für den Gehörgang durchaus gerechtfertigt und das in Abschnitt 1.3 vorgestellte Konzept darüber hinaus geeignet, Röhren mit nicht-ideal schallharten Wänden zu modellieren.

1.4 Nicht-isotherme und ideal schallharte Wände

	ρ_w in kg/m ³	C_w in Ws/[kgK]	κ_w in W/[mK]
Aluminium ^a	2707	897	237
Edelstahl ^b	7600 ... 7900	460	15
Gummi ^b	1000 ... 1300	1100 ... 2000	0,14 ... 0,16
Kupfer ^b	8900	385	390
Messing ^a	8522	385	113
PVC ^a	1380	900	0,16

Tabelle 1.2: Übersicht exemplarisch ausgewählter Wandmaterialien bezüglich ihrer Eigenschaften bei Raumtemperatur aus ^a[Stöc98] und ^b[Pier81]

Isotherme Randbedingungen setzen voraus, dass wegen $\hat{T}|_{r_w, z_0} = 0$ keine Erwärmung der Wände erfolgt und dass $\kappa_w \rightarrow \infty$ gelten muss. In der Praxis ist die Wärmeleitfähigkeit der Wände endlich. Erhöht sich die Temperatur des Fluids, erwärmen sich auch die Wände. Das kann durch nicht-isotherme Randbedingungen berücksichtigt werden. Die Wärmeverluste sind für nicht-isotherme Wände geringer, da der Temperaturgradient im Wandbereich gegenüber isothermen Betrachtungen kleiner ausfällt. In der Tabelle 1.2 sind einige Wandmaterialien bezüglich ihrer thermischen Eigenschaften dargestellt.

Auf der Grundlage der klassischen KIRCHHOFF-Lösung wurde in [Mawa54] mit $T = T_0 + \tilde{T}_1 + \bar{T}_2$ eine Approximation zweiter Ordnung für die Wärmeleitungsgleichung angesetzt. Die Größe \bar{T}_2 erlaubt die Berücksichtigung von Effekten, die durch eine Approximation erster Ordnung nicht erfasst werden. Dagegen erfolgte in [AV89] die Berechnung des Schallfelds in einem zweidimensionalen Wellenleiter durch Superposition der Wirbel- und Entropiemoden sowie der akustischen Moden. Durch Einbettung einer Impedanz wurde die endliche Wärmeleitfähigkeit der Berandung berücksichtigt. In Abhängigkeit von einem Parameter kann die Impedanz den Bereich von einer unendlichen Wärmeleitung bis zu einer vollständigen Wärmeisolation modellieren.

Im Folgenden soll die KIRCHHOFF-Lösung für die Modellierung von nicht-isothermen Wänden modifiziert werden. Betrachtet wird dazu die kreisrunde Röhre mit der Wanddicke d in Abbildung 1.5. Für den Bereich $r \leq r_w$ lässt sich die Wärmeleitung durch Gleichung (1.19) beschreiben, während für die

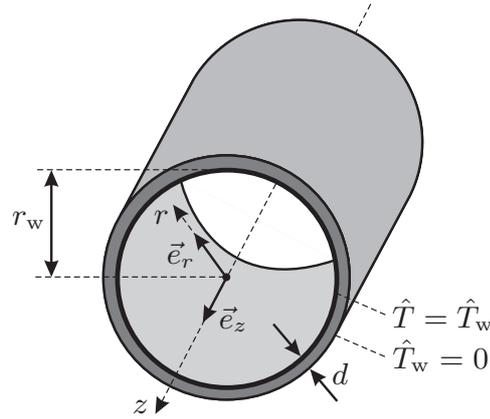


Abbildung 1.5: Röhre mit der Wanddicke d und unterschiedlichen Temperaturen an der Innen- und Außenwand. Die Wände weisen die Leitfähigkeit κ_w auf. Die Schallausbreitung findet in \vec{e}_z -Richtung in einem Gas mit der Viskosität η sowie der Wärmeleitfähigkeit κ statt. Die radiale Richtung ist durch \vec{e}_r vorgegeben.

Wände mit $r_w \leq r \leq r_w + d$ die Wärmeleitungsgleichung

$$j\omega\rho_w C_w \hat{T}_w = \kappa_w \Delta \hat{T}_w \quad (1.75)$$

gültig ist. Die Lösung der obigen Gleichung lautet

$$\hat{T}_w = [A_3 J_0(r\sqrt{-j\omega\rho_w C_w/\kappa_w}) + A_4 Y_0(r\sqrt{-j\omega\rho_w C_w/\kappa_w})] e^{\gamma z}. \quad (1.76)$$

Bei $Y_0(\cdot)$ handelt es sich um die BESSEL-Funktion zweiter Art mit der Ordnung null. Die beiden Wärmeleitungsgleichungen sind bei $r = r_w$ über die Randbedingungen

$$\hat{T} \Big|_{r_w, z_0} = \hat{T}_w \Big|_{r_w, z_0} \quad \text{und} \quad \kappa \frac{d\hat{T}}{dr} \Big|_{r_w, z_0} = \kappa_w \frac{d\hat{T}_w}{dr} \Big|_{r_w, z_0} \quad (1.77)$$

miteinander verknüpft, wobei letztere die Stetigkeit der Wärmestromdichten voraussetzt. Zusätzlich sollen die Randbedingungen

$$\hat{T}_w \Big|_{r_w+d, z_0} = 0 \quad \text{und} \quad \hat{v}_z \Big|_{r_w, z_0} = 0 \quad (1.78)$$

gelten. Auf der Grundlage der vier Randbedingungen können die Konstanten in der KIRCHHOFF-Lösung (1.25) sowie der Lösung (1.76) zur Beschreibung der Wärmeleitung in den Wänden mit

$$A_{2,1} = Q_{4w} \frac{dQ_{5w}}{dr_w} - Q_{6w} \frac{dQ_{3w}}{dr_w}, \quad (1.79a)$$

$$A_{2,2} = Q_{3w} Q_{6w} - Q_{4w} Q_{5w} \quad (1.79b)$$

zu

$$A = A_1 \gamma \left[\frac{j\omega}{\lambda_1} - \nu' \right] \frac{Q_{1w}}{Q_w} + A_2 \gamma \left[\frac{j\omega}{\lambda_2} - \nu' \right] \frac{Q_{2w}}{Q_w}, \quad (1.80a)$$

$$A_2 = -A_1 \frac{\kappa_w A_{2,1} Q_{1w} + \kappa A_{2,2} \frac{dQ_{1w}}{dr_w}}{\kappa_w A_{2,1} Q_{2w} + \kappa A_{2,2} \frac{dQ_{2w}}{dr_w}}, \quad (1.80b)$$

$$A_3 = -A_4 \frac{Q_{6w}}{Q_{4w}}, \quad (1.80c)$$

$$A_4 = -T_0 [C_{pv} - 1] \frac{A_1 Q_{1w} Q_{4w} + A_2 Q_{2w} Q_{4w}}{A_{2,2}} \quad (1.80d)$$

bestimmt werden. Weiterhin ergeben sich mit

$$x_1 = r_w \sqrt{-j\omega \rho_w C_w / \kappa_w} \quad \text{und} \quad x_2 = [r_w + d] \sqrt{-j\omega \rho_w C_w / \kappa_w} \quad (1.81)$$

die bisher nicht erwähnten Funktionen zu

$$Q_{3w} = J_0(x_1), \quad (1.82a)$$

$$Q_{4w} = J_0(x_2), \quad (1.82b)$$

$$Q_{5w} = Y_0(x_1), \quad (1.82c)$$

$$Q_{6w} = Y_0(x_2). \quad (1.82d)$$

Vereinfachung der Konstanten

Die Argumente der BESSEL-Funktionen in den Gleichungen (1.82) sowie in den Ableitungen

$$\frac{dQ_{3w}}{dr_w} = -\frac{x_1}{r_w} J_1(x_1) \quad \text{und} \quad \frac{dQ_{5w}}{dr_w} = -\frac{x_1}{r_w} Y_1(x_1) \quad (1.83)$$

nehmen für die in dieser Arbeit relevanten Wandmaterialien und Röhrenradien betragsmäßig große Werte an, so dass diese auch durch die asymptotischen Approximationen

$$J_m(x_i) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x_i}} \cos \left(x_i - \frac{\pi}{4} [2m + 1] \right), \quad (1.84a)$$

$$Y_m(x_i) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x_i}} \sin \left(x_i - \frac{\pi}{4} [2m + 1] \right) \quad (1.84b)$$

repräsentiert werden können [AS72]. Die Verwendung der asymptotischen Approximationen zur Vereinfachung der Gleichungen (1.79) führt nach algebraischen Umformungen zunächst auf die Konstante

$$A_2 \approx -A_1 \frac{\kappa_w \frac{x_1}{r_w} \left[e^{j2x_1 d/r_w} + 1 \right] Q_{1w} + j\kappa \left[e^{j2x_1 d/r_w} - 1 \right] \frac{dQ_{1w}}{dr_w}}{\kappa_w \frac{x_1}{r_w} \left[e^{j2x_1 d/r_w} + 1 \right] Q_{2w} + j\kappa \left[e^{j2x_1 d/r_w} - 1 \right] \frac{dQ_{2w}}{dr_w}}. \quad (1.85)$$

Durch eine Aufteilung der Form $e^{j2x_1 d/r_w} = e^{-a+ja}$ mit $a > 0$ wird ersichtlich, dass sich für die zu betrachtenden Frequenzen und Wanddicken sowie für die Wandmaterialien aus Tabelle 1.2 die Abschätzung $|e^{j2x_1 d/r_w}| \ll 1$ anbietet. Mit $|\gamma^2 - \lambda_1| \ll 1$ gilt zudem

$$\left| \kappa_w \frac{x_1}{r_w} Q_{1w} \right| \gg \left| \kappa \frac{dQ_{1w}}{dr_w} \right| \quad (1.86)$$

und A_2 kann schließlich durch

$$A_2 \approx -A_1 \frac{\kappa_w \frac{x_1}{r_w} Q_{1w}}{\kappa_w \frac{x_1}{r_w} Q_{2w} - j\kappa \frac{dQ_{2w}}{dr_w}} \quad (1.87)$$

approximiert werden. Für die Herleitung des Ausbreitungsmaßes ist die Gleichung (1.25b) bezüglich der Randbedingung

$$\hat{v}_r \Big|_{r_w, z_0} = 0 \quad (1.88)$$

auszuwerten. In diese Bestimmungsgleichung für das Ausbreitungsmaß sind die Größen A und A_2 aus den Gleichungen (1.80a) und (1.87) einzusetzen. Mit Hilfe der Näherungen aus dem Abschnitt 1.2.3 sowie unter Verwendung von

$$Q_{1w} \approx 1 \quad \text{und} \quad \frac{dQ_{1w}}{dr_w} \approx -\frac{r_w}{2} [\gamma^2 - \lambda_1] \quad (1.89)$$

ist die Bestimmungsgleichung zu vereinfachen. Die Vereinfachungen führen mit den Größen

$$C_{1n} = \left[1 - j \sqrt{\frac{\rho_0 C_p \kappa}{\rho_w C_w \kappa_w}} \frac{J_1(r_t \sqrt{-j})}{J_0(r_t \sqrt{-j})} \right]^{-1}, \quad (1.90a)$$

$$C_{2n} = 1 + C_{1n} \frac{\omega^2}{c^2} [C_{pv} - 1] \left[\frac{r_w}{r_t \sqrt{-j}} \right]^2, \quad (1.90b)$$

$$C_n = \left[1 - \frac{2}{r_v \sqrt{-j}} \frac{J_1(r_v \sqrt{-j})}{J_0(r_v \sqrt{-j})} C_{2n} \right]^{-1}, \quad (1.90c)$$

$$D_n = 1 + C_{1n} [C_{pv} - 1] \frac{2}{r_t \sqrt{-j}} \frac{J_1(r_t \sqrt{-j})}{J_0(r_t \sqrt{-j})} \quad (1.90d)$$

letztendlich zum Ausbreitungsmaß

$$\gamma_n = j\beta_0 \sqrt{C_n D_n}. \quad (1.91)$$

1.4.1 Vereinfachtes Modell nach Franken et al.

Die Herleitung von FRANKEN ET AL. stützt sich ebenfalls wie die Lösung von KIRCHHOFF auf das linearisierte NAVIER-STOKES-FOURIER-Modell [FCCW81]. Jedoch wurde von ihnen ein Röhrenelement der Länge dz betrachtet, so dass die Differenzialgleichungen bezüglich des LAPLACE-Operators deutlich vereinfacht werden können.

Auf der Grundlage des im vorherigen Abschnitt erarbeiteten Modells lässt sich mit $C_{2n} \approx 1$ und der daraus resultierenden Abschätzung $C_n \approx C_{St}$ in Kombination mit D_n aus Gleichung (1.90d) das auf der Approximation von FRANKEN ET AL. basierende Ausbreitungsmaß zu

$$\gamma_{Fr} = j\beta_0 \sqrt{C_{St} D_n} \quad (1.92)$$

angeben. Damit können unterschiedliche Lösungsansätze formal zu identischen Resultaten führen.

1.4.2 Vereinfachtes Modell nach Keefe

Ein vereinfachter Ausdruck für die Größe D_n aus Gleichung (1.90d) wurde von KEEFE angegeben [Keef84]. Seine Herleitung basiert auf der Tatsache, dass für die meisten Gase sowie unter anderem für die Wandmaterialien in Tabelle 1.2 die Beziehung

$$\epsilon_w = \sqrt{\frac{\rho_0 C_p \kappa}{\rho_w C_w \kappa_w}} \ll 1 \quad (1.93)$$

gültig ist. Eine Potenzreihenentwicklung in ϵ_w sowie eine asymptotische Entwicklung der BESSEL-Funktionen für $r_t \gg 1$ führen schließlich mit

$$C_{pv,n} - 1 = \frac{C_{pv} - 1}{\epsilon_w + 1} \quad (1.94)$$

auf den Ausdruck

$$D_{Ke,n} = 1 + [C_{pv,n} - 1] \frac{2}{r_t \sqrt{-j}} \frac{J_1(r_t \sqrt{-j})}{J_0(r_t \sqrt{-j})}. \quad (1.95)$$

Zur Berücksichtigung von nicht-isothermen Wänden ist die Größe C_{pv} also nur durch die modifizierte Konstante $C_{pv,n}$ zu ersetzen. Das Ausbreitungsmaß lässt sich damit zu

$$\gamma_{Fr} = j\beta_0 \sqrt{C_{St} D_{Ke,n}} \quad (1.96)$$

formulieren.

1.5 Bewertung der Approximationen

In den vorherigen Abschnitten wurden zahlreiche Modelle für die Approximation des Ausbreitungsmaßes unter Berücksichtigung von verschiedenen Randbedingungen vorgestellt. Wie genau diese Modelle im Vergleich zur *exakten* KIRCHHOFF-Lösung arbeiten, wird im Folgenden untersucht.

Neben den Eigenschaften des Mediums hängt das Ausbreitungsmaß von der Frequenz und dem Röhrenradius ab. Daher erscheint es für eine allgemeine Betrachtung wünschenswert, beide Parameter durch Einführung eines neuen Parameters $\tilde{r}_w = r_w \sqrt{\omega}$ zusammenzufassen und das Ausbreitungsmaß in Abhängigkeit von \tilde{r}_w zu formulieren. Das ist für den Großteil der vorgestellten Modelle möglich, während dies bei der KIRCHHOFF-Lösung mit der Einführung eines zusätzlichen Parameters verbunden ist [Tijd75].

Damit entzieht sich die KIRCHHOFF-Lösung einer anschaulichen Beschreibung auf der Grundlage eines einzigen Parameters und ein direkter Vergleich mit den erarbeiteten Approximationen ist auf diese Weise nicht ohne Weiteres möglich. Die Untersuchungen erfolgten daher für ausgewählte Röhrenradien in Abhängigkeit von der Frequenz, die sich gemäß Gleichung (1.4) bis zur Grenzfrequenz des ersten Azimutalmodus erstreckt.

1.5.1 Vorbetrachtungen und Fehlermaße

Zur numerischen Bestimmung des implizit in der KIRCHHOFF-Lösung enthaltenen Ausbreitungsmaßes kam ein GAUSS-NEWTON-Verfahren zum Einsatz, bei dem die partiellen Ableitungen durch Differenzenquotienten approximiert worden sind [SK06]. Die bereits in [Tijd75] verwendeten Startwerte $\gamma_0 = j\beta_0$ erwiesen sich ebenfalls für die Nullstellenbestimmung als geeignet.

Die Untersuchungen erfolgten für die exemplarisch ausgewählten Röhrenradien $r_{w,i} = \{2, 4, 30, 100\}$ mm mit $P_0 = 101325$ Pa und $T_0 = 293,15$ K, wobei die daraus resultierenden Gaseigenschaften dem Anhang A entnommen werden können. Die relativen Betragsfehler der Dämpfungs- und Phasenmaße berechnen sich für die einzelnen Röhrenradien $r_{w,i}$ zu

$$e_{\alpha,i} = \left| \frac{\operatorname{Re}\{\gamma_{\text{ref},i}\} - \operatorname{Re}\{\gamma_{\text{app},i}\}}{\operatorname{Re}\{\gamma_{\text{ref},i}\}} \right|, \quad (1.97a)$$

$$e_{\beta,i} = \left| \frac{\operatorname{Im}\{\gamma_{\text{ref},i}\} - \operatorname{Im}\{\gamma_{\text{app},i}\}}{\operatorname{Im}\{\gamma_{\text{ref},i}\}} \right|. \quad (1.97b)$$

Die Fehlermaße sind mit $f_{1,i} \leq f_{k,i} \leq f_{L,i}$ Funktionen von $f_{k,i}$. Die Angabe des Arguments erfolgt im weiteren Verlauf nur dort, wo das notwendig erscheint. Die aus der *exakten* KIRCHHOFF-Lösung numerisch bestimmten Ausbreitungsmaße $\gamma_{\text{ref},i}$ stellen die Referenzlösungen dar, während $\gamma_{\text{app},i}$ die

dazugehörigen Approximationen kennzeichnet. Mit Hilfe der einzelnen relativen Betragsfehler wurden die mittleren relativen Betragsfehler

$$\begin{cases} \bar{e}_\alpha \\ \bar{e}_\beta \end{cases} = \frac{1}{4L} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^L \begin{cases} e_{\alpha,i}(f_{k,i}) \\ e_{\beta,i}(f_{k,i}) \end{cases} \quad (1.98)$$

für das Dämpfungs- und Phasenmaß im Bereich $f_{1,i} \leq f_{k,i} \leq f_{L,i}$ mit $L = 100$ zur Bewertung der Approximationen ermittelt. Zusätzlich zu diesen Fehlermaßen werden im Folgenden die Verläufe des Fehlers $e_{\alpha,i}$ grafisch präsentiert.

1.5.2 Isotherme und ideal schallharte Wände

γ_{app}	Modell	Gleichung	\bar{e}_α in %	\bar{e}_β in %
γ_{Ki}	KIRCHHOFF	(1.45)	1,19	$9,08 \cdot 10^{-4}$
γ_{Mu}	MUNJAL	(1.53)	0,78	$3,08 \cdot 10^{-3}$
γ_{St}	STINSON	(1.60)	0,34	$4,03 \cdot 10^{-6}$
$\tilde{\gamma}_{\text{St}}$	STINSON	(1.60) mit (1.62)	0,39	$9,38 \cdot 10^{-3}$
γ_{Ke}	KEEFE	(1.63)	0,35	$4,61 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 1.3: Mittlere relative Betragsfehler der Approximationen für isotherme und ideal schallharte Wände

Die Abweichungen zwischen den auf der Grundlage von Gleichung (1.27) gemäß Gleichung (1.34) numerisch bestimmten Ausbreitungsmaßen $\gamma_{\text{ref},i}$ und den Approximationen $\gamma_{\text{app},i}$ sind für isotherme und ideal schallharte Wände in Tabelle 1.3 zusammengefasst und in Abbildung 1.6 dargestellt.

Die geringsten Abweichungen gegenüber der Referenzlösung weisen die Approximationen von STINSON und KEEFE auf. Verglichen mit dem Berechnungsaufwand stellen die Approximationen $\tilde{\gamma}_{\text{St}}$ und γ_{Ke} eine gute Alternative zum Ausbreitungsmaß γ_{St} dar. Besonders für tiefe Frequenzen und kleine Radien treten bei den Näherungen von KIRCHHOFF und MUNJAL sowie bei Verwendung von asymptotisch approximierten BESSEL-Funktionen im Ausbreitungsmaß $\tilde{\gamma}_{\text{St}}$ größere Ungenauigkeiten auf. Diese sind größtenteils durch die verwendeten Vereinfachungen bezüglich der in den Gleichungen (1.33) angegebenen Größen B und B_2 begründet. Die Verwendung von asymptotisch angenäherten BESSEL-Funktionen erscheint für kleine Radien und niedrige Frequenzen nicht gerechtfertigt.

Bei allen Modellen ist ab einer bestimmten Frequenz ein kontinuierlicher Anstieg des Fehlers $e_{\alpha,i}$ zu beobachten. Diesbezügliche Untersuchungen zeigten, dass sich dieser Anstieg durch die Approximation $B_1 \approx -r_w[\gamma^2 - \lambda_1]/2$ in Kombination mit der Annahme $\lambda_1 \approx -\omega^2/c^2$ begründen lässt. Mit steigender Frequenz verlieren diese Annahmen zunehmend ihre Berechtigung, wobei

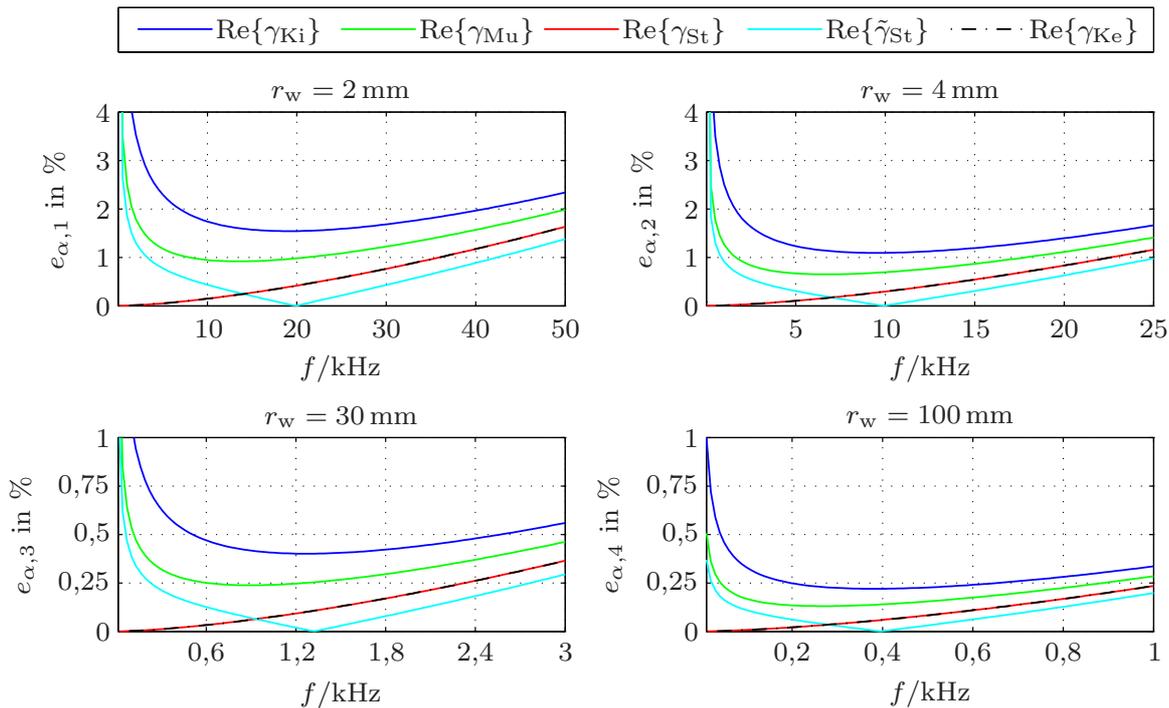


Abbildung 1.6: Relative Betragsfehler der Approximationen für isotherme und ideal schallharte Wände

der Fehleranstieg für die untersuchten Frequenzbereiche als tolerierbar einzustufen ist. Es überrascht, dass die Näherung von MUNJAL gegenüber der von KIRCHHOFF approximierten Lösung zu besseren Resultaten führt, obwohl MUNJAL eine zusätzliche Approximation des Wurzelausdrucks verwendet hat. Zusätzlich sei angemerkt, dass die Fehler \bar{e}_β bezüglich des Phasenmaßes für alle untersuchten Modelle vernachlässigbare Größenordnungen aufweisen.

1.5.3 Isotherme und nicht-ideal schallharte Wände

Die numerische Lösung der Gleichungen (1.27) und (1.68) führte auf die Referenzlösung zur Berechnung des Fehlers. Da sich die Konstante A_2 in der einzusetzenden Schalldruckgleichung (1.29) auch für nicht-ideal schallharte Wände gemäß Gleichung (1.32) berechnet, muss schließlich A_1 für die Bestimmung des Ausbreitungsmaßes nicht ausgewertet werden.

γ_{app}	Gleichung	\bar{e}_α in %	\bar{e}_β in %
γ_w	(1.70)	0,26	$8,31 \cdot 10^{-4}$
$\tilde{\gamma}_w$	(1.70) mit (1.62)	0,22	$2,00 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 1.4: Mittlere relative Betragsfehler der Approximationen für isotherme und nicht-ideal schallharte Wände

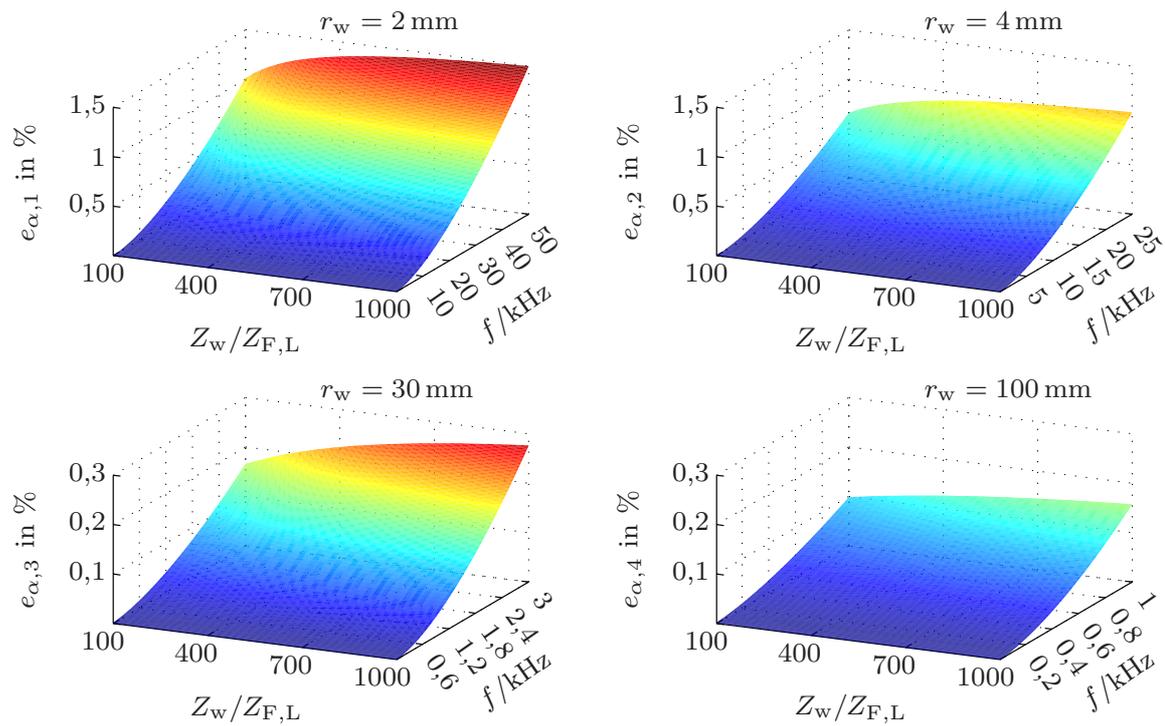


Abbildung 1.7: Relative Betragsfehler der Approximationen für isotherme und nicht-ideal schallharte Wände in Abhängigkeit von Z_w

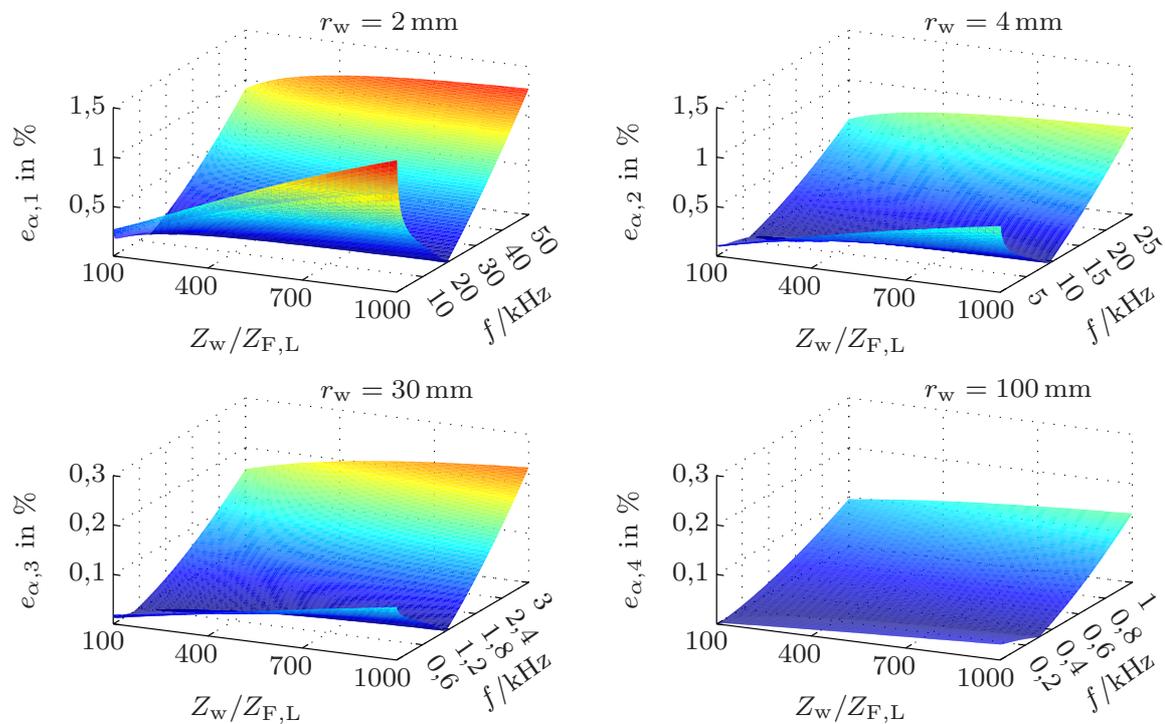


Abbildung 1.8: Relative Betragsfehler der Approximationen für isotherme und nicht-ideal schallharte Wände in Abhängigkeit von Z_w bei Verwendung von asymptotisch approximierten BESSEL-Funktionen

Die Modellierung von nicht-ideal schallharten Wänden erfolgte durch eine reelle Wandimpedanz, die zwischen $100 \leq Z_w/Z_{F,L} \leq 1000$ variieren sollte.²⁵ Die Fehlermaße wurden für Wandimpedanzen $Z_{w,1} \leq Z_{w,n} \leq Z_{w,N}$ sowie für Frequenzen $f_{1,i} \leq f_{k,i} \leq f_{L,i}$ zu

$$\begin{cases} \bar{e}_\alpha \\ \bar{e}_\beta \end{cases} = \frac{1}{4NL} \sum_{i=1}^4 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^L \begin{cases} e_{\alpha,i}(f_{k,i}, Z_{w,n}) \\ e_{\beta,i}(f_{k,i}, Z_{w,n}) \end{cases} \quad (1.99)$$

mit $N = 20$ und $L = 200$ definiert und sind in Tabelle 1.4 zusammengefasst. Die Fehlerverläufe für das Ausbreitungsmaß γ_w können der Abbildung 1.7 entnommen werden, während die Fehlerverläufe für das asymptotisch approximierten Ausbreitungsmaß $\tilde{\gamma}_w$ in Abbildung 1.8 dargestellt sind.

Für steigende Wandimpedanzen nehmen die Fehler $e_{\alpha,i}$ geringfügig zu und konvergieren für $Z_w \rightarrow \infty$ gegen die Betragsfehler für ideal schallharte Wände. Die Genauigkeit der untersuchten Approximationen kann als akzeptabel eingestuft werden. Für zunehmende Frequenzen ist bei γ_w ein stärkeres Ansteigen des Fehlers zu beobachten. Dafür liegen bei $\tilde{\gamma}_w$ im unteren Frequenzbereich größere Ungenauigkeiten vor, da die Annahme von kleinen Grenzschichtdicken dort nicht gerechtfertigt erscheint. Nichtsdestotrotz stellt die asymptotische Näherung durch den reduzierten Berechnungsaufwand insgesamt eine attraktive Methode zur Modellierung von nicht-ideal schallharten Wänden dar.

1.5.4 Nicht-isotherme und ideal schallharte Wände

γ_{app}	Modell	Gleichung	\bar{e}_α in %	\bar{e}_β in %
γ_n	vorgestelltes	(1.91)	0,34	$6,07 \cdot 10^{-6}$
γ_{Fr}	FRANKEN ET AL.	(1.92)	0,34	$7,30 \cdot 10^{-6}$
$\tilde{\gamma}_{\text{Fr}}$	FRANKEN ET AL.	(1.92) mit (1.62)	0,39	$9,35 \cdot 10^{-3}$
γ_{Ke}	KEEFE	(1.96)	0,32	$1,70 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 1.5: Mittlere relative Betragsfehler der Approximationen für nicht-isotherme und ideal schallharte Wände aus PVC

Die Betrachtungen erfolgten exemplarisch für Röhren aus PVC mit einer Wanddicke von $d_i = r_{w,i}/10$. Die Referenzlösung berechnet sich auf der Grundlage von Gleichung (1.27) und der KIRCHHOFF-Lösung (1.25b), wobei dort die Konstanten A und A_2 aus den Gleichungen (1.80) einzusetzen und die Randbedingung $\hat{v}_r|_{r_w, z_0} = 0$ auszuwerten sind. Die mittleren relativen Betragsfehler des Dämpfungs- und Phasenmaßes sind in Tabelle 1.5 angegeben.

Gemäß Abbildung 1.9 verlaufen die relativen Betragsfehler $e_{\alpha,i}$ bezüglich der Approximationen γ_n und γ_{Fr} identisch. Die Näherung $C_n \approx C_{\text{St}}$ hat damit

²⁵Die Schallkennimpedanz von Luft beträgt bei den vorgegebenen Umgebungsbedingungen $Z_{F,L} = 413 \text{ Ns/m}^3$.

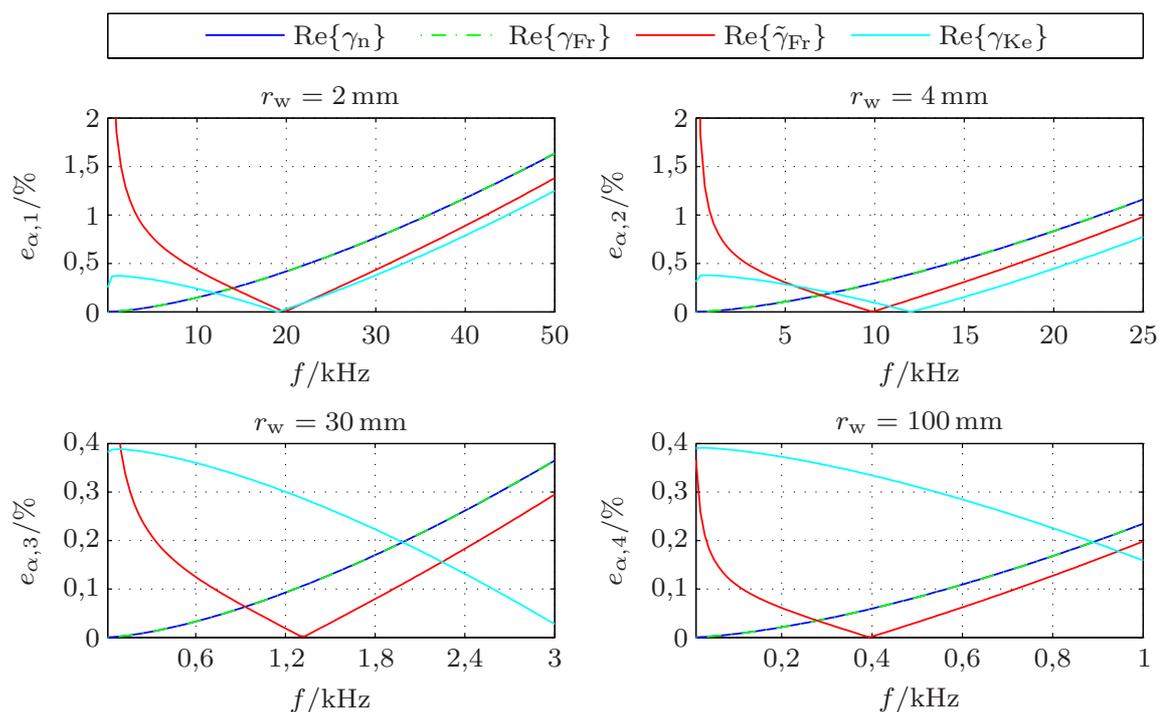


Abbildung 1.9: Relative Betragsfehler der Approximationen für nicht-isotherme und ideal schallharte Wände aus PVC

beim Modell von FRANKEN ET AL. nahezu keinen Einfluss auf die Genauigkeit, so dass γ_{Fr} wegen des geringeren Berechnungsaufwands zu präferieren ist. Die beiden Modelle zeigen das gleiche charakteristische Verhalten wie etwa γ_{St} aus Abschnitt 1.5.2. Mit steigender Frequenz nehmen die Abweichungen dort aus demselben Grund zu, wie zuvor erläutert. Diese sind jedoch insgesamt durchgehend als gering einzustufen.

Bei Verwendung der asymptotisch angenäherten BESSEL-Funktionen in $\tilde{\gamma}_{Fr}$ treten zusätzlich in den unteren Frequenzbereichen größere Ungenauigkeiten auf, da dort die Verwendung einer asymptotischen Darstellung der BESSEL-Funktionen nicht gerechtfertigt ist. Nichtsdestotrotz stellt $\tilde{\gamma}_{Fr}$ wegen des vergleichsweise geringen Berechnungsaufwands eine gute Alternative zu den anderen Modellen dar. Wird eine genaue Modellierung im unteren Frequenzbereich gewünscht, ist hingegen das Modell von FRANKEN ET AL. zu bevorzugen.

Die Erweiterung der Untersuchungen auf die anderen in Tabelle 1.2 aufgeführten Materialien zeigten, dass die Fehlerverläufe $e_{\alpha,i}$ kaum von den Wandeigenschaften beeinflusst werden. Damit erscheint auch die bei der Herleitung von γ_n und γ_{Fr} getroffene Annahme $|e^{j2x_1 d/r_w}| \ll 1$ gerechtfertigt.

Modellierung von Röhrensystemen

Auf der Grundlage der im vorherigen Kapitel präsentierten Approximationen für das Ausbreitungsmaß wird in diesem Kapitel die akustische Modellierung von Röhrensystemen durch Zweitore vorgestellt. Die Modelle sollen eine Berücksichtigung der folgenden Punkte erlauben:

- *veränderliche Querschnittsfläche,*
- *endliche Röhrenlänge mit entsprechendem Abschluss,*
- *Abzweigungen,*
- *nicht-ideale Schallquellen,*
- *strömendes Medium.*

Mit Hilfe der Zweitormodelle können Röhrensysteme bezüglich ihres Übertragungsverhaltens charakterisiert werden. Das Übertragungsverhalten ist beispielsweise in der Klima- oder Abgastechnik zur Auslegung von Schalldämpferelementen von Interesse [Munj87]. Darüber hinaus lassen sich der menschliche Gehörgang sowie Blasmusikinstrumente ebenfalls als Röhrensystem interpretieren. Solche Modelle bieten sich daher auch für die Auslegung von Hörgeräten oder zur Konzeption von Musikinstrumenten an [CKL84, Bern99, HEL99].

In dieser Arbeit sollen Zweitore zur Modellierung eines aktiven Abgaschalldämpfers eingesetzt werden. Dazu sind die benötigten mathematischen Modelle zu erläutern und anhand eines realen physikalischen Röhrensystems zu validieren. Die Betrachtungen setzen zunächst ein ruhendes Medium voraus, während im nächsten Kapitel die Modelle zur Erfassung eines strömenden Mediums erweitert werden.

2.1 Leitungsmodell für einen akustischen Wellenleiter

Ein akustischer Wellenleiter in Form einer Röhre lässt sich in Analogie zu einer elektrischen Leitung mit Hilfe des Ausbreitungsmaßes und der charakteristischen Impedanz modellieren. Betrachtet wird im Folgenden ein Leitungsele-

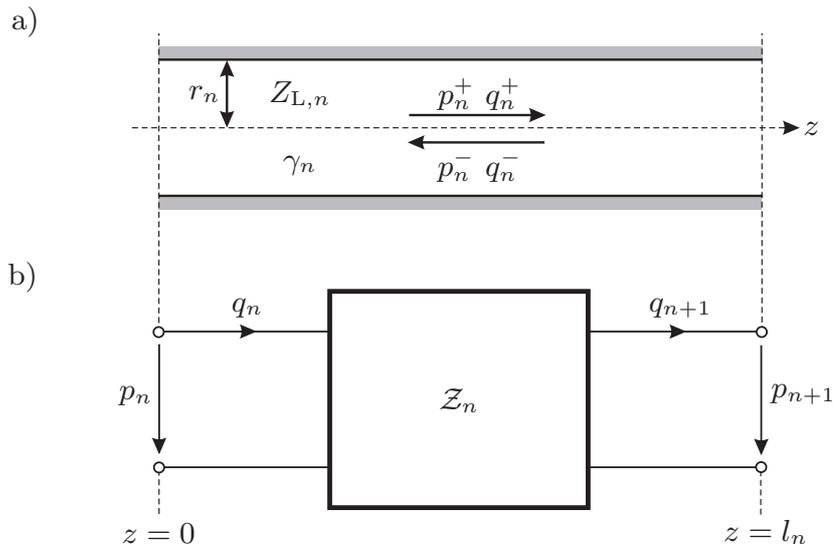


Abbildung 2.1: a) Akustischer Wellenleiter und b) Zweitordarstellung

ment n der Länge l_n mit dem Radius r_n , welches durch das Zweitor in Abbildung 2.1 b) beschrieben werden soll.¹ Die Wellenlängen seien im Vergleich zum Röhrendurchmesser als groß einzustufen, so dass lediglich der Grundmodus vorhanden ist.

Für das Leitungsmodell sind zunächst die Schallfeldgrößen über die kreisrunde Querschnittsfläche an den Toren zu mitteln. Am Tor n gilt somit exemplarisch [Pier81, Stin91]

$$\begin{Bmatrix} \langle \hat{v}_{z,n} \rangle \\ \langle \hat{p}_n \rangle \\ \langle \hat{\rho}_n \rangle \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi r_n^2} \int_0^{r_n} 2\pi r \begin{Bmatrix} \hat{v}_{z,n}(r) \\ \hat{p}_n(r) \\ \hat{\rho}_n(r) \end{Bmatrix} dr. \quad (2.1)$$

Durch die Mittelung entfällt die Ortsabhängigkeit von r und an jedem Tor lässt sich auf diese Weise eine Ebene mit konstanten Schallfeldgrößen definieren. Dies führt auf ein eindimensionales Modell, bei dem nur eine Abhängigkeit von z vorliegt.

Für eine übersichtlichere Darstellung werden die Mittelwertgrößen der komplexen Amplituden an einem Tor n im Folgenden durch

$$v_n = \langle \hat{v}_{z,n} \rangle \quad \text{und} \quad p_n = \langle \hat{p}_n \rangle \quad \text{sowie} \quad \rho_n = \langle \hat{\rho}_n \rangle \quad (2.2)$$

präsentiert. Neben dem Schalldruck p_n soll der Schallfluss q_n , der durch die kreisrunde Querschnittsfläche A_n strömt, gemäß

$$q_n = v_n A_n = v_n \pi r_n^2 \quad (2.3)$$

¹Die Indizes dienen im weiteren Verlauf der Zuordnung zum entsprechenden Tor oder Röhrenelement.

	elektrisch	akustisch
Potenzialgröße	Spannung	Schalldruck
Flussgröße	Strom	Schallfluss

Tabelle 2.1: Zusammenhang zwischen elektrischen und akustischen Leitungsgrößen

als weitere Torgröße zum Einsatz kommen. Die Potenzialgröße p_n ist mit der Flussgröße q_n über die Impedanz

$$Z_n = \frac{p_n}{q_n} \quad (2.4)$$

verknüpft.² Zwischen den elektrischen und akustischen Größen besteht der in Tabelle 2.1 angegebene Zusammenhang.

2.1.1 Charakteristische Impedanz

In Anlehnung an Abbildung 2.1 a) berechnet sich die charakteristische Impedanz³ des Leitungselements aus dem Quotienten

$$Z_{L,n} = \frac{p_n^+}{q_n^+} = \frac{p_n^-}{q_n^-} \quad (2.5)$$

der hin- und rücklaufenden Wellen der Potenzial- und Flussgrößen. Mit der Definition (2.5) kann über das akustische Potenzial [Male69, Skud71]

$$\phi_n(z, t) = \phi_n^+ + \phi_n^- = [C^+ e^{-\gamma_n z} + C^- e^{\gamma_n z}] e^{j\omega t}, \quad (2.6)$$

wobei die Konstanten C^+ und C^- nicht genauer spezifiziert seien, exemplarisch für die hinlaufenden Wellen die charakteristische Impedanz mit

$$p_n^+ e^{j\omega t} = \rho_0 \frac{\partial \phi_n^+}{\partial t} = j\omega \rho_0 C^+ e^{-\gamma_n z} e^{j\omega t}, \quad (2.7a)$$

$$q_n^+ e^{j\omega t} = -A_n \frac{\partial \phi_n^+}{\partial z} = A_n \gamma_n C^+ e^{-\gamma_n z} e^{j\omega t} \quad (2.7b)$$

zu

$$Z_{L,n} = \frac{p_n^+}{q_n^+} = \frac{j\omega \rho_0}{A_n \gamma_n} = Z_{L0,n} \frac{j\beta_0}{\gamma_n} \quad (2.8)$$

bestimmt werden [Hudd88].⁴ Für die charakteristische Impedanz eines verlustfreien Wellenleiters gilt

$$Z_{L0,n} = \frac{\rho_0 c}{\pi r_n^2}. \quad (2.9)$$

²Die Größe Z_n wird auch als akustische Impedanz oder Flussimpedanz bezeichnet.

³Die charakteristische Impedanz wird auch als Wellenimpedanz bezeichnet.

⁴Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde in den Gleichungen (2.6) und (2.7) auf die Angabe des Realteiloperators $\text{Re}\{\cdot\}$ verzichtet.

Häufig findet sich in der Literatur eine Zerlegung des Ausbreitungsmaßes in eine Längsimpedanz Z und eine Queradmittanz Y [Bena68, Flan72, Keef84]. Mit dieser Zerlegung erfolgt die Beschreibung des Wellenleiters durch das klassische Ersatzschaltbild einer Leitung, für das sich die Wellenausbreitung durch die bekannte Telegraphengleichung beschreiben lässt [Hoff97]. Die charakteristische Impedanz ergibt sich dann zwangsläufig aus $Z_{L,n} = \sqrt{Z/Y}$ und weicht damit von Gleichung (2.8) ab. Eine Zerlegung in Z und Y nur mit der Kenntnis des Ausbreitungsmaßes ist nicht eindeutig. Demnach können sich in Abhängigkeit von der gewählten Aufteilung auch unterschiedliche charakteristische Impedanzen ergeben. Daher erscheint es geeigneter, für die Berechnung der charakteristischen Impedanz die Gleichung (2.8) zu Grunde zu legen.

2.1.2 Zweitormodellierung

Das akustische Leitungselement stellt wie ihr elektrisches Äquivalent mit den Eingangsgrößen p_n und q_n bei $z = 0$ sowie den Ausgangsgrößen p_{n+1} und q_{n+1} bei $z = l_n$ gemäß Abbildung 2.1 b) ein Zweitor dar. Die Ausgangsgrößen lassen sich in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen zu

$$p_{n+1} = p_n \cosh(\gamma_n l_n) - q_n Z_{L,n} \sinh(\gamma_n l_n), \quad (2.10a)$$

$$q_{n+1} = q_n \cosh(\gamma_n l_n) - \frac{p_n}{Z_{L,n}} \sinh(\gamma_n l_n) \quad (2.10b)$$

formulieren [Flan72, Terh98]. Für das Zweitor kann mit den Gleichungen (2.10) eine Kettenmatrixdarstellung der Form

$$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} = \mathbf{K}_n \begin{bmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

mit der Kettenmatrix

$$\mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_n l_n) & Z_{L,n} \sinh(\gamma_n l_n) \\ \frac{1}{Z_{L,n}} \sinh(\gamma_n l_n) & \cosh(\gamma_n l_n) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

angeben werden. Ebenso lässt sich die Impedanzmatrix

$$\mathbf{Z}_n = Z_{L,n} \begin{bmatrix} \coth(\gamma_n l_n) & \frac{1}{\sinh(\gamma_n l_n)} \\ \frac{1}{\sinh(\gamma_n l_n)} & \coth(\gamma_n l_n) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

für ein Röhrenelement definieren, wobei mit der in Abbildung 2.1 b) eingeführten Zählpfeilrichtung für die Kettenmatrixdarstellung der Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} p_n \\ p_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_n \begin{bmatrix} q_n \\ -q_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

gilt. Da die Bedingung $\mathbf{Z}_n^T = \mathbf{Z}_n$ beziehungsweise $\det\{\mathbf{K}_n\} = 1$ erfüllt ist, handelt es sich bei dem akustischen Leitungselement um ein übertragungssymmetrisches und damit reziprokes Zweitor.

2.2 Modellierung einer veränderlichen Querschnittsfläche

Können zur Berechnung der Schallausbreitung in akustischen Wellenleitern mit veränderlicher Querschnittsfläche keine analytischen Lösungen der partiellen Differenzialgleichungen angegeben werden, kommen zur numerischen Lösung häufig Finite-Elemente-Verfahren oder Randelemente-Verfahren zum Einsatz [CB91, CDF⁺92, HM95, Vorl08].

Bei den Finite-Elemente-Verfahren findet eine Diskretisierung des zu betrachtenden Raumvolumens in finite Elemente statt. Mit Hilfe einer integralen Mittelwertbildung werden die Differenzialgleichungen in ein Gleichungssystem überführt, das numerisch gelöst wird. Die Randelemente-Verfahren basieren im Gegensatz dazu auf einer Diskretisierung der Oberfläche des zu betrachtenden Raumvolumens. Die Differenzialgleichungen werden unter Berücksichtigung der Randbedingungen in Integralgleichungen überführt, die ähnlich dem Finite-Elemente-Verfahren numerisch zu lösen sind. Beide Methoden führen bei entsprechender Diskretisierung zu genauen Resultaten, denen jedoch ein hoher Berechnungsaufwand zu Grunde liegt. Im Folgenden kommen daher keine dieser numerischen Verfahren zum Einsatz.

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Schallausbreitung in Röhren mit veränderlicher Querschnittsfläche basiert auf einer Vereinfachung der zu Grunde liegenden partiellen Differenzialgleichungen. Dieser Ansatz führt unter anderem auf die WEBSTER-Gleichung [Webs19].

2.2.1 Die Webster-Gleichung

Die Schallausbreitung in einer Röhre mit veränderlicher Querschnittsfläche und die Schwingung einer Saite mit veränderlicher Dicke in transversaler Richtung lassen sich durch ähnliche Differenzialgleichungen beschreiben. Diesen Zusammenhang zwischen der linearen Elastizität einer Saite und den Eigenschaften eines Gases in einer Röhre mit veränderlicher Querschnittsfläche erkannten LAGRANGE und EULER zur Mitte des Neunzehnten Jahrhunderts. Zu Beginn des Zwanzigsten Jahrhunderts griffen RAYLEIGH und WEBSTER die

Essenz der Arbeiten von LAGRANGE und EULER unabhängig voneinander wieder auf. Auch wenn andere Forscher die Pionierarbeit geleistet haben, wird häufig die Gleichung zur Schallausbreitung in einem Trichter mit WEBSTER in Verbindung gebracht und als WEBSTER-Gleichung oder Trichtergleichung bezeichnet [Camp84].

Bei der Schallausbreitung in einer Röhre liegt eine Abhängigkeit der Schallfeldgrößen von den drei Raumdimensionen vor. Unter der Voraussetzung, dass der Schalldruck auf einer entsprechenden Koordinatenfläche konstant ist, hängt die von WEBSTER vorgestellte Trichtergleichung näherungsweise nur von einer Dimension ab. Das ist unter anderem dann der Fall, wenn die betrachteten Wellenlängen erheblich größer als der Durchmesser der Röhre sind. Unter dieser Annahme liegt ausschließlich eine Schallausbreitung im Grundmodus vor, die hauptsächlich von der Größe der Querschnittsfläche, nicht jedoch durch die Querschnittsflächenform beeinflusst wird [Hudd83, HM05]. Zusätzlich darf sich die Querschnittsfläche nur langsam ändern, so dass sprunghafte Änderungen nicht zulässig sind. Die WEBSTER-Gleichung lässt sich für eine Schallausbreitung in z -Richtung bezüglich des akustischen Potentials zu

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{1}{A(z)} \frac{\partial A(z)}{\partial z} \frac{d\phi}{dz} + \beta_0^2 \phi = 0 \quad (2.15)$$

formulieren. Die veränderliche Querschnittsfläche wird durch die Querschnittsflächenfunktion $A(z)$ erfasst [Hudd89]. Querschnittsflächen, die senkrecht zu einer gekrümmten Mittelachse angeordnet sind, lassen sich durch eine Parametrisierung der WEBSTER-Gleichung modellieren [KS85, FFR02].

In der ursprünglichen WEBSTER-Gleichung (2.15) werden keine Verluste bei der Schallausbreitung erfasst [Flan72]. Diese lassen sich zum einen für kleine Grenzschichtdicken durch eine Modifikation der Trichtergleichung einbetten [Pier81] oder zum anderen approximativ durch Verwendung eines verlustbehafteten Ausbreitungsmaßes in der Lösung berücksichtigen [Hudd89]. Durch eine weitere Modifikation der Trichtergleichung kann ebenfalls der Einfluss eines strömenden Mediums erfasst werden [Pier81].

Für die WEBSTER-Gleichung lassen sich nur für einige Spezialfälle, wie beispielsweise den Kegel- oder Exponentialtrichter, analytische Lösungen angeben [Lodw97]. In [Putl96] wurde die Trichtergleichung daher mit Hilfe eines Finite-Differenzen-Verfahrens numerisch gelöst. Die dazu erforderliche Diskretisierung der veränderlichen Querschnittsflächenfunktion entlang der Mittelachse kann auch als eine stufenweise Approximation von $A(z)$ durch hintereinander geschaltete Röhren mit unterschiedlichen Querschnittsflächen interpretieren werden [Hudd89]. Dieses Prinzip wurde in dieser Arbeit zur Modellierung einer veränderlichen Querschnittsfläche herangezogen, da es einen akzeptablen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Berechnungsaufwand darstellt.

2.2.2 Stufenweise Approximation

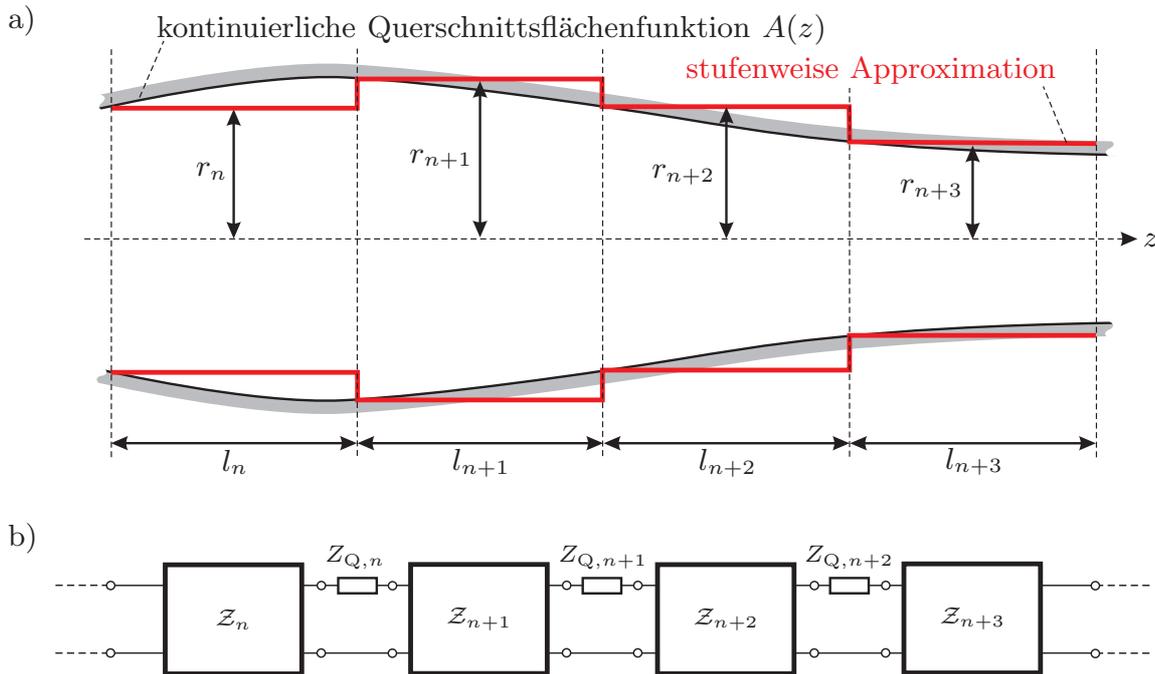


Abbildung 2.2: a) Prinzip der stufenweisen Approximation von kontinuierlichen Querschnittsflächenänderungen durch hintereinander geschaltete Röhrenelemente mit konstantem Querschnitt und b) Zweitordarstellung mit den Sprungimpedanzen $Z_{Q,n}$

Das Konzept der stufenweisen Approximation ist in Abbildung 2.2 a) dargestellt. Die Unterteilung muss nicht notwendigerweise äquidistant erfolgen. Die Genauigkeit des Modells hängt von den gewählten Längen l_n der Röhrenelemente und der Größe der Querschnittsänderung ab. Untersuchungen zeigten, dass mit Längen von $l_n \approx \lambda/10$ akzeptable Resultate erzielt werden können [Lodw97]. Die Kettenmatrix eines aus N Elementen bestehenden Röhrensystems ergibt sich mit den einzelnen Kettenmatrizen (2.12) zu

$$K = \prod_{n=1}^N K_n. \tag{2.16}$$

Das Ausbreitungsmaß γ_n sollte bei einer stufenweisen Approximation in jedem Röhrenelement gleich sein, so dass es sich bei einer verlustbehafteten Schallausbreitung anbietet, einen mittleren Radius zur Berechnung von γ_n zu verwenden [Hudd89]. In der Literatur finden sich jedoch ebenfalls Ansätze, die für jedes Röhrenelement den dazugehörigen Radius r_n bei der Bestimmung von γ_n zu Grunde legen [HE98a, HE98c].

Bei der Verkettung von Röhrenelementen mit unterschiedlichen Radien gemäß Gleichung (2.16) ergeben sich jedoch nur für kleine Querschnittsprünge zufriedenstellende Resultate. Untersuchungen in [Solo03] haben gezeigt, dass

ein Querschnittssprung unter Vernachlässigung von evaneszenten Moden nur für einen eingeschränkten Frequenzbereich deutlich unterhalb des ersten Radialmodus zu genauen Ergebnissen führt. Bei größeren Querschnittsprüngen sollte, auch wenn ausschließlich der Grundmodus ausbreitungsfähig ist, der Einfluss von evaneszenten Moden berücksichtigt werden.

Mit dem Streumatrizenkonzept von HUDDE ET AL. aus [HL85] wurde von HUDDE eine stufenweise Approximation auch für Frequenzen untersucht, für die höhere Moden ebenfalls ausbreitungsfähig sind [Hudd89]. Da rotations-symmetrische Querschnittsänderungen im Mittelpunkt standen, erfolgte nur die Berücksichtigung von Radialmoden, wobei sich Azimutalmode ebenfalls in das Konzept einbetten lassen. Das Verfahren erlaubt eine genaue akustische Modellierung von Querschnittsänderungen nicht nur für den Grundmodus. Jedoch erfordert das Verfahren einen hohen Berechnungsaufwand, da selbst für eine Bestimmung der Schallfeldgrößen des Grundmodus die Streumatrizen ebenfalls bezüglich der höheren Moden ausgewertet werden müssen.

In dieser Arbeit kann aufgrund der vorliegenden Röhrengemetrien und der zu betrachtenden Frequenzen davon ausgegangen werden, dass nur der Grundmodus ausbreitungsfähig ist. Damit bieten sich auch vereinfachte Lösungsansätze an, die den Einfluss der am Querschnittssprung evaneszent angeregten Moden auf der Grundlage einer Sprungimpedanz berücksichtigen.

Sprungimpedanz von Karal

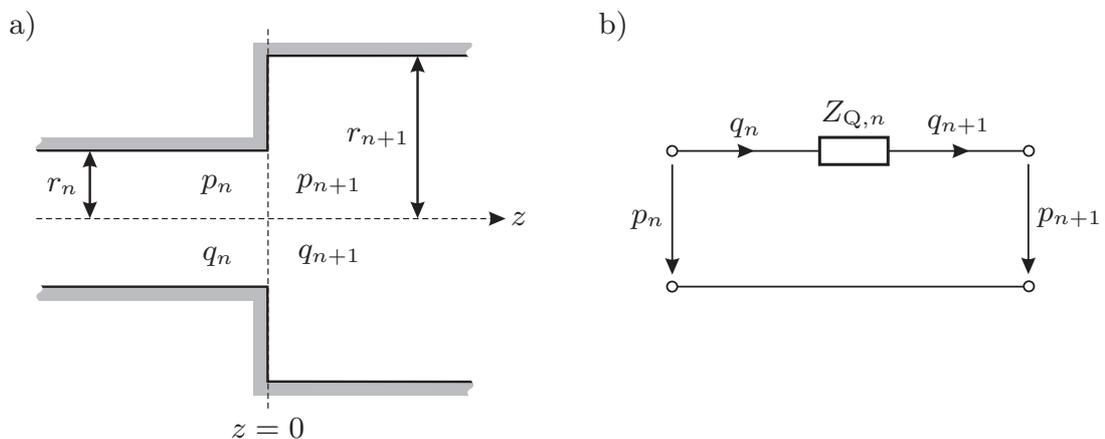


Abbildung 2.3: a) Querschnittssprung von r_n auf r_{n+1} bei $z = 0$ und b) Modellierung durch die Sprungimpedanz $Z_{Q,n}$

Betrachtet wird der in Abbildung 2.3 a) dargestellte Querschnittssprung vom Radius r_n auf r_{n+1} am Ort $z = 0$. Zur Erfüllung der dortigen Randbedingungen sind neben dem ausbreitungsfähigen Grundmodus auch evaneszente Moden einzubeziehen, die an der Unstetigkeitsstelle zwangsläufig angeregt werden. Für die komplexen Amplituden des Schalldrucks im Grundmodus gilt

bei $z = 0$

$$p_n|_{z=0} - p_{n+1}|_{z=0} = p_{\text{HM}}. \quad (2.17)$$

Der Schalldruck ist am Querschnittsprung nicht stetig, sondern springt um den Anteil p_{HM} , der die evaneszenten höheren Moden erfasst. Dagegen lässt sich für den Schallfluss zeigen, dass für diesen bei $z = 0$ mit

$$q_n|_{z=0} = q_{n+1}|_{z=0} = q_{\text{Q},n} \quad (2.18)$$

Stetigkeit vorliegt. Den Anteil der höheren Moden beschrieb KARAL durch

$$p_{\text{HM}} = Z_{\text{Q},n} q_{\text{Q},n} \quad (2.19)$$

mit Hilfe der Sprungimpedanz $Z_{\text{Q},n}$ [Kara53]. Diese Sprungimpedanz zur Berücksichtigung eines Querschnittsprungs setzt sich genau genommen aus zwei unendlichen Reihen zusammen, wobei ein Reihenterm aus Größen besteht, die sich aus einem unendlichen linearen Gleichungssystem berechnen lassen. Für die meisten Anwendungen kann nach KARAL dieser Reihenterm vernachlässigt werden, so dass er schließlich die Impedanz zu

$$Z_{\text{Q},n} = j\omega \frac{4\rho_0 r_{n+1}}{\pi r_n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(t_{0,i} r_n / r_{n+1})}{t_{0,i}^3 J_0^2(t_{0,i})} \quad (2.20)$$

angegeben hat.⁵ Dabei bezeichnet $t_{0,i}$ die Nullstelle $i + 1$ von $J_1(t_{0,i})$. Für akzeptable Ergebnisse kann die Reihe bereits nach dem zwanzigsten Glied abgebrochen werden [Peat88]. Die Einbettung der Sprungimpedanz in die Zweitormodellierung ist in Abbildung 2.3 b) dargestellt.

Für den Wert der Sprungimpedanz ist es nicht relevant, ob $r_n > r_{n+1}$ oder $r_n < r_{n+1}$ vorliegt. Eine Aufweitung und eine Verengung besitzen damit identische Sprungimpedanzen. Folglich liegt Reziprozität vor. Daher bezeichnet im Weiteren r_n den kleineren und r_{n+1} den größeren Radius und das dazugehörige Verhältnis sei zu $\alpha = r_n / r_{n+1}$ definiert.

Untersuchungen zur Sprungimpedanz von Karal

Auf der Grundlage des Streumatrizenkonzepts gaben HUDDE ET AL. ein äquivalentes Zweitor an, dass für den Grundmodus die Effekte durch Anregung von evaneszenten Moden berücksichtigt [HL85]. Die Längsimpedanz des Zweitors wurde mit der Sprungimpedanz von KARAL für große und kleine Querschnittsänderungen verglichen. Dabei zeigte sich, dass die Sprungimpedanz von KARAL für kleine Querschnittsprünge ungenau ist. Für kleine Änderungen ist der Wert der Sprungimpedanz ohnehin gering, so dass der Fehler tolerierbar erscheint.

⁵Bei der Größe $Z_{\text{Q},n}$ handelt es sich um eine akustische Induktivität, die auch als akustische Sprungmasse bezeichnet wird [ZZ93].

Zusätzlich wurde von HUDDE für einen stufenweise zu approximierenden Wellenleiter das Übertragungsverhalten zum einen mit dem Streumatrizenkonzept als Referenzlösung ermittelt. Zum anderen erfolgte mit Hilfe der Kettenmatrizen (2.12) die Berechnung sowohl mit als auch ohne Sprungimpedanz von KARAL [Hudd89]. Mit der Sprungimpedanz reduzierten sich die Abweichungen zur Referenzlösung. Jedoch waren diese nur für einen eingeschränkten Frequenzbereich deutlich unterhalb der Grenzfrequenz des ersten ausbreitungsfähigen Modus akzeptabel. Eine obere Frequenzgrenze, für die mit der Sprungimpedanz zufriedenstellende Resultate erzielt werden können, lässt sich dagegen nicht eindeutig definieren.

Die Sprungimpedanz von KARAL erlaubt keine genaueren Ergebnisse, da frequenzabhängige Terme bei der Herleitung vernachlässigt oder durch konstante Ausdrücke approximiert worden sind [Peat88]. Das wird deutlich, wenn man die Sprungimpedanz mit einer Impedanz vergleicht, die für eine Schallabstrahlung eines kreisrunden Kolbens in eine kreisrunde Röhre mit größerem Durchmesser gültig ist [Ingå48]. Da beide identisch sind, beschreibt die Sprungimpedanz von KARAL eine ebene Schallabstrahlung in eine Röhre mit einem größeren Durchmesser, bei der nur auf einer Seite höhere Moden Berücksichtigung finden. Bei einem Querschnittssprung werden jedoch auf beiden Seiten höhere Moden evaneszent angeregt, die es in ihrer Gesamtheit zu berücksichtigen gilt.

Sprungimpedanz von Peat

Für die Herleitung einer genaueren Sprungimpedanz, die einen Querschnittssprung bis zur Grenzfrequenz des ersten Radialmodus modellieren soll, wird das Schallfeld zunächst mit analytischen [KG87] oder numerischen Methoden ermittelt [Peat88, SMR95]. Auf dieser Grundlage erfolgt dann die approximative Bestimmung einer äquivalenten Impedanz in analytischer Form. Mit der Vorgehensweise lassen sich ebenfalls nicht-achsensymmetrische Querschnittsprünge modellieren [SMR95].

In dieser Arbeit kam die Sprungimpedanz von PEAT zur Beschreibung von achsensymmetrischen Querschnittsprüngen zum Einsatz [Peat88]. Sie basiert auf der doppelten TSCHEBYSCHJEFF-Reihe

$$Z_{Q,n} = j\omega \frac{8\rho_0}{3\pi^2 r_n} \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 A_{i,j} T_i \left(\frac{2\beta_0 r_{n+1} - 3,9}{3,3} \right) T_j \left(\frac{2\alpha - 1,1}{0,9} \right) \quad (2.21)$$

und approximiert die Referenzlösung eines Finite-Elemente-Verfahrens. Die Koeffizienten sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst, während es sich bei $T_n(\cdot)$ um TSCHEBYSCHJEFF-Polynome erster Art mit der Ordnung n handelt. Die Approximation ist für $0,1 \leq \alpha \leq 1$ und $0,3 \leq \beta_0 r_{n+1} \leq 3,6$ gültig.

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	0,4316	-0,5031	0,0238	0,0558	-0,0084	0,0005
1	0,1275	-0,1287	-0,0419	0,0579	-0,0104	-0,0049
2	0,0649	-0,0659	-0,0215	0,0316	-0,0062	-0,0033
3	0,0301	-0,0311	-0,0097	0,0157	-0,0034	-0,0019
4	0,0155	-0,0162	-0,0046	0,0083	-0,0020	-0,0010
5	0,0078	-0,0082	-0,0022	0,0043	-0,0011	-0,0006

Tabelle 2.2: Koeffizienten $A_{i,j}$ der doppelten TSCHEBYSCHJEFF-Reihe zur Approximation der Sprungimpedanz von PEAT [Peat88]. Gegenüber seiner Darstellung sind die Koeffizienten $A_{0,0}$, $A_{i,0}$ und $A_{0,j}$ bereits skaliert [Basu73].

Verkettung der Röhrenelemente

Zur Berücksichtigung von Querschnittssprüngen sind zwischen benachbarten Röhrenelementen die dazugehörigen Sprungimpedanzen $Z_{Q,n}$ gemäß Abbildung 2.2 b) anzuordnen. Die Verbindung von benachbarten Röhrenelementen erfolgt damit über ein Zweitor mit der Kettenmatrix

$$\mathbf{K}_{Q,n} = \begin{bmatrix} 1 & Z_{Q,n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Vernachlässigt man den Einfluss von evaneszenten Moden, gilt $Z_{Q,n} = 0$ und $\mathbf{K}_{Q,n}$ wird zur Einheitsmatrix. Das entspricht einer direkten Verkettung der Röhrenelemente, welche zu Beginn des Abschnitts vorgestellt worden ist.

2.3 Modellierung einer endlichen Röhrenlänge

Die Terminierung eines Röhrensystems bei $z = z_T$ kann im Zweitormodell durch die Abschlussimpedanz Z_T berücksichtigt werden. Eine fortschreitende Schallwelle wird am Ende des letzten Röhrenelements N gemäß dem Reflexionsfaktor

$$R_T = \frac{Z_T - Z_{L,N}}{Z_T + Z_{L,N}} = -|R_T|e^{-j2\beta_0 L_T} \quad (2.23)$$

reflektiert. Für die Querimpedanz Z_T ergibt sich die Kettenmatrix zu

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Bei einer verschlossenen Röhre stellt Z_T die Wandimpedanz des Verschlusses dar. Mit einer offenen Terminierung gestaltet sich dagegen die Bestimmung

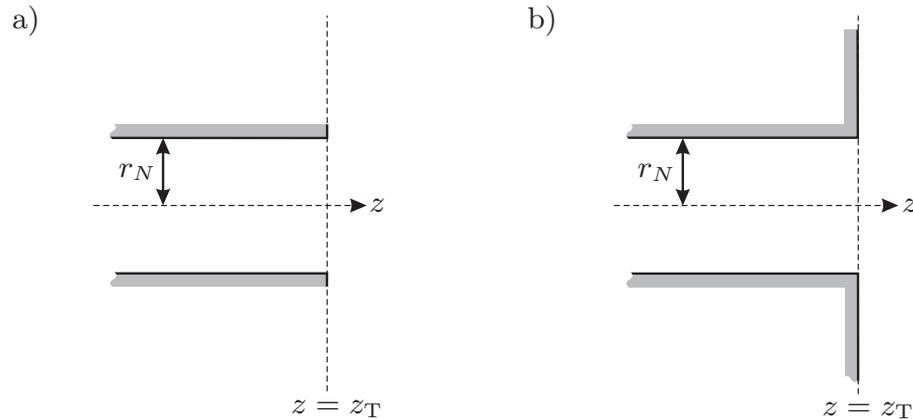


Abbildung 2.4: a) Kreisrunde Röhre ohne Flansch (*unflanged*) und b) kreisrunde Röhre mit unendlich ausgedehntem Flansch (*flanged*)

einer äquivalenten Impedanz Z_T aufwändiger, da die Mündungsform die Anregung von höheren Moden beziehungsweise die Schallabstrahlung ins Freifeld beeinflusst.

In dieser Arbeit sind nur solche Mündungen relevant, die keinen oder einen unendlich ausgedehnten Flansch gemäß Abbildung 2.4 aufweisen. Näherungen für andere Flansche finden sich für den Bereich deutlich unterhalb der Grenzfrequenz des ersten Radialmodus beispielsweise in [DNJ01]. Die Berechnung des Schallfelds außerhalb der Röhre ist im Weiteren nicht erforderlich und kann daher etwa [LS48, Pier81, Munj87] entnommen werden.

2.3.1 Mündung ohne Flansch

Erste Arbeiten zur Beschreibung der Reflexion und Schallabstrahlung an einer Mündung ohne Flansch wurden von LEVINE ET AL. durchgeführt [LS48]. Ihre Betrachtungen beschränkten sich exemplarisch auf den Bereich bis zur Grenzfrequenz des ersten Radialmodus. Der von LEVINE ET AL. hergeleitete Ausdruck für den Reflexionsfaktor ist nicht elementar integrierbar. Daher wurde von NORRIS ET AL. zunächst der Reflexionsfaktor numerisch bestimmt und schließlich diese numerische Lösung analytisch approximiert [NS89]. Die Approximation von NORRIS ET AL. ergibt sich für $0 < \beta_0 r_N < 3,8$ zu

$$|R_{T,0}| = \frac{1 + 0,2\beta_0 r_N - 0,084 [\beta_0 r_N]^2}{1 + 0,2\beta_0 r_N + 0,416 [\beta_0 r_N]^2}, \quad (2.25a)$$

$$L_{T,0} = 0,6133 r_N \frac{1 + 0,044 [\beta_0 r_N]^2}{1 + 0,19 [\beta_0 r_N]^2}. \quad (2.25b)$$

Um die Genauigkeit von $L_{T,0}$ bei tiefen Frequenzen zu erhöhen, wurde von DALMONT ET AL. ein Korrekturterm hinzugefügt [DNJ01]. Die modifi-

zierte Näherung lässt sich für den Bereich $0 < \beta_0 r_N < 1,5$ zu

$$L_{T,0} = 0,6133 r_N \left[\frac{1 + 0,044 [\beta_0 r_N]^2}{1 + 0,19 [\beta_0 r_N]^2} - 0,02 \sin^2 (2\beta_0 r_N) \right] \quad (2.26)$$

angeben. Bei sehr niedrigen Frequenzen gilt $|R_{T,0}| \approx 1$ und die wirksame Röhrenlänge vergrößert sich gegenüber der geometrischen um $L_{T,0} \approx 0,6133 r_N$.

2.3.2 Mündung mit unendlich ausgedehntem Flansch

Für Mündungen mit einem unendlich ausgedehnten Flansch kann der von NORRIS ET AL. erarbeitete Ausdruck für den Reflexionsfaktor ebenfalls nur numerisch bestimmt werden [NS89]. Die numerische Lösung ist daher wieder analytisch approximiert worden. Diesbezüglich erscheint jedoch die von DALMONT ET AL. zu

$$|R_{T,\infty}| = \frac{1 + 0,323\beta_0 r_N - 0,077 [\beta_0 r_N]^2}{1 + 0,323\beta_0 r_N + 0,923 [\beta_0 r_N]^2}, \quad (2.27a)$$

$$L_{T,\infty} = 0,8216 r_N \left[\frac{1 + 0,77\beta_0 r_N}{1 + 0,77\beta_0 r_N + [0,77\beta_0 r_N]^2} \right] \quad (2.27b)$$

angegebene Approximation für $0 < \beta_0 r_N < 3,5$ nach eigenen Untersuchungen praktikabler [DNJ01]. Im Gegensatz zur Näherung von NORRIS ET AL. weist diese im approximierten Frequenzbereich keine Polstelle auf. Für sehr niedrige Frequenzen führt ein offenes Ende zu einer Vergrößerung der effektiv wirksamen Röhrenlänge um $L_{T,\infty} \approx 0,8216 r_N$.

2.4 Modellierung von Abzweigungen

In den bisher publizierten Arbeiten zur akustischen Modellierung von Röhrensystemen mit Abzweigungen standen rechteckige Querschnittsflächen im Vordergrund. Weisen Hauptröhre und Abzweigung dieselbe räumliche Tiefe auf, reduziert sich bei der Anregung mit einer eindimensionalen Schallwelle die Darstellung auf ein zweidimensionales Problem. Zur Untersuchung der Schallausbreitung kamen sowohl analytische Herleitungen [Mile47] als auch numerische Verfahren zum Einsatz [Tang04].

An einer Abzweigung wird ein Teil der einfallenden Schallwelle reflektiert [KFCS00]. Ähnlich wie bei einem Querschnittssprung lässt sich die Reflexion durch eine Korrektur der wirksamen Länge der Abzweigung sowie des davor angeordneten Röhrensystems berücksichtigen. Die für einen rechteckigen Querschnitt erforderliche Korrektur der Längen wurde in [Tang04] mit einem numerischen Verfahren für unterschiedliche Terminierungen bis zur Grenzfrequenz des ersten höheren Modus bestimmt.

Für Röhren mit kreisrunder Querschnittsfläche gestaltet sich dagegen die Modellierung von Abzweigungen wesentlich komplizierter. Anders als beim rechteckigen Wellenleiter liegt dort ein dreidimensionales Problem zu Grunde. Somit bieten sich einerseits zunächst nur numerische Verfahren an. Andererseits erscheint es möglich, auf der Grundlage von numerischen Methoden Zweitore zu bestimmen, die den Einfluss von höheren Moden im Bereich einer Abzweigung für eine Schallausbreitung im Grundmodus modellieren. In dieser Arbeit wurde ein anderer Ansatz gewählt, der im Folgenden präsentiert wird.

Zweitormodellierung einer Abzweigung

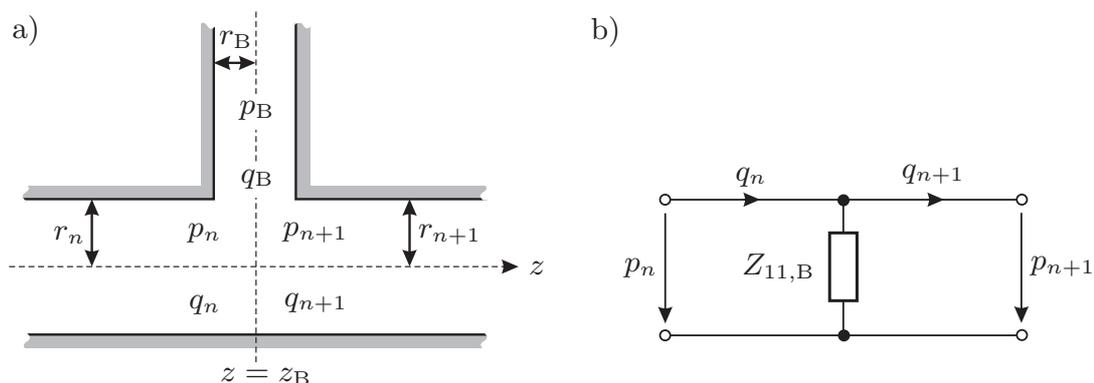


Abbildung 2.5: a) Kreisrunde Röhre mit rechtwinkliger Abzweigung und b) Modellierung durch die Impedanz $Z_{11,B}$

Wie in Abbildung 2.5 a) dargestellt, weist die Abzweigung bei $z = z_B$ den Radius r_B auf, während die Hauptröhre den Radius $r_n = r_{n+1}$ besitzt. Die Betrachtungen setzen Wellenlängen voraus, die im Vergleich zu r_B groß sind. Damit werden Frequenzen betrachtet, die deutlich unterhalb der Grenzfrequenz des ersten Azimutalmodus liegen. Zusätzlich wird $r_n > r_B$ gefordert. Durch diese Voraussetzungen soll sichergestellt werden, dass nur in einem kleinen Bereich um die Abzweigung die Anregung von evaneszenten Moden erfolgt. Unter dieser Prämisse erscheint der Einfluss dieser höheren Moden gering und es erlaubt, das Schallfeld auch im Bereich der Abzweigung als näherungsweise eindimensional anzunehmen. Der Schalldruck ist dann bei $z = z_B$ mit

$$p_n|_{z=z_B} = p_{n+1}|_{z=z_B} = p_B \quad (2.28)$$

stetig, während sich der Schallfluss gemäß der Kontinuitätsgleichung zu

$$q_n|_{z=z_B} = q_{n+1}|_{z=z_B} + q_B \quad (2.29)$$

ergibt. Durch Einführung der Eingangsimpedanz

$$Z_{11,B} = \frac{p_B}{q_B} = \frac{p_n}{q_n} \quad (2.30)$$

der Abzweigung, lassen sich schließlich die Kettenmatrix

$$\mathbf{K}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_{11,B} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

und das Zweitor in Abbildung 2.5 b) zur Modellierung einer Abzweigung angeben [Reyn81]. Für die Berücksichtigung der Abzweigung ist bei $z = z_B$ die Querimpedanz $Z_{11,B}$ im Zweitormodell anzuordnen. Das zur Abzweigung gehörende Röhrensystem kann ebenfalls mit Hilfe der vorgestellten Modelle beschrieben werden.

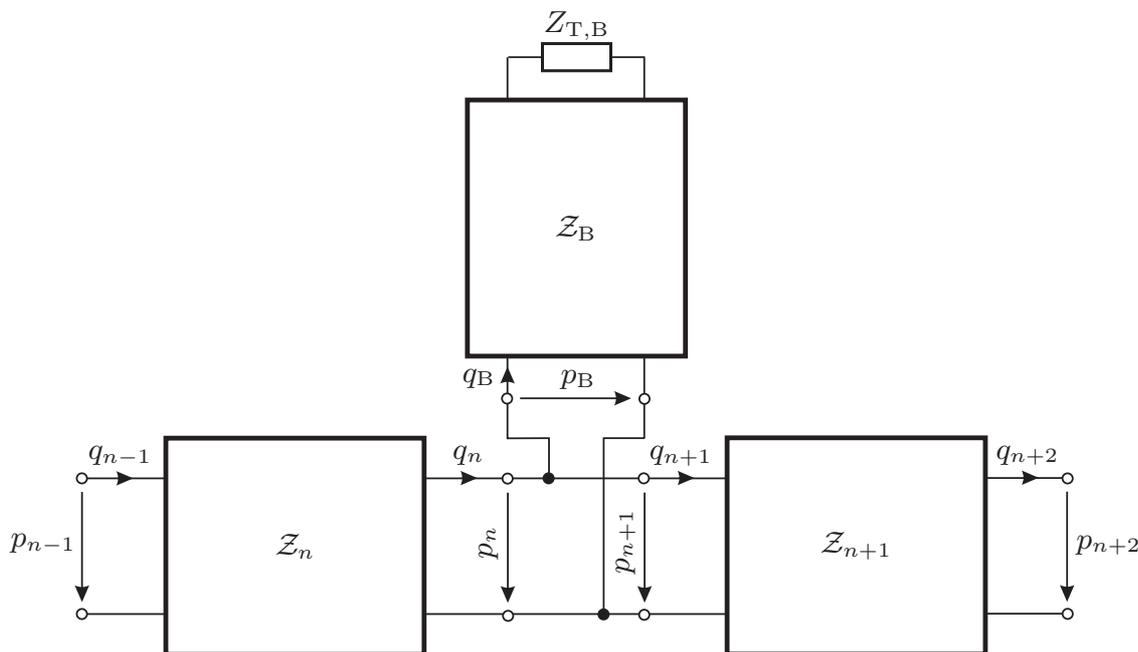


Abbildung 2.6: Zweitormodellierung eines Röhrensystems mit Abzweigung

Abschließend ist in Abbildung 2.6 das resultierende Zweitormodell nach Einbettung einer Abzweigung dargestellt. Die Zweitore Z_n und Z_{n+1} erfassen nur die Eigenschaften der Hauptröhre. Der Einfluss der Abzweigung wird durch das mit $Z_{T,B}$ abgeschlossene Zweitor Z_B modelliert, dessen Eingangsimpedanz $Z_{11,B}$ durch Gleichung (2.30) definiert ist.

2.5 Modellierung von nicht-idealen Schallquellen

Nicht-ideale Schallquellen lassen sich für eine Schallausbreitung im Grundmodus durch die äquivalenten Netzwerke in Abbildung 2.7 modellieren. Die Quellenparameter und Lastimpedanzen sind frequenzabhängig, wobei auf die Angabe des Arguments verzichtet wird. Die Lastimpedanz Z_n entspricht der

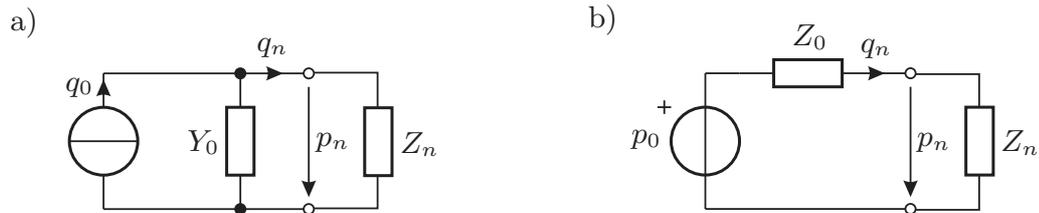


Abbildung 2.7: a) NORTON-Quelle mit Urschallflussquelle q_0 und Innenadmittanz Y_0 sowie b) THÉVENIN-Quelle mit Urschallquelle p_0 und Innenimpedanz Z_0 , beide jeweils mit der Lastimpedanz Z_n abgeschlossen

Eingangsimpedanz des von der Quelle angeregten Röhrensystems. Beide Ersatzschaltungen sind mathematisch eindeutig ineinander überführbar. Die weiteren Betrachtungen erfolgen daher exemplarisch für eine THÉVENIN-Quelle⁶.

Die Quellenparameter eines Lautsprechers werden im Folgenden für die Validierung eines mathematischen Röhrenmodells benötigt. Zusätzlich soll im zweiten Teil der Arbeit der Lautsprecher zur Erzeugung des Gegenschallsignals auf der Grundlage dieser Parameter modelliert werden, um realitätsnahe simulationstechnische Untersuchungen durchführen zu können. Der Lautsprecher kann dazu als lineares und zeitinvariantes System angesehen werden. Die Quellenparameter von Verbrennungsmotoren zeigen dagegen häufig nicht-lineares und zeitvariantes Verhalten [Bodé91, PI01, Peat02, JI03, RB07].

Bestimmung der Quellenparameter

Die Bestimmung der Quellenparameter kann mit direkten oder indirekten Verfahren erfolgen. Die direkten Verfahren verwenden eine zusätzliche Hilfsschallquelle zur Parameterbestimmung [RC83, Munj87, Bodé95]. Diese Methoden sind daher in der Praxis aufwändig und fehleranfällig und kommen deshalb in dieser Arbeit nicht zum Einsatz. Die indirekten Verfahren benötigen dagegen keine zusätzliche Hilfsquelle. Sie basieren auf Schalldruckmessungen bei sukzessiver Belastung der Schallquelle mit unterschiedlichen Lastelementen. Dazu müssen die Impedanzen der Lastelemente bekannt sein und sich diese zusätzlich im relevanten Frequenzbereich hinreichend voneinander unterscheiden [Bodé95, Lodw97].

Offene Lastelemente

Für die Bestimmung der Quellenparameter von Lüftern oder Verbrennungsmotoren kommen häufig Röhren mit einem offenen Abschluss zum Einsatz, die auch durch zusätzliche geschlossene Abzweigresonatoren ergänzt werden können [Bodé95]. Die Kenntnis der Parameter von solchen Schallquellen ist für die Auslegung von passiven Schalldämpfern erforderlich [Pras87, RB07].

⁶Die THÉVENIN-Quelle wird auch als HELMHOLTZ-Quelle bezeichnet.

Bei offenen Lastelementen unterscheiden sich die Realteile der Eingangsimpedanzen auch für unterschiedliche Röhrenlängen nur gering voneinander. Das kann zu numerischen Problemen bei der Parameterbestimmung führen. Diesbezüglich verbesserte Methoden finden sich daher etwa in [Bodé95, JI00]. Für die Methode aus [JI00] wurden darüber hinaus in [JI02] Ansätze zur Reduzierung des Einflusses von Messfehlern untersucht.

Schallhart abgeschlossene Lastelemente

Handelt es sich bei der Schallquelle um einen Lautsprecher, finden bevorzugt Röhren mit schallhartem Abschluss Verwendung. Die Eingangsimpedanzen dieser Lastelemente unterscheiden sich, im Gegensatz zu Röhren mit offenem Ende, bei entsprechend gewählten Längen hinreichend voneinander [Lodw97]. Theoretisch sind zwei Schalldruckmessungen zur Parameterbestimmung ausreichend. Praktisch werden jedoch häufig mehr als zwei Lastelemente verwendet, so dass ein überbestimmtes Gleichungssystem zu lösen ist. Die Parameterbestimmung mit Hilfe eines überbestimmten Gleichungssystems, beispielsweise durch Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers, erlaubt die Kompensation von Temperaturabweichungen zwischen dem realen Aufbau und den bei der Berechnung der Lastimpedanzen zu Grunde gelegten Gaseigenschaften. Das führt zu genaueren Resultaten [KLB92, Lodw97, Sanb98].

Die praktische Parameterbestimmung für einen Lautsprecher mit Trichtervorbau, der mit Hilfe einer THÉVENIN-Quelle modelliert werden soll, wird basierend auf [KLB92] im Anhang B vorgestellt.

2.6 Untersuchungen zur Modellierung eines Röhrensystems

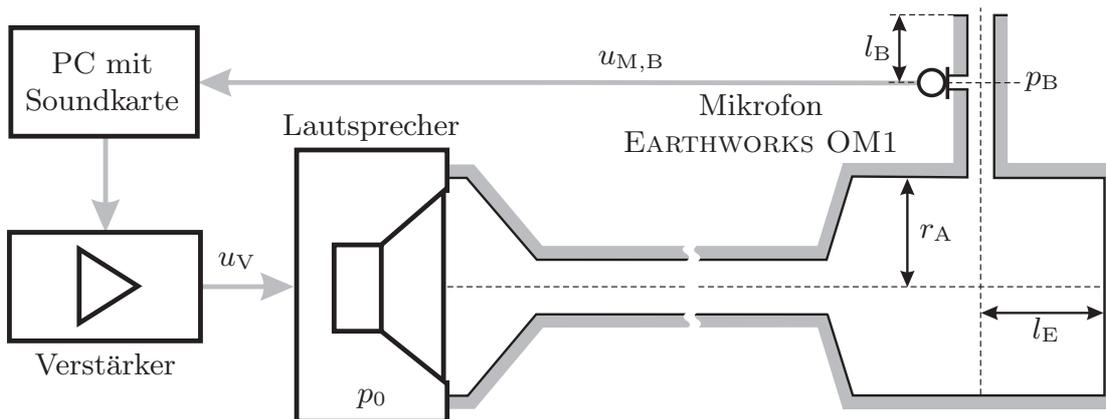


Abbildung 2.8: Schematischer Messaufbau zur Untersuchung eines Röhrenmodells

Den Untersuchungen lag ein Röhrensystem aus PVC mit kontinuierlichen und sprunghaften Querschnittsänderungen sowie einer Abzweigung physikalisch zu Grunde. Von Interesse ist, wie genau das Übertragungsverhalten dieses

Röhrensystems mit Hilfe des dazugehörigen mathematischen Zweitormodells abgeschätzt werden kann. Mit der schematischen Darstellung in Abbildung 2.8 und den Beziehungen $p_0 = k_0 u_V = K_0 u_V / k$ und $u_{M,B} = k p_B$ lässt sich die für Frequenzen $f_1 \leq f_k \leq f_L$ gemessene Übertragungsfunktion zu

$$H_m = \frac{u_{M,B}}{u_V} \quad (2.32)$$

angeben. Die Übertragungsfunktion beziehungsweise die Empfindlichkeit des Mikrofons kennzeichnet k , während k_0 das Übertragungsverhalten des Lautsprechers erfasst. Mit dem Zweitormodell sollte die Übertragungsfunktion

$$H_s = \frac{u_{M,B}}{u_V} = K_0 \frac{p_B}{p_0} \quad (2.33)$$

abgeschätzt werden. Alle beteiligten Größen sind frequenzabhängig, wobei auf die Angabe des Arguments verzichtet wird. Gemäß Abbildung 2.9 ergeben sich die für die Berechnung von

$$H_s = K_0 H_0 H_1 H_B \quad (2.34)$$

benötigten Teilübertragungsfunktionen mit

$$Z_{2,B1} = \frac{Z_{E,2} Z_{E,B1}}{Z_{E,2} + Z_{E,B1}}, \quad (2.35a)$$

$$Z_{E,1} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{K_{11,1} + K_{12,1}/Z_{2,B1}}{K_{21,1} + K_{22,1}/Z_{2,B1}}, \quad (2.35b)$$

$$Z_{E,2} = \frac{p_2}{q_3} = \frac{K_{11,2} + K_{12,2}/Z_T}{K_{21,2} + K_{22,2}/Z_T}, \quad (2.35c)$$

$$Z_{E,B2} = \frac{p_B}{q_B} = \frac{K_{11,B2} + K_{12,B2}/Z_{T,B}}{K_{21,B2} + K_{22,B2}/Z_{T,B}}, \quad (2.35d)$$

$$Z_{E,B1} = \frac{p_2}{q_4} = \frac{K_{11,B1} + K_{12,B1}/Z_{E,B2}}{K_{21,B1} + K_{22,B1}/Z_{E,B2}} \quad (2.35e)$$

zu

$$H_0 = \frac{p_1}{p_0} = \frac{Z_{E,1}}{Z_{E,1} + Z_0}, \quad (2.36a)$$

$$H_1 = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{K_{11,1} + K_{12,1}/Z_{2,B1}}, \quad (2.36b)$$

$$H_B = \frac{p_B}{p_2} = \frac{1}{K_{11,B1} + K_{12,B1}/Z_{E,B2}}. \quad (2.36c)$$

Die messtechnische Bestimmung der für die Simulation benötigten Quellenparameter K_0 und Z_0 kann dem Anhang B entnommen werden. Die formale Äquivalenz der Gleichung (2.32) und (2.33) erlaubt den direkten Vergleich zwischen dem gemessenen und dem simulierten Übertragungsverhalten.

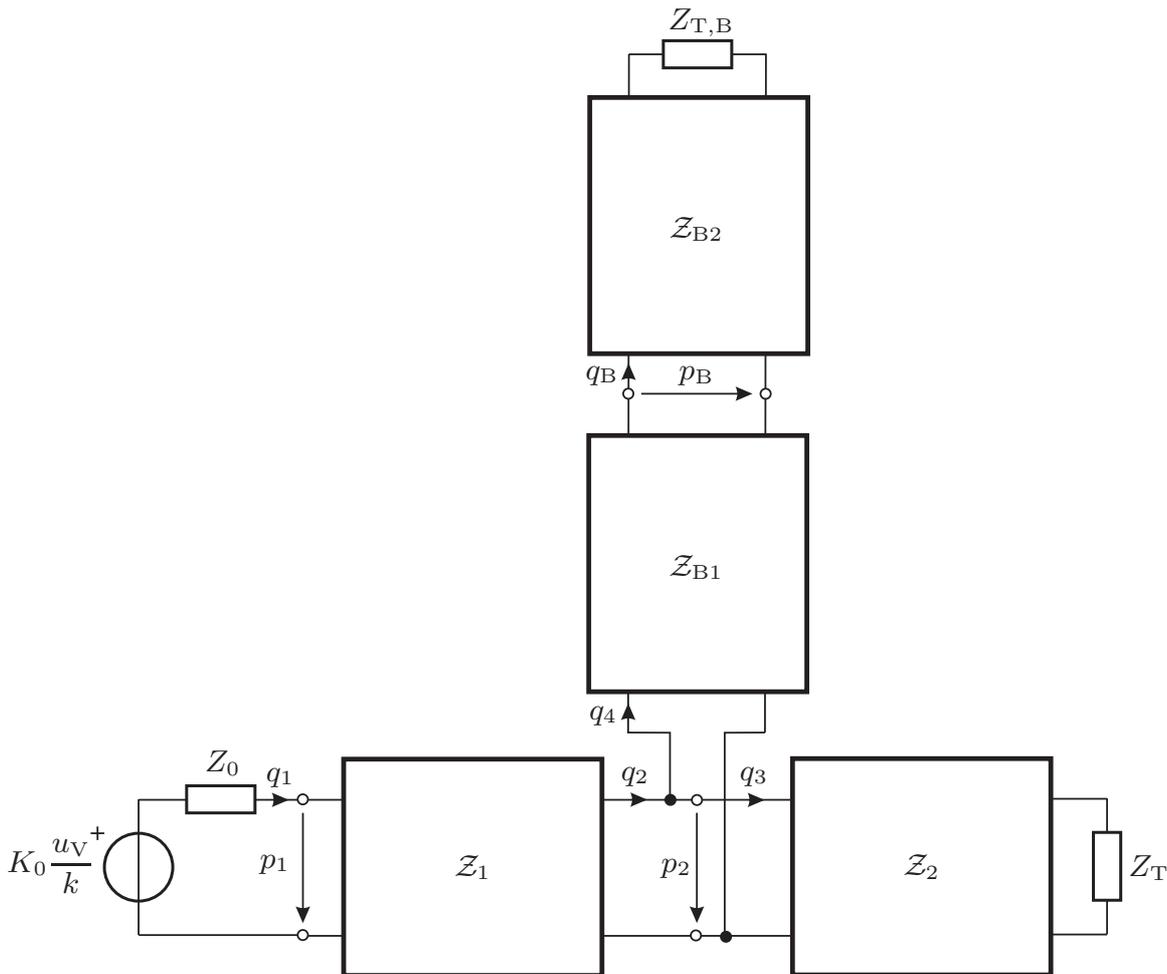


Abbildung 2.9: Zweitormodell des untersuchten Röhrensystems mit Abzweigung

Die Messung erfolgte bei Raumtemperatur bis zur Grenzfrequenz des ersten Azimutalmodus. Da die Aufweitung des Röhrensystems mit $r_A = 100$ mm den größten Radius aufwies, ergibt sich die obere Frequenzgrenze zu $f_L = 1$ kHz. Die in der Simulation verwendeten mathematischen Modelle sind in Tabelle 2.3 zusammengefasst, während der schallharte Abschluss mit $Z_T \rightarrow \infty$ modelliert worden ist.

	Modell	Gleichung
Ausbreitungsmaß γ_w	vorgestelltes mit $Z_w = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Ns/m}^3$	(1.70)
Ausbreitungsmaß γ_{St}	STINSON	(1.60)
Sprungimpedanz $Z_{Q,n}$	PEAT	(2.21)
Mündung $Z_{T,B}$	ohne Flansch NORRIS ET AL.	(2.25)

Tabelle 2.3: Mathematische Modelle

2.6.1 Validierung

Zwischen dem gemessenen und berechneten Übertragungsverhalten sind gemäß Abbildung 2.10 in einigen Frequenzbereichen größere Abweichungen zu verzeichnen. Die Ursache dafür scheint in dem Zweitormodell der Abzweigung und der Vernachlässigung von evaneszenten Moden begründet. Ähnlich wie bei einem rechteckigen Querschnitt in [Tang04] wurden daher mit einer Korrektur der Längen l_B und l_E im simulierten Geometriemodell die Abweichungen reduziert. Eine Optimierung führt für das untersuchte Röhrensystem auf

$$l_{B,\text{opt}} \approx 1,08 l_B \quad \text{und} \quad l_{E,\text{opt}} \approx 0,98 l_E. \quad (2.37)$$

Mit den optimierten Längen lassen sich die Übertragungsfunktionen in Abbildung 2.11 präsentieren. Für $f < 0,7$ kHz kann eine bessere Übereinstimmung zwischen den gemessenen und berechneten Verläufen festgestellt werden. Dagegen ist im oberen Frequenzbereich keine Verbesserung zu verzeichnen. Die Untersuchung bezüglich der verwendeten Geometriedaten zeigte, dass sich die Abweichungen dort durch gezielte Modifikation weiterer Längen reduzieren lassen. Jedoch kann dies mit einer Verschlechterung im restlichen Frequenzbereich verbunden sein. Um die Korrektur auf l_B und l_E zu beschränken, wurde daher auf eine numerische Optimierung zusätzlicher Längen im Geometriemodell verzichtet.

Der Einfluss der in der Simulation zu Grunde gelegten Wandeigenschaften ist bezüglich der Ausbreitungsmaße γ_w und γ_{st} mit Hilfe des relativen Fehlers

$$e_H = \left| \frac{H_m - H_s(\gamma, l_B, l_E)}{H_m} \right| \quad (2.38)$$

untersucht worden. Wie Abbildung 2.12 zu entnehmen, führt die Berücksichtigung von nicht-ideal schallharten Wänden aus PVC mit Hilfe des Ausbreitungsmaßes γ_w zu einer Reduzierung des relativen Fehlers.

2.6.2 Bewertung

Obwohl die relativen Abweichungen zwischen den gemessenen und simulierten Übertragungsfunktionen zunächst groß erscheinen, sind diese deutlich geringer einzustufen, als die in [KT93] bezüglich eines geometrisch einfacher aufgebauten Röhrensystems präsentierten Resultate. Daher ist bereits ohne Längenkorrektur die Genauigkeit zur Abschätzung des charakteristischen Übertragungsverhaltens durch die Zweitormodelle als akzeptabel zu bewerten. Nach einer Korrektur von l_B und l_E ist die Abschätzung aller Resonanzen im Bereich $f < 0,7$ kHz mit einer verbesserten Genauigkeit möglich. Die allgemeine Bestimmung von korrigierenden Längen oder von einzubettenden Zweitoren zur Erfassung des Einflusses von evaneszenten Moden im Bereich von Abzweigungen bleibt in Analogie zum Konzept einer Sprungimpedanz weiteren Untersuchungen vorbehalten.

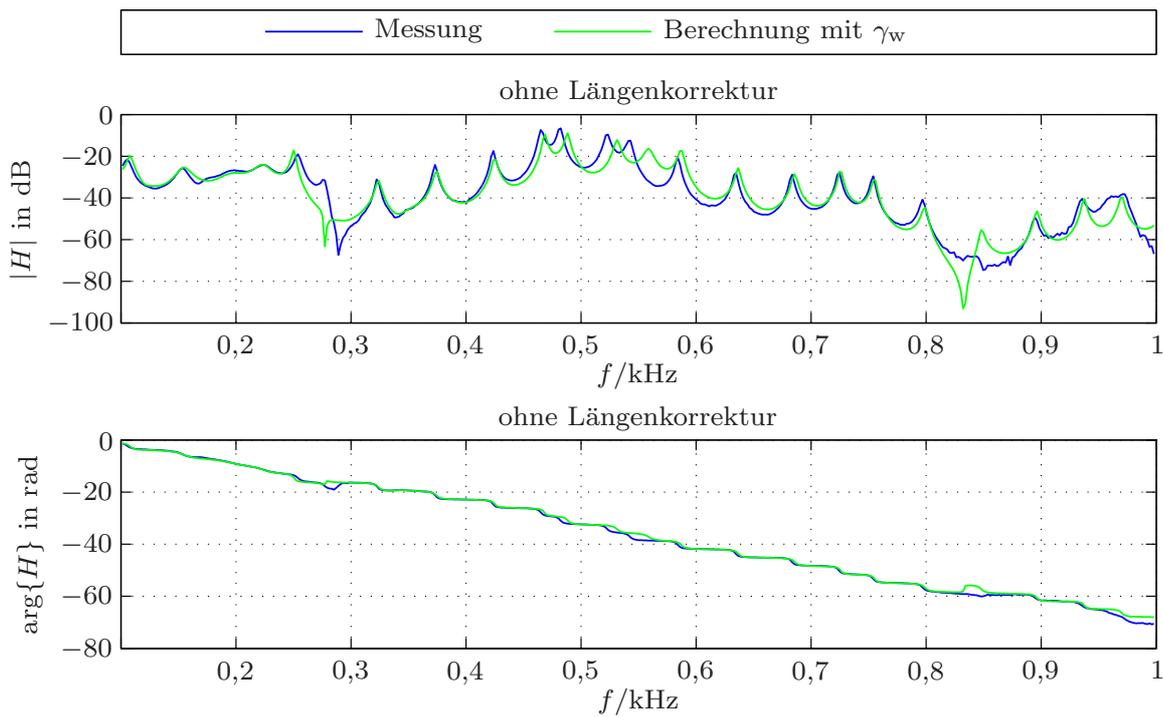


Abbildung 2.10: Betrag und Phase der gemessenen und ohne Längenkorrektur berechneten Übertragungsfunktion

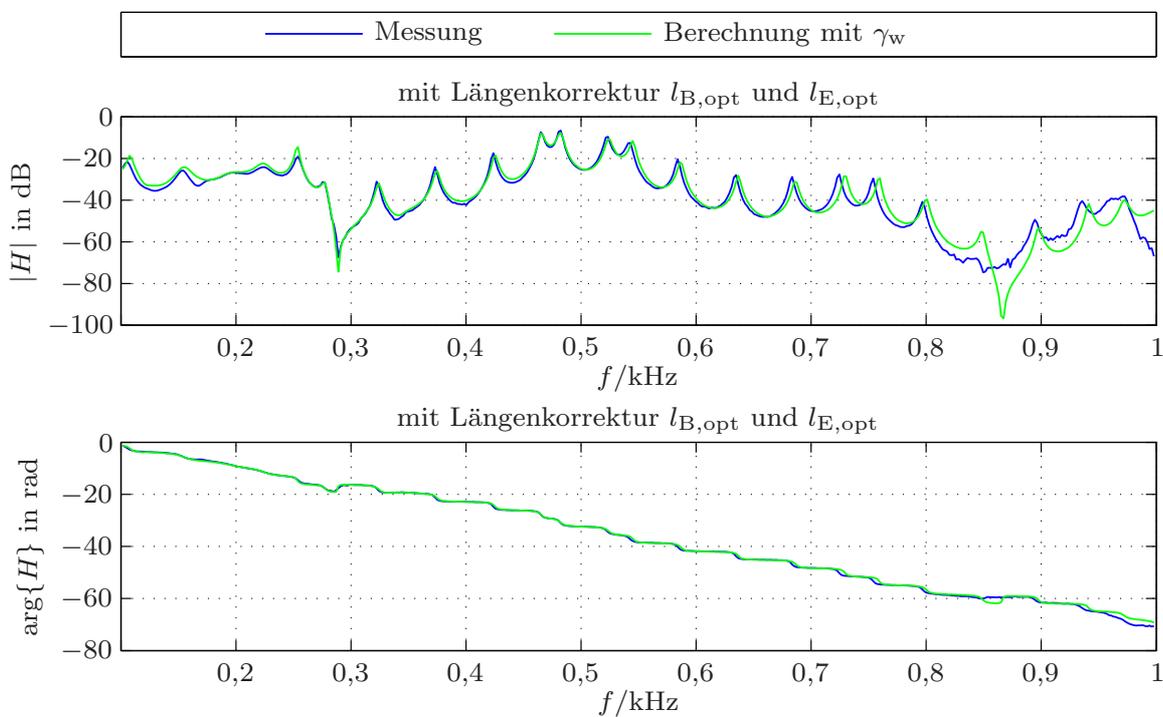


Abbildung 2.11: Betrag und Phase der gemessenen und mit Längenkorrektur berechneten Übertragungsfunktion

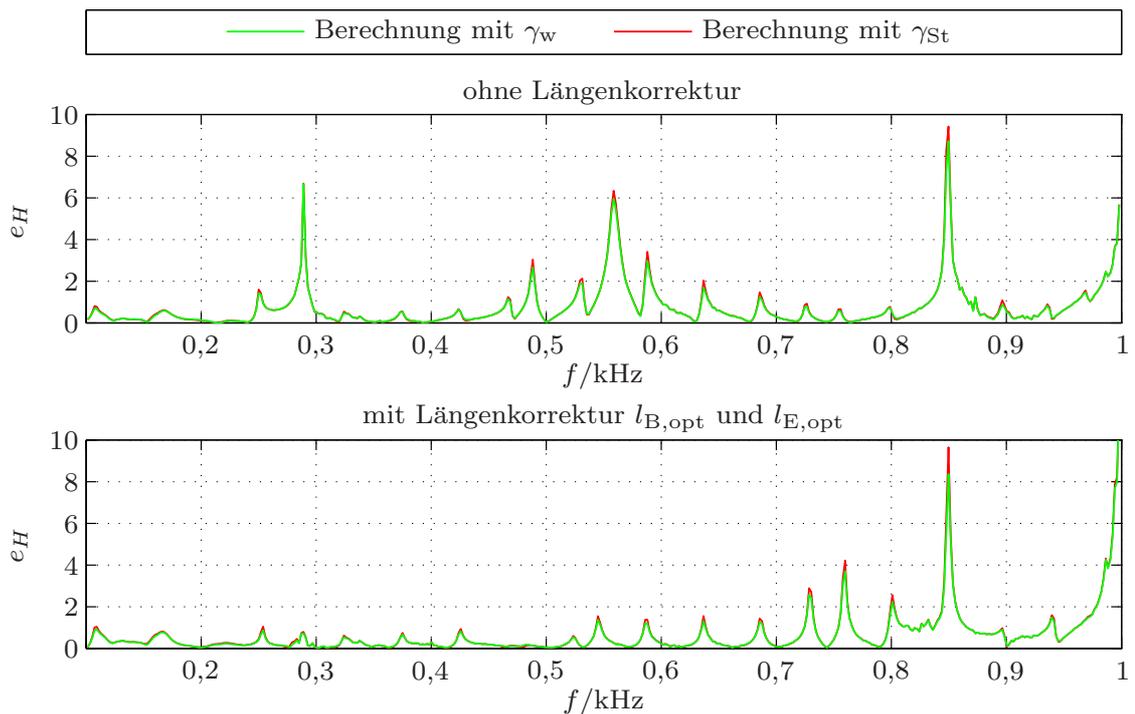


Abbildung 2.12: Vergleich der relativen Fehler bei Berechnung mit den Ausbreitungsmaßen γ_w und γ_{St}

Die Annahme von ideal schallharten Wänden erscheint für Wände aus PVC nicht gerechtfertigt. Mit dem im Abschnitt 1.3 vorgestellten Ausbreitungsmaß zur Berücksichtigung von nicht-ideal schallharten Wänden konnte daher gegenüber dem Modell von STINSON für ideal-schallharte Wände eine höhere Genauigkeit erzielt werden. Es sind jedoch unter dem quantitativen Aspekt weitere validierende Untersuchungen zu empfehlen.

Im zweiten Teil der Arbeit liegt zur Modellierung eines aktiven Schalldämpfers ein anderes Geometriemodell zu Grunde. Auch wenn für dieses keine Validierung erfolgte, ist zu erwarten, dass mit den vorgestellten Zweitormodellen auch ohne Korrektur einzelner Längen das qualitative Übertragungsverhalten mit ausreichender Genauigkeit abgeschätzt werden kann. Dafür ist allerdings noch der Einfluss eines strömenden Mediums in die bisherigen Zweitormodelle einzubetten.

Strömung im Röhrensystem

Bei der Schallausbreitung in einem Röhrensystem sind unter dem Einfluss eines strömenden Mediums neben der durch Viskosität und Wärmeleitung des Mediums bedingten Dämpfung weitere Dämpfungsmechanismen wirksam. So sind beispielsweise im Bereich der Wände beziehungsweise in der sich dort ausbildenden Grenzschicht turbulente Reibungsverluste zu verzeichnen. Zur akustischen Modellierung eines aktiven Schalldämpfers ist zusätzlich zu diesen Dämpfungsmechanismen auch der konvektive Einfluss einer Strömung in die bisherigen Zweitormodelle einzubetten.

Ein strömendes Medium bewirkt ebenfalls eine Verringerung der Grenzfrequenzen, ab denen höhere Moden ausbreitungsfähig werden. Für die zu untersuchende Geometrie des Schalldämpfers liegt, mit Ausnahme der Abzweigung zur Ankopplung des Lautsprechers zur Erzeugung des Gegenschallsignals, Rotationssymmetrie vor. Damit werden keine Abzweigungen durchströmt und es erscheint erlaubt, die Anregung von Azimutalmoden zu vernachlässigen. Betrachtet man ein Medium, das mit der Geschwindigkeit V_n durch eine Röhre mit dem Radius r_n strömt, sind für MACH-Zahlen $M_n = V_n/c$ Radialmoden für

$$\beta_0 r_n = t_{0,m} \sqrt{1 - M_n^2} \quad \Leftrightarrow \quad f_{0,m} \geq \frac{c}{2\pi r_n} t_{0,m} \sqrt{1 - M_n^2} \quad (3.1)$$

ausbreitungsfähig [Morf71, Peat88]. Dabei bezeichnet $t_{0,m}$ die Nullstelle $m+1$ der Ableitung $dJ_0(t_{0,m})/dt_{0,m}$. Für den ersten Radialmodus ergibt sich die Grenzfrequenz zu

$$\beta_0 r_n = 3,832 \sqrt{1 - M_n^2} \quad \Leftrightarrow \quad f_{0,1} = 0,61 \frac{c}{r_n} \sqrt{1 - M_n^2}. \quad (3.2)$$

Dem aktiven Schalldämpfer liegt ein Röhrensystem zu Grunde, das Abmessungen von $r_n \leq 100$ mm aufweist und für Frequenzen $f \leq 1$ kHz sowie für Strömungen mit MACH-Zahlen $M_n < 0,2$ modelliert werden soll. Für die Grenzfrequenz des ersten höheren Modus gilt damit $f_{0,1} > 1$ kHz und die Betrachtung einer Schallausbreitung im Grundmodus ist weiterhin gerechtfertigt. Für $M_n < 0,2$ ist zusätzlich die Annahme einer inkompressiblen Strömung erlaubt [Munj87, GEM95].

3.1 Dämpfungsmaß

In einem strömenden Medium oder bei großen Amplituden der Schallfeldgrößen entstehen durch die Anregung von Turbulenzen zusätzliche Verluste. Sie können einerseits durch hohe Amplituden der Schallfeldgrößen oder andererseits, unabhängig von der Größe der Amplituden, durch die Wechselwirkung des Schalls mit den Wirbeln der Strömung hervorgerufen werden [IS74]. Das Ausbreitungsmaß in einem Leitungselement n kann zunächst allgemein durch

$$\gamma_n = \alpha_{\text{ges},n} + j\beta_n \quad (3.3)$$

dargestellt werden [Munj87]. In einem durchströmten Wellenleiter setzt sich das Dämpfungsmaß

$$\alpha_{\text{ges},n} = \alpha_n + \alpha_{t,n} \quad (3.4)$$

zum einen aus der durch Viskosität und Wärmeleitung verursachten Dämpfung α_n sowie zum anderen aus dem durch Turbulenzen bedingten Anteil $\alpha_{t,n}$ zusammen [Munj87, JI98]. Setzt man ideal schallharte Wände voraus, kann das Dämpfungsmaß $\alpha_n = \alpha_{\text{Mu}}$ und das Phasenmaß $\beta_n = \beta_0 + \alpha_{\text{Mu}}$ mit $r_w = r_n$ aus Abschnitt 1.2.2 zum Einsatz kommen.¹ Für das turbulente Dämpfungsmaß kann für eine kreisrunde Röhre die Abschätzung

$$\alpha_{t,n} \approx \frac{M_n F_n}{r_n} \quad (3.5)$$

angeben werden [IS74, JI98]. Für REYNOLDS-Zahlen $R_n < 4 \cdot 10^5$ lässt sich der Reibungsfaktor durch

$$F_n = 0,0072 + \frac{0,612}{R_n^{0,35}} \quad (3.6)$$

approximieren, während sich die REYNOLDS-Zahl² aus

$$R_n = \frac{2r_n V_n \rho_0}{\eta} \quad (3.7)$$

errechnet [Munj87]. Die durch Turbulenzen hervorgerufene Dämpfung ist in dieser Formulierung, im Gegensatz zu der durch Viskosität und Wärmeleitung bedingten Dämpfung, nicht frequenzabhängig.

¹Für die Berücksichtigung von Wänden, die mit absorbierendem Wandmaterial zur passiven Schalldämpfung ausgekleidet sind und im Bereich der Klima- und Abgastechnik Verwendung finden, sei auf [Munj87, Mech04, PM05] verwiesen.

²Bei großen REYNOLDS-Zahlen $R_n > 2000$ ist die Strömung in einer Röhre turbulent. In der Grenzschicht liegt eine ungeordnete Bewegung der Teilchen vor, während in der Hauptströmung die Teilchen die gleiche Bewegungsrichtung aufweisen. Der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung erfolgt nicht sprunghaft und hängt von vielen Faktoren ab, so dass der zuvor angegebene Werte eher als Anhaltspunkt zu sehen ist [Stöc98].

Die Herleitung von $\alpha_{t,n}$ basiert auf quasi-statischen Annahmen und ist deshalb streng genommen nur für sehr niedrige Frequenzen gültig [IS74, Croc98]. Mit Hilfe von $\alpha_{t,n}$ kann keine exakte Analyse der Wechselwirkung zwischen den Schallfeldgrößen und der turbulenten Strömung erfolgen. Dafür wäre neben den Turbulenzen ebenfalls die Strömungsverteilung im Querschnitt zu betrachten. Daher ist $\alpha_{t,n}$ gemäß Gleichung (3.5) als Näherung anzusehen, die nichtsdestotrotz im Weiteren zur Abschätzung der durch Turbulenzen bedingten Dämpfung Verwendung finden soll.

3.2 Zweitormodellierung eines durchströmten Wellenleiters

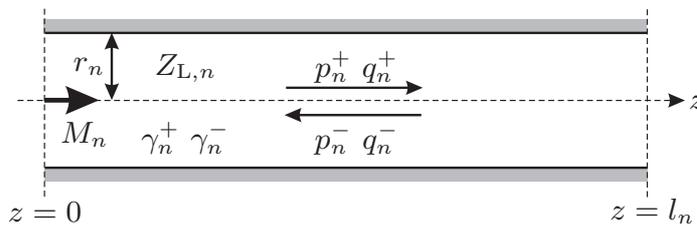


Abbildung 3.1: Akustischer Wellenleiter, der von einem Medium mit der MACH-Zahl M_n durchströmt wird.

Betrachtet man den in Abbildung 3.1 dargestellten akustischen Wellenleiter, ergeben sich mit dem Vektorpotenzial (2.6) die komplexen Amplituden der Schallfeldgrößen zu

$$p_n(z) = p_n^+ + p_n^- = C^+ e^{-\gamma_n^+ z} + C^- e^{\gamma_n^- z}, \quad (3.8a)$$

$$q_n(z) = q_n^+ - q_n^- = \frac{1}{Z_{L,n}} [C^+ e^{-\gamma_n^+ z} - C^- e^{\gamma_n^- z}], \quad (3.8b)$$

wobei die Konstanten C^+ und C^- nicht näher spezifiziert seien. In einem mit der Geschwindigkeit V_n strömenden Medium verändert sich die Geschwindigkeit c der Schallausbreitung nicht, da diese relativ zu den Teilchen im Medium stattfindet. Betrachtet man ein mit V_n in positive z -Richtung strömendes Medium, bewegt sich eine in dieselbe Richtung fortschreitende Welle mit der Geschwindigkeit $c + V_n$ auf einen ruhenden Betrachter zu, während sich eine in negative z -Richtung ausbreitende Welle mit $c - V_n$ fortpflanzt.³ Die hin- und rücklaufenden Wellen besitzen damit für einen ruhenden Betrachter unterschiedliche Geschwindigkeiten. Mit diesem Sachverhalt kann das Ausbreitungsmaß der hin- und rücklaufenden Wellen zu

$$\gamma_n^+ = \frac{\gamma_n}{1 + M_n} = \gamma_n^c [1 - M_n] \quad \text{und} \quad \gamma_n^- = \frac{\gamma_n}{1 - M_n} = \gamma_n^c [1 + M_n] \quad (3.9)$$

³Die komplexen Amplituden p_n , ρ_n und v_n sind unabhängig vom gewählten Bezugssystem. Das gilt auch für die Schallschnelle v_n , da sie eine Geschwindigkeitsdifferenz beschreibt. Die absolute Geschwindigkeit hängt dagegen vom Bezugssystem ab.

formuliert werden. Mit dem konvektiven Ausbreitungsmaß

$$\gamma_n^c = \frac{\gamma_n}{1 - M_n^2} \quad (3.10)$$

folgt aus den Gleichungen (3.8)

$$p_n(z) = e^{M_n \gamma_n^c z} [C^+ e^{-\gamma_n^c z} + C^- e^{\gamma_n^c z}], \quad (3.11a)$$

$$q_n(z) = \frac{e^{M_n \gamma_n^c z}}{Z_{L,n}} [C^+ e^{-\gamma_n^c z} - C^- e^{\gamma_n^c z}]. \quad (3.11b)$$

Damit lässt sich die Kettenmatrix des durchströmten akustischen Leitungselements n der Länge l_n mit den Eingangsgrößen p_n und q_n sowie den Ausgangsgrößen p_{n+1} und q_{n+1} gemäß

$$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} = \mathbf{K}_n^c \begin{bmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

schließlich zu

$$\mathbf{K}_n^c = e^{-M_n \gamma_n^c l_n} \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_n^c l_n) & Z_{L,n} \sinh(\gamma_n^c l_n) \\ \frac{1}{Z_{L,n}} \sinh(\gamma_n^c l_n) & \cosh(\gamma_n^c l_n) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

angeben [Munj87]. Den Ausführungen in [Munj87] folgend, wird $Z_{L,n}$ von den turbulenten Reibungsverlusten, jedoch nicht von der Konvektion beeinflusst. Deshalb erscheint es erlaubt, den im Abschnitt 2.1.1 eingeführten Ausdruck $Z_{L,n} = Z_{L0,n} j \beta_0 / \gamma_n$ mit $\gamma_n = \alpha_{\text{ges},n} + j \beta_n$ für die charakteristische Impedanz zu verwenden.

3.3 Konvektive Schallfeldgrößen

Eine Strömung beeinflusst den akustischen beziehungsweise strömungsakustischen Leistungsfluss im Wellenleiter [MD88]. Dieser Einfluss kann berücksichtigt werden, indem die konventionellen Schallfeldgrößen p_n und q_n , die eine Änderung um den statischen Luftdruck bei einem ruhenden Medium beschreiben, durch die konvektiven Größen p_n^c und q_n^c , welche Änderungen gegenüber dem Gesamtdruck und dem Gesamtschallfluss erfassen, ersetzt werden [SM00]. Die komplexe Amplitude des konvektiven Schalldrucks setzt sich aus

$$p_n^c = [P_0 + p_n] + \frac{\rho_0}{2} [V_n + v_n]^2 - \left[P_0 + \frac{\rho_0}{2} V_n^2 \right] \quad (3.14)$$

zusammen [Munj75]. Die Terme $\rho_0 [V_n + v_n]^2 / 2$ und $\rho_0 V_n^2 / 2$ kennzeichnen die durch die Strömung bedingten Druckanteile. Eine Approximation erster Ordnung führt schließlich auf die Vereinfachung

$$p_n^c = p_n + \rho_0 V_n v_n = p_n + M_n Z_{L0,n} q_n. \quad (3.15)$$

Für die Herleitung der komplexen Amplitude des konvektiven Schallflusses wird zunächst der konvektive Massenfluss

$$m_n^c = A_n [(\rho_0 + \rho_n) [V_n + v_n] - \rho_0 V_n] \quad (3.16)$$

durch eine Röhre mit der Querschnittsfläche A_n betrachtet [Munj75, Munj87]. Dieser lässt sich durch eine Approximation erster Ordnung zu

$$m_n^c = A_n [\rho_n V_n + \rho_0 v_n] \quad (3.17)$$

vereinfachen. Der Übergang zum konvektiven Schallfluss $q_n^c = m_n^c / \rho_0$ führt mit $\rho_n = p_n / c^2$ auf den gesuchten Zusammenhang

$$q_n^c = \frac{M_n}{Z_{L0,n}} p_n + q_n. \quad (3.18)$$

Eine Umrechnung ist schließlich durch die Transformation

$$\begin{bmatrix} p_n^c \\ q_n^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & M_n Z_{L0,n} \\ M_n / Z_{L0,n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

möglich. Zwischen den konventionellen und den strömungsakustischen Schallfeldgrößen besteht also ein linearer Zusammenhang, der über die MACH-Zahl hergestellt wird [SM00].⁴

Wie zu Beginn des Abschnitts erwähnt, verändert sich mit einem strömenden Medium die übertragene akustische Wirkleistung. Diese ergibt sich mit einem strömenden Medium zu

$$P^c = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_n^c \{ q_n^c \}^* \}, \quad (3.20)$$

während in einem ruhendem Medium weiterhin

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_n \{ q_n \}^* \} \quad (3.21)$$

gilt [Munj75].

Umrechnung der Abschlussimpedanzen

Bei einem durchströmten Röhrensystem sind die im Abschnitt 2.3 vorgestellten Abschlussimpedanzen an den konvektiven Einfluss einer Strömung anzupassen. Die konvektive Abschlussimpedanz eines aus N Elementen bestehenden Röhrensystems ist allgemein durch

$$Z_T^c = \frac{p_N^c}{q_N^c} \quad (3.22)$$

⁴Durch den Übergang von den konventionellen Schallfeldgrößen zu den konvektiven Größen bleibt die Kettenmatrix in Gleichung (3.13) unbeeinflusst.

definiert. Durch Einsetzen der konvektiven Größen (3.19) erhält man schließlich mit $Z_T = p_N/q_N$ die gesuchte Umrechnung [Munj75, Munj87]

$$Z_T^c = \frac{p_N + M_N Z_{L,N} q_N}{\frac{M_N}{Z_{L,N}} p_N + q_N} = \frac{Z_T + M_N Z_{L,N}}{\frac{M_N Z_T}{Z_{L,N}} + 1} \quad (3.23)$$

mit der dazugehörigen Kettenmatrix

$$\mathbf{K}_T^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_T^c & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

3.4 Modellierung einer veränderlichen Querschnittsfläche

Die Analyse der Schallausbreitung in einer Röhre mit veränderlicher Querschnittsfläche gestaltet sich mit einem strömenden Medium aufwändiger als ohne Strömung. Ein Grund dafür ist unter anderem die sich in Abhängigkeit von der Querschnittsfläche entlang der Röhre ändernde MACH-Zahl. Analytische Lösungen für inkompressible Strömungen existieren nur für einige rechteckige Querschnittsflächen. Neben einer Segmentierung einzelner Röhrenabschnitte, für die analytische Lösungen angegeben werden können, kommen daher häufig numerische Lösungsverfahren zum Einsatz [GEM95].

3.4.1 Stufenweise Approximation nach Gupta et al.

Für die Einbettung in das Konzept einer stufenweisen Approximation bietet sich der von GUPTA ET AL. erarbeitete Ansatz an [GEM95]. Dieser berücksichtigt eine isentrope⁵ und kompressible Strömung, so dass ihre Methode auch für MACH-Zahlen $M_n > 0,2$ geeignet ist. Dagegen lassen sich Effekte, die durch evaneszente Anregung von höheren Moden entstehen, nicht berücksichtigen. Die Bestimmung der sich entlang der Röhrenelemente ändernden MACH-Zahl erfolgt beim Ansatz von GUPTA ET AL. numerisch. An der Verbindung zweier benachbarter Röhrenelemente stellt ein Zweiter die Einhaltung der Zustandsgleichungen für eine isentrope und kompressible Strömung sicher.

Bei der Herleitung setzten GUPTA ET AL. geringe Veränderungen der Querschnittsfläche voraus. Damit können Verluste an den fiktiven Querschnittsprüngen vernachlässigt werden und die Annahme einer isentropen Strömung ist gerechtfertigt. Das Verfahren eignet sich aufgrund dieser Voraussetzungen jedoch nicht zur Modellierung von größeren Querschnittssprüngen in Form von

⁵Ändert sich die Entropie eines Teilchens in reibungs- und wärmeleitungsfreier Strömung nicht, liegt eine isentrope Strömung vor. Ist die Entropie zusätzliche homogen verteilt, spricht man von einer homentropen Strömung [Spur96].

Aufweitungen oder Verengungen. Diese gilt es jedoch im zweiten Teil der Arbeit bezüglich des aktiven Schalldämpfers zu modellieren. Dafür bietet sich der von MUNJAL erarbeitete Ansatz an [Munj87].

3.4.2 Modellierung von Querschnittssprüngen nach Munjal

Aufweitung $r_n \leq r_{n+1}$	$K = [1 - r_n^2/r_{n+1}^2]^2$
Verengung $r_n \geq r_{n+1}$	$K = \frac{1 - r_{n+1}^2/r_n^2}{2}$

Tabelle 3.1: Verlustkoeffizient zur Modellierung von Querschnittssprüngen

Die an einem Querschnittsprung auftretenden strömungsakustischen Verluste wurden von MUNJAL ebenfalls mit Hilfe eines Zweitors berücksichtigt, das zwischen zwei benachbarten Röhrenelementen einzubetten ist. Die dazugehörige Kettenmatrix lässt sich mit

$$M_{n+1} = M_n \frac{r_n^2}{r_{n+1}^2} \quad (3.25)$$

zu

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Q},n}^c = \begin{bmatrix} 1 - \frac{KM_{n+1}^2}{1 - M_{n+1}^2} & \frac{KM_{n+1}Z_{L,n+1}}{1 - M_{n+1}^2} \\ \frac{[C_{pv} - 1]KM_{n+1}^3}{[1 - M_{n+1}^2]Z_{L,n+1}} & 1 - \frac{[C_{pv} - 1]KM_{n+1}^2}{1 - M_{n+1}^2} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

angeben [Munj87]. Der Verlustkoeffizient K ist der Tabelle 3.1 zu entnehmen.⁶ Dieser stellt ein Maß für die strömungsakustischen Verluste dar, die an einem Querschnittsprung in Wärme umgewandelt werden. Eine Näherung für die obige Kettenmatrix lässt sich für $M_{n+1}^2 \ll 1$ zu

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Q},n}^c \approx \begin{bmatrix} 1 & KM_{n+1}Z_{L,n+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

angeben. Die Kettenmatrix des gesamten Röhrensystems ergibt sich aus dem Produkt der Teilmatrizen

$$\mathbf{K}^c = \left[\prod_{n=1}^{N-1} \mathbf{K}_n^c \mathbf{K}_{\mathbf{Q},n}^c \right] \mathbf{K}_N^c. \quad (3.28)$$

⁶Für die Verengung stellt der Verlustkoeffizient eine Approximation etwa der in [VS75] angegebenen Messwerte dar. Dagegen wurde der von MUNJAL angegebene Verlustkoeffizient für die Aufweitung gemäß [SWB98] korrigiert.

Die Unstetigkeit des Schalldrucks an dem Querschnittssprung wird bei diesem Ansatz durch eine entsprechende Veränderung der Entropie ausgeglichen und durch den strömungsakustischen Widerstand $KM_{n+1}Z_{L,n+1}$ in der Kettenmatrix berücksichtigt. Die evaneszente Anregung von höheren Moden an der Sprungstelle findet damit ebenfalls keine Beachtung. Dazu bietet sich das bereits erläuterte Konzept einer Sprungimpedanz an.

Sprungimpedanz von Peat

Von PEAT wurde die Sprungimpedanz ebenfalls für ein inkompressibel strömendes Medium angegeben [Peat88]. Nach seinen Ergebnissen beeinflusst eine Strömung unwesentlich den reaktiven Anteil der Sprungimpedanz, der den Einfluss von evaneszenten Moden berücksichtigt. Damit bietet sich für den reaktiven Anteil auch die für $M_n = 0$ approximierte Sprungimpedanz $Z_{Q,n}$ aus Abschnitt 2.2.2 als Näherung für $M_n > 0$ an. Für ein strömendes Medium lässt sich die Approximation der Sprungimpedanz insgesamt zu

$$\begin{aligned} Z_{Q,n}^c &= R_{Q,n}^c + Z_{Q,n} \\ &= \rho_0 c \left| \frac{M_n}{\pi r_n^2} - \frac{M_{n+1}}{\pi r_{n+1}^2} \right| + Z_{Q,n} \end{aligned} \quad (3.29)$$

angeben [Peat88].⁷ Der resistive Anteil $R_{Q,n}^c$ ist für eine Aufweitung und die entsprechende Verengung identisch. Dem Konzept von MUNJAL liegen dagegen unterschiedliche Verlustkoeffizienten zu Grunde. Da die am Querschnittssprung durch die Strömung bedingten Verluste durch $R_{Q,n}^c$ zu erfassen sind, erscheinen die von PEAT getroffenen isentropen Annahmen für eine Aufweitung nur unzureichend erfüllt. Zusammenfassend sind weitere Untersuchungen zu empfehlen, um eine genaue Modellierung der Strömungsverluste sowie des Einflusses von evaneszenten Moden im Bereich des Querschnittssprungs zu ermöglichen.

Da Radialmoden bezüglich der zu untersuchenden Röhrengemetrien erst deutlich oberhalb von $f > 1$ kHz ausbreitungsfähig sind, werden sich evaneszente Moden im Verhältnis zu den strömungsakustischen Verlusten an einem Querschnittssprung vermutlich geringer auswirken. Daher wurde in dieser Arbeit auf den etablierten Ansatz von MUNJAL zur Beschreibung eines Querschnittssprungs zurückgegriffen.

⁷Der resistive Anteil $R_{Q,n}^c$ wurde gegenüber [Peat88] bezüglich eines Vorzeichens korrigiert und durch den Betrag abgeschätzt.

— TEIL II —

Algorithmen für die aktive Schalldämpfung

Aktive Schalldämpfung in Röhrensystemen

Passive Schalldämpfer nutzen zur Lärminderung dissipative oder reflektive Effekte aus [Munj87, HM95, MT07]. Die dissipative Schalldämpfung basiert auf dem Prinzip der Schallabsorption. Durch Verwendung absorbierender Materialien wird der eindringenden Schallwelle Energie entzogen. Diese Methode erlaubt eine relativ breitbandige Dämpfung, ist jedoch zur Minderung tieffrequenten Lärms ungeeignet [Han96]. In reflektiven beziehungsweise reaktiven Schalldämpfern reflektieren dagegen Querschnittsprünge den Schall innerhalb des Röhrensystems. Lediglich die nicht reflektierten Schallanteile werden durch den Auslass abgestrahlt. Die geometrische Gestaltung der Querschnittsprünge bestimmt die Dämpfungscharakteristik. Meistens sind sowohl dissipative als auch reflektive Mechanismen an der Dämpfung beteiligt [Han96].

Eine Alternative oder eine Ergänzung zu den passiven Methoden stellt die aktive Schalldämpfung dar [ME89]. Mit aktiven Verfahren lässt sich tieffrequenter Lärm effektiver mindern und die erforderlichen geometrischen Ausmaße des Dämpfers können reduziert werden [KM96, Trim03, KCJ05]. Bei den aktiven Verfahren strahlen ein oder mehrere Lautsprecher ein zum Störschall gegenphasiges Schalldrucksignal ab, das sich am gewünschten Ort der Lärminderung destruktiv mit dem Störschall überlagert. Die Grundidee wurde im Jahr 1933 von LUEG vorgestellt [Lueg33]. Mit der Verfügbarkeit von schnellen digitalen Signalprozessoren konnten die bis dahin verwendeten analogen Filter zur Erzeugung des Gegenschallsignals durch digitale Filter effizient ersetzt werden. Den Weg zu einer nahezu selbstständigen Anpassung an veränderliche Umgebungsbedingungen ebnete die adaptive Signalverarbeitung.

4.1 Blockschaltbild eines ANC-Systems

In Abbildung 4.1 ist ein ANC-System¹ zur aktiven Dämpfung des Störschalls u schematisch und blockweise dargestellt. Die akustischen Pfade werden durch die Übertragungsfunktionen $P_1(z)$, $R_1(z)$ sowie $F_1(z)$ im z -Bereich repräsen-

¹Active-Noise-Control-System

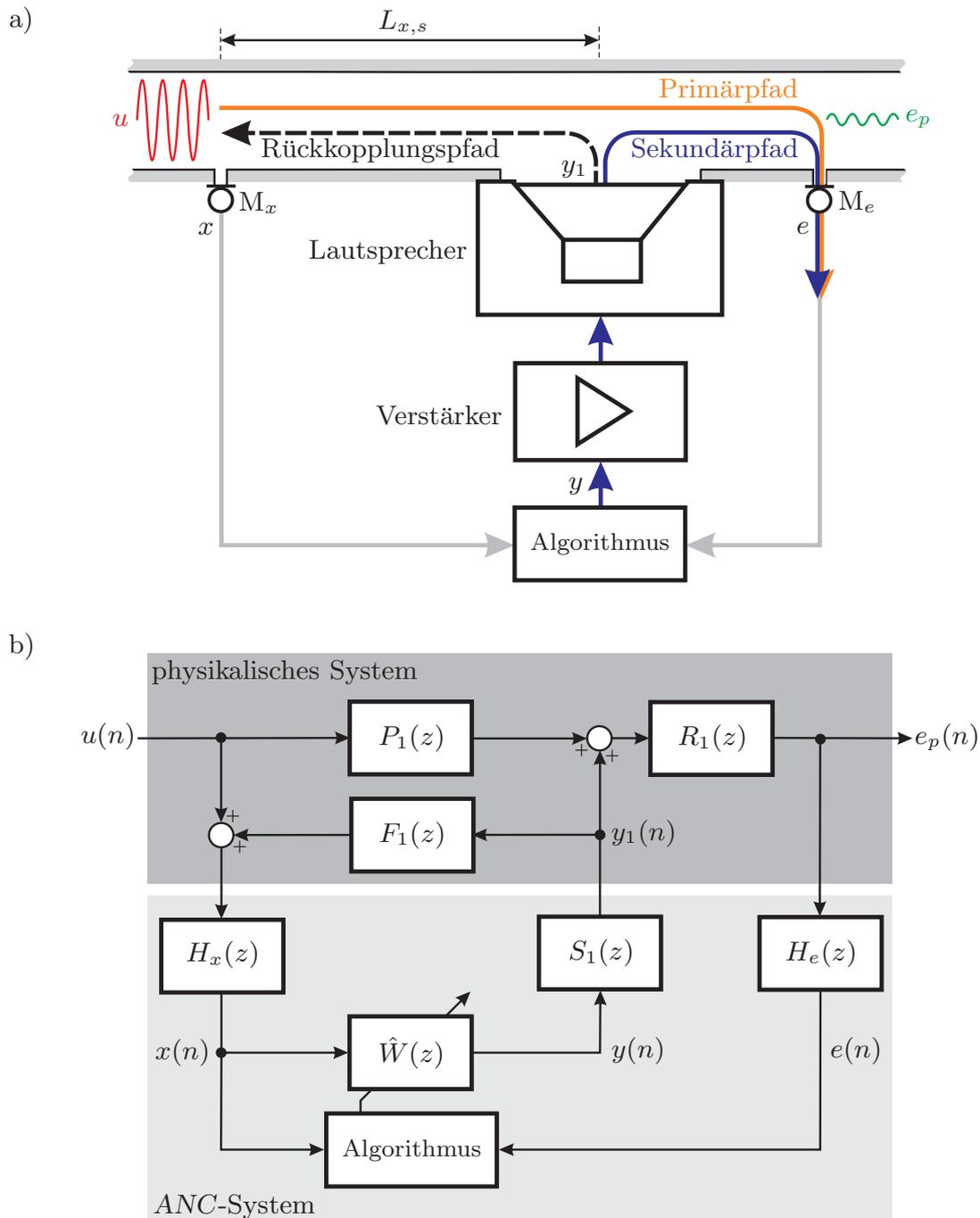


Abbildung 4.1: a) schematische Darstellung der aktiven Schalldämpfung in einem Röhrensystem und b) dazugehöriges Blockschaltbild eines physikalischen Systems nach Einbettung des ANC-Systems [KM96]

tiert. Das Übertragungsverhalten der Mikrofone sowie der Analog-Digital-Umsetzer mit Anti-Alias-Filtern beschreiben die Größen $H_x(z)$ und $H_e(z)$. Das Übertragungsverhalten des Lautsprechers und des Verstärkers sowie der ansteuernden Peripherie, die sich aus dem Digital-Analog-Umsetzer und dem dazugehörigen Tiefpassfilter zusammensetzt, erfasst dagegen $S_1(z)$.

Ein im weiteren Verlauf zu spezifizierender Algorithmus berechnet mit dem messtechnisch erfassten Referenzsignal x und Fehlersignal e die optimalen Koeffizienten des Filters $\hat{W}(z)$. Das Ausgangssignal y des Filters wird verstärkt und über den Lautsprecher abgestrahlt, so dass sich schließlich die gedämpfte Schallwelle e_p in der Röhre fortpflanzt.

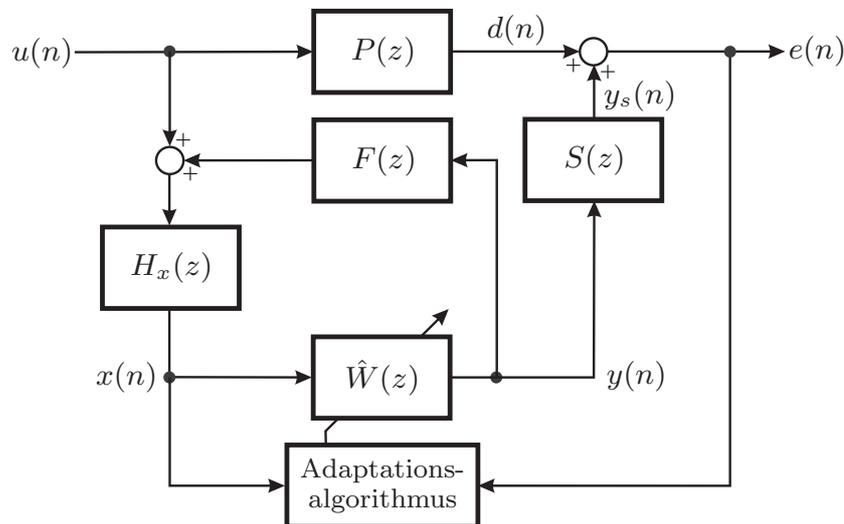


Abbildung 4.2: Vereinfachtes Blockschaltbild eines ANC-Systems mit den zusammengefassten Übertragungsfunktionen des physikalischen Systems [KM96]

Die in Abbildung 4.1 b) dargestellten Teilübertragungsfunktionen können für eine strukturelle Vereinfachung gemäß

$$P(z) = P_1(z)R_1(z)H_e(z), \quad (4.1a)$$

$$S(z) = S_1(z)R_1(z)H_e(z), \quad (4.1b)$$

$$F(z) = F_1(z)S_1(z) \quad (4.1c)$$

zusammengefasst werden, so dass sich das Blockschaltbild in Abbildung 4.2 angeben lässt.² Den Primär- und Sekundärpfad repräsentieren $P(z)$ und $S(z)$, während $F(z)$ den Rückkopplungspfad kennzeichnet.

Für die Bewertung der Schalldämpfung bietet sich bei den simulationstechnischen Untersuchungen die Verwendung des Fehlers $e_p(n)$ als Qualitätskriterium an. Im zusammengefassten Blockschaltbild in Abbildung 4.2 ist $e_p(n)$ allerdings nicht explizit enthalten. Diese Größe lässt sich jedoch mit

$$e_p(n) = r_1(n) * [p_1(n) * u(n) + s_1(n) * y(n)] \quad (4.2)$$

berechnen. Bei $r_1(n)$, $p_1(n)$ und $s_1(n)$ handelt es sich um die Impulsantworten der Übertragungspfade $R_1(z)$, $P_1(z)$ und $S_1(z)$, während das Symbol $*$ die diskrete Faltung symbolisiert.

²Häufig wird dem Summierer in Abbildung 4.2 die Größe y_s mit negativem Vorzeichen zugeführt. In dieser Arbeit wird jedoch die gewählte additive Darstellung bevorzugt, da bei der praktischen Umsetzung keine Anschlüsse umgepolt werden müssen.

4.1.1 Feedforward- und Feedback-Verfahren

Das in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellte ANC-System basiert auf einem *Feedforward*-Verfahren. Zur Dämpfung nicht-periodischer beziehungsweise nicht-stationärer Störsignale muss die Laufzeit des Schalls vom Referenzmikrofon zum Ort der destruktiven Schallüberlagerung größer sein, als die Laufzeit, die das Filter $\hat{W}(z)$ mit seiner Peripherie zur Ausgabe des Gegen-schallsignals benötigt. Mit der Abtastfrequenz f_s sollte für den Abstand des Referenzmikrofons zum Lautsprecher damit

$$L_{x,s} > \frac{c}{f_s} \quad (4.3)$$

gelten. Kann diese Bedingung nicht erfüllt werden, bieten sich Ansätze aus der Multiratenverarbeitung an. Eine Multiratenverarbeitung verwendet zur Abtastung der Mikrofonsignale und zur Ausgabe des Lautsprechersignals die erhöhte Abtastfrequenz Nf_s , während die eigentlichen Algorithmen mit der reduzierten Frequenz f_s arbeiten [BLL02, Lück08].

Das *Feedback*-Verfahren kommt dagegen ohne eine messtechnische Bestimmung des Referenzsignals aus. Es lässt sich auch als *Feedforward*-Verfahren interpretieren, welches auf der Grundlage von intern verfügbaren Signalen das Referenzsignal selbst generiert [KM96]. Jedoch eignet sich dieser Ansatz nur zur Unterdrückung periodischer Störsignale. Da im Folgenden ebenfalls nicht-periodische Signale zu dämpfen sind, empfiehlt sich das *Feedforward*-Verfahren.

4.1.2 Optimale Übertragungsfunktion

Die optimale Übertragungsfunktion für das Filter $\hat{W}(z)$ lässt sich für eine vollständige Schallauslöschung am Ort des Fehlermikrofons mit Abbildung 4.2 und der Bedingung $E(z) = 0$ zu

$$\hat{W}_{\text{opt}}(z) = -\frac{P(z)}{H_x(z) [S(z) - P(z)F(z)]} \quad (4.4)$$

angeben.³ Eine korrekt abgestimmte Sekundärquelle bewirkt mit $\hat{W}_{\text{opt}}(z)$ am Ort des Lautsprechers einen akustischen Kurzschluss. Die Sekundärquelle führt damit zu einer Reflexion der von der Primärquelle erzeugten akustischen Energie [ME88].

In der Praxis lässt sich keine vollständige Schallauslöschung erreichen, da beispielsweise der oder die Lautsprecher keine dem Störsignal räumlich vollständig komplementäre Schalldruckverteilung erzeugen können. Zusätzlich ist die Approximation von $\hat{W}_{\text{opt}}(z)$ nur mit einer endlichen Genauigkeit möglich.

³Ist der Nenner $H_x(z) [S(z) - P(z)F(z)]$ nicht minimalphasig, führt nur die Inverse des minimalphasigen Anteils auf eine stabile Übertragungsfunktion.

4.1.3 Energetische Betrachtungen

Zur aktiven Schalldämpfung ist dem System zunächst sekundäre Energie zuzuführen. Kritiker führen als Argument gegen das aktive Konzept deshalb häufig an, dass sich durch das Zuschalten der Sekundärquellen die Energie des Schallfelds vergrößert und sich nicht reduzieren lässt. Beruht die Schalldämpfung auf Auslöschung durch Interferenz, ist dieser Einwand gerechtfertigt, da eine lokale Schalldämpfung mit einer Erhöhung des Schalldrucks anderenorts verbunden sein kann [Guic07].

Theoretische und praktische Untersuchungen zeigten jedoch auch, dass die Sekundärquellen mit einer geeigneten Anordnung und Ansteuerung die primäre Schallenergie absorbieren und darüber hinaus ebenfalls die von der Primärquelle abgestrahlte Energie beeinflussen können [SH89, OBN92, FH99]. Allerdings erlauben Lautsprecher, die in Röhren koaxial zur Schallausbreitungsrichtung angeordnet sind, nur eine teilweise Absorption, da das den Lautsprechern nachfolgende Röhrensystem eine vollständige Impedanzanpassung verhindert. Dagegen bietet ein Lautsprecher, der das Röhrensystem an einem Ende abschließt, zumindest theoretisch die Möglichkeit einer vollständigen Absorption der einfallenden Schallwelle [Guic07].

4.2 Sensorik und Aktorik

Um sicherzustellen, dass an den Messorten eine ebene Schallausbreitung vorliegt, sollten sich die Mikrofone nicht im Nahbereich des Lautsprechers befinden, da dort auch evaneszente höhere Moden angeregt werden [Trin83, NE95]. Zusätzlich wird im Weiteren vorausgesetzt, dass sich die Sensorik und die Aktorik des ANC-Systems durch lineare Systeme beschreiben lassen. Es existieren aber ebenfalls Methoden und Algorithmen, die für den Einsatz in nichtlinear arbeitenden ANC-Systemen zugeschnitten sind.

Zur Reduzierung nichtlinearer Verzerrungen von elektrodynamischen Lautsprechern bieten sich zum einen Verfahren an, die auf der Grundlage eines mathematischen Modells ein linearisierendes Signal berechnen [Waßm00, Balk02], mit dem der Lautsprecher des ANC-Systems angesteuert wird. Zum anderen kann der nichtlineare Charakter der Übertragungstrecken im ANC-System durch VOLTERRA-Reihen beschrieben beziehungsweise durch Polynomfilter berücksichtigt werden [Math91, DD07].

4.2.1 Referenzsignalerfassung

Das vom Referenzmikrofon erfasste Signal x setzt sich in der Regel aus dem Lärm der Störquelle sowie aus dem vom Lautsprecher zurückgekoppelten Gegenschall zusammen. In [EAM⁺94, ELA99] wurden daher adaptive Konzepte vorgestellt, die auch eine Dämpfung der akustischen Rückkopplung ermögli-

chen. Allerdings ist dort die Stabilität in Abhängigkeit von der Mikrofon- und Lautsprecheranordnung nicht immer sichergestellt [EB90]. Der Einfluss einer Rückkopplung sollte daher zunächst durch gezielte Maßnahmen am Aufbau oder bezüglich der Messwerterfassung reduziert werden.

Zu den Maßnahmen, mit denen sich akustische Rückkopplungen reduzieren lassen, zählt beispielsweise die Verwendung eines unidirektionalen Referenzmikrofons oder einer Lautsprecheranordnung, die den Schall nur in Richtung des Auslasses abstrahlt [WB01]. Alternativ dazu kann der Lautsprecher auch über eine angewinkelte Röhrenverzweigung an die Haupttröhre angekoppelt werden [KT93]. Ebenfalls lässt sich das Schallfeld mit zusätzlichen Mikrofonen und einem Algorithmus zur Aufbereitung der Mikrofonsignale in eine hin- und rücklaufende Welle zerlegen. Als Referenz- und Fehlersignal dienen schließlich jeweils nur die hinlaufenden Wellen [YF99, LYF02]. Zur Dämpfung von Lärm, den rotierende Maschinen oder Motoren erzeugen, bietet sich dagegen wegen der schmalbandigen Zusammensetzung häufig auch ein Drehratensensor für die Referenzsignalergzeugung an [KM96]. Durch die Verwendung eines nicht-akustischen Sensors bleibt das Referenzsignal von akustischen Rückkopplungen unbeeinflusst.

Mögliche akustische Rückkopplungen werden in dieser Arbeit bei den simulationstechnischen Untersuchungen nicht betrachtet und es wird für den Rückkopplungspfad $F(z) = 0$ vorausgesetzt. Das erscheint gerechtfertigt, da sich akustische Rückkopplungen zunächst auch durch die erwähnten Maßnahmen reduzieren lassen.

4.2.2 Fehlersignalerfassung

In [ZH93, CPHZ05] hat sich die Methode, auf der Grundlage von zwei räumlich entsprechend auseinander liegenden Mikrofonen eine Minimierung des akustischen Leistungsflusses durchzuführen, zur Generierung eines Fehlersignals als effektiv erwiesen. Ist dagegen Lärm an einem vom physikalischen Fehlersensor entfernten Ort zu dämpfen, bietet sich das Prinzip der virtuellen Messwerterfassung an. Mit Hilfe räumlich verteilter Mikrofone wird dazu die virtuelle Mikrofonposition durch Interpolation bestimmt [MCKH03, PZCH05].

In dieser Arbeit finden diese Methoden keine Verwendung, da das Fehlersignal auf der klassischen Auswertung eines Sensorsignals basieren soll. Die Einbettung einer modifizierten Fehlersignalbestimmung in die zu thematisierenden Algorithmen wäre jedoch problemlos möglich.

4.2.3 Strömungsinduzierter Störschall

Durch ein strömendes Medium entstehen an den Messorten Turbulenzen, deren zeitlich veränderliche Schalldrücke vom Mikrofon erfasst werden [MI86]. Da ein adaptives *Feedforward*-Verfahren die Korrelation zwischen dem Re-

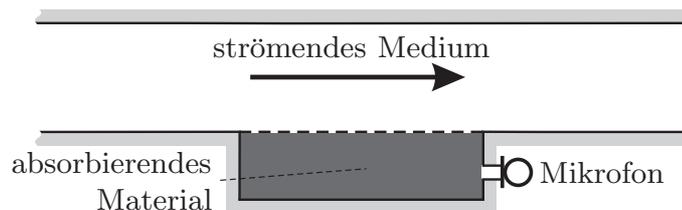


Abbildung 4.3: Mechanische Abschirmung des Mikrofons vor turbulenten Strömungseinflüssen [KM96]

ferenzsignal und dem Fehlersignal zur Adaptation der Filterkoeffizienten ausnutzt, verschlechtern strömungsbedingte nicht-korrelierte Signalanteile das Resultat der aktiven Schalldämpfung [KM96]. Die Generierung des Referenz- und Fehlersignals mit Hilfe von zusätzlichen räumlich verteilten Mikrofonen stellt eine Möglichkeit zur Reduzierung der strömungsinduzierten Schallanteile dar [SLC89, Nish91, LB06]. Kostengünstiger und weniger aufwändig ist dagegen gemäß Abbildung 4.3 die mechanische Abschirmung des Mikrofons.

Bei den simulationstechnischen Untersuchungen der erarbeiteten Algorithmen werden strömungsinduzierte Schallanteile berücksichtigt, die realitätsnah zusätzlich von der Strömungsgeschwindigkeit des Mediums abhängen sollen. Es wird angenommen, dass sich die Turbulenzen durch weißes Rauschen modellieren lassen, wobei die Rauschprozesse unkorreliert vorgegeben sein werden.

Adaptive Digitalfilter

Häufig ändern sich im Betrieb die Übertragungseigenschaften des Systems und die Statistiken der beteiligten Signale oder sie sind bei der Auslegung des ANC-Systems nur unzureichend bekannt. Daher wird ein System benötigt, das sich selbstständig an die vorliegende Situation anpasst. Dazu bieten sich zeitvariante Systeme in Form von adaptiven Filtern an, deren Filterkoeffizienten veränderbar sind. Die Berechnung der optimalen Koeffizienten erfolgt mit Hilfe eines Adaptionsalgorithmus auf der Grundlage eines gemessenen Referenz- und Fehlersignals. Das adaptive Filter und der Algorithmus lassen sich für die praktische Anwendung digital auf Signalprozessoren realisieren.

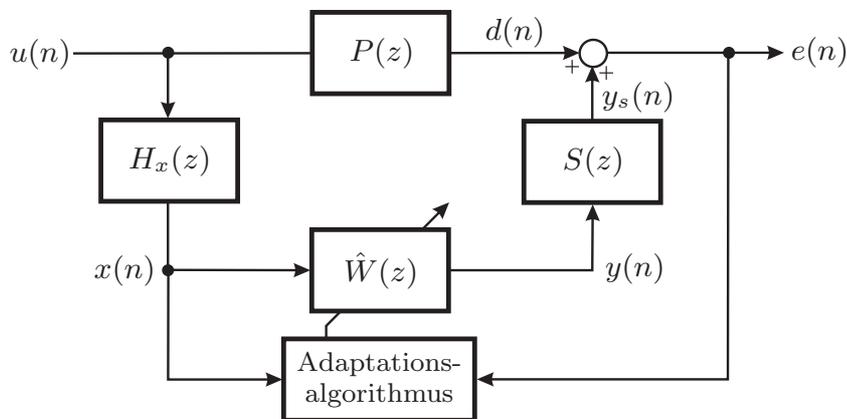


Abbildung 5.1: Blockschaltbild für die Herleitung der Algorithmen

Die Betrachtungen in diesem Kapitel setzen voraus, dass die Übertragungsfunktion $S(z)$ des Sekundärpfads bekannt ist. Darüber hinaus findet keine akustische Rückkopplung vom Lautsprecher zum Referenzmikrofon statt, so dass $F(z) = 0$ gilt. Den weiteren Betrachtungen liegt das Blockschaltbild in Abbildung 5.1 zu Grunde. Im nächsten Kapitel wird für $S(z)$ ebenfalls zeitvarianten Verhalten zugelassen. Die Annahme $F(z) = 0$ bleibt dagegen, wie bereits erwähnt, in dieser Arbeit aufrecht erhalten.

Die Adaptation der Filterkoeffizienten kann im Zeitbereich oder mit einer blockweisen Datenverarbeitung im Frequenzbereich erfolgen. Die Adaptation im Frequenzbereich erfordert, dass sich die Übertragungseigenschaften des zu adaptierenden Systems während der Aufnahme eines Datenblocks nicht verändern. Diese Voraussetzung erscheint für einen Abgasschalldämpfer auch für kurze Blocklängen nicht immer sichergestellt, so dass im Folgenden Verfahren präferiert werden, die im Zeitbereich arbeiten.

Setzt sich das Störsignal nur aus schmalbandigen Komponenten zusammen, können für jede dieser Frequenzanteile auch separate adaptive Filter mit verkürzter Filterlänge verwendet werden [KM96, KGM07, XMKI07]. Da im Weiteren sowohl breit- als auch schmalbandiger Lärm zu dämpfen ist, kommen diese Schmalband-ANC-Systeme nicht zum Einsatz.

5.1 Konvergenz und Tracking

Unter stationären Bedingungen verändert sich die optimale Lösung bezüglich der Filterkoeffizienten nicht und der Adaptationsalgorithmus hat die Aufgabe, das Minimum iterativ zu finden. In nicht-stationärer Umgebung ist die optimale Lösung dagegen zeitvariant.¹ Der Algorithmus hat demnach die Aufgabe, die Filterkoeffizienten entsprechend der optimalen Lösung nachzuführen. Dieser Vorgang wird als *Tracking* bezeichnet.

Obwohl zwischen dem Konvergenz- und *Tracking*-Verhalten eine Beziehung besteht, kennzeichnen beide zwei völlig unterschiedliche Eigenschaften eines adaptiven Verfahrens. Algorithmen mit gutem Konvergenzverhalten weisen trotzdem häufig ebenfalls gute *Tracking*-Eigenschaften auf, wobei die Umkehrung ebenfalls zutreffen kann. Obwohl in der Literatur häufig das Konvergenzverhalten bei adaptiven ANC-Systemen im Mittelpunkt steht, kommt dem *Tracking*-Verhalten dort eigentlich die größere Bedeutung zu [LP99].

Die Algorithmen lassen sich bezüglich des *Tracking*-Verhaltens sowohl theoretisch [HSZ⁺97, YS01] als auch auf der Grundlage von Simulationen untersuchen [Bron93]. Die simulationstechnische Untersuchung kann zum einen durch Vorgabe einer abrupten Änderung der zu adaptierenden Parameter erfolgen, während die Reaktion des adaptiven Filters, beispielsweise in Form des Fehlerverlaufs oder der Parameterabweichung, als Qualitätskriterium ausgewertet wird. Zum anderen bieten sich auch stochastische Modelle zur Simulation von zeitvariantem Systemverhalten an. Bei diesen Modellen gehen die Parameter des zu erzeugenden zeitvarianten Systems aus einer Tiefpassfilterung von unabhängigen GAUSS-Prozessen hervor. Die Wahl der Grenzfrequenzen bestimmt das Maß des nicht-stationären Systemverhaltens, welches mit steigender Grenzfrequenz zunimmt [Bron93].

¹Nicht-stationäre Bedingungen liegen vor, wenn das Übertragungsverhalten eines Systems zeitvariant ist, wobei die beteiligten Signale stationäre oder nicht-stationäre Eigenschaften aufweisen können [HSZ⁺97, YS01, Hayk02].

Eine einfache Form der Systembeschreibung erhält man, wenn für die Tiefpassfilter jeweils die gleichen Übertragungsfunktionen gewählt werden und alle Rauschprozesse die gleiche Varianz aufweisen. Für diesen Fall ergeben sich die Parameter des zeitvarianten Systems zu

$$\mathbf{w}(n) = \sum_{i=0}^I b_i \mathbf{r}_w(n-i) + \sum_{k=1}^K a_k \mathbf{w}(n-k). \quad (5.1)$$

Die Größe $\mathbf{r}_w(n)$ beschreibt einen vektoriellen GAUSS-Prozess, dessen Dimension mit der Anzahl der Systemparameter übereinstimmt. Durch die Wahl von $b_i = \delta(i)$ und $a_k = a\delta(k-1)$ erhält man einen Tiefpass erster Ordnung und die dazugehörigen Ausgangssignale beziehungsweise die Parameter des zeitvarianten Systems entsprechen einem vektoriellen GAUSS-MARKOV-Prozess erster Ordnung der Form [Bron93, Hayk02]

$$\mathbf{w}(n+1) = a\mathbf{w}(n) + \mathbf{r}_w(n). \quad (5.2)$$

In dieser Arbeit kommt bei den simulationstechnischen Untersuchungen nicht das MARKOV-Modell (5.2) zum Einsatz, sondern das *Tracking*-Verhalten

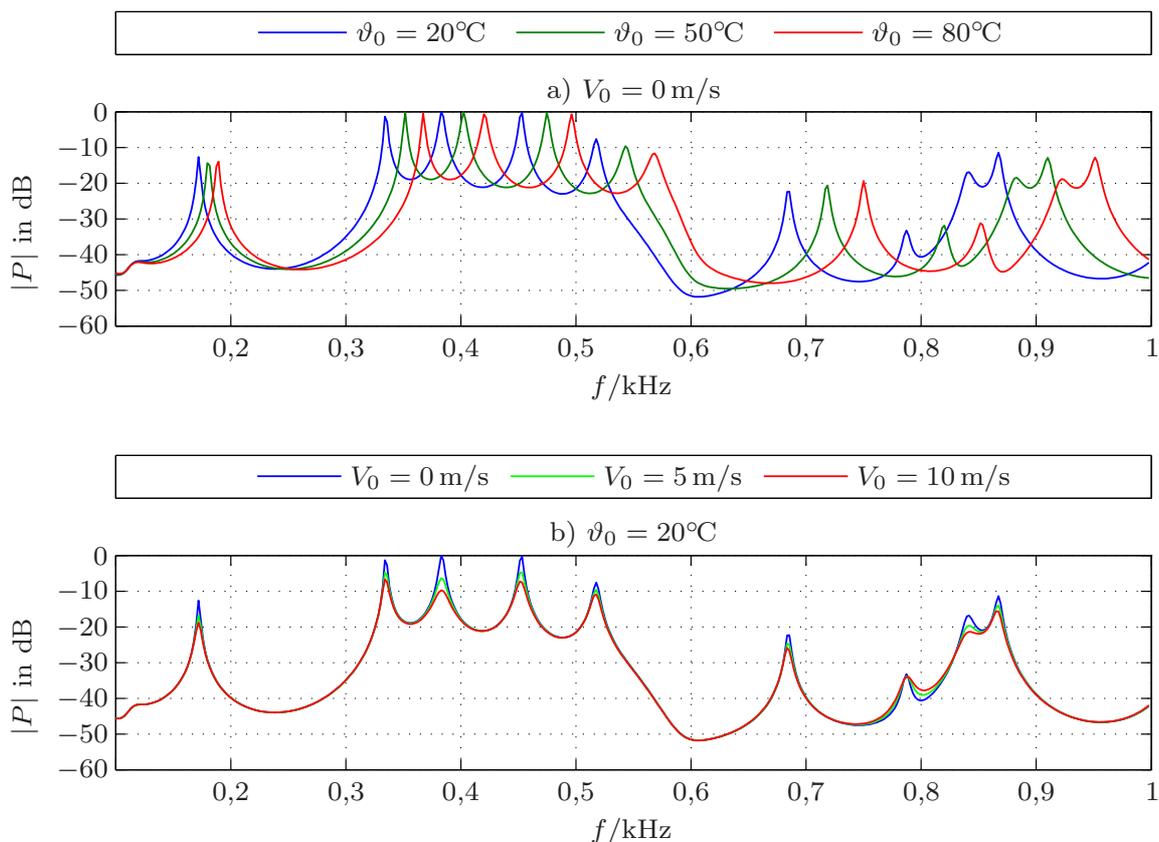


Abbildung 5.2: Normierte Amplitudengänge des Primärpfads in einem Röhrensystem in Abhängigkeit von a) der Gastemperatur ϑ_0 und b) der Strömungsgeschwindigkeit V_0 des Mediums

wird im Kontext eines mathematischen Modells untersucht, das den Bezug zu einem aktiven Abgasschalldämpfer herstellt. Die Vorgabe der Temperatur und der Strömungsgeschwindigkeit des Abgases erfolgt dementsprechend, so dass die Strecken zeitvariantes Übertragungsverhalten zeigen. Für den Primärpfad des aktiven Schalldämpfers ist das exemplarisch in Abbildung 5.2 verdeutlicht. Während unterschiedliche Gastemperaturen zu einer Verschiebung der Resonanzen führen, fallen mit einer zusätzlichen Dämpfung der Resonanzen die Auswirkungen einer veränderlichen Strömungsgeschwindigkeit des Gases dagegen geringer aus. Die Filterkoeffizienten sind mit dem Ziel einer hohen Schalldämpfung, die maßgeblich vom *Tracking*-Verhalten beeinflusst wird, zu adaptieren.

5.2 Transversale Filterstruktur

Am häufigsten findet die Transversalfilterstruktur bei adaptiven Filtern Verwendung. Bei einem *FIR*-Filter² ergibt sich mit dem Eingangssignalvektor

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-L+1)]^T \quad (5.3)$$

und dem Parametervektor

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = [\hat{w}_0(n) \ \hat{w}_1(n) \ \dots \ \hat{w}_{L-1}(n)]^T \quad (5.4)$$

sowie der Impulsantwort $\hat{w}(n)$ des adaptiven Filters das Ausgangssignal zu

$$y(n) = \hat{w}(n) * x(n) = \sum_{i=0}^{L-1} \hat{w}_i(n)x(n-i) = \hat{\mathbf{w}}^T(n)\mathbf{x}(n). \quad (5.5)$$

Die folgenden Betrachtungen setzen reellwertige Signale und Filterkoeffizienten voraus. Aufgabe des Algorithmus ist es, die Filterkoeffizienten $\hat{\mathbf{w}}(n)$ adaptiv so zu bestimmen, dass ein aus dem Fehler

$$e(n) = d(n) + s(n) * [\hat{\mathbf{w}}^T(n)\mathbf{x}(n)] \quad (5.6)$$

gebildetes Fehlermaß minimiert wird. Bei $s(n)$ handelt es sich um die Impulsantwort des Sekundärpfads $S(z)$, während sich das Eingangssignal mit der Impulsantwort $h_x(n)$ des Referenzsensors zu

$$x(n) = h_x(n) * u(n) \quad (5.7)$$

ergibt. Den weiteren theoretischen Betrachtungen liegt zur formalen Vereinfachung die Annahme $h_x(n) = \delta(n)$ beziehungsweise $x(n) = u(n)$ zu Grunde, während in der Simulation des aktiven Abgasschalldämpfers die Übertragungsfunktion $H_x(z)$ durch einen Bandpass modelliert wird.³

²**F**inite-**I**mpulse-**R**esponse-Filter

³Mit einem adäquaten Referenzsensor erscheint die Näherung $x(n) \approx k_x u(n)$ erlaubt. Der Proportionalitätsfaktor k_x lässt sich bei einer praktischen Implementierung durch eine Skalierung von entsprechenden Signalen im ANC-System berücksichtigen oder dieser wird direkt durch den Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{w}}(n)$ adaptiert.

5.3 Rekursive Filterstruktur

Das Ausgangssignal einer rekursiven Filterstruktur ergibt sich mit den Filterkoeffizienten

$$\hat{\mathbf{a}}(n) = [\hat{a}_1(n) \ \hat{a}_2(n) \ \dots \ \hat{a}_K(n)]^T, \quad (5.8a)$$

$$\hat{\mathbf{b}}(n) = [\hat{b}_0(n) \ \hat{b}_1(n) \ \dots \ \hat{b}_{L-1}(n)]^T \quad (5.8b)$$

sowie $\mathbf{x}(n)$ aus Gleichung (5.3) und dem Ausgangssignalvektor

$$\mathbf{y}(n) = [y(n-1) \ y(n-2) \ \dots \ y(n-K)]^T \quad (5.9)$$

zu

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{i=0}^{L-1} \hat{b}_i(n)x(n-i) + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k(n)y(n-k) \\ &= \hat{\mathbf{b}}^T(n)\mathbf{x}(n) + \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{y}(n). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Besitzt das rekursive Filter eine unendlich lange Impulsantwort, spricht man von einem *IIR*-Filter⁴. Nicht jedes rekursive Filter muss zwangsläufig eine unendlich lange Impulsantwort aufweisen. Um die Stabilität des Filters sicherzustellen, müssen die Nullstellen des Nennerpolynoms $z^K [1 - \sum_{k=1}^K \hat{a}_k(n)z^{-k}]$ im Einheitskreis liegen.

Obwohl rekursive Filterstrukturen bei der Implementierung häufig eine geringere Filterordnung als Transversalfilter erfordern und der rekursive Anteil auch zur Dämpfung von akustischen Rückkopplungen eingesetzt werden kann, kommen rekursive Filterstrukturen in der adaptiven Signalverarbeitung seltener zum Einsatz. Gründe dafür sind:

- *Stabilität ist während des Adaptationsprozesses sicherzustellen,*
- *Fehlerfunktion enthält gewöhnlich lokale Minima,*
- *unter Umständen höherer Implementierungsaufwand und Komplexität.*

Zur Koeffizientenbestimmung eines adaptiven rekursiven Filters bietet sich im einfachsten Fall das Verfahren von FEINTUCH an [Fein76]. Obwohl das Verfahren im Mittelpunkt zahlreicher Diskussionen stand [JL77, WM77, CS97] und auf eine Stabilitätskontrolle verzichtet, hat sich der Algorithmus trotzdem im praktischen Einsatz bewährt, da dieser dazu tendiert, die Polstellen vom Einheitskreis in Richtung des Koordinatenursprungs zu adaptieren.

Soll die Stabilität jedoch explizit während des Adaptationsprozesses sichergestellt werden, bietet sich beispielsweise eine Implementierung des rekursiven Filters als *Lattice-Ladder*-Struktur nach GRAY und MARKEL an [GM73,

⁴Infinite-Impulse-Response-Filter

GM75, Rega94, Laro99]. Auf der Grundlage dieser Struktur wurden Algorithmen mit einem reduzierten Implementierungsaufwand beziehungsweise einer reduzierten Komplexität vorgestellt [RFM91, NA98, LSQX03]. Zusätzlich empfehlen sich ebenfalls Ansätze, die auf dem Konzept der Hyperstabilität basieren und deren Ursprünge der Theorie zur Regelung von nichtlinearen zeitvarianten Systemen entstammen [LTJ80, Rega94, Häns01]. Die folgenden Betrachtungen werden sich auf transversale Filterstrukturen beschränken.

5.4 Gradientenverfahren

Das Gradientenverfahren, das auch als *Verfahren des steilsten Abstiegs* bezeichnet wird, ist ein häufig angewendeter Algorithmus zur rekursiven Parameterschätzung. Dieser sucht die von der Fehlerfunktion

$$\xi(n) = \mathcal{E}\{e^2(n)\} \quad (5.11)$$

gebildete Fehlerfläche der Dimension $L + 1$ auf ihr Minimum ab, wobei der Erwartungswertoperator durch $\mathcal{E}\{\cdot\}$ gekennzeichnet ist. Häufig wird $\xi(n)$ auch als Kostenfunktion bezeichnet, die es zu minimieren gilt. In jedem Zeitschritt erfolgt nach der Rekursionsvorschrift

$$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1) = \hat{\boldsymbol{w}}(n) - \frac{\mu}{2} \nabla \xi(n) \quad (5.12)$$

mit der Schrittweite $\mu > 0$ die Bestimmung eines neuen Koeffizientenvektors. Zur Berechnung von $\nabla \xi(n)$ ist nach Gleichung (5.6) die Impulsantwort $s(n)$ des Sekundärpfads erforderlich, so dass diese vorab (*offline*) oder während des Adaptationsprozesses (*online*) zu schätzen ist. Die Approximation dieser Impulsantwort sei im Weiteren durch $\hat{s}(n)$ gekennzeichnet. Verwendet man in Gleichung (5.6) die Näherung $s(n) \approx \hat{s}(n)$, lässt sich mit

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}}(n) &= \hat{s}(n) * \boldsymbol{x}(n) \\ &= [\tilde{x}(n) \quad \tilde{x}(n-1) \quad \dots \quad \tilde{x}(n-L+1)]^T \end{aligned} \quad (5.13)$$

der Gradient zu

$$\nabla \xi(n) = 2 \mathcal{E}\{\tilde{\boldsymbol{x}}(n)e(n)\} \quad (5.14)$$

angeben.

Wird der mittlere quadratische Fehler zur Gradientenbestimmung herangezogen, spricht man vom **MSE-Algorithmus**⁵. Für ergodische Signale kann der Erwartungswert auch durch eine zeitliche Mittelung der entsprechenden Größe

⁵**Mean-Square-Error**-Algorithmus

abgeschätzt werden [PP02]. Wird dagegen der Erwartungswert direkt durch den Momentanwert dargestellt, führt das schließlich mit

$$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1) = \hat{\boldsymbol{w}}(n) - \mu \tilde{\boldsymbol{x}}(n)e(n) \quad (5.15)$$

auf den **FxLMS**-Algorithmus⁶. Die Bezeichnung ist durch die Tatsache begründet, dass zur Gradientenbestimmung unter anderem eine Filterung der Eingangsgröße $x(n)$ mit der Übertragungsfunktion des Sekundärpfads durchgeführt werden muss und dass dieser auf dem von WIDROW und HOFF vorgestellten klassischen **LMS**-Algorithmus⁷ basiert [WH60].

Der klassische **LMS**-Algorithmus setzt $\hat{s}(n) = \delta(n)$ und damit $\tilde{x}(n) = x(n)$ voraus. Da das statistische Fehlermaß in Form des Erwartungswerts durch den Momentanwert abgeschätzt worden ist, konvergiert das **LMS**-Verfahren nur im stochastischen Sinn. Die auf diese Weise ermittelten Filterkoeffizienten stimmen nur im Scharmittelwert mit der optimalen Lösung des WIENER-Filters überein. Für ergodische Prozesse werden für kleine Schrittweiten nach hinreichend langer Mittelungsdauer die optimalen Parameter approximiert [Bron93].

5.4.1 Schrittweite

Die Schrittweite hat einen entscheidenden Einfluss auf die Konvergenz. Ist μ zu klein gewählt, ergibt sich eine langsame Konvergenz, während ein zu großes μ instabiles Verhalten zur Folge haben kann. Die Eigenwertspreizung der Autokorrelationsmatrix von $\tilde{x}(n)$ diktiert bei den **LMS**-basierten Algorithmen eine obere Grenze für die Schrittweite μ . Damit weisen diese Verfahren eine signalabhängige Konvergenz auf, die sich vor allem bei schmalbandigen Signalen mit großen Unterschieden in der spektralen Zusammensetzung auswirkt. Bei stationären Signalen sind die Auswirkungen weniger gravierend als bei nichtstationären [Bron93, KM96, Hayk02].

Zur Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit bietet es sich an, die Schrittweite an das Signal $\tilde{x}(n) = \hat{s}(n) * x(n)$ zu koppeln. Eine Normalisierung lässt sich mit $0 < \alpha < 2$ zu

$$\mu(n) = \frac{\alpha}{\beta + \tilde{\boldsymbol{x}}^T(n)\tilde{\boldsymbol{x}}(n)} \quad (5.16)$$

angeben.⁸ Die Wahl von $0 < \beta < 1$ verhindert, dass der Algorithmus für kleine Signalvarianzen divergiert. Die Verwendung von $\beta = 0$ führt schließlich auf den **NLMS**-Algorithmus⁹. Die Rekursionsgleichungen eines normalisierten **LMS**-Verfahrens sind im Anhang C zusammengefasst.

⁶**F**iltered-**x**-**L**east-**M**ean-**S**quare-Algorithmus

⁷**L**east-**M**ean-**S**quare-Algorithmus

⁸Die obere Grenze von α ist als oberer Richtwert zu interpretieren, die in Abhängigkeit von den Eigenschaften des Sekundärpfads nach unten zu korrigieren ist.

⁹**N**ormalized-**L**east-**M**ean-**S**quare-Algorithmus

5.4.2 FxLMS-Algorithmus

Der FxLMS-Algorithmus, dessen Einbettung in ein ANC-System der Abbildung 5.3 zu entnehmen ist, stand im Mittelpunkt zahlreicher Untersuchungen. Es lässt sich resümieren, dass sich mit einem Sekundärpfad, für den $s(n) \neq \delta(n)$ gilt, das Konvergenz- und *Tracking*-Verhalten in nicht-stationärer Umgebung verschlechtert. Es sind kleine Schrittweite vorzugeben, um bei Abweichungen zwischen $\hat{s}(n)$ und $s(n)$, welche durch Zeitvarianzen oder Ungenauigkeiten bei der vorab durchgeführten Modellierung des Sekundärpfads begründet sein können, die Stabilität des Algorithmus zu gewährleisten [LP04, SGK05, KS05a]. Zusätzlich kann die Faltung von $x(n)$ mit $\hat{s}(n)$ die statistischen Eigenschaften des zur Koeffizientenbestimmung verwendeten Signals $\tilde{x}(n)$ beeinflussen und sich damit negativ auf das Konvergenz- und *Tracking*-Verhalten auswirken [Schi95].

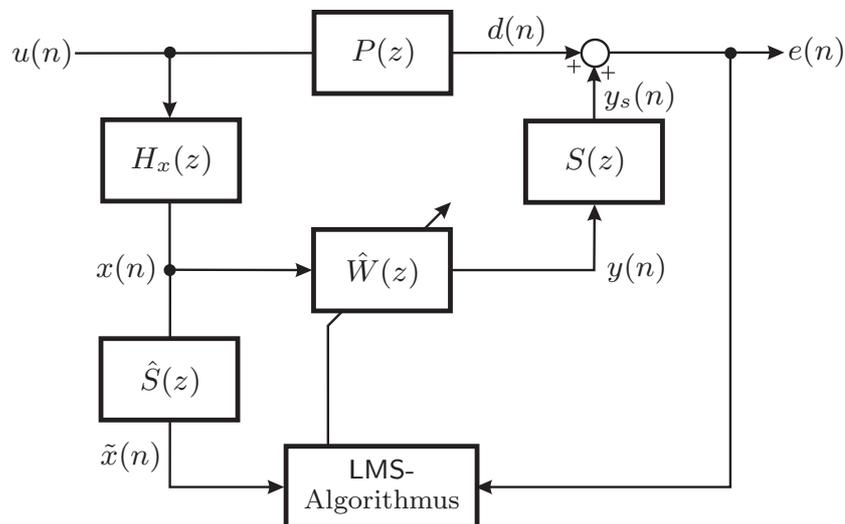


Abbildung 5.3: Blockschaltbild zum FxLMS-Algorithmus [KM96]

Ausgehend von Abbildung 5.3 wird das Referenzsignal $x(n)$ zur Erzeugung des Gegenschallsignals $y_s(n)$ zunächst mit $\hat{w}(n)$ und dann mit $s(n)$ gefaltet. Beim FxLMS-Algorithmus erfolgt zur Koeffizientenbestimmung die Faltung jedoch zuerst mit $\hat{s}(n)$ und dann mit $\hat{w}(n)$. Unter stationären Bedingungen durchaus legitim, ist die Vertauschung der Faltungsoperationen unter nicht-stationären Bedingungen unzulässig [TSO06]. Um den dadurch bedingten Fehler zu kompensieren und somit die Wahl von größeren Schrittweiten zu ermöglichen, stellten BRONZEL und FLOCKTON unabhängig voneinander die MFx-Struktur¹⁰ vor [Bron93, Floc93, LP04]. Die MFx-Struktur ist im Anhang C dargestellt. In diese lassen sich ebenfalls die im Folgenden vorzustellenden Algorithmen einbetten.

¹⁰Modified-Filtered-x-Struktur

Der Einfluss eines vorab ungenau geschätzten Übertragungsverhaltens des Sekundärpfads kann mit einem entsprechend entworfenen Filter, das in einer zusätzlichen Rückkopplungsschleife eingebettet ist, reduziert werden [KS05b, SXC07]. In dieser Arbeit soll die Schätzung des zeitvarianten Sekundärpfads in Form der Impulsantwort $\hat{s}(n)$ jedoch adaptiv erfolgen. Verfahren zur *Online-Modellierung* werden dazu im nächsten Kapitel thematisiert.

5.5 LS-Algorithmus

Der LS-Algorithmus¹¹ und seine rekursiven Varianten basieren auf dem Anfang des Neunzehnten Jahrhunderts von GAUSS vorgestellten *Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate* [Bron93]. Die Herleitung des LS-Algorithmus erfolgt im Weiteren auf der Grundlage des Blockschaltbilds in Abbildung 5.1 zunächst losgelöst vom Kontext eines ANC-Systems im Rahmen einer Systemerkennung. Die Größen $d(n)$ und $x(n)$ seien dazu als bekannt vorausgesetzt und der Sekundärpfad soll durch den Schätzwert $\hat{s}(n)$ beschrieben werden. Damit lässt sich der Fehler mit $\tilde{\mathbf{x}}(n) = \hat{s}(n) * \mathbf{x}(n)$ und einer Vertauschung der Faltungsoperationen zu

$$e(n) = d(n) + \hat{\mathbf{w}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n) \quad (5.17)$$

formulieren.¹²

Wertet man die obige Fehlergleichung für $K \geq L$ Abtastwerte im Intervall $n - K + 1 \leq k \leq n$ aus, können die K Gleichungen mit

$$\mathbf{e}(n) = [e(n - K + 1) \ e(n - K + 2) \ \dots \ e(n)]^T, \quad (5.18a)$$

$$\mathbf{d}(n) = [d(n - K + 1) \ d(n - K + 2) \ \dots \ d(n)]^T, \quad (5.18b)$$

$$\mathbf{A}(n) = [\tilde{\mathbf{x}}(n - K + 1) \ \tilde{\mathbf{x}}(n - K + 2) \ \dots \ \tilde{\mathbf{x}}(n)]^T \quad (5.18c)$$

auch in der Notation

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) + \mathbf{A}(n)\hat{\mathbf{w}}(n) \quad (5.19)$$

angegeben werden, wobei der Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{w}}(n)$ im betrachteten Intervall als konstant vorausgesetzt wird. Mit den als bekannt anzusehenden Wertepaaren $(\mathbf{d}(n), \tilde{\mathbf{x}}(n))$ ist der Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{w}}(n)$ so zu bestimmen, dass der Fehler

$$\xi(n) = \frac{1}{K} \mathbf{e}^T(n) \mathbf{e}(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=n-K+1}^n e^2(k) \quad (5.20)$$

¹¹**L**east-**S**quares-Algorithmus

¹²Mit der MFx-Struktur im Anhang C kann der Fehler, der bei einer Vertauschung der Faltungsoperationen entsteht, kompensiert werden.

minimal wird. Für die Minimierung lässt sich der Gradient bezüglich $\hat{\boldsymbol{w}}(n)$ mit den Größen

$$\boldsymbol{\varphi}(n) = \frac{1}{K} \mathbf{A}^T(n) \mathbf{d}(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=n-K+1}^n d(k) \tilde{\boldsymbol{x}}(k), \quad (5.21a)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(n) = \frac{1}{K} \mathbf{A}^T(n) \mathbf{A}(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=n-K+1}^n \tilde{\boldsymbol{x}}(k) \tilde{\boldsymbol{x}}^T(k) \quad (5.21b)$$

zu

$$\nabla \xi(n) = 2\boldsymbol{\varphi}(n) + 2\boldsymbol{\Phi}(n) \hat{\boldsymbol{w}}(n) \quad (5.22)$$

angeben.¹³ Die Auswertung von $\nabla \xi(n) = 0$ führt schließlich auf

$$\boldsymbol{\varphi}(n) = -\boldsymbol{\Phi}(n) \hat{\boldsymbol{w}}(n). \quad (5.23)$$

Während die Matrix $\mathbf{A}(n)$ nur für $K = L$ quadratisch ist, handelt es sich bei $\boldsymbol{\Phi}(n) = \boldsymbol{\Phi}^T(n)$ immer um eine quadratische Matrix der Dimension $L \times L$. Geht man davon aus, dass $\boldsymbol{\Phi}(n)$ nicht singulär ist, existiert die Inverse und der optimale Koeffizientenvektor kann zu

$$\hat{\boldsymbol{w}}(n) = -\boldsymbol{\Phi}^{-1}(n) \boldsymbol{\varphi}(n) \quad (5.24)$$

bestimmt werden. Für $K > L$ existieren mehr Gleichungen als Unbekannte. Die Lösung nach dem *Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate* führt für diesen Fall auf den Koeffizientenvektor $\hat{\boldsymbol{w}}(n)$, der die Summe des Fehlerquadrats über das gleitende Fenster der Länge K minimiert.

Da die Wertepaare innerhalb des Rechteckfensters der Länge K ausgewertet werden, hängt $\hat{\boldsymbol{w}}(n)$ auch nur von diesen K Werten ab. Aktuelle Signalwerte haben für große Fensterlängen aufgrund der zeitlichen Mittelung einen immer geringeren Einfluss auf die Bestimmung von $\hat{\boldsymbol{w}}(n)$. Zusätzlich ist für jedes Berechnungsintervall die Inverse $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(n)$ zu bestimmen. Das kann mit einem sehr hohen Berechnungsaufwand verbunden sein. Daher empfehlen sich rekursive Verfahren, bei denen die neuen Koeffizienten nicht auf der Basis von Gleichung (5.24) für jedes Intervall neu ermittelt werden, sondern durch eine Korrektur der Koeffizienten aus dem vorherigen Zeitschritt hervorgehen. Dieser Ansatz führt auf den RLS-Algorithmus¹⁴.

¹³Die Größen $\boldsymbol{\varphi}(n)$ und $\boldsymbol{\Phi}(n)$ sind als Summen über determinierte Signale definiert. Da keine statistischen Kenngrößen benötigt werden, handelt es sich beim LS-Algorithmus um ein deterministisches Verfahren. Liegt eine statistische Betrachtung zu Grunde, stellen die Größen $d(n)$ und $\tilde{\boldsymbol{x}}(n)$ Musterfunktionen von ergodischen Zufallsprozessen dar. Schätzwerte für den Kreuzkorrelationsvektor $\boldsymbol{p}(n) = \mathcal{E}\{d(n)\tilde{\boldsymbol{x}}(n)\}$ und die Autokorrelationsmatrix $\mathbf{R}(n) = \mathcal{E}\{\tilde{\boldsymbol{x}}(n)\tilde{\boldsymbol{x}}^T(n)\}$ sind durch die Größen $\boldsymbol{\varphi}(n)$ und $\boldsymbol{\Phi}(n)$ gegeben [Häns01].

¹⁴**R**ecursive-**L**east-**S**quares-Algorithmus

5.6 RLS-Algorithmus

Neben einem gleitenden Rechteckfenster gemäß der Fehlerdefinition (5.20) kann auch ein exponentiell gewichtetes Fenster der Form

$$\xi(n) = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} e^2(k) \quad (5.25)$$

mit $0 \ll \lambda \leq 1$ Verwendung finden. Für $\lambda \neq 1$ bekommen aktuellere Werte ein größeres Gewicht zugemessen als länger zurückliegende. Mit fortschreitender Zeit werden ältere Werte quasi vergessen und man bezeichnet λ daher auch als *Forgetting-Faktor*. Für den exponentiell gewichteten LS-Algorithmus lassen sich die Ausdrücke

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} d(k) \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad \text{und} \quad \Phi(n) = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} \tilde{\mathbf{x}}(k) \tilde{\mathbf{x}}^T(k) \quad (5.26)$$

angeben.¹⁵ Man sieht, dass eine rekursive Berechnung dieser Größen durch

$$\Phi(n) = \lambda \Phi(n-1) + \tilde{\mathbf{x}}(n) \tilde{\mathbf{x}}^T(n), \quad (5.27a)$$

$$\varphi(n) = \lambda \varphi(n-1) + d(n) \tilde{\mathbf{x}}(n) \quad (5.27b)$$

gegeben ist [Bron93, Hayk02]. Zur Reduzierung der Komplexität von $\mathcal{O}\{L^3\}$ auf $\mathcal{O}\{L^2\}$ bietet sich die Vermeidung einer direkten Invertierung von $\Phi(n)$ an. Mit dem als SHERMAN-MORRISON-Identität bezeichneten Lemma lässt sich eine rekursive Berechnung der inversen Matrix durchführen, die sich zu

$$\Phi^{-1}(n) = \lambda^{-1} \left[\Phi^{-1}(n-1) - \frac{\Phi^{-1}(n-1) \tilde{\mathbf{x}}(n) \tilde{\mathbf{x}}^T(n) \Phi^{-1}(n-1)}{\lambda + \tilde{\mathbf{x}}^T(n) \Phi^{-1}(n-1) \tilde{\mathbf{x}}(n)} \right] \quad (5.28)$$

ergibt [Bron93]. Die Definition

$$\Phi^{-1}(n) = \mathbf{P}(n) \quad (5.29)$$

erlaubt mit der KALMAN-Verstärkung

$$\kappa(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1) \tilde{\mathbf{x}}(n)}{\lambda + \tilde{\mathbf{x}}^T(n) \mathbf{P}(n-1) \tilde{\mathbf{x}}(n)} \quad (5.30)$$

schließlich die Herleitung der kompakteren Darstellung

$$\mathbf{P}(n) = \lambda^{-1} [\mathbf{P}(n-1) - \kappa(n) \tilde{\mathbf{x}}^T(n) \mathbf{P}(n-1)]. \quad (5.31)$$

¹⁵Interpretiert man $d(n)$ und $\tilde{\mathbf{x}}(n)$ wieder als Musterfunktionen von ergodischen Zufallsprozessen, können $\varphi(n)$ und $\Phi(n)$ als entsprechend normierte Schätzwerte für die Kreuzkorrelation von $d(n)$ und $\tilde{\mathbf{x}}(n)$ sowie die Autokorrelation von $\tilde{\mathbf{x}}(n)$ angesehen werden.

Aus der Umformung von Gleichung (5.30) gemäß

$$\boldsymbol{\kappa}(n) = \lambda^{-1} [\mathbf{P}(n-1) - \boldsymbol{\kappa}(n) \tilde{\mathbf{x}}^T(n) \mathbf{P}(n-1)] \tilde{\mathbf{x}}(n) \quad (5.32)$$

geht nach einem Vergleich mit Gleichung (5.31) die Beziehung

$$\boldsymbol{\kappa}(n) = \mathbf{P}(n) \tilde{\mathbf{x}}(n) \quad (5.33)$$

hervor [KM96, Hayk02]. Im statistischen Kontext kann $\mathbf{P}(n)$ auch als skalierte Kovarianzmatrix des geschätzten Koeffizientenvektors $\hat{\mathbf{w}}(n)$ gemäß

$$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\sigma^2} \mathcal{E} \{ [\hat{\mathbf{w}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt}}(n)] [\hat{\mathbf{w}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt}}(n)]^T \} \quad (5.34)$$

interpretiert werden, wobei der Skalierungsfaktor σ^2 nicht näher spezifiziert sei [Bron93, Hayk02].

5.6.1 Rekursionsgleichung für den Koeffizientenvektor

Ausgangspunkt zur Herleitung der Rekursionsgleichung ist die Gleichung

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = -\mathbf{P}(n) \boldsymbol{\varphi}(n). \quad (5.35)$$

Ziel ist es, den Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{w}}(n)$ mit Hilfe von Größen aus dem letzten Zeitschritt $n-1$ zu bestimmen. Das Einsetzen von Gleichung (5.27b) führt zunächst auf

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = -\lambda \mathbf{P}(n) \boldsymbol{\varphi}(n-1) - \mathbf{P}(n) \tilde{\mathbf{x}}(n) d(n). \quad (5.36)$$

Wird der erste Ausdruck für $\mathbf{P}(n)$ durch den aus Gleichung (5.31) ersetzt, lässt sich mit $\hat{\mathbf{w}}(n-1) = -\mathbf{P}(n-1) \boldsymbol{\varphi}(n-1)$ und der KALMAN-Verstärkung (5.33) die Rekursionsgleichung

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = \hat{\mathbf{w}}(n-1) - \boldsymbol{\kappa}(n) [d(n) + \hat{\mathbf{w}}^T(n-1) \tilde{\mathbf{x}}(n)] \quad (5.37)$$

formulieren. Der *a priori* Fehler

$$e(n|n-1) = d(n) + \hat{\mathbf{w}}^T(n-1) \tilde{\mathbf{x}}(n) \quad (5.38)$$

erfasst die Abweichung, die vor einer Aktualisierung des Koeffizientenvektors zwischen der Größe $d(n)$ und dem aus $\hat{\mathbf{w}}(n-1)$ sowie $\tilde{\mathbf{x}}(n)$ gebildeten Schätzwert zu beobachten ist. Da dieser auch die Information enthält, die durch $d(n)$ und $\tilde{\mathbf{x}}(n)$ neu hinzu kommt, spricht man in diesem Zusammenhang auch von der *Innovation* [Häns01]. Der rekursive Algorithmus in Gleichung (5.37) basiert auf dem *a priori* Fehler, während dem eigentlichen LS-Algorithmus der Fehler $e(n)$ zu Grunde liegt.

Im Kontext eines ANC-Systems ist jedoch im Gegensatz zum Fehler $e(n)$ der *a priori* Fehler beziehungsweise das Signal $d(n)$ messtechnisch nicht zugänglich. Ersetzt man daher in der Rekursionsgleichung den *a priori* Fehler

durch die gemessene Größe $e(n)$ und verschiebt für eine praktische Implementierung den Zählindex beim Koeffizientenvektor um einen Zeitschritt, erhält man die Rekursionsgleichung [KM96]

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{w}}(n+1) &= \hat{\boldsymbol{w}}(n) - \boldsymbol{\kappa}(n)[d(n) + \hat{\boldsymbol{w}}^T(n)\tilde{\boldsymbol{x}}(n)] \\ &= \hat{\boldsymbol{w}}(n) - \boldsymbol{\kappa}(n)e(n).\end{aligned}\tag{5.39}$$

Eine vollständige Darstellung der zu implementierenden Rekursionsgleichungen kann dem Anhang C entnommen werden. Als Startwert für $\boldsymbol{P}(0)$ bietet sich eine Diagonalmatrix der Gestalt

$$\boldsymbol{P}(0) = c^{-1}\mathbf{I}_L\tag{5.40}$$

an. Der Regularisierungsfaktor kann zu $c = \sigma_{\tilde{x}}^2$ gewählt werden, wobei $\sigma_{\tilde{x}}^2$ der Varianz der Größe $\tilde{x}(n)$ entspricht.

5.6.2 Eigenschaften des RLS-Algorithmus

Wird beim RLS-Algorithmus $\boldsymbol{P}(n) = \mu\mathbf{I}_L$ gewählt, ergibt sich die KALMAN-Verstärkung zu $\boldsymbol{\kappa}(n) = \mu\tilde{\boldsymbol{x}}(n)$ und man erhält die Rekursionsgleichung (5.15) des LMS-Algorithmus. Den LMS-basierten Verfahren unterliegt also die Annahme, dass es sich bei $\tilde{x}(n)$ um weißes Rauschen mit der Varianz $\sigma_{\tilde{x}}^2 = \mu^{-1}$ handelt [Hayk02]. Daher besitzt typischerweise der RLS-Algorithmus eine höhere Konvergenzgeschwindigkeit als der LMS-Algorithmus und ist darüber hinaus gegenüber großen Eigenwertspreizungen bezüglich der Autokorrelationsmatrix des Referenzsignals unempfindlich [Bron93, HSZ⁺97]. Zur Dämpfung von Signalen, bei denen monofrequente Signalanteile dominieren, sind RLS-Verfahren deshalb häufig geeigneter [SAG93].

Der RLS-Algorithmus weist die Komplexität $\mathcal{O}\{L^2\}$ auf, die für einige Realzeitanwendungen zu hoch sein kann. Der Einsatz diesbezüglich verbesserter Varianten mit der Komplexität $\mathcal{O}\{L\}$ [Alex86, Bron93, SG94, Saye03] ist für diese Arbeit jedoch nicht erforderlich.

Wird die Varianz des Referenzsignals $\tilde{x}(n)$ zu klein, kann häufig ein Aufklingen von $\boldsymbol{P}(n)$ beobachtet werden. Um den RLS-Algorithmus zu stabilisieren, bietet sich beispielsweise das Hinzufügen eines Rauschsignals zum Referenzsignal $\tilde{x}(n)$ an. Eine weitere Möglichkeit besteht im Überwachen von $\boldsymbol{P}(n)$. Ist ein Aufklingen zu beobachten, wird $\boldsymbol{P}(n)$ durch eine entsprechend gewählte positiv-definite Matrix ersetzt [Mosc95].

In der Literatur wird häufig die Ansicht vertreten [Bron93, KM96], dass lediglich durch Einführung des Wichtungsfaktors λ der RLS-Algorithmus in die Lage versetzt wird, sich an nicht-stationäre Bedingungen anzupassen. Das ist jedoch nur bedingt der Fall. Es überrascht daher nicht, dass der LMS-Algorithmus häufig bessere *Tracking*-Eigenschaften aufweist [HSZ⁺97]. Die Einführung des exponentiellen Wichtungsfaktors lässt sich vielmehr durch die

Tatsache rechtfertigen, dass während der Adaptation eine möglicherweise gegen null strebende KALMAN-Verstärkung verhindert wird [JC92] und damit die *Tracking*-Eigenschaften moderat verbessert werden.

5.7 ERLS-Algorithmus

Mit einer Formulierung im Zustandsraum gelang es KALMAN, ein Filterverfahren für zeitdiskrete Signale anzugeben, das im Gegensatz zum WIENER-Filter auch für nicht-stationäre Signale sowie einen endlichen Beobachtungszeitraum geeignet ist [Kalm60]. Das Filter setzt ein Zustandsraummodell voraus, dessen Zustandsvektor mit Hilfe der beobachteten Eingangs- und Ausgangsgrößen geschätzt wird. Der Zustandsvektor kann auch als Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{w}}(n)$ interpretiert werden, den es optimal zu schätzen gilt. Der Schätzwert ist bei minimaler Varianz des Schätzfehlers erwartungstreu. Die Bestimmung des Schätzwerts erfolgt im Gegensatz zum WIENER-Filter rekursiv [Häns01].

Der RLS-Algorithmus stellt eine spezielle Form des KALMAN-Filters dar. Bei entsprechender Skalierung der Größen des RLS-Algorithmus korrespondieren diese mit denen des KALMAN-Filters. Diese formale Analogie erlaubt es, Lösungsansätze aus einem Bereich auf den anderen Bereich zu übertragen [Hayk02, Saye03, SK94]. Der ERLS-Algorithmus¹⁶ basiert ebenfalls auf einer solchen Analogie zum KALMAN-Filter [HSZ⁺97].

Für die weiteren Betrachtungen wird davon ausgegangen, dass sich das lineare zeitvariante System, dessen Parameter zu schätzen sind, durch ein lineares Regressionsmodell mit dem Koeffizientenvektor

$$\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{\mathcal{L}-1}(n)]^T \quad (5.41)$$

modellieren lässt, dem das Zustandsmodell

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{F}_w(n+1, n)\mathbf{w}(n) + \mathbf{r}_w(n), \quad (5.42a)$$

$$d(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n) + v_w(n) \quad (5.42b)$$

zu Grunde liegt.¹⁷ Die Übergangsmatrix wird durch $\mathbf{F}_w(n+1, n)$ und das Systemrauschen durch $\mathbf{r}_w(n)$ repräsentiert, während der Größe $d(n)$ das Messrauschen $v_w(n)$ überlagert ist. Die Schätzwerte dieser Systemgrößen seien im Weiteren durch $\mathbf{F}_{\hat{\mathbf{w}}}(n+1, n)$ und $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{w}}}(n)$ sowie $v_{\hat{\mathbf{w}}}(n)$ symbolisiert.¹⁸ Bei $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{w}}}(n)$

¹⁶ **E**xtended-**R**ecursive-**L**east-**S**quares-Algorithmus

¹⁷ Eine Spezifizierung der in Gleichung (5.42) enthaltenen Größen in Zufallsprozesse oder determinierte Größen erscheint an dieser Stelle nicht notwendig, da zwischen beiden Formulierungen eine strukturelle Analogie besteht [Saye03].

¹⁸ Die Schätzwerte $\mathbf{F}_{\hat{\mathbf{w}}}(n+1, n)$ und $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{w}}}(n)$ sowie $v_{\hat{\mathbf{w}}}(n)$ wurden zur Abgrenzung zwischen den Größen zur Beschreibung des physikalischen Systems und den Größen zur Koeffizientenschätzung eingeführt. Die Länge L des zu schätzenden Koeffizientenvektors $\hat{\mathbf{w}}(n)$ wird häufig gegenüber der Parameteranzahl \mathcal{L} des physikalischen Systems kürzer gewählt. Zusätzlich erfolgt oft die Approximation von $\mathbf{F}_w(n+1, n)$ durch eine Konstante.

und $v_{\hat{w}}(n)$ handelt es sich um zwei unkorrelierte mittelwertfreie weiße Rauschprozesse, für die

$$\mathcal{E}\{\mathbf{r}_{\hat{w}}(n)\mathbf{r}_{\hat{w}}^T(n)\} = \hat{\mathbf{Q}}_{\hat{w}}(n) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}\{v_{\hat{w}}^2(n)\} = \sigma_{\hat{w}}^2(n) \quad (5.43)$$

sowie

$$\mathcal{E}\{\mathbf{r}_{\hat{w}}(n)v_{\hat{w}}(n)\} = \mathbf{0}_L \quad (5.44)$$

gelten soll [SK95]. Das Zustandsmodell (5.42) stellt ein MARKOV-Modell erster Ordnung dar [Bron93, HSZ⁺97]. Das Ziel ist es nun, mit Hilfe der messtechnisch zugänglichen Größen $\tilde{\mathbf{x}}(n)$ und $e(n) = d(n) + \hat{\mathbf{w}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)$ unter Vorgabe des Startvektors $\hat{\mathbf{w}}(0)$ den Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{w}}(n)$ so zu schätzen, dass der Fehler

$$\begin{aligned} \xi(n) = & [\hat{\mathbf{w}}(0) - \bar{\mathbf{w}}]^T \mathbf{\Pi}_{\hat{w}}^{-1} [\hat{\mathbf{w}}(0) - \bar{\mathbf{w}}] + \\ & \sum_{k=1}^K \mathbf{r}_{\hat{w}}^T(k) \hat{\mathbf{Q}}_{\hat{w}}^{-1}(k) \mathbf{r}_{\hat{w}}(k) + \sum_{k=1}^K \frac{e^2(k)}{\sigma_{\hat{w}}^2(k)} \end{aligned} \quad (5.45)$$

minimal wird, wobei $\sigma_{\hat{w}}^2(n)$ sowie die positiv-definiten Matrizen $\hat{\mathbf{Q}}_{\hat{w}}(n)$ und $\mathbf{\Pi}_{\hat{w}}$ als bekannt vorauszusetzen sind. Durch die Vorgabe von $\mathbf{\Pi}_{\hat{w}}$ und $\bar{\mathbf{w}}$ lassen sich *a priori* Information zur Minimierung des Fehlers $\xi(n)$ einbetten.¹⁹ Eine Minimierung mit Hilfe der Theorie zum klassischen KALMAN-Filter, die etwa [SK95] entnommen werden kann, führt mit den Startwerten $\hat{\mathbf{w}}(0) = \bar{\mathbf{w}}$ und $\mathbf{P}(0) = \mathbf{\Pi}_{\hat{w}}$ zunächst auf die Rekursionsgleichungen

$$r_e(n) = \sigma_{\hat{w}}^2(n) + \tilde{\mathbf{x}}^T(n)\mathbf{P}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n), \quad (5.46a)$$

$$e(n) = d(n) + \hat{\mathbf{w}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n), \quad (5.46b)$$

$$\boldsymbol{\kappa}(n) = \mathbf{F}_{\hat{w}}(n+1, n)\mathbf{P}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)r_e^{-1}(n), \quad (5.46c)$$

$$\mathbf{N}(n) = \mathbf{P}(n) - \mathbf{P}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\mathbf{P}(n)r_e^{-1}(n), \quad (5.46d)$$

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{F}_{\hat{w}}(n+1, n)\mathbf{N}(n)\mathbf{F}_{\hat{w}}^T(n+1, n) + \hat{\mathbf{Q}}_{\hat{w}}(n), \quad (5.46e)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \mathbf{F}_{\hat{w}}(n+1, n)\hat{\mathbf{w}}(n) - \boldsymbol{\kappa}(n)e(n). \quad (5.46f)$$

Für das weitere Vorgehen sollen die Vereinfachungen

$$\mathbf{F}_{\hat{w}}(n+1, n) = a_{\hat{w}}\mathbf{I}_L \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{Q}}_{\hat{w}}(n) = \hat{q}_{\hat{w}}^2(n)\mathbf{I}_L \quad (5.47)$$

¹⁹Mit $\mathbf{\Pi}_{\hat{w}}^{-1} = c\mathbf{I}_L$ kann direkt Einfluss auf die Optimierung genommen werden. Vermutet man vorab, dass $\bar{\mathbf{w}}$ dem tatsächlichen $\hat{\mathbf{w}}(n)$ sehr nahe kommen wird, ist c entsprechend groß zu wählen. Sind dagegen keine verlässlichen *a priori* Information vorhanden, sollte c klein oder zu $c = 0$ gewählt werden. Dieser Sachverhalt lässt sich unter statistischen Gesichtspunkten zu

$$\mathbf{\Pi}_{\hat{w}} = \mathcal{E}\{[\hat{\mathbf{w}}(0) - \bar{\mathbf{w}}][\hat{\mathbf{w}}(0) - \bar{\mathbf{w}}]^T\}$$

formulieren. Für $\mathbf{r}_{\hat{w}}(n) = 0$ führt die Gleichung (5.45) zu den so genannten regularisierten LS-Verfahren [Saye03].

gelten, so dass sich mit

$$\mathbf{M}(n) = \frac{1}{\sigma_{\hat{\mathbf{w}}}^2(n)} \mathbf{P}(n) \quad \text{und} \quad r(n) = \frac{r_e(n)}{\sigma_{\hat{\mathbf{w}}}^2(n)} \quad \text{sowie} \quad q_{\hat{\mathbf{w}}}^2(n) = \frac{\hat{q}_{\hat{\mathbf{w}}}^2(n)}{\sigma_{\hat{\mathbf{w}}}^2(n)} \quad (5.48)$$

die Rekursionsgleichungen des ERLS-Algorithmus zu

$$r(n) = 1 + \tilde{\mathbf{x}}^T(n) \mathbf{M}(n) \tilde{\mathbf{x}}(n), \quad (5.49a)$$

$$e(n) = d(n) + \hat{\mathbf{w}}^T(n) \tilde{\mathbf{x}}(n), \quad (5.49b)$$

$$\boldsymbol{\kappa}(n) = a_{\hat{\mathbf{w}}} \mathbf{M}(n) \tilde{\mathbf{x}}(n) r^{-1}(n), \quad (5.49c)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{w}}}(n) = q_{\hat{\mathbf{w}}}^2(n) \mathbf{I}_L, \quad (5.49d)$$

$$\mathbf{M}(n+1) = a_{\hat{\mathbf{w}}}^2 [\mathbf{M}(n) - \mathbf{M}(n) \tilde{\mathbf{x}}(n) \tilde{\mathbf{x}}^T(n) \mathbf{M}(n) r^{-1}(n)] + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{w}}}(n), \quad (5.49e)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = a_{\hat{\mathbf{w}}} \hat{\mathbf{w}}(n) - \boldsymbol{\kappa}(n) e(n) \quad (5.49f)$$

formulieren lassen [Saab95, SK95]. Als Startwerte bieten sich $\hat{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{0}_L$ und $\mathbf{M}(0) = c_{\hat{\mathbf{w}}}^{-1} \mathbf{I}_L$ an. Eine Darstellung der zu implementierenden Rekursionsgleichungen kann dem Anhang C zusammenfassend entnommen werden.

Der Adaptationsparameter $q_{\hat{\mathbf{w}}}^2(n)$ ist in Abhängigkeit von den am Fehlermikrofon strömungsinduzierten Schallanteilen und den zu erwartenden Änderungen der Systemparameter vorzugeben. Die Abstimmung der Adaptationsparameter wird auch als *Tuning* beziehungsweise *Fine-Tuning* bezeichnet und im Rahmen eines Kovarianzmanagements im nächsten Kapitel bezüglich einer gleichzeitigen *Online*-Modellierung des Sekundärpfads thematisiert.

Der ERLS-Algorithmus weist ebenfalls wie der RLS-Algorithmus die Komplexität $\mathcal{O}\{L^2\}$ auf. In [Bron93] wurde eine schnelle Variante mit $\mathcal{O}\{L\}$ vorgestellt. Diese ist jedoch aufgrund der fehlenden rekursiven Schätzung der Kovarianzmatrix nicht dem vollständigen ERLS-Algorithmus äquivalent, so dass nur suboptimales Verhalten vorliegt. Daher beschränken sich die folgenden Betrachtungen auf den vollständigen ERLS-Algorithmus in Form der Rekursionsgleichungen (5.49). Die Reduzierung seiner Komplexität unter Beibehaltung der guten *Tracking*-Eigenschaften bleibt weiteren Arbeiten vorbehalten.

Ein Vergleich der Rekursionsgleichungen (5.49) mit den Gleichungen des RLS-Algorithmus aus Abschnitt 5.6 zeigt, dass dort zum einen mit $q_{\hat{\mathbf{w}}}^2(n) = 0$ kein Systemrauschen in den Rekursionsgleichungen berücksichtigt wird und zum anderen das Messrauschen zu $\sigma_{\hat{\mathbf{w}}}^2(n) = 1$ angesetzt worden ist. Liegt dem zeitvarianten physikalischen System jedoch das Zustandsmodell (5.42) zu Grunde, wird direkt ersichtlich, dass der RLS-Algorithmus mit $\lambda = 1$ von einem Zustandsübergang der Form $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n)$ ausgeht. Dieser wird zeitvariantem Verhalten nicht gerecht und begründet damit im Vergleich zum ERLS-Algorithmus die mäßigen *Tracking*-Eigenschaften.

Zum Einsatz des ERLS-Algorithmus in einem adaptiven ANC-System ist obgleich seiner guten *Tracking*-Eigenschaften bisher wenig publiziert worden.

Diesbezüglich sind speziell die Arbeiten von BRONZEL und LOPES ET AL. zu erwähnen, die beide zusätzlich die im Anhang C dargestellte MF_x -Struktur verwendeten [Bron93, LP00]. Während BRONZEL bei seinen Untersuchungen einen zeitinvarianten Sekundärpfad voraussetzte, wurde dagegen von LOPES ET AL. ein ERLS-basiertes Verfahren vorgestellt, welches eine *Online*-Modellierung des Sekundärpfads ermöglicht.

Für diese Arbeit sind ebenfalls ANC-Systeme relevant, die eine *Online*-Modellierung des Sekundärpfads erlauben. Dazu ist zum einen das Verbesserungspotenzial bei dem Konzept von LOPES ET AL. mit Hilfe eines Kovarianzmanagements auszuschöpfen. Zum anderen bietet sich die Einbettung des ERLS-Algorithmus in ein verbessertes Verfahren zur *Online*-Modellierung an, das sich ebenfalls auf ein Kovarianzmanagement stützt. Die neuen Ansätze sind schließlich bezüglich ihrer Leistungsfähigkeit zu untersuchen und zu bewerten.

Online-Modellierung des Sekundärpfads

Die im vorherigen Kapitel vorgestellten adaptiven Konzepte erlauben in einem ANC-System die Berücksichtigung eines zeitvarianten Primärpfads und setzen zusätzlich voraus, dass für den Sekundärpfad eine hinreichend genaue Schätzung seines Übertragungsverhaltens vorliegt. Diese Schätzung muss vorab (*offline*) erfolgen. In vielen Anwendungsfällen liegt dem Sekundärpfad jedoch ebenfalls zeitvariantes Verhalten zu Grunde, so dass sein Übertragungsverhalten im Betrieb des ANC-Systems zu adaptieren ist.

Einige Konzepte zur *Online*-Modellierung des Sekundärpfads basieren auf einer blockweisen Datenauswertung der messtechnisch zugänglichen Signale im Frequenzbereich [KS05a, JYXL07]. Aufgrund der blockweisen Verarbeitung in Kombination mit der Annahme, dass sich das Übertragungsverhalten während der Aufnahme eines Datenblocks nicht verändert, eignen sich diese Ansätze nur für die Adaptation langsam veränderlicher Systemparameter. Daher finden diese im Weiteren keine Berücksichtigung.

Andere Konzepte verwenden gemäß Abbildung 6.1 das zusätzliche adaptive Filter $\hat{S}(z)$.¹ Das Ausgangssignal des adaptiven Kompensationsfilters $\hat{W}(z)$ dient dem adaptiven Sekundärfilter $\hat{S}(z)$ als Anregungssignal zur Schätzung des physikalischen Sekundärpfads $S(z)$. Es wird in dieser Arbeit vorausgesetzt, dass sich $\hat{S}(z)$ durch eine Transversalfilterstruktur mit dem Koeffizientenvektor

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = [\hat{s}_0(n) \ \hat{s}_1(n) \ \dots \ \hat{s}_{N-1}(n)]^T \quad (6.1)$$

beschreiben lässt, wobei $\hat{s}(n)$ die zugehörige Impulsantwort kennzeichnet. Formuliert man mit Hilfe von Abbildung 6.1 die Fehlergleichung

$$e_{\hat{s}}(n) = [\hat{s}(n) - s(n)] * y(n) - d(n), \quad (6.2)$$

wird die Problematik bezüglich dieser Form der *Online*-Modellierung deutlich. Dem Fehler $e_{\hat{s}}(n)$ ist der Störterm $d(n)$ überlagert, der eine direkte Identifikation von $s(n)$ erschwert. Darüber hinaus hängt die *Online*-Modellierung des Sekundärpfads von den Eigenschaften des anregenden Signals $y(n)$ ab.

¹Auch wenn die aus der Literatur bekannten Verfahren meist keine MFx-Anordnung verwendeten, soll diese im Anhang C dargestellte Struktur zur Adaptation von $\hat{W}(z)$ im Folgenden dort zum Einsatz kommen, wo das möglich ist.

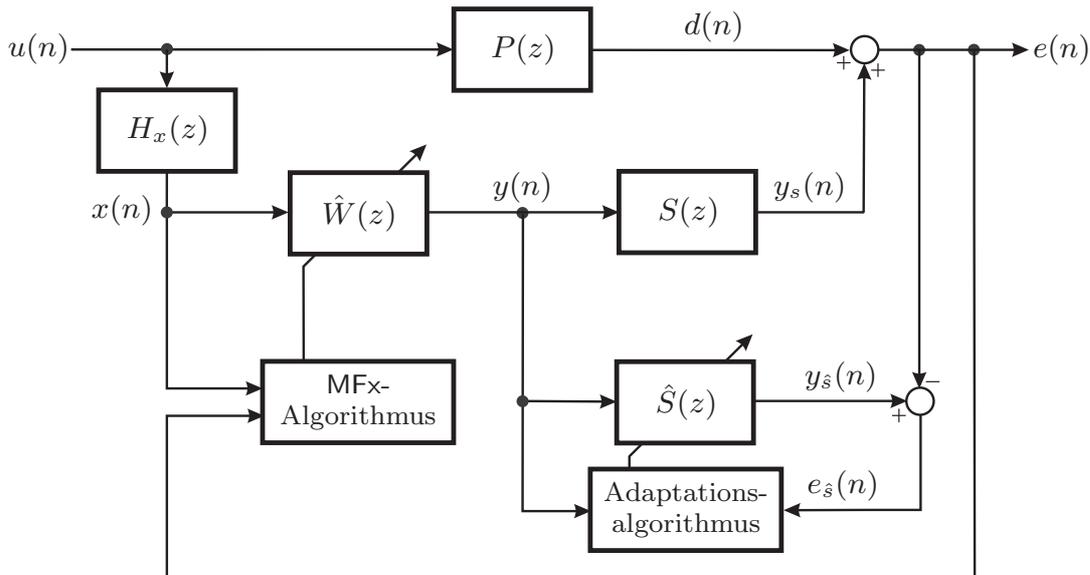


Abbildung 6.1: Online-Modellierung des Sekundärpfads [KM96]

Die robuste *Online*-Modellierung des Sekundärpfads sollte unabhängig vom Signal $y(n)$ und demnach von der Schätzung von $\hat{w}(n)$ sein. Zusätzlich darf der Algorithmus zur Schätzung von $\hat{s}(z)$ nicht in den adaptiven Prozess zur Störsignaldämpfung eingreifen. Beide Forderungen schließen sich jedoch gegenseitig aus, so dass ein Kompromiss erforderlich ist. In der Literatur wurden daher verbesserte Konzepte vorgestellt, die sich auf zwei grundsätzliche Prinzipien reduzieren lassen. Eine Gruppe von Verfahren verwendet ein zusätzlich hinzugefügtes Rauschsignal zur Schätzung des Sekundärpfads. Die anderen, so genannten nicht-invasiven Methoden, verzichten auf ein Rauschsignal und führen eine Adaptation mit Hilfe von intern verfügbaren Signalen durch. Die Ansätze, die ein hinzugefügtes Rauschsignal verwenden, tragen im Folgenden das Akronym AN², während die zweite Gruppe von Verfahren durch OM³ gekennzeichnet ist.

6.1 AN-Verfahren nach Eriksson et al.

Das Grundprinzip zur *Online*-Modellierung mit einer zusätzlichen Rauschquelle wurde von ERIKSSON ET AL. erarbeitet und ist schematisch in Abbildung 6.2 dargestellt [EA89]. Durch das eingekoppelte mittelwertfreie weiße Rauschsignal $v(n)$, welches mit dem Störsignal $u(n)$ unkorreliert ist, soll die *Online*-Modellierung des Sekundärpfads über den gesamten Frequenzbereich unabhängig von dem eigentlichen Adaptationsprozess zur Generierung des Gegenschallsignals werden. Da sich der Rauschanteil $s(n) * v(n)$ dem zu dämpfenden

²**A**dded-**N**oise

³**O**verall-**M**odeling

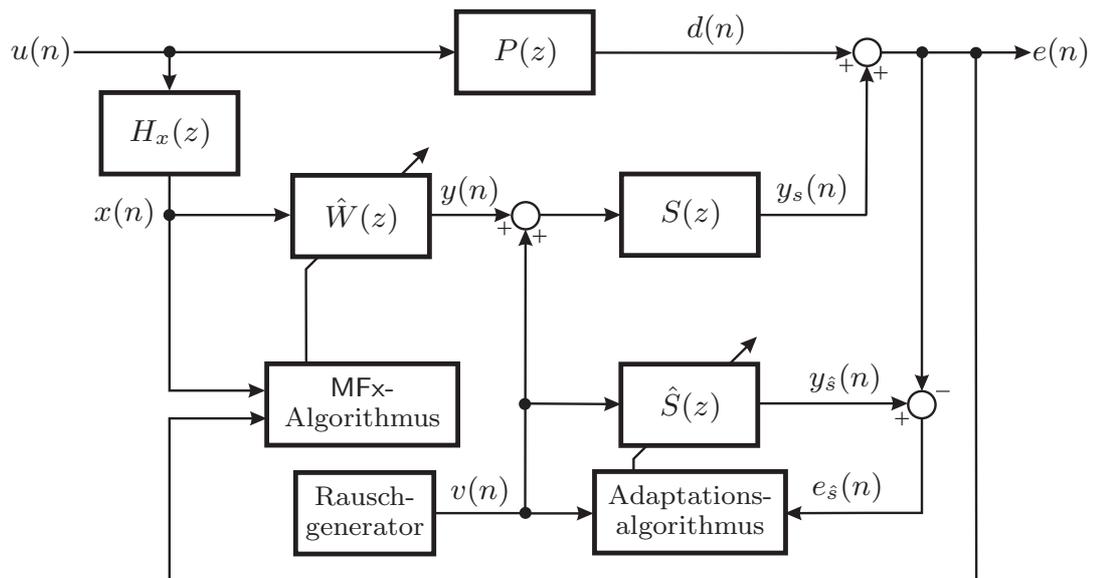


Abbildung 6.2: Online-Modellierung des Sekundärpfads mit Hilfe eines zusätzlichen Rauschgenerators nach ERIKSSON ET AL. [EA89]

Signal überlagert, ist die Rauschleistung adäquat vorzugeben. Zur Schätzung von $\hat{s}(n)$ wird der Fehler

$$\begin{aligned} e_{\hat{s}}(n) &= [\hat{s}(n) - s(n)] * v(n) - d(n) - s(n) * y(n) \\ &= [\hat{s}(n) - s(n)] * v(n) - e_v(n) \end{aligned} \quad (6.3)$$

herangezogen. Die Größe $e_v(n) = d(n) + s(n) * y(n)$ stört die Identifikation des Sekundärpfads. Darüber hinaus kann sie die Konvergenzeigenschaften des Verfahrens beeinträchtigen und zur Divergenz führen.

Das Rauschsignal $v(n)$ wirkt sich ebenfalls auf die Schätzung von $\hat{w}(n)$ aus, da der Adaptationsalgorithmus das Fehlersignal

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) + s(n) * [y(n) + v(n)] \\ &= e_v(n) + s(n) * v(n) \end{aligned} \quad (6.4)$$

verwendet, dem die Größe $s(n) * v(n)$ überlagert ist. Liegt der adaptiv geschätzte Koeffizientenvektor $\hat{w}(n)$ im Bereich der optimalen Lösung, wird der Einfluss von $s(n) * v(n)$ auf den Fehler $e(n)$ besonders prägnant [ZLS01]. Die Beeinflussung lässt sich durch eine Pegelabsenkung von $v(n)$ verringern. Jedoch reduziert eine kleine Signalleistung die Konvergenzgeschwindigkeit, so dass ein Kompromiss bei der Abstimmung zu finden ist.

6.2 AN-Verfahren nach Zhang et al.

Für das Konzept von ERIKSSON ET AL. wurden zahlreiche Verbesserungen vorgestellt. Diese setzen etwa bei der Kompensation des Fehlerterms $e_v(n)$ in der

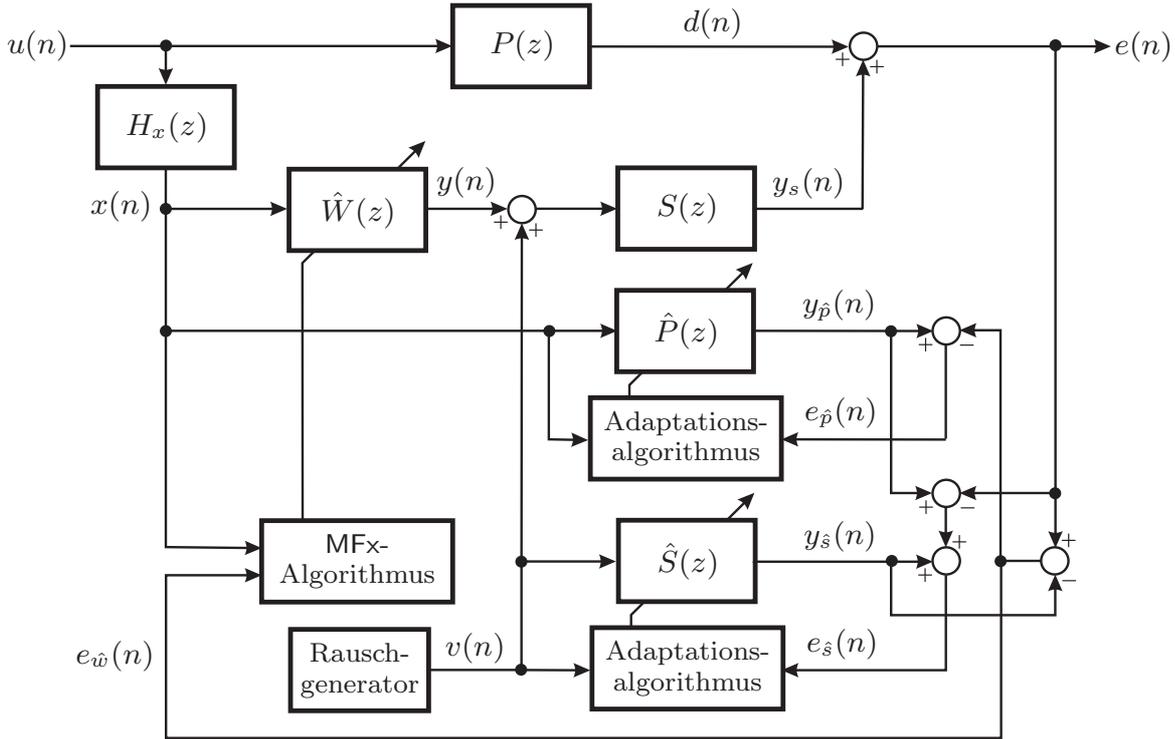


Abbildung 6.3: Online-Modellierung des Sekundärpfads nach ZHANG ET AL. [ZLS01]

Gleichung (6.3) für $e_s(n)$ an. Dazu wird der Einsatz eines dritten adaptiven Filters $\hat{P}(z)$ notwendig, welches im Weiteren als Primärfilter bezeichnet wird. Für das Primärfilter $\hat{P}(z)$ mit der dazugehörigen Impulsantwort $\hat{p}(n)$ soll eine Transversalfilterstruktur mit den Filterkoeffizienten

$$\hat{p}(n) = [\hat{p}_0(n) \ \hat{p}_1(n) \ \dots \ \hat{p}_{M-1}(n)]^T \quad (6.5)$$

zum Einsatz kommen. Während sich das von KUO ET AL. erarbeitete Verfahren nur für schmalbandige Signale eignet [KV97], empfiehlt sich der Ansatz von BAO ET AL. auch für breitbandige Signale [BSB93b]. Beide Konzepte widmen sich jedoch nicht der Problematik bezüglich des Terms $s(n) * v(n)$ in der Fehlergleichung zur Schätzung von $\hat{w}(n)$. Dafür bietet sich das Verfahren von ZHANG ET AL. an, das exemplarisch in Abbildung 6.3 dargestellt ist [ZLS01]. Die Bestimmung von $\hat{p}(n)$ basiert mit $s(n) \approx \hat{s}(n)$ auf der Fehlergleichung

$$\begin{aligned} e_{\hat{p}}(n) &= \hat{p}(n) * x(n) - d(n) - s(n) * y(n) \\ &= \hat{p}(n) * x(n) - e_v(n). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Bei Konvergenz gilt $e_v(n) \approx \hat{p}(n) * x(n)$ und die Fehlergleichung zur Online-Modellierung des Sekundärpfads kann zu

$$\begin{aligned} e_{\hat{s}}(n) &= [\hat{s}(n) - s(n)] * v(n) - e_v(n) + \hat{p}(n) * x(n) \\ &\approx [\hat{s}(n) - s(n)] * v(n) \end{aligned} \quad (6.7)$$

formuliert werden. Durch die Verwendung des modifizierten Fehlers $e_{\hat{w}}(n)$ reduziert sich für den optimalen Fall $\hat{s}(n) \approx s(n)$ ebenfalls der Einfluss des Rauschsignals $v(n)$ auf die Schätzung von $\hat{w}(n)$, da mit $\hat{s}(n) \approx s(n)$

$$\begin{aligned} e_{\hat{w}}(n) &= e(n) - \hat{s}(n) * v(n) \\ &\approx d(n) + s(n) * y(n) \end{aligned} \quad (6.8)$$

gilt. Verbesserte Strategien zur Pegelanpassung von $v(n)$ sind [LZS02, ZLS03] zu entnehmen. Während die publizierten Untersuchungen zu den AN-Verfahren meistens auf einer LMS-Kostenfunktion basieren, wobei eine diesbezügliche statistische Analyse sowie eine simulationstechnische Untersuchung der soeben vorgestellten Verfahren etwa [ZLS05] zu entnehmen sind, lassen sich auch die weiteren im vorherigen Kapitel erläuterten Algorithmen zur Bestimmung von $\hat{w}(n)$, $\hat{s}(n)$ und $\hat{p}(n)$ verwenden. Für andere AN-Konzepte sei abschließend auf [ZLS00, AAK05, AAK06] verwiesen.

Können die Filterkoeffizienten nicht mit der benötigten Genauigkeit identifiziert werden, divergieren die AN-Verfahren häufig unmittelbar. Zur Stabilisierung bietet sich die Beschränkung der Norm von $\|\hat{w}(n)\|$, $\|\hat{s}(n)\|$ und $\|\hat{p}(n)\|$ an [ZLS03]. Begründet dadurch, dass sich die Schätzungen von $\hat{w}(n)$ und $\hat{s}(n)$ gegenseitig beeinflussen, weisen AN-basierte Ansätze trotz der zahlreich publizierten Verbesserungen weiterhin inhärent schlechte *Tracking*-Eigenschaften auf [ZLS03]. Das bestätigten ebenfalls eigene Beobachtungen bezüglich der simulationstechnisch untersuchten Dämpfung in einem Röhrensystem. Daher wurde der Einsatz von AN-Konzepten in dieser Arbeit nicht favorisiert. Unter dem *Tracking*-Aspekt sind die OM-Verfahren als leistungsfähiger einzustufen.

6.3 OM-Verfahren nach Eriksson

Ähnlich wie die AN-Verfahren kompensieren die OM-basierten Ansätze unerwünschte Terme in der Fehlergleichung. Dafür kommt, wie in Abbildung 6.4 dargestellt, neben $\hat{S}(z)$ das zusätzliche adaptive Primärfilter $\hat{P}(z)$ zum Einsatz. Zur Schätzung von $\hat{p}(n)$ und $\hat{s}(n)$ wird bei den OM-Verfahren mit $h_x(n) = \delta(n)$ und dem daraus resultierenden Zusammenhang $x(n) = u(n)$ der Fehler

$$\begin{aligned} e_{\hat{p},\hat{s}}(n) &= \hat{s}(n) * y(n) + \hat{p}(n) * x(n) - e(n) \\ &= [\hat{s}(n) - s(n)] * y(n) + [\hat{p}(n) - p(n)] * x(n) \end{aligned} \quad (6.9)$$

zu Grunde gelegt, während $p(n)$ die Impulsantwort des Primärpfads $P(z)$ bezeichnet.⁴ Mit der Notation

$$\hat{c}(n) = [\hat{p}^T(n) \hat{s}^T(n)]^T \quad (6.10)$$

⁴Wie im Abschnitt 5.2 erwähnt, erscheint bei adäquater Auswahl des Referenzsensors die Abschätzung $x(n) \approx k_x u(n)$ erlaubt. Der Proportionalitätsfaktor k_x lässt sich zum einen durch eine Skalierung entsprechender Signale im ANC-System berücksichtigen oder zum anderen direkt durch den Koeffizientenvektor $\hat{p}(n)$ beziehungsweise $\hat{w}(n)$ adaptieren.

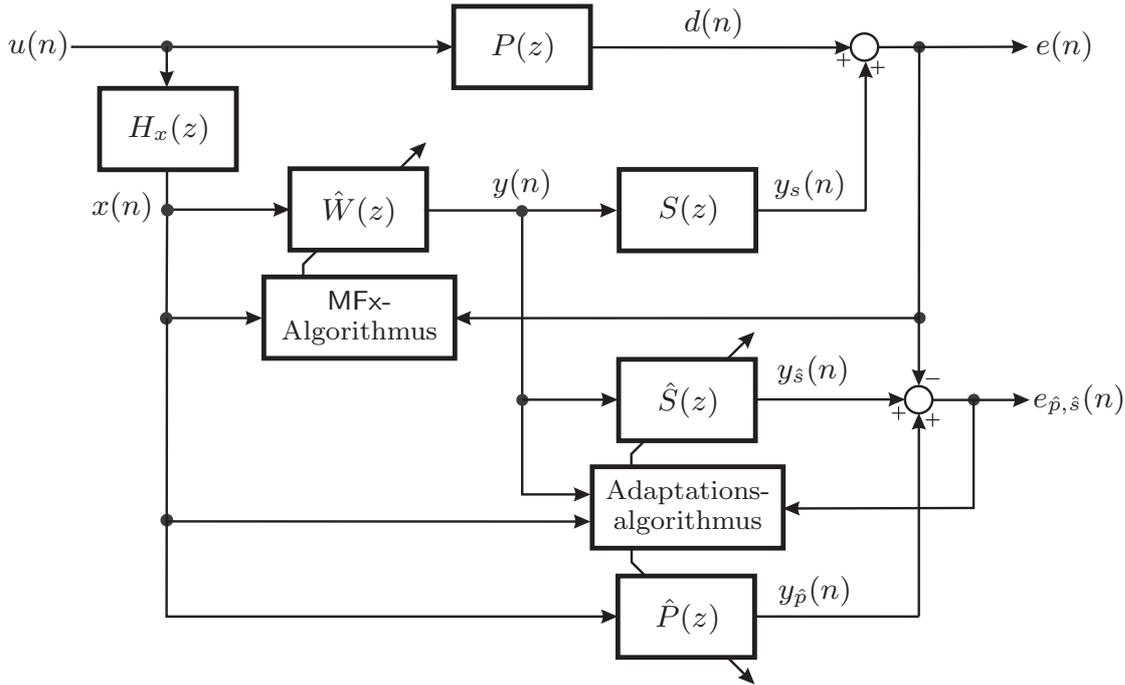


Abbildung 6.4: Online-Modellierung des Sekundärpfads nach ERIKSSON [Erik91]

und den Signalvektoren

$$\mathbf{x}_{\hat{p}}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-M+1)]^T, \quad (6.11a)$$

$$\mathbf{y}_{\hat{s}}(n) = [y(n) \ y(n-1) \ \dots \ y(n-N+1)]^T \quad (6.11b)$$

lässt sich die Fehlergröße mit den zusammengesetzten Signalvektoren

$$\hat{\mathbf{z}}(n) = [\mathbf{x}_{\hat{p}}^T(n) \ \mathbf{y}_{\hat{s}}^T(n)]^T \quad (6.12)$$

auch als

$$e_{\hat{p},\hat{s}}(n) = \hat{\mathbf{c}}^T(n) \hat{\mathbf{z}}(n) - e(n) \quad (6.13)$$

formulieren. Die Algorithmen berechnen also unter anderem mit den Eingangsgrößen $\hat{\mathbf{z}}(n)$ und $e_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ den neuen Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{c}}(n+1)$, so dass die im Anhang C allgemein formulierte Darstellung der Adaptationsalgorithmen zum Einsatz kommen kann.

Im Gegensatz zu den AN-Verfahren werden die Unbekannten $\hat{p}(n)$ und $\hat{s}(n)$ auf der Grundlage von nur einer Fehlergleichung geschätzt und die Bestimmung von $\hat{s}(n)$ ist von der spektralen Zusammensetzung von $y(n)$ abhängig. Für eine eindeutige Bestimmung der Koeffizientenvektoren $\hat{p}(n)$ und $\hat{s}(n)$ stehen damit nicht genug Informationen bereit. Die Arbeiten von SAITO ET AL. beschäftigten sich deshalb mit der allgemeinen Frage, unter welchen Prämissen dennoch eine eindeutige Identifikation von $\hat{p}(n)$ und $\hat{s}(n)$ bei adäquater Anregung erfolgen kann [SSIA95, SSIA96]. Eine Identifikation ist möglich, wenn die Länge

der Filterimpulsantwort $\hat{w}(n)$ die Länge der Impulsantwort $p(n)$ des Primärpfads übersteigt, wobei für den Abschnitt, in dem $\hat{w}(n)$ die längere Sequenz aufweist, mindestens ein Koeffizient ungleich null vorgegeben werden muss. Da in der Praxis die Länge der Filterimpulsantwort $\hat{w}(n)$ häufig kürzer als $p(n)$ gewählt wird, ist eine eindeutige Identifikation gemäß den Ergebnissen von SAITO ET AL. nicht sichergestellt, so dass die AN-Verfahren häufig den Vorzug bekommen [BSB93a, ZLS05].

Die eindeutige Identifikation des zeitvarianten Primär- und Sekundärpfads durch $\hat{p}(n)$ und $\hat{s}(n)$ erscheint in einem ANC-System nicht erforderlich. Vielmehr werden für die beiden zusätzlich benötigten adaptiven Filter in Form von $\hat{p}(n)$ und $\hat{s}(n)$ Schätzwerte gesucht, die insgesamt zu einer hohen Störsignaldämpfung führen. Von besonderem Interesse sind im Folgenden die ERLS-basierten Verfahren. Die Einbettung der ERLS-Verfahren in den Kontext einer gleichzeitigen Berücksichtigung eines zeitvarianten Primär- und Sekundärpfads wurde von LOPES ET AL. erarbeitet [LP00].

6.4 OM-Verfahren nach Lopes et al.

Die Schätzung des Koeffizientenvektors $\hat{w}(n)$ mit dem ERLS-Algorithmus basiert beim Verfahren von LOPES ET AL. auf dem Blockschaltbild in Abbildung 6.4 und dem Zustandsmodell (5.42) beziehungsweise den Rekursionsgleichungen (5.49).⁵ Der physikalische Primär- und Sekundärpfad sollen durch ein lineares Regressionsmodell mit den Koeffizientenvektoren

$$\mathbf{p}(n) = [p_0(n) \ p_1(n) \ \dots \ p_{\mathcal{M}-1}(n)]^T, \quad (6.14a)$$

$$\mathbf{s}(n) = [s_0(n) \ s_1(n) \ \dots \ s_{\mathcal{N}-1}(n)]^T \quad (6.14b)$$

beschrieben werden. Dann lässt sich mit den Signalvektoren

$$\mathbf{u}_p(n) = [u(n) \ u(n-1) \ \dots \ u(n-\mathcal{M}+1)]^T, \quad (6.15a)$$

$$\mathbf{y}_s(n) = [y(n) \ y(n-1) \ \dots \ y(n-\mathcal{N}+1)]^T \quad (6.15b)$$

sowie mit den Notationen

$$\mathbf{c}(n) = [\mathbf{p}^T(n) \ \mathbf{s}^T(n)]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{z}(n) = [\mathbf{u}_p^T(n) \ \mathbf{y}_s^T(n)]^T \quad (6.16)$$

in Analogie zum Abschnitt 5.7 die Zustandsbeschreibung

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{F}_{p,s}(n+1, n)\mathbf{c}(n) + \mathbf{r}_{p,s}(n), \quad (6.17a)$$

$$e(n) = \mathbf{z}^T(n)\mathbf{c}(n) + v_{p,s}(n) \quad (6.17b)$$

⁵Im Kontext einer *Online*-Modellierung des Sekundärpfads empfiehlt sich für den Koeffizientenvektor jedoch die Initialisierung $\hat{\mathbf{w}}(0) = [1, \mathbf{0}_{L-1}^T]^T$.

angeben. Im Folgenden werden diese Systemgrößen durch die Schätzwerte $\hat{\mathbf{c}}(n)$, $\mathbf{F}_{\hat{p},\hat{s}}(n+1,n)$, $\mathbf{r}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ und $v_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ repräsentiert. Für die als mittelwertfrei und unkorreliert angenommenen weißen Rauschprozesse gelte

$$\mathcal{E}\{\mathbf{r}_{\hat{p},\hat{s}}(n)\mathbf{r}_{\hat{p},\hat{s}}^T(n)\} = \hat{\mathbf{Q}}_{\hat{p},\hat{s}}(n) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}\{v_{\hat{p},\hat{s}}^2(n)\} = \sigma_{\hat{p},\hat{s}}^2(n). \quad (6.18)$$

Zur weiteren Vereinfachung kommen die Ausdrücke

$$\mathbf{F}_{\hat{p},\hat{s}}(n+1,n) = a_{\hat{p},\hat{s}}\mathbf{I}_{M+N} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{Q}}_{\hat{p},\hat{s}}(n) = \hat{q}_{\hat{p},\hat{s}}^2(n)\mathbf{I}_{M+N} \quad (6.19)$$

zum Einsatz. Mit einer Skalierung der Kovarianzmatrix der Form

$$\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n) = \frac{1}{\sigma_{\hat{p},\hat{s}}^2(n)}\hat{\mathbf{Q}}_{\hat{p},\hat{s}}(n) = q_{\hat{p},\hat{s}}^2(n)\mathbf{I}_{M+N} \quad (6.20)$$

lassen sich mit $\hat{\mathbf{c}}(0) = \mathbf{0}_{M+N}$ und $\mathbf{R}(0) = c_{\hat{p},\hat{s}}^{-1}\mathbf{I}_{M+N}$ die Rekursionsgleichungen zur Schätzung des Koeffizientenvektors zu

$$r(n) = 1 + \hat{\mathbf{z}}^T(n)\mathbf{R}(n)\hat{\mathbf{z}}(n), \quad (6.21a)$$

$$e_{\hat{p},\hat{s}}(n) = \hat{\mathbf{c}}^T(n)\hat{\mathbf{z}}(n) - e(n), \quad (6.21b)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{\hat{p},\hat{s}}(n) = a_{\hat{p},\hat{s}}\mathbf{R}(n)\hat{\mathbf{z}}(n)r^{-1}(n), \quad (6.21c)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n) = q_{\hat{p},\hat{s}}^2(n)\mathbf{I}_{M+N}, \quad (6.21d)$$

$$\mathbf{R}(n+1) = a_{\hat{p},\hat{s}}^2[\mathbf{R}(n) - \mathbf{R}(n)\hat{\mathbf{z}}(n)\hat{\mathbf{z}}^T(n)\mathbf{R}(n)r^{-1}(n)] + \mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n), \quad (6.21e)$$

$$\hat{\mathbf{c}}(n+1) = a_{\hat{p},\hat{s}}\hat{\mathbf{c}}(n) - \boldsymbol{\kappa}_{\hat{p},\hat{s}}(n)e_{\hat{p},\hat{s}}(n) \quad (6.21f)$$

formulieren. Zur Erzeugung eines zeitvarianten Systems für die simulationstechnische Untersuchung wurde von LOPES ET AL. das Zustandsmodell (6.17) auf der Grundlage von GAUSS-MARKOV-Prozessen verwendet, so dass die von ihnen verwendete Definition von $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n) = q_{\hat{p},\hat{s}}^2(n)\mathbf{I}_{M+N}$ bei entsprechender Vorgabe der statistischen Prozesse gerechtfertigt ist.

Liegt jedoch anstelle der GAUSS-MARKOV-Prozesse ein physikalisch motiviertes Modell zu Grunde, erscheint das von LOPES ET AL. verwendete Zustandsmodell nur eingeschränkt geeignet. Vielmehr ist $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ anders zu spezifizieren. Oder präziser ausgedrückt, die Änderungen der adaptiv zu bestimmenden Koeffizienten um den optimalen Wert sind entsprechend durch das Systemrauschen im Rahmen eines Kovarianzmanagements zu berücksichtigen. Diese Bemühungen führen schließlich zu einem verbesserten und praxistauglicheren OM-Verfahren, welches im Abschnitt 6.6 vorgestellt wird, während zunächst der folgende Abschnitt auf der Basis einer verbesserten Filteranordnung eine weitere OM-Struktur thematisiert.

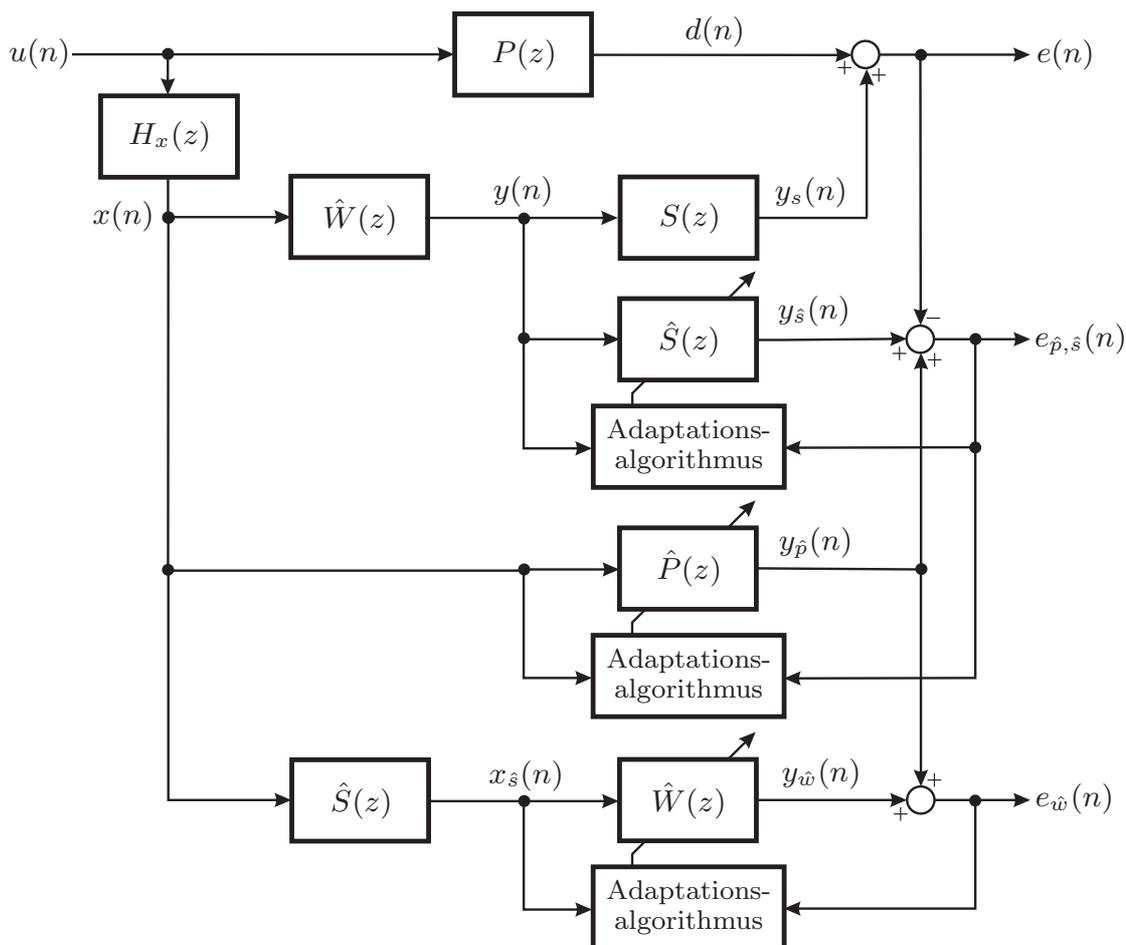


Abbildung 6.5: Online-Modellierung des Sekundärpfads nach KOHNO ET AL. [KS05b]

6.5 OM-Verfahren nach Kohno et al.

Von KOHNO ET AL. wurde ein Konzept zur aktiven Schalldämpfung vorgestellt [KS05b], welches zur Gruppe der OM-Verfahren zählt [OKOS02, SO03]. Wie in Abbildung 6.5 dargestellt, kommen ebenfalls drei adaptive Filter zum Einsatz. Durch die spezielle Anordnung der Filter erübrigt sich jedoch die Verwendung einer MFx-Struktur zur Bestimmung der Koeffizienten $\hat{w}(n)$. Gemäß Abbildung C.1 im Anhang C sind in einer MFx-Struktur insgesamt drei Faltungsoperationen bezüglich der Koeffizienten $\hat{w}(n)$ und $\hat{s}(n)$ erforderlich. Beim Konzept von KOHNO ET AL. sind es dagegen nur zwei.

Während der Fehler zur Schätzung von $\hat{p}(n)$ und $\hat{s}(n)$ mit $e_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ in Gleichung (6.9) identisch ist, findet für den zu schätzenden Koeffizientenvektor $\hat{w}(n)$ die Größe

$$\begin{aligned} e_{\hat{w}}(n) &= \hat{p}(n) * x(n) + \hat{w}(n) * x_{\hat{s}}(n) \\ &= [\hat{p}(n) + \hat{w}(n) * \hat{s}(n)] * x(n) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Verwendung. Die Minimierung der Fehlerquadrate $e_{\hat{w}}^2(n)$ und $e_{\hat{p},\hat{s}}^2(n)$ erfolgte mit Hilfe des NLMS-Algorithmus. Den Ausführungen von KOHNO ET AL. folgend, lassen sich daher mit

$$\epsilon_{\hat{p},\hat{s}}(n) = \frac{e_{\hat{p},\hat{s}}(n)}{1 + \mu_{\hat{p}} \|\mathbf{x}_{\hat{p}}(n)\|^2 + \mu_{\hat{s}} \|\mathbf{y}_{\hat{s}}(n)\|^2}, \quad (6.23a)$$

$$\epsilon_{\hat{w}}(n) = \frac{e_{\hat{w}}(n)}{1 + \mu_{\hat{w}} \|\mathbf{x}_{\hat{w}}(n)\|^2} \quad (6.23b)$$

die Rekursionsgleichungen zu

$$\hat{\mathbf{p}}(n+1) = \hat{\mathbf{p}}(n) - \mu_{\hat{p}} \mathbf{x}_{\hat{p}}(n) \epsilon_{\hat{p},\hat{s}}(n), \quad (6.24a)$$

$$\hat{\mathbf{s}}(n+1) = \hat{\mathbf{s}}(n) - \mu_{\hat{s}} \mathbf{y}_{\hat{s}}(n) \epsilon_{\hat{p},\hat{s}}(n), \quad (6.24b)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) - \mu_{\hat{w}} \mathbf{x}_{\hat{w}}(n) \epsilon_{\hat{w}}(n) \quad (6.24c)$$

formulieren. Die Signalvektoren setzen sich aus den Gleichungen (6.11) und

$$\mathbf{x}_{\hat{w}}(n) = [x_{\hat{s}}(n) \ x_{\hat{s}}(n-1) \ \dots \ x_{\hat{s}}(n-L+1)]^T \quad (6.25)$$

zusammen. Die Erweiterung des Verfahrens von KOHNO ET AL. zur Einbettung von ERLS-basierten Algorithmen wird im nächsten Abschnitt im Kontext eines verbesserten OM-Verfahrens vorgestellt.

6.6 Verbessertes OM-Verfahren

In die von KOHNO ET AL. vorgestellte OM-Struktur wurde in dieser Arbeit der ERLS-Algorithmus eingebettet. Man erhält die strukturelle Anordnung in Abbildung 6.6. Während die Rekursionsgleichungen (6.21) von LOPES ET AL. zur Bestimmung von $\hat{\mathbf{p}}(n)$ und $\hat{\mathbf{s}}(n)$ gültig sind, basiert dagegen die Bestimmung von $\hat{\mathbf{w}}(n)$ auf den Rekursionsgleichungen

$$r(n) = 1 + \mathbf{x}_{\hat{w}}^T(n) \mathbf{M}(n) \mathbf{x}_{\hat{w}}(n), \quad (6.26a)$$

$$e_{\hat{w}}(n) = \hat{\mathbf{p}}^T(n) \mathbf{x}_{\hat{p}}(n) + \hat{\mathbf{w}}^T(n) \mathbf{x}_{\hat{w}}(n), \quad (6.26b)$$

$$\boldsymbol{\kappa}(n) = a_{\hat{w}} \mathbf{M}(n) \mathbf{x}_{\hat{w}}(n) r^{-1}(n), \quad (6.26c)$$

$$\mathbf{M}(n+1) = a_{\hat{w}}^2 [\mathbf{M}(n) - \mathbf{M}(n) \mathbf{x}_{\hat{w}}(n) \mathbf{x}_{\hat{w}}^T(n) \mathbf{M}(n) r^{-1}(n)] + \mathbf{Q}_{\hat{w}}(n), \quad (6.26d)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = a_{\hat{w}} \hat{\mathbf{w}}(n) - \boldsymbol{\kappa}(n) e_{\hat{w}}(n), \quad (6.26e)$$

wobei $\mathbf{Q}_{\hat{w}}(n)$ zunächst nicht genauer spezifiziert sei. Als Startwerte bieten sich $\hat{\mathbf{w}}(0) = [1, \mathbf{0}_{L-1}^T]^T$ und $\mathbf{M}(0) = c_{\hat{w}}^{-1} \mathbf{I}_L$ an.

Bei dem von LOPES ET AL. erarbeiteten Konzept sowie bei der soeben vorgestellten verbesserten ERLS-basierten OM-Struktur stellt sich die Frage, wie für ein physikalisches System die Matrizen $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ und $\mathbf{Q}_{\hat{w}}(n)$ vorzugeben sind. Für die Beantwortung dieser Frage wurde ein Kovarianzmanagement erarbeitet, welches eine vereinfachte Abstimmung der Adaptationsparameter erlaubt.

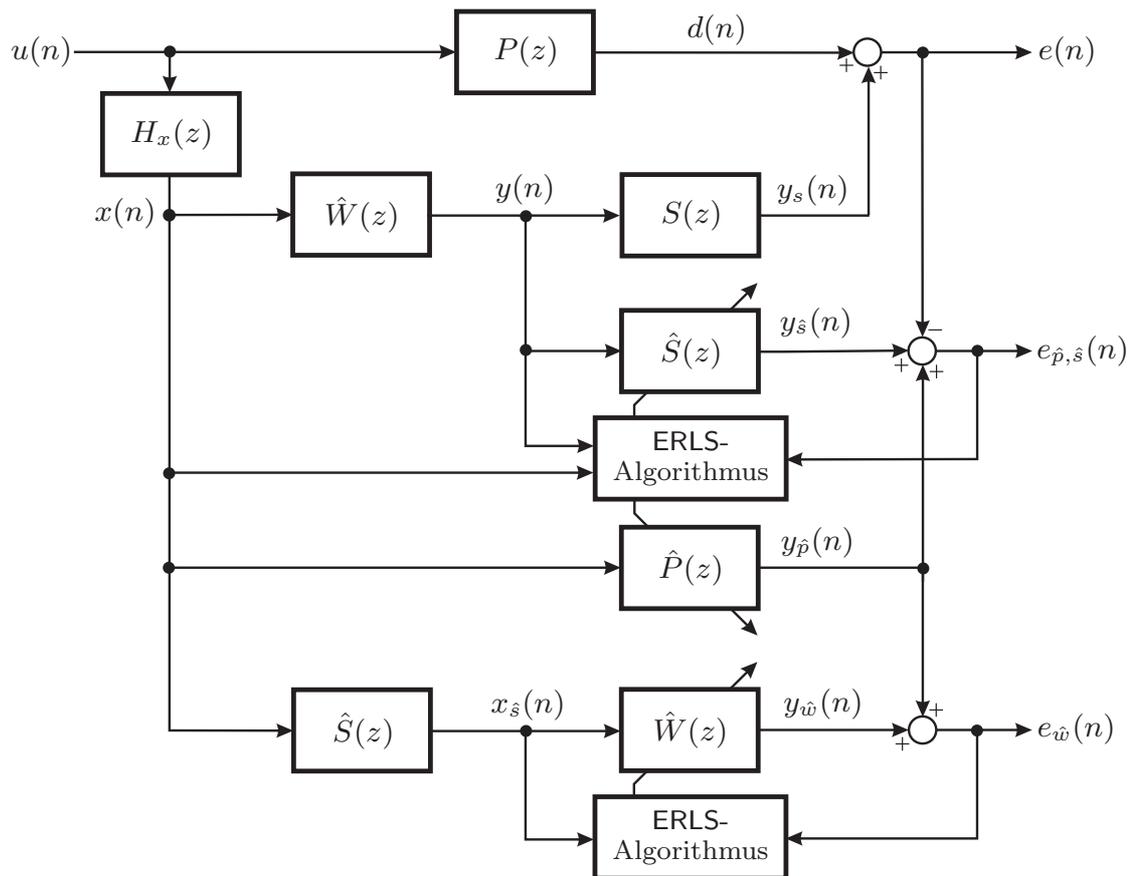


Abbildung 6.6: Verbessertes OM-Verfahren auf der Grundlage des ERLS-Algorithmus und der OM-Struktur von KOHNO ET AL.

6.7 MCERLS-Algorithmus

Wie im Abschnitt 5.7 angedeutet, kann beim ERLS-Algorithmus durch Modifikation der Kovarianzmatrizen in Form von $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ und $\mathbf{Q}_{\hat{w}}(n)$ direkt auf das *Tracking*-Verhalten und folglich auf die resultierende Störsignaldämpfung Einfluss genommen werden. Dazu sollten das Messrauschen und die Parametervariationen in Form des Systemrauschens *a priori* bekannt sein. Bei einem physikalischen System liegen jedoch erfahrungsgemäß vorab nur unzureichende Informationen diesbezüglich vor.

Das Systemrauschen wurde bei der Herleitung des ERLS-Algorithmus im Kontext eines MARKOV-Modells vereinfacht durch weiße GAUSS-Prozesse modelliert. Diese Annahme lässt sich in der Praxis häufig nicht aufrecht erhalten. Das Systemrauschen kennzeichnet meist unbekannte Effekte, die sprunghaftem beziehungsweise nicht-stationärem Verhalten oder weißen Rauschprozessen ähneln und ebenfalls durch Ungenauigkeiten im Modell begründet sein können. Weisen solche Effekte zufälligen Charakter auf, lassen sie sich vereinfachend durch farbiges Rauschen beschreiben und mit Hilfe einer entsprechenden Über-

gangsmatrix berücksichtigen. Zur Reduzierung des Aufwands geht man jedoch trotzdem häufig von weißem Systemrauschen aus und gibt die Diagonalelemente von $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ und $\mathbf{Q}_{\hat{w}}(n)$ ungleich null vor [FPW92].

Im Betrieb eines ANC-Systems kann es darüber hinaus erforderlich werden, die Größen $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ und $\mathbf{Q}_{\hat{w}}(n)$ an die veränderlichen physikalischen Gegebenheiten anzupassen. Auf der Grundlage von adaptiven KALMAN-Filtern existieren losgelöst vom Kontext eines ANC-Systems im Rahmen einer Systemerkennung allgemeine Ansätze, die es beispielsweise erlauben, die Kovarianzmatrix des Systemrauschens $\hat{\mathbf{Q}}_{\hat{w}}(n)$ [BO89] oder den bezüglich des Messrauschens skalierten Faktor $q_{\hat{w}}^2(n)$ zu schätzen [HL05]. Jedoch sind bisher keine Ansätze bekannt, die in einem ANC-System mit einer *Online*-Modellierung des Sekundärpfads eine gleichzeitige Schätzung von $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ und $\mathbf{Q}_{\hat{w}}(n)$ erlauben.

Von einem anderen Standpunkt aus betrachtet, steht genau genommen auch nicht eine korrekte Schätzung des System- oder Messrauschens im Mittelpunkt, sondern vielmehr die Antwort auf die Frage, wie $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ und $\mathbf{Q}_{\hat{w}}(n)$ vorzugeben sind, damit eine hohe Störsignaldämpfung erzielt wird. Fundiert auf dieser Anforderung wurde daher ein verbessertes Kovarianzmanagement erarbeitet, welches sich direkt in bestehende OM-Verfahren einbetten lässt, die auf dem ERLS-Verfahren basieren. Aufgrund der gezielten Modifikation der Kovarianzmatrizen durch das Kovarianzmanagement kann man auch vom MCERLS-Algorithmus⁶ sprechen.

6.7.1 Kovarianzmanagement

Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen ist das Zustandsmodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}(n+1) \\ \mathbf{s}(n+1) \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{p,s}(n+1, n) \begin{bmatrix} \mathbf{p}(n) \\ \mathbf{s}(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_p(n) \\ \mathbf{r}_s(n) \end{bmatrix}, \quad (6.27a)$$

$$e(n) = \mathbf{u}_p^T(n)\mathbf{p}(n) + \mathbf{y}_s^T(n)\mathbf{s}(n) + v_{p,s}(n), \quad (6.27b)$$

welches gegenüber dem Ansatz von LOPES ET AL. bezüglich des Systemrauschens mit $\mathbf{r}_{p,s}(n) = [\mathbf{r}_p^T(n) \ \mathbf{r}_s^T(n)]^T$ modifiziert worden ist. Die Bestimmung von $\hat{\mathbf{p}}(n)$ und $\hat{\mathbf{s}}(n)$ soll dagegen auf den Schätzwerten $\mathbf{F}_{\hat{p},\hat{s}}(n+1, n) = a_{\hat{p},\hat{s}}\mathbf{I}_{M+N}$ und $\mathbf{r}_{\hat{p},\hat{s}}(n) = [\mathbf{r}_{\hat{p}}^T(n) \ \mathbf{r}_{\hat{s}}^T(n)]^T$ sowie $v_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ basieren. Somit liegt der Schätzung das Zustandsmodell

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}(n+1) \\ \hat{\mathbf{s}}(n+1) \end{bmatrix} = a_{\hat{p},\hat{s}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}(n) \\ \hat{\mathbf{s}}(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\hat{p}}(n) \\ \mathbf{r}_{\hat{s}}(n) \end{bmatrix}, \quad (6.28a)$$

$$e(n) = \mathbf{x}_{\hat{p}}^T(n)\hat{\mathbf{p}}(n) + \mathbf{y}_{\hat{s}}^T(n)\hat{\mathbf{s}}(n) + v_{\hat{p},\hat{s}}(n) \quad (6.28b)$$

zu Grunde. Zunächst wird das Kovarianzmanagement bezüglich der *Online*-Modellierung des Sekundärpfads vorgestellt und schließlich das Ergebnis auf die adaptive Bestimmung von $\hat{\mathbf{w}}(n)$ übertragen.

⁶Modified-Covariance-Extended-Recursive-Least-Squares-Algorithmus

Die Matrix $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ enthält die Kovarianzen von $\mathbf{r}_{\hat{p}}(n)$ und $\mathbf{r}_{\hat{s}}(n)$, die gemäß Abschnitt 6.4 entsprechend dem als mittelwertfrei angenommenen Messrauschen $v_{\hat{p},\hat{s}}$ mit der Varianz $\sigma_{\hat{p},\hat{s}}^2(n) = \mathcal{E}\{v_{\hat{p},\hat{s}}^2(n)\}$ skaliert sind. Das Kovarianzmanagement setzt daher bei der Schätzung von $\mathbf{r}_{\hat{p}}(n)$ und $\mathbf{r}_{\hat{s}}(n)$ an. Nach dem Zustandsmodell (6.28) lassen sich diese Größen als Schwankung oder Streuung der geschätzten Koeffizienten $\hat{\mathbf{p}}(n)$ und $\hat{\mathbf{s}}(n)$ um die entsprechenden Mittelwerte $\bar{\mathbf{p}}(n)$ und $\bar{\mathbf{s}}(n)$ interpretieren. Zur Charakterisierung dieser Parametervariationen soll im Weiteren mit

$$\mathbf{Q}_{\hat{p}}(n) = \text{diag}\{\mathbf{q}_{\hat{p}}(n)\} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_{\hat{s}}(n) = \text{diag}\{\mathbf{q}_{\hat{s}}(n)\} \quad (6.29)$$

und den Diagonalelementen

$$\mathbf{q}_{\hat{p}}(n) = [q_{\hat{p},0}^2(n) \quad q_{\hat{p},1}^2(n) \quad \dots \quad q_{\hat{p},M-1}^2(n)]^T, \quad (6.30a)$$

$$\mathbf{q}_{\hat{s}}(n) = [q_{\hat{s},0}^2(n) \quad q_{\hat{s},1}^2(n) \quad \dots \quad q_{\hat{s},N-1}^2(n)]^T \quad (6.30b)$$

eine Diagonalmatrix der Gestalt

$$\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n) = \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{p}}(n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\hat{s}}(n) \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Verwendung finden. Um den unterschiedlichen Parametervariationen des physikalischen Primär- und Sekundärpfads gerecht zu werden, erfolgt somit gegenüber dem Ansatz von LOPES ET AL. eine Aufteilung der Matrix $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$. Durch den Adaptationsparameter ε , der auch als *Tuning*-Parameter bezeichnet wird, lässt sich unter anderem der Einfluss des Messrauschens skalierend berücksichtigen. Für die Matrix $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ kann mit

$$[\hat{c}_0(n) \quad \hat{c}_1(n) \quad \dots \quad \hat{c}_{M+N-1}(n)]^T = \hat{\mathbf{c}}(n) = [\hat{\mathbf{p}}^T(n) \quad \hat{\mathbf{s}}^T(n)]^T, \quad (6.32a)$$

$$[\bar{c}_0(n) \quad \bar{c}_1(n) \quad \dots \quad \bar{c}_{M+N-1}(n)]^T = \bar{\mathbf{c}}(n) = [\bar{\mathbf{p}}^T(n) \quad \bar{\mathbf{s}}^T(n)]^T \quad (6.32b)$$

sowie

$$[\tilde{c}_0(n) \quad \tilde{c}_1(n) \quad \dots \quad \tilde{c}_{M+N-1}(n)]^T = \tilde{\mathbf{c}}(n) = \hat{\mathbf{c}}(n) - \bar{\mathbf{c}}(n) \quad (6.33)$$

eine Abschätzung der Diagonalelemente

$$\mathbf{q}_{\tilde{c}}(n) = [\mathbf{q}_{\hat{p}}^T(n) \quad \mathbf{q}_{\hat{s}}^T(n)]^T \quad (6.34)$$

durch

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n) &= \varepsilon \text{diag}\{\mathbf{q}_{\tilde{c}}(n)\} \\ &= \varepsilon \text{diag}\{\mathcal{E}\{[\tilde{c}_0^2(n) \quad \tilde{c}_1^2(n) \quad \dots \quad \tilde{c}_{M+N-1}^2(n)]\}\} \end{aligned} \quad (6.35)$$

erfolgen.

Legt man für die beteiligten Größen Ergodizität zu Grunde, entspricht der Scharmittelwert dem Zeitmittelwert, so dass sich die für eine Berechnung von $\mathbf{q}_{\hat{c}}(n)$ benötigten Statistiken durch eine zeitliche Mittelwertbildung über einen Datenblock der Länge K abschätzen lassen. Für eine praktikable Implementierung bietet sich jedoch eine rekursive Schätzung von $\mathbf{q}_{\hat{c}}(n)$ an. Mit den Herleitungen zur rekursiven Schätzung statistischer Größen im Anhang D ergeben sich mit der Fensterlänge $W > 1$ die Rekursionsgleichungen mit den Definitionen (6.32) zu

$$\tilde{\mathbf{c}}(n) = [[\hat{c}_0(n) - \bar{c}_0(n-1)]^2 \dots [\hat{c}_{M+N-1}(n) - \bar{c}_{M+N-1}(n-1)]^2]^T, \quad (6.36a)$$

$$\mathbf{q}_{\hat{c}}(n) = \left[1 - \frac{1}{W}\right] \left[\mathbf{q}_{\hat{c}}(n-1) + \frac{1}{W}\tilde{\mathbf{c}}(n)\right], \quad (6.36b)$$

$$\bar{\mathbf{c}}(n) = \left[1 - \frac{1}{W}\right] \bar{\mathbf{c}}(n-1) + \frac{1}{W}\hat{\mathbf{c}}(n). \quad (6.36c)$$

Die Betrachtungen bezüglich $\hat{\mathbf{c}}(n)$ können auch für die Bestimmung des Koeffizientenvektors $\hat{\mathbf{w}}(n)$ erfolgen, jedoch mit dem Unterschied, dass dort keine Aufspaltung der Kovarianzmatrix erforderlich ist. Die Kovarianzmatrix des Koeffizientenvektors soll mit den Diagonalelementen

$$\mathbf{q}_{\hat{\mathbf{w}}}(n) = [q_{\hat{\mathbf{w}},0}^2(n) \ q_{\hat{\mathbf{w}},1}^2(n) \ \dots \ q_{\hat{\mathbf{w}},L-1}^2(n)]^T \quad (6.37)$$

und

$$[\tilde{w}_0(n) \ \tilde{w}_1(n) \ \dots \ \tilde{w}_{L-1}(n)]^T = \hat{\mathbf{w}}(n) - \bar{\mathbf{w}}(n) \quad (6.38)$$

zu

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{w}}}(n) &= \varepsilon \operatorname{diag}\{\mathbf{q}_{\hat{\mathbf{w}}}(n)\} \\ &= \varepsilon \operatorname{diag}\{\mathcal{E}\{[\tilde{w}_0^2(n) \ \tilde{w}_1^2(n) \ \dots \ \tilde{w}_{L-1}^2(n)]\}\} \end{aligned} \quad (6.39)$$

abgeschätzt werden. Setzt man Ergodizität voraus, gelten für eine rekursive Bestimmung von $\mathbf{q}_{\hat{\mathbf{w}}}(n)$ mit

$$[\hat{w}_0(n) \ \hat{w}_1(n) \ \dots \ \hat{w}_{L-1}(n)]^T = \hat{\mathbf{w}}(n), \quad (6.40a)$$

$$[\bar{w}_0(n) \ \bar{w}_1(n) \ \dots \ \bar{w}_{L-1}(n)]^T = \bar{\mathbf{w}}(n) \quad (6.40b)$$

die Rekursionsgleichungen

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = [[\hat{w}_0(n) - \bar{w}_0(n-1)]^2 \dots [\hat{w}_{L-1}(n) - \bar{w}_{L-1}(n-1)]^2]^T, \quad (6.41a)$$

$$\mathbf{q}_{\hat{\mathbf{w}}}(n) = \left[1 - \frac{1}{W}\right] \left[\mathbf{q}_{\hat{\mathbf{w}}}(n-1) + \frac{1}{W}\tilde{\mathbf{w}}(n)\right], \quad (6.41b)$$

$$\bar{\mathbf{w}}(n) = \left[1 - \frac{1}{W}\right] \bar{\mathbf{w}}(n-1) + \frac{1}{W}\hat{\mathbf{w}}(n). \quad (6.41c)$$

Diese Variante des Kovarianzmanagements wird im weiteren Verlauf durch das Akronym KM bezeichnet. Für eine praktische Implementierung lässt sich der vorgestellte Ansatz vereinfachen.

6.7.2 Vereinfachtes Kovarianzmanagement

Das vereinfachte Kovarianzmanagement basiert auf drei skalaren Größen, die zur Skalierung der Matrizen gemäß

$$\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n) = \varepsilon \begin{bmatrix} q_{\hat{p}}^2(n)\mathbf{I}_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & q_{\hat{s}}^2(n)\mathbf{I}_N \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_{\hat{w}}(n) = \varepsilon q_{\hat{w}}^2(n)\mathbf{I}_L \quad (6.42)$$

eingebettet sind. Die Schätzung von $q_{\hat{p}}^2(n)$, $q_{\hat{s}}^2(n)$ und $q_{\hat{w}}^2(n)$ kann auf der Grundlage der dazugehörigen Vektornormen erfolgen. Diesbezüglich lassen sich die Beziehungen zu

$$\begin{bmatrix} q_{\hat{p}}^2(n) \\ q_{\hat{s}}^2(n) \\ q_{\hat{w}}^2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E} \{ [\|\hat{\mathbf{p}}(n)\|_k - \bar{p}(n)]^2 \} \\ \mathcal{E} \{ [\|\hat{\mathbf{s}}(n)\|_k - \bar{s}(n)]^2 \} \\ \mathcal{E} \{ [\|\hat{\mathbf{w}}(n)\|_k - \bar{w}(n)]^2 \} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

definieren.⁷

Legt man eine rekursive Bestimmung der ergodischen Größen zu Grunde, ergeben sich den Ausführungen im Anhang D folgend die gesuchten Schätzwerte aus den Rekursionsgleichungen

$$\begin{bmatrix} q_{\hat{p}}^2(n) \\ q_{\hat{s}}^2(n) \\ q_{\hat{w}}^2(n) \end{bmatrix} = \left[1 - \frac{1}{W} \right] \begin{bmatrix} q_{\hat{p}}^2(n-1) \\ q_{\hat{s}}^2(n-1) \\ q_{\hat{w}}^2(n-1) \end{bmatrix} + \frac{1}{W} \begin{bmatrix} [\|\hat{\mathbf{p}}(n)\|_k - \bar{p}(n-1)]^2 \\ [\|\hat{\mathbf{s}}(n)\|_k - \bar{s}(n-1)]^2 \\ [\|\hat{\mathbf{w}}(n)\|_k - \bar{w}(n-1)]^2 \end{bmatrix}, \quad (6.44a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}(n) \\ \bar{s}(n) \\ \bar{w}(n) \end{bmatrix} = \left[1 - \frac{1}{W} \right] \begin{bmatrix} \bar{p}(n-1) \\ \bar{s}(n-1) \\ \bar{w}(n-1) \end{bmatrix} + \frac{1}{W} \begin{bmatrix} \|\hat{\mathbf{p}}(n)\|_k \\ \|\hat{\mathbf{s}}(n)\|_k \\ \|\hat{\mathbf{w}}(n)\|_k \end{bmatrix}. \quad (6.44b)$$

Diese Variante des Kovarianzmanagements wird im weiteren Verlauf durch das Akronym KM- $\|\cdot\|_k$ gekennzeichnet.

6.7.3 Anmerkungen

Mit Hilfe der erarbeiteten Ansätze zum Kovarianzmanagement vereinfacht sich die Abstimmung des ANC-Systems drastisch. Während für die Koeffizientenschätzung sonst im einfachsten Fall mit $q_{\hat{p}}(n)$, $q_{\hat{s}}(n)$ und $q_{\hat{w}}(n)$ drei Parameter vorzugeben wären, ist mit den neuen Ansätzen nur die Vorgabe eines

⁷Die k -Norm eines Vektors \mathbf{x} mit den Elementen x_i und der Länge N berechnet sich zu

$$\|\mathbf{x}\|_k = \left[\sum_{i=1}^N |x_i|^k \right]^{1/k}.$$

einzigem Parameter in Form von ε erforderlich.⁸ Dieser Parameter ist gemäß der Anwendung in Abhängigkeit von der Statistik der Störsignale und dem strömungsinduzierten Rauschen so vorzugeben, dass für eine große Schar von Störsignalen eine hohe mittlere Störsignaldämpfung erzielt wird.

⁸Für die rekursive Schätzung sind die Fensterlängen ebenfalls geeignet vorzugeben. Jedoch ist die Wahl dieser Parameter weitaus unkritischer. In dieser Arbeit hat sich beispielsweise $W = 1000$ bewährt. Es wäre ebenfalls möglich, für jedes adaptive Filter unterschiedliche Fensterlängen zu definieren.

Simulationstechnische Untersuchungen

Bevor ein Algorithmus auf einem Signalprozessor unter Realzeitbedingungen in einem ANC-System eingesetzt und erprobt werden kann, sollte der Algorithmus realitätsnah simulationstechnisch evaluiert worden sein. Die für eine Evaluation erforderliche Untersuchung des Konvergenz- oder *Tracking*-Verhaltens basiert häufig, wie im Abschnitt 5.1 erwähnt, auf einem MARKOV-Modell erster Ordnung. Dieses stützt sich zur Modellierung des zu adaptierenden zeitvarianten Systems meist auf weiße GAUSS-Prozesse und messtechnisch ermittelte Übertragungsfunktionen [Bron93, LP00, Saye03].

Die Verwendung eines MARKOV-Modells ist zur Untersuchung und Bewertung der Algorithmen sowie wegen der einfachen Implementierung legitim. Jedoch werden die Parameteränderungen eines physikalischen Systems keinen weißen Rauschprozessen entsprechen, so dass ein solches Modell begründet durch die von physikalischen Gesichtspunkten losgelöste Vorgabe der Parameteränderungen nur eingeschränkte Rückschlüsse auf das Verhalten erlaubt, wenn ein konkretes zeitvariantes physikalisches System zu Grunde liegt. Daher wird in dieser Arbeit für die simulationstechnischen Untersuchungen direkt der praktische Bezug zu einem aktiven Schalldämpfer hergestellt, der sich als Endschalldämpfer im Abgasstrang eines PKWs befinden soll. Die Einbettung der Modelle und Algorithmen in diesen Kontext ermöglicht zusätzlich eine praxisnahe Bewertung des *Tracking*-Verhaltens.

7.1 Aktiver Abgasschalldämpfer

Das durch veränderliche Strömungsgeschwindigkeiten und Temperaturen der Abgase bedingte zeitvariante Übertragungsverhalten der Strecken ist fortlaufend zu adaptieren, so dass die *Tracking*-Eigenschaften der Algorithmen das Ergebnis der Störsignaldämpfung maßgeblich bestimmen.

Eine direkte Einbettung und Untersuchung der Algorithmen in einem ANC-System eines realen aktiven Schalldämpfers ist aufgrund des erforderlichen Motoren- oder Fahrleistungsprüfstands mit einem hohen finanziellen Aufwand verbunden. Daher empfiehlt es sich, das Potenzial des ANC-Systems zunächst

auf der Grundlage von Simulationen abzuschätzen. Um die Untersuchungen unter realitätsnahen Bedingungen durchführen zu können, liegen in der Simulation Signale zu Grunde, die in einer Abgasanlage bei verschiedenen Lastzyklen eines PKWs gemessen respektive abgeschätzt worden sind.¹

7.1.1 Geräuschspektrum eines Verbrennungsmotors

Das Ausströmen der unter Überdruck stehenden Abgase während der Öffnungszeiten der Auslassventile erzeugt im Abgasstrang einen ungleichmäßigen Volumenstrom. Dieser bedingt einen Schalldruck, der ebenfalls die Periodizität der Zündfrequenz aufweist [HM95]. Das typische Geräuschspektrum eines Verbrennungsmotors besteht somit aus diskreten Frequenzkomponenten, die von der Motordrehzahl n_D (in min^{-1}), der Zylinderanzahl n_Z und den Arbeitstakten n_A des Motors abhängen. Die Grundfrequenz ergibt sich zu

$$f_G = 2 \frac{n_Z}{n_A} \frac{n_D}{60}. \quad (7.1)$$

Für einen Vier-Zylinder-Vier-Takt-Reihenmotor gilt $f_G = 2n_D/60$. Wegen des Vorfaktors $2n_Z/n_A = 2$ wird f_G auch als zweite Motorharmonische bezeichnet [Erha91]. Neben der zweiten Motorharmonischen existieren im Geräuschspektrum weitere Harmonische, die häufig weniger stark ausgeprägt sind. Eine detaillierte Darstellung des Geräuschspektrums erfolgt im Abschnitt 7.2.2. Der Gesamtschalldruckpegel kann im Abgasstrang nach dem Katalysator Werte von $p_{\max} \approx 150$ dB erreichen [HM95].

7.1.2 Stand der Forschung und Entwicklung

Aktive Abgasschalldämpfer standen und stehen nach wie vor im Blickpunkt von Forschungs- und Entwicklungsaktivitäten. Diese weisen gegenüber einem passiven Konzept die folgenden Vorteile auf [KCJ05]:

- *reduzierter Kraftstoffverbrauch durch verringerten Rückstaudruck,*
- *Auslegung unabhängig von den Eigenschaften der Primärquelle,*
- *Möglichkeit des Sound-Designs.*

¹In dieser Arbeit steht nicht die Entwicklung und Erprobung eines serienreifen Konzepts eines aktiven Abgasschalldämpfers, der neben Elementen zur Schalldämpfung ebenfalls Systeme zur Abgasaufbereitung enthält, im Mittelpunkt. Daher erscheint es im Gegensatz zu den bisher experimentell erprobten *Feedforward*-Konzepten erlaubt [EZ93, KHO98], auf den Einsatz eines Drehratensensors für die Referenzsignalerzeugung zu verzichten, obwohl sich der Einsatz wegen des typischen Geräuschspektrums eines Verbrennungsmotors anbieten würde. Stattdessen wird in der Simulation davon ausgegangen, dass die Erfassung des Referenzsignals mit einem Mikrofon erfolgen kann und keine akustische Rückkopplung von der Sekundärquelle zum Referenzsensor vorliegt. Das eigentliche Ziel dieser Arbeit, die Untersuchung und Bewertung von Algorithmen zur Störsignaldämpfung, tangiert diese Prämisse nicht.

Die gezielte Beeinflussung des Geräuschespektrums durch ein *Sound-Design* ist nicht nur dem Abgasstrang vorbehalten, sondern wird zunehmend auch im Fahrzeuginnenraum erprobt [Bron93, SL00, SSH02]. Die Entwicklung aktiver Abgasschalldämpfer stellt aufgrund der hohen technischen Anforderungen nach wie vor eine Herausforderung dar, erfordern diese unter anderem:

- *temperaturbeständige Mikrofone und Lautsprechermembranen;*
- *Membranantriebe, die hohe Schalldrücke verzerrungsfrei reproduzieren;*
- *adaptive Verfahren mit gutem Tracking-Verhalten.*

Anfang der Neunziger Jahre wurden beispielsweise von NISHIMURA und von EGHESADI ET AL. Ansätze zur aktiven Schalldämpfung in einem Abgasstrang publiziert, die auf einem adaptiven Schmalband-ANC-Verfahren und einem Drehratensensor zur Generierung des Referenzsignals basierten. Die aktive Abgasschalldämpfung wurde von NISHIMURA für einen DIESEL-Generator untersucht [Nish91], während EGHESADI ET AL. ein PKW-taugliches Konzept vorstellten, bei dem zwei Lautsprecher koaxial zur Schallausbreitungsrichtung angeordnet waren [EZ93]. Um mit kleinen Lautsprechern tieffrequente Signale mit hohen Schalldruckpegeln dämpfen zu können, kam dort zusätzlich hinter der Lautsprecheranordnung ein Resonator zum Einsatz.

Der aktuelle Entwicklungsstand ist dagegen anhand von Publikationen oder Pressemitteilungen schwer abzuschätzen, da technische Details der neuen Konzepte nur spärlich öffentlich preisgegeben werden. Die Arbeiten von KIM ET AL. und KRÜGER ET AL. geben einen groben Überblick.

Konzept von Kim et al.

Von KIM ET AL. wurde ein adaptives Konzept für einen aktiven Abgasschalldämpfer eines PKWs vorgestellt, welches auf der Grundlage des AN-Verfahrens aus [KV97] eine *Online*-Modellierung des Sekundärpfads durchführt [KHO98]. Die Auslegung der Geometrie erfolgte mit Hilfe von numerischen Simulationen dergestalt, dass sich der Störschall und der Schall des Lautsprechers als ebene Schallwelle überlagern. Das Fehlermikrofon konnte daher außerhalb des Endrohrs platziert werden, wo die Abgastemperaturen geringer sind. Durch die gewählte Anordnung ist eine aktive Dämpfung im Bereich um den Auslass erzielt worden.

Zur Referenzsignalerzeugung kam ein Drehratensensor zum Einsatz, wobei durch eine geeignete Signalaufbereitung zwei harmonische Schwingungen synthetisiert werden konnten. Die ersten beiden Harmonischen wurden auf der Basis eines FxLMS-Verfahrens gedämpft. Dieses Konzept kam in [KHSO99] auch für den Abgasstrang eines LKWs zum Einsatz.

Konzept von Krüger et al.

Von KRÜGER ET AL. wurde mit dem Schwerpunkt eines *Sound-Designs* ebenfalls ein aktiver Abgasschalldämpfer für PKWs vorgestellt [KCJ05]. Gemäß ihren Ausführungen überstand der Lautsprecher und das Fehlermikrofon unter realen Betriebsbedingungen die hohen Abgastemperaturen in einem Demonstrationsfahrzeug unbeschadet. Für den Lautsprecher wurde dies durch eine thermische Isolation von der Abgasströmung sowie durch eine Fahrtwindkühlung erreicht.

Die erzielte Schalldämpfung fällt gegenüber dem Konzept von KIM ET AL. deutlich besser aus. Technische Details bezüglich der Adaptationsalgorithmen, den verwendeten Verfahren zur Schätzung des Sekundärpfads und zur Generierung des Referenzsignals wurden jedoch nicht diskutiert.

Anmerkungen zum Tracking

Auffällig bei den publizierten Konzepten zum aktiven Abgasschalldämpfer ist, dass sich mit konstanter oder langsam variierender Motordrehzahl durchaus akzeptable Dämpfungen erzielen lassen. Bei schnell veränderlichen Motordrehzahlen, die größere Änderungen bei der Abgastemperatur sowie der Strömungsgeschwindigkeit des Abgases zur Folge haben und höhere Anforderungen an das *Tracking* stellen, sind dagegen häufig deutlich schlechtere Resultate zu verzeichnen.

Ob sich die neuen Algorithmen als Grundlage für verbesserte aktive Abgasschalldämpfer anbieten, soll im Weiteren nicht diskutiert werden, da für den Einsatz ohnehin eine andere Referenzsignalerzeugung vorzuziehen ist. Dennoch erlauben die im Folgenden vorzustellenden Ergebnisse Rückschlüsse bezüglich der für diese Anwendung zu präferierenden Algorithmen.

7.2 Simulationsmodell

Das mathematische Modell des Röhrensystems und die Adaptationsalgorithmen sind für eine simulationstechnische Implementierung in Einklang zu bringen. Die Herleitung der für die Implementierung benötigten Teilübertragungsfunktionen kann mit Hilfe der Zweitorthorie auf der Grundlage von Abbildung 7.1 b) erfolgen. Die Elemente der Kettenmatrizen sind Funktionen von der Kreisfrequenz. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird jedoch auf die Angabe des Arguments verzichtet. Die gemäß den Gleichungen (4.1) benötigten Teilübertragungsfunktionen berechnen sich mit

$$Z_{R1,S1} = \frac{Z_{E,R1} Z_{A,S1}}{Z_{E,R1} + Z_{A,S1}} \quad \text{und} \quad Z_{P1,R1} = \frac{Z_{A,P1} Z_{E,R1}}{Z_{A,P1} + Z_{E,R1}} \quad (7.2)$$

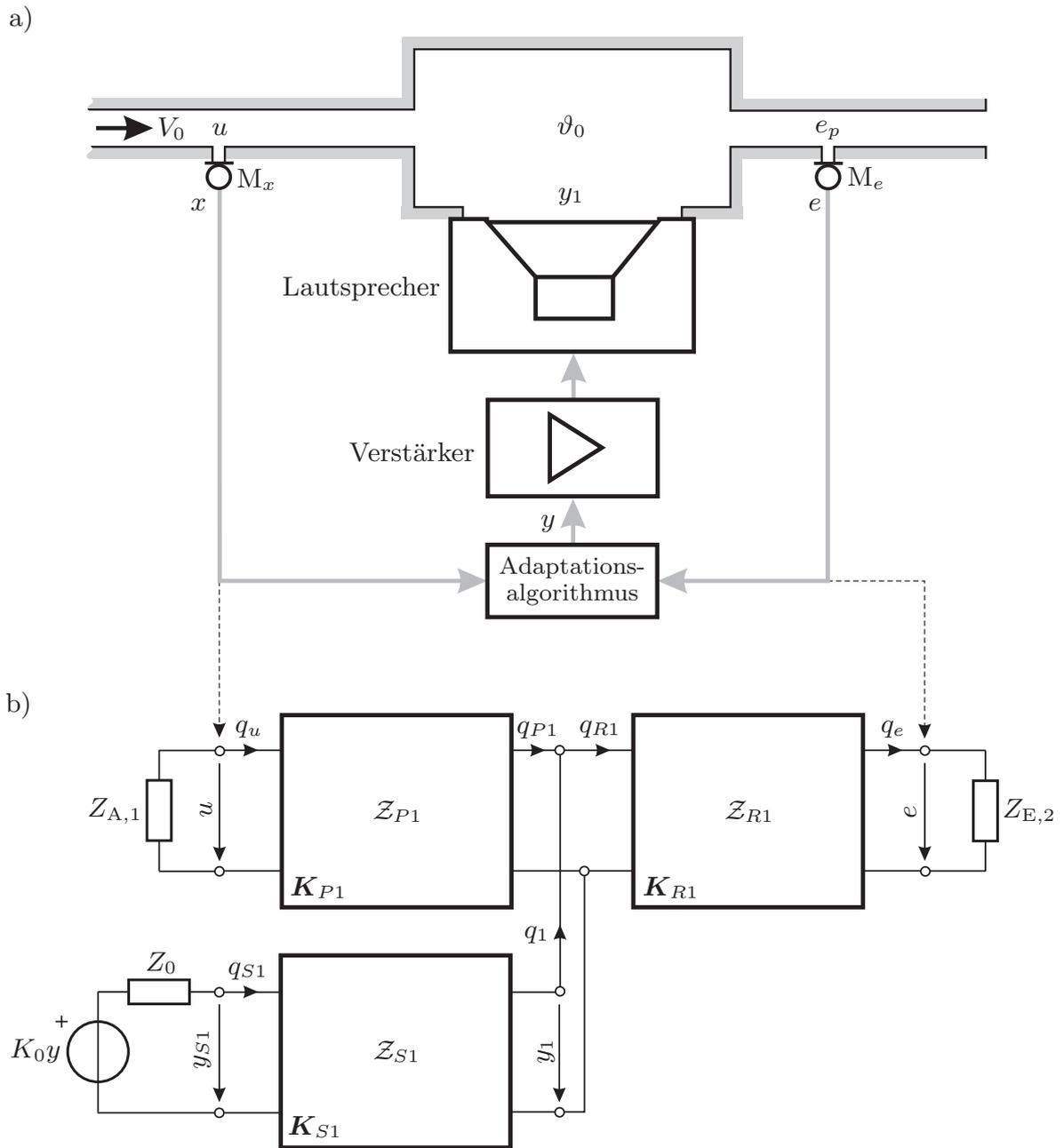


Abbildung 7.1: a) Schematische Darstellung eines aktiven Koaxialschalldämpfers und b) dazugehörige Zweitormodellierung

und den entsprechenden Elementen der Kettenmatrizen zu

$$P_1 = \frac{1}{K_{11,P1} + K_{12,P1}/Z_{R1,S1}}, \quad (7.3a)$$

$$R_1 = \frac{1}{K_{11,R1} + K_{12,R1}/Z_{E,2}}, \quad (7.3b)$$

$$S_1 = \frac{Z_{E,S1}}{Z_{E,S1} + Z_0} \frac{K_0}{K_{11,S1} + K_{12,S1}/Z_{P1,R1}}. \quad (7.3c)$$

Die Impedanzen in den Gleichungen (7.2) setzen sich mit den komplexen Amplituden der an den Toren definierten Signale aus

$$Z_{E,R1} = \frac{y_1}{q_{R1}} = \frac{K_{11,R1} + K_{12,R1}/Z_{E,2}}{K_{21,R1} + K_{22,R1}/Z_{E,2}}, \quad (7.4a)$$

$$Z_{E,S1} = \frac{y_{S1}}{q_{S1}} = \frac{K_{11,S1} + K_{12,S1}/Z_{P1,R1}}{K_{21,S1} + K_{22,S1}/Z_{P1,R1}}, \quad (7.4b)$$

$$Z_{A,S1} = -\frac{y_1}{q_1} = \frac{K_{22,S1} + K_{12,S1}/Z_0}{K_{21,S1} + K_{11,S1}/Z_0}, \quad (7.4c)$$

$$Z_{A,P1} = -\frac{y_1}{q_{P1}} = \frac{K_{22,P1} + K_{12,P1}/Z_{A,1}}{K_{21,P1} + K_{11,P1}/Z_{A,1}} \quad (7.4d)$$

zusammen. Das Röhrensystem vor dem Referenzmikrofon wird durch die Impedanz $Z_{A,1}$ beschrieben, während die Impedanz $Z_{E,2}$ das Röhrensystem charakterisiert, welches dem Fehlermikrofon folgt.

7.2.1 Implementierung

Der Übergang auf eine diskrete Beschreibungsform erfolgt zunächst durch Auswertung des mathematischen Röhrenmodells für rechtsseitige diskrete Kreisfrequenzen ω_k , die mit $0 \leq \omega_k \leq \omega_S$ durch die Abtastfrequenz f_S begrenzt sind.² Das mathematische Modell erlaubt die Berechnung des Übertragungsverhaltens für diskrete Kreisfrequenzen, während die Algorithmen zur adaptiven Signalverarbeitung zeitdiskret implementiert werden sollen. Die Ergebnisse des Röhrenmodells sind daher in den Zeitbereich zu übertragen. Dazu lassen sich zunächst mit $0 \leq \omega_k \leq \omega_S$ gemäß Abschnitt 4.1 die rechtsseitigen Übertragungsfunktionen

$$P_r(j\omega_k) = P_{1,r}(j\omega_k)R_{1,r}(j\omega_k)H_{e,r}(j\omega_k), \quad (7.5a)$$

$$S_r(j\omega_k) = S_{1,r}(j\omega_k)R_{1,r}(j\omega_k)H_{e,r}(j\omega_k) \quad (7.5b)$$

berechnen. Das komplex symmetrische Anfügen der linksseitigen Spektren

$$P_l(j\omega_k) = P_r^*(-j\omega_k) \quad \text{und} \quad S_l(j\omega_k) = S_r^*(-j\omega_k) \quad (7.6)$$

führt schließlich zu den Übertragungsfunktionen $P(j\omega_k)$ und $S(j\omega_k)$. Durch Interpretation dieser Größen als Übertragungsfunktionen eines zeitdiskreten Systems können nach der inversen diskreten FOURIER-Transformation

$$p(n) = \text{IDFT}\{P(j\omega_k)\} \quad \text{und} \quad s(n) = \text{IDFT}\{S(j\omega_k)\} \quad (7.7)$$

²Das Ausbreitungsmaß lässt sich bei $\omega_k = 0$ für nicht-ideal schallharte Röhrenwände nicht stetig fortsetzen, so dass durch die Definition $\gamma_w(\omega_k = 0) = 0$ Stetigkeit zu gewährleisten ist. Die Wände des zu simulierenden Schalldämpfers können jedoch als ideal schallhart vorausgesetzt werden.

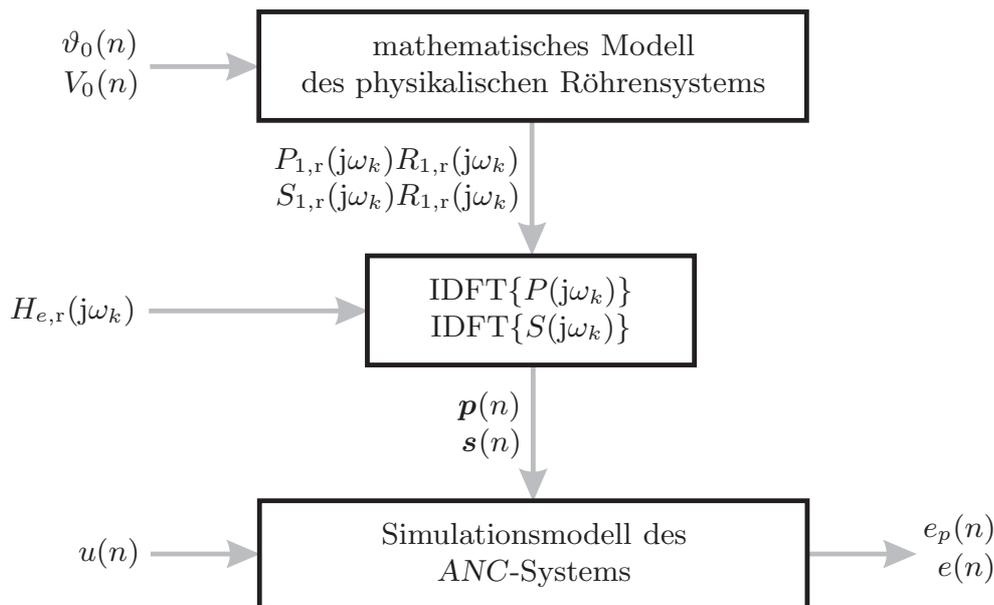


Abbildung 7.2: Schematische Darstellung des Simulationsmodells

die Impulsantworten angegeben werden, wobei die Anzahl der äquidistanten Kreisfrequenzen im Intervall $-\omega_S \leq \omega_k \leq \omega_S$ die Länge der Impulsantworten festlegt. Setzt man eine Transversalfilterstruktur voraus, erhält man direkt die für eine Implementierung benötigten Koeffizientenvektoren $\mathbf{p}(n)$ und $\mathbf{s}(n)$. Die Längen der Impulsantworten $p(n)$ und $s(n)$ beziehungsweise der Koeffizientenvektoren $\mathbf{p}(n)$ und $\mathbf{s}(n)$ seien im Weiteren zu \mathcal{M} und \mathcal{N} gewählt. Der Berechnungsablauf ist schematisch in Abbildung 7.2 verdeutlicht.

In der Simulation wird entlang der Strömungsrichtung des Abgases kein Temperaturgefälle berücksichtigt, so dass während eines Zeitschritts jedem Segment des Röhrenmodells eine identische Gastemperatur zu Grunde liegt.³ Darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass an Querschnittsveränderungen innerhalb des Röhrensystems keine Strömungsgeräusche erzeugt werden, die sich dem eigentlichen Störschall überlagern. Des Weiteren liegen in der Simulation für das Abgas vereinfachend die thermodynamischen Eigenschaften von Luft zu Grunde.

7.2.2 Simulationsstimulus

Wie bereits erwähnt, kommen Signale als Stimulusgrößen zum Einsatz, die für reale Fahrzyklen eines PKWs im Abgasstrang auf dem Fahrleistungsprüfstand

³Zur Berücksichtigung eines Temperaturgradienten wäre ebenfalls ein noch zu validierender Ansatz denkbar, der auf einer räumlichen Diskretisierung mit Hilfe von zusätzlichen Zweitoren basiert, wobei jedem Zweitor formal eine unterschiedliche Temperatur zu gewiesen werden könnte. Abgesehen von dem geringeren Berechnungsaufwand erscheint es für die Bewertung der Algorithmen bezüglich ihres *Tracking*-Verhaltens ausreichend, einen räumlich, jedoch nicht zeitlich konstanten Temperaturverlauf zu betrachten.

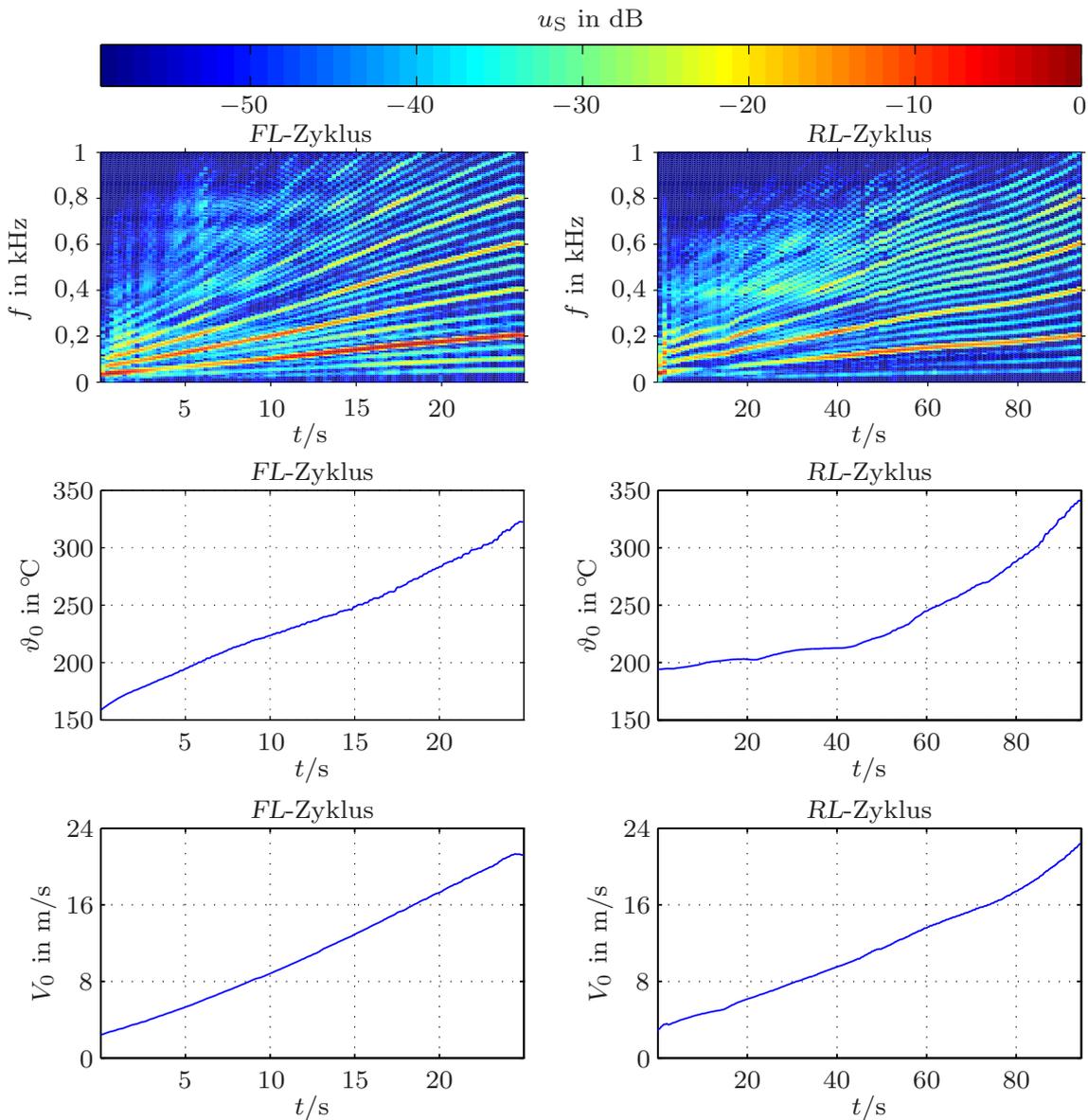


Abbildung 7.3: Zeitliche Verläufe der Stimulussignale von zwei Fahrzyklen

gemessen oder abgeschätzt worden sind. Die Messungen der Schalldruck- und Temperaturverläufe erfolgten vor dem passiven Endschalldämpfer und damit an der Position, wo das aktive Schalldämpferkonzept einzubetten wäre. Ausgehend von der Leerlaufdrehzahl wurde die Motordrehzahl innerhalb eines Zyklus kontinuierlich auf die maximale Drehzahl beschleunigt. Stellvertretend für eine Vielzahl von zu Grunde gelegten Fahrzyklen seien der *FL-Zyklus*⁴ mit einer kurzen Beschleunigungsphase und der *RL-Zyklus*⁵ mit einer lang gezogenen Beschleunigungsphase exemplarisch herausgegriffen.

⁴Full-Load-Zyklus

⁵Road-Load-Zyklus

Da den gemessenen Schalldrucksignalen zwangsläufig strömungsinduzierte Geräuschanteile überlagert waren, die in der Simulation jedoch definiert vorgegeben werden sollten, wurden zur Beseitigung des Rauschens die Signale entsprechend resynthetisiert.

Durch die Verwendung eines Mikrofons als Referenzsensor eignet sich das vorgestellte adaptive Konzept ebenfalls für die Reduzierung von breitbandigem Lärm. Diese Tatsache wird berücksichtigt, indem bei der Simulation losgelöst vom Kontext eines aktiven Abgasschalldämpfers anstelle des typischen schmalbandigen Geräuschspektrums eines Verbrennungsmotors ein breitbandiges Störsignal in Form von weißem Rauschen zum Einsatz kommt. Dieses Störsignal gilt es unter den gleichen Temperaturänderungen und Strömungsgeschwindigkeiten der Abgase optimal zu dämpfen. Die schmalbandigen Störsignale werden im Weiteren durch $u_S(n)$ bezeichnet, während die breitbandigen Signale durch $u_N(n)$ repräsentiert werden.

Die Verläufe für die Abgastemperaturen wurden so rekonstruiert, dass diese die maximal beobachteten Temperaturänderungen innerhalb eines mehrfach durchlaufenden Fahrzyklus widerspiegeln. Auf der Basis dieser Temperaturverläufe sowie der Motordrehzahl und der Motorkenngrößen wurden die zeitlichen Verläufe der Strömungsgeschwindigkeiten der Abgase im Abgasstrang für die Fahrzyklen heuristisch abgeschätzt. In Abbildung 7.3 sind die in der Simulation verwendeten Stimulussignale dargestellt.

7.2.3 Referenz- und Fehlersignal

Dem Referenzsignal $x(n)$ und dem Fehlersignal $e(n)$ werden zur Modellierung eines endlichen Signal-Rausch-Verhältnisses sowie von strömungsinduzierten Geräuschen, die im Bereich der Mikrofone entstehen, gezielt unkorrelierte weiße GAUSS-Prozesse überlagert. Diese Rauschprozesse wurden zu

$$\mathcal{E}\{v_x^2(n)\} = \sigma_{M,x}^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{E}\{v_e^2(n)\} = \sigma_{M,e}^2 \quad (7.8)$$

sowie

$$\mathcal{E}\{v_{t,x}^2(n, V_0)\} = \sigma_{t,x}^2 V_0^2(n) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}\{v_{t,e}^2(n, V_0)\} = \sigma_{t,e}^2 V_0^2(n) \quad (7.9)$$

definiert. Die Varianzen von $v_{t,x}(n, V_0)$ und $v_{t,e}(n, V_0)$ hängen damit quadratisch von der Strömungsgeschwindigkeit $V_0(n)$ des Abgases ab. Mit den Impulsantworten $h_x(n)$ und $h_e(n)$ der Mikrofone setzt sich das Referenz- und Fehlersignal schließlich aus

$$x(n) = h_x(n) * u(n) + h_x(n) * v_{t,x}(n, V_0) + v_x(n), \quad (7.10a)$$

$$e(n) = h_e(n) * e_p(n) + h_e(n) * v_{t,e}(n, V_0) + v_e(n) \quad (7.10b)$$

zusammen.

7.2.4 Quellenparameter der Sekundärquelle

Bei der Auslegung eines ANC-Systems sind im Gegensatz zur Abstimmung eines passiven Schalldämpfers keine Kenntnisse bezüglich der Parameter der Primärquelle erforderlich [ME88, KCJ05]. Allerdings können sich die Eigenschaften der Primär- und Sekundärquelle auf das Konvergenz- und *Tracking*-Verhalten auswirken. Die optimale Übertragungsfunktion des Kompensationsfilters $\hat{W}_{\text{opt}}(z)$ bleibt jedoch von der Primärquelle unbeeinflusst [ME88]. Deshalb erscheint es erlaubt, in der Simulation eine ideale Primärquelle vorauszusetzen.

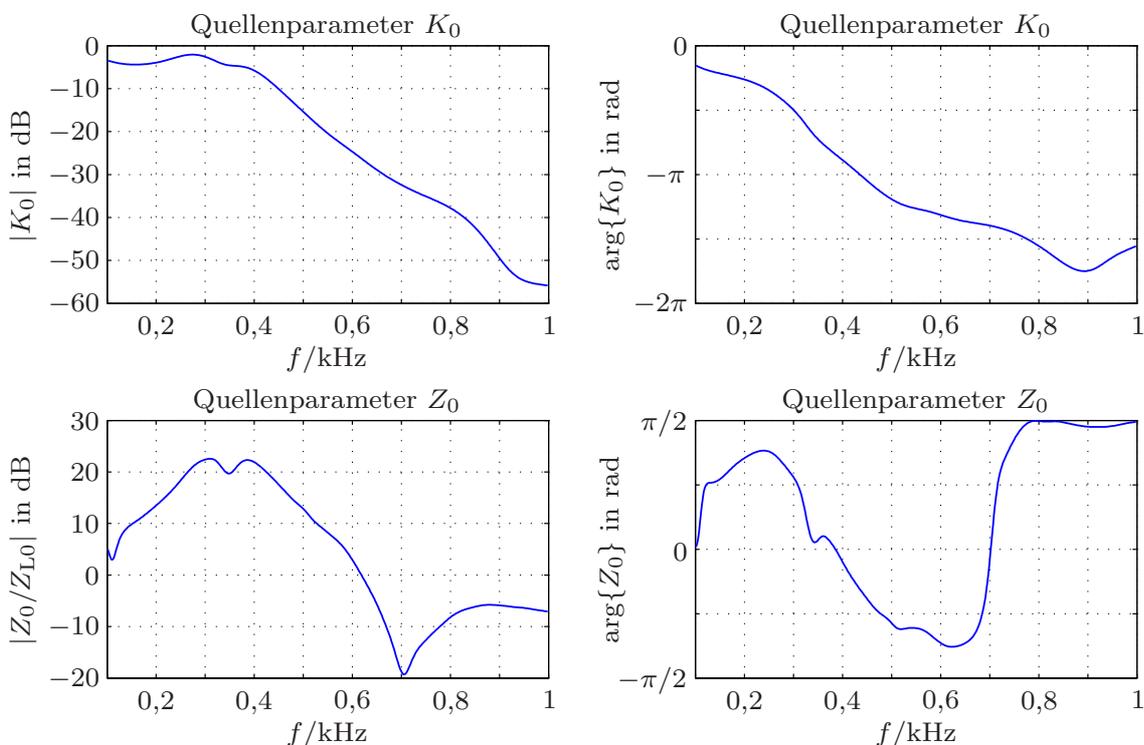


Abbildung 7.4: Betrag und Phase der transformierten Quellenparameter K_0 und Z_0

Demgegenüber haben die Parameter der Sekundärquelle einen direkten Einfluss auf $\hat{W}_{\text{opt}}(z)$ [ME88]. Daher soll sie in der Simulation, wie in Abbildung 7.1 b) angedeutet, als THÉVENIN-Quelle modelliert werden. Es bietet sich an, die im Anhang B bestimmten Quellenparameter zu Grunde zu legen. Diese beschreiben gemäß Abbildung B.2 den Lautsprecher und das über einen Trichter angekoppelte Röhrensystem bis zum Mikrofon. Für den Einsatz im mathematischen Modell des Koaxialschalldämpfers sind die Parameter auf den Bereich vor dem Trichter zu transformieren. In Abbildung 7.4 sind die Ergebnisse der Transformation dargestellt.

7.3 Simulationsergebnisse

Röhrensystem	Abschnitt	Anmerkung	
Ausbreitungsmaß	1.2.2 und 3.1	MUNJAL	
Querschnittssprünge	3.4.2	MUNJAL	
Mündung ohne Flansch	2.3.1	NORRIS ET AL.	
Sekundärquelle	7.2.4	Lautsprecher	
Gaseigenschaften	Anhang A	Luft	

Parameter	Einstellung		
Abtastfrequenz	$f_S = 2 \text{ kHz}$		
Anzahl der Systemparameter	$\mathcal{M} = \mathcal{N} = 1024$		
Anzahl der Filterkoeffizienten	$L = M = N = 128$		
Grenzfrequenzen von H_x und H_e	$f_{G,u} = 0,02 \text{ kHz}, f_{G,o} = 0,9 \text{ kHz}$		
Varianz von $u_S(n)$ und $u_N(n)$	$\sigma_u^2 = 1$		
Rauschen Referenzsignal	$\sigma_{M,x}^2 = 10^{-4}, \sigma_{t,x}^2 = 10^{-5}/[\text{m/s}]^2$		
Rauschen Fehlersignal	$\sigma_{M,e}^2 = 10^{-4}, \sigma_{t,e}^2 = 10^{-5}/[\text{m/s}]^2$		
Startwerte	$\hat{\mathbf{w}}(0) = [1, \mathbf{0}_{L-1}^T]^T, \hat{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{0}_M, \hat{\mathbf{s}}(0) = \mathbf{0}_N$		

Verfahren	Abschnitt	Algorithmus	Abkürzung
AN-Verfahren nach ZHANG ET AL.	6.2	LMS	AN-Z
OM-Verfahren nach KOHNO ET AL.	6.5	LMS	OM-K
OM-Verfahren nach LOPES ET AL.	6.4	ERLS	OM-L
verbessertes OM-Verfahren	6.6	ERLS	OM-V
verbessertes OM-Verfahren	6.6	RLS	OM-RLS
verbessertes OM-Verfahren mit $\text{KM-}\ \cdot\ _1$	6.6 und 6.7.2	MCERLS	OM-V-R

Kovarianzmanagement	Abschnitt	Algorithmus	Abkürzung
nicht vereinfacht	6.7.1	MCERLS	KM
mit Vektornorm vereinfacht	6.7.2	MCERLS	$\text{KM-}\ \cdot\ _k$

Störsignal	Abschnitt	Abkürzung
schmalbandiges	7.2.2	$u_S(n)$
breitbandiges	7.2.2	$u_N(n)$

Tabelle 7.1: Allgemeine Simulationseinstellungen und Abkürzungen

Als Gütemaß zur Bewertung des *Tracking*-Verhaltens bietet sich die erreichte Störsignaldämpfung an. Wie im Abschnitt 4.1 angedeutet, können dazu das gedämpfte Störsignal $e_p(n)$ und die Größe $d(n)$, die den Betrieb ohne aktive Dämpfung charakterisiert, gemäß der Abschätzung

$$D = \sqrt{\frac{\mathcal{M}\{d^2(n)\}}{\mathcal{M}\{e_p^2(n)\}}} \quad (7.11)$$

ins Verhältnis gesetzt werden. Der Mittelwertoperator ist durch $\mathcal{M}\{\cdot\}$ gekennzeichnet und sei zu

$$\mathcal{M}\{g(n)\} = \frac{1}{N - N_{\text{Start}} + 1} \sum_{i=N_{\text{Start}}}^N g(i) \tag{7.12}$$

definiert. Um bei der Mittelwertbildung Einschwingvorgänge nicht zu berücksichtigen, beginnt diese ab dem Zeitindex N_{Start} respektive ab einer simulierten Zeit von $t_{\text{Start}} = N_{\text{Start}}/f_s = 5$ s.

Neben dem akustischen Qualitätskriterium $e_p(n)$ soll auch das Fehlermaß $\xi(n) = \mathcal{E}\{e^2(n)\}$ zur Bewertung der Algorithmen herangezogen werden. Unter Annahme von Ergodizität lässt sich die als mittelwertfrei angenommene Größe gemäß den Ausführungen im Anhang D rekursiv durch

$$\xi(n) = \mathcal{E}\{e^2(n)\} \approx \left[1 - \frac{1}{W}\right] \left[\xi(n-1) + \frac{1}{W}e^2(n)\right] \tag{7.13}$$

abschätzen. Die Fensterlänge wurde zu $W = 1000$ gewählt. Da Rauschprozesse beim Referenz- und Fehlersignal oder als Störsignal zum Einsatz kamen, wurden die Störsignaldämpfungen D und die Fehlerverläufe $\xi(n)$ jeweils für zehn Durchläufe bei unterschiedlicher Initialisierung der Rauschgeneratoren in der Simulationsumgebung bestimmt und die Resultate gemittelt.

Die Modellierung des physikalischen Primär- und Sekundärpfads erfolgte durch eine Transversalfilterstruktur. Die Längen der Impulsantworten wurden so vorgegeben, dass diese im zu Grunde gelegten Zeitraum bereits weitgehend abgeklungen sind. Das führte auf $M = \mathcal{N} = 1024$. Demgegenüber sind, wie in der Praxis häufig üblich, für die adaptiven Filter mit $L = M = N = 128$ deutlich kürzere Filterlängen gewählt worden. Die allgemeinen Simulationseinstellungen sowie die definierten Abkürzungen sind der Tabelle 7.1 zu entnehmen.

7.3.1 Kovarianzmanagement

Störsignal	Zyklus	Verfahren	KM ε	KM- $\ \cdot\ _1$ ε	KM- $\ \cdot\ _2$ ε
$u_S(n)$	FL, RL	OM-L	1	$5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$
		OM-V	1	$5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$
$u_N(n)$	FL, RL	OM-L	$5 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$
		OM-V	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 7.2: Gewählter Adaptationsparameter ε bei den MCERLS-Algorithmen

In Abbildung 7.5 sind exemplarisch für das Verfahren OM-V mit dem Kovarianzmanagement KM- $\|\cdot\|_1$ die erzielten Störsignaldämpfungen in Abhängigkeit von dem Adaptationsparameter ε für die Fensterlänge $W = 1000$ dargestellt. Bei den schmalbandigen Signalen wird die höchste Dämpfung für beide

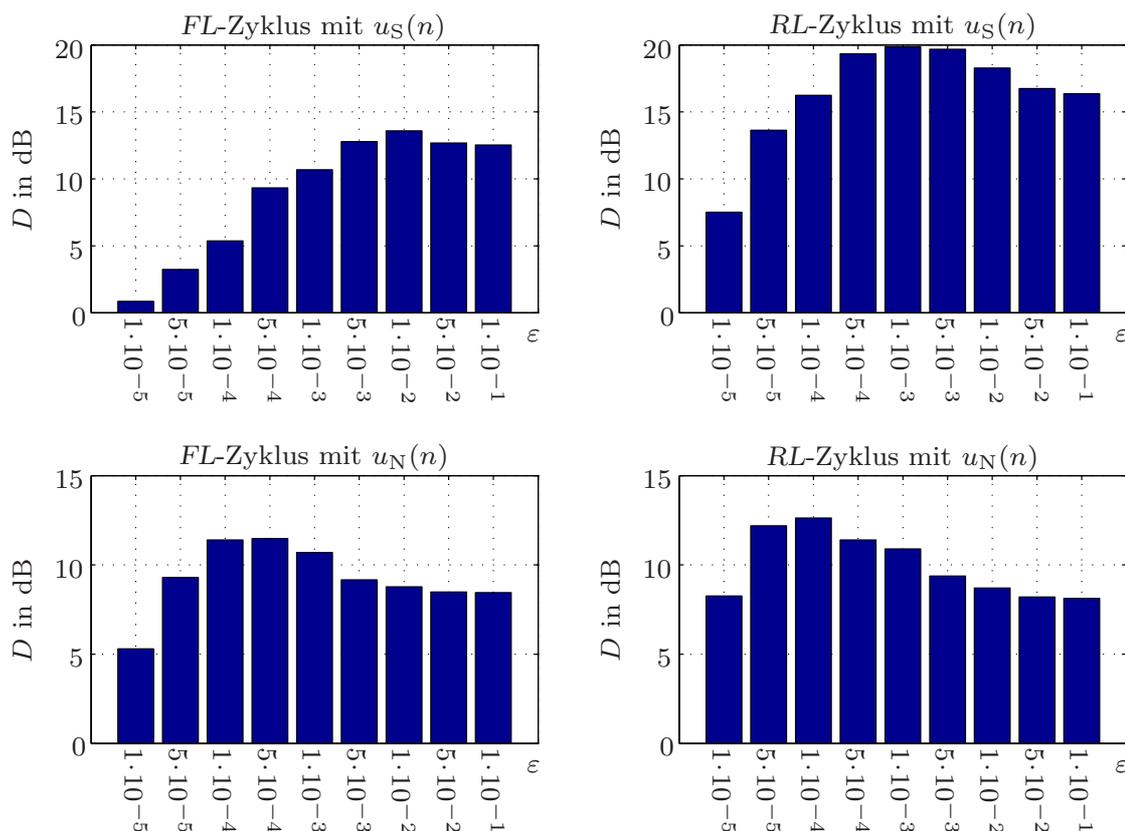


Abbildung 7.5: Abhängigkeit der Störsignaldämpfung vom Adaptationsparameter ε für das Verfahren OM-V mit dem Kovarianzmanagement $\text{KM-}\|\cdot\|_1$

Zyklen mit $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{-3}$ erreicht, während es für die breitbandigen Signale mit $\varepsilon \approx 1 \cdot 10^{-4}$ der Fall ist. Demnach ist der Adaptationsparameter ε unter anderem auf die spektrale Zusammensetzung der vorliegenden Störsignale und das Messrauschen abzustimmen.

In der Tabelle 7.2 sind die gewählten Adaptationsparameter ε angegeben, die für beide Zyklen jeweils zu hohen Störsignaldämpfungen führten. Es zeigte sich, dass ε für jede Variante des Kovarianzmanagement unterschiedlich vorzugeben ist.

Störsignaldämpfungen und Fehlerverläufe

Gemäß den Fehlerverläufen in Abbildung 7.6 klingt mit den schmalbandigen Störsignalen $u_S(n)$ der Fehler nach der Startphase häufig kurzzeitig wieder auf. Dieses kurzzeitige Ansteigen des Fehlers ist für den *FL*-Zyklus besonders signifikant. Im Gegensatz dazu klingen die Verläufe für die breitbandigen Störsignale $u_N(n)$ in Abbildung 7.7 innerhalb der ersten Sequenzhälften direkt ab. Das abrupte Ansteigen des Fehlers in Abbildung 7.6 erscheint daher durch die in Abhängigkeit von der Motordrehzahl variierende spektrale Zusammensetzung der Störsignale $u_S(n)$ bedingt.

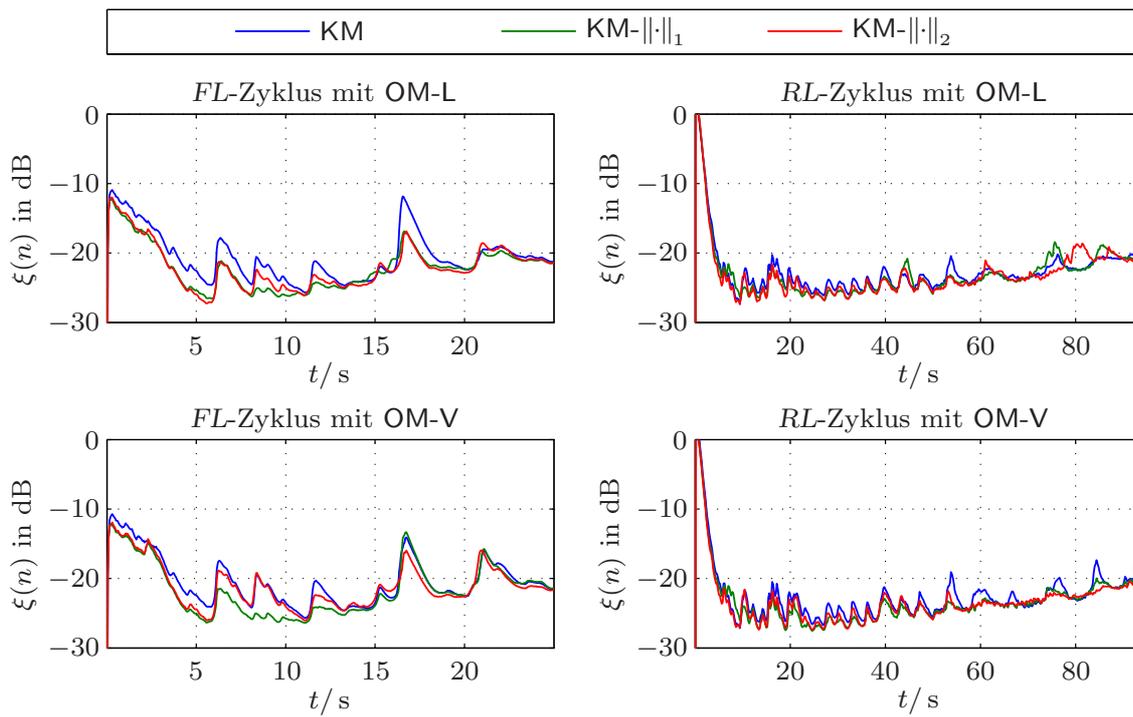


Abbildung 7.6: Fehlerverläufe für die schmalbandigen Störsignale $u_S(n)$ mit unterschiedlichem Kovarianzmanagement

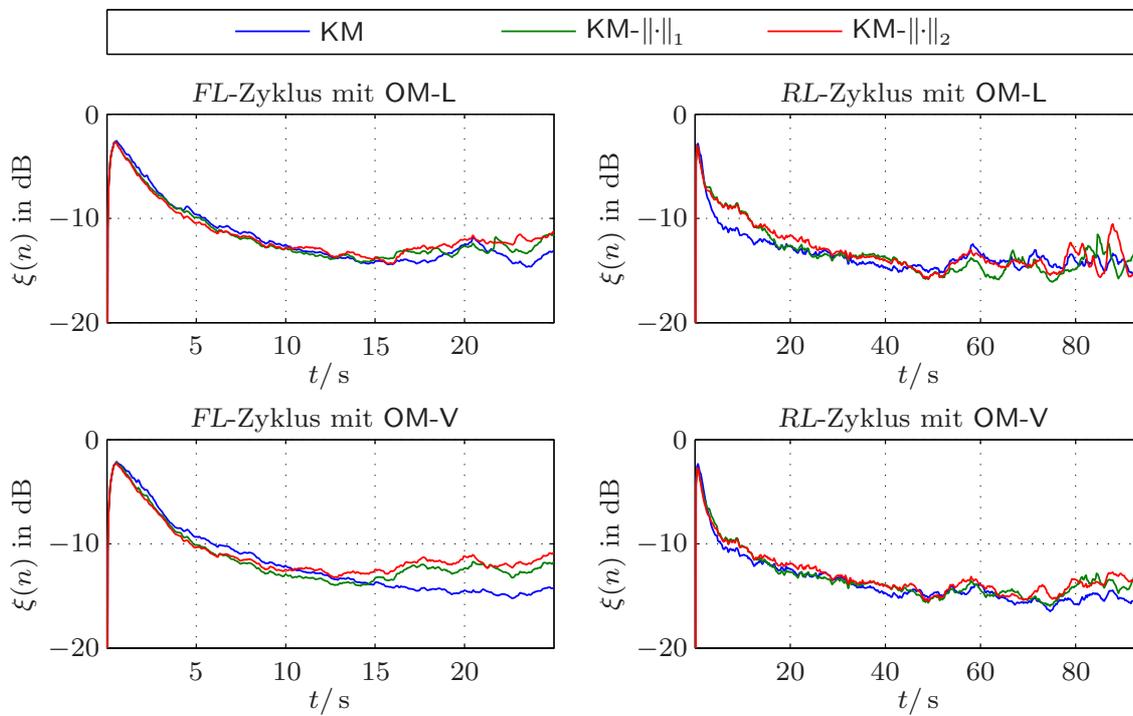


Abbildung 7.7: Fehlerverläufe für die breitbandigen Störsignale $u_N(n)$ mit unterschiedlichem Kovarianzmanagement

Störsignal	Zyklus	Verfahren	KM D in dB	KM- $\ \cdot\ _1$ D in dB	KM- $\ \cdot\ _2$ D in dB
$u_S(n)$	FL	OM-L	11,4	13,7	13,6
		OM-V	11,5	12,8	12,4
	RL	OM-L	18,9	19,1	19,0
		OM-V	18,7	19,7	19,8
$u_N(n)$	FL	OM-L	11,8	11,7	11,3
		OM-V	11,9	11,4	10,8
	RL	OM-L	12,9	12,5	12,1
		OM-V	13,1	12,6	12,3

Tabelle 7.3: Störsignaldämpfungen der MCERLS-Algorithmen mit den Adaptationsparametern in Tabelle 7.2

Im Vergleich zum längeren RL -Zyklus ändern sich beim FL -Zyklus die Stimulusgrößen in einer kürzeren Zeitspanne, so dass dieser höhere Anforderungen an das *Tracking* stellt. Die Dämpfungen fallen deshalb, wie der Tabelle 7.3 zu entnehmen, gegenüber dem RL -Zyklus geringer aus. Dagegen unterscheiden sich mit den breitbandigen Störsignalen $u_N(n)$ die in den beiden Zyklen erzielten Dämpfungen nur geringfügig voneinander. Diese sind jedoch aufgrund der breitbandigen Anregung geringer als mit den schmalbandigen Störsignalen $u_S(n)$. Mit einer Erhöhung der Filterlängen ließe sich eine Verbesserung erzielen, wobei dadurch der Berechnungsaufwand steigt.

Bei den Fehlerverläufen für die schmalbandigen Störsignale $u_S(n)$ kann jeweils in den letzten Zyklushälften der Trend zu einer leichten kontinuierlichen Zunahme des Fehlers beobachtet werden. Begründet ist der Anstieg durch die von der Strömungsgeschwindigkeit des Abgases abhängig vorgegebene Rauschvarianz. Der Einfluss dieses strömungsinduzierten Rauschens wird im Abschnitt 7.3.4 untersucht.

Bewertung

Es lässt sich resümieren, dass bezüglich des Kovarianzmanagements alle vorgestellten Varianten ähnlich gute Dämpfungen erzielen, so dass dementsprechend keine Variante eindeutig zu präferieren ist. Unter dem Aspekt des Berechnungsaufwands ist jedoch das Kovarianzmanagement $KM-\|\cdot\|_1$ vorzuziehen. Weiteren Arbeiten bleibt es vorbehalten, die Nachführung des Adaptationsparameters ε ebenfalls adaptiv zu gestalten.

Für das weitere Vorgehen wird das Verfahren $OM-V$ mit dem Kovarianzmanagement $KM-\|\cdot\|_1$ stellvertretend als Referenzverfahren herausgegriffen und durch die erweiterte Abkürzung $OM-V-R$ repräsentiert. Diesbezüglich kommt weiterhin die bewährte Fensterlänge $W = 1000$ zum Einsatz.

7.3.2 Vergleich der Verfahren zur Online-Modellierung

In diesem Abschnitt sind die mit dem Referenzverfahren OM-V-R erzielten Störsignaldämpfungen und Fehlerverläufe mit den Resultaten der etablierten Verfahren zur *Online*-Modellierung des Sekundärpfads gegenüberzustellen und zu bewerten. Dazu wurde neben den beiden LMS-basierten Verfahren AN-Z und OM-K das ERLS-basierte Verfahren OM-L verwendet. Darüber hinaus kam auf der Grundlage des RLS-Algorithmus das Verfahren OM-RLS zum Einsatz, welches mit $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}} = \mathbf{0}_{M+N}$ und $\mathbf{Q}_{\hat{w}} = \mathbf{0}_L$ aus OM-V hervorgeht.

Während beim Verfahren AN-Z zur Pegelanpassung des Rauschsignals die Strategie aus [ZLS03] Verwendung fand, wurde das Konzept OM-L gemäß Abschnitt 6.4 in seiner publizierten Version implementiert und folglich auf das erarbeitete Kovarianzmanagement sowie auf eine zusätzliche Aufteilung der Matrix $\mathbf{Q}_{\hat{p},\hat{s}}(n)$ verzichtet. Die Vorgabe der Adaptationsparameter bei den einzelnen Adaptationsalgorithmen erfolgte derart, dass sich für beide Stimuluszyklen eine hohe mittlere Störsignaldämpfung einstellt.

Störsignaldämpfungen

Störsignal	Zyklus	AN-Z D in dB	OM-K D in dB	OM-RLS D in dB	OM-L D in dB	OM-V-R D in dB
$u_S(n)$	FL	0,3	1,1	0,3	7,1	12,8
	RL	0,3	6,7	0,7	12,9	19,7
$u_N(n)$	FL	0,7	5,6	0,6	7,6	11,4
	RL	2,4	8,9	2,3	11,1	12,6

Tabelle 7.4: Störsignaldämpfungen ausgewählter Verfahren zur *Online*-Modellierung des Sekundärpfads

Bei den LMS-basierten Verfahren AN-Z und OM-K ist ein direkter Vergleich der konkurrierenden Konzepte zur *Online*-Modellierung des Sekundärpfads möglich. Wie den Störsignaldämpfungen in Tabelle 7.4 zu entnehmen, eignen sich die häufig präferierten AN-Verfahren in der untersuchten Form nicht für Anwendungen, die hohe Anforderungen an das *Tracking* stellen.

Die Resultate des berechnungstechnisch wesentlich aufwändigeren Verfahrens OM-RLS fallen gegenüber dem LMS-basierten Konzept OM-K deutlich schlechter aus. Die Verwendung des RLS-Algorithmus ist damit nicht zwangsläufig ein Garant für gutes *Tracking*-Verhalten.

Die mit den Verfahren OM-L und OM-V-R erreichten Dämpfungen verdeutlichen, dass durch gezielte Vorgabe beziehungsweise Modifikation der Kovarianzmatrizen ein verbessertes *Tracking* möglich ist. Die akzeptablen Resultate des Verfahrens OM-L lassen sich mit dem in dieser Arbeit vorgestellten

Konzept OM-V-R deutlich übertreffen.⁶ Es ist zu betonen, dass neben den hervorragenden Störsignaldämpfungen dieser Ansatz zusätzlich den geringsten Aufwand bei der Abstimmung der Adaptationsparameter erfordert.

Fehlerverläufe

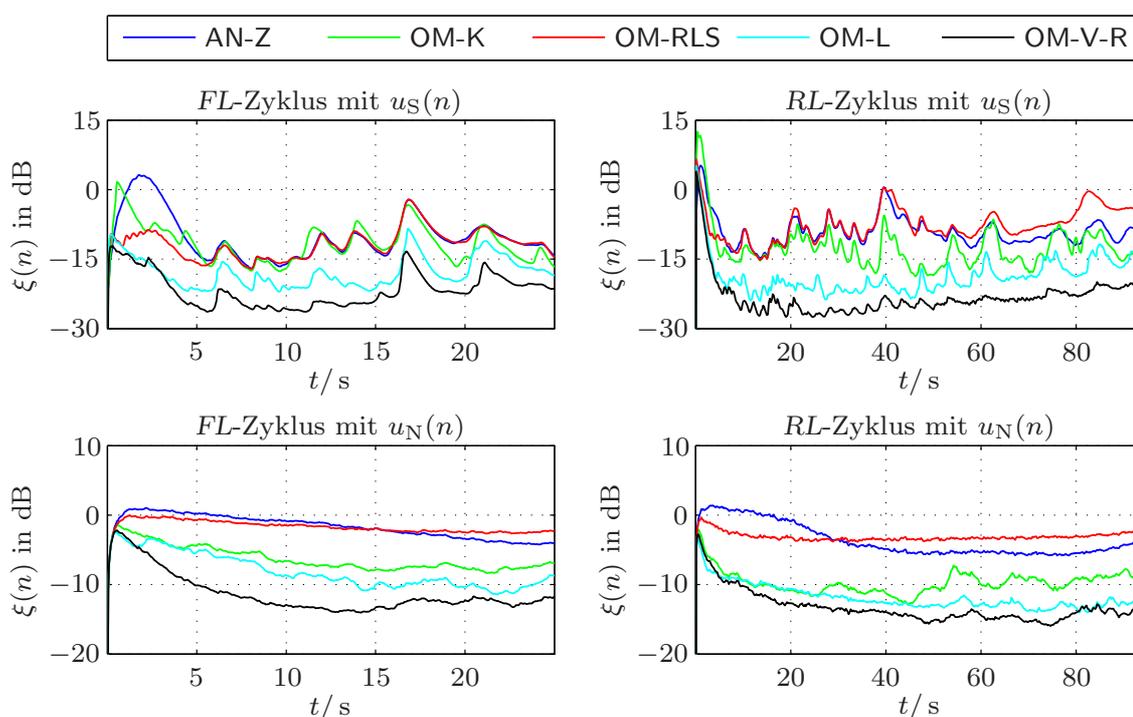


Abbildung 7.8: Fehlerverläufe ausgewählter Verfahren zur *Online*-Modellierung des Sekundärpfads

Die Fehlerverläufe zeigen bei den schmalbandigen Störsignalen $u_S(n)$ ebenfalls kurzzeitige Auf- und Abklingphasen, die gemäß Abbildung 7.8 beim Referenzverfahren OM-V-R am geringsten ausgeprägt sind. Das kurzzeitige Aufklingen erscheint durch die spektrale Zusammensetzung der Störsignale $u_S(n)$ begründet, da dieses für die breitbandigen Störsignale $u_N(n)$ in dieser Form nicht beobachtet werden kann.

Mit dem breitbandigen Störsignal $u_N(n)$ ist beim Verfahren OM-K zum Ende des *RL*-Zyklus eine Zunahme des Fehlers zu verzeichnen. Dennoch empfiehlt sich das LMS-basierte Verfahren als Alternative zum Ansatz OM-L, da dieses mit einer geringeren Komplexität eine als passabel einzustufende Dämpfung von breitbandigen Störsignalen in beiden Zyklen erlaubt. Allerdings eignet

⁶Liegt ein physikalisches System zu Grunde, bei dem sich die Variation der Parameter durch $q_{\hat{p}}(n) \approx q_{\hat{s}}(n)$ abschätzen lässt, sind mit den Verfahren OM-L und OM-V-R vergleichbare Ergebnisse zu erwarten. Dennoch weist für diesen Fall das Verfahren OM-V-R nach wie vor die einfachere Abstimmung der Adaptationsparameter auf.

sich das Verfahren OM-K nicht für die Dämpfung der schmalbandigen Störsignale $u_S(n)$. Dies wird besonders beim *FL*-Zyklus deutlich, der höhere Anforderungen an das *Tracking* stellt. Für höhere Dämpfungen durch ein verbessertes *Tracking* ist daher das Verfahren OM-V-R zu präferieren.

Grafische Darstellung der Störsignaldämpfung

In Abbildung 7.9 sind die aktiven Störsignaldämpfungen der ERLS-basierten Verfahren OM-L und OM-V-R zum Vergleich mit den Ergebnissen einer passiven Schalldämpfung für die schmalbandigen Störgeräusche $u_S(n)$ dargestellt. Für tieffrequente Signale unterhalb von $f < 0,2$ kHz sowie im Frequenzbereich von $0,4 \text{ kHz} < f < 0,7 \text{ kHz}$ erlauben die durch Querschnittsprünge bedingten Reflexionen keine akzeptable passive Dämpfung.

Eine aktive Dämpfung sorgt dagegen für eine deutliche Verbesserung. Während mit dem Konzept OM-L zusätzliche tieffrequente Artefakte vorhanden sind, reduziert das Referenzverfahren OM-V-R dort die Störgeräusche deutlich. Aufgrund des Kovarianzmanagements und des dadurch bedingten besseren *Trackings* ist mit dem Referenzverfahren im mittleren Frequenzbereich für beide Zyklen erwartungsgemäß eine höhere Dämpfung zu verzeichnen.

Bewertung

Bei den OM-Verfahren ist von Vorteil, dass für die *Online*-Modellierung des Sekundärpfads nur eine Fehlergleichung minimiert werden muss. Die häufig als Nachteil angeführte Tatsache einer nicht sichergestellten Identifikation der Übertragungspfade erscheint im Kontext eines *ANC*-Systems nicht relevant.

Im Vergleich mit den aus der Literatur bekannten Verfahren führen die im Referenzverfahren OM-V-R verwendeten Ansätze zu einer deutlichen Erhöhung der Störsignaldämpfungen. Auch wenn die ERLS-basierten Konzepte durch ihr *Tracking*-Verhalten zu besseren Resultaten führen, darf nicht vergessen werden, dass diese mit der Komplexität $\mathcal{O}\{\max\{L^2, [M + N]^2\}\}$ bei einer Implementierung für Realzeitanwendungen leistungsfähige Signalprozessoren erfordern. Dennoch ließe sich mit den Anforderungen in Tabelle 7.1 das Verfahren OM-V-R auf zurzeit aktuellen Signalprozessoren mit Fließkommaarithmetik implementieren. Für höhere Filterordnungen bietet sich beispielsweise die Verteilung des adaptiven Filters zur Erzeugung des Gegenschallsignals und der adaptiven Filter zur *Online*-Modellierung des Sekundärpfads auf zwei Prozessoren an.

Stehen aus wirtschaftlichen Gründen keine leistungsfähigen Prozessoren zur Verfügung, stellt das Verfahren OM-K eine Alternative dar. Ob jedoch die *Tracking*-Eigenschaften zufriedenstellend sind, ist gemäß den Anforderungen abzuwägen. Zukünftigen Arbeiten bleibt es daher vorbehalten, die Komplexität der ERLS-basierten Verfahren zu reduzieren, um den Einsatz auch in kostensensiblen Anwendungen zu ermöglichen.

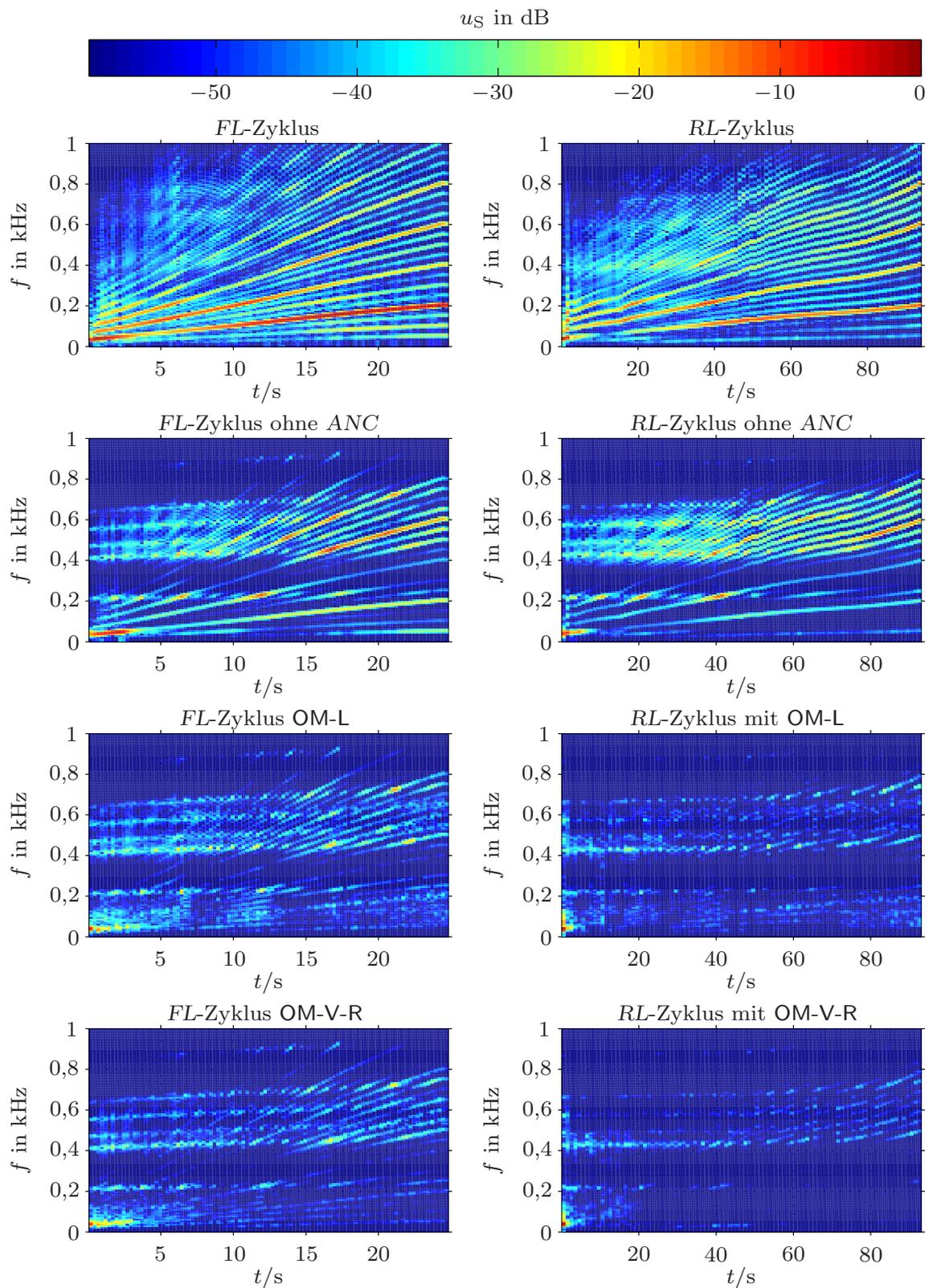


Abbildung 7.9: Spektrogramme der erzielten Störsignaldämpfungen ohne ANC, mit dem Verfahren OM-L ohne Kovarianzmanagement sowie mit dem Referenzverfahren OM-V-R

Anhand der verwendeten Stimulussignale, die reale Betriebsbedingungen innerhalb einer PKW-Abgasanlage widerspiegeln, sind mit dem Referenzverfahren in der Simulation Dämpfungen erzielt worden, die für einen realen aktiven Abgasschalldämpfer ebenfalls erstrebenswert wären. Die verbesserte OM-Struktur empfiehlt sich daher in Kombination mit dem MCERLS-Algorithmus für den praktischen Einsatz in einem ANC-System zur aktiven Abgasschalldämpfung, wobei bezüglich einer praxistauglichen Implementierung die Generierung des Referenzsignals zu modifizieren ist.

7.3.3 Bewertung der Online-Modellierung

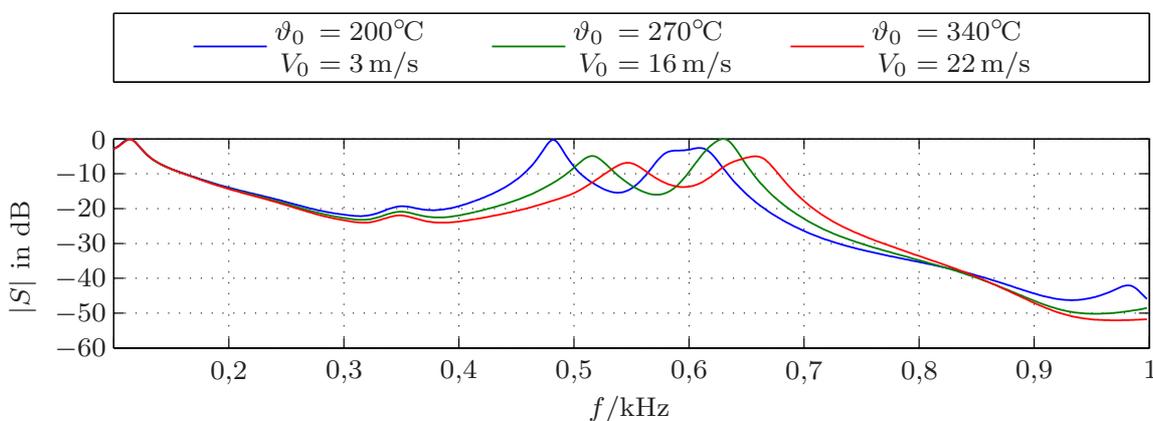


Abbildung 7.10: Normierte Amplitudengänge des Sekundärpfads für ausgewählte Abgastemperaturen ϑ_0 und Strömungsgeschwindigkeiten V_0

In Abbildung 7.10 sind zunächst exemplarisch die Amplitudengänge des in der Simulation zu Grunde gelegten Sekundärpfads für ausgewählte Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten des Abgases dargestellt. Idealerweise sollte der Amplitudengang konstant verlaufen. In einem Röhrensystem weist dieser jedoch häufig Welligkeiten in Form von Resonanzen auf, die es durch eine geeignete geometrische Auslegung im relevanten Frequenzbereich zu reduzieren gilt. Obwohl gemäß Abbildung 7.4 der Amplitudengang der Sekundärquelle oberhalb von etwa $f > 0,4$ kHz stark abfällt, konnte durch eine geschickte geometrische Dimensionierung des Koaxialschalldämpfers erreicht werden, dass sich im wichtigen Frequenzbereich von $f < 0,7$ kHz, der Amplitudengang des Sekundärpfads relativ ausgeglichen gestaltet. Die erzielten Verläufe sind für diesen Bereich als akzeptabel zu bewerten [KT93].

Nachdem das Kovarianzmanagement sowie die verschiedenen Ansätze zur *Online*-Modellierung des Sekundärpfads untersucht worden sind, sollen die erzielten Störsignaldämpfungen qualitativ und quantitativ eingeordnet werden. Zur Einordnung bietet sich ein Vergleich der Dämpfungen an, die sich zum einen mit dem Referenzverfahren OM-V-R sowie zum anderen mit $S(z) = \hat{S}(z) = 1$ und einem optimal geschätzten Sekundärpfad erzielen lassen.

Störsignal	Zyklus	$S(z) = \hat{S}(z) = 1$ D in dB	$\hat{S}(z)$ optimal D in dB	OM-V-R D in dB
$u_S(n)$	FL	16,2	15,8	12,8
	RL	21,3	20,5	19,7
$u_N(n)$	FL	14,5	13,2	11,4
	RL	14,8	13,5	12,6

Tabelle 7.5: Störsignaldämpfungen mit idealem Sekundärpfad, optimal geschätztem Sekundärpfad und mit einer *Online*-Modellierung des Sekundärpfads

Für den optimal geschätzten Sekundärpfad wurde die Länge der Impulsantwort $\hat{s}(n)$ zu $N = 1024 = \mathcal{N}$ gewählt. Die resultierenden Störsignaldämpfungen sind in Tabelle 7.5 zusammengefasst. Die mit dem Referenzverfahren OM-V-R erzielten Dämpfungen erreichen nahezu die unter idealen Bedingungen vorliegenden Werte, wobei erwartungsgemäß für $S(z) = \hat{S}(z) = 1$ die größten Dämpfungen zu verzeichnen sind.

Fehlerverläufe und Bewertung

Wie den Fehlerverläufen in Abbildung 7.11 zu entnehmen, sind zum Ende der Zyklen zunehmende Abweichungen zwischen den idealen Annahmen und der

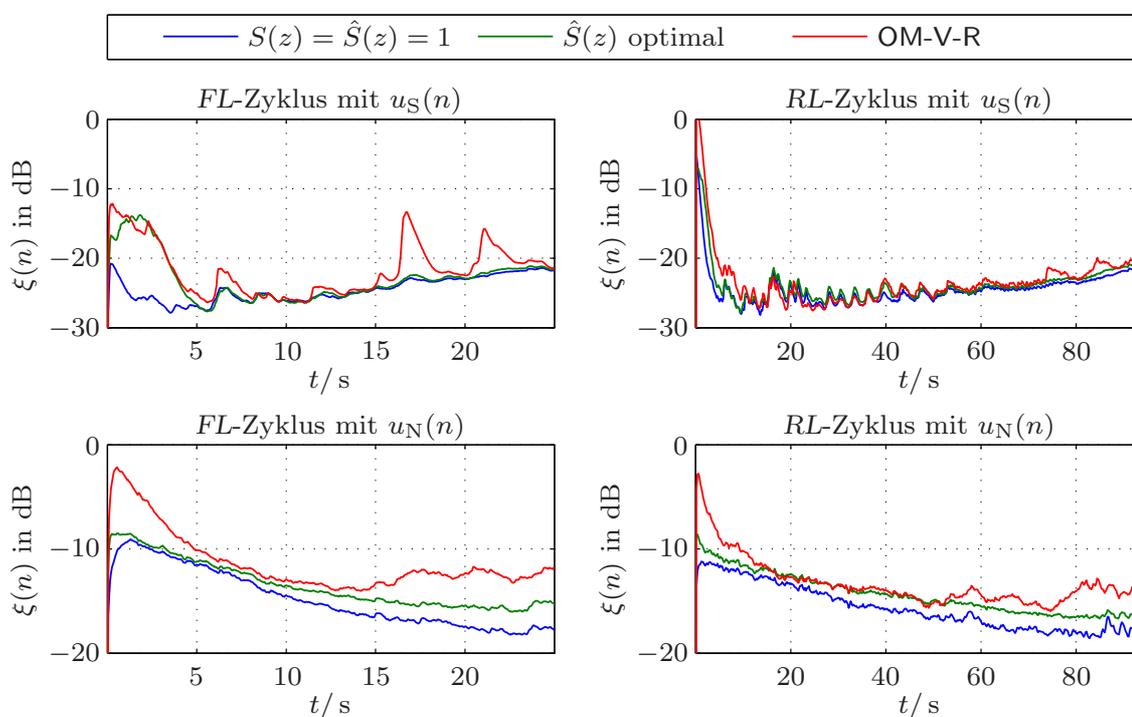


Abbildung 7.11: Fehlerverläufe zur Bewertung der *Online*-Modellierung

Online-Modellierung des Sekundärpfads festzustellen. Diese bedingen die etwas geringeren Dämpfungen. Das bisher bei den schmalbandigen Signalen $u_S(n)$ zu beobachtende kurzzeitige sprunghafte Aufklingen des Fehlers kann damit auf die *Online*-Modellierung des Sekundärpfads zurückgeführt werden.

Das Referenzverfahren OM-V-R lässt sich gemäß den Simulationsergebnissen als ein geeignetes Konzept zur aktiven Störsignaldämpfung bei einer gleichzeitigen *Online*-Modellierung des Sekundärpfads bewerten. Im Vergleich mit den anderen untersuchten Verfahren zur *Online*-Modellierung erreicht das Referenzverfahren die geringste Diskrepanz gegenüber den Resultaten eines optimal geschätzten Sekundärpfads.

7.3.4 Strömungsinduziertes Rauschen

Störsignal	Zyklus	$\sigma_{t,x}^2 = \sigma_{t,e}^2 = 0$ D in dB	$\sigma_{t,x}^2 = \sigma_{t,e}^2 = 10^{-5}/[\text{m/s}]^2$ D in dB
$u_S(n)$	FL	18,3	12,8
	RL	23,9	19,7
$u_N(n)$	FL	11,4	11,4
	RL	12,7	12,6

Tabelle 7.6: Störsignaldämpfungen mit dem Verfahren OM-V-R unter dem Einfluss von strömungsinduziertem Rauschen im Referenz- und Fehlersignal

In Tabelle 7.6 sind die Auswirkungen der strömungsinduzierten Störanteile auf die Dämpfungen dargestellt, wobei die Vorgabe eines endlichen Signal-Rausch-Verhältnisses mit $\sigma_{M,x}^2 = \sigma_{M,e}^2 = 10^{-4}$ weiterhin Bestand hatte. Es lässt sich resümieren, dass bei den schmalbandigen Störsignalen $u_S(n)$ eine deutliche Verschlechterung der Dämpfung durch das strömungsinduzierte Rauschen festgestellt werden kann, während bei den breitbandigen Signalen $u_N(n)$ die erzielten Resultate davon unbeeinflusst bleiben.

Fehlerverläufe und Bewertung

Das strömungsinduzierte Rauschen beeinflusst vor allem das Fehlersignal, da dieses durch die aktive Dämpfung zwangsläufig nur einen geringen Signalpegel aufweist. Kann kein ausreichender Störabstand sichergestellt werden, limitiert das strömungsinduzierte Rauschen, wie zuvor angedeutet und in Abbildung 7.12 für die schmalbandigen Störsignalen $u_S(n)$ dargestellt, die erreichbare Störsignaldämpfung.

Bei den breitbandigen Störsignalen $u_N(n)$ bleibt dagegen der Störabstand, begründet durch die im Vergleich zu den schmalbandigen Signalen $u_S(n)$ geringeren Dämpfungen, auch unter turbulentem Strömungseinfluss groß genug, so dass kein Anstieg des Fehlers verzeichnet werden kann.

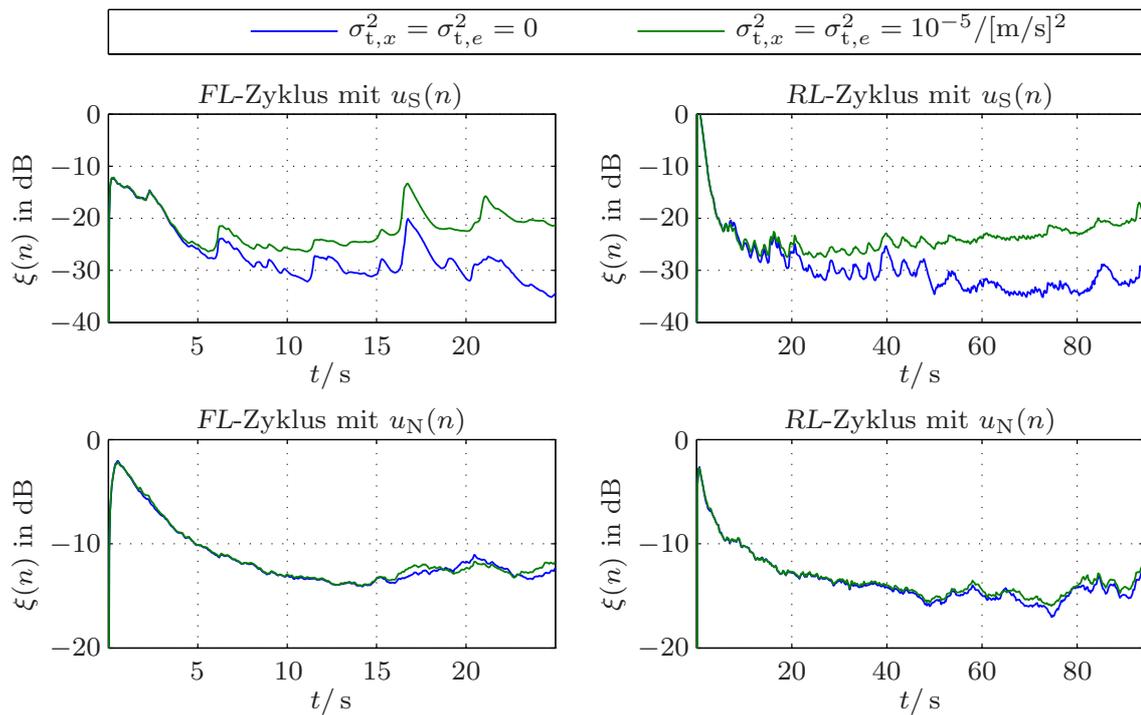


Abbildung 7.12: Fehlerverläufe ohne sowie mit strömungsinduziertem Rauschen im Referenz- und Fehlersignal

Für eine praktische Implementierung zeigen die Simulationsergebnisse, dass eine Reduzierung der strömungsinduzierten Anteile durch eine adäquate Auslegung der Messwerterfassung gemäß den Ausführungen im Abschnitt 4.2.3 unbedingt zu empfehlen ist. Schließlich reglementieren die Störabstände des Referenz- und Fehlersignals die maximal erreichbaren Dämpfungen.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Algorithmen für adaptive Digitalfilter zur aktiven Schalldämpfung in Röhrensystemen vorgestellt und untersucht, die im Rahmen einer *Online*-Modellierung zusätzlich die Berücksichtigung eines zeitvarianten Sekundärpfads ermöglichen. Die Algorithmen basierten auf einem erweiterten *Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate*. Bei diesen ERLS-Verfahren können mit Hilfe von Adaptationsparametern die Kovarianzmatrizen und damit das *Tracking*-Verhalten beziehungsweise die resultierende Störsignaldämpfung direkt beeinflusst werden. Daher wurde ein Kovarianzmanagement erarbeitet, welches ein verbessertes *Tracking* ermöglicht und ebenfalls eine vereinfachte Abstimmung der Adaptationsparameter aufweist.

Die Untersuchung der adaptiven Konzepte erfolgte simulationstechnisch, da sich auf diese Weise das Potenzial der Verfahren direkt vergleichen und bewerten lässt. Im Gegensatz zu den bisher zu dieser Thematik durchgeführten Arbeiten kam zur Simulation von zeitvariantem Systemverhalten nicht ein stochastisches Modell auf der Grundlage von messtechnisch ermittelten akustischen Übertragungsfunktionen und GAUSS-MARKOV-Prozessen zum Einsatz, sondern die Algorithmen wurden direkt im Kontext eines Simulationsmodells eingebunden, dessen zeitvariantes Verhalten einem physikalisch motivierten mathematischen Modell eines Röhrensystems entspringt. Diesbezüglich sollte das Konzept eines aktiven Abgasschalldämpfers für einen PKW simuliert werden. Die dafür erforderliche akustische Modellierung von Röhrensystemen thematisierte der erste Teil der Arbeit, während im zweiten Teil die Algorithmen für eine aktive Dämpfung von Störgeräuschen mit Hilfe eines ANC-Systems im Mittelpunkt standen.

Zusammenfassung zur akustischen Modellierung

Zur Beschreibung der Schallausbreitung in Röhren stellten zunächst die von KIRCHHOFF im Neunzehnten Jahrhundert formulierten Gleichungen den Ausgangspunkt dar. Diese erlauben eine räumliche Beschreibung des Schallfelds in Röhren mit konstanter Querschnittsfläche für den Grundmodus.

In dieser Arbeit war jedoch nicht das genaue räumliche Schallfeld in der Röhre von Interesse. Vielmehr sollte das Übertragungsverhalten durch ein akustisches Leitungsmodell auf der Grundlage des Ausbreitungsmaßes charakterisiert werden. Das Ausbreitungsmaß wurde approximativ und analytisch aus der *exakten* KIRCHHOFF-Lösung für unterschiedliche Randbedingungen an den Wänden hergeleitet. Die Betrachtungen beschränkten sich nicht nur auf die im zweiten Teil der Arbeit für die Simulation benötigten mathematischen Modelle, sondern thematisierten ebenfalls bisher in dieser Form nicht präsentierte Ansätze zur Berücksichtigung unterschiedlicher Randbedingungen, wie beispielsweise die von nicht-ideal schallharten Wänden.

Mit den für unterschiedliche Randbedingungen approximierten Ausbreitungsmaßen lassen sich im Vergleich mit den berechnungstechnisch wesentlich aufwändigeren Referenzlösungen von KIRCHHOFF Resultate mit akzeptabler Genauigkeit erzielen. Nachdem sich ein akustischer Wellenleiter durch ein angenähertes Ausbreitungsmaß charakterisieren ließ, wurden Ansätze zur Modellierung von Röhrensystemen durch Zweitore vorgestellt, die Änderungen der Querschnittsfläche, nicht-ideale Eigenschaften der Schallquellen, Abzweigungen oder ein strömendes Medium berücksichtigen.

Die Validierung eines mathematischen Röhrenmodells erfolgte anhand eines physikalischen Röhrensystems aus PVC. Dazu wurden die im abgezweigten Auslass messtechnisch ermittelten Übertragungseigenschaften mit den berechneten Verläufen verglichen. Das vorgestellte Modell zur Berücksichtigung von nicht-ideal schallharten Wänden erlaubt gegenüber dem Modell für ideal schallharte Wände eine bessere Abschätzung der Resonanzspitzen. Weitere validierende Untersuchungen sind diesbezüglich allerdings zu empfehlen.

Gemäß dem Ergebnis der Validierung erscheint auf der Basis einer Zweitormodellierung die Abschätzung des charakteristischen Übertragungsverhaltens eines Röhrensystems mit einer ausreichenden Genauigkeit möglich. Die Genauigkeit lässt sich erhöhen, indem der Einfluss von evaneszenten Moden im Bereich von Abzweigungen durch die Korrektur einzelner Längen im Geometriemodell berücksichtigt wird. Liegt ein Zweitormodell zu Grunde, stellen neben korrigierten Längen auch zusätzlich einzubettende Zweitore eine Alternative dar. Die Bestimmung allgemeiner Korrekturgrößen sowie die strukturelle Zusammensetzung der Zweitore bleibt jedoch mit Hilfe von numerischen Berechnungsverfahren weiteren Arbeiten vorbehalten.

Zusammenfassung zur aktiven Schalldämpfung

Im zweiten Teil der Arbeit wurden ERLS-basierte Algorithmen für die aktive Dämpfung von schmal- und breitbandigen Störgeräuschen untersucht. Die Untersuchung der Algorithmen bezüglich des *Trackings* beziehungsweise der Störsignaldämpfung erfolgte simulationstechnisch auf der Basis des mathematischen Modells eines aktiven Abgasschalldämpfers. Die dafür benötigten

Schalldruck- und Temperaturcharakteristika wurden auf einem Fahrleistungsprüfstand in einem Abgasstrang eines PKWs für unterschiedliche Fahrzyklen gemessen, während für die Strömungsgeschwindigkeit des Abgases heuristische Abschätzungen zum Einsatz kamen.

Die adaptiven Konzepte sollten neben einer Erzeugung des Gegenschallsignals auch eine gleichzeitige *Online*-Modellierung des Sekundärpfads in einer nicht-stationären Umgebung ermöglichen. Aus der Literatur sind zur *Online*-Modellierung zwei Konzepte bekannt. Die AN-Verfahren identifizieren mit Hilfe eines Rauschsignals, welches über den Lautsprecher abgestrahlt wird, den Sekundärpfad. Dagegen benötigen die OM-Verfahren zur *Online*-Modellierung des Sekundärpfads kein zusätzliches Rauschsignal. In dieser Arbeit wurden die OM-Verfahren aufgrund ihrer besseren *Tracking*-Eigenschaften präferiert.

Die auf der Grundlage eines Kovarianzmanagements vorgestellten Ansätze führen im Vergleich mit den aus der Literatur bekannten Verfahren sowohl bei der Einbettung in bestehende ERLS-basierte OM-Konzepte als auch im Rahmen eines verbesserten OM-Verfahrens zu den besten Ergebnissen bezüglich der Dämpfung von schmal- und breitbandigen Störsignalen. Zusätzlich weisen die erarbeiteten Konzepte nur einen Adaptationsparameter auf, so dass sich die Abstimmung des ANC-Systems wesentlich vereinfacht. Besonders deutlich wird die Leistungsfähigkeit der präsentierten Konzepte beim Vergleich mit einem simulierten ANC-System, bei dem der Sekundärpfad als optimal geschätzt vorgegeben worden ist. Die mit den verbesserten OM-Verfahren erzielten Störsignaldämpfungen erreichen nahezu die Resultate der optimalen Schätzung. Die bisher häufig bevorzugten AN-Verfahren eigneten sich dagegen nicht für Anwendungen mit hohen Anforderungen an das *Tracking*.

Auch wenn die simulationstechnischen Untersuchungen für die Randbedingungen in einem PKW-Abgasstrang erfolgten, ist zu betonen, dass die vorgestellten Verfahren nicht auf den Einsatz in einem aktiven Abgasschalldämpfer limitiert sind. Vielmehr empfehlen sich die verbesserten Algorithmen für Anwendungen, bei denen mit den bisherigen Verfahren zur aktiven Schalldämpfung und *Online*-Modellierung kein zufriedenstellendes *Tracking* geboten werden konnte.

Ausblick zur aktiven Schalldämpfung

Das erarbeitete Kovarianzmanagement stützt sich zur Abstimmung des ERLS-Algorithmus auf die Vorgabe eines einzigen Parameters für die Adaptation von drei Filtern. Dieser Adaptationsparameter ist unter anderem in Abhängigkeit von der spektralen Zusammensetzung des Störschalls und des Messrauschens zu wählen. Es stellt sich die Frage, ob dieser Parameter nicht ebenfalls adaptiv im Betrieb bestimmt und nachgeführt werden kann, um auf diese Weise schließlich dem Wunsch nach einem vollständig autark arbeitenden ANC-System nachzukommen.

Die ERLS-basierten Verfahren weisen im Gegensatz zum LMS-Verfahren eine quadratische Komplexität auf. Für eine praktische Implementierung werden daher leistungsfähige Signalprozessoren benötigt. Weitere Arbeiten sollten sich deshalb der Reduzierung des Berechnungsaufwands widmen.

Ein Ansatz zur Dämpfung von schmalbandigem Lärm besteht darin, das vorgestellte Konzept in den Kontext eines Schmalband-ANC-Systems einzubetten. Für jede zu dämpfende harmonische Schwingung ist ein Kompensationsfilter vorzusehen, für das lediglich jeweils zwei Filterkoeffizienten zu adaptieren sind. Dies führt in der Gesamtheit zu einer Reduzierung des Berechnungsaufwands, wobei die *Online*-Modellierung des Sekundärpfads effizient zu integrieren ist. Kommt darüber hinaus ein nicht-akustischer Sensor zur Erfassung des Referenzsignals zum Einsatz, sind keine Maßnahmen zur Reduzierung möglicher akustischer Rückkopplungen erforderlich.

Für ANC-Anwendungen, bei denen akustische Rückkopplungen nur durch ein zusätzliches adaptives Filter gedämpft werden können, ist dagegen zu untersuchen, ob sich eine verbesserte aktive Schalldämpfung in Kombination mit einer ERLS-basierten Dämpfung der Rückkopplungen erzielen lässt.

Thermodynamik von Gasen

A.1 Viskosität

Bei Gasen hängen die Viskosität η und die thermische Leitfähigkeit κ nur von der Temperatur ab. Nach [Suth93] lässt sich basierend auf der kinetischen Gastheorie für ein ideales Gas mit idealisierten Molekularkräften die Viskosität bei der Temperatur T_0 durch die semi-empirische Formel

$$\eta = \eta_{\text{ref}} \frac{T_{\text{ref}} + T_S}{T_0 + T_S} \left[\frac{T_0}{T_{\text{ref}}} \right]^{3/2} \quad (\text{A.1})$$

berechnen. Die Referenzviskosität η_{ref} liegt bei der Referenztemperatur T_{ref} vor. Die obige Gleichung wird auch als Gesetz von SUTHERLAND bezeichnet. Für Luft lassen sich die Konstanten zu

$$\eta_{\text{ref}} = 1,846 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/[\text{ms}], \quad (\text{A.2a})$$

$$T_{\text{ref}} = 300 \text{ K}, \quad (\text{A.2b})$$

$$T_S = 110,4 \text{ K} \quad (\text{A.2c})$$

angeben [Pier81]. Die Größe T_S wird auch als SUTHERLAND-Konstante oder SUTHERLAND-Temperatur bezeichnet.

A.2 Thermische Wärmeleitfähigkeit

Für ein ideales Gas kann zur Beschreibung einer temperaturabhängigen thermischen Leitfähigkeit ebenfalls eine semi-empirische Formel zum Einsatz kommen. Diese lautet

$$\kappa = \kappa_{\text{ref}} \frac{T_{\text{ref}} + T_A e^{-T_B/T_{\text{ref}}}}{T_0 + T_A e^{-T_B/T_0}} \left[\frac{T_0}{T_{\text{ref}}} \right]^{3/2}. \quad (\text{A.3})$$

Bei der Referenztemperatur T_{ref} besitzt das Gas die thermische Leitfähigkeit κ_{ref} . Für Luft ergeben sich die Konstanten zu

$$\kappa_{\text{ref}} = 2,625 \cdot 10^{-2} \text{ W}/[\text{mK}], \quad (\text{A.4a})$$

$$T_{\text{ref}} = 300 \text{ K}, \quad (\text{A.4b})$$

$$T_A = 245,4 \text{ K}, \quad (\text{A.4c})$$

$$T_B = 27,6 \text{ K}. \quad (\text{A.4d})$$

A.3 Schallgeschwindigkeit

Für die Schallgeschwindigkeit liegt eine Temperaturabhängigkeit der Form

$$c = \sqrt{C_{\text{pv}}RT_0} \quad (\text{A.5})$$

vor [Pier81]. Für Luft ergeben sich die Konstanten zu

$$C_{\text{pv}} = 1,4, \quad (\text{A.6a})$$

$$R = 287. \quad (\text{A.6b})$$

A.4 Dichte

Mit Gleichung (A.5) und $RT_0 = P_0/\rho_0$ kann für die Dichte eines idealen Gases der Zusammenhang

$$\rho_0 = \frac{C_{\text{pv}}P_0}{c^2} \quad (\text{A.7})$$

angeben werden [Pier81]. Für Luft ergeben sich mit der Schallgeschwindigkeit aus Gleichung (A.5) die Konstanten zu

$$C_{\text{pv}} = 1,4, \quad (\text{A.8a})$$

$$P_0 = 101325 \text{ Pa}, \quad (\text{A.8b})$$

wobei P_0 den statischen Luftdruck repräsentiert.

A.5 Spezifische Wärmekapazität

Für die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme bei konstantem Druck lässt sich mit den Konstanten aus den Gleichungen (A.6) die Beziehung

$$C_p = \frac{C_{\text{pv}}}{C_{\text{pv}} - 1} R \quad (\text{A.9})$$

für ein ideales Gas angeben [Pier81].

Bestimmung der Quellenparameter

B.1 Vorbemerkungen

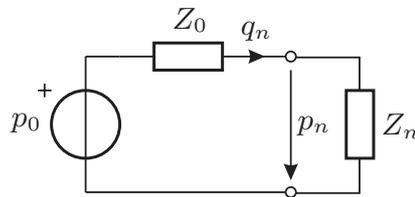


Abbildung B.1: THÉVENIN-Quelle mit dem Urschalldruck p_0 und der Innenimpedanz Z_0 sowie den Lastimpedanzen Z_n

Für die Bestimmung der Parameter p_0 und Z_0 der THÉVENIN-Quelle in Abbildung B.1 werden $1 \leq n \leq M$ Röhren mit konstantem Querschnitt sowie einseitig schallhartem Abschluss verwendet. Mit den komplexen Amplituden der Schalldrücke lässt sich für $M > 2$ zunächst das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} Z_1 & - & p_1 \\ Z_2 & - & p_2 \\ & & \vdots \\ Z_M & - & p_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 p_1 \\ Z_2 p_2 \\ \vdots \\ Z_M p_M \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

aufstellen. Die beteiligten Größen sind frequenzabhängig, wobei im Weiteren auf die Angabe des Arguments verzichtet wird. Die Eingangsimpedanzen der einzelnen Lastelemente ergeben sich aus der Impedanzmatrix (2.13) zu

$$Z_n = Z_{L,n} \coth(\gamma_n l_n). \quad (\text{B.2})$$

Es empfiehlt sich, die Längen l_n so zu wählen, dass jeweils mindestens ein Druckminima im relevanten Frequenzbereich $\Delta f = f_L - f_1$ vorhanden ist. Diese Bedingung führt mit Gleichung (B.2) auf

$$l_n > \left| \frac{\pi}{2\gamma_n} \right| \approx \frac{c}{4f_L} = \frac{\lambda_L}{4}. \quad (\text{B.3})$$

B.2 Praktische Durchführung

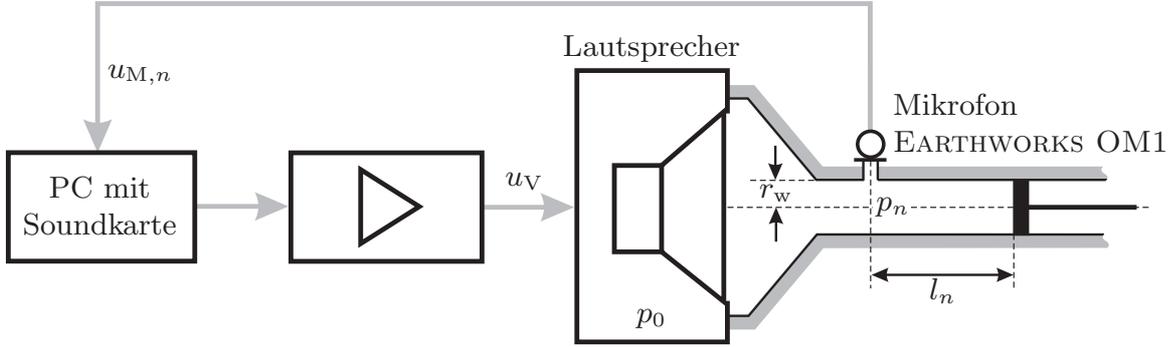


Abbildung B.2: Schematischer Messaufbau zur Bestimmung der Quellenparameter mit einem Schieber zur Einstellung der wirksamen Länge l_n bei einem Röhrenradius von $r_w = 28,5$ mm

Bei der praktischen Parameterbestimmung lag der Messaufbau in Abbildung B.2 zu Grunde. Der Lautsprecher wird mit der Spannung u_V angeregt und erzeugt den Schalldruck p_0 , während das Mikrofon den erfassten Schalldruck p_n in die Spannung $u_{M,n}$ umwandelt. Der Zusammenhang zwischen den akustischen und elektrischen Größen kann mit den Übertragungsfunktionen k_0 und k durch

$$p_0 = k_0 u_V \quad \text{und} \quad p_n = \frac{u_{M,n}}{k} \quad (\text{B.4})$$

hergestellt werden. Auf der Basis des gemessenen Schalldrucks p_n wird jeweils die Übertragungsfunktion $H_n = u_{M,n}/u_V$ für Frequenzen $f_1 \leq f_k \leq f_L$ ermittelt. Die Angabe des Arguments f_k erfolgt im Weiteren nur dort, wo dies nötig erscheint. Der Zusammenhang zwischen p_0 und p_n lässt sich mit $K_0 = k_0 k$ und den ermittelten Übertragungsfunktionen H_n zu

$$H_p = \frac{p_n}{p_0} = \frac{1}{k_0 u_V} \frac{u_{M,n}}{k} = K_0^{-1} H_n \quad (\text{B.5})$$

formulieren. Nach dem Einsetzen von $p_n = K_0^{-1} H_n p_0$ in Gleichung (B.1) erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} Z_1 & - & H_1 \\ Z_2 & - & H_2 \\ & & \vdots \\ Z_M & - & H_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 H_1 \\ Z_2 H_2 \\ \vdots \\ Z_M H_M \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Die Verwendung der Übertragungsfunktion K_0 erscheint praktikabler, da diese im Gegensatz zum Urschalldruck

$$p_0 = K_0 \frac{u_V}{k} \quad (\text{B.7})$$

ohne Kenntnis der Empfindlichkeit k des Mikrofons bestimmt werden kann. Die Bestimmung von Z_0 ist ebenfalls von k unabhängig. Im betrachteten Frequenzbereich lässt sich k durch eine reelle Konstante abschätzen.

Die Parameter K_0 und Z_0 der THÉVENIN-Quelle ergeben sich für die Frequenzen f_k durch eine Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers

$$e = \sum_{n=1}^M |Z_n K_0 - Z_0 H_n - Z_n H_n|^2 \quad (\text{B.8})$$

zu

$$\begin{bmatrix} K_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^M |H_n|^2 & \sum_{n=1}^M Z_n^* H_n \\ \sum_{n=1}^M Z_n H_n^* & \sum_{n=1}^M |Z_n|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^M |Z_n|^2 H_n \\ - \sum_{n=1}^M Z_n |H_n|^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

mit

$$\Delta = \sum_{n=1}^M |Z_n|^2 \sum_{i=1}^M |H_i|^2 - \left| \sum_{n=1}^M Z_n^* H_n \right|^2. \quad (\text{B.10})$$

B.2.1 Längenoptimierung

Die bei der Berechnung der Eingangsimpedanzen (B.2) verwendeten Längen l_n sowie die Eigenschaften des Mediums üben einen großen Einfluss auf die Genauigkeit der Größen K_0 und Z_0 aus. Die Bestimmung von l_n mit Hilfe der gemessenen Übertragungsfunktionen H_n ist der mechanischen Bestimmung weit überlegen.

Die Längen können vor der eigentlichen Parameterbestimmung mit Gleichung (B.9) auf der Grundlage von H_n durch Auswertung der Minima geschätzt werden. Diese treten bei den Frequenzen $f_{\min,k}$ auf, so dass sich mit K Minima im Bereich Δf die Längen näherungsweise zu

$$l_{n,\min} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{[2k-1] \pi}{2 \operatorname{Im}\{\gamma_n(f_{\min,k})\}} \quad (\text{B.11})$$

berechnen. Zur Erhöhung der Frequenzauflösung lassen sich Interpolationstechniken verwenden. Alternativ dazu kann auch die normierte Fehlerfunktion

$$\hat{e} = \frac{1}{f_L - f_1 + 1} \sum_{k=1}^L \frac{e(f_k)}{\sum_{n=1}^M |Z_n(f_k) H_n(f_k)|^2} \quad (\text{B.12})$$

zur Bestimmung von l_n zum Einsatz kommen [KLB92].¹ Ein Optimierungsverfahren variiert dazu l_n dergestalt, dass der obige Fehler auf der Grundlage der diesbezüglich berechneten Eingangsimpedanzen (B.2) sowie der nach Gleichung (B.9) bestimmten Quellenparameter iterativ minimiert wird.

B.2.2 Untersuchungen zur Bestimmung der Quellenparameter

Die Übertragungsfunktionen H_n wurden für Längen $20 \text{ mm} \leq l_n \leq 290 \text{ mm}$ im äquidistanten Abstand von $\Delta l_n = 10 \text{ mm}$ sowie mit einer Frequenzauflösung von $f_{\text{res}} = 1 \text{ Hz}$ gemessen. Die Berechnung der Eingangsimpedanzen basierte auf dem Ausbreitungsmaß von STINSON für ideal schallharte und isotherme Wände aus dem Abschnitt 1.2.3.

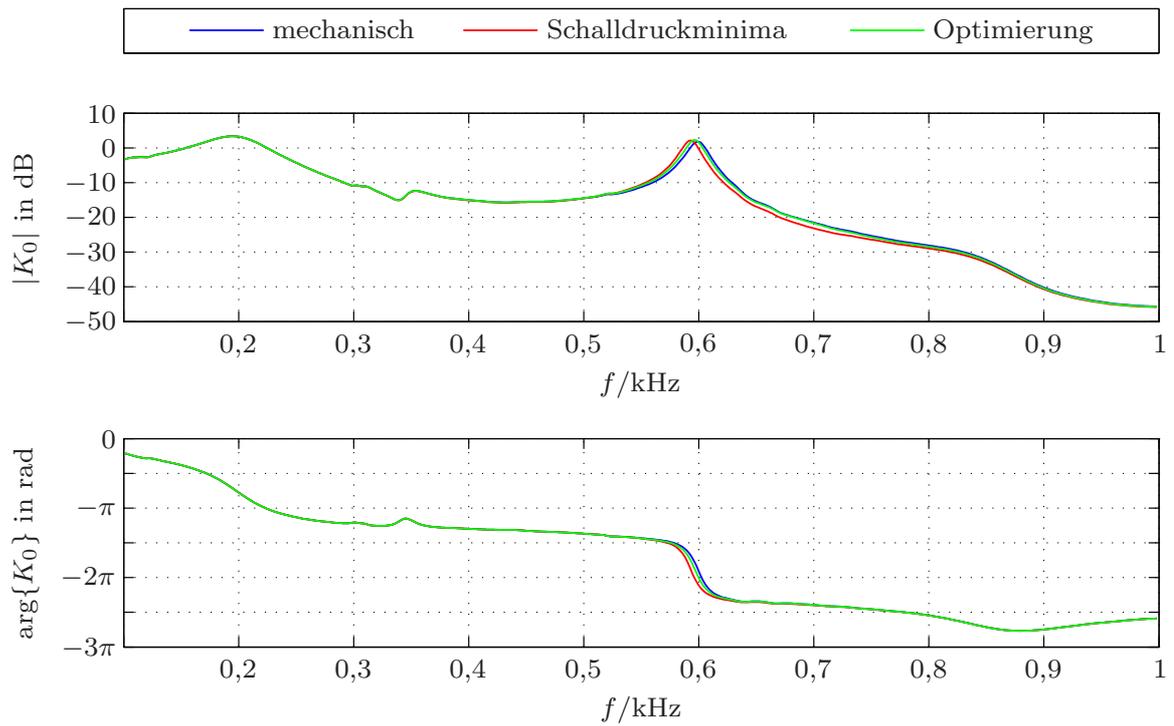
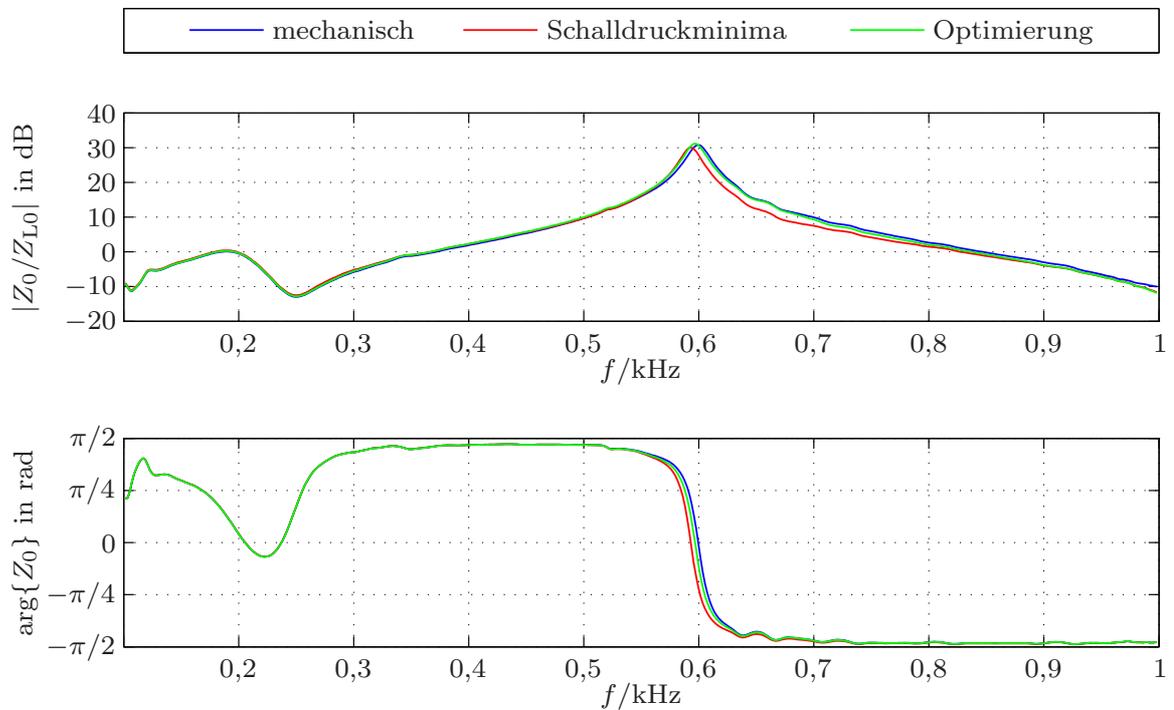
Für die Schätzung der Längen $l_{n,\text{min}}$ mit Hilfe der Schalldruckminima gemäß Gleichung (B.11) kam eine *Spline*-Interpolation zur Erhöhung der Frequenzauflösung zum Einsatz [SK06]. Darüber hinaus erfolgte die Bestimmung von $l_{n,\text{opt}}$ durch eine Minimierung des Fehlers \hat{e} mit dem *Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate* [PTVF07]. Als Startwerte wurden die Längen $l_{n,\text{min}}$ verwendet. Für Lastelemente mit $l_n < 100 \text{ mm}$ können für $f_L = 1 \text{ kHz}$ keine Minima ausgewertet werden, so dass dort die mechanisch bestimmten Längen als Startwerte fungierten.

Röhre n	mechanische Messung l_n in mm	aus Schalldruckminima $l_{n,\text{min}}$ in mm	nach Optimierung $l_{n,\text{opt}}$ in mm
1	20	–	17,8
2	100	97,3	98,2
3	130	127,3	127,5
4	170	165,6	165,2
5	210	203,6	204,2
6	250	244,6	245,7
\hat{e}	$8 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-5}$

Tabelle B.1: Längen der Lastelemente bei Bestimmung aus den Schalldruckminima und nach einer numerischen Längenoptimierung sowie Angabe des jeweils verbleibenden Fehlers (B.12)

Die Untersuchung bezüglich des Fehlers \hat{e} zeigte, dass es weniger auf die Anzahl M der verwendeten Röhren ankommt, sondern vielmehr auf eine geschickte kombinierte Auswahl der Längen. Eine Erhöhung der an der Parameterbestimmung beteiligten Lastelemente führte nicht zwangsläufig zu einer

¹Die optimierten Längen der Lastelemente entsprechen natürlich nicht exakt den tatsächlich mechanisch vorliegenden Längen, sondern sind als äquivalente Größen zu interpretieren, die unter den real vorliegenden Temperatureinflüssen den Fehler optimal minimieren.

Abbildung B.3: Betrag und Phase des Quellenparameters K_0 Abbildung B.4: Betrag und Phase des Quellenparameters Z_0

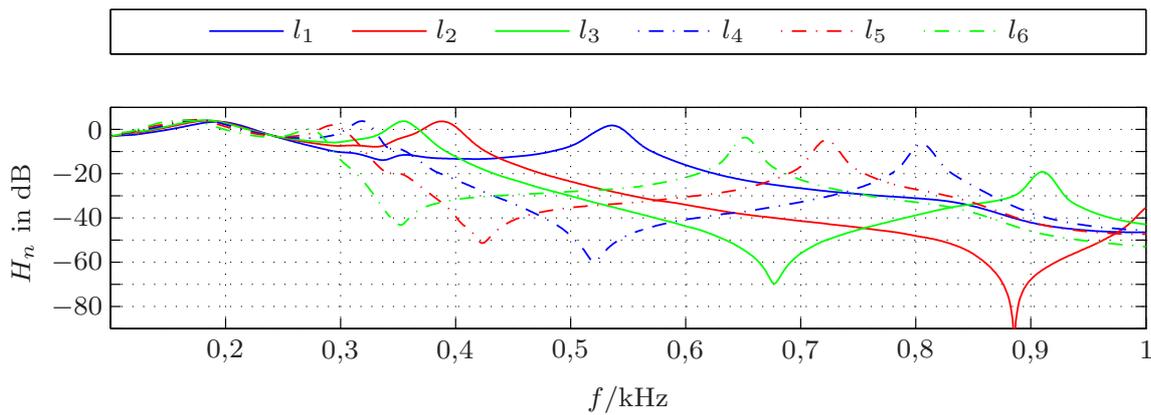


Abbildung B.5: Gemessene Übertragungsfunktionen H_n

Verringerung des Fehlers $\hat{\epsilon}$. Bereits mit $4 \leq M \leq 6$ ließen sich gute Ergebnisse erzielen. Diese sind für die untersuchte Schallquelle für $M = 6$ in Tabelle B.1 angegeben. Wie der Abbildung B.5 zu entnehmen, verteilen sich die ersten Schalldruckminima über den gesamten Frequenzbereich, während für l_1 kein Druckminimum in der gemessenen Übertragungsfunktion enthalten ist.

B.2.3 Quellenparameter

Die Genauigkeit lässt sich bezüglich des in Tabelle B.1 angegebenen Fehlers $\hat{\epsilon}$ sowohl durch Auswertung der Druckminima als auch durch eine numerischen Längenoptimierung gegenüber einer mechanischen Längenmessung erhöhen. Die nach Gleichung (B.9) ermittelten Parameter können den Abbildungen B.3 und B.4 entnommen werden.

Aufgrund der unterschiedlich zu Grunde gelegten Längen der Lastelemente sind im Bereich $0,4 \text{ kHz} < f < 0,8 \text{ kHz}$ Abweichungen zwischen den bestimmten Quellenparametern festzustellen. Die im zweiten Teil der Arbeit für die Modellierung der Sekundärquelle verwendeten Parameter basieren auf den Ergebnissen der numerischen Längenoptimierung.

MFx-Struktur und Adaptationsalgorithmen

C.1 MFx-Struktur

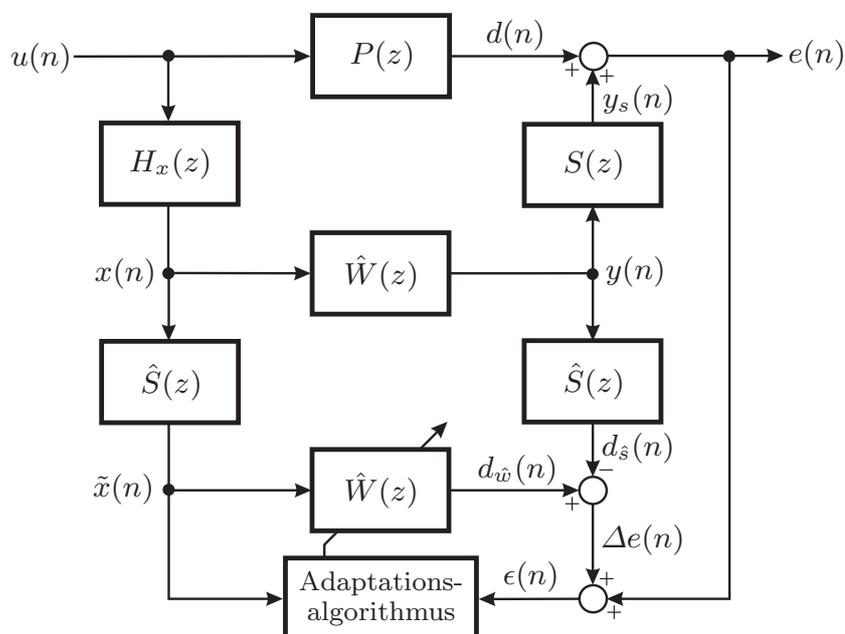


Abbildung C.1: Blockschaltbild der MFx-Struktur [Bron93]

In die MFx-Struktur, welche in Abbildung C.1 dargestellt ist, lassen sich alle vorgestellten Adaptationsalgorithmen einbetten. Durch die Überlagerung der primären und sekundären Schallfelder steht das zur Korrektur benötigte Signal $y_s(n)$ messtechnisch nicht zur Verfügung. Es kann jedoch auf der Grundlage einer Modellierung von $\hat{s}(n)$ durch ein Transversalfilter mit den Koeffizienten

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = [\hat{s}_0(n) \ \hat{s}_1(n) \ \dots \ \hat{s}_{N-1}(n)]^T \quad (\text{C.1})$$

sowie mit dem Ausgangssignalvektor

$$\mathbf{y}_{\hat{s}}(n) = [y(n) \ y(n-1) \ \dots \ y(n-N+1)]^T \quad (\text{C.2})$$

die Näherung

$$d_{\hat{s}}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{s}_i(n)y(n-i) = \hat{\mathbf{s}}^T(n)\mathbf{y}_{\hat{s}}(n) \quad (\text{C.3})$$

formuliert werden. Dagegen ergibt sich das Ergebnis der anderen Faltungsreihenfolge zu

$$d_{\hat{w}}(n) = \sum_{i=0}^{L-1} \hat{w}_i(n)\tilde{x}(n-i) = \hat{\mathbf{w}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n). \quad (\text{C.4})$$

Mit dem Differenzfehler

$$\Delta e(n) = d_{\hat{w}}(n) - d_{\hat{s}}(n) \quad (\text{C.5})$$

ist den Adaptationsalgorithmen anstelle von $e(n)$ der korrigierte Fehler

$$\epsilon(n) = e(n) + \Delta e(n) \quad (\text{C.6})$$

zuzuführen. Bei einer optimalen Vorgabe von $\hat{s}(n)$ stellt der MF_x-Algorithmus sicher, dass der Adaptationsprozess nicht von den Eigenschaften des Sekundärpfads abhängt. Um die Stabilität der in die MF_x-Struktur eingebetteten Adaptationsalgorithmen sicherzustellen, muss die approximierten Impulsantwort $\hat{s}(n)$ mit einer entsprechenden Genauigkeit vorliegen. Kann das aufgrund von zeitvarianten Übertragungstrecken nicht gewährleistet werden, ist $\hat{s}(n)$ mit den Verfahren zur *Online*-Modellierung aus dem Kapitel 6 zu schätzen.

C.2 Adaptationsalgorithmen

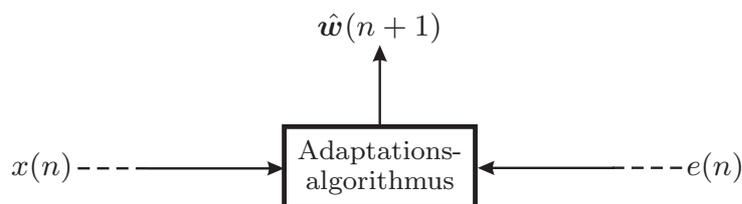


Abbildung C.2: Definition der Ein- und Ausgangsgrößen

Die Algorithmen berechnen mit Hilfe der Eingangsgrößen $x(n)$ und $e(n)$ den neuen Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{w}}(n+1)$, so dass sich mit der Definition in Abbildung C.2 und anhand der in dieser Arbeit angegebenen Blockschaltbilder direkt die relevanten Eingangsgrößen zuordnen lassen. Für die im Weiteren verwendeten Vektoren gilt

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-L+1)]^T, \quad (\text{C.7a})$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = [\hat{w}_0(n) \ \hat{w}_1(n) \ \dots \ \hat{w}_{L-1}(n)]^T. \quad (\text{C.7b})$$

In einer MF_x-Struktur ist der Fehler $e(n)$ gemäß Gleichung (C.6) durch die korrigierende Größe $\epsilon(n)$ zu ersetzen.

C.2.1 Normalisierter LMS-Algorithmus

Initialisierung:

$$\hat{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{0}_L, 0 < \alpha < 2, 0 < \beta < 1$$

Rekursion: $n = 0 \dots N$

$$\mu(n) = \frac{\alpha}{\beta + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)}$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) - \mu(n)\mathbf{x}(n)e(n)$$

C.2.2 RLS-Algorithmus

Initialisierung:

$$\hat{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{0}_L$$

$$\mathbf{P}(0) = c^{-1}\mathbf{I}_L, 0 \ll \lambda \leq 1$$

Rekursion: $n = 0 \dots N$

$$\boldsymbol{\kappa}(n) = \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n)}{\lambda + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n)}$$

$$\mathbf{P}(n+1) = \lambda^{-1}[\mathbf{P}(n) - \boldsymbol{\kappa}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}(n)]$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) - \boldsymbol{\kappa}(n)e(n)$$

C.2.3 ERLS-Algorithmus

Initialisierung:

$$\hat{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{0}_L$$

$$\mathbf{M}(0) = c_{\hat{\mathbf{w}}}^{-1}\mathbf{I}_L, a_{\hat{\mathbf{w}}} \leq 1, q_{\hat{\mathbf{w}}}^2(n)$$

Rekursion: $n = 0 \dots N$

$$r(n) = 1 + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{M}(n)\mathbf{x}(n)$$

$$\boldsymbol{\kappa}(n) = a_{\hat{\mathbf{w}}}\mathbf{M}(n)\mathbf{x}(n)r^{-1}(n)$$

$$\mathbf{M}(n+1) = a_{\hat{\mathbf{w}}}^2[\mathbf{M}(n) - \mathbf{M}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{M}(n)r^{-1}(n)] + q_{\hat{\mathbf{w}}}^2(n)\mathbf{I}_L$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = a_{\hat{\mathbf{w}}}\hat{\mathbf{w}}(n) - \boldsymbol{\kappa}(n)e(n)$$

Rekursive Schätzung statistischer Größen

Die rekursive Schätzung statistischer Größen ist gegenüber einer Berechnung mit einem gleitenden Fenster weniger aufwändig. Für die folgenden Betrachtungen sei die ergodische Größe $x(n)$ gegeben, für die im Intervall $1 \leq k \leq n$ der Mittelwert $\bar{x}(n)$ sowie die Varianz $\sigma_x^2(n)$ rekursiv geschätzt werden sollen. Für das Moment der Ordnung i gelte [OS89, Häns01]

$$m_x^{(i)}(n) = \mathcal{E}\{x^i(n)\} \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^i(k). \quad (\text{D.1})$$

D.1 Rekursive Schätzung des Mittelwerts

Zur Schätzung des linearen Mittelwerts $\bar{x}(n) = m_x^{(1)}(n)$ lassen sich mit

$$\bar{x}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(k) = \frac{1}{n} \left[x(n) + \sum_{k=1}^{n-1} x(k) \right], \quad (\text{D.2a})$$

$$\bar{x}(n-1) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x(k) \quad (\text{D.2b})$$

die Rekursionsgleichungen zu

$$\bar{x}(n) = \left[1 - \frac{1}{n} \right] \bar{x}(n-1) + \frac{1}{n} x(n) \quad (\text{D.3})$$

angeben. Diese Form der Schätzung basiert auf einer Langzeitmittelung, bei der alle beobachteten Werte gleich gewichtet werden. Eine Kurzzeitmittelung ist mit der Fensterlänge $W > 1$ durch

$$\bar{x}(n) = \left[1 - \frac{1}{W} \right] \bar{x}(n-1) + \frac{1}{W} x(n) \quad (\text{D.4})$$

möglich, wobei der Beobachtungszeitraum näherungsweise durch W bestimmt wird. Bei dieser exponentiellen Glättung bekommen aktuelle Abtastwerte eine größere Bedeutung. In dieser Arbeit hat sich $W = 1000$ bewährt. Liegen bezüglich des Startwerts $\bar{x}(0) = \mathcal{E}\{x(n)\}$ keine verlässlichen *a priori* Informationen vor, kann dieser ebenfalls zu $\bar{x}(0) = 0$ gewählt werden.

D.2 Rekursive Schätzung der Varianz

Die Varianz kann mit Hilfe des linearen und quadratischen Mittelwerts zu

$$\sigma_x^2(n) = \mathcal{E}\{[x(n) - \bar{x}(n)]^2\} = m_x^{(2)}(n) - \bar{x}^2(n) \quad (\text{D.5})$$

angegeben werden. Das Einsetzen von Gleichung (D.3) sowie der rekursiven Beziehung

$$m_x^{(2)}(n) = \left[1 - \frac{1}{n}\right] m_x^{(2)}(n-1) + \frac{1}{n} x^2(n) \quad (\text{D.6})$$

in die obige Gleichung (D.5) führt mit

$$\sigma_x^2(n-1) = m_x^{(2)}(n-1) - \bar{x}^2(n-1) \quad (\text{D.7})$$

schließlich auf die Rekursionsgleichung

$$\sigma_x^2(n) = \left[1 - \frac{1}{n}\right] \left[\sigma_x^2(n-1) + \frac{1}{n} [x(n) - \bar{x}(n-1)]^2\right]. \quad (\text{D.8})$$

Diese ermöglicht auf der Grundlage einer Langzeitmittelung die Schätzung der Varianz. Eine Kurzzeitmittelung kann dagegen mit

$$\sigma_x^2(n) = \left[1 - \frac{1}{W}\right] \left[\sigma_x^2(n-1) + \frac{1}{W} [x(n) - \bar{x}(n-1)]^2\right] \quad (\text{D.9})$$

und der Fensterlänge $W > 1$ erfolgen. Eine rekursive Schätzung der Varianz erfordert damit ebenfalls eine rekursive Schätzung des Mittelwerts. Sind bezüglich des Startwerts $\sigma_x^2(0) = \mathcal{E}\{[x(n) - \bar{x}(n)]^2\}$ keine verlässlichen *a priori* Informationen vorhanden, bietet sich auch die Wahl von $\sigma_x^2(0) = 0$ an.

Literaturverzeichnis

- [AAK05] M. T. Akhtar, M. Abe, M. Kawamata: A New Structure for Feed-forward Active Noise Control Systems With Improved Online Secondary Path Modeling. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* **13**(5), September 2005, S. 1082–1088.
- [AAK06] M. T. Akhtar, M. Abe, M. Kawamata: A New Variable Step Size LMS Algorithm-Based Method for Improved Online Secondary Path Modeling in Active Noise Control Systems. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* **14**(2), March 2006, S. 720–726.
- [Alex86] S. T. Alexander: *Adaptive Signal Processing: Theory and Applications*. Springer-Verlag, 1986.
- [AS72] M. Abramowitz, I. A. Stegun (Hrsg.): *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. U.S. Government Printing Office, 10. Auflage 1972.
- [AV89] M. J. Anderson, P. G. Vaidya: Sound propagation in a waveguide with finite thermal conduction at the boundary. *Journal of the Acoustical Society of America* **86**(6), December 1989, S. 2385–2396.
- [Balk02] T. Balkenhol: *Adaptive Parameterschätzung für die Linearisierung elektrodynamischer Lautsprecher*, Diplomarbeit, Universität Paderborn, Dezember 2002.
- [Basu73] N. K. Basu: On Double Chebyshev Series Approximation. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **10**(3), June 1973, S. 496–505.
- [BBHK87] A. M. Bruneau, M. Bruneau, P. Herzog, J. Kergomard: Boundary layer attenuation of higher order modes in waveguides. *Journal of Sound and Vibration* **119**(1), 1987, S. 15–27.

- [Beat50] R. E. Beatty, Jr.: Boundary Layer Attenuation of Higher Order Modes in Rectangular and Circular Tubes. *Journal of the Acoustical Society of America* **22**(6), November 1950, S. 850–854.
- [Bena68] A. H. Benade: On the Propagation of Sound Waves in a Cylindrical Conduit. *Journal of the Acoustical Society of America* **44**(2), 1968, S. 616–623.
- [Bern99] D. P. Berners: *Acoustics and signal processing techniques for physical modeling of brass instruments*, Dissertation, Stanford University, July 1999.
- [BLL02] M. R. Bai, Y. Lin, J. Lai: Reduction of electronic delay in active noise control systems – A multirate signal processing approach. *Journal of the Acoustical Society of America* **111**(2), February 2002, S. 916–924.
- [BO89] W. L. Brogan, R. L. Olson: On-line tuning methods for adapting a Kalman filter to unknown noise statistics. *IEEE Proceedings of the 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems* **2**, August 1989, S. 881–886.
- [Bodé91] H. Bodén: The multiple load method for measuring the source characteristics of time-variant sources. *Journal of Sound and Vibration* **148**(3), 1991, S. 437–453.
- [Bodé95] H. Bodén: On multi load methods for determination of the source data of acoustic one port sources. *Journal of Sound and Vibration* **180**(5), 1995, S. 725–743.
- [Bron93] M. Bronzel: *Aktive Beeinflussung nicht-stationärer Schallfelder mit adaptiven Digitalfiltern*, Dissertation, Georg-August-Universität zu Göttingen, 1993.
- [BSB93a] C. Bao, P. Sas, H. V. Brussel: Comparison of two on-line identification algorithms for active noise control. *Proceedings of the Second Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration*, April 1993, S. 38–51.
- [BSB93b] C. Bao, P. Sas, H. V. Brussel: Adaptive active control of noise in 3-D reverberant enclosures. *Journal of Sound and Vibration* **161**(3), 1993, S. 501–514.
- [BSZ⁺95] H. E. Bass, L. C. Sutherland, A. J. Zuckerwar, D. T. Blackstock, D. M. Hester: Atmospheric absorption of sound: Further developments. *Journal of the Acoustical Society of America* **97**(1), January 1995, S. 680–683.

- [Camp84] L. M. B. C. Campos: Some general properties of the exact acoustic fields in horns and baffles. *Journal of Sound and Vibration* **95**(2), 1984, S. 177–201.
- [CB91] R. D. Ciskowski, C. A. Brebbia (Hrsg.): *Boundary Element Methods in Acoustics*. Computational Mechanics Publications Elsevier Applied Science, 1991.
- [CDF⁺92] D. G. Crighton, A. P. Dowling, J. E. Ffowcs Williams, M. Heckl, F. G. Leppington: *Modern Methods in Analytical Acoustics: Lecture Notes*. Springer-Verlag, 1992.
- [CKL84] R. Caussé, J. Kergomard, X. Lurton: Input impedance of brass musical instruments – Comparison between experiment and numerical models. *Journal of the Acoustical Society of America* **75**(1), January 1984, S. 241–254.
- [CM75] J. F. Clarke, M. McChesney: *Dynamics of Relaxing Gases*. Butterworth & Co. Ltd, 2. Auflage 1975.
- [CPHZ05] B. S. Cazzolato, D. Petersen, C. Q. Howard, A. C. Zander: Active control of energy density in a one-dimensional waveguide: A cautionary note (L). *Journal of the Acoustical Society of America* **117**(6), June 2005, S. 3377–3380.
- [Crem48] L. Cremer: Über die akustische Grenzschicht vor starren Wänden. *Archiv der elektrischen Übertragung* **2**, 1948, S. 136–139.
- [Croc98] M. J. Crocker (Hrsg.): *Handbook of Acoustics*. John Wiley & Sons, 1998.
- [CS97] D. H. Crawford, R. W. Stewart: Adaptive IIR filtered-v algorithms for active noise control. *Journal of the Acoustical Society of America* **101**(4), April 1997, S. 2097–2103.
- [DD07] Z. Dayong, V. DeBrunner: Efficient Adaptive Nonlinear Filters for Nonlinear Active Noise Control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* **54**(3), March 2007, S. 669–681.
- [DNJ01] J. P. Dalmont, C. J. Nederveen, N. Joly: Radiation impedance of tubes with different flanges: Numerical and experimental investigations. *Journal of Sound and Vibration* **244**(3), 2001, S. 505–534.
- [EA89] L. J. Eriksson, M. A. Allie: Use of random noise for online transducer modeling in an adaptive active attenuation system. *Journal of the Acoustical Society of America* **85**(2), February 1989, S. 797–802.

- [EAM⁺94] L. J. Eriksson, M. C. Allie, D. E. Melton, S. R. Popovich, T. A. Laak: Fully adaptive generalized recursive control system for active acoustic attenuation. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing – ICASSP-94* **2**, April 1994, S. II-253–II-256.
- [EB90] P. R. Enderle, G. R. Batta: Stability of active noise control systems in ducts. *Proceedings of the National Conference on Noise Control Engineering – Noise-Con 90* **68**, October 1990, S. 167–172.
- [ELA99] L. J. Eriksson, T. A. Laak, M. C. Allie: On-line Secondary Path Modeling for FIR and IIR Adaptive Control in the Presence of Acoustic Feedback. *Proceedings of ACTIVE 1999 – The 1999 International Symposium on Active Control of Sound and Vibration*, 1999, S. 949–960.
- [Erha91] C. A. Erhard: *Strömungsakustische und gasdynamische Untersuchungen an 3-Topf-Abgasanlagen*, Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1991.
- [Erik91] L. J. Eriksson: Development of the filtered-U algorithm for active noise control. *Journal of the Acoustical Society of America* **89**(1), 1991, S. 257–265.
- [EZ93] K. Eghtesadi, E. Ziegler: Frequency domain adaptive control algorithm for electronic muffler applications. *Proceedings of the Second Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration*, April 1993, S. 574–585.
- [FCCW81] H. Franken, J. Clément, M. Cauberghs, K. P. V. D. Woestijne: Oscillating Flow of a Viscous Compressible Fluid Through a Rigid Tube: A Theoretical Model. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **28**(5), May 1981, S. 416–420.
- [Fein76] P. L. Feintuch: An adaptive recursive LMS filter. *Proceedings of the IEEE* **64**(11), November 1976, S. 1622–1624.
- [FFR02] B. L. Farmer-Fedor, R. D. Rabbitt: Acoustic intensity, impedance and reflection coefficient in the human ear canal. *Journal of the Acoustical Society of America* **112**(2), August 2002, S. 600–620.
- [FH99] J. J. Finneran, M. C. Hastings: Active impedance control within a cylindrical waveguide for generation of low-frequency, underwater plane traveling waves. *Journal of the Acoustical Society of America* **105**(6), June 1999, S. 3035–3043.

- [FKS84] W. Fasold, W. Kraak, W. Schirmer: *Taschenbuch Akustik*, Band 2. VEB Verlag Technik Berlin, 1984.
- [Flan72] J. L. Flanagan: *Speech Analysis Synthesis and Perception*. Springer-Verlag, 2. Auflage 1972.
- [Floc93] S. J. Flockton: Fast Adaptation Algorithms in Active Noise Control. *Proceedings of the Second Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration*, April 1993, S. 802–810.
- [Four55] J. Fourier: *The Analytical Theory of Heat*. Dover Publications, Inc., 1955. Translated, with notes, by Alexander Freeman.
- [FPW92] G. F. Franklin, J. D. Powell, M. L. Workman: *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, 1992.
- [GA99] R. E. Graves, B. M. Argrow: Bulk Viscosity: Past to Present. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* **13**(3), July–September 1999, S. 337–342.
- [GEM95] V. H. Gupta, V. Easwaran, M. L. Munjal: A modified segmentation approach for analyzing plane wave propagation in non-uniform ducts with mean flow. *Journal of Sound and Vibration* **182**(5), 1995, S. 697–707.
- [GM73] A. H. Gray, J. D. Markel: Digital Lattice and Ladder Filter Synthesis. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* **21**(6), December 1973, S. 491–500.
- [GM75] A. H. Gray, J. D. Markel: A Normalized Digital Filter Structure. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* **23**(3), June 1975, S. 268–277.
- [Gree59] M. Greenspan: Rotational Relaxation in Nitrogen, Oxygen, and Air. *Journal of the Acoustical Society of America* **31**(2), February 1959, S. 155–160.
- [Guic07] D. Guicking: *Aktive Lärm- und Schwingungsminderung – Von einer Laborkuriosität zum technischen Produkt*, Manuskript, Drittes Physikalisches Institut der Universität Göttingen, November 2007.
- [Han96] K.-H. Han: *Strömungsakustische Untersuchungen an Schalldämpferelementen*, Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1996.
- [Häns01] E. Hänsler: *Statistische Signale: Grundlagen und Anwendungen*. Springer-Verlag, 2001.

- [Hayk02] S. Haykin: *Adaptive Filter Theory*. Prentice-Hall, 4. Auflage 2002.
- [HE98a] H. Hudde, A. Engel: Measuring and Modeling Basic Properties of the Human Middle Ear and Ear Canal. Part I: Model Structure and Measuring Techniques. *Acustica/Acta Acustica* **84**, 1998, S. 720–739.
- [HE98b] H. Hudde, A. Engel: Measuring and Modeling Basic Properties of the Human Middle Ear and Ear Canal. Part II: Ear Canal, Middle Ear Cavities, Eardrum, and Ossicles. *Acustica/Acta Acustica* **84**, 1998, S. 894–913.
- [HE98c] H. Hudde, A. Engel: Measuring and Modeling Basic Properties of the Human Middle Ear and Ear Canal. Part III: Eardrum Impedances, Transfer Functions and Model Calculations. *Acustica/Acta Acustica* **84**, 1998, S. 1091–1109.
- [HEL99] H. Hudde, A. Engel, A. Ludwig: Methods for estimating the sound pressure at the eardrum. *Journal of the Acoustical Society of America* **106**(4), October 1999, S. 1977–1992.
- [Helm63] H. von Helmholtz: Über den Einfluss der Reibung in der Luft auf die Schallbewegung. *Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg* **3**, 1863, S. 16–20.
- [HL85] H. Hudde, U. Letens: Scattering matrix of a discontinuity with a nonrigid wall in a lossless circular duct. *Journal of the Acoustical Society of America* **75**(5), November 1985, S. 1826–1837.
- [HL05] B. Han, X. Lin: Adapt the Steady-State Kalman Gain Using the Normalized Autocorrelation of Innovations. *IEEE Signal Processing Letters* **12**(11), November 2005, S. 780–783.
- [HM95] M. Heckl, H. A. Müller: *Taschenbuch der Technischen Akustik*. Springer-Verlag, 2. Auflage 1995.
- [HM05] H. Hudde, M. Müller: Einfluss der Gehörgangsform auf die Transformationseigenschaften des Gehörgangs. *31. Deutsche Jahrestagung für Akustik – DAGA 2005*, März 2005, S. 421–422.
- [Hoff97] M. Hoffmann: *Hochfrequenztechnik*. Springer-Verlag, 1997.
- [HSZ⁺97] S. Haykin, A. H. Sayed, J. R. Zeidler, P. Yee, P. C. Wei: Adaptive Tracking of Linear Time-Variant Systems by Extended RLS Algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing* **45**(5), May 1997, S. 1118–1128.

- [Hudd83] H. Hudde: Estimation of the area function of human ear canals by sound pressure measurements. *Journal of the Acoustical Society of America* **73**(1), January 1983, S. 24–31.
- [Hudd88] H. Hudde: The propagation constant in lossy circular tubes near the cutoff frequencies of higher-order modes. *Journal of the Acoustical Society of America* **83**(4), April 1988, S. 1311–1318.
- [Hudd89] H. Hudde: Acoustical higher-order mode scattering matrix of circular nonuniform lossy tubes without flow. *Journal of the Acoustical Society of America* **85**(6), June 1989, S. 2316–2330.
- [Iber50] A. S. Iberall: Attenuation of Oscillatory Pressures in Instrument Lines. *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **45**, July 1950, S. 85–108.
- [Ingå48] U. Ingård: On the Radiation of Sound into a Circular Tube, with an Application to Resonators. *Journal of the Acoustical Society of America* **20**(5), September 1948, S. 665–682.
- [IS74] U. Ingard, V. K. Singhal: Sound attenuation in turbulent pipe flow. *Journal of the Acoustical Society of America* **55**(3), March 1974, S. 535–538.
- [JC92] J. Jiang, R. Cook: Fast parameter tracking RLS algorithm with high noise immunity. *Electronics Letters* **28**(22), October 1992, S. 2043–2045.
- [JI98] S.-H. Jang, J.-G. Ih: On the multiple microphone method for measuring in-duct acoustic properties in the presence of mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America* **103**(3), March 1998, S. 1520–1526.
- [JI00] S.-H. Jang, J.-G. Ih: Refined multiload method for measuring acoustical source characteristics of an intake or exhaust system. *Journal of the Acoustical Society of America* **107**(6), June 2000, S. 3217–3225.
- [JI02] S.-H. Jang, J.-G. Ih: On the selection of loads in the multiload method for measuring the acoustic source parameters of duct systems. *Journal of the Acoustical Society of America* **111**(3), March 2002, S. 1171–1176.
- [JI03] S.-H. Jang, J.-G. Ih: Numerical investigation and electro acoustic modeling of measurement methods for the in-duct acoustical source parameters. *Journal of the Acoustical Society of America* **113**(2), February 2003, S. 726–734.

- [JL77] C. R. Johnson, Jr., M. G. Larimore: Comments on and Additions to “An Adaptive Recursive LMS Filter”. *Proceedings of the IEEE* **65**(9), September 1977, S. 1399–1402.
- [JYXL07] G. Jin, T. Yang, Y. Xiao, Z. Liu: A simultaneous equation method-based online secondary path modeling algorithm for active noise control. *Journal of Sound and Vibration* **303**, 2007, S. 455–474.
- [Kalm60] R. E. Kalman: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME, Series D, Journal of Basic Engineering* **82**, March 1960, S. 35–45.
- [Kara53] F. C. Karal: The Analogous Acoustical Impedance for Discontinuities and Constrictions of Circular Cross Section. *Journal of the Acoustical Society of America* **25**(2), March 1953, S. 327–334.
- [KCJ05] J. Krüger, F. Castor, R. Jebasinski: Aktive Abgas-Schalldämpfer für PKW – Chancen und Risiken. *31. Deutsche Jahrestagung für Akustik – DAGA 2005*, März 2005, S. 21–22.
- [Keef84] D. H. Keefe: Acoustical wave propagation in cylindrical ducts: Transmission line parameter approximations for isothermal and nonisothermal boundary conditions. *Journal of the Acoustical Society of America* **75**(1), January 1984, S. 58–62.
- [KFCS00] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, J. V. Sanders: *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons, 1. Auflage 2000.
- [KG87] J. Kergomard, A. Garcia: Simple discontinuities in acoustic waveguides at low frequencies: Critical analysis and formulae. *Journal of Sound and Vibration* **114**(3), 1987, S. 465–479.
- [KGM07] S. M. Kuo, A. Gupta, S. Mallu: Development of adaptive algorithms for active sound quality control. *Journal of Sound and Vibration* **299**, 2007, S. 12–21.
- [KHO98] H.-S. Kim, J.-S. Hong, J.-E. Oh: Active Noise Control with the Active Muffler in Automotive Exhaust Systems. *International Journal of The Japan Society of Mechanical Engineers, Series C* **41**(2), 1998, S. 178–183.
- [KHSO99] H.-S. Kim, J.-S. Hong, D.-G. Sohn, J.-E. Oh: Development of an active muffler system for reducing exhaust noise and flow restriction in a heavy vehicle. *Noise Control Engineering Journal* **47**(2), March–April 1999, S. 57–63.

- [Kirc68] G. R. Kirchhoff: Über den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung. *Annalen der Physik und Chemie* **134**, 1868, S. 177–193.
- [KLB92] D. H. Keefe, R. Ling, J. C. Bulen: Method to measure acoustic impedance and reflection coefficient. *Journal of the Acoustical Society of America* **91**(1), January 1992, S. 470–485.
- [KM96] S. M. Kuo, D. R. Morgan: *Active Noise Control Systems: Algorithm and DSP Implementations*. John Wiley & Sons, 1996.
- [Knes49] H. O. Kneser: Druck- und Schubviskosität in Gasen. *Annalen der Physik* **6**(6), 1949, S. 253–256.
- [Kova53] L. S. G. Kovasznay: Turbulence in Supersonic Flow. *Journal of the Aeronautical Sciences* **20**(10), October 1953, S. 657–674, 682.
- [KS85] S. M. Khanna, M. R. Stinson: Specification of the acoustical input to the ear at high frequencies. *Journal of the Acoustical Society of America* **77**(2), February 1985, S. 577–589.
- [KS05a] B. J. Kim, D. C. Swanson: Linear independence method for system identification/secondary path modeling for active control. *Journal of the Acoustical Society of America* **118**(3), September 2005, S. 1452–1468.
- [KS05b] T. Kohno, A. Sano: Direct adaptive active noise control algorithms in case of uncertain secondary path dynamics. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **19**, January 2005, S. 153–176.
- [KT93] S. M. Kuo, J. Tsai: Arrangements of the Secondary Source on the Performance of Active Noise Control Systems. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems – ISCAS 1993*, May 1993, S. 2431–2434.
- [Kutt04] H. Kuttruff: *Akustik: Eine Einführung*. Hirzel Verlag, 2004.
- [KV97] S. M. Kuo, D. Vijayan: A Secondary Path Modeling Technique for Active Noise Control Systems. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing* **5**(4), July 1997, S. 374–377.
- [Laro99] J. Laroche: A Modified Lattice Structure with Pleasant Scaling Properties. *IEEE Transactions on Signal Processing* **47**(12), December 1999, S. 3423–3425.

- [LB06] P. Leistner, K. Bay: Gestaltungs- und Einsatzvarianten aktiver Resonatoren. *Mitteilungen aus dem FRAUNHOFER-Institut für Bauphysik (IBP-Mitteilungen)* **33**(469), 2006.
- [LJS03] K. Langeheinecke, P. Jany, E. Sapper: *Thermodynamik für Ingenieure*. Vieweg Verlag, 4. Auflage 2003.
- [LL91] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Band 6. Akademie Verlag, 1991.
- [Lodw97] A. Lodwig: *Ein System zur Anpassung von Hörgeräten – Messtechnik, patientenbezogene Modellierung, Optimierung der Komponenten*, Dissertation, Universität Bochum, 1997.
- [LP99] P. A. C. Lopes, M. S. Piedade: The Kalman Filter in Active Noise Control. *Proceedings of ACTIVE 1999 – The 1999 International Symposium on Active Control of Sound and Vibration*, 1999, S. 1111–1122.
- [LP00] P. A. C. Lopes, M. S. Piedade: A Kalman filter approach to active noise control. *Proceedings of the X European Signal Processing Conference – EUSIPCO 2000*, September 2000, S. 1859–1862.
- [LP04] P. A. C. Lopes, M. S. Piedade: The Behavior of the Modified FX-LMS Algorithm With Secondary Path Modeling Errors. *IEEE Signal Processing Letters* **11**(2), February 2004, S. 148–151.
- [LS48] H. Levine, J. Schwinger: On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe. *Physical Review* **73**(4), February 1948, S. 383–406.
- [LSQX03] J. Lu, C. Shen, X. Qiu, B. Xu: Lattice form adaptive infinite impulse response filtering algorithm for active noise control. *Journal of the Acoustical Society of America* **113**(1), January 2003, S. 327–335.
- [LTJ80] M. G. Larimore, J. R. Treichler, C. R. Johnson, Jr.: SHARF: An Algorithm for Adapting IIR Digital Filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* **28**(4), August 1980, S. 428–440.
- [Lück08] C. Lücking: *Beiträge zur Implementierung einer DSP-basierten Störsignaldämpfung für ein Rohrsystem*, Diplomarbeit, Universität Paderborn, 2008.
- [Lueg33] P. Lueg: Verfahren zur Dämpfung von Schallschwingungen. *Deutsches Reichspatent Nr. 655508*, 1933.

- [LYF02] S. Liu, J. Yuan, K.-Y. Fung: Robust active control of broadband noise in finite ducts. *Journal of the Acoustical Society of America* **111**(6), June 2002, S. 2727–2734.
- [LZS02] H. Lan, M. Zhang, W. Ser: An Active Noise Control System Using Online Secondary Path Modeling With Reduced Auxiliary Noise. *IEEE Signal Processing Letters* **9**(1), January 2002, S. 16–18.
- [Mais94] J. Maisano: An improved transmission line model for visco-thermal lossy sound propagation. *96th Convention of the Audio-Engineering Society* **96**, 1994.
- [Male69] I. Malecki: *Physical Foundations of Technical Acoustics*. Pergamon Press, 1969. Translated by Irena Bellert.
- [Math91] V. J. Mathews: Adaptive Polynomial Filters. *IEEE Signal Processing Magazine* **8**(3), July 1991, S. 10–26.
- [Mawa54] O. K. Mawardi: On Acoustic Boundary Layer Heating. *Journal of the Acoustical Society of America* **16**(5), September 1954, S. 726–731.
- [MCKH03] J. M. Munn, B. S. Cazzolato, C. D. Kestell, C. H. Hansen: Virtual error sensing for active noise control in a one-dimensional waveguide: Performance prediction versus measurement (L). *Journal of the Acoustical Society of America* **113**(1), January 2003, S. 35–38.
- [MD88] M. L. Munjal, A. G. Doige: On uniqueness, transfer and combination of acoustic sources in one-dimensional systems. *Journal of Sound and Vibration* **121**(1), 1988, S. 25–35.
- [ME88] M. L. Munjal, L. J. Eriksson: An analytical, one-dimensional, standing-wave model of a linear active noise control system in a duct. *Journal of the Acoustical Society of America* **84**(3), September 1988, S. 1086–1093.
- [ME89] M. L. Munjal, L. J. Eriksson: Analysis of a hybrid noise control system for a duct. *Journal of the Acoustical Society of America* **86**(2), August 1989, S. 832–834.
- [Mech04] F. P. Mechel (Hrsg.): *Formulas of Acoustics*. Springer-Verlag, 2. Auflage 2004.
- [MI86] P. M. Morse, K. U. Ingård: *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1. Auflage 1986.

- [Mile47] J. W. Miles: The Diffraction of Sound Due to Right-Angled Joints in Rectangular Tubes. *Journal of the Acoustical Society of America* **19**(4), 1947, S. 572–579.
- [MN79] E. Meyer, E.-G. Neumann: *Physikalische und technische Akustik*. Vieweg Verlag, 3. Auflage 1979.
- [Morf71] C. L. Morfey: Sound transmission and generation in ducts with flow. *Journal of Sound and Vibration* **14**(1), 1971, S. 37–55.
- [Mosc95] E. Mosca: *Optimal, predictive, and adaptive control*. Prentice-Hall, 1995.
- [MS89] G. Meyer, E. Schiffner: *Technische Thermodynamik*. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1989, 4. Auflage 1989.
- [MT07] K. Mollenhauer, H. Tschöke: *Handbuch Dieselmotoren*. Springer-Verlag, 3. Auflage 2007.
- [Munj75] M. L. Munjal: Velocity ratio-cum-transfer matrix method for the evaluation of a muffler with mean flow. *Journal of Sound and Vibration* **39**(1), 1975, S. 105–119.
- [Munj87] M. L. Munjal: *Acoustics of Ducts and Mufflers*. John Wiley & Sons, 1. Auflage 1987.
- [NA98] S. L. Netto, P. Agathoklis: Efficient Lattice Realizations of Adaptive IIR Algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing* **46**(1), January 1998, S. 223–227.
- [NE95] P. A. Nelson, S. J. Elliott: *Active Control of Sound*. Academic Press, 1995.
- [Nish91] M. Nishimura: Some Problems of Active Noise Control for Practical Use. *International Symposium on Active Control of Sound and Vibration*, April 9–11 1991, S. 157–164.
- [NS89] A. N. Norris, I. C. Sheng: Acoustic radiation from a circular pipe with an infinite flange. *Journal of Sound and Vibration* **135**(1), 1989, S. 85–93.
- [OBN92] F. Ordnuña-Bustamante, P. A. Nelson: An adaptive controller for the active absorption of sound. *Journal of the Acoustical Society of America* **91**(5), May 1992, S. 2740–2747.

- [OKOS02] Y. Ohta, T. Kouno, H. Ohmori, A. Sano: Direct Fully Adaptive Active Noise Control Algorithms without Identification of Secondary Path Dynamics. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications*, September 2002, S. 453–458.
- [OS89] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer: *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, 1989.
- [Peat88] K. S. Peat: The acoustical impedance at discontinuities of ducts in the presence of a mean flow. *Journal of Sound and Vibration* **127**(1), 1988, S. 123–132.
- [Peat02] K. S. Peat: An analytical investigation of the direct measurement method of estimating the acoustic impedance of a time-varying source. *Journal of Sound and Vibration* **256**(2), 2002, S. 271–285.
- [PI01] K. S. Peat, J.-G. Ih: An analytical investigation of the indirect measurement method of estimating the acoustic impedance of a time-varying source. *Journal of Sound and Vibration* **244**(5), 2001, S. 821–835.
- [Pier81] A. D. Pierce: *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. McGraw-Hill, 1981.
- [PM05] S. N. Panigrahi, M. L. Munjal: Comparison of various methods for analyzing lined circular ducts. *Journal of Sound and Vibration* **285**(4–5), 2005, S. 905–923.
- [POW84] L. Prandtl, K. Oswatitsch, K. Wieghardt: *Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg Verlag, 8. Auflage 1984.
- [PP02] A. Papoulis, S. U. Pillai: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 4. Auflage 2002.
- [Pras87] M. G. Prasad: A four load method for evaluation of acoustical source impedance in a duct. *Journal of Sound and Vibration* **114**(2), 1987, S. 347–356.
- [PTVF07] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 3. Auflage 2007.
- [Putl96] G. R. Putland: *Modeling of Horns and Enclosures for Loudspeakers*, Dissertation, University of Queensland, 1996.

- [PZCH05] D. Petersen, A. C. Zander, B. S. Cazzolato, C. H. Hansen: Optimal virtual sensing for active noise control in a rigid-walled acoustic duct. *Journal of the Acoustical Society of America* **118**(5), November 2005, S. 3086–3093.
- [Rayl68] J. W. B. Rayleigh: *The Theory of Sound*, Band 2. Dover Publications, 2. Auflage 1968.
- [RB07] H. Rämmal, H. Bodén: Modified multi-load method for nonlinear source characterisation. *Journal of Sound and Vibration* **299**(4–5), 2007, S. 1094–1113.
- [RC83] D. F. Ross, M. J. Crocker: Measurement of the acoustic internal source impedance of an internal combustion engine. *Journal of the Acoustical Society of America* **74**(1), 1983, S. 18–27.
- [Rega94] P. Regalia: *Adaptive IIR filtering in signal processing and control*. Marcel Dekker, Inc., 1. Auflage 1994.
- [Reyn81] D. D. Reynolds: *Engineering Principles of Acoustics: Noise and Vibration Control*. Allyn and Bacon, 1981.
- [RFM91] J. A. Rodriguez-Fonollosa, E. Masgrau: Simplified Gradient Calculation in Adaptive IIR Lattice Filters. *IEEE Transactions on Signal Processing* **39**(7), July 1991, S. 1702–1705.
- [Rsch63] S. N. Rschevkin: *A Course of Lectures on the Theory of Sound*. Pergamon Press, 1963. Translated from the Russian by O. M. Blunn.
- [Saab95] S. S. Saab: Discrete-Time Kalman Filter under Incorrect Noise Covariances. *Proceedings of the American Control Conference* **2**, June 1995, S. 1152–1156.
- [SAG93] R. Schirmacher, T. Auspitzer, D. Guicking: Fast algorithms for active adaptive control of nonstationary sound fields. *Journaal Nederlands Akoestisch Genootschap*, (120), November 1993, S. 41–55.
- [Sanb98] P. Sanborn: Predicting hearing aid response in real ears. *Journal of the Acoustical Society of America* **103**(6), June 1998, S. 3407–3417.
- [Saye03] A. H. Sayed: *Fundamentals of Adaptive Filtering*. John Wiley & Sons, 2003.

- [Sche04] S. Scheichl: On the calculation of the transmission line parameters for long tubes using the method of multiple scales. *Journal of the Acoustical Society of America* **204**(2), February 2004, S. 534–555.
- [Sche05] S. Scheichl: Linear and nonlinear propagation of higher order modes in hard-walled circular ducts containing a real gas. *Journal of the Acoustical Society of America* **117**(4), April 2005, S. 1806–1827.
- [Schi95] R. Schirmacher: *Schnelle Algorithmen für adaptive IIR-Filter und ihre Anwendung in der aktiven Schallfeldbeeinflussung*, Dissertation, Georg-August-Universität zu Göttingen, September 1995.
- [SG94] R. Schirmacher, D. Guicking: Theory and implementation of a broadband active noise control system using a fast RLS algorithm. *Acta Acustica* **2**, August 1994, S. 291–300.
- [SGK05] Y. Song, Y. Gong, S. M. Kuo: A Robust Hybrid Feedback Active Noise Cancellation Headset. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing* **13**(4), July 2005, S. 607–617.
- [SH89] S. D. Snyder, C. H. Hansen: Active noise control in ducts: Some physical insights. *Journal of the Acoustical Society of America* **86**(1), July 1989, S. 184–194.
- [SK94] A. H. Sayed, T. Kailath: A State-Space Approach to Adaptive RLS Filtering. *IEEE Signal Processing Magazine* **11**, July 1994, S. 18–60.
- [SK95] V. Solo, X. Kong: *Adaptive Signal Processing Algorithms*. Prentice-Hall, 1995.
- [SK06] H. R. Schwarz, N. Köckler: *Numerische Mathematik*. Teubner Verlag, 6. Auflage 2006.
- [Skud71] E. Skudrzyk: *The Foundations of Acoustics*. Springer-Verlag, 1971.
- [SL89] M. R. Stinson, B. W. Lawton: Specification of the geometry of the human ear canal for the prediction of sound-pressure level distribution. *Journal of the Acoustical Society of America* **85**(6), June 1989, S. 2492–2503.
- [SL00] R. Schirmacher, R. Lippold: Designing vehicle sound by the use of ANC and active sound design – theory, application, and practical experiences. *Transactions IMechE European Conference on Vehicle Noise and Vibration*, May 2000, S. 379–385.

- [SLC89] I. C. Shepherd, R. F. La Fontaine, A. Cabelli: The influence of turbulent pressure fluctuations on an active attenuator in a flow duct. *Journal of Sound and Vibration* **130**(1), 1989, S. 125–135.
- [SLW65] F. D. Shields, K. P. Lee, W. J. Wiley: Numerical Solution for Sound Velocity and Absorption in Cylindrical Tubes. *Journal of the Acoustical Society of America* **37**(4), April 1965, S. 724–729.
- [SM00] Y. Sathyanarayana, M. L. Munjal: A hybrid approach for aero-acoustic analysis of engine exhaust system. *Applied Acoustics* **60**, 2000, S. 425–450.
- [SMR95] A. D. Sahasrabudhe, M. L. Munjal, S. A. Ramu: Analysis of in-tertance due to the higher order mode effects in a sudden area discontinuity. *Journal of Sound and Vibration* **185**(3), 1995, S. 515–529.
- [SO03] A. Sano, Y. Ohta: Adaptive active noise control without secondary path identification. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing – ICASSP 2003* **6**, April 2003, S. VI-213–VI-216.
- [Solo03] N. Solokhin: Basic types of discontinuity in circular acoustic wave guide. *Journal of the Acoustical Society of America* **114**(5), November 2003, S. 2626–2632.
- [Spur96] J. H. Spurk: *Strömungslehre*. Springer-Verlag, 4. Auflage 1996.
- [SSH02] J. Scheuren, R. Schirmacher, J. Hobelsberger: Active Design of Automotive Engine Sound. *Proceedings of the 2002 International Congress and Exposition on Noise Control Engineering – Inter-Noise 2002*, August 2002.
- [SSIA95] N. Saito, T. Sone, T. Ise, M. Akiho: Conditions for Optimal On-line Identification of Secondary Path in Active Noise Control Systems. *Proceedings of ACTIVE 1995 – The 1995 International Symposium on Active Control of Sound and Vibration*, July 1995, S. 1141–1148.
- [SSIA96] N. Saito, T. Sone, T. Ise, M. Akiho: Optimal on-line modeling of primary and secondary paths in active noise control systems. *Journal of The Acoustical Society of Japan (E)* **17**(6), 1996, S. 275–283.
- [SSSM05] P. Stephan, K. Schaber, K. Stephan, F. Mayinger: *Thermodynamik*, Band 1: Einstoffsysteme. Springer-Verlag, 16. Auflage 2005.

- [Stin91] M. R. Stinson: The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape. *Journal of the Acoustical Society of America* **98**(2), February 1991, S. 550–558.
- [Stöc98] H. Stöcker: *Taschenbuch der Physik: Formeln, Tabellen, Übersichten*. Verlag Harri Deutsch, 3. Auflage 1998.
- [Stok45] G. G. Stokes: On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophy Society* **8**, 1845, S. 75–102.
- [Suth93] W. Sutherland: The Viscosity of Gases and Molecular Force. *Philosophical Magazine* **36**, 1893, S. 507–531.
- [SWB98] V. L. Streeter, E. B. Wylie, K. W. Bedford: *Fluid mechanics*. McGraw-Hill, 9. Auflage 1998.
- [SXC07] Y. Song, W. Xiao, X. Chen: An Analogue Compensation Scheme in Adaptive Active Control System with Significant Secondary Path Variation. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing – ICASSP 2007* **1**, April 2007, S. I-101–I-104.
- [Tang04] S. K. Tang: Sound transmission characteristics of Tee-junctions and the associated length corrections. *Journal of the Acoustical Society of America* **115**(1), January 2004, S. 218–227.
- [Terh98] E. Terhardt: *Akustische Kommunikation: Grundlagen mit Hörbeispielen*. Springer-Verlag, 1998.
- [Tijd75] H. Tijdeman: On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. *Journal of Sound and Vibration* **39**(1), 1975, S. 1–33.
- [Tisz42] L. Tisza: Supersonic Absorption and Stokes' Viscosity Relation. *Physical Review* **61**(7–8), April 1942, S. 531–536.
- [Trim03] M. Trimpop: *Grundlagen zur Auslöschung von Schallfeldern durch Antischall unter Verwendung eines zweidimensionalen Ansatzes*, Dissertation, Bergische Universität Wuppertal, 2003.
- [Trin83] M. C. J. Trindler: Active noise control in finite length ducts. *Journal of Sound and Vibration* **89**(1), 1983, S. 95–105.
- [Tsao68] S. Tsao: Numerical Solutions of Transients in Pneumatic Networks – Transmission-Line Calculations. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers* **35**, September 1968, S. 588–595.

- [TSO06] Y. Takenouchi, H. Suzuki, A. Omoto: Behavior of the practically implemented filtered reference LMS algorithm in an active noise control system. *Acoustical Science and Technology* **27**(1), 2006, S. 20–27.
- [Vorl08] M. Vorländer: *Auralization: Fundamentals of Acoustics, Modelling, Simulation, Algorithms and Acoustic Virtual Reality*. Springer-Verlag, 1. Auflage 2008.
- [VS75] J. K. Vennard, R. L. Street: *Elementary fluid mechanics*. John Wiley & Sons, 5. Auflage 1975.
- [Wald58] L. Waldmann: *Handbuch der Physik*, Band 12. Springer-Verlag, 1958.
- [Waßm00] J. Waßmuth: *Modellierung und Kompensation nichtlinearer Effekte bei elektrodynamischen Lautsprechern*, Dissertation, Universität Paderborn, 2000.
- [WB01] J.-D. Wu, M. R. Bai: Effects of Directional Microphone and Transducer in Spatially Feedforward Active Noise Control System. *Japanese Journal of Applied Physics* **40**(10), October 2001, S. 6133–6137.
- [Webs19] A. G. Webster: Acoustical Impedance and the Theory of Horns and of the Phonograph. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **5**(7), 1919, S. 275–282.
- [West53] D. E. Weston: The Theory of the Propagation of Plane Waves in Tubes. *Proceedings of the Physical Society of London* **66**(B), 1953, S. 695–709.
- [WH60] B. Widrow, M. E. Hoff: Adaptive Switching Circuits. *IRE WESCON Convention Record, Part 4*, 1960, S. 96–104.
- [WM77] B. Widrow, J. M. McCool: Comments on “An Adaptive Recursive LMS Filter”. *Proceedings of the IEEE* **65**(9), September 1977, S. 1402–1404.
- [XMKI07] Y. Xiao, L. Ma, K. Khorasani, A. Ikuta: Performance Analysis of the FXLMS-Based Narrowband Active Noise Control System with Online Secondary Path Modeling. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing – ICASSP 2007* **1**, April 2007, S. I-105–I-108.

- [YF99] J. Yuan, K.-Y. Fung: A travelling wave approach to active noise control in ducts. *Journal of Sound and Vibration* **219**(2), 1999, S. 307–321.
- [YS01] N. R. Yousef, A. H. Sayed: A Unified Approach to the Steady-State and Tracking Analyses of Adaptive Filters. *IEEE Transactions on Signal Processing* **49**(2), February 2001, S. 314–324.
- [ZH93] A. C. Zander, C. H. Hansen: A comparison of error sensor strategies for the active control of duct noise. *Journal of the Acoustical Society of America* **94**(2), August 1993, S. 841–848.
- [Zier93] J. Zierep: *Grundzüge der Strömungslehre*. Springer-Verlag, 2. Auflage 1993.
- [ZK49] C. Zwicker, C. W. Kosten: *Sound Absorbing Materials*. Elsevier Publishing Company, Inc., 1949.
- [ZLS00] M. Zhang, H. Lan, W. Ser: An Improved Secondary Path Modeling Method for Active Noise Control Systems. *IEEE Signal Processing Letters* **7**(4), April 2000, S. 73–75.
- [ZLS01] M. Zhang, H. Lan, W. Ser: Cross-Updated Active Noise Control System with Online Secondary Path Modeling. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing* **9**(5), July 2001, S. 598–602.
- [ZLS03] M. Zhang, H. Lan, W. Ser: A Robust Online Secondary Path Modeling Method With Auxiliary Noise Power Scheduling Strategy and Norm Constraint Manipulation. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing* **11**(1), January 2003, S. 45–53.
- [ZLS05] M. Zhang, H. Lan, W. Ser: On Comparison of Online Secondary Path Modeling Methods With Auxiliary Noise. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing* **13**(4), July 2005, S. 618–628.
- [ZZ93] M. Zollner, E. Zwicker: *Elektroakustik*. Springer-Verlag, 1993.

Danksagung

Zum Abschluss der vorliegenden Dissertation, die im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Sensorik an der Universität Paderborn entstand, gilt mein Dank:

- Herrn Professor Ulrich Hilleringmann als Leiter des Fachbiets Sensorik für die Möglichkeit zur Durchführung der Forschungsarbeiten sowie für den mir gewährten Freiraum, eigene Vorstellungen zu verwirklichen.
- Herrn Professor Reinhold Häb-Umbach für die Übernahme des Korreferats und für seine wertvollen Anmerkungen zur Arbeit.
- Herrn Frank Rabe von der BENTELER AUTOMOBILTECHNIK GMBH für die Messung und Bereitstellung der Schalldruck- und Temperaturverläufe.
- Werner Büttner, Thomas Diekmann, Martin Dierkes, Siegbert Drüe, Heinz Funke, Torsten Frers, Sebastian Meyer zu Hoberge, Benjamin Ohms, Christoph Pannemann, Sabine Schlegelhuber, Peter Scholz, Christopher Wiegand und Karsten Wolff für die gute Zusammenarbeit sowie für das angenehme und freundschaftliche Arbeitsklima.
- Christoph Lücking, Ingo Timmermann und Christopher Wiegand für ihre Beiträge in Form von Studien- oder Diplomarbeiten.
- Bernhard Stute für die Unterstützung und die unkomplizierte Leihgabe des Messmikrofons.
- Markus Schmidt für die Durchsicht und die Anmerkungen zum Manuskript.