

**Einkopplung in multimodale Lichtwellenleiter -  
Wellentheoretische Analyse  
und ein Vergleich zur strahlenoptischen  
Modellierung**

Zur Erlangung des akademischen Grades

**DOKTORINGENIEUR (Dr.-Ing.)**

der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik  
der Universität Paderborn  
vorgelegte Dissertation  
von

Dipl.-Ing. Matthias Stallein  
aus Rietberg

Referent: Prof. Dr.-Ing. Gerd Mrozynski  
Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. Jürgen Jahns

Tag der mündlichen Prüfung: 25.02.2010

Paderborn 2010

Diss. EIM-E/262



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik der Universität Paderborn.

Zuallererst danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Gerd Mrozynski für die Betreuung der Arbeit und der Übernahme des Hauptreferats. Besonders hervorzuheben ist, dass er auch nach dem Ausscheiden aus der aktiven Lehrtätigkeit seine Forschungsvorhaben fortgeführt und die Betreuung dieser Arbeit fortgesetzt hat. Für das jederzeit hervorragende Arbeitsumfeld möchte ich ihm und insbesondere auch seinem Nachfolger Herrn Prof. Dr.-Ing. Rolf Schuhmann recht herzlich danken. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr. rer. nat. Jürgen Jahns für die Übernahme des Korreferats.

Einen großen Beitrag zum Gelingen der Arbeit lieferten auch die vielen hilfreichen Diskussionen mit meinen jetzigen und ehemaligen Kollegen. Insbesondere möchte ich Herrn Dr.-Ing. Christian Kollect für die vielen Anregungen und Ratschläge zu Beginn meiner Arbeiten danken, sowie Herrn Dipl.-Ing. Bastian Bandlow und Herrn Dr.-Ing. Oliver Stübbe für die Unterstützung in der Folgezeit. Für die wertvollen Ratschläge bei der Erstellung des Manuskripts danke ich Herrn Dr.-Ing. Denis Sievers. Ferner leisteten Herr M.A. Andreas Duhme durch das Korrekturlesen und Frau Gabi Freitag durch die Hilfestellung in organisatorischen Fragen wertvolle Beiträge.

Schließlich möchte ich meiner Familie, meinen Freunden und insbesondere auch meiner Tischtennis-Mannschaft für die Unterstützung danken.

Paderborn, im März 2010

Matthias Stallein



# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Einleitung</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1. Motivation und Zielsetzung . . . . .                                       | 1         |
| 1.2. Einordnung und Durchführung . . . . .                                      | 3         |
| <b>2. Grundlagen</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1. Grundzüge der Maxwell'schen Theorie . . . . .                              | 7         |
| 2.2. Wellenausbreitung im homogenen Raum . . . . .                              | 10        |
| 2.2.1. Spektren ebener Wellen . . . . .   | 10        |
| 2.2.2. Das Spektrum des Maxwell'schen Gaußstrahls . . . . .                     | 12        |
| 2.2.3. Der Paraxiale Gaußstrahl . . . . .                                       | 13        |
| 2.3. Geführte Wellen an linearen Leiterstrukturen . . . . .                     | 16        |
| 2.3.1. Theorie normaler Moden . . . . .   | 17        |
| 2.3.2. Abrupte Wellenleiterübergänge – Die Methode des Mode-Matching            | 20        |
| 2.4. Strahlenoptische Modellierungsansätze . . . . .                            | 24        |
| 2.4.1. Mathematische Grundlagen . . . . .                                       | 24        |
| 2.4.2. Dielektrische Grenzflächen . . . . .                                     | 25        |
| 2.4.3. Strahlenoptisches Modell des Gaußstrahls . . . . .                       | 30        |
| <b>3. Die Moden dielektrischer Stufenindex-Wellenleiter</b>                     | <b>33</b> |
| 3.1. Grundlegende Eigenschaften der Moden dielektrischer Wellenleiter . . . . . | 33        |
| 3.1.1. Dielektrische Wellenleiter mit leitender Abschirmung . . . . .           | 33        |
| 3.1.2. Einteilung des Modenspektrums . . . . .                                  | 34        |
| 3.1.3. Planare Schichtwellenleiter . . . . .                                    | 36        |
| 3.2. Kreiszyklindrische Fasern . . . . .  | 40        |
| 3.2.1. Feldgrößen der Moden . . . . .   | 41        |
| 3.2.2. Lösung der Eigenwertgleichung und geführte Leistung pro Mode . .         | 44        |
| 3.3. Rechteckförmige Wellenleiter . . . . .                                     | 46        |
| 3.3.1. Näherungslösungen von Marcatili . . . . .                                | 46        |
| 3.3.2. Numerische Verfahren . . . . .   | 50        |
| <b>4. Koppelleffizienz Gaußscher Eingangsstrahlen</b>                           | <b>55</b> |
| 4.1. Modellparameter und Modellierungsschritte . . . . .                        | 55        |
| 4.1.1. Geometrie- und Materialparameter, Parametrisierung der Quelle . .        | 56        |
| 4.1.2. Spektraldarstellung der einfallenden Wellen . . . . .                    | 59        |
| 4.1.3. Überlappintegrale links- und rechtsseitiger Moden . . . . .              | 63        |
| 4.1.4. Durchführung des Mode-Matching . . . . .                                 | 65        |
| 4.2. Koppelleffizienz für Stufenindex-Wellenleiter . . . . .                    | 66        |
| 4.2.1. Definition der Koppelleffizienz . . . . .                                | 66        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 4.2.2.    | Koppeleffizienz bei Variation der Einfallsrichtung . . . . .                                      | 67         |
| 4.2.3.    | Koppeleffizienz bei gleichmäßiger Verkleinerung des Kern- und des<br>Strahldurchmessers . . . . . | 69         |
| 4.2.4.    | Anmerkungen zur Approximation durch planare Wellenleiter . . . .                                  | 71         |
| 4.3.      | Grenzen der Modellierung . . . . .  | 71         |
| 4.3.1.    | Der Fehler der Paraxialen Näherung . . . . .  | 71         |
| 4.3.2.    | Geschlossene oder offene Wellenleiter? . . . . .  | 75         |
| 4.3.3.    | Die Anzahl zu berücksichtigender Moden . . . . .  | 77         |
| 4.3.4.    | Anmerkungen zur numerischen Stabilität . . . . .  | 81         |
| 4.4.      | Vergleich zur Strahlenoptik . . . . .   | 82         |
| 4.4.1.    | Effektiver Kernquerschnitt und Akzeptanzwinkel . . . . .  | 82         |
| 4.4.2.    | Allgemeine Ergebnisse . . . . .   | 86         |
| 4.4.3.    | Anmerkungen zur Approximation durch planare Wellenleiter . . . .                                  | 91         |
| 4.4.4.    | Gleichmäßige Verkleinerung des Kern- und des Strahldurchmessers .                                 | 92         |
| 4.5.      | Näherungsverfahren für rechteckförmige Wellenleiter . . . . .                                     | 96         |
| 4.5.1.    | Näherungsverfahren zur Berechnung der Koppeleffizienz . . . . .                                   | 96         |
| 4.5.2.    | Ergebnisse für den rechteckförmigen Wellenleiter . . . . .  | 98         |
| <b>5.</b> | <b>Wellenausbreitung in dielektrischen Wellenleitern</b>  | <b>103</b> |
| 5.1.      | Wellenausbreitung im längshomogenen Wellenleiter . . . . .  | 103        |
| 5.1.1.    | Monochromatische Wellenausbreitung . . . . .  | 104        |
| 5.1.2.    | Transientes Übertragungsverhalten . . . . .   | 106        |
| 5.1.3.    | Übertragungsfunktion des planaren Schichtwellenleiters . . . . .                                  | 111        |
| 5.2.      | Wellenausbreitung im gekrümmten Schichtwellenleiter . . . . .                                     | 113        |
| 5.2.1.    | Überblick . . . . .   | 114        |
| 5.2.2.    | Der Leckwellen-Ansatz . . . . .   | 115        |
| 5.2.3.    | Die Exakte Rechnung . . . . .   | 117        |
| 5.2.4.    | Vergleich der Ansätze . . . . .   | 122        |
| 5.2.5.    | Rechnung auf Basis quasigeführter Moden . . . . .   | 124        |
| 5.2.6.    | Ergebnisse für multimodale Wellenleiter . . . . .   | 131        |
| 5.3.      | Vergleich zur Strahlenoptik . . . . .   | 135        |
| 5.3.1.    | Strahlverfolgung im Schichtwellenleiter . . . . .   | 135        |
| 5.3.2.    | Transientes Übertragungsverhalten des längshomogenen Schichtwel-<br>lenleiters . . . . .          | 138        |
| 5.3.3.    | Verluste durch Wellenleiterkrümmungen . . . . .   | 143        |
| <b>6.</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>   | <b>149</b> |
| <b>A.</b> | <b>Anhang</b>   | <b>153</b> |
| A.1.      | Der Gaußstrahl: Ergänzungen . . . . .   | 153        |
| A.1.1.    | Hertzische Potenziale des Gaußstrahls . . . . .   | 153        |
| A.1.2.    | Feldbeschreibung des planaren Gaußstrahls . . . . .   | 154        |
| A.2.      | Leistungstransport im optischen Wellenleiter . . . . .  | 156        |
| A.2.1.    | Schichtwellenleiter . . . . .   | 156        |
| A.2.2.    | Kreiszyklindrische Faser . . . . .  | 157        |
| A.3.      | Überlappintegrale abrupter Wellenleiterübergänge . . . . .  | 160        |

---

|   |            |
|---|------------|
| A.3.1. Schichtwellenleiter . . . . .  | 160        |
| A.3.2. Kreiszyindrische Faser . . . . .   | 161        |
| A.4. Ergänzung zum Kapitel 4.4.4 für die Mantelbrechzahl $n_2 = 1,56$ . . . . . | 164        |
| A.5. Mathematische Hilfsmittel . . . . .  | 168        |
| A.5.1. Grundlagen . . . . .   | 168        |
| A.5.2. Besselfunktionen . . . . .   | 170        |
| A.5.3. Integrale . . . . .  | 172        |
| <b>Abkürzungen, Konventionen und verwendete Symbole</b>                         | <b>175</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>   | <b>181</b> |





# 1. Einleitung

Seit der Entwicklung des Lasers im Jahr 1960 gewinnt die optische Datenübertragung stetig an Bedeutung. Optische Singlemode-Fasern bilden seit langem das Rückgrat im Weitverkehrsnetz unserer Kommunikationsgesellschaft. Mit Hilfe von Multimode-Fasern werden kürzere Strecken überbrückt. Die Anwendungen sind vielseitig: Feldbus-Systeme in der Automatisierungs- und Gebäudetechnik, optische Messsysteme oder auch die HiFi-Anlage mit optischen Ein- und Ausgängen seien hier genannt. Innerhalb geschlossener elektronischer Systeme dominiert jedoch immer noch die konventionelle elektrische Verbindungstechnik. Zwar existiert mit der Integrierten Optik eine Technologie zum Aufbau integrierter optischer Schaltkreise (PIC, Photonic Integrated Circuit), vergleichbar mit den herkömmlichen integrierten Schaltungen (IC). Die Einbettung optischer Wellenleiter in die herkömmliche elektrische Leiterplatte steht jedoch noch aus.

## 1.1. Motivation und Zielsetzung

Obwohl die Taktraten innerhalb moderner Computersysteme nicht mehr so stark ansteigen wie in den vergangenen Jahrzehnten und auch das Mooresche Gesetz für zukünftige Anwendungen seine Gültigkeit verlieren wird, ist weiterhin mit einem stetig steigenden Datenaufkommen auf Leiterplattebene zu rechnen. Grund ist die steigende Parallelisierung der Recheneinheiten. Da ist zum Einen die Integration mehrerer Prozessorkerne auf einem Chip zu nennen, zum Anderen die Einbettung mehrerer Prozessoren in einem System. Der letztgenannte Fall bezieht sich auf Serversysteme, z.B. Bladeserver bzw. Bladesysteme. Diese arbeiten schon heute mit Datenraten von bis zu  $10 \text{ Gb/s}$  und stoßen damit an die Grenzen der konventionellen elektrischen Übertragungstechnik.

Die Vorteile der optischen Übertragungstechnik sind hinlänglich bekannt. Neben der geringeren Störempfindlichkeit und Störaussendung liegt der entscheidende Vorteil in der deutlich größeren Bandbreite. Der Nachteil ist der weit größere technologische Aufwand. Zwar hat die Entwicklung erster Prototypen in den vergangenen Jahren gezeigt, dass die Fertigung elektrooptischer Leiterplatten (EOPCB, Electro-Optical Printed Circuit Boards) technologisch grundsätzlich möglich ist [22, 29, 42, 48]. Dabei wird die herkömmliche mehrlagige elektrische Leiterplatte um eine oder mehrere optische Lagen ergänzt. Der Eingriff in den standardisierten Fertigungsprozess ist jedoch massiv. Insbesondere die optische Durchkontaktierung, die optische Ein- und Auskopplung in die Leiterplatte, ist problematisch. Sofern keine seitliche Anbindung möglich ist, muss die optische Welle um  $90^\circ$  umgelenkt werden. Die dazu erforderliche Umlenkoptik, die in die Leiterplatte eingebracht werden muss, besteht in der Regel aus einem Spiegel kombiniert mit einem Linsensystem. Alternativ könnten flexible gebogene Wellenleiter eingesetzt werden [12]. Problematisch sind in

beiden Fällen die gegenüber der elektrischen Technologie verringerten Toleranzen bei der Positionierung der optischen Komponenten.

Aufgrund des im Vergleich zur optischen Trägerwelle niedrigen Frequenzbereichs, in dem elektrische Mikrostreifenleiter betrieben werden, gibt es zahlreiche effiziente numerische Verfahren zur Simulation der Wellenausbreitung entlang Mikrostreifenleiterstrukturen. Entsprechend sind umfangreiche kommerzielle Entwicklungswerkzeuge für den Entwurf elektrischer Schaltkreise am Markt verfügbar. Gänzlich anders verhält es sich im Bereich der optischen Wellenleiter, da aufgrund der kleinen Wellenlänge numerische Verfahren oft nicht effizient sind. Zwar existieren Simulationsumgebungen für den Entwurf einzelner oder einer Kombination mehrerer Komponenten wie z.B. Linsensysteme. Diese beruhen jedoch meist auf strahlenoptische Methoden<sup>1</sup>. Die Grenzen der Anwendbarkeit dieser strahlenoptischen Methoden ist bislang nicht hinreichend geklärt. In der Literatur wird das Problem meist nur umschrieben: ‚Die Wellenlänge sei klein gegenüber der kleinsten geometrischen Abmessung‘. Doch wie ist diese Aussage im Kontext der EOPCB-Technologie zu interpretieren? Die vorliegende Arbeit soll dieser Fragestellung einige quantitative Antworten geben. Die relevante Geometriegröße ist der Durchmesser des optischen Wellenleiters.

Da die EOPCB-Technologie noch nicht am Markt eingeführt wurde, gibt es bisher wenige fixe Spezifikationen für die eingebetteten optischen Wellenleiter. Aufgrund der Toleranzanforderungen werden in der Regel Multimode-Wellenleiter mit Querschnittsabmessungen im Bereich zwischen  $50\text{ }\mu\text{m}$  und  $100\text{ }\mu\text{m}$  und einem Stufenindexprofil eingesetzt. Die numerische Apertur  $NA$  liegt typischerweise bei 0,25. Aber auch kleinere Abmessungen bis hin zum Singlemode-Wellenleiter sowie Gradientenprofile sind grundsätzlich denkbar. Der ideale Kernquerschnitt ist fertigungsbedingt rechteckförmig, unterliegt aber den üblichen produktionstechnischen Schwankungen, so dass sich trapezförmige Querschnitte oder abgerundete Ecken ausbilden können. Um ein wellentheoretisches Referenzverfahren zu entwickeln, muss jedoch auf Wellenleiterquerschnitte zurückgegriffen werden, für die Feldlösungen bekannt sind. Daher beschränkt sich diese Arbeit im Wesentlichen auf zirkularsymmetrische Fasern und planare Schichtwellenleiter. Das Feld des anregenden Lasers wird durch einen fundamentalen Gaußstrahl approximiert, da aktuell noch keine Modelle realer VCSEL-Dioden (VCSEL, Vertical-Cavity Surface-Emitting Laser) verfügbar sind, welche gewöhnlich in der EOPCB-Technologie eingesetzt werden.

Im Fokus der Arbeit steht die Verifikation strahlenoptischer Verfahren zur Beschreibung der Einkopplung optischer Wellen in eine zirkularsymmetrische Faser. Als Referenz dient ein wellentheoretisches Verfahren auf Basis der exakten Feldlösung. Insbesondere wird untersucht, wie stark der systematische Fehler bei Verkleinerung des Wellenleiterdurchmessers zunimmt. Da die unzureichende Kopplung zwischen Laser und Wellenleiter durch Fehljustage der Komponenten eine der wesentlichen Verlustmechanismen innerhalb optischer Übertragungsstrecken ist, wird die Einfallsrichtung der Achse des Gaußstrahls sowohl lateral verschoben als auch verdreht. Das maßgebliche Vergleichskriterium ist die Koppeleffizienz, definiert durch das Verhältnis der im Wellenleiter geführten Leistung zur insgesamt eingekoppelten Leistung. Neben der zirkularsymmetrischen Faser werden zusätzlich Möglichkeiten zur Modellierung rechteckförmiger Wellenleiter aufgezeigt und es werden die Unterschiede zum planaren Schichtwellenleiter veranschaulicht. Dieser letztge-

---

<sup>1</sup>Die Begriffe *Strahlenoptik* und *geometrische Optik* werden im Folgenden synonym verwendet.

nannte Punkt ist von besonderer Bedeutung, da sich der zweite Schwerpunkt dieser Arbeit auf die Wellenausbreitung im planaren Schichtwellenleiter bezieht. Anhand der Beschreibung des transienten Leistungsflusses im geraden Schichtwellenleiter werden noch einmal die grundlegenden Unterschiede zwischen Wellen- und Strahlenoptik hervorgehoben. Den Abschluss bildet die Modellierung zirkular gekrümmter Schichtwellenleiter.

## 1.2. Einordnung und Durchführung

Die Modellierung optischer Wellenleiter ist seit langem Gegenstand der Wissenschaft. Unmittelbar nach den grundlegenden theoretischen Arbeiten von Maxwell sowie der experimentellen Bestätigung der Existenz elektromagnetischer Wellen von Hertz begannen auch die Arbeiten zur Beschreibung der Führung elektromagnetischer Wellen. Bereits im Jahr 1910 veröffentlichten Hondros und Debye eine erste fundamentale theoretische Arbeit zur Modellierung optischer Wellenleiter, die damals noch als dielektrische Drähte bezeichnet wurden [26]. Resultierten die ersten Arbeiten noch im Wesentlichen aus wissenschaftlicher Neugier, gewann das Forschungsfeld mit der Entwicklung des Lasers im Jahr 1960 eine neue Motivation. Entsprechend groß ist die Anzahl wissenschaftlicher Arbeiten, die in den 1960ern und frühen 1970ern Jahren entstand. Eine hervorragende Zusammenfassung der theoretischen Arbeiten dieser Zeit bieten die Lehrbücher von Marcuse [46, 47].

In den folgenden Jahren bis zur Gegenwart wurde die Theorie optischer Wellenleiter durch zahlreiche Veröffentlichungen stetig vervollständigt. Einen Überblick verschafft [13]. Das Auffinden der Moden optischer Wellenleiter mit beliebiger Querschnittsgeometrie stellt dabei einen wichtigen und zentralen Schwerpunkt dar. Waren es zunächst analytische Näherungsverfahren, die im Fokus des Interesses standen, so sind es mittlerweile die zahlreichen numerischen Verfahren, die durch die ständig wachsende Effizienz moderner Computersysteme immer leistungsfähiger werden. Zusammenfassende Darstellungen befinden sich z.B. in [10, 71]. Der Großteil der vorhandenen Literatur bezieht sich jedoch auf optische Singlemode-Wellenleiter, denen aufgrund ihres großen Bandbreitenlängenprodukts zu Recht große Beachtung geschenkt wird. Die Theorie der Multimode-Wellenleiter ist aufwändiger, da aufgrund der größeren Geometrie die Anzahl der Eigenlösungen der Wellengleichung – die Moden – größer ist und es durch Wellenleiterinhomogenitäten zur Überkopplung zwischen den Moden kommen kann. Auch numerische Verfahren stoßen hier aktuell noch an ihre Grenzen, wenn das Verhältnis aus Geometrie und Wellenlänge zu groß ist. Daher bedient man sich auch heute noch der seit langem bekannten und akzeptierten strahlenoptischen Näherungsverfahren. Hinsichtlich der Anwendung auf optische Wellenleiter empfehlen sich hier die Arbeiten von Snyder, zusammengefasst in [60].

Leider gibt es bislang nur wenige theoretische Arbeiten zur Verifikation strahlenoptischer Verfahren. In der vorhandenen Literatur werden in der Regel lediglich einzelne, physikalisch isolierte Effekte verifiziert. Insbesondere mit Blick auf die Theorie optischer Wellenleiter gibt es wenige Arbeiten, die zumindest einzelne Komponenten ganzheitlich untersuchen. Eine eher seltene Ausnahme ist z.B. [37]. Offensichtlich gab es bislang nicht den Bedarf einer theoretischen Verifikation. Möglicherweise, weil in der multimodalen Faseroptik auch effektiv experimentell gearbeitet werden kann. Die mit einer experimentellen Charakte-

risierung elektrooptischer Leiterplatten verbundene Fertigung von Prototypen ist jedoch sehr kostspielig, da ohne vorherige Simulation mit einem großem Ausschuss zu rechnen ist. Zur Validierung der eingesetzten Simulationswerkzeuge, die im Wesentlichen auf strahlenoptischen Methoden aufbauen, wird daher in dieser Arbeit ein Vergleich zwischen Wellen- und Strahlenoptik anhand zweier Schwerpunkte angestrebt. Im ersten Teil wird die Einkopplung optischer Wellen in den Wellenleiter untersucht. Der zweite Teil beschreibt die Wellenausbreitung im geraden und gekrümmten Wellenleiter. Da aufgrund des Mangels an exakten Lösungen auf idealisierte Bauelemente zurückgegriffen werden muss, können nicht alle in der Praxis auftretenden Fehlerquellen berücksichtigt werden. Beispielsweise bleiben Störstellen wie raue Oberflächen und intrinsische Materialverluste unberücksichtigt.

Die Arbeit gliedert sich im Weiteren wie folgt:

## **Kapitel 2. Grundlagen**

Insbesondere werden die Felder des Gaußstrahls für eine spätere Fehlerabschätzung hergeleitet. Darüber hinaus werden die Grundlagen zur Modellierung längshomogener Wellenleiter und die grundlegenden strahlenoptischen Modellierungsansätze präsentiert.

## **Kapitel 3. Die Moden dielektrischer Stufenindex-Wellenleiter**

Nach einer Beschreibung der grundlegenden Eigenschaften der Modenspektren dielektrischer Wellenleiter werden im Folgenden die Modenspektren der in dieser Arbeit verwendeten Wellenleiter charakterisiert. Neben planaren Wellenleitern werden insbesondere kreiszylindrische Fasern und rechteckförmige Wellenleiter behandelt.

## **Kapitel 4. Koppelleffizienz Gaußscher Eingangsstrahlen**

Die Modellierung konzentriert sich auf die monochromatische Einkopplung in die kreiszylindrische Faser. Da sich die spätere Analyse der Wellenausbreitung im Wesentlichen auf planare Wellenleiter beschränkt, wird der Unterschied zur planaren Approximation diskutiert. Zusätzlich werden Näherungslösungen für rechteckförmige Wellenleiter ausgewertet.

## **Kapitel 5. Wellenausbreitung in dielektrischen Wellenleitern**

Zunächst steht das transiente Übertragungsverhalten des längshomogenen Schichtwellenleiters für den Fall einer zeitperiodischen Anregung im Vordergrund. Daraus wird eine Übertragungsfunktion für das Basisband abgeleitet. Die Simulation zirkular gekrümmter Schichtwellenleiter konzentriert sich auf die Berechnung der Verluste durch Abstrahlung. Aus dem kontinuierlichen Modenspektrum des gekrümmten Wellenleiters werden dazu quasigeführte Moden isoliert.

Die Kapitel 4 und 5 sind so aufgebaut, dass zunächst die wellentheoretischen Referenzergebnisse dargestellt und analysiert werden. Anschließend wird der Vergleich zur geometrischen Optik gezogen. Die mathematische Beschreibung der Modenspektren und der abgeleiteten Größen ist mit Absicht detailliert dargestellt, obwohl die Felder dielektrischer Felder seit langem Gegenstand der Wissenschaft sind und dementsprechend umfangreiche Literatur existiert. Es soll jedoch zum Einen der nicht unerhebliche Implementierungsaufwand ver-

deutlicht werden und des Weiteren auch die Reproduktion der Ergebnisse dieser Arbeit vereinfacht werden. Für das Verständnis der verwendeten Notation empfiehlt sich neben dem Studium des einleitenden Kapitels 2.1 auch die Durchsicht der verwendeten Symbole und Konventionen auf Seite 175. Aufgrund der langen Historie der Theorie optischer Wellenleiter ist eine umfassende Literaturangabe auch im Rahmen einer Dissertation fast unmöglich. Die Literaturangaben verstehen sich daher in der Regel als Beispiel und wo möglich wird zusammenfassende Literatur angegeben. Durch eine Internetrecherche lässt sich leicht ergänzende und aufbauende Literatur finden.

Die Algorithmen dieser Arbeit wurden in der Programmiersprache C++ implementiert und mit verschiedenen Compilern auf mehreren Unix-artigen Systemen getestet. Viele der erforderlichen speziellen Funktionen, insbesondere Besselfunktionen, wurden der GNU Scientific Library (GSL) entnommen. Ebenso wurden Routinen zur Fouriertransformation und zur Nullstellensuche aus der GSL verwendet. Die Arbeiten im Kapitel 5.2.2 erfordern Implementierungen komplexwertiger Besselfunktionen, die aktuell noch in keiner verfügbaren Bibliothek vorhanden sind. Hier sei auf die Arbeiten von Temme [68] sowie auf [1, 3] verwiesen. Für Funktionen der linearen Algebra sollten stets optimierte Bibliotheken verwendet werden, wie sie alle großen Prozessorhersteller anbieten. Zur Herleitung und Verifikation einzelner Teilaufgaben wurde das Computeralgebrasystem Maple<sup>®</sup> verwendet.



## 2. Grundlagen

Dieses Kapitel behandelt die wesentlichen Grundgleichungen dieser Arbeit, die zwar in der Literatur hinreichend bekannt sind, aber für das Verständnis dieser Arbeit wichtig sind. Insbesondere wird auch die verwendete Notation vorgestellt und es werden einige wichtige Annahmen hinsichtlich der Geometrie- und Materialparameter erörtert. Das erste Unterkapitel 2.1 beschreibt die Grundgleichungen des makroskopischen Elektromagnetismus. Kapitel 2.2 beschreibt die Wellenausbreitung im homogenen Raum auf Basis ebener Wellen und leitet einen Ausdruck für das Feld des Gaußstrahls her. In Kapitel 2.3 wird die Notation zur Beschreibung der Wellenausbreitung entlang abschnittsweise längshomogener Wellenleiterstrukturen vorgestellt. Abschließend wird in Kapitel 2.4 das Konzept der Strahlenoptik vorgestellt.

### 2.1. Grundzüge der Maxwellschen Theorie

Die Grundgleichungen der klassischen Elektrodynamik sind die Maxwellschen Gleichungen. Sie lassen sich durch ein System gekoppelter Differenzialgleichungen beschreiben:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \varrho(\vec{r}, t), \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.1d)$$

Darin ist  $\vec{D}$  die elektrische Flussdichte,  $\vec{B}$  die magnetische Flussdichte,  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\vec{H}$  die magnetische Feldstärke,  $\varrho$  die elektrische Raumladungsdichte und  $\vec{J}$  die elektrische Stromdichte. Alle Größen können sowohl Funktionen des Ortes  $\vec{r}$  als auch der Zeit  $t$  sein. Die Flussdichten sowie die Stromdichte sind über die Materialbeziehungen mit den Feldstärken verknüpft. Da die in dieser Arbeit betrachteten Materialien sämtlich lineare und isotrope Eigenschaften besitzen und ferner als zeitinvariant, ruhend und dispersionsfrei angenommen werden, lassen sich die Materialbeziehungen wie folgt angeben:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \mu_r(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}, t), \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = \kappa(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (2.2)$$

Darin sind  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  die Permittivität und Permeabilität des Vakuums,  $\varepsilon_r$  und  $\mu_r$  die relative Permittivität und Permeabilität, sowie  $\kappa$  die spezifische elektrische Leitfähigkeit.

Von besonderer Bedeutung ist die Annahme zeitharmonischer Felder. Allgemein lässt sich der Übergang in den Frequenzbereich durch die Fouriertransformation beschreiben, was im monochromatischen Fall in einer Schreibweise mit Dirac-Funktionen resultiert. Diese wird in der Elektrotechnik in der Regel jedoch nicht dargestellt und es werden nur positive Frequenzen  $\omega$  explizit betrachtet. Der Übergang in den Zeitbereich erfolgt nach Multiplikation mit  $\exp(j\omega t)$  durch Realteilbildung. Die Maxwell'schen Gleichungen (2.1) nehmen im Frequenzbereich die folgende Form an:

$$\nabla \cdot \underline{\vec{D}}(\vec{r}, \omega) = \underline{\varrho}(\vec{r}, \omega), \quad (2.3a)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) = 0, \quad (2.3b)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) = -j\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}, \omega), \quad (2.3c)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{H}}(\vec{r}, \omega) = \underline{\vec{J}}(\vec{r}, \omega) + j\omega \underline{\vec{D}}(\vec{r}, \omega). \quad (2.3d)$$

Darin werden die unterstrichenen Größen als komplexe Amplituden bezeichnet.

Die Materialgleichungen (2.2) lauten nun

$$\underline{\vec{D}}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\vec{r}) \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega), \quad \underline{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) = \mu_0 \mu_r(\vec{r}) \underline{\vec{H}}(\vec{r}, \omega), \quad \underline{\vec{J}}(\vec{r}, \omega) = \kappa(\vec{r}) \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega). \quad (2.4)$$

Unter Verwendung dieser Materialbeziehungen sowie der Einführung einer komplexen Permittivität

$$\underline{\varepsilon}_r(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_r(\vec{r}) - j \frac{\kappa(\vec{r})}{\omega \varepsilon_0} \quad (2.5)$$

lassen sich aus den beiden Rotationsgleichungen (2.3c) und (2.3d) die Differenzialgleichungen

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r(\vec{r})} \nabla \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) \right) = k_0^2(\omega) \underline{\varepsilon}_r(\vec{r}, \omega) \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega), \quad (2.6a)$$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\underline{\varepsilon}_r(\vec{r}, \omega)} \nabla \times \underline{\vec{H}}(\vec{r}, \omega) \right) = k_0^2(\omega) \mu_r(\vec{r}) \underline{\vec{H}}(\vec{r}, \omega) \quad (2.6b)$$

ableiten. Darin ist

$$k_0(\omega) = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (2.7)$$

die Wellenzahl des Vakuums. Eine Wellenzahl  $k > k_0$  ohne oder mit anderem Index kennzeichnet einen Raum mit spezifischen Materialeigenschaften:

$$k = k_0 \sqrt{\underline{\varepsilon}_r}. \quad (2.8)$$

Die in der optischen Verbindungstechnik eingesetzten Materialien können als unmagnetisch angesehen werden. Für die relative Permeabilität gilt dann  $\mu_r(\vec{r}) = 1$ . Intrinsische Materialverluste können zwar wie oben beschrieben durch eine komplexe Permittivität berücksichtigt werden, in der Regel beruhen die Verlustmechanismen im optischen Wellenleiter jedoch nicht auf elektrischen Leitungsverlusten. Je nach eingesetztem Material resultiert ein frequenzabhängiges Dämpfungsverhalten, das sich im Allgemeinen nicht durch (2.5) beschreiben lässt. Im Folgenden wird angenommen, dass die benötigte Bandbreite im Frequenzbereich hinreichend klein ist und Verluste vernachlässigt werden können ( $\kappa = 0$ ). Die Annahme einer reellen frequenzunabhängigen Permittivität ist dann gerechtfertigt.



Anstelle der relativen Permittivität  $\varepsilon_r$  wird häufig auch die Brechzahl

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \quad (2.9)$$

verwendet. Des Weiteren wird angenommen, dass die Materialeigenschaften abschnittsweise konstant und die Räume ladungsfrei sind,  $\varrho(\vec{r}, \omega) = 0$ . Für diese abschnittsweise homogenen Räume vereinfachen sich die Gleichungen (2.6) zu

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, \omega) + k^2 \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0, \quad (2.10a)$$

$$\Delta \vec{H}(\vec{r}, \omega) + k^2 \vec{H}(\vec{r}, \omega) = 0. \quad (2.10b)$$

Diese homogenen Wellendifferenzialgleichungen entsprechen in ihrer Form einer Helmholtz-Differenzialgleichung. An den Raumbereichsgrenzen müssen die Feldgrößen Randbedingungen erfüllen. Besitzt die Grenzfläche  $g$  die Flächennormale  $\vec{e}_g$ , lauten diese Randbedingungen

$$\vec{e}_g \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \Big|_g = 0, \quad (2.11a)$$

$$\vec{e}_g \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \Big|_g = \vec{K}, \quad (2.11b)$$

$$\vec{e}_g \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \Big|_g = \sigma, \quad (2.11c)$$

$$\vec{e}_g \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \Big|_g = 0. \quad (2.11d)$$

Die Indices 1 und 2 kennzeichnen die unterschiedlichen Raumbereiche, wobei  $\vec{e}_g$  in den Raum 1 hinein zeigt. Bei den Größen  $\vec{K}$  und  $\sigma$  handelt es sich um die komplexen Amplituden einer Flächenstromdichte und einer Flächenladungsdichte. In allen folgenden Betrachtungen dieser Arbeit sind beide gleich Null. Die Gleichungen (2.11) lassen sich äquivalent auch für die zugehörigen zeitabhängigen Größen formulieren.

Die Energiebilanz elektromagnetischer Felder wird durch den Poyntingschen Satz beschrieben. In seiner differenziellen komplexen Schreibweise lautet er für den quellenfreien Raum

$$-\nabla \cdot \vec{S} = \bar{p}_v + j2\omega(\bar{w}_m - \bar{w}_e). \quad (2.12)$$

Darin ist

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \quad (2.13)$$

der komplexe Poyntingsche Vektor,

$$\bar{p}_v = \frac{1}{2} \vec{J} \cdot \vec{E}^* \quad (2.14)$$

die zeitlich gemittelte elektrische Verlustleistungsdichte und

$$\bar{w}_m = \frac{1}{4} \vec{B} \cdot \vec{H}^*, \quad \bar{w}_e = \frac{1}{4} \vec{D} \cdot \vec{E}^* \quad (2.15)$$

sind die zeitlich gemittelten Energiedichten des magnetischen und des elektrischen Feldes. Durch Integration von (2.12) über ein Volumen  $v$  ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Gauß ein Ausdruck für die zeitlich gemittelten elektrischen Verluste im Volumen  $v$ :

$$\bar{P}_v = \frac{1}{2} \int_v \vec{J} \cdot \vec{E}^* dv = \Re \left\{ \oint_{\partial v} \vec{S} \cdot d\vec{a} \right\}. \quad (2.16)$$

Wird der Poyntingvektor anstatt über eine geschlossene Fläche nur über eine offene Teilfläche integriert, lässt sich der zeitlich gemittelte Leistungsfluss durch die Teilfläche berechnen. Dieser Fall ist von besonderem Interesse, wenn der Energietransport elektromagnetischer Wellen beschrieben werden soll.

Für das Studium der Maxwellschen Theorie existiert ein großes Literaturangebot. Als einführendes Lehrbuch sei exemplarisch [38] genannt. Für das vertiefende Studium empfiehlt sich u.a. [28].

## 2.2. Wellenausbreitung im homogenen Raum

Bei gegebener Quelle ist die Beschreibung der Wellenausbreitung im ansonsten homogenen Raum von fundamentaler Bedeutung um die grundlegenden Eigenschaften der Quelle hinsichtlich ihres Nah- und Fernfeldes zu beschreiben. Im Kontext dieser Arbeit sind diese Quellen Halbleiterlaser. Da in der Regel keine direkte analytische Lösung der zu erfüllenden inhomogenen Differenzialgleichung<sup>1</sup> existiert, unterscheidet die Feldtheorie zwei grundlegende Lösungsansätze. Der erste Ansatz setzt voraus, dass die Elementarlösung für eine korrespondierende Punktquelle bekannt ist. Die Gesamtlösung ergibt sich als Integral über diese Elementarlösung, welche als Greensche Funktion bezeichnet wird. Der zweite Ansatz kann als Black-Box-Ansatz bezeichnet werden. Die Quelle sei so geartet, dass auf einer Hüllfläche, die die Quellverteilung umschließt, sinnvolle Annahmen über die Feldstärke gemacht werden können. Auf Basis dieser Annahmen können Integralgleichungsmethoden zur Bestimmung des resultierenden Feldes außerhalb der Quellverteilung angewendet werden.

Ist die Quelle wie im Fall des Lasers so geartet, dass die Wellenausbreitung nur in eine bestimmte Richtung erfolgt, reicht es aus, die Feldverteilung in einer Ebene zu kennen. Der Normalenvektor dieser Ebene verläuft typischerweise parallel zur Achse der Wellenausbreitung. In dem so bestimmten resultierenden Halbraum lässt sich das Feld durch ein Spektrum ebener Wellen darstellen. Mathematisch wird dies durch eine zweidimensionale räumliche Fouriertransformation beschrieben. Zur Vertiefung empfiehlt sich [21].

### 2.2.1. Spektren ebener Wellen

Die ebene Welle kann als Eigenlösung der Helmholtzgleichungen (2.10) aufgefasst werden. Ihre Phasenfronten bilden Ebenen im Raum, und somit füllen die Felder ebenfalls den gesamten Raum aus. Die einzelne ebene Welle ist daher keine physikalische Feldlösung. Erst die Überlagerung in Form eines gewichteten Spektrums ermöglicht die Darstellung einer physikalischen Feldlösung.

Das elektrische Feld einer in Richtung  $\vec{e}_t$  polarisierten ebenen Welle ist gegeben durch

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{e}_t \underline{E}_0 \exp\left(-j\vec{k} \cdot \vec{r}\right) \quad (2.17)$$

---

<sup>1</sup>Die inhomogene Wellendifferenzialgleichung lässt sich aus (2.6) ableiten. Anstelle der komplexen Permittivität sollte die Stromdichte jedoch explizit berücksichtigt werden.

$$\text{mit} \quad \vec{e}_t \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{und} \quad |\vec{k}|^2 = k^2. \quad (2.18)$$

Darin ist  $\underline{E}_0$  die konstante Amplitude der Welle. Die zugehörige magnetische Feldstärke berechnet sich gemäß (2.3c) zu

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{-1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \left( \vec{e}_t \underline{E}_0 \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}) \right) \\ &= \frac{1}{Z} \vec{e}_k \times \vec{E}(\vec{r}, \omega) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\text{mit} \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \vec{e}_k \cdot \vec{k} = k. \quad (2.20)$$

Die Größe  $Z$  wird als Wellenwiderstand bezeichnet.

Die Superposition aller ebenen Wellen mit unterschiedlichem Wellenvektor  $\vec{k}$  stellt einen vollständigen Lösungsraum der Helmholtzgleichungen (2.10) für den homogenen Halbraum dar.

Betrachtet wird nun ein quellenfreier Halbraum  $z > 0$ , auf dessen Rand bei  $z = 0$  die elektrische Feldstärke bekannt ist. Wird die  $z$ -Komponente des Wellenvektors durch die verbleibenden kartesischen Komponenten substituiert,

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}, \quad (2.21)$$

lässt sich die elektrische Feldstärke im Raum  $z > 0$  durch ein Integral der Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{T}(k_x, k_y) \exp\left(-j\left(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z\right)\right) dk_x dk_y \quad (2.22)$$

darstellen [21]. Die räumliche Spektralfunktion  $\vec{T}$  lässt sich aus der Randwertvorgabe in  $z = 0$  bestimmen:

$$\vec{T}(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(x, y, 0) \exp(j(k_x x + k_y y)) dx dy. \quad (2.23)$$

Gleichung (2.23) kann komponentenweise gelöst werden. Es reicht aus zwei Komponenten der elektrischen Feldstärke in der Grenzschicht  $z = 0$  zu kennen. Die verbleibende Komponente kann dann mit Hilfe der Divergenzbedingung  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  bestimmt werden [21]. Hilfreich kann auch die Verwendung Hertzscher Potentiale sein, siehe A.1.1.

Die Integraldarstellung (2.22) entspricht in ihrer Form einem räumlichen Fourierintegral. Da  $k_z$  auch imaginäre Werte annehmen kann, berücksichtigt (2.22) auch evaneszente Feldanteile. Diese sind physikalisch jedoch in der Regel bedeutungslos, da sie nicht zum Leistungs-transport beitragen.

### 2.2.2. Das Spektrum des Maxwellschen Gaußstrahls

Optische Wellen, deren Felder sich um eine bestimmte Achse der Wellenausbreitung fokussieren, sind von besonderem Interesse in der Feldtheorie. In diesem Zusammenhang wird oft der Begriff Strahl verwendet, der aber etwas die Wellennatur der Felder verschleiert. Bemerkenswert ist, dass keine geschlossene analytische Lösung der Maxwellschen Gleichungen existiert, die einen solchen Strahl beschreibt. Im Folgenden wird daher eine Spektraldarstellung eines Strahls betrachtet, dessen transversales Feldprofil gaußförmig ist. Dieser Strahl wird in dieser Arbeit zur Abgrenzung zum bekannten Paraxialen Gaußstrahl als Maxwellscher Gaußstrahl bezeichnet.

Die transversale elektrische Feldstärke in  $z = 0$  wird gaußförmig angesetzt:

$$\vec{E}_t(x, y, 0) = \vec{e}_t \underline{E}_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right). \quad (2.24)$$

Darin ist  $w_0$  der Radius in der Ebene  $z = 0$ , bei dem die Feldgrößen auf das  $e^{-1}$ -fache abgeklungen sind. Dieser Wert wird auch als Strahlradius bezeichnet. Die Strahlachse entspricht der  $z$ -Achse. Die transversalen Komponenten der Spektralfunktion der Feldstärke (2.24) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{T}_t(k_x, k_y) &= \vec{e}_t \underline{E}_0 \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \exp(j(k_x x + k_y y)) dx dy \\ &= \vec{e}_t \underline{E}_0 \frac{w_0^2}{4\pi} \exp\left(-\frac{w_0^2(k_x^2 + k_y^2)}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Mit (2.25) und der Beziehung (2.22) lassen sich die transversalen Komponenten der elektrischen Feldstärke im Raum  $z > 0$  bestimmen. Im Anhang A.1.1 wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie sich die verbleibenden Feldkomponenten mit Hilfe Hertzscher Potenziale aus den Maxwellschen Gleichungen ableiten lassen. Zur kompakten Darstellung des Ergebnisses wird der vektorielle Operator

$$\begin{aligned} \vec{L}\left(\vec{F}(k_x, k_y)\right) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(k_x, k_y) \left(\vec{e}_t \cdot \vec{T}_t(k_x, k_y)\right) \\ &\quad \exp\left(-j\left(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z\right)\right) dk_x dk_y \end{aligned} \quad (2.26)$$

eingeführt. Die Feldstärken ergeben sich damit wie folgt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{L}\left(\vec{e}_t - \frac{(k_x[\vec{e}_x \cdot \vec{e}_t] + k_y[\vec{e}_y \cdot \vec{e}_t])}{k_z} \vec{e}_z\right), \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{L}\left(\frac{1}{\omega\mu} \left(-\left(\frac{k_x k_y}{k_z} [\vec{e}_x \cdot \vec{e}_t] + \frac{(k_y^2 + k_z^2)}{k_z} [\vec{e}_y \cdot \vec{e}_t]\right) \vec{e}_x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{k_x^2 + k_z^2}{k_z} [\vec{e}_x \cdot \vec{e}_t] + \frac{k_x k_y}{k_z} [\vec{e}_y \cdot \vec{e}_t]\right) \vec{e}_y + (k_x [\vec{e}_y \cdot \vec{e}_t] - k_y [\vec{e}_x \cdot \vec{e}_t]) \vec{e}_z\right)\right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Eine Schwierigkeit in der Entwicklung elektromagnetischer Felder in Integrale über ebene Wellen liegt darin, dass die nötigen Integrationen in der Regel nicht explizit analytisch durchführbar sind. Durch Ausnutzen der Rotationssymmetrie kann jedoch das Doppelintegral in ein Einfachintegral umgewandelt werden. Mit

$$k_x = \tilde{\varrho} \cos \tilde{\varphi} \quad \text{und} \quad k_y = \tilde{\varrho} \sin \tilde{\varphi} \quad (2.29)$$

ergibt sich für die jeweils transversale Komponente der elektrischen Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{e}_t E_0 \frac{w_0^2}{4\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{w_0^2 \tilde{\varrho}^2}{4}\right) \\ \int_0^{2\pi} \exp\left(-j\left(x\tilde{\varrho} \cos \tilde{\varphi} + y\tilde{\varrho} \sin \tilde{\varphi} + \sqrt{k^2 - \tilde{\varrho}^2} z\right)\right) \tilde{\varrho} d\tilde{\varphi} d\tilde{\varrho}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Die Integration über  $\tilde{\varphi}$  lässt sich nun mit Hilfe von (A.95) durchführen und man erhält

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{e}_t E_0 \frac{w_0^2}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{w_0^2 \tilde{\varrho}^2}{4}\right) J_0(\tilde{\varrho} \sqrt{x^2 + y^2}) \exp\left(-j\sqrt{k^2 - \tilde{\varrho}^2} z\right) \tilde{\varrho} d\tilde{\varrho}. \quad (2.31)$$

Für die longitudinale Komponente folgt nach einigen Umformungen mit (A.96) - (A.99):

$$\begin{aligned} E_z(\vec{r}) = \frac{w_0^2}{2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}_t}{\sqrt{x^2 + y^2}} j E_0 \\ \int_0^\infty \exp\left(-\frac{w_0^2 \tilde{\varrho}^2}{4}\right) J_1(\tilde{\varrho} \sqrt{x^2 + y^2}) \exp\left(-j\sqrt{k^2 - \tilde{\varrho}^2} z\right) \frac{\tilde{\varrho}^2}{\sqrt{k^2 - \tilde{\varrho}^2}} d\tilde{\varrho}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Darin sind  $J_0$  und  $J_1$  gewöhnliche Besselfunktionen 1. Art.

### 2.2.3. Der Paraxiale Gaußstrahl

Mit den Ausdrücken (2.27) und (2.28) liegt eine Feldlösung vor, die einem optischen Strahl mit gaußförmigen Profil entspricht. Das Arbeiten mit dieser Feldlösung ist jedoch aufwändig, da für jeden Punkt, in dem das Feld bestimmt werden soll, ein uneigentliches Integral gelöst werden muss. Divergiert der Strahl nicht allzu stark, konzentrieren sich also die Felder auf einen bestimmten Bereich um die Strahlachse, kann mit Hilfe einer Approximation in Form einer Taylor-Entwicklung von  $k_z$  um  $k_x = k_y = 0$  eine wesentliche Vereinfachung herbeigeführt werden. Diese lautet

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \approx k - \frac{1}{2k} (k_x^2 + k_y^2), \quad (2.33)$$

womit sich die Integration analytisch durchführen lässt:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_t(\vec{r}) &= \vec{e}_t E_0 \frac{w_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}w_0^2(k_x^2 + k_y^2)\right) \exp\left(-j\left(k_x x + k_y y + \left(k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}\right)z\right)\right) dk_x dk_y \\
&= \vec{e}_t E_0 \frac{w_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}(w_0^2 - j\frac{2z}{k})(k_x^2 + k_y^2)\right) \exp(-j(k_x x + k_y y + kz)) dk_x dk_y \\
&= \vec{e}_t E_0 \frac{w_0^2}{w_0^2 - j\frac{2z}{k}} \exp\left(\frac{-x^2 - y^2}{w_0^2 - j\frac{2z}{k}}\right) \exp(-jkz).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Substituiert man zunächst willkürlich  $kw_0^2 = 2z_0$  erhält man die folgende Darstellung:

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{e}_t E_0 u(\vec{r}) \exp(-jkz) \quad \text{mit} \quad u(\vec{r}) = \frac{z_0}{z_0 - jz} \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2(z + jz_0)}\right). \tag{2.35}$$

Es soll nun eine erste Abschätzung des durch Einführung der paraxialen Näherung hervorgerufenen Fehlers erfolgen. Die Feldlösung (2.35) muss der Helmholtzgleichung genügen. Daraus folgt, dass die Funktion  $u(\vec{r})$  die Gleichung

$$\Delta_t u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2jk \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

erfüllen muss, mit  $\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Die Überprüfung zeigt jedoch, dass der Term  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  vernachlässigt wird. Die Funktion  $u(\vec{r})$  genügt also der Gleichung

$$\Delta_t u - 2jk \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{2.36}$$

welche auch als paraxiale Helmholtzgleichung bezeichnet wird. Die paraxiale Näherung setzt also voraus, dass

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \ll k |u| \tag{2.37}$$

gilt. Die Änderung der Einhüllenden  $u$  mit der Koordinate  $z$  ist klein gegenüber der Änderung des Gesamtfeldes.

Die Feldlösung (2.35) wird in der Literatur als fundamentaler Gaußstrahl bezeichnet<sup>2</sup>. Die verbleibenden Feldkomponenten lassen sich aus den Maxwell'schen Gleichungen bestimmen, nun aber unter Berücksichtigung der paraxialen Näherung (2.37). Auf dieser Basis ergeben sich die Feldgrößen zu

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \left( \vec{e}_t - \frac{(\vec{e}_t \cdot \vec{r}_t)}{z + jz_0} \vec{e}_z \right) u(\vec{r}) \exp(-jkz), \tag{2.38a}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{E_0}{Z} \left( \vec{e}_z \times \vec{e}_t + \frac{\vec{r}_t \times \vec{e}_t}{z + jz_0} \right) u(\vec{r}) \exp(-jkz). \tag{2.38b}$$

---

<sup>2</sup>Neben dem fundamentalen Gaußstrahl existieren auch Gaußstrahlen höherer Ordnung, siehe u.a. [4, 34].

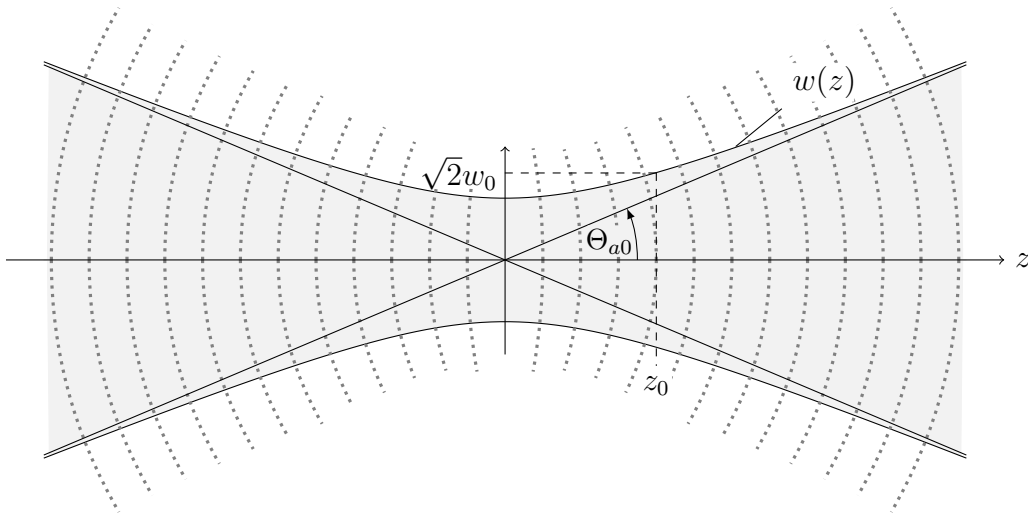


Abbildung 2.1.: Strahlradius und Phasenfronten des Gaußstrahls.

Um die weiteren Eigenschaften des Strahls zu verdeutlichen, empfiehlt es sich, die Einhüllende  $u$  getrennt nach Betrag und Phase zu betrachten. Es folgt

$$u(\vec{r}) = \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right) \exp(j \arctan z/z_0) \quad (2.39)$$

mit

$$w^2(z) = \frac{2}{kz_0} (z^2 + z_0^2), \quad w_0 = w(0) = \sqrt{\frac{2z_0}{k}} \quad \text{und} \quad R(z) = \frac{z^2 + z_0^2}{z}. \quad (2.40)$$

Das Betragsquadrat von  $\underline{E}_0$  ist proportional zur im zeitlichen Mittel in  $z$ -Richtung transportierten Leistung:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \frac{|\underline{E}_0|^2}{Z} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} |u(x,y,z)|^2 dx dy = \frac{\pi}{4} w_0^2 \frac{|\underline{E}_0|^2}{Z}. \quad (2.41)$$

Der Strahlradius, bei dem der Betrag von  $u$  auf das  $e^{-1}$ -fache gesunken ist, ist gleich  $w(z)$ . Etwa 86% der Leistung wird innerhalb dieses Strahlradius geführt. In einem Kreis mit Radius  $1,5 w(z)$  wird bereits 99% der Leistung transportiert. In den folgenden Betrachtungen dieser Arbeit wird oft auch der Strahldurchmesser

$$b = 2w \quad (2.42)$$

verwendet. Abbildung 2.1 zeigt den Strahlradius als Funktion der  $z$ -Koordinate und zusätzlich die Phasenfronten, welche auf der  $z$ -Achse den Krümmungsradius  $R(z)$  besitzen.

Im Fernfeld gilt mit der Bedingung  $z \gg z_0$

$$u(\vec{r}) \approx j \frac{z_0}{z} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{(\frac{w_0}{z_0} z)^2}\right) \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2z}\right). \quad (2.43)$$

Der Strahlradius wächst nun näherungsweise linear an mit

$$w(z) = \sqrt{\frac{2z_0}{kz_0^2}} z = \frac{w_0}{z_0} z, \quad (2.44)$$

und der Gaußstrahl divergiert unter einem Winkel

$$\Theta_{a0} = \arctan\left(\frac{w_0}{z_0}\right). \quad (2.45)$$

Die Ausbreitungseigenschaften des Gaußstrahls werden gänzlich durch einen Parameter festgelegt. D.h. der minimale Strahlradius  $w_0$  und der Divergenzwinkel  $\Theta_{a0}$  können nicht unabhängig voneinander eingestellt werden. Ein kleiner Strahlradius korrespondiert mit einem großen Divergenzwinkel. Für einen nicht divergierenden Strahl müsste  $z_0 \rightarrow \infty$  gelten. Der Strahlradius wird dann ebenfalls unendlich groß und ein Vergleich mit (2.35) zeigt, dass die Felder beim Übergang  $z_0 \rightarrow \infty$  einer ebenen Welle entsprechen. Die Größe  $z_0$  wird als Rayleigh-Länge bezeichnet.

Zu klären ist noch die Frage, welche Werte  $z_0$  annehmen darf, um der paraxialen Näherung (2.37) zu genügen. Aus (2.37) folgt

$$\left| \frac{1}{z + jz_0} - j \frac{k(x^2 + y^2)}{2(z + jz_0)^2} \right| \ll k. \quad (2.46)$$

Daraus abgeleitet folgt weiter

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2 + z_0^2} \ll 1 \quad (2.47)$$

und

$$\frac{1}{kz_0} = \frac{\lambda^2}{2\pi^2 w_0^2} \ll 1. \quad (2.48)$$

Der minimale Strahldurchmesser  $w_0$  muss groß sein gegenüber der Wellenlänge  $\lambda$ . Da die Werte  $x^2 + y^2$  in der Größenordnung von  $w^2$  liegen, und  $w^2 = w_0^2[1 + (z^2/z_0^2)]$  gilt, impliziert (2.47) dass  $w_0^2/z_0^2 \ll 1$  gelten muss. Somit sind die Forderungen (2.48) und (2.47) identisch. Aus (2.47) lässt sich auch folgern, dass innerhalb des Strahlradius die transversalen Feldkomponenten gegenüber der  $z$ -Komponente überwiegen. Eine quantitative Beurteilung des aus der paraxialen Näherung resultierenden Fehlers für die Parametersätze dieser Arbeit befindet sich in Kapitel 4.3.1.

Da in dieser Arbeit auch planare Strukturen betrachtet werden, in denen die Abhängigkeit von einer transversalen Koordinate verschwindet, muss für diesen Fall die Feldlösung (2.38) leicht modifiziert werden. Das Ergebnis befindet sich im Anhang A.1.2.

## 2.3. Geführte Wellen an linearen Leiterstrukturen

Die Theorie geführter Wellen umfasst eine breite Klasse verschiedener Anwendungen. Angefangen im unteren Frequenzbereich mit der klassischen Paralleldrahtleitung, über Koaxialleiter, Hohlleiter und Mikrostreifenleitungen im mittleren bis höherem Frequenzbereich



gelangt man schließlich in den Bereich optischer Wellenleiter, welche im hohen Terahertzbereich arbeiten. Im Gegensatz zu den zuvor genannten Wellenleitern erfolgt die Führung der Wellen in optischen Wellenleitern nicht mehr durch metallische Leiter, sondern durch Totalreflexion an dielektrischen Grenzflächen. Ein weiterer gravierender Unterschied ist, dass optische Wellenleiter sowohl als Singlemode- als auch Multimode-Wellenleiter betrieben werden. Im letzten Fall wird die mögliche Übertragungsdistanz durch die Modendispersion beschränkt, zugunsten geringerer technologischer Anforderungen. Gegenüber der konventionellen elektrischen Technologie sind diese Anforderungen jedoch immer noch hoch.

In der Modellierung wellenführender Strukturen wird zwischen offenen und geschlossenen Anordnungen unterschieden. Koaxialleiter und Hohlleiter bilden von sich aus geschlossene Anordnungen, deren Felder bedingt durch den (näherungsweise) perfekt leitenden Außenleiter nicht in den Außenraum eindringen. Dahingegen bilden optische Wellenleiter ohne leitende Abschirmung eine offene Struktur, deren Felder in der Theorie den gesamten Raum ausfüllen. Die folgende Beschreibung gilt unabhängig vom Wellenleitertyp.

### 2.3.1. Theorie normaler Moden

Die Theorie normaler Moden beschreibt die Wellenausbreitung entlang längshomogener Wellenleiter. Das heißt, die Geometrie ändert sich im Definitionsgebiet nicht entlang einer geradlinigen Koordinate, hier der  $z$ -Koordinate. Es empfiehlt sich, die vektoriellen Feldgrößen in eine longitudinal geradlinige Komponente und eine transversale Komponente zu zerlegen:

$$\vec{E} = \underline{\vec{E}}_t + \underline{\vec{E}}_z, \quad \vec{H} = \underline{\vec{H}}_t + \underline{\vec{H}}_z. \quad (2.49)$$

Ein Mode ist eine Eigenlösung der Wellendifferenzialgleichung der Form

$$\underline{\vec{E}}_\nu(\vec{r}) = C_\nu \underline{\vec{E}}_\nu(\vec{r}_t) \exp(-jk_{z\nu}z), \quad (2.50a)$$

$$\underline{\vec{H}}_\nu(\vec{r}) = C_\nu \underline{\vec{H}}_\nu(\vec{r}_t) \exp(-jk_{z\nu}z), \quad (2.50b)$$

mit dem transversalen Ortsvektor  $\vec{r}_t = \vec{r} - \vec{e}_z z$ . Die Gleichungen (2.50) beschreiben das elektrische und magnetische Feld des  $\nu$ -ten Mode mit  $\nu \in \mathbb{N}$ . Darin ist  $C_\nu$  die Amplitude des Modes,  $\underline{\vec{E}}_\nu$  und  $\underline{\vec{H}}_\nu$  sind die transversalen Modenfunktionen und  $k_{z\nu}$  ist die Ausbreitungskonstante des Modes.

Zur Lösung der Wellendifferenzialgleichungen (2.10) bietet sich ein Ansatz mit Hilfe der longitudinalen Komponenten der Felder an. Die transversalen Feldkomponenten ergeben sich dann zu

$$\underline{\vec{E}}_{t\nu} = \frac{1}{j(k_i^2 - k_{z\nu}^2)} \left( \omega\mu_0 \nabla_t \times \underline{\vec{H}}_{z\nu} + k_{z\nu} \nabla_t \underline{E}_{z\nu} \right), \quad (2.51a)$$

$$\underline{\vec{H}}_{t\nu} = \frac{1}{-j(k_i^2 - k_{z\nu}^2)} \left( \omega\varepsilon_0 \varepsilon_{ri} \nabla_t \times \underline{\vec{E}}_{z\nu} - k_{z\nu} \nabla_t \underline{H}_{z\nu} \right), \quad (2.51b)$$

mit dem transversalen Nabla-Operator  $\nabla_t := \nabla - \vec{e}_z \partial/\partial z$ . Der Index  $i$  kennzeichnet abschnittsweise unterschiedliche Raumbereiche. Für die transversalen Modenfunktionen ver-

bleiben partielle Differenzialgleichungen in den transversalen Koordinaten  $\vec{r}_t$

$$\Delta_t \underline{\mathcal{E}}_{z\nu}(\vec{r}_t) + (k_i^2 - k_{z\nu}^2) \underline{\mathcal{E}}_{z\nu}(\vec{r}_t) = 0, \quad (2.52a)$$

$$\Delta_t \underline{\mathcal{H}}_{z\nu}(\vec{r}_t) + (k_i^2 - k_{z\nu}^2) \underline{\mathcal{H}}_{z\nu}(\vec{r}_t) = 0, \quad (2.52b)$$

mit dem transversalen Laplace-Operator  $\Delta_t := \Delta - \partial^2/\partial z^2$ . Für die Wellenzahl  $k_{z\nu}$  lässt sich daraus unmittelbar die Dispersionsbeziehung

$$k_{z\nu} = \sqrt{k_i^2 \mp k_{t\nu}^2} \quad \text{mit} \quad \mp k_{t\nu}^2 = \frac{\Delta_t \underline{\mathcal{E}}_{z\nu}(\vec{r}_t, \omega)}{\underline{\mathcal{E}}_{z\nu}(\vec{r}_t, \omega)} = \frac{\Delta_t \underline{\mathcal{H}}_{z\nu}(\vec{r}_t, \omega)}{\underline{\mathcal{H}}_{z\nu}(\vec{r}_t, \omega)} \quad (2.53)$$

ableiten. Das Vorzeichen vor  $k_{t\nu}^2$  ergibt sich aus den angesetzten Lösungsfunktionen, welche sich wiederum mit Blick auf das zu lösende Randwertproblem ergeben.

Im Fall verlustloser Materialien ist  $\varepsilon_r$  positiv reell. Das ermöglicht i.d.R. die Wahl rein reeller oder rein imaginärer Wellenzahlen  $k_{z\nu}$ . Aus (2.51) kann dann gefolgert werden

$$\text{für rein reelle } k_{z\nu} : \quad \begin{cases} \underline{\mathcal{E}}_{t\nu}, \underline{\mathcal{H}}_{t\nu} & \text{rein reell,} \\ \underline{\mathcal{E}}_{z\nu}, \underline{\mathcal{H}}_{z\nu} & \text{rein imaginär,} \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\text{für rein imaginäre } k_{z\nu} : \quad \begin{cases} \underline{\mathcal{E}}_{t\nu}, \underline{\mathcal{E}}_{z\nu} & \text{rein reell,} \\ \underline{\mathcal{H}}_{t\nu}, \underline{\mathcal{H}}_{z\nu} & \text{rein imaginär.} \end{cases} \quad (2.55)$$

Es muss jedoch beachtet werden, dass im Fall entarteter Moden Linearkombinationen existieren können, die diese Bedingungen verletzen<sup>3</sup>.

In positiver  $z$ -Richtung fortschreitende Moden sind durch  $\Re\{k_z\} \geq 0$  und  $\Im\{k_z\} \leq 0$  gegeben. Jeder vorwärts laufende Mode ( $\nu$ ) kann durch Spiegelung an der Ebene  $z = 0$  in einen rückwärts laufenden Mode ( $-\nu$ ) transformiert werden:

$$\text{Mode } (+\nu) : \quad \begin{Bmatrix} \underline{\vec{E}}_\nu(\vec{r}) \\ \underline{\vec{H}}_\nu(\vec{r}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +\underline{\vec{\mathcal{E}}}_{t\nu}(\vec{r}_t) + \vec{e}_z \underline{\mathcal{E}}_{z\nu}(\vec{r}_t) \\ +\underline{\vec{\mathcal{H}}}_{t\nu}(\vec{r}_t) + \vec{e}_z \underline{\mathcal{H}}_{z\nu}(\vec{r}_t) \end{Bmatrix} \exp(-jk_{z\nu}z), \quad (2.56a)$$

$$\text{Mode } (-\nu) : \quad \begin{Bmatrix} \underline{\vec{E}}_{-\nu}(\vec{r}) \\ \underline{\vec{H}}_{-\nu}(\vec{r}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +\underline{\vec{\mathcal{E}}}_{t\nu}(\vec{r}_t) - \vec{e}_z \underline{\mathcal{E}}_{z\nu}(\vec{r}_t) \\ -\underline{\vec{\mathcal{H}}}_{t\nu}(\vec{r}_t) + \vec{e}_z \underline{\mathcal{H}}_{z\nu}(\vec{r}_t) \end{Bmatrix} \exp(+jk_{z\nu}z). \quad (2.56b)$$

Moden mit  $\Re\{k_z\} = 0$  werden als evaneszente Moden bezeichnet, da ihre Feldgrößen in Ausbreitungsrichtung evaneszent abklingen. Die allgemeine Lösung der Maxwellschen Gleichungen lässt sich durch Überlagerung aller vorwärts und rückwärts laufenden Moden angeben:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\vec{E}}(\vec{r}) \\ \underline{\vec{H}}(\vec{r}) \end{Bmatrix} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \left[ C_\nu \exp(-jk_{z\nu}z) \begin{Bmatrix} \underline{\vec{\mathcal{E}}}_\nu(\vec{r}_t) \\ \underline{\vec{\mathcal{H}}}_\nu(\vec{r}_t) \end{Bmatrix} + C_{-\nu} \exp(jk_{z\nu}z) \begin{Bmatrix} \underline{\vec{\mathcal{E}}}_{-\nu}(\vec{r}_t) \\ \underline{\vec{\mathcal{H}}}_{-\nu}(\vec{r}_t) \end{Bmatrix} \right]. \quad (2.57)$$

Im Fall eines kontinuierlichen Modenspektrums geht die Summation in eine Integration über. Mit Hilfe von (2.56) lässt sich das Feld auch ausschließlich durch die Komponenten der vorwärts laufenden Moden beschreiben. Dazu werden modale Spannungen

$$V_\nu(z) = C_\nu \exp(-jk_{z\nu}z) + C_{-\nu} \exp(jk_{z\nu}z) \quad (2.58)$$

<sup>3</sup>Entartete Moden besitzen identische Ausbreitungskonstanten.

und Ströme

$$I_\nu(z) = C_\nu \exp(-jk_{z\nu}z) - C_{-\nu} \exp(jk_{z\nu}z) \quad (2.59)$$

eingeführt. Man erhält so

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} V_\nu(z) \vec{\mathcal{E}}_{t\nu}(\vec{r}_t), \quad \underline{E}_z(\vec{r}) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} I_\nu(z) \underline{\mathcal{E}}_{z\nu}(\vec{r}_t), \quad (2.60)$$

$$\vec{H}_t(\vec{r}) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} I_\nu(z) \vec{\mathcal{H}}_{t\nu}(\vec{r}_t), \quad \underline{H}_z(\vec{r}) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} V_\nu(z) \underline{\mathcal{H}}_{z\nu}(\vec{r}_t). \quad (2.61)$$

### Orthogonalität und Leistung

Moden unterschiedlicher Ordnung sind orthogonal zueinander, d.h. in einer beliebigen Fläche  $z = z_c = \text{konstant}$  gilt

$$\int_{z=z_c} \left( \vec{\mathcal{E}}_\nu(\vec{r}_t) \times \vec{\mathcal{H}}_\mu(\vec{r}_t) \right) \cdot \vec{e}_z \, da = \tilde{Q}_\nu \delta_{\mu\nu}. \quad (2.62)$$

Darin ist  $\tilde{Q}_\nu$  eine zunächst beliebige Funktion von  $\nu$  und  $\delta_{\nu\mu}$  entspricht dem Kronecker-Delta. Im Fall entarteter Moden ist darauf zu achten, dass die Indices  $\nu$  und  $\mu \neq \nu$  tatsächlich orthogonale Moden kennzeichnen<sup>4</sup>. Gleichung (2.62) ist auch im Fall verlustbehafteter Materialien gültig. Im Fall verlustfreier Materialien gilt darüberhinaus

$$\int_{z=z_c} \left( \vec{\mathcal{E}}_\nu(\vec{r}_t) \times \vec{\mathcal{H}}_\mu^*(\vec{r}_t) \right) \cdot \vec{e}_z \, da = Q_\nu \delta_{\mu\nu}. \quad (2.63)$$

Die Größe  $\bar{P}_\nu = \frac{Q_\nu}{2}$  ist im Fall propagierender Moden positiv reell und entspricht der im jeweiligen Mode transportierten Leistung, falls für die Amplitude  $|C_\nu| = 1$  gilt. Die Leistung  $\bar{P}$ , die insgesamt im zeitlichen Mittel durch die Fläche  $z = z_c$  fließt, berechnet sich im verlustfreien Fall zu

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \int_{z=z_c} \left( \vec{E} \times \vec{H}^* \right) \cdot \vec{e}_z \, da \right\} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \sum_{\nu} V_\nu(z_c) I_\nu^*(z_c) Q_\nu \right\}. \quad (2.64)$$

Setzt man in diesen Ausdruck die modalen Spannungen (2.58) und Ströme (2.59) ein, erkennt man, dass der Leistungsfluss wie erwartet unabhängig von  $z$  ist:

$$\bar{P} = \sum_{\substack{\nu, \\ \text{prop.} \\ \text{Moden}}} \bar{P}_\nu (|C_\nu|^2 - |C_{-\nu}|^2) + \Re \left\{ \sum_{\substack{\nu, \\ \text{evan.} \\ \text{Moden}}} \bar{P}_\nu (C_\nu^* C_{-\nu} - C_\nu C_{-\nu}^*) \right\}. \quad (2.65)$$

<sup>4</sup>Falls nur eine numerische gitterbasierte Feldlösung vorliegt, muss das Modenspektrum ggf. orthogonalisiert werden.

Interessant ist, dass auch evaneszente Moden einen Leistungsfluss erzwingen können. Dieser resultiert jedoch aus der Überlagerung eines  $(\nu)$  Modes und des korrespondierenden  $(-\nu)$  Modes.

Sind die Feldlösungen so geartet, dass nur die magnetische Feldstärke (TE-Moden) oder nur die elektrische Feldstärke (TM-Moden) eine longitudinale Komponente besitzt, vereinfachen sich die Orthogonalitätsbeziehungen. Im Fall reiner TE-Moden vereinfacht sich (2.63) zu

$$\frac{k_{z\nu}}{\omega\mu} \int_{z=z_c} \vec{\mathcal{E}}_\nu(\vec{r}_t) \cdot \vec{\mathcal{E}}_\mu^*(\vec{r}_t) da = Q_\nu \delta_{\mu\nu}. \quad (2.66)$$

Im Fall reiner TM-Moden ergibt sich

$$\frac{k_{z\nu}}{\omega} \int_{z=z_c} \frac{1}{\varepsilon} \vec{\mathcal{H}}_\nu(\vec{r}_t) \cdot \vec{\mathcal{H}}_\mu^*(\vec{r}_t) da = Q_\nu \delta_{\mu\nu}. \quad (2.67)$$

### 2.3.2. Abrupte Wellenleiterübergänge – Die Methode des Mode-Matching

Die Modellierung der Wellenausbreitung entlang Wellenleiterinhomogenitäten ist in der Regel sehr aufwändig und oft analytisch nicht möglich. Wird die senkrechte Schnittstelle zweier abschnittsweise längshomogener Wellenleiter betrachtet, lässt sich zumindest eine theoretisch exakte analytische Lösung formulieren. Da in diesem Verfahren die beiden unterschiedlichen Modensysteme des links- und rechtsseitigen Wellenleiters gemäß der zu erfüllenden Randbedingungen aneinander angepasst werden müssen, wird oft von der Methode des Mode-Matching gesprochen.

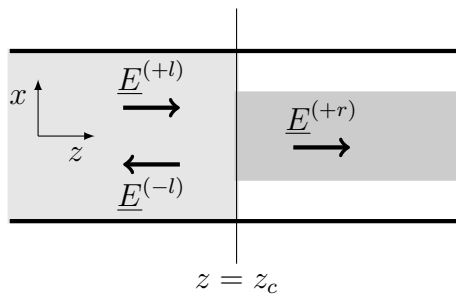


Abbildung 2.2.: Schnittstelle zweier abschnittsweise homogener Wellenleiter.

Abbildung 2.2 zeigt das Prinzip der senkrechten Schnittstelle zweier im Rahmen der gemachten Annahmen beliebiger Wellenleiter. Voraussetzung für die folgende Beschreibung ist jedoch ein jeweils diskretes Modenspektrum. Sofern es sich um geschlossene Wellenleiter handelt wird angenommen, dass der Querschnitt des umgebenden leitenden Schirms links- und rechtsseitig identisch ist. Zur Vertiefung und für den Fall unterschiedlicher Querschnittsabmessungen empfiehlt sich [15].

In der Grenzschrift  $z = z_c$  müssen die Randbedingungen (2.11) erfüllt sein. In der Notation (2.60) und (2.61) gilt dann

$$\sum_{\nu \in \mathbb{N}} V_{\nu}^{(l)}(z_c) \underline{\tilde{\mathcal{E}}}_{t\nu}^{(l)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} V_{\nu}^{(r)}(z_c) \underline{\tilde{\mathcal{E}}}_{t\nu}^{(r)} \quad (2.68a)$$

$$\sum_{\nu \in \mathbb{N}} I_{\nu}^{(l)}(z_c) \underline{\tilde{\mathcal{H}}}_{t\nu}^{(l)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} I_{\nu}^{(r)}(z_c) \underline{\tilde{\mathcal{H}}}_{t\nu}^{(r)}. \quad (2.68b)$$

Die Indices  $(l)$  und  $(r)$  dienen der Unterscheidung der links- und rechtsseitigen Feldlösung. Zur weiteren Rechnung wird das Skalarprodukt (2.63), welches die Modenorthogonalität beschreibt, erweitert, so dass auch Produkte von Modenfunktionen unterschiedlicher Wellenleiter zugelassen sind:

$$\int_{z=z_c} \left( \underline{\tilde{\mathcal{E}}}_{t\nu}^{(\hat{s})} \times \{ \underline{\tilde{\mathcal{H}}}_{t\mu}^{(\tilde{s})} \}^* \right) \cdot \vec{e}_z \, da = Q_{\mu\nu}^{(\hat{s}\tilde{s})} \quad \text{mit} \quad \hat{s}, \tilde{s} \in \{l, r\} \quad (2.69)$$

$$\text{und} \quad Q_{\mu\nu}^{(\hat{s}\tilde{s})} = Q_{\nu}^{(\hat{s})} \delta_{\mu\nu}. \quad (2.70)$$

Mit Hilfe von (2.69) lässt sich die Gleichung (2.68a) nach Bilden des Skalarprodukts mit der (rechtsseitigen) Modenfunktion  $\underline{\tilde{\mathcal{H}}}_{t\mu}^{(r)}$  wie folgt schreiben:

$$\sum_{\nu \in \mathbb{N}} V_{\nu}^{(l)} Q_{\mu\nu}^{(lr)} = V_{\mu}^{(r)} Q_{\mu}^{(r)}. \quad (2.71)$$

Analog ergibt sich für die komplex konjugierte Gleichung (2.68b) nach Bilden des Skalarprodukts mit der (linksseitigen) Modenfunktion  $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}_{t\mu}^{(l)}$

$$\{ I_{\mu}^{(l)} \}^* Q_{\mu}^{(l)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \{ I_{\nu}^{(r)} \}^* Q_{\nu\mu}^{(lr)}. \quad (2.72)$$

Die Gleichungen (2.68) beschreiben das Feldproblem natürlich nur korrekt, wenn links- und rechtsseitig das jeweils vollständige Modenspektrum angesetzt wird. In der Praxis reicht es jedoch in der Regel aus, sich auf eine hinreichend große endliche Anzahl Moden zu beschränken. Dabei kann sich die Anzahl links- und rechtsseitiger Moden unterscheiden.

Aus den Gleichungen (2.71) und (2.72) lassen sich dann die folgenden Matrixgleichungen ableiten:

$$\mathbf{Q}^{(lr)} \mathbf{v}^{(l)} = \mathbf{Q}^{(r)} \mathbf{v}^{(r)} \quad (2.73a)$$

$$\mathbf{Q}^{(l)*} \mathbf{i}^{(l)} = \mathbf{Q}^{(lr)H} \mathbf{i}^{(r)}. \quad (2.73b)$$

Die Vektoren  $\mathbf{v}^{(l)}$  und  $\mathbf{v}^{(r)}$  sowie  $\mathbf{i}^{(l)}$  und  $\mathbf{i}^{(r)}$  beinhalten die modalen Spannungen  $V_{\mu}^{(l)}$  und  $V_{\mu}^{(r)}$  bzw. die modalen Ströme  $I_{\mu}^{(l)}$  und  $I_{\mu}^{(r)}$ . Die Matrizen  $\mathbf{Q}^{(l)}$  und  $\mathbf{Q}^{(r)}$  haben Diagonalfarm mit den Einträgen  $Q_{\mu}^{(l)}$  bzw.  $Q_{\mu}^{(r)}$ . Dagegen ist die Überlappmatrix  $\mathbf{Q}^{(lr)}$  voll besetzt mit den Einträgen  $Q_{\mu\nu}^{(lr)}$ .

### Alternative Vorgehensweise

Alternativ kann auch jeweils das Skalarprodukt (2.69) der Gleichung (2.68a) mit einer (linksseitigen) Modenfunktion  $\vec{\mathcal{H}}_{t\mu}^{(l)}$  sowie der komplex konjugierten Gleichung (2.68b) mit der (rechtsseitigen) Modenfunktion  $\vec{\mathcal{E}}_{t\mu}^{(r)}$  gebildet werden. Es resultieren die äquivalenten Matrizengleichungen

$$\mathbf{Q}^{(l)} \mathbf{v}^{(l)} = \mathbf{Q}^{(rl)} \mathbf{v}^{(r)} \quad (2.74a)$$

$$\mathbf{Q}^{(rl)H} \mathbf{i}^{(l)} = \mathbf{Q}^{(r)*} \mathbf{i}^{(r)}. \quad (2.74b)$$

### Äquivalenz der unterschiedlichen Vorgehensweisen

Die Äquivalenz der unterschiedlichen Vorgehensweisen lässt sich zeigen, wenn die Reihenentwicklungen von  $\vec{\mathcal{E}}_{t\mu}^{(l)}$  und  $\vec{\mathcal{H}}_{t\mu}^{(r)}$  in Terme gegeben durch  $\vec{\mathcal{E}}_{t\nu}^{(r)}$  und  $\vec{\mathcal{H}}_{t\nu}^{(l)}$  herangezogen werden [15]:

$$\vec{\mathcal{E}}_{t\mu}^{(l)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \frac{Q_{\nu\mu}^{(lr)}}{Q_{\nu}^{(r)}} \vec{\mathcal{E}}_{t\nu}^{(r)}, \quad (2.75)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{t\mu}^{(r)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{Q_{\mu\nu}^{(lr)}}{Q_{\nu}^{(l)}} \right\}^* \vec{\mathcal{H}}_{t\nu}^{(l)}. \quad (2.76)$$

Unter Ausnutzung von (2.69) lassen sich daraus entsprechende Reihenentwicklungen für  $Q_{\mu}^{(l)}$  und  $Q_{\mu}^{(r)}$  ableiten:

$$Q_{\xi\mu}^{(ll)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \frac{Q_{\nu\mu}^{(lr)}}{Q_{\nu}^{(r)}} Q_{\xi\nu}^{(rl)}, \quad (2.77)$$

$$Q_{\mu\xi}^{(r)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \frac{Q_{\mu\nu}^{(lr)}}{Q_{\nu}^{(l)}} Q_{\nu\xi}^{(rl)}. \quad (2.78)$$

Überführt man diese Beziehungen in eine Matrixschreibweise, folgt

$$\mathbf{Q}^{(l)} = \mathbf{Q}^{(rl)} \mathbf{Q}^{(r)-1} \mathbf{Q}^{(lr)} \quad (2.79),$$

$$\mathbf{Q}^{(r)} = \mathbf{Q}^{(rl)T} \mathbf{Q}^{(l)-1} \mathbf{Q}^{(lr)T}. \quad (2.80)$$

Die Multiplikation von (2.73a) mit  $\mathbf{Q}^{(rl)} \mathbf{Q}^{(r)-1}$  und Anwendung von (2.79) resultiert in (2.74a). (2.73a) ist somit linear abhängig von (2.74a). Analog lässt sich mit (2.80) auch zeigen, dass (2.73b) linear abhängig von (2.74b) ist.

### Leistungskonservierung

Die linksseitig in  $z$ -Richtung transportierte Leistung ist gemäß (2.64) gleich

$$\overline{P}^{(l)} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{N}} V_{\nu}^{(l)} Q_{\nu}^{(l)} \{I_{\nu}^{(l)}\}^* \right\}. \quad (2.81)$$

Durch Übergang zur Matrixschreibweise lässt sich mit Hilfe von (2.73) zeigen, dass die gezeigten Vorgehensweisen die Leistung konservieren:

$$\begin{aligned}
 \bar{P}^{(l)} &= \frac{1}{2} \Re \left\{ \mathbf{v}^{(l)T} \mathbf{Q}^{(l)} \{\mathbf{i}^{(l)}\}^* \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \Re \left\{ \mathbf{v}^{(l)T} \mathbf{Q}^{(lr)T} \{\mathbf{i}^{(r)}\}^* \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \Re \left\{ \mathbf{v}^{(r)T} \mathbf{Q}^{(r)T} \{\mathbf{i}^{(r)}\}^* \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \Re \left\{ \mathbf{v}^{(r)T} \mathbf{Q}^{(r)} \{\mathbf{i}^{(r)}\}^* \right\} = \bar{P}^{(r)}.
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Die Eigenschaft der Leistungskonservierung ist hilfreich hinsichtlich der Implementierung eines Lösungsalgorithmus. Sie garantiert natürlich keinesfalls die korrekte Lösung des Feldproblems, da sie unabhängig von der Anzahl berücksichtigter Moden ist.

## Einkopplung

In der Regel gilt es Probleme zu beschreiben, bei denen die auf die Grenzschnitt einfallenden Wellen bekannt sind. Mit Hilfe der Beziehungen (2.58) und (2.59) folgt aus (2.73) unmittelbar

$$\mathbf{Q}^{(lr)} (\mathbf{c}^{(+l)} + \mathbf{c}^{(-l)}) = \mathbf{Q}^{(r)} (\mathbf{c}^{(+r)} + \mathbf{c}^{(-r)}), \tag{2.83a}$$

$$\mathbf{Q}^{(l)*} (\mathbf{c}^{(+l)} - \mathbf{c}^{(-l)}) = \mathbf{Q}^{(lr)H} (\mathbf{c}^{(+r)} - \mathbf{c}^{(-r)}). \tag{2.83b}$$

Einträge der Vektoren  $\mathbf{c}^{(\pm l)}$  und  $\mathbf{c}^{(\pm r)}$  sind die Amplituden  $C_\nu$ . Das Vorzeichen im Index der Amplitudenvektoren kennzeichnet darin die Ausbreitungsrichtung der Teilwellen.

Nimmt man an, es fallen nur linksseitig Wellen ein, es gilt also

$$\mathbf{c}^{(-r)} = \mathbf{0}, \tag{2.84}$$

lässt sich direkt ein Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Amplituden der reflektierten und transmittierten Wellen angeben:

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^{(r)} & -\mathbf{Q}^{(lr)} \\ \hline \mathbf{Q}^{(lr)H} & \mathbf{Q}^{(l)*} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{(+r)} \\ \mathbf{c}^{(-l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{(lr)} \mathbf{c}^{(+l)} \\ \mathbf{Q}^{(l)*} \mathbf{c}^{(+l)} \end{pmatrix}. \tag{2.85}$$

Völlig analog lässt sich aus (2.74) das äquivalente Gleichungssystem

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^{(rl)} & -\mathbf{Q}^{(l)} \\ \hline \mathbf{Q}^{(r)*} & \mathbf{Q}^{(rl)H} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{(+r)} \\ \mathbf{c}^{(-l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{(l)} \mathbf{c}^{(+l)} \\ \mathbf{Q}^{(rl)H} \mathbf{c}^{(+l)} \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

ableiten. Die so gewonnenen Gleichungssysteme (2.85) und (2.86) sind in der Regel numerisch gut konditioniert. Des Weiteren sind die Systemmatrizen reellwertig, sofern evaneszente oder komplexe Moden vernachlässigt werden können.

Es sei angemerkt, dass sich die Dimension der Gleichungssysteme aufgrund der Äquivalenz der Vorgehensweisen reduzieren lässt. Dazu empfiehlt sich an Stelle von (2.69) die Verwendung eines Skalarprodukts ohne komplexe Konjugation der magnetischen Feldstärke. Auf diesem Weg lässt sich dann entweder  $\mathbf{c}^{(+r)}$  oder  $\mathbf{c}^{(-l)}$  durch die jeweils andere Größe substituieren. Die numerische Kondition des resultierenden Gleichungssystems ist jedoch zu Gunsten eines geringeren Speicherbedarfs etwas schlechter.

## 2.4. Strahlenoptische Modellierungsansätze

Der Übergang von der Wellenoptik zur Strahlenoptik ist dann sinnvoll, wenn Beugungs- und Interferenzerscheinungen nicht vorhanden oder vernachlässigbar sind. Die Wellen verhalten sich dann lokal wie ebene Wellen. Es wird daher auch oft von *lokal ebenen Wellen* gesprochen. Die Strahltrajektorien verlaufen senkrecht zu den Phasenfronten der Wellen. Umfassende Darstellungen zur Vertiefung befinden sich insbesondere in [7, 46, 60].

### 2.4.1. Mathematische Grundlagen

Eine notwendige Bedingung zur Anwendbarkeit strahlenoptischer Verfahren ist an die Wellenlänge zu stellen. Diese muss klein gegenüber der kleinsten geometrischen Abmessung sein. Mathematisch exakt ableiten lässt sich die Theorie der Strahlenoptik als Grenzfall einer verschwindenden Wellenlänge. Als anschauliches Beispiel kann der Gaußstrahl herangezogen werden, denn mit  $\omega \rightarrow \infty$  gehen sowohl der minimale Strahlradius  $w_0$  als auch der Divergenzwinkel  $\Theta_{a0}$  gegen Null. Im Folgenden werden nur die wesentlichen Grundgleichungen kurz wiederholt.

Es wird angenommen, die Feldlösungen nehmen die Form

$$\underline{\Psi}(\vec{r}) = \underline{\Psi}_0(\vec{r}) \exp(-jk_0 \underline{S}(\vec{r})) \quad (2.87)$$

an (vgl. ebene Welle (2.17)). Die Funktionen  $\underline{\Psi}_0(\vec{r})$  und  $\underline{S}(\vec{r})$  sind nicht mehr abhängig von der Wellenzahl  $k_0$  und verändern sich nur langsam mit Ausbreitung der Welle. Unter dieser Annahme sind Flächen konstanter Phase gegeben durch

$$\underline{S}(\vec{r}) = \text{konstant}. \quad (2.88)$$

Der Normalenvektor dieser Fläche zeigt in Richtung des Strahls und ist gegeben durch

$$\vec{e}_s(\vec{r}) = \frac{\nabla \underline{S}(\vec{r})}{n(\vec{r})}. \quad (2.89)$$

Die Normierung mit der Brechzahl  $n(\vec{r})$  ergibt sich aus der Eikonalgleichung

$$(\nabla \underline{S}(\vec{r}))^2 = n^2(\vec{r}), \quad (2.90)$$

welcher die Funktion  $\underline{S}(\vec{r})$  genügen muss. Ein Strahl verläuft parallel zu  $\vec{e}_s(\vec{r})$ . Falls  $\vec{r}(s)$  eine Parametrisierung des Strahlpfads darstellt, gilt

$$\vec{e}_s(\vec{r}) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \quad (2.91)$$



und nach einigen Umformungen folgt schließlich die Strahlgleichung

$$\frac{d}{ds} \left( n(\vec{r}(s)) \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right) = \nabla n(\vec{r}(s)). \quad (2.92)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist im Allgemeinen sehr aufwändig. Für abschnittsweise homogene Gebiete ist jedoch sofort ersichtlich, dass die Strahlen innerhalb der Gebiete geradlinig verlaufen.

Aus (2.89) und (2.91) lassen sich direkt die Konturintegrale

$$\oint \nabla \underline{S} \cdot d\vec{l} = \oint n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.93)$$

ableiten. Auf Basis dieser geschlossenen Konturintegrale lassen sich das Fermatsche Prinzip und das Gesetz von Snellius herleiten [46]. Die Berechnung des Energietransports kann nicht allein auf strahlenoptischer Basis erfolgen, sondern erfordert die Berücksichtigung der Wellennatur des Lichts. Da sich der optische Strahl lokal wie eine ebene Welle verhält und zudem ausschließlich abschnittsweise homogene Räume betrachtet werden, kann auch die Beschreibung des Energietransports aus der Theorie der ebenen Welle abgeleitet werden. Der Strahl verläuft in Richtung des Wellenvektors dieser lokal ebenen Welle und damit auch in Richtung des Poyntingvektors. Abrupte Materialänderungen lassen sich daher auch strahlenoptisch mit Hilfe der Fresnel-Koeffizienten berücksichtigen, welche im Folgenden vorgestellt werden. Zuvor muss jedoch noch einmal betont werden, dass, sobald die lokale Feldbeschreibung nicht näherungsweise einer ebenen Welle entspricht, eine strahlenoptische Modellierung zu einem erhöhten Fehler führen kann.

## 2.4.2. Dielektrische Grenzflächen

Die Annahme einer unendlich ausgedehnten ebenen Grenzfläche besitzt selbstverständlich nur Modellcharakter, ist aber unter der Annahme einer räumlich beschränkten Feldlösung sinnvoll. Aus demselben Grund lassen sich leicht gekrümmte Grenzflächen durch einen ebenen Halbraum approximieren. Erst bei hinreichend starken Krümmungen sind Erweiterungen notwendig.

### Der ebene Halbraum

Das Verhalten ebener Wellen am dielektrischen Halbraum ist von fundamentaler Bedeutung in der Optik. Relativ problemlos lassen sich die bekannten Gesetze der Optik ableiten, allen voran das Gesetz von Snellius. Die Bedeutung dieser Gesetze ist jedoch weitreichend. So lassen sich zum Beispiel die Moden des Schichtwellenleiters vollständig durch sie beschreiben, vgl. Kapitel 3.1.3.

Betrachtet wird der schräge Einfall einer ebenen Welle auf einen Halbraum mit unterschiedlicher Permittivität ( $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$ ) gemäß Abbildung 2.3 mit  $\varrho_K \rightarrow \infty$ . Es wird zunächst ein

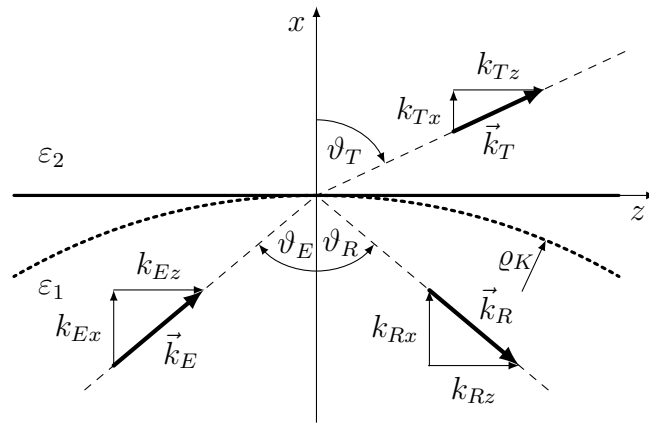


Abbildung 2.3.: Darstellung der Wellenvektoren beim schrägen Einfall einer ebenen Welle auf einen Halbraum unterschiedlicher Permittivität. Gestrichelt dargestellt ist eine konkav gekrümmte Grenzschicht.

polarisationsunabhängiger Ansatz formuliert, in dem  $\underline{\Psi}$  die  $y$ -Komponente des elektrischen Feldes (TE-Polarisation) oder des magnetischen Feldes (TM-Polarisation) kennzeichnet:

$$\underline{\Psi}_{Ey} = \underline{\Psi}_0 e^{-j\vec{k}_E \vec{r}}, \quad \vec{k}_E = k_1 \vec{e}_E = k_{Ex} \vec{e}_x + k_{Ez} \vec{e}_z, \quad (2.94)$$

$$\underline{\Psi}_{Ry} = r_F \underline{\Psi}_0 e^{-j\vec{k}_R \vec{r}}, \quad \vec{k}_R = k_1 \vec{e}_R = k_{Rx} \vec{e}_x + k_{Rz} \vec{e}_z, \quad (2.95)$$

$$\underline{\Psi}_{Ty} = t_F \underline{\Psi}_0 e^{-j\vec{k}_T \vec{r}}, \quad \vec{k}_T = k_2 \vec{e}_T = k_{Tx} \vec{e}_x + k_{Tz} \vec{e}_z. \quad (2.96)$$

Darin sind  $k_1$  und  $k_2$  die spezifischen Wellenzahlen der Teilräume. Die Größen  $t_F$  und  $r_F$  sind der Transmissions- bzw. Reflexionsfaktor. Zusammen werden sie auch als Fresnel-Koeffizienten bezeichnet. Durch Auswerten der Stetigkeitsbedingungen in der Grenzschicht  $x = 0$  lassen sich leicht die bekannten Bedingungen „Reflexionswinkel gleich Einfallswinkel“

$$\vartheta_R = \vartheta_E \quad (2.97)$$

sowie das Gesetz von Snellius

$$n_1 \sin \vartheta_E = n_2 \sin \vartheta_T \quad (2.98)$$

ableiten. Die Fresnel-Koeffizienten lassen sich ebenfalls direkt aus den Stetigkeitsbedingungen ableiten. Sie sind jedoch abhängig von der Polarisation. Neben den Fresnel-Koeffizienten werden im Folgenden auch die zugehörigen Leistungsfaktoren  $R_F$  und  $T_F$  angegeben, die sich durch abschnittsweise Integration der  $x$ -Komponente des Poyntingvektors ergeben.

TE-Polarisation ( $\Psi = E$ ):

$$t_F^{TE} = \frac{2k_{Ex}}{k_{Ex} + k_{Tx}}, \quad T_F^{TE} = \frac{k_{Tx}}{k_{Ex}} |t_F^{TE}|^2, \quad (2.99)$$

$$r_F^{TE} = \frac{k_{Ex} - k_{Tx}}{k_{Ex} + k_{Tx}}, \quad R_F^{TE} = |r_F^{TE}|^2. \quad (2.100)$$

TM-Polarisation ( $\Psi = H$ ):

$$t_F^{TM} = \frac{2\varepsilon_2 k_{Ex}}{\varepsilon_2 k_{Ex} + \varepsilon_1 k_{Tx}}, \quad T_F^{TM} = \frac{\varepsilon_1 k_{Tx}}{\varepsilon_2 k_{Ex}} |t_F^{TM}|^2, \quad (2.101)$$

$$r_F^{TM} = \frac{\varepsilon_2 k_{Ex} - \varepsilon_1 k_{Tx}}{\varepsilon_2 k_{Ex} + \varepsilon_1 k_{Tx}}, \quad R_F^{TM} = |r_F^{TM}|^2. \quad (2.102)$$

Von besonderem Interesse ist der Fall der Totalreflexion. Er tritt ein, falls

$$n_1 \sin \vartheta_E \geq n_2 \quad (2.103)$$

gilt. Es folgt direkt

$$k_{Tx} = k_2 \cos(\vartheta_T) = k_2 \sqrt{1 - \sin^2(\vartheta_T)} = -jk_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2(\vartheta_E) - 1}. \quad (2.104)$$

Die Phasenkonstante  $k_{Tx}$  ist rein imaginär und für  $x > 0$  findet keine Wellenausbreitung in  $x$ -Richtung statt. Stattdessen klingen die Feldgrößen evaneszent ab. Der Betrag des Reflexionsfaktors ist wie erwartet gleich eins. Es gilt:

TE:

$$r_F^{TE} = \exp \left( j2 \arctan \frac{|k_{Tx}|}{k_{Ex}} \right), \quad (2.105)$$

TM:

$$r_F^{TM} = \exp \left( j2 \arctan \frac{\varepsilon_1 |k_{Tx}|}{\varepsilon_2 k_{Ex}} \right). \quad (2.106)$$

Zu beachten ist, dass die Transmissionsfaktoren  $T_F$  im Fall der Totalreflexion rein imaginär sind. Im zeitlichen Mittel findet somit kein Leistungsfluss in  $x$ -Richtung statt und im strahlenoptischen Modell sollte daher der Transmissionsfaktor  $T = \Re\{T_F\}$  verwendet werden.

In Abbildung 2.4a ist der Verlauf der Reflexionsfaktoren  $R_F^{TE}$  und  $R_F^{TM}$  in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\vartheta_E$  für einen typischen Parametersatz aufgetragen. Im transversalmagnetischen Fall existiert ein Winkel, der sogenannte Brewsterwinkel, so dass  $r^{TM} = 0$  gilt. Für transversalelektrische Felder existiert aufgrund der konstanten Permeabilität kein entsprechender Winkel. Alle obigen Zusammenhänge gelten in guter Näherung auch bei leicht gekrümmten Grenzschichten mit  $\varrho_K < \infty$ . Bei starken Krümmungen sind jedoch Modifikationen nötig.

## Gekrümmte Grenzflächen

Bereits in der 1970er Jahren hat insbesondere Snyder das Verhalten lokal ebener Wellen am gekrümmten dielektrischen Halbraum untersucht [62]. Seine Ergebnisse sind allgemein akzeptiert und werden im Folgenden aus Platzgründen nur angegeben.

Von besonderem Interesse ist die Fragestellung, wie groß die Verluste durch Transmission sind, wenn eine ursprünglich ( $\varrho_K \rightarrow \infty$ ) totalreflektierte ebene Welle auf eine konkav

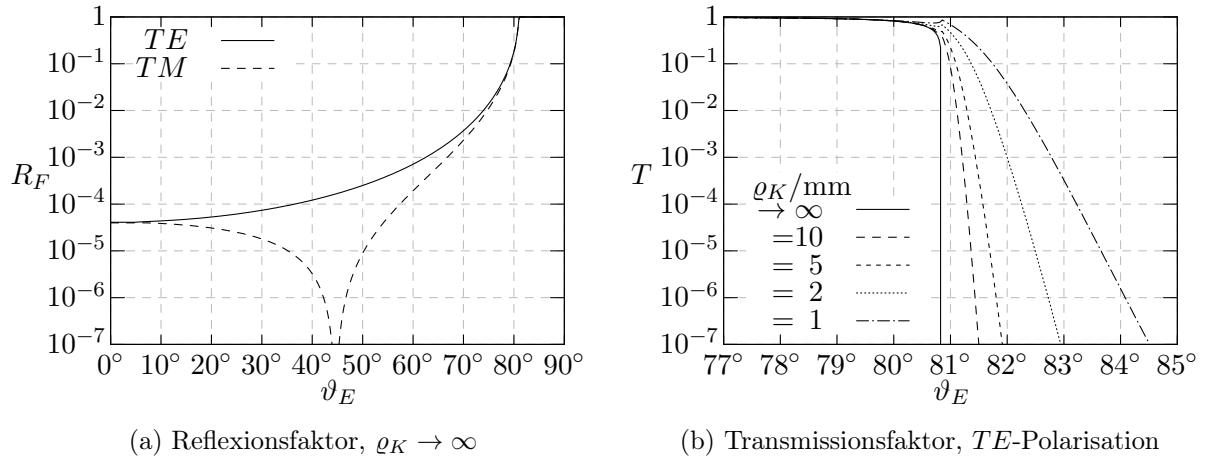


Abbildung 2.4.: Reflexionsfaktor  $R_F$  und Transmissionsfaktor  $T$  in Abhängigkeit vom Einfallswinkel. Es gilt  $n_1 = 1,57$  und  $n_2 = 1,55$ .

gekrümmte Grenzschicht ( $\varrho_K < \infty$ ) trifft. Zur Beschreibung dieser Krümmungsverluste werden die Leistungsfaktoren modifiziert. Es gilt polarisationsunabhängig:

$$T = |T_F| \Lambda \quad \text{und} \quad R = 1 - T. \quad (2.107)$$

Darin ist der Korrekturfaktor  $\Lambda$  gegeben durch

$$\Lambda = \frac{|\text{Ai}(\Delta \exp(j2\pi/3))|^{-2}}{4\pi|\Delta|^{1/2}} \quad \text{mit} \quad \Delta = \left( \frac{k_{Ez}^2 \varrho_K}{2k_1} \right)^{2/3} \frac{(k_{Ez}^2 - k_2^2)}{k_1^2}. \quad (2.108)$$

Die Funktion  $\text{Ai}$  ist eine Airy-Funktion. In Abbildung 2.4b ist der Verlauf des modifizierten Transmissionsfaktors im relevanten Einfallswinkelbereich für typische Werte  $\varrho_K$  aufgetragen.

## Die Goos-Hänchen-Verschiebung

Auch im Fall der Totalreflexion ebener Wellen am dielektrischen Halbraum ist der gesamte Raum durch ein Feld ausgefüllt. Die transmittierte Welle klingt jedoch normal zur Grenzschicht evaneszent ab. Ein Leistungstransport findet nur parallel zur Grenzschicht statt. Das Eindringen der Felder in den Halbraum mit kleinerer Brechzahl kann auch strahlenoptisch mit Hilfe der Goos-Hänchen-Verschiebung modelliert werden [19, 32, 59].

Betrachtet wird ein einfaches Wellenpaket, bestehend aus zwei Teilwellen mit den Wellenzahlen  $k_z \pm \Delta k_z$ . Es wird angenommen  $\Delta k_z$  ist hinreichend klein, so dass das Wellenpaket in guter Näherung durch einen Strahl approximiert werden kann, vgl. Abbildung 2.5. Die komplexe Amplitude des einfallenden Wellenpakets in der Ebene  $x = 0$  sei gegeben durch

$$\underline{\Psi}_E = (\exp(j\Delta k_z z) + \exp(-j\Delta k_z z)) \exp(-jk_z z) = 2 \cos(\Delta k_z z) \exp(-jk_z z). \quad (2.109)$$

Jede der beiden Teilwellen erfährt bei der Reflexion am dielektrischen Halbraum einen Phasensprung von  $2\Phi(k_z)$ . Der Faktor 2 ist hier zunächst willkürlich gewählt worden. Die

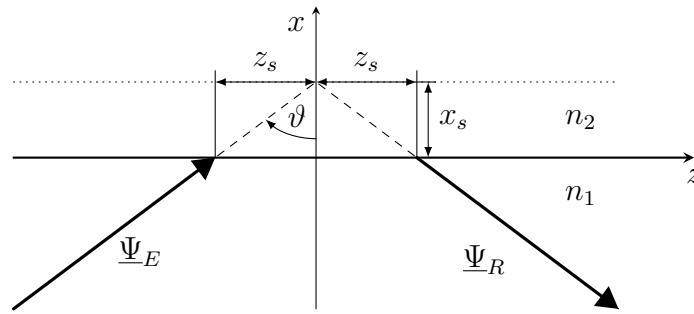


Abbildung 2.5.: Die Goos-Hänchen-Verschiebung eines Strahlbündels.

Phase  $\Phi$  ist eine Funktion von  $k_z$ , wobei für kleine Änderungen  $\Delta k_z$  der Ausbreitungskonstanten die Entwicklung

$$\Phi(k_z + \Delta k_z) \approx \Phi(k_z) + \frac{d\Phi}{dk_z} \Delta k_z = \Phi(k_z) + \Delta\Phi \quad (2.110)$$

verwendet werden kann. Für die Amplitude des reflektierten Wellenpakets gilt dann

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_R &= (\exp(j(\Delta k_z z - 2\Delta\Phi)) + \exp(-j(\Delta k_z z - 2\Delta\Phi))) \exp(-j(k_z z - 2\Phi)) \\ &= 2 \cos(\Delta k_z(z - 2z_s)) \exp(-j(k_z z - 2\Phi)) \end{aligned} \quad (2.111)$$

mit

$$z_s = \frac{d\Phi}{dk_z}. \quad (2.112)$$

Das reflektierte Wellenpaket erfährt also eine Verschiebung in Ausbreitungsrichtung um  $2z_s$ . Diese Verschiebung lässt sich explizit berechnen. Im TE-Fall gilt gemäß (2.105)

$$\Phi = \arctan \frac{|k_{Tx}|}{k_{Ex}} = \arctan \frac{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}}{\sqrt{k_1^2 - k_z^2}} \quad (2.113)$$

und folglich

$$z_s^{TE} = \frac{k_z}{\sqrt{(k_1^2 - k_z^2)(k_z^2 - k_2^2)}}. \quad (2.114)$$

Analog gilt für den TM-Fall mit (2.106)

$$\Phi = \arctan \frac{\varepsilon_1 |k_{Tx}|}{\varepsilon_2 k_{Ex}} = \arctan \frac{\varepsilon_1 \sqrt{k_z^2 - k_2^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{k_1^2 - k_z^2}} \quad (2.115)$$

und

$$z_s^{TM} = \frac{k_z}{\sqrt{(k_1^2 - k_z^2)(k_z^2 - k_2^2)}} \frac{k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)k_z^2 - k_1^2 k_2^2}. \quad (2.116)$$

Werden die den Teilwellen zugeordneten Strahlpfade, wie in Abbildung 2.5 angedeutet, im Raum  $x > 0$  fortgesetzt, stellt sich ein Schnittpunkt ein, der um  $x_s$  gegenüber der

Grenzschicht verschoben ist. Die Strahlen werden somit effektiv erst an der Grenzschicht  $x = x_s$  reflektiert. Die Eindringtiefe  $x_s$  ergibt sich allgemein zu

$$x_s = \frac{z_s}{\tan \vartheta} = \frac{k_x}{k_z} z_s. \quad (2.117)$$

Speziell für die beiden Polarisierungen folgt:

$$x_s^{TE} = \frac{1}{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}} \quad (2.118)$$

und

$$x_s^{TM} = \frac{1}{\sqrt{k_z^2 - k_2^2}} \frac{k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2) k_z^2 - k_1^2 k_2^2}. \quad (2.119)$$

### 2.4.3. Strahlenoptisches Modell des Gaußstrahls

Das strahlenoptische Modell wird aus dem Wirkleistungsfluss der optischen Welle abgeleitet. Da sich die im zeitlichen Mittel durch eine Fläche übertragene Wirkleistung aus der Integration der reellen Komponente des komplexen Poyntingvektors berechnet, wird gelegentlich auch der Begriff Poyntingvektormodell verwendet.

Zur Entwicklung des Modells wird eine Fläche transversal zur Ausbreitungsrichtung, hier die  $z$ -Richtung, in diskrete Flächenelemente aufgeteilt und die Leistungsflussdichte durch das Flächenelement aufintegriert. Diese Leistung kann dann einem Strahl zugeordnet werden, der in der Mitte des Flächenelements entspringt und in Richtung des Poyntingvektors zeigt. Der Realteil des Poyntingschen Vektors, abgeleitet aus den Feldgrößen (2.38), lautet nach direkter Rechnung

$$\frac{1}{2} \Re \left\{ \vec{S}(\vec{r}) \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} |\underline{E}_0|^2 |u(\vec{r})|^2 \left( \vec{e}_z + \vec{r}_t \frac{z}{z^2 + z_0^2} \right). \quad (2.120)$$

Der Ausdruck ist wie erwartet unabhängig von der Polarisation der Welle, da die Felder rotationssymmetrisch bzgl. der Ausbreitungsachse sind.

Aufgrund der Rotationssymmetrie und der radial abnehmenden Intensitätsverteilung empfiehlt sich eine Flächendiskretisierung in kreiszylindrischen Koordinaten. Im Fall einer regelmäßigen Diskretisierung mit äquidistanten Stützstellen in  $\varrho$ - und  $\varphi$ -Richtung wird so der Bereich höchster Intensität am feinsten diskretisiert. Ein Flächensegment in kreiszylindrischen Koordinaten mit der Normalen in  $z$ -Richtung ist gegeben durch die Punkte  $(\varrho, \varphi)$  mit

$$\varrho_m < \varrho < \varrho_{m+1} \quad \text{und} \quad \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}. \quad (2.121)$$

Werden  $M$  Koordinaten in  $\varrho$ -Richtung und  $N$  Koordinaten in  $\varphi$ -Richtung angesetzt, dann gilt

$$\varrho_m = m \Delta \varrho \quad \text{mit} \quad m \in \{1, 2, 3, \dots, M\}, \quad (2.122)$$

$$\text{und} \quad \varphi_n = n \Delta \varphi \quad \text{mit} \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}. \quad (2.123)$$

Der Punkt  $\varrho_0 = 0$  wird ebenfalls berücksichtigt, jedoch ist in diesem Fall der Winkel  $\varphi$  nicht definiert. Für  $N$  ergibt sich unmittelbar

$$N = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}. \quad (2.124)$$

Durch die Fläche  $\varrho < 2,5w(z)$  wird bereits nahezu 100% der Energie des Gaußstrahls geführt<sup>5</sup>. Der Bereich  $\varrho > 2,5w(z)$  wird daher nicht berücksichtigt und es gilt

$$M = \frac{2,5w(z)}{\Delta\varrho}. \quad (2.125)$$

In kreiszylindrischen Koordinaten ergibt sich mit  $\varrho^2 = x^2 + y^2$  gemäß (2.39)

$$|u(\vec{r})| = \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{\varrho^2}{w^2(z)}\right). \quad (2.126)$$

Das Integral über die Leistungsflussdichte (2.120) durch ein Kreissegment mit der Normalen  $\vec{e}_z$  ist somit gegeben durch:

$$\begin{aligned} \overline{P}_{mn} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} |\underline{E}_0|^2 \int_{\varrho_m}^{\varrho_{m+1}} \int_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}} |u(\varrho, z)|^2 \varrho \, d\varphi \, d\varrho \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} |\underline{E}_0|^2 \Delta\varphi \frac{w_0^2}{8} \left[ \exp\left(-\frac{2\varrho_m^2}{w^2(z)}\right) - \exp\left(-\frac{2\varrho_{m+1}^2}{w^2(z)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Damit ist das Modell des Gaußstrahls vollständig parametrisiert. Der Gaußstrahl wird durch eine Schar von  $N \cdot M + 1$  Strahlen approximiert, welche im Weiteren kurz als Strahlenschar bezeichnet wird. Ein Strahl  $S_{mn}$  besitzt folgende Eigenschaften:

- den Aufpunkt  $(\tilde{\varrho}_m, \tilde{\varphi}_n) = \left( \left[ m + \frac{1}{2} \right] \Delta\varrho, \left[ n + \frac{1}{2} \right] \Delta\varphi \right)$ ,
- die Richtung  $\vec{e}_{smn} = \left( \left( \frac{z\tilde{\varrho}_m}{z^2 + z_0^2} \right)^2 + 1 \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{z\tilde{\varrho}_m \cos \tilde{\varphi}_n}{z^2 + z_0^2} \\ \frac{z\tilde{\varrho}_m \sin \tilde{\varphi}_n}{z^2 + z_0^2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ,
- die Leistung  $\overline{P}_{mn}$ , sowie
- eine Polarisation in Richtung der elektrischen Feldstärke (2.38a).

Anzumerken ist, dass sich je nach Position der Transversalebene in  $z$ -Richtung unterschiedliche Poyntingvektormodelle ergeben. Erst im Fall  $z \gg z_0$  stellt sich ein näherungsweise konstanter Divergenzwinkel des Gaußstrahls ein und damit auch ein  $z$ -unabhängiges Poyntingvektormodell. Für große  $z$  ähneln die Felder des Gaußstrahls denen eines elementaren Punktstrahlers [23]. Die Phasenfronten sind näherungsweise sphärisch und verhalten sich

<sup>5</sup>Näherungsweise sind es 99,99963%.

lokal wie eine ebene Welle. Im Rahmen der Rechnungen dieser Arbeit kann die Bedingung  $z \gg z_0$  nicht immer eingehalten werden, da über den Abstand  $z$  zur Strahltille die angestrebte Strahlbreite eingestellt wird. Es ergeben sich trotz eines konstanten asymptotischen Divergenzwinkels unterschiedliche Poyntingvektormodelle. Es zeigt sich somit bereits hier eine erste Einschränkung in der Leistungsfähigkeit der geometrischen Optik.

### Modellierung transienter Zeitverläufe

In der Feldtheorie lassen sich die Übergänge zwischen Zeit- und Frequenzbereich zumindest theoretisch mit Hilfe der Fouriertransformation beschreiben, wenngleich in der Praxis in der Regel direkt eine Lösung im Zeitbereich angestrebt wird. Im klassischen strahlenoptischen Modell wird die Frequenzabhängigkeit nahezu vollständig vernachlässigt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_i = c_0/n_i$  eines Strahls ist wie bei der ebenen Welle ausschließlich abhängig von den Materialparametern, die hier als dispersionsfrei und damit frequenzunabhängig angenommen werden. Zur Modellierung beliebiger transienter Schaltvorgänge muss eine Überlagerung mehrerer Strahlscharen angesetzt werden, denen jeweils eine Startzeit und eine Dauer zugeordnet wird. Folglich muss wie schon die Ortsabhängigkeit auch die Zeitabhängigkeit diskretisiert werden. Ein transientes strahlenoptisches Modell müsste für den Vergleich der Theorien aus einer Poyntingvektorverteilung im Zeitbereich abgeleitet werden. Da aktuell keine zeitabhängigen Modelle realer Quellen existieren, beschränkt sich diese Arbeit im Kapitel 5.3.2 auf sprunghafte Änderungen im Leistungsfluss. Für jede positive Flanke wird dann eine Strahlschar angesetzt.



## 3. Die Moden dielektrischer Stufenindex-Wellenleiter

Im homogenen freien Raum können sich elektromagnetische Wellen ungestört ausbreiten. Die Felder müssen lediglich den Maxwellschen Gleichungen genügen, aber darüber hinaus keine weiteren Randbedingungen erfüllen. Physikalisch reale Felder divergieren mit Ausbreitung der Welle und genügen der Abstrahlbedingung [16]. Dagegen werden in wellenleitenden Strukturen die elektromagnetischen Felder entlang elektrischer Leiter oder, wie in dieser Arbeit, entlang dielektrischer Fasern geführt. Diese geführten Wellen müssen zusätzliche Randbedingungen an den Grenzen zwischen Wellenleiterkern und Wellenleitermantel erfüllen, welche den Lösungsraum beschränken. Im Folgenden werden die Eigenschaften der spezifischen Lösungen, der sogenannten Moden, vorgestellt.

### 3.1. Grundlegende Eigenschaften der Moden dielektrischer Wellenleiter

Zur Beschreibung beliebiger Wellenleiterstrukturen muss stets zwischen ausbreitungsfähigen und evaneszenten Moden unterschieden werden. Die Felder evaneszenter Moden klingen in longitudinaler Richtung ab und sind daher oft nicht von praktischer Relevanz. Der Bereich der ausbreitungsfähigen Moden wird wiederum unterteilt in den Bereich der geführten Moden und den Bereich der Strahlungsmoden. Die Felder der geführten Moden konzentrieren sich auf den Wellenleiterkern. Dagegen füllen die Felder der Strahlungsmoden im Allgemeinen den gesamten Raum aus.

Alle Beschreibungen des gesamten Kapitels 3 beziehen sich auf den einzelnen Mode. Der im Kapitel 2.3 eingeführte Index  $\nu$  wird daher der Übersichtlichkeit wegen weggelassen.

#### 3.1.1. Dielektrische Wellenleiter mit leitender Abschirmung

Eine Schwierigkeit in der Modellierung offener Strukturen ist das in der Regel kontinuierliche Modenspektrum. Im Fall längshomogener Strukturen setzt sich lediglich der Bereich der geführten Moden aus einem diskreten Spektrum zusammen. Die Gesamtfelder werden somit durch ein Integral über alle Moden beschrieben (vgl. Spektren ebener Wellen). Folglich müssen zur Beschreibung von Wellenleiterinhomogenitäten häufig Integralgleichungen gelöst werden, was analytisch oft nicht möglich ist und auch numerisch sehr anspruchsvoll ist. Sinnvoll ist daher der Übergang zu einer geschlossenen Anordnung, d.h. der optische

Wellenleiter wird in hinreichender Entfernung vom Kern durch einen perfekt leitenden Schirm begrenzt. In vielen Problemstellungen führt dies zu einem vollständig diskreten Modenspektrum [76].

Der Mantel wird im Modell des offenen Wellenleiters als unendlich ausgedehnt angenommen. Aufgrund der vielfältigen Modellierungsmöglichkeiten wird der unendlich ausgedehnte homogene Raum in vielen theoretischen Modellen der Feldtheorie angenommen. In der Praxis ist diese Vorstellung jedoch genauso unrealistisch wie das Einbringen einer perfekt leitenden Abschirmung. Letzteres birgt jedoch den Vorteil eines vollständig diskreten Modenspektrums. Im realen Wellenleiter muss die Dicke des Mantels so gewählt werden, dass die Feldgrößen der geführten Moden im Mantel hinreichend abgeklungen sind. In den Simulationen dieser Arbeit ist an diesen Stellen ein perfekt leitender Schirm eingefügt. Das Spektrum der geführten Moden des offenen und geschlossenen Wellenleiters ist somit in sehr guter Näherung identisch. Der Begriff Strahlungsmode mag nun jedoch etwas irreführend zu sein. Synonym wird daher auch die Bezeichnung Mantelmode verwendet.

Ein optischer Wellenleiter mit leitender Abschirmung stellt gleichzeitig auch einen inhomogen gefüllten Hohlleiter dar. Diese Begrifflichkeit ist insbesondere bei der Literaturrecherche wichtig. Hohlleiter werden jedoch in der Regel als Singlemode-Wellenleiter betrieben. Optische Wellenleiter mit leitender Abschirmung können mit Blick auf ihre Hohlleitereigenschaften als höchstmultimodal angesehen werden.

### 3.1.2. Einteilung des Modenspektrums

#### Ausbreitungsfähige Moden

Im optischen Wellenleiter erfolgt die Führung der Wellen durch einen Wellenleiterkern, welcher eine größere Brechzahl  $n_1$  besitzt als der umgebende Mantel, mit  $n_2 < n_1$ . Abbildung 3.1 verdeutlicht das Prinzip. Aufgrund der verlustfreien Materialien werden die ausbreitungsfähigen Moden nicht gedämpft und sind daher durch eine reelle Wellenzahl

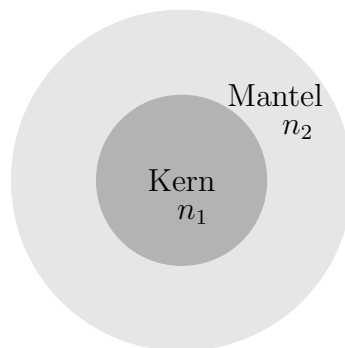


Abbildung 3.1.: Kern und Mantel des optischen Wellenleiters. Im Modell des geschlossenen Wellenleiters wird der Mantel durch einen perfekt leitenden Schirm abgeschlossen.

gekennzeichnet, d.h. gemäß (2.53) muss gelten

$$k_z = \sqrt{k_1^2 - \underline{k}_{t1}^2} = \sqrt{k_2^2 + \underline{k}_{t2}^2}. \quad (3.1)$$

Die Vorzeichen in der Wurzel wurden so gewählt, dass sich im Fall reeller  $\underline{k}_{ti}$  die Felder auf den Wellenleiterkern konzentrieren. Ohnehin darf die Wellenzahl nicht größer als die spezifische Wellenzahl des Kernmaterials,  $k_1 = k_0\sqrt{\varepsilon_{r1}}$ , sein. Die Bedingung

$$\underline{k}_{t1}^2 > 0 \quad (3.2)$$

ist somit zwingend erforderlich und  $\underline{k}_{t1}$  ist stets reellwertig. Die Bedingung

$$\underline{k}_{t2}^2 > 0 \quad (3.3)$$

ruft ein evaneszentes Abklingen der Feldgrößen im Mantel in transversaler Richtung hervor. Für die Wellenzahl folgt damit unmittelbar

$$n_2 < \frac{k_z}{k_0} < n_1. \quad (3.4)$$

Dieses Intervall kennzeichnet den Bereich der geführten Moden. Für die Größe  $k_z/k_0$  wird auch der Begriff effektiver Brechungsindex verwendet. Der Grenzfall  $n_{\text{eff}} = k_z/k_0 = n_2$  wird als Cut-Off bzw.  $n_{\text{eff}} > n_2$  als Cut-Off Bedingung bezeichnet.

Reelle Wellenzahlen im Bereich

$$0 < \frac{k_z}{k_0} < n_2 \quad (3.5)$$

bilden dagegen das Spektrum der Strahlungsmoden. Es gilt nun

$$\underline{k}_{t2}^2 < 0. \quad (3.6)$$

$\underline{k}_{t2}$  ist rein imaginär und die Feldgrößen klingen im Mantel nicht mehr evaneszent ab. Der Begriff Strahlungsmode erklärt sich dadurch, dass dieser Teil des Modenspektrums Wellen beschreibt, die Leistung vom Kern abstrahlen oder auch auf den Kern einstrahlen. Strahlungsmoden werden durch eine nicht ideale Einkopplung oder durch Wellenleiterinhomogenitäten angeregt. Im letztgenannten Fall kommt es zur sogenannten Modenkopplung [47].

### Evaneszente und komplexe Moden

Um ein vollständiges Modenspektrum zu erhalten müssen neben den geführten Moden und den Strahlungsmoden weitere Moden berücksichtigt werden. Moden mit rein imaginärer Ausbreitungskonstante klingen in Ausbreitungsrichtung evaneszent ab. Entsprechend werden sie auch als evaneszente Moden bezeichnet. Mathematisch gehen die evaneszenten Moden direkt aus den Strahlungsmoden hervor, falls gilt

$$k_1^2 < \underline{k}_{t1}^2 \quad \Rightarrow \quad k_z = \mp j \sqrt{\underline{k}_{t1}^2 - k_1^2}. \quad (3.7)$$

Obwohl durch den einzelnen evaneszenten Mode kein Leistungstransport erfolgt, sind sie zur Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen in Wellenleiterschnittstellen erforderlich. Im Fall hochmultimodaler optischer Wellenleiter können sie jedoch in der Regel vernachlässigt werden.

Für alle ausbreitungsfähigen und evaneszenten Moden gilt

$$k_z^2 \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Neben diesen Moden können weitere Moden existieren, deren Wellenzahlen komplexwertig sind:

$$k_z = \mp(\mp\beta - j\alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0. \quad (3.9)$$

Es ist bislang noch nicht hinreichend geklärt, welche Eigenschaften Wellenleiter besitzen müssen, damit komplexe Moden existieren können. Für den offenen optischen Wellenleiter ist bislang nur eine Arbeit bekannt, die die Möglichkeit der Existenz komplexer Moden vorhersagt [27]. Wichtig ist an dieser Stelle die Abgrenzung zu den sogenannten Leckmoden (englisch: Leaky Modes), welche zwar ebenfalls komplexe Wellenzahlen besitzen, jedoch unphysikalische Lösungen darstellen, da sie mit ansteigender transversaler Koordinate divergieren. Aufgrund des diskreten Spektrums kann auch durch eine Normalisierung keine physikalische Lösung gefunden werden. Leckmoden gehören daher nicht zum vollständigen Modenspektrum eines offenen dielektrischen Wellenleiters [72].

Fundamentale Arbeiten hinsichtlich geschlossener Wellenleiter sind [54] und [56]. Ihnen kann beispielsweise entnommen werden, dass in geschlossenen Wellenleitern, deren Brechzahlprofil nur von einer kartesischen Koordinate abhängt, keine komplexen Moden existieren. Dieser Fall schließt auch den geschlossenen Schichtwellenleiter ein. In geschlossenen Wellenleitern mit einem Brechzahlprofil, das von beiden transversalen Koordinaten abhängt, können jedoch auch komplexe Moden auftreten. Ein einzelner komplexer Mode liefert keinen physikalischen Feldbeitrag. Diese Moden treten daher stets paarweise auf. Ein Paar verhält sich physikalisch wie ein evaneszenter Mode, trägt also nicht zum Leistungstransport im Wellenleiter bei.

Alle aus der Literatur bekannten Beispiele, in denen komplexe Moden einen signifikanten Beitrag zum resultierenden Feld liefern, beziehen sich auf Hohlleiter, in denen nur wenige Moden ausbreitungsfähig sind. Darüber hinaus muss der Bereich nahe dem Cut-Off untersucht werden, denn in der Regel bilden sich komplexe Moden beim Übergang vom evaneszenten in den ausbreitungsfähigen Modenbereich aus. Der Brechungsindexkontrast der Wellenleiter ist zudem typischerweise sehr groß, z.B.  $n_1/n_2 = 4$  in [30]. Es ist daher davon auszugehen, dass komplexe Moden eines geschirmten optischen Wellenleiters keinen signifikanten Beitrag zum Feld liefern. In allen folgenden Beschreibungen wird daher (3.8) vorausgesetzt.

### 3.1.3. Planare Schichtwellenleiter

Betrachtet werden zunächst Wellenleiter, deren Geometrien sich neben der Ausbreitungsrichtung auch in einer transversalen Richtung nicht ändert. Die Feldgrößen ändern sich

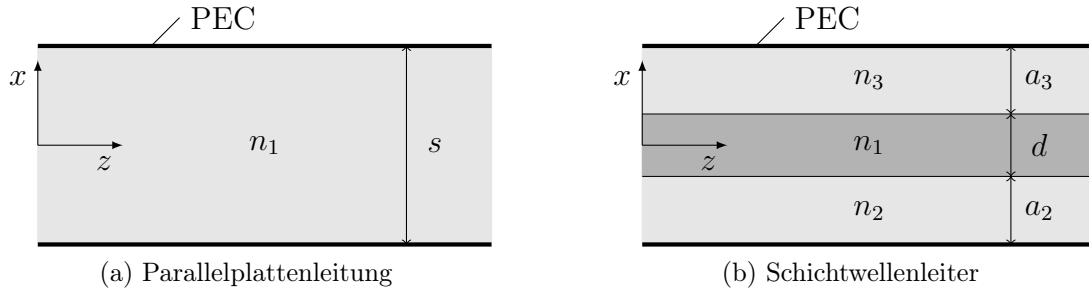


Abbildung 3.2.: Planare Wellenleiter (PEC: Perfect Electric Conductor).

entlang dieser transversalen Koordinate, hier der  $y$ -Koordinate, nicht. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} \hat{=} 0. \quad (3.10)$$

Diese Annahme ist natürlich unphysikalisch und besitzt nur Modellcharakter, führt jedoch zu einem einfachen und kompakten mathematischen Modell und eröffnet somit vielfältige Simulationmöglichkeiten. Insbesondere lässt sich auch leicht der Bezug zur geometrischen Optik herstellen.

Für die transversalen Modenfunktionen verbleiben gewöhnliche Differenzialgleichungen, die im kartesischen Koordinatensystem von allen Feldkomponenten erfüllt werden müssen:

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathcal{E}}(x)}{\partial x^2} = \mp k_x^2 \underline{\mathcal{E}}(x) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \underline{\mathcal{H}}(x)}{\partial x^2} = \mp k_x^2 \underline{\mathcal{H}}(x). \quad (3.11)$$

Unter den gemachten Annahmen mit abschnittsweise konstanten Materialien können die erforderlichen Randbedingungen mit einem Ansatz erfüllt werden, in dem entweder  $E_z$  oder  $H_z$  gleich Null ist. Im Fall  $H_z = 0$  spricht man von TM-Moden (TM für “transversal magnetisch”). Im anderen Fall  $E_z = 0$  entsprechend von TE-Moden (für “transversal elektrisch”). Mit (3.10) gilt weiter

- TM-Moden:  $H_z, H_x$  und  $E_y$  gleich Null,
- TE-Moden:  $E_z, E_x$  und  $H_y$  gleich Null.

Im Folgenden werden nur die TE-Moden näher betrachtet. Alle Erläuterungen gelten jedoch analog auch für die TM-Moden.

### Die Parallelplattenleitung

Die einfachste planare wellenführende Struktur besteht aus zwei parallelen, perfekt leitenden Platten (Parallelplattenleitung), deren Zwischenraum homogen gefüllt ist, Abbildung 3.2a. Da die elektrische Feldstärke nur eine  $y$ -Komponente besitzt, kann die zugehörige Modenfunktion der TE-Moden unmittelbar angegeben werden. Mit

$$\underline{\mathcal{E}}_y(x) = \sin\left(k_x \left(x - \frac{s}{2}\right)\right) \quad \text{und} \quad k_x = \frac{\nu\pi}{s}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12)$$

sind die erforderlichen Randbedingungen an den perfekt leitenden Platten erfüllt. Mit Hilfe der Beziehung (2.53) können die Wellenzahlen explizit angegeben werden:

$$k_z = \sqrt{k_1^2 - \left(\frac{\nu\pi}{s}\right)^2}. \quad (3.13)$$

Aus (3.12) lässt sich unmittelbar der Bezug zur Strahlenoptik herstellen, wenn die Sinusfunktion mit Hilfe der Euler-Relation durch zwei Exponentialfunktionen ausgedrückt wird. Diese können als zwei ebene Wellen interpretiert werden, die zwischen den Platten totalreflektiert werden. Die Teilwellen müssen sich phasenrichtig überlagern, womit wiederum (3.13) resultiert.

Anzumerken sei noch, dass in der homogenen Parallelplattenleitung auch der TEM-Mode (TEM für “transversal elektromagnetisch”) als Spezialfall der TM-Moden existiert.

### Der geschirmte Schichtwellenleiter

Ist der Wellenleiter nur abschnittsweise homogen gefüllt, muss der Lösungsansatz ebenfalls abschnittsweise unterschiedlich angesetzt werden. In dieser Arbeit werden Dreischicht-Probleme gemäß Abbildung 3.2b betrachtet. Der Bereich mit der Brechzahl  $n_1$  wird als optisch dichter gegenüber dem restlichen Bereich angenommen mit  $n_1 > n_2 \geq n_3$ . Die folgende Beschreibung löst dieses Randwertproblem:

$$\underline{\mathcal{E}}_y(x) = \begin{cases} -A_2 \sinh(k_{x3}(x - \frac{d}{2} - a_3)) / \sinh(k_{x3}a_3) & \text{für } \frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} + a_3 \\ \cos(k_{x1}(x - \frac{d}{2})) + A_1 \sin(k_{x1}(x - \frac{d}{2})) & \text{für } -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ A_3 \sinh(k_{x2}(x + \frac{d}{2} + a_2)) / \sinh(k_{x2}a_2) & \text{für } -a_2 - \frac{d}{2} < x < -\frac{d}{2}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Aus der Gleichung (2.53) lassen sich die folgenden Beziehungen für die  $k_{xi}$ , mit  $i = 1, 2, 3$ , ableiten:

$$\begin{aligned} k_z^2 &= k_1^2 - k_{x1}^2 \\ &= k_2^2 + k_{x2}^2 \\ &= k_3^2 + k_{x3}^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Die Randbedingungen an der perfekt leitenden Berandung bei  $x = -\frac{d}{2} - a_2$  bzw.  $x = \frac{d}{2} + a_3$  sind mit diesem Ansatz bereits erfüllt. In den Grenzschichten  $x = \pm \frac{d}{2}$  müssen die tangentialen Feldstärken stetig sein. Es folgt aus den Randbedingungen für die elektrische Feldstärke

$$A_2 = 1, \quad (3.16)$$

$$A_3 = \cos(k_{x1}d) - A_1 \sin(k_{x1}d). \quad (3.17)$$

Die  $z$ -Komponente der magnetischen Feldstärke berechnet sich aus  $\mathcal{H}_z = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \vec{e}_z \frac{\partial \underline{\mathcal{E}}_y}{\partial x}$ , und man gewinnt aus den zugehörigen Randbedingungen zwei weitere Gleichungen:

$$-k_{x3}A_2 / \tanh(k_{x3}a_3) = k_{x1}A_1, \quad (3.18)$$

|            |                                   |  |   |                   |
|------------|-----------------------------------|--|---|-------------------|
| $k_{x1}^2$ | $> 0$<br>$< k_0^2(n_1^2 - n_2^2)$ | $> k_0^2(n_1^2 - n_2^2)$<br>$< k_0^2(n_1^2 - n_3^2)$ | $> k_0^2(n_1^2 - n_3^2)$<br>$< k_0^2 n_1^2$ | $> k_0^2 n_1^2$   |
| $k_{x2}$   | reell                             | imaginär   | imaginär                                    | imaginär          |
| $k_{x3}$   | reell                             | reell  | imaginär                                    | imaginär          |
| $k_z$      | reell                             | reell  | reell                                       | imaginär          |
| Typ        | geführter Mode                    | Substratmode   | Strahlungsmode                              | evaneszenter Mode |

Tabelle 3.1.: Einteilung des Modenspektrums des asymmetrischen Schichtwellenleiters.

$$k_{x2}A_3/\tanh(k_{x2}a_2) = k_{x1}\sin(k_{x1}d) + k_{x1}A_1\cos(k_{x1}d). \quad (3.19)$$

Fasst man (3.16) – (3.19) als Gleichungssystem mit dem Lösungsvektor  $(A_1 \ A_2 \ A_3)^T$  auf, wird deutlich, dass das Gleichungssystem überbestimmt ist. Eine Lösung existiert nur, falls gilt

$$\frac{k_{x1}}{k_{x2}}\tanh(k_{x2}a_2) = \frac{k_{x1}\tanh(k_{x3}a_3) + k_{x3}\tan(k_{x1}d)}{k_{x1}\tan(k_{x1}d)\tanh(k_{x3}a_3) - k_{x3}}. \quad (3.20)$$

Zur Lösung von Gleichung (3.20) können beispielsweise  $k_{x2}$  und  $k_{x3}$  substituiert werden und nach Lösungen für  $k_{x1}$  gesucht werden. Die Wellenzahlen  $k_z$  des Schichtwellenleiters lassen sich somit nicht mehr explizit bestimmen, sondern erfordern die Lösung der transzendenten Eigenwertgleichung (3.20).

Der Ansatz (3.14) wurde so gewählt, dass sich im Fall reeller  $k_{xi}$  die Felder auf den Wellenleiterkern im Bereich  $|x| < \frac{d}{2}$  konzentrieren. Im Fall geführter Moden nimmt  $k_{x1}^2$  Werte im Intervall

$$0 < k_{x1}^2 < k_0^2(n_1^2 - n_2^2) \quad (3.21)$$

an. Nimmt  $k_{x1}$  größere Werte an, können  $k_{x2}$ ,  $k_{x3}$  und auch  $k_z$  auch rein imaginäre Werte annehmen. Die Tabelle 3.1 gibt einen Überblick. Hyperbolische Funktionen eines rein imaginären Arguments lassen sich durch trigonometrische Funktionen ausdrücken:

$$\sinh(jx) = j\sin(x) \quad \text{und} \quad \cosh(jx) = \cos(x). \quad (3.22)$$

Werden diese Beziehungen konsequent auf den obigen Ansatz angewendet, kann die mathematische Beschreibung der Strahlungsmoden wiederum durch reellwertige Funktionen erfolgen.

Im Fall des asymmetrischen Schichtwellenleiters muss der Bereich der Strahlungsmoden unterteilt werden. Mit größer werdenden  $k_{x1}$  bilden sich zunächst Moden aus, deren Felder sich neben dem Kern nur auf den Mantelbereich mit der Brechzahl  $n_2$  konzentrieren. Diese werden oft als Substratmoden bezeichnet. Die weiteren Untersuchungen dieser Arbeit konzentrieren sich jedoch auf symmetrische Wellenleiter, in denen dieser Modentyp nicht existiert.

## Eigenwerte und Leistung

Für die Parallelplattenleitung können die Wellenzahlen mit (3.13) explizit angegeben werden. Die transzendente Eigenwertgleichung des Schichtwellenleiters (3.20) ist dagegen nur

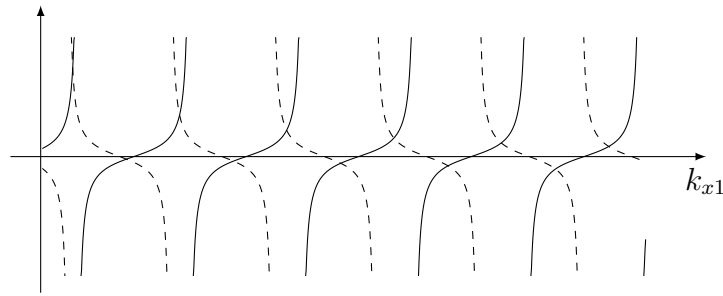


Abbildung 3.3.: Ausschnitt einer grafischen Darstellung der links- (gestrichelt) und rechtsseitigen Funktionen der Eigenwertgleichung (3.20) für den Bereich der Strahlungsmoden.

numerisch lösbar. Diese numerische Lösung der Eigenwertgleichung kann algorithmisch auf Basis der bekannten Nullstellen und Singularitäten der Tangensfunktion durchgeführt werden. Zur Illustration ist in Abbildung 3.3 die linke und rechte Seite von (3.20) exemplarisch für den Bereich der Strahlungsmoden dargestellt. Zwischen zwei beliebigen benachbarten Singularitäten befindet sich immer genau eine Lösung. Zum Auffinden der Eigenwerte reicht in der Regel ein einfaches Bisektions- oder Sekantenverfahren aus. In dieser Arbeit wurde die Brent-Dekker-Methode angewendet.

Zur Bestimmung der pro Mode geführten Leistung muss gemäß 2.66 im TE-Fall das Integral

$$\bar{P} = \Delta y \frac{\Re\{k_z\}}{2\omega\mu} \int_{z=0} |\mathcal{E}_y(x)|^2 dx \quad (3.23)$$

gelöst werden.  $\Delta y$  kennzeichnet einen Längenabschnitt in  $y$ -Richtung. Die elektrische Feldstärke ist durch (3.12) und (3.14) gegeben. Die auftretenden Integrationen sind elementar durchführbar und im Anhang A.2.1 aufgeführt.

## 3.2. Kreiszylindrische Fasern

Die Stufenindex-Faser ist einer der wenigen optischen Wellenleiter mit zweidimensionalen Querschnittsprofil, dessen Modenspektrum sich analytisch berechnen lässt. Lediglich die wiederum transzendente Eigenwertgleichung muss analog zum Schichtwellenleiter numerisch gelöst werden. Als ergänzende Literatur für den offenen Wellenleiter seien [9, 35, 53] genannt. Eine Beschreibung der geschlossenen Faser befindet sich u.a. in [78]. Neben der kreiszylindrischen Faser existieren analytische Lösungen lediglich noch für elliptische Wellenleiter [14].



### 3.2.1. Feldgrößen der Moden

#### Separation der Helmholtzgleichung

Anders als im kartesischen Koordinatensystem führt die Separation der Helmholtzgleichung im kreiszyklindrischen Koordinatensystem nicht zu einem System ausschließlich gewöhnlicher Differenzialgleichungen. Aus dem Produktansatz

$$\underline{\mathcal{E}}_z(\varrho, \varphi) = R(\varrho)\Phi(\varphi) \quad (3.24)$$

folgt eingesetzt in die Wellendifferenzialgleichung (2.53) die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial R}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \underbrace{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}}_{=-m^2} + \underbrace{k_i^2 - k_z^2}_{=\pm k_{\varrho i}^2} = 0. \quad (3.25)$$

Die Funktion  $\Phi$  muss einer gewöhnlichen Differenzialgleichung genügen. Aufgrund der Periodizität der  $\varphi$ -Koordinate folgt

$$\Phi(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

Für die Funktion  $R$  verbleiben Besselsche Differenzialgleichungen. Es ist sinnvoll zwei Fälle zu unterscheiden:

$$k_{\varrho 1}^2 = k_0^2 \varepsilon_{r1} - k_z^2 > 0 : \quad R(\varrho) = A_1 J_m(k_{\varrho 1} \varrho) + A_2 N_m(k_{\varrho 1} \varrho), \quad (3.27)$$

$$k_{\varrho 2}^2 = k_z^2 - k_0^2 \varepsilon_{r2} > 0 : \quad R(\varrho) = A_1 I_m(k_{\varrho 2} \varrho) + A_2 K_m(k_{\varrho 2} \varrho). \quad (3.28)$$

Die wesentlichen Eigenschaften der gewöhnlichen Besselfunktionen  $J_m$  und  $N_m$  sowie der modifizierten Besselfunktionen  $I_m$  und  $K_m$  werden im Anhang A.5.2 vorgestellt.

Im Fall einer zweidimensionalen Querschnittsgeometrie ist im Allgemeinen keine Aufteilung nach TE- und TM-Moden möglich. Vielmehr sind die Moden hybrid, d.h. alle Feldkomponenten sind ungleich Null. Jedoch ist aufgrund der Kreissymmetrie eine Unterscheidung zweier orthogonaler Polarisierungen möglich, deren Felder durch eine Drehung um  $\frac{\pi}{2}$  ineinander übergehen. Daher wird im Folgenden nur eine Polarisation explizit betrachtet. Wie auch im noch folgenden Kapitel 4 ist dies (näherungsweise) eine  $y$ -Polarisation.

#### Der kreiszyklindrische Hohlleiter

Eine Ausnahme bildet der homogen gefüllte Rundhohlleiter in Abbildung 3.4a. In diesem Fall besteht das Modenspektrum wieder vollständig aus TE- und TM-Moden. Ohne die im Koordinatenursprung singuläre Neumannfunktion  $N_m$  lautet der Ansatz für die TE-Moden

$$\underline{\mathcal{H}}_z(\varrho, \varphi) = J_m(k_{\varrho} \varrho) \cos(m\varphi). \quad (3.29)$$

Daraus berechnet sich die elektrische Feldstärke zu

$$\underline{\vec{\mathcal{E}}} = -\frac{\omega \mu_0}{j k_{\varrho}^2} \left( \vec{e}_{\varrho} \frac{m}{\varrho} J_m(k_{\varrho} \varrho) \sin(m\varphi) + \vec{e}_{\varphi} k_{\varrho} J'_m(k_{\varrho} \varrho) \cos(m\varphi) \right), \quad (3.30)$$

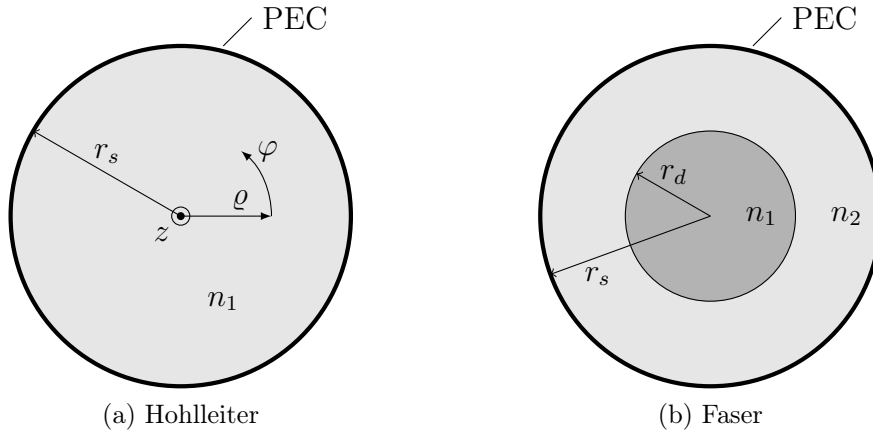


Abbildung 3.4.: Kreiszyklindrische Wellenleiter im Querschnitt.

mit  $J'_m$  der Ableitung von  $J_m$  nach dem Argument. Aus der Randbedingung in  $\varrho = r_s$  folgt schließlich

$$k_{\varrho 1} = \frac{j'_{mn}}{r_s} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.31)$$

Darin ist  $j'_{mn}$  die  $n$ -te Nullstelle der Ableitung der Besselfunktion  $J_m$ .

### Die geschirmte Faser

Der Ansatz für den gemäß Abbildung 3.4b inhomogen gefüllten Wellenleiter muss nun hybrid gewählt werden, d.h. die  $z$ -Komponenten der elektrischen und der magnetischen Feldstärke sind gleichzeitig ungleich Null. Es wird der folgende Ansatz betrachtet:

$$\underline{\mathcal{E}}_z(\varrho, \varphi) = B_{1i}(\varrho) \sin(m\varphi), \quad (3.32a)$$

$$\underline{\mathcal{H}}_z(\varrho, \varphi) = -B_{2i}(\varrho) \cos(m\varphi). \quad (3.32b)$$

Im Kern,  $0 \leq \varrho < r_d$ , werden gewöhnliche Besselfunktionen angesetzt:

$$B_{11}(\varrho) = J_m(k_{\varrho 1}\varrho)/J_m(k_{\varrho 1}r_d), \quad (3.33a)$$

$$B_{21}(\varrho) = A_4 J_m(k_{\varrho 1}\varrho)/J_m(k_{\varrho 1}r_d). \quad (3.33b)$$

Dagegen werden im Außenraum  $r_d \leq \varrho \leq r_s$  modifizierte Besselfunktionen gewählt:

$$B_{12}(\varrho) = A_2 I_m(k_{\varrho 2}\varrho)/I_m(k_{\varrho 2}r_d) + A_3 K_m(k_{\varrho 2}\varrho)/K_m(k_{\varrho 2}r_d), \quad (3.34a)$$

$$B_{22}(\varrho) = A_5 I_m(k_{\varrho 2}\varrho)/I_m(k_{\varrho 2}r_d) + A_6 K_m(k_{\varrho 2}\varrho)/K_m(k_{\varrho 2}r_d). \quad (3.34b)$$

Aus (3.32) lassen sich die transversalen Komponenten gemäß

$$\underline{\mathcal{E}}_{\varrho} = \frac{-j}{k_i^2 - k_z^2} \left( k_z B'_{1i}(\varrho) + m \frac{\omega \mu}{\varrho} B_{2i}(\varrho) \right) \sin(m\varphi), \quad (3.35a)$$

$$\underline{\mathcal{E}}_{\varphi} = \frac{-j}{k_i^2 - k_z^2} \left( m \frac{k_z}{\varrho} B_{1i}(\varrho) + \omega \mu B'_{2i}(\varrho) \right) \cos(m\varphi), \quad (3.35b)$$

$$\underline{\mathcal{H}}_{\varrho} = \frac{j}{k_i^2 - k_z^2} \left( m \frac{\omega \varepsilon_i}{\varrho} B_{1i}(\varrho) + k_z B'_{2i}(\varrho) \right) \cos(m\varphi), \quad (3.35c)$$

$$\mathcal{H}_\varphi = \frac{-j}{k_i^2 - k_z^2} \left( \omega \varepsilon_i B'_{1i}(\varrho) + m \frac{k_z}{\varrho} B_{2i}(\varrho) \right) \sin(m\varphi), \quad (3.35d)$$

ableiten. Die Konstanten  $A_2$  bis  $A_6$  können aus den Stetigkeitsbedingungen der Feldgrößen bestimmt werden. In  $\varrho = r_d$  müssen die tangentialen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke stetig sein. Dies betrifft somit die  $\varphi$ - und  $z$ -Komponenten. In  $\varrho = r_s$  müssen zudem die transversalen Komponenten der elektrischen Feldstärke verschwinden. Es sind somit sechs Gleichungen zu erfüllen, von denen fünf ausreichen um die Konstanten  $A_2$  bis  $A_6$  zu bestimmen. Aus der sechsten gewinnt man dann die Eigenwertgleichung der geschlossenen kreiszyindrischen Faser. Mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen für die  $z$ -Komponente der elektrischen Feldstärke in  $\varrho = r_d$  und  $\varrho = r_s$  lassen sich zunächst  $A_2$  und  $A_3$  bestimmen:

$$A_2 = -\frac{I_m(k_{\varrho 2} r_d) K_m(k_{\varrho 2} r_s)}{M_m^{00}(k_{\varrho 2})}, \quad (3.36)$$

$$A_3 = \frac{I_m(k_{\varrho 2} r_s) K_m(k_{\varrho 2} r_d)}{M_m^{00}(k_{\varrho 2})}. \quad (3.37)$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen für die magnetischen Feldkomponenten in  $\varrho = r_d$  folgt:

$$A_4 = -\frac{r_d \omega k_{\varrho 2}}{m k_z} \frac{k_{\varrho 1}^2}{k_0^2 (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})} \left( \varepsilon_2 \frac{M_m^{01}(k_{\varrho 2})}{M_m^{00}(k_{\varrho 2})} + \varepsilon_1 G_m(k_{\varrho 1}, k_{\varrho 2}) \right). \quad (3.38)$$

Um die Konstanten  $A_5$  und  $A_6$  zu bestimmen, reicht es nun aus, z.B. die Stetigkeitsbedingung für die  $\varphi$ -Komponente der elektrischen Feldstärke in  $\varrho = r_s$  auszuwerten:

$$A_5 = -A_4 \frac{I_m(k_{\varrho 2} r_d) K'_m(k_{\varrho 2} r_s)}{M_m^{10}(k_{\varrho 2} r_s)}, \quad (3.39)$$

$$A_6 = A_4 \frac{I'_m(k_{\varrho 2} r_s) K_m(k_{\varrho 2} r_d)}{M_m^{10}(k_{\varrho 2} r_s)}. \quad (3.40)$$

Es verbleibt die Stetigkeitsbedingung für die  $\varphi$ -Komponente der elektrischen Feldstärke in  $\varrho = r_d$ , aus der man schließlich die Eigenwertgleichung gewinnt:

$$\frac{m^2 k_z^2 k_0^2 (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})^2}{r_d^2 \varepsilon_{r2} k_{\varrho 2}^2 k_{\varrho 1}^4} = \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} G_m(k_{\varrho 1}, k_{\varrho 2}) + \frac{M_m^{01}(k_{\varrho 2})}{M_m^{00}(k_{\varrho 2})} \right) \left( G_m(k_{\varrho 1}, k_{\varrho 2}) + \frac{M_m^{11}(k_{\varrho 2})}{M_m^{10}(k_{\varrho 2})} \right). \quad (3.41)$$

Darin sind

$$G_m(k_{\varrho 1}, k_{\varrho 2}) = \frac{k_{\varrho 2}}{k_{\varrho 1}} \frac{J'_m(k_{\varrho 1} r_d)}{J_m(k_{\varrho 1} r_d)}, \quad (3.42)$$

$$M_m^{00}(k_{\varrho 2}) = I_m(k_{\varrho 2} r_s) K_m(k_{\varrho 2} r_d) - K_m(k_{\varrho 2} r_s) I_m(k_{\varrho 2} r_d), \quad (3.43a)$$

$$M_m^{01}(k_{\varrho 2}) = I_m(k_{\varrho 2} r_s) K'_m(k_{\varrho 2} r_d) - K_m(k_{\varrho 2} r_s) I'_m(k_{\varrho 2} r_d), \quad (3.43b)$$

$$M_m^{10}(k_{\varrho 2}) = I'_m(k_{\varrho 2} r_s) K_m(k_{\varrho 2} r_d) - K'_m(k_{\varrho 2} r_s) I_m(k_{\varrho 2} r_d), \quad (3.43c)$$

$$M_m^{11}(k_{\varrho 2}) = I'_m(k_{\varrho 2} r_s) K'_m(k_{\varrho 2} r_d) - K'_m(k_{\varrho 2} r_s) I'_m(k_{\varrho 2} r_d). \quad (3.43d)$$

Für  $m = 0$  können die rechtsseitigen Faktoren der Eigenwertgleichung (3.41) unabhängig voneinander gleich Null gesetzt werden und somit die Gleichung erfüllen. In diesem

Fall kann wiederum zwischen TE- und TM-Moden unterschieden werden. Die zugehörigen Eigenwertgleichungen sind

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} G_m(k_{\varrho 1}) + \frac{M_m^{01}(k_{\varrho 2})}{M_m^{00}(k_{\varrho 2})} = 0 \quad (\text{TM-Moden}) , \quad (3.44)$$

$$G_m(k_{\varrho 1}) + \frac{M_m^{11}(k_{\varrho 2})}{M_m^{10}(k_{\varrho 2})} = 0 \quad (\text{TE-Moden}) . \quad (3.45)$$

Analog zu dem im vorherigen Unterkapitel betrachteten planaren Wellenleiter lässt sich das Modenspektrum in unterschiedliche Bereiche aufteilen. Lösungen der Eigenwertgleichung mit

$$0 < k_{\varrho 1}^2 < k_0^2(n_1^2 - n_2^2) \quad (3.46)$$

gehören dem Bereich der geführten Moden an. Im Intervall

$$k_0^2(n_1^2 - n_2^2) < k_{\varrho 1}^2 < k_0^2 n_1^2 \quad (3.47)$$

nimmt  $k_{\varrho 2}$  imaginäre Werte an. Da  $k_z$  noch reell ist, kennzeichnet dieses Intervall den Bereich der Strahlungsmoden. Falls

$$k_0^2 n_1^2 < k_{\varrho 1}^2 \quad (3.48)$$

gilt, ist auch  $k_z$  rein imaginär. Die zugehörigen Moden sind evaneszente Moden. In den letzten beiden Fällen empfiehlt sich die Substitution der rein imaginären Wellenzahl  $k_{\varrho 2}$  gemäß

$$k_{\varrho 2} \longrightarrow \tilde{k}_{\varrho 2} = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - k_z^2}. \quad (3.49)$$

Die Besselschen Funktionen  $I_m$  und  $K_m$  sowie die Funktion  $G_m$  können gemäß

$$I_m(k_{\varrho 2}, \varrho) \longrightarrow J_m(\tilde{k}_{\varrho 2}, \varrho), \quad (3.50a)$$

$$K_m(k_{\varrho 2}, \varrho) \longrightarrow N_m(\tilde{k}_{\varrho 2}, \varrho), \quad (3.50b)$$

$$G_m(k_{\varrho 1}, k_{\varrho 2}) \longrightarrow -G_m(k_{\varrho 1}, \tilde{k}_{\varrho 2}) \quad (3.50c)$$

substituiert werden. Konsequenterweise kann somit auch das Spektrum der Strahlungsmoden und der evaneszenten Moden wiederum durch reelle Funktionen beschrieben werden.

### 3.2.2. Lösung der Eigenwertgleichung und geführte Leistung pro Mode

Analog zum Schichtwellenleiter kann die Eigenwertgleichung (3.41) so dargestellt werden, dass sich in einer grafischen Darstellung zwischen zwei benachbarten Singularitäten wiederum genau eine Lösung befindet. Dazu wird (3.41) wie folgt umgestellt

$$\frac{m^2 k_z^2 k_0^2 (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})^2}{r_d^2 \varepsilon_{r2} k_{\varrho 2}^2 k_{\varrho 1}^4} \left( G_m + \frac{M_m^{11}}{M_m^{10}} \right)^{-1} = \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} G_m + \frac{M_m^{01}}{M_m^{00}} \right). \quad (3.51)$$

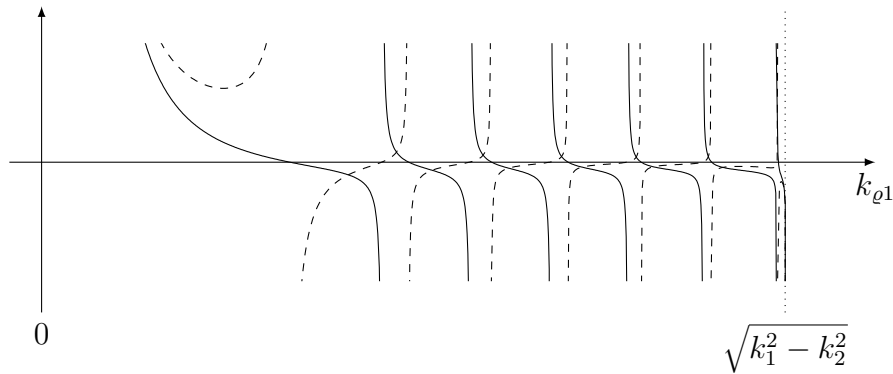


Abbildung 3.5.: Exemplarische grafische Darstellung der links- (gestrichelt) und rechtsseitigen Funktionen der Eigenwertgleichung (3.51) für den Bereich der geführten Moden.

Die Funktion  $G_m$  weist in Abhängigkeit von  $k_{\varrho 1}$  ein oszillatorisches Verhalten auf und bestimmt maßgeblich die Singularitäten von (3.51) für den Bereich der geführten Moden. Die linksseitige Funktion von (3.51) ist exemplarisch in Abbildung 3.5 gestrichelt dargestellt und abgesehen vom ersten Intervall monoton steigend zwischen ihren Singularitäten. Die rechtsseitige Funktion verläuft dagegen monoton fallend zwischen ihren Singularitäten. Die Singularitäten der Funktion  $G_m$  sind durch die Nullstellen der Besselfunktion  $J_m(k_{\varrho 1}a)$  gegeben. Da diese bekannt sind und in numerischen Bibliotheken verfügbar sind, dienen sie als Basis für eine algorithmische Lösungssuche. Lediglich die Intervalle vor der ersten und nach der letzten Singularität müssen separat untersucht werden.

Im Bereich der Strahlungsmoden weisen die Funktionen  $M_m^{00}$ ,  $M_m^{01}$ ,  $M_m^{10}$  und  $M_m^{11}$  ebenfalls ein oszillatorisches Verhalten auf. Das aufgezeigte Prinzip der algorithmischen Lösungssuche ändert sich jedoch nicht. Die Bedingung monoton steigender und fallender Funktionen ist weiterhin erfüllt. Allerdings nimmt die Anzahl der Lösungen pro Abschnitt  $\Delta k_{\varrho 1}$  in Abhängigkeit des Radius des leitenden Schirms  $r_s$  deutlich zu. Für  $r_s \rightarrow \infty$  lassen sich schließlich keine diskreten Moden mehr angeben. Es liegt daher nahe, dass auch schon bei endlichem Radius die Genauigkeit einer Double-Variablen, etwa 15 Dezimalstellen, möglicherweise nicht ausreicht, um alle Eigenwerte mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen; mehr dazu im Kapitel 4.3.4.

Zur Bestimmung des Leistungsflusses muss die Integration des Poyntingvektors nun im kreiszyklindrischen Koordinatensystem erfolgen:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \iint_{z=0} \underline{S}_z \varrho \, d\varrho \, d\varphi \right\}. \quad (3.52)$$

Darin berechnet sich die  $z$ -Komponente des Poyntingvektors mit Hilfe der Ausdrücke (3.35)

zu

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_z = \frac{1}{2(k_i^2 - k_z^2)^2} & \left( \left( \omega \varepsilon_i k_z |B'_{1i}(\varrho)|^2 + m \frac{|k_z|^2}{\varrho} B'_{1i}(\varrho) B_{2i}^*(\varrho) \right. \right. \\
 & \left. \left. + m \frac{k_i^2}{\varrho} B_{1i}^*(\varrho) B_{2i}(\varrho) + m^2 \frac{\omega \mu k_z^*}{\varrho^2} |B_{2i}(\varrho)|^2 \right) \sin^2(m\varphi) \right. \\
 & + \left( m^2 \frac{\omega \varepsilon_i k_z}{\varrho^2} |B_{1i}(\varrho)|^2 + m \frac{|k_z|^2}{\varrho} B_{1i}(\varrho) B_{2i}^*(\varrho) \right. \\
 & \left. \left. + m \frac{k_i^2}{\varrho} B_{1i}^*(\varrho) B_{2i}'(\varrho) + \omega \mu k_z^* |B_{2i}'(\varrho)|^2 \right) \cos^2(m\varphi) \right). \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

Für die erforderlichen Integrationen sind Stammfunktionen bekannt. Exemplarisch wird im Anhang A.2.2 die Lösung von (3.52) für den Bereich der geführten Moden hergeleitet.

### 3.3. Rechteckförmige Wellenleiter

Die Felder des planaren Schichtwellenleiters und der Faser lassen sich analytisch berechnen, da sich die Randbedingungen formulieren lassen, indem jeweils nur eine Koordinate konstant gesetzt wird. Dadurch lassen sich die jeweiligen Randwertprobleme mit Hilfe eines Produktansatzes lösen. Im Fall des rechteckförmigen dielektrischen Wellenleiters ist dies nicht mehr möglich. Bereits im Jahr 1969 wurden von Marcatili [44] und Goell [18] zwei grundlegend unterschiedliche Lösungsansätze für die Bestimmung der geführten Moden vorgestellt. Während Marcatili durch Vernachlässigung bestimmter Feldanteile im Mantel einen approximativen analytischen Lösungsweg beschreibt, zeigte Goell ein erstes effizientes numerisches Verfahren auf. Beide Verfahren werden noch heute oft referenziert und im Folgenden kurz vorgestellt. Anschließend wird noch auf die weiteren, mittlerweile fortgeschrittenen numerischen Methoden eingegangen.

#### 3.3.1. Näherungslösungen von Marcatili

Im Folgenden soll nur das grundlegende Prinzip des Marcatili-Ansatzes vorgestellt werden. Daher beschränkt sich dieser Abschnitt auf die Beschreibung der bzgl. beider kartesischen Richtungen geraden Moden des offenen symmetrischen Rechteckwellenleiters. Die Beschreibung der ungeraden Moden kann aber direkt abgeleitet werden. Eine umfassende Darstellung auch für den asymmetrischen Wellenleiter befindet sich z.B. in [47]. Es sei erwähnt, dass Marcatili ursprünglich Singlemode-Koppelstrukturen untersuchte. Mittlerweile wird sein Ansatz jedoch oft auch für Multimode-Wellenleiter verwendet [39].

Der Lösungsansatz von Marcatili beruht auf der Vernachlässigung der Feldanteile in den Eckbereichen des Mantels. Gemäß der Abbildung 3.6 sind dies die Bereiche für die gilt  $\frac{d_x}{2} < |x| \wedge \frac{d_y}{2} < |y|$ . Aufgrund der Symmetrie des Wellenleiters braucht nur ein Viertel der Wellenleitergeometrie explizit berücksichtigt werden. Außerhalb dieses Bereichs wird der

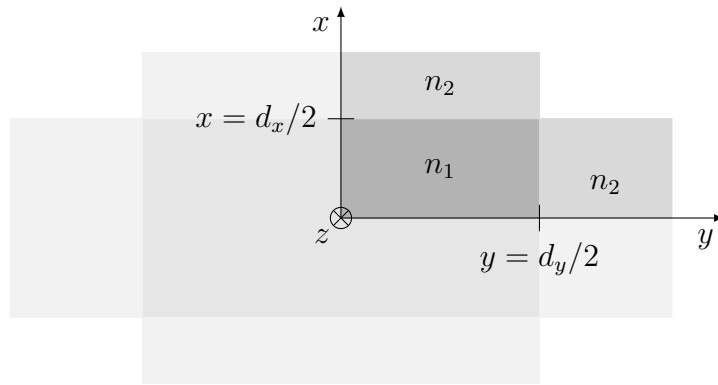


Abbildung 3.6.: Geometrie des Rechteckleiters. Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel explizit betrachtet.

Feldansatz entsprechend gerade fortgesetzt. Willkürlich wird eine Polarisierung gewählt, in der die  $y$ -Komponente der magnetischen Feldstärke gegenüber der  $x$ -Komponente dominiert. Mit Blick auf die zu erfüllenden Randbedingungen wird der folgende Ansatz gewählt:

$$\underline{H}_x \approx 0, \quad \underline{H}_y = \begin{cases} \cos(k_x x) \cos(k_y y) & \text{für } x < \frac{d_x}{2}, y < \frac{d_y}{2} \\ A_2 e^{-k_{x2} x} \cos(k_y y) & \text{für } x > \frac{d_x}{2}, y < \frac{d_y}{2} \\ A_3 \cos(k_x x) e^{-k_{y3} y} & \text{für } x < \frac{d_x}{2}, y > \frac{d_y}{2}. \end{cases} \quad (3.54)$$

Die übrigen Feldkomponenten berechnen sich gemäß den Maxwellschen Gleichungen:

$$\underline{H}_z = \frac{1}{jk_z} \begin{cases} -k_y \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ -k_y A_2 e^{-k_{x2} x} \sin(k_y y) \\ -k_{y3} A_3 \cos(k_x x) e^{-k_{y3} y}, \end{cases} \quad (3.55)$$

$$\underline{E}_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_i} \begin{cases} -k_x \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ -k_{x2} A_2 e^{-k_{x2} x} \cos(k_y y) \\ -k_x A_3 \sin(k_x x) e^{-k_{y3} y}, \end{cases} \quad (3.56)$$

$$\underline{E}_x = \frac{1}{\omega\epsilon_i k_z} \begin{cases} (k_y^2 + k_z^2) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \\ (k_y^2 + k_z^2) A_2 e^{-k_{x2} x} \cos(k_y y) \\ (-k_{y3}^2 + k_z^2) A_3 \cos(k_x x) e^{-k_{y3} y}, \end{cases} \quad (3.57),$$

$$\underline{E}_y = \frac{1}{\omega\epsilon_i k_z} \begin{cases} k_y k_x \sin(k_x x) \sin(k_y y) \\ k_y k_{x2} A_2 e^{-k_{x2} x} \sin(k_y y) \\ k_{y3} k_x A_3 \sin(k_x x) e^{-k_{y3} y}. \end{cases} \quad (3.58)$$

Im Bereich der geführten Moden gilt bei hinreichender Führung der Moden

$$k_x, k_y \ll k_z \quad \text{bzw.} \quad k_x, k_y \ll k_0 n_1, k_0 n_2. \quad (3.59)$$

Folglich dominiert gemäß (3.57) und (3.58) die  $x$ -Komponente der elektrischen Feldstärke deutlich die  $y$ -Komponente. Die somit beschriebenen Moden können als quasi- $x$ -polarisiert angesehen werden. Für die Phasenkonstanten gilt weiter:

$$k_z^2 = k_0^2 n_1^2 - k_x^2 - k_y^2 \quad (3.60)$$

$$= k_0^2 n_2^2 + k_{x2}^2 - k_y^2 \quad (3.61)$$

$$= k_0^2 n_2^2 - k_x^2 + k_{y3}^2. \quad (3.62)$$

Die Bestimmung der noch unbekannten Konstanten erfolgt durch Auswertung der Randbedingungen. Zunächst in  $x = d_x/2$ :

$$\underline{\mathcal{H}}_y, \underline{\mathcal{H}}_z : \quad \cos(k_x d_x/2) = A_2 e^{-k_{x2} d_x/2}, \quad (3.63)$$

$$\underline{\mathcal{E}}_y, \underline{\mathcal{E}}_z : \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} k_x \sin(k_x d_x/2) = k_{x2} A_2 e^{-k_{x2} d_x/2}. \quad (3.64)$$

Die Konstante  $A_2$  lässt sich unmittelbar aus einer der Gleichungen bestimmen, wenn die  $k_x$  die Eigenwertgleichung erfüllt, die sich durch Division der beiden Gleichungen ergibt:

$$\tan(k_x a/2) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{k_{x2}}{k_x}. \quad (3.65)$$

Darin kann  $k_{x2}$  mit Hilfe von (3.60) und (3.61) substituiert werden. Gleichung (3.65) entspricht der Eigenwertgleichung der geraden TM-Moden eines offenen Schichtwellenleiters.

Aus den Randbedingungen in  $y = d_y/2$  folgt

$$\underline{\mathcal{H}}_z : \quad k_y \sin(k_y d_y/2 + \beta) = k_{y3} A_3 e^{-k_{y3} d_y/2}, \quad (3.66)$$

$$\underline{\mathcal{E}}_x : \quad \frac{1}{\varepsilon_1} (k_0^2 \varepsilon_{r1} - k_x^2) \cos(k_y d_y/2) = \frac{1}{\varepsilon_2} (k_0^2 \varepsilon_{r2} - k_x^2) A_3 e^{-k_{y3} d_y/2}, \quad (3.67)$$

$$\underline{\mathcal{E}}_z : \quad \frac{1}{\varepsilon_1} \cos(k_y d_y/2) = \frac{1}{\varepsilon_2} A_3 e^{-k_{y3} d_y/2}. \quad (3.68)$$

Aufgrund des fehlerhaften Ansatzes muss es im Laufe der Rechnung zu Unstimmigkeiten kommen. Dies ist nun der Fall. Die Gleichungen (3.67) und (3.68) lassen sich nicht unabhängig voneinander erfüllen. Mit der Annahme (3.59) kann jedoch  $k_x$  gegenüber  $k_0^2 \varepsilon_{r2}$  vernachlässigt werden und (3.67) geht über in

$$\cos(k_y d_y/2) = A_3 e^{-k_{y3} d_y/2}. \quad (3.69)$$

Mit (3.69) und (3.66) lässt sich dann  $A_3$  bestimmen und die Eigenwertgleichung für die  $k_y$  ableiten:

$$\tan(k_y d_y/2) = \frac{k_{y3}}{k_y}. \quad (3.70)$$

Diese entspricht der Eigenwertgleichung der geraden TE-Moden des offenen Schichtwellenleiters.

Dem Modell der Marcatili-Moden liegt also die Annahme (3.59) zu Grunde. Anschaulich heißt das, die Feldoszillation in transversaler Richtung ist klein gegenüber der Oszillation in Ausbreitungsrichtung. Die Näherung (3.59) lässt sich wie folgt quantisieren. Gemäß (3.21) liegen die  $k_x, k_y$  im Bereich

$$0 < k_x, k_y < k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (3.71)$$

Aus (3.59) folgt damit als obere Abschätzung für den höchsten gerade noch geführten Mode

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \ll n_2. \quad (3.72)$$

Diese Bedingung unterstützt die allgemein Annahme, dass die Näherungslösungen von Marcatili für schwach führende Wellenleiter genauere Ergebnisse liefern. Allerdings dringen



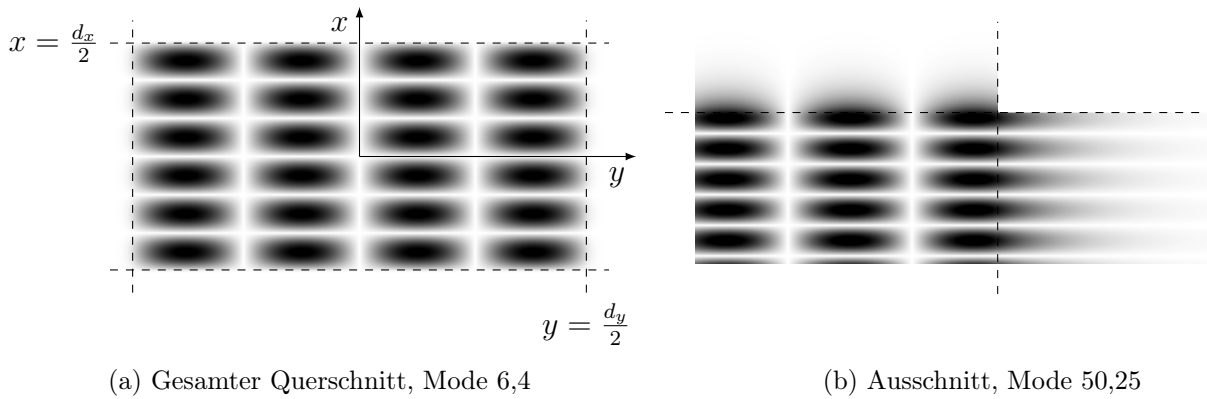


Abbildung 3.7.: Betrag der elektrischen Feldstärke zweier quasi  $x$ -polarisierter Moden.

die Felder im Wellenleiter mit kleiner NA im Mittel aller Moden auch weiter in den Mantel ein, so dass die Vernachlässigung der Feldanteile in den Eckbereichen möglicherweise zu einem erhöhten Fehler führt.

Eine direkte Auswertung der Bedingungen (3.59) und (3.72) zur Ableitung eines Fehlermaßes ist schwierig bzw. nicht sehr aussagekräftig. Eine weitere Methode zur Abschätzung der Phasenkonstanten ist die Methode der effektiven Brechzahl [36]. In der ursprünglichen Form berechnet diese Methode die Phasenkonstanten ebenfalls aus der Kombination zweier Schichtwellenleiter<sup>1</sup>. Jedoch wird das Kernmaterial des zweiten Schichtwellenleiters aus den effektiven Brechzahlen des ersten Schichtwellenleiters gebildet. Die resultierenden effektiven Brechzahlen des rechteckförmigen Wellenleiters sind in der Regel größer als die Näherungslösungen von Marcatili und überschätzen die exakte Lösung etwas. Mittlerweile existieren jedoch diverse Erweiterungen zur klassischen Vorgehensweise. Diese haben die Vermutung bestätigt, dass die Näherungslösungen von Marcatili die Führung der Moden unterschätzt [11, 47]. Mit einer verbesserten Abschätzung der Phasenkonstanten liegt jedoch nicht automatisch eine bessere Feldlösung vor. Grundsätzlich ist es zwar denkbar, aus der effektiven Brechzahl Ausdrücke für die transversalen Phasenkonstanten  $k_x$  und  $k_y$  abzuleiten und diese in der vorhandenen Feldlösung (3.55) - (3.58) zu verwenden. Dieser Ansatz soll hier jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Zur Illustration zeigt Abbildung 3.7 zwei Feldbilder nach dem Lösungsansatz von Marcatili für die Parameter  $n_1 = 1,57$  und  $n_2 = 1,55$  sowie  $d_x = 50 \mu\text{m}$  und  $d_y = 100 \mu\text{m}$ . In der gewählten quasi  $x$ -Polarisation existieren 30 Lösungen der Eigenwertgleichung (3.65) für die  $k_x$  und 59 Lösungen der Eigenwertgleichung (3.70) für die  $k_y$ , die jeweils mit den geführten Moden des jeweiligen Schichtwellenleiters korrespondieren. Insgesamt existieren jedoch nur 1370 Kombinationen, die gemäß (3.60) eine effektive Brechzahl hervorrufen, die größer als die Mantelbrechzahl ist und damit den Bereich der geführten Moden zuzuordnen sind. Wie oben erwähnt unterschätzt der Marcatili-Ansatz die Phasenkonstanten etwas, so dass ggf. auch Moden mit  $n_{\text{eff}} < n_2$  als geführte Moden einzuordnen sind. Abbildung 3.7a zeigt

<sup>1</sup>Diese Aussage bezieht sich wiederum auf symmetrische Wellenleiter. Asymmetrische Wellenleiter erfordern einige zusätzliche Rechenschritte.

den Betrag der elektrischen Feldstärke des 6,4-Modes<sup>2</sup> und soll lediglich verdeutlichen, dass die Feldlösungen im Kern einem vollkommen symmetrischen Felddbild entsprechen. Abbildung 3.7b zeigt einen Ausschnitt des Felddbildes des 50,25-Modes. Die Felder dringen nun bereits deutlich in den Mantel ein und der Fehler durch Vernachlässigung der Felder in den Eckbereichen steigt.

Da sich die Näherungslösungen von Marcatili auf den offenen Wellenleiter beziehen, sei noch erwähnt, dass auch für eine geschlossene Anordnung keine exakte analytische Feldlösung existiert. Es gibt jedoch Arbeiten, die Näherungslösungen für geschlossene Wellenleiter behandeln [77].

### 3.3.2. Numerische Verfahren

In der Literatur sind viele unterschiedliche numerische Verfahren bekannt. Alle gängigen Verfahren lassen sich auch für die Bestimmung der Moden dielektrischer Wellenleiter verwenden. Es seien hier beispielsweise Finite-Elemente-Methoden, Finite-Differenzen-Methoden, Finite-Integrations-Methoden und Randelementmethoden genannt. Einen Überblick verschafft u.a. [10, 71, 72]. Zunächst sollen jedoch Beispiele für Verfahren vorgestellt werden, die nicht die Querschnittsebene des Wellenleiters diskretisieren, sondern den Lösungsraum der Helmholtzgleichung.

#### Reihenentwicklungen

In der Mathematik ist es oft hilfreich, Funktionen durch Reihenentwicklungen auszu-drücken oder zu approximieren. Klassische Beispiele sind Taylorreihen und Fourierreihen. Es liegt daher nahe, auch Lösungen der Maxwellschen Gleichungen durch Reihenentwicklungen zu approximieren, sofern keine exakte Lösung gefunden werden kann. Als Pionierarbeit für den Bereich der optischen Wellenleiter kann die von Goell 1969 präsentierte Methode [18] angesehen werden. Diese sieht einen abschnittsweise unterschiedlichen Ansatz in kreiszylindrischen Koordinaten für die  $z$ -Komponenten der Felder vor:

$$\underline{\mathcal{E}}_{zi}(\varrho, \varphi) = \sum_{n=0}^N a_n \Phi_{in}(\varrho) \sin(n\varphi + \gamma_i), \quad (3.73a)$$

$$\underline{\mathcal{H}}_{zi}(\varrho, \varphi) = \sum_{n=0}^N b_n \Phi_{in}(\varrho) \cos(n\varphi + \gamma_i). \quad (3.73b)$$

Der Index  $i$  kennzeichnet wieder die unterschiedlichen Raumbereiche. Analog zur kreiszylindrischen Faser müssen im Kern gewöhnliche Besselfunktionen und im Mantel modifizierte Besselfunktionen angesetzt werden. Es gilt  $\Phi_{1n}(\varrho) = J_n(\sqrt{k_1^2 - k_z^2} \varrho)$  und  $\Phi_{2n}(\varrho) = K_n(\sqrt{k_z^2 - k_2^2} \varrho)$ . Über die Wahl der Phase  $\gamma_i = 0$  oder  $\gamma_i = \frac{\pi}{2}$  und die Wahl ausschließlich gerader oder ungerader Reihenindizes  $n$  lässt sich die Symmetrie des rechteckförmigen Wellenleiters berücksichtigen.

---

<sup>2</sup>6,4-Mode: Es wird die sechste Lösung von (3.65) und die vierte Lösung von (3.70) verwendet.

Zur Bestimmung der Gewichte  $a_n$  und  $b_n$  werden mit Hilfe eines Point-Matching entsprechend der Anzahl der Gewichte viele Gleichungen abgeleitet. D.h. die Randbedingungen werden nur an endlich vielen äquidistanten Stellen ausgewertet. Das so gewonnene Gleichungssystem besitzt nur dann eine nichttriviale Lösung, falls die Determinante der Systemmatrix verschwindet. Die Nullstellen der Determinante entsprechen den Eigenwerten der Moden. Wie viele Reihenglieder  $(N + 1)$  tatsächlich angesetzt werden müssen, hängt insbesondere auch von der Ordnung des zu bestimmenden Modes ab. Der Grundmode lässt sich oft bereits mit sehr wenigen Reihengliedern approximieren. Leider ist das Verfahren insgesamt numerisch schlecht konditioniert, so dass die Qualität der Lösungen mit wachsender Anzahl Reihenglieder nachlässt. Der Aufwand zur Berechnung eines Modes höherer Ordnung ist somit sehr hoch, sofern der Mode überhaupt bestimmt werden kann.

Es ist auch nicht grundsätzlich geklärt, ob dieser Ansatz für  $N \rightarrow \infty$  gegen die exakte Lösung konvergiert [72]. Ohnehin mag es abwegig erscheinen, die Moden eines Wellenleiters mit rechteckförmiger Geometrie durch Zylinderfunktionen zu approximieren. Eine alternative Vorgehensweise sieht trigonometrische Ansatzfunktionen vor [24]. Dieses wurde zunächst nur als Lösung der skalaren Wellendifferenzialgleichung formuliert:

$$\Delta_t \underline{\mathcal{E}}(\vec{r}_t, \omega) + (k_i^2 - k_z^2) \underline{\mathcal{E}}(\vec{r}_t, \omega) = 0. \quad (3.74)$$

Darin ist  $\underline{\mathcal{E}}$  die dominierende transversale Komponente der elektrischen Feldstärke eines Modes. Der Lösungsansatz entspricht einer zweidimensionalen Fourierreihe, die hier ungerade angesetzt wird:

$$\underline{\mathcal{E}}(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} \Phi_{nm}(x, y) \quad \text{mit} \quad \Phi_{nm}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right). \quad (3.75)$$

Darin definieren  $L_x$  und  $L_y$  ein kartesisches Fenster, auf dessen Rand die Feldgrößen hinreichend gut abgeklungen sind. Die Ansatzfunktionen  $\Phi_{nm}$  sind im Gegensatz zum Ansatz von Goell (3.73) unabhängig von der Ausbreitungskonstanten  $k_z$ . Eingesetzt in (3.74) lässt sich unter Ausnutzung der Orthogonalität der  $\Phi_{nm}$  ein Eigenwertproblem zur Bestimmung der  $k_z$  und  $c_{nm}$  ableiten.

Die Lösungsansätze (3.73) und (3.75) sollen nur exemplarisch die grundlegenden Ansätze beschreiben. Diese wurden in der Vergangenheit in vielen wissenschaftlichen Arbeiten überarbeitet, u.a. [45, 55, 70, 73]. Die Untersuchungen beschränken sich jedoch im Wesentlichen wiederum auf Wellenleiter mit wenigen geführten Moden. Für hochmultimodale Wellenleiter und insbesondere für Moden nahe dem Cut-Off sind die vorgestellten Verfahren jedoch oft unzuverlässig und nicht leistungsfähig. Ein Vergleich zwischen den Lösungen von Goell und Marcatili befindet sich z.B. in [41].

### Weitere numerische Lösungsansätze

Wie einleitend erwähnt existiert eine Vielzahl unterschiedlicher klassischer Verfahren. Im Folgenden sollen nur die grundlegenden Probleme angesprochen werden, die im Grunde alle Verfahren gemeinsam haben.



Abbildung 3.8.: Betrag der elektrischen Feldstärke der Überlagerung zweier näherungsweise entarteter Moden nahe dem Cut-Off. Exemplarisches Simulationsergebnis aus Comsol®.

Eine Schwierigkeit bei der Verwendung gitterbasierter Verfahren ist der Speicherbedarf. Da sich die Problemstellungen auf die Querschnittsebene beschränken, bezieht sich diese Aussage mittlerweile weniger auf den Bedarf zur Rechenzeit, als vielmehr auf den Bedarf zur Nachbearbeitungszeit. Das Abspeichern der Feldlösungen einiger hundert bis tausender hybrider Moden kann in Abhängigkeit der absoluten Abmessungen und der gewählten Diskretisierung bis zu einigen Terabyte Speicher erfordern. Im Zuge steigender Festplattenkapazitäten löst sich dieses Problem jedoch wahrscheinlich in Zukunft ohne weiteres Zutun. Die erforderlichen Rechenzeiten liegen bereits jetzt selbst bei Verwendung konventioneller PC-Hardware in einem akzeptablen Bereich. Einige hundert Moden lassen sich je nach eingesetztem Verfahren in der Regel innerhalb weniger Minuten berechnen<sup>3</sup>.

Die größte Schwierigkeit in der Modellierung hochmultimodaler Wellenleiter ist die näherungsweise Entartung der Moden, die insbesondere nahe dem Cut-Off eine eindeutige Zuordnung der Moden erschwert. In jedem Fall sollten mögliche Symmetrien in der Geometrie ausgenutzt werden, um die mögliche Entartung zwischen Moden unterschiedlicher Polarisierung zu berücksichtigen und um das Rechengebiet minimal klein zu halten. Dennoch lassen sich auch durch eine feinere Diskretisierung des Rechengebiets aufgrund der stets endlichen Rechengenauigkeit nicht immer alle Moden eines Wellenleiters isolieren. Exemplarisch zeigt Abbildung 3.8 die Ausgabe einer Rechnung mit Hilfe der Simulationsumgebung COMSOL®, welche auf der Methode der Finiten Elemente (FEM) basiert. Dargestellt ist der Betrag der elektrischen Feldstärke eines Moden nahe dem Cut-Off. Mit großer Wahrscheinlichkeit handelt es sich jedoch um die Überlagerung zweier näherungsweise entarteter Moden.

Obwohl die Feldlösung aus Abbildung 3.8 im Rahmen der verfügbaren Rechengenauigkeit durchaus eine korrekte Lösung der Helmholtzgleichung darstellen kann, offenbart sich an

<sup>3</sup>Die Angaben beziehen sich auf die in dieser Arbeit betrachteten Wellenleiter. Getestet wurden die Simulationsumgebungen COMSOL® und CST MICROWAVE STUDIO® auf konventioneller PC-Hardware, z.B. 2,4 GHz Prozessor mit 4 GB Arbeitsspeicher.

dieser Stelle ein weiteres elementares Problem. Um letztlich effektiv mit den gewonnenen Feldlösungen arbeiten zu können, beispielsweise die Einkopplung in den Wellenleiter zu analysieren, muss zumindest das Spektrum der geführten Moden vollständig bestimmt sein. Aktuell ist kein Verfahren verfügbar, das automatisiert diese Vollständigkeit garantieren kann. Stattdessen muss so weit möglich visuell kontrolliert werden, welche Moden dem vollständigen Spektrum geführter Moden zuzuordnen sind.

Der Vergleich zwischen den Feldlösungen von Marcatili und der FEM-Simulation hat im Übrigen eine gute Übereinstimmung für Moden mit hinreichend großer effektiver Brechzahl hervorgebracht. Je kleiner die Differenz zwischen effektiver Brechzahl und Mantelbrechzahl ist, desto stärker sind jedoch die Abweichungen. Aufgrund der Schwierigkeiten beider Verfahren bei der Bestimmung der Moden nahe dem Cut-Off wird an dieser Stelle auf einen expliziten Vergleich anhand eines definierten Fehlermaßes verzichtet.



## 4. Koppeleffizienz Gaußscher Eingangsstrahlen

Die Schnittstelle zwischen Laserdiode und optischem Wellenleiter ist aufgrund der hohen Toleranzanforderungen bei der Montage stets ein kritischer Punkt im Aufbau optischer Datenübertragungsstrecken [5]. In der Faseroptik gibt es eine große Anzahl verschiedener Stecksysteme, die eine hinreichend gute Kopplung gewährleisten. Es ist nicht grundsätzlich ausgeschlossen diese Stecksysteme auch für die Anbindung an die in der Leiterplatte eingebetteten Wellenleiter zu verwenden. Stecker und Buchse müssen jedoch entsprechend adaptiert werden. Alternativ müssen neue Koppellösungen entwickelt werden. Die in diesem Entwicklungsprozess eingesetzten Simulationswerkzeuge beruhen meist auf strahlenoptischen Methoden. Ziel dieses Kapitels ist die Verifikation dieser strahlenoptischen Methoden, die bekanntlich nur eine Näherungslösung für hinreichend große Geometrien darstellen. Als Referenzfeld dient der monochromatische Gaußstrahl, der zwar nur näherungsweise das Feld einer realen Laserdiode wiedergibt, aber aufgrund seiner geschlossenen mathematischen Beschreibung gut für den Vergleich zwischen Wellenoptik und Strahlenoptik geeignet ist.

Im Kapitel 4.1 wird zunächst das wellentheoretische Modell mit seinen Parametern und den wesentlichen Modellierungsschritten vorgestellt. Anschließend werden im Kapitel 4.2 grundlegende Ergebnisse für die erreichbare Koppeleffizienz bei der Einkopplung in die kreiszylindrische Faser vorgestellt. Da sich die Betrachtungen zur Wellenausbreitung im Kapitel 5 gänzlich auf den planaren Schichtwellenleiter konzentrieren, werden die Unterschiede bei der Einkopplung kurz diskutiert. Der Einfluss verschiedener Simulationsparameter, wie z.B. die Anzahl zu berücksichtigender Moden, und die damit verbundenen Grenzen des Modells werden in Kapitel 4.3 besprochen. Die zentralen Ergebnisse des Vergleichs zwischen Wellenoptik und Strahlenoptik werden dann im Kapitel 4.4 präsentiert. Am Anfang dieses Kapitels stehen einige Erläuterungen zum strahlenoptischen Modell. Zum Abschluss werden im Kapitel 4.5 einige Ergebnisse für den Rechteckwellenleiter diskutiert. Da auf Basis der Marcatili-Moden nur Lösungen für die geführten Moden existieren, wird einleitend ein Näherungsverfahren zur wellentheoretischen Analyse vorgestellt.

### 4.1. Modellparameter und Modellierungsschritte

Zur Einordnung des Simulationsaufwands werden in diesem Kapitel die wesentlichen Modellierungsschritte vorgestellt. Der Modellierungsprozess lässt sich in vier Schritte aufteilen:

- Charakterisierung des Modenspektrums der beteiligten Wellenleiter, insbesondere Berechnung der Eigenwerte (Kapitel 3).
- Beschreibung der einfallenden Wellen durch Moden eines Hohlleiters (Kapitel 4.1.2).
- Berechnung der im Rahmen der Methode des Mode-Matchings auftretenden Überlappintegrale (Kapitel 4.1.3).
- Durchführung des Mode-Matchings, d.h. Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems (Kapitel 4.1.4).

Die Charakterisierung der Modenspektren wurde im Kapitel 3 hinreichend diskutiert. Die verbleibenden drei Schritte werden im Folgenden näher beleuchtet. Zunächst werden jedoch die betrachteten Geometrie- und Materialparameter vorgestellt, da diese essentiell für alle weiteren Betrachtungen sind.

#### 4.1.1. Geometrie- und Materialparameter, Parametrisierung der Quelle

Das theoretische Modell der optischen Stufenindexfaser ist mit Definition der Kern- und Mantelbrechzahl sowie dem Kerndurchmesser vollständig definiert. In der Praxis müsste zumindest noch der Durchmesser des Mantels angegeben werden, welcher an dieser Stelle zunächst als hinreichend groß angenommen wird. Der planare Schichtwellenleiter kann zusätzlich ein asymmetrisches Brechzahlprofil aufweisen. Die Untersuchungen dieser Arbeit beschränken sich jedoch auf den symmetrischen Wellenleiter. Aus den Brechungsindices leitet sich unmittelbar die Numerische Apertur  $NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$  sowie der Einfallswinkel  $\Theta_c = \arcsin(NA)$  ab. Dieser Einfallswinkel bezogen auf die Wellenleiterachse definiert im planaren Fall die Grenze, bis zu der ein einfallender Strahl noch im Kern geführt wird. Im Fall einer zweidimensionalen Querschnittsgeometrie ist  $\Theta_c$  nur eine gute Näherung. Mehr dazu in Kapitel 4.4.

In der Tabelle 4.1 sind einige Werte für unterschiedliche Parameterkonfigurationen aufgelistet. Dabei ist die Wellenlänge  $\lambda$  ebenso wie die Kernbrechzahl  $n_1$  konstant. Es gilt im Weiteren durchgehend

$$\boxed{\lambda = 850 \text{ nm} \quad \text{und} \quad n_1 = 1,57.} \quad (4.1)$$

Des Weiteren sind ein Kerndurchmesser von  $d = 70 \mu\text{m}$  und eine Mantelbrechzahl von  $n_2 = 1,55$  Ausgangsparameter, die jedoch im Verlauf der Arbeit variiert werden. In Abhängigkeit des Kerndurchmessers sowie der Mantelbrechzahl werden die maximale azimuthale Ordnung  $M_F$ , die Anzahl der geführten Moden, die numerische Apertur  $NA$  und der Einfallswinkel  $\Theta_c$  angegeben. Die Angabe der Anzahl geführter Moden bezieht sich auf eine Polarisierung. Die Anzahl geführter Fasermode  $N_F$  korrespondiert mit der Anzahl geführter Schichtwellenleitermoden  $N_S$  in etwa gemäß

$$N_F \approx \frac{\pi}{4} N_R \approx \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 N_S^2. \quad (4.2)$$



| $d/\mu\text{m}$ | $n_2$ | max Ord.<br>$M_F$ | Gef. Moden<br>$N_F(m=1) \quad N_S$ |    | $NA$  | $\Theta_c$ |
|-----------------|-------|-------------------|------------------------------------|----|-------|------------|
| 70              | 1,550 | 59                | 1075 (41)                          | 42 | 0,250 | 14,47°     |
| 50              | 1,550 | 41                | 554 (29)                           | 30 | 0,250 | 14,47°     |
| 30              | 1,550 | 24                | 208 (17)                           | 18 | 0,250 | 14,47°     |
| 10              | 1,550 | 7                 | 26 (5)                             | 6  | 0,250 | 14,47°     |
| 70              | 1,560 | 41                | 543 (29)                           | 30 | 0,177 | 10,19°     |
| 70              | 1,565 | 28                | 279 (21)                           | 21 | 0,125 | 7,19°      |
| 70              | 1,568 | 17                | 113 (13)                           | 14 | 0,079 | 4,54°      |

Tabelle 4.1.: Diverse Wellenleiterparameter für  $\lambda = 850 \text{ nm}$  und  $n_1 = 1,57$ .

Darin ist  $N_R$  eine Abschätzung für die Anzahl der geführten Moden des rechteckförmigen Wellenleiters. Voraussetzung für (4.2) ist eine hinreichend große Anzahl Schichtwellenleitermoden. Für kleine  $N_S$  stellt (4.2) nur eine sehr grobe Näherung dar. Für azimuthale Ordnungen  $m > M_F$  existieren keine geführten Fasern mehr. Sofern nur die Leistung in den geführten Moden interessiert, braucht daher beim Mode-Matching nur die maximale Ordnung  $M_F$  berücksichtigt zu werden. Die Anzahl geführter Fasern in der Ordnung  $m = 1$  ist ungefähr gleich  $N_S$ .

Neben den Geometrie- und Materialparametern des Wellenleiters ist die Parametrisierung der Quelle von fundamentaler Bedeutung. Das Feld der Quelle wird durch einen Gaußstrahl, wie er in Kapitel 2.2.3 vorgestellt wurde, approximiert. Bei gegebener Wellenzahl  $k$  werden die grundlegenden Eigenschaften des Gaußstrahls ausschließlich durch einen Parameter festgelegt: der Rayleigh-Länge  $z_0$ . Daraus abgeleitet ergibt sich mit (2.45) der Divergenzwinkel  $\Theta_{a0}$  des Strahls. Für die Wellenzahl sei  $k = k_0$  angenommen, d.h. der Bereich vor der Wellenleiterstirnfläche sei luftgefüllt mit  $n_0 = 1$ . In der Praxis wird dieser Fall vermieden, da die Reflexionsverluste maximal sind. In dieser Arbeit soll jedoch genau dieser ungünstigste Fall untersucht werden.

Um die effektive Strahlbreite in der Wellenleiterstirnfläche bei senkrechtem Einfall einzustellen, gibt es zwei mögliche unabhängige Vorgehensweisen, die auch miteinander kombiniert werden können. Die erste Möglichkeit besteht darin, die Rayleigh-Länge  $z_0$  und damit auch den asymptotischen Divergenzwinkel  $\Theta_{a0}$  konstant zu halten und den Abstand  $z_e$  der Strahltaile zur Wellenleiterstirnfläche zu variieren. Diese Vorgehensweise wird in dieser Arbeit favorisiert. Alternativ könnte der Abstand der Strahltaile konstant gehalten werden und über die Rayleigh-Länge  $z_0$  die Strahlbreite eingestellt werden. Im Extremfall befindet sich die Strahltaile direkt in der Grenzschicht, womit sich ebene Phasenfronten des Gaußstrahls in der Wellenleiterstirnfläche ergeben. Eine Kombination beider Möglichkeiten wäre, den lokalen Divergenzwinkel konstant zu halten, d.h. es gilt  $\partial/\partial z w(z) = \text{konstant}$ . Ein konstanter Divergenzwinkel vereinfacht die Interpretation und insbesondere den Vergleich der Ergebnisse für unterschiedliche geometrische Abmessungen. In dieser Arbeit wird daher vornehmlich ein Gaußstrahl mit einem asymptotischen Divergenzwinkel

| $b/\mu\text{m}$   | 6,18 | 10    | 20    | 30    | 40    | 50    | 60    | 70    |
|-------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $z_e/\mu\text{m}$ | 0    | 44,9  | 108,7 | 167,7 | 225,8 | 283,5 | 341,0 | 398,4 |
| $\Theta_a(z_e)$   | 0    | 3,94° | 4,76° | 4,89° | 4,94° | 4,96° | 4,97° | 4,98° |

Tabelle 4.2.: Axiale Verschiebung  $z_e$  des Gaußstrahls für  $\Theta_{a0} = 5^\circ$  zum Einstellen unterschiedlicher Strahlbreiten  $b = 2w(z_e)$  in der Wellenleiterstirnfläche.

$\Theta_{a0} = 5^\circ$  betrachtet. Größere Divergenzwinkel erhöhen den inhärenten Fehler der paraxialen Approximation, welcher in Kapitel 4.3.1 näher diskutiert wird. Bezogen auf die Wellenlänge  $\lambda = 850\text{ nm}$  ergibt sich im freien Raum die Rayleigh-Länge zu  $z_0 = 35,3\text{ }\mu\text{m}$ . In der Tabelle 4.2 sind typische Werte für die Strahlbreite  $b = 2w(z_e)$  und die zugehörigen Verschiebungen  $z_e$  aufgelistet. Des Weiteren ist der lokale Divergenzwinkel

$$\Theta_a(z_e) = \arctan \left( \frac{\partial w(z)}{\partial z} \right) \bigg|_{z=z_e} = \arctan \left( \sqrt{\frac{2z_e^2}{kz_0(z_e^2 + z_0^2)}} \right) \quad (4.3)$$

angegeben, der erst für sehr kleine Strahlbreiten deutlich vom asymptotischen Divergenzwinkel  $\Theta_{a0}$  abweicht, vgl. Abbildung 4.1b.

Ausgehend von der senkrechten meridionalen Positionierung der Strahlachse kann der Strahl um einen Winkel verdreht oder lateral verschoben werden. Der Fall einer gleichzeitigen Verdrehung und Verschiebung wird in dieser Arbeit nicht betrachtet. Daher braucht

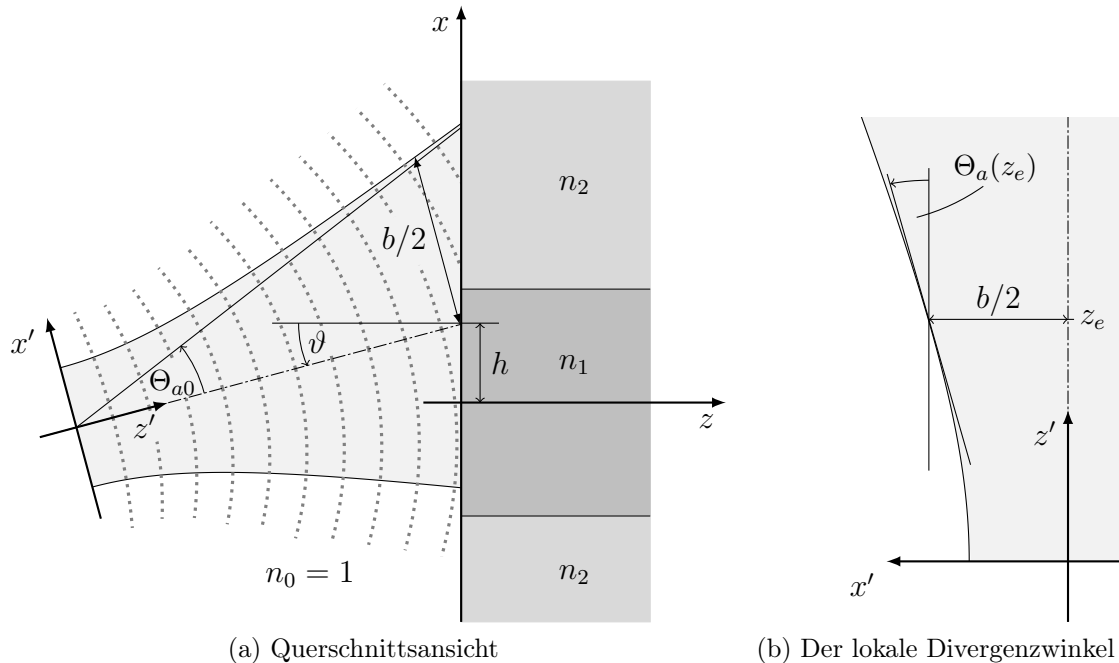


Abbildung 4.1.: Ausbreitungseigenschaften des Gaußstrahls. (a) Position des Gaußstrahls zur Wellenleiterstirnfläche. Die Strahlachse wird um den Winkel  $\vartheta$  verdreht oder um die Strecke  $h$  lateral verschoben. (b) Der lokale Divergenzwinkel ist stets etwas kleiner als der asymptotische Divergenzwinkel  $\Theta_{a0}$ .

nur die Verdrehung um eine Achse bzw. die Verschiebung in Richtung einer Achse explizit berechnet zu werden. Der jeweils orthogonale Fall kann durch Variation der Polarisierung des Gaußstrahls berücksichtigt werden. Abbildung 4.1a zeigt das definierte Modell zur Einkopplung im Querschnitt, das sowohl für die Faser als auch für den Schichtwellenleiter verwendet wird. Der Gaußstrahl wird somit um den Winkel  $\vartheta$  um die  $y$ -Achse verdreht oder um die Länge  $h$  lateral in  $x$ -Richtung verschoben. Die Feldbeschreibung (2.38) des Gaußstrahls bezieht sich auf das Koordinatensystem  $(x', y', z')$  und ist durch eine Koordinatentransformation, welche die Rotation und die Translation berücksichtigt, mit dem Koordinatensystem  $(x, y, z)$  verknüpft.

In Abbildung 4.1a nicht eingezeichnet ist der perfekt leitende Schirm, der die gesamte Anordnung umgibt. Der Einfluss dieses Schirms ist gering, sofern nur die in die geführten Moden eingekoppelte Leistung berechnet werden soll. Die Anzahl vorhandener Strahlungsmoden steigt jedoch mit wachsendem Durchmesser des Schirms. Dieser Durchmesser wurde standardmäßig auf das Doppelte des Ausgangskerndurchmessers  $s = 2d = 140 \mu\text{m}$  gesetzt. Zur Verifikation wurde der Durchmesser auf bis zu  $300 \mu\text{m}$  erhöht. Mit der Diskussion über einen sinnvollen Abstand des leitenden Schirms zum Wellenleiterkern beschäftigt sich Kapitel 4.3.2.

Neben den genannten physikalischen Parametern existiert eine Reihe weiterer Simulationsparameter, die in den folgenden Kapiteln vorgestellt werden. Kritische Simulationsparameter sind beispielsweise die Anzahl berücksichtigter Moden oder die Anzahl angesetzter Strahlen. Im wellentheoretischen Modell wurden stets alle propagierenden Moden berücksichtigt, mehr dazu im Kapitel 4.3.3. Um den Diskretisierungsfehler im strahlenoptischen Modell zu minimieren wurden bis zu  $2 \cdot 10^6$  Strahlen berücksichtigt, siehe auch Kapitel 4.4.2.

### 4.1.2. Spektraldarstellung der einfallenden Wellen

Die Durchführung des Mode-Matching-Verfahrens gemäß Kapitel 2.3.2 erfordert Felder, die durch Moden eines geschlossenen, längshomogenen Wellenleiters beschrieben werden. Zwar kann das Verfahren problemlos modifiziert werden, so dass die einfallende Welle explizit durch eine nahezu beliebige Feldlösung vorgegeben werden kann<sup>1</sup>. Die reflektierten und transmittierten Wellen müssen jedoch weiterhin durch ein diskretes Modenspektrum beschrieben werden, da ein kontinuierliches Modenspektrum ein System von Integralgleichungen hervorrufen würde, welches in der Regel nicht ohne Weiteres lösbar ist. In jedem Fall müssen Integrale über ein Produkt der Feldgrößen der einfallende Welle mit denen eines Wellenleitersmoden gebildet werden. Diese werden oft als Überlappintegrale bezeichnet und sind meist nur numerisch lösbar. Bei einer hohen Anzahl berücksichtigter Moden ist dies mit einem entsprechend großen Rechenaufwand verbunden. Ist, wie in dieser Arbeit, der Raum vor dem betrachteten dielektrischen Wellenleiter homogen, wird durch den eingefügten, perfekt leitenden Schirm ein homogener Hohlleiter gebildet. Sofern eine Entwicklung der einfallenden Welle in Moden dieses Hohlleiters möglich ist, können bei einmalig erfolgter Entwicklung beliebig viele unterschiedliche Wellenleiter untersucht werden. Bedingung ist natürlich ein konstanter Durchmesser des leitenden Schirms.

<sup>1</sup>Die rechte Seite in (2.85) oder (2.86) muss dann modifiziert werden.

Es wird angenommen, dass eine Approximation der Felder des Gaußstrahls (2.38) unter Verwendung der Notation aus Kapitel 2.3.1 gemäß der Reihenentwicklung

$$\underline{\vec{E}}^P(\vec{r}) \approx \sum_{\nu=0}^{N_W-1} \left( C_{\nu}^{TM} \underline{\vec{\mathcal{E}}}_{\nu}^{TM}(\vec{r}_t) \exp(-j\underline{k}_{z\nu}^{TM} z) + C_{\nu}^{TE} \underline{\vec{\mathcal{E}}}_{\nu}^{TE}(\vec{r}_t) \exp(-j\underline{k}_{z\nu}^{TE} z) \right) \quad (4.4)$$

möglich ist. Darin kennzeichnet der Index  $P$  die Feldgrößen des paraxialen Gaußstrahls. Analog erfolgt die Beschreibung der magnetischen Feldstärke. Da die Moden des homogenen Hohlleiters stets transversalelektrisch oder transversalmagnetisch sind, wurde bereits hier eine Aufteilung vorgenommen. Eine detaillierte Diskussion über die Anzahl  $N_W$  zu berücksichtigender Moden wird in Kapitel 4.3.3 geführt. Die Entwicklung (4.4) unterliegt drei wesentlichen systematischen Fehlern:

- Die Felder des Gaußstrahls füllen den gesamten Raum aus und werden durch den leitenden Schirm *abgeschnitten*.
- Es kann nur eine endliche Anzahl Moden für die Reihenentwicklung berücksichtigt werden.
- Die Felder des Gaußstrahls unterliegen der paraxiale Näherung.

Eine detailliertere Diskussion wird auf Kapitel 4.3 verschoben. Für den Moment sei angenommen, dass alle drei Fehler im Kontext dieser Arbeit vernachlässigbar sind.

## Parallelplattenleitung

Die Felder des planaren Gaußstrahls sind ebenfalls transversalelektrisch oder transversalmagnetisch, vgl. A.1.2. Die Beziehung (4.4) vereinfacht sich im Fall transversalelektrischer Felder somit zu

$$\underline{\vec{E}}^P(\vec{r}) \approx \sum_{\nu=0}^{N_W-1} C_{\nu}^{TE} \underline{\vec{\mathcal{E}}}_{\nu}^{TE}(\vec{r}_t) \exp(-j\underline{k}_{z\nu}^{TE} z), \quad (4.5)$$

worin  $\underline{\vec{\mathcal{E}}}_{\nu}^{TE}(\vec{r}_t)$  gemäß (3.12) gegeben ist:

$$\underline{\vec{\mathcal{E}}}_{y\nu}^{TE}(x) = \vec{e}_y \sin\left(k_x \left(x - \frac{s}{2}\right)\right) \quad \text{mit} \quad k_x = \frac{\nu\pi}{s}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

Im Allgemeinen wird zur Bestimmung der Amplituden  $C_{\nu}^{TE}$  die Modenorthogonalität (2.63) ausgenutzt, d.h. es wird das Kreuzprodukt der Gleichung (4.5) mit einer Modenfunktion der magnetischen Feldstärke gebildet. Anschließend wird über eine Ebene  $z = \text{konstant}$  integriert. Die linksseitige Integration des Produkts aus Gaußfunktion und Modenfunktion ist i.d.R. nur numerisch möglich. Aufgrund der einfachen mathematischen Beschreibung der Moden durch trigonometrische Funktionen bietet sich eine alternative Herangehensweise an. Das Feld des Gaußstrahls wird dabei in der Transversalebene  $z = \text{konstant}$  durch ein trigonometrisches Interpolationspolynom approximiert. Die Amplituden  $C_{\nu}^{TE}$  können dann durch einen einfachen Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Im Allgemeinen besitzt ein trigonometrisches Interpolationspolynom für eine gerade Stützstellenanzahl die Form

$$I(x) = d_0 + d_K \cos\left(K2\pi\frac{x-x_0}{T}\right) + \sum_{k=1}^{K-1} (d_k + d_{N-k}) \cos\left(k2\pi\frac{x-x_0}{T}\right) + j \sum_{k=1}^{K-1} (d_k - d_{N-k}) \sin\left(k2\pi\frac{x-x_0}{T}\right), \quad (4.7)$$

mit dem Definitionsintervall  $[x_0, x_0 + T]$ . Die Werte  $(d_0, \dots, d_{N-1})$  sind die den  $N = 2K$  Abtastwerten<sup>2</sup> der zu interpolierenden Funktion  $g(x)$  zugeordneten diskreten Fourierkoeffizienten. Diese lassen sich gemäß

$$d_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g\left(i\frac{T}{N} + x_0\right) e^{-jik2\pi/N}, \quad \text{mit } k = 0, \dots, N-1 \quad (4.8)$$

berechnen. Eine geeignet hohe Stützstellenanzahl vorausgesetzt, lassen sich die Koeffizienten mit Hilfe einer schnellen Fouriertransformation (FFT) berechnen. Eine detailliertere Beschreibung der trigonometrischen Interpolation befindet sich z.B. in [52].

Im Fall transversalelektrischer Felder darf das Interpolationspolynom nur Sinusfunktionen enthalten. Das Wegfallen der Kosinusfunktionen in (4.7) erfordert  $d_k = -d_{N-k}$  sowie  $d_0 = d_K = 0$ . Dies wird durch eine ungerade Fortsetzung auf das Intervall  $[-\frac{3T}{4}, \frac{T}{4}]$  gemäß

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & : -T/4 \leq x < T/4 \\ -g(-x - T/2) & : -3T/4 \leq x < -T/4 \end{cases} \quad (4.9)$$

erreicht. In der gewählten Notation gilt  $x_0 = -3T/4$  und  $T = 2s$ . Die Amplituden der TE-Moden ergeben sich damit zu

$$C_\nu^{TE} = \begin{cases} 0 & : \nu = 0 \\ j 2d_\nu & : \nu = 1, \dots, K-1 \\ 0 & : \nu = K. \end{cases} \quad (4.10)$$

Da sich aus dem Ansatz transversalelektrischer Felder kein TEM-Mode ableiten lässt, ist die Amplitude  $C_0^{TE}$  richtigerweise gleich Null. Das Ergebnis  $C_K^{TE} = 0$  resultiert jedoch aus der Approximation des Feldes durch ein Interpolationspolynom und gilt nur näherungsweise für hinreichend große  $K$ .

Es sei angemerkt, dass die Wahl der elektrischen Feldstärke für die Entwicklung willkürlich ist. In analoger Vorgehensweise hätte auch die magnetische Feldstärke gewählt werden können. Die Verwendung der  $y$ -gerichteten elektrischen Feldstärke hat jedoch den Vorteil, dass sich die Richtung bei Rotation des Gaußstrahls um die  $y$ -Achse nicht ändert. Unabhängig davon, welche Feldgröße für die Entwicklung verwendet wird, unterliegt die Gesamtlösung

<sup>2</sup>Die Anzahl der Abtastwerte muss nicht exakt mit der Anzahl Reihenglieder in 4.5 korrelieren. In der Praxis sollte immer  $K > N_W$  gelten.

immer dem Fehler der paraxialen Näherung. Dazu mehr in Kapitel 4.3.3. Die Bestimmung der Amplituden  $C_\nu^{TM}$  erfolgt analog, jedoch muss an Stelle der ungeraden Fortsetzung (4.9) eine gerade Fortsetzung gewählt werden.

Die Anzahl der Stützstellen sollte in Abhängigkeit des Plattenabstandes  $s$  und der damit verbundenen Anzahl geführter Moden gewählt werden. Ein typischer Wert ist  $s = 300 \mu\text{m}$ , womit 706 geführte Moden pro Polarisation existieren. Die Stützstellenanzahl wurde standardmäßig auf mindestens  $N = 2^{12}$  gesetzt. In der Regel sollte jedoch auch eine geringere Stützstellenanzahl ausreichen. Die erforderliche Rechenzeit ist auch für große  $N$  vernachlässigbar gering.

## Rundhohlleiter

Im dreidimensionalen Fall wird zunächst die Modenorthogonalität (2.63) ausgenutzt. Das Kreuzprodukt von (4.4) mit der komplex konjugierten Funktion des magnetischen Feldes des  $\mu$ -ten TM-Moden und die anschließende Integration über eine transversale Ebene, hier willkürlich  $z = 0$ , liefert

$$\int_{z=0} \underline{\vec{E}}^P \times \underline{\vec{H}}_\mu^{TE*} \cdot \vec{e}_z da = \int_{z=0} \sum_{\nu=1}^{N_W} \left( C_\nu^{TM} \underline{\vec{E}}_\nu^{TM} \times \underline{\vec{H}}_\mu^{TE*} + C_\nu^{TE} \underline{\vec{E}}_\nu^{TE} \times \underline{\vec{H}}_\mu^{TM*} \right) \cdot \vec{e}_z da. \quad (4.11)$$

Da im Rundhohlleiter kein TEM-Mode existiert, beginnt die Summation nun mit  $\nu = 1$ . Unter der Annahme, dass Summation und Integration vertauscht werden dürfen, und unter Berücksichtigung der Modenorthogonalität folgt unmittelbar

$$C_\mu^{TE} = \frac{1}{Q_\mu} \int_{z=0} \left( \underline{\vec{E}}^P \times \underline{\vec{H}}_\mu^{TE*} \right) \cdot \vec{e}_z da. \quad (4.12)$$

Analog dazu ergeben sich die  $C_\mu^{TM}$  zu

$$C_\mu^{TM} = \frac{1}{Q_\mu} \int_{z=0} \left( \underline{\vec{E}}^P \times \underline{\vec{H}}_\mu^{TM*} \right) \cdot \vec{e}_z da. \quad (4.13)$$

Unter Verwendung des Feldansatzes (3.29) für die transversalelektrischen Moden ergibt sich für die Amplituden

$$\begin{aligned} C_\mu^{TE} &= \frac{1}{Q_\mu} \int_0^{r_s} \int_0^{2\pi} (E_\varrho^P \mathcal{H}_{\varphi\mu}^{TE*} - E_\varphi^P \mathcal{H}_{\varrho\mu}^{TE*}) \varrho d\varphi d\varrho \\ &= \frac{1}{Q_\mu} \left( \int_0^{r_s} \int_0^{2\pi} E_\varrho^P(\varrho, \varphi) \left( -j \frac{mk_{z\mu}}{k_{\varrho\mu}^2 \varrho} J_m(k_{\varrho\mu} \varrho) \sin(m\varphi) \right) \varrho d\varphi d\varrho \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{r_s} \int_0^{2\pi} E_\varphi^P(\varrho, \varphi) \left( j \frac{k_{z\mu}}{k_{\varrho\mu}} J'_m(k_{\varrho\mu} \varrho) \cos(m\varphi) \right) \varrho d\varphi d\varrho \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ein analoger Ausdruck ergibt sich für die Bestimmung der  $C_\mu^{TM}$ . Die numerische Berechnung dieser Doppelintegrale ist i.d.R. mit einem hohen Rechenaufwand verbunden. Zur Lösung wäre ein adaptives Verfahren wünschenswert, da die Feldverteilung des Gaußstrahls in Abhängigkeit der Verdrehung  $\vartheta$  und der lateralen Verschiebung  $h$  stark variiert. Aufgrund dessen ist es aber auch schwierig, ein gleichsam stabiles wie effizientes adaptives Verfahren zu implementieren. Da die Amplituden bei konstantem Radius des leitendem Schirms nur einmalig bestimmt werden müssen, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein einfaches Verfahren auf Basis der wiederholten eindimensionalen Integration verwendet. Die Stützstellenanzahl wurde entsprechend hoch angesetzt.

Die Integration in  $\varphi$ -Richtung wurde wie zuvor mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation durchgeführt, d.h. die Feldfunktionen des Gaußstrahls  $E_\varrho^P$  und  $E_\varphi^P$  wurden wieder durch trigonometrische Interpolationspolynome approximiert. Anschließend kann die Integration in  $\varphi$ -Richtung elementar durchgeführt werden. Die Integrale (4.14) werden dazu wie folgt umgestellt:

$$C_\mu^{TE} = -\frac{j}{Q_\mu} \frac{k_{z\mu}}{k_{\varrho\mu}} \left( \frac{m}{k_{\varrho\mu}} \int_0^{r_s} \left( \int_0^{2\pi} E_\varrho^P(\varrho, \varphi) \sin(m\varphi) d\varphi \right) J_m(k_{\varrho\mu}\varrho) d\varrho \right. \\ \left. + \int_0^{r_s} \left( \int_0^{2\pi} E_\varphi^P(\varrho, \varphi) \cos(m\varphi) d\varphi \right) J'_m(k_{\varrho\mu}\varrho) \varrho d\varrho \right). \quad (4.15)$$

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass durch das trigonometrische Interpolationspolynom alle azimuthalen Ordnungen in einem Schritt berücksichtigt werden. Der Nachteil ist, dass für alle Ordnungen dieselben Stützstellen in  $\varrho$ -Richtung angesetzt werden. Daher wird in dieser Richtung ein einfaches Quadraturverfahren mit äquidistanten Stützstellen verwendet. Es sei betont, dass die vorgestellte Methode nicht zwangsläufig die effizienteste ist. Weitere Untersuchungen dahingehend wurden nicht vorgenommen, da die Reihenentwicklung nur einmalig durchgeführt werden muss, um unterschiedliche dielektrische Wellenleiter zu berücksichtigen.

Die Rechenzeiten sind im Vergleich zur planaren Anordnung um ein Vielfaches höher, denn neben dem höheren Aufwand bei der Integration ist auch die Gesamtzahl zu berücksichtigender Moden ungleich höher. Dazu mehr in Kapitel 4.3.3. Standardmäßig wurden  $2^{10}$  Punkte für die FFT verwendet und 2000 Punkte für die Integration in  $\varrho$ -Richtung. Zur Verifikation wurde die Anzahl der Stützstellen in beiden Richtungen verdoppelt. Die Anzahl geführter Moden pro azimuthaler Ordnung  $m$  beträgt bei einem Durchmesser des Hohlleiters von  $300 \mu\text{m}$  zwischen 353 ( $m=1$ ) und 324 ( $m=59$ ).

### 4.1.3. Überlappintegrale links- und rechtsseitiger Moden

Im Rahmen der Methode des Mode-Matching müssen Überlappintegrale der Form (2.69) gelöst werden:

$$Q_{\mu\nu}^{(lr)} = \int_{z=z_c} \left( \vec{\mathcal{E}}_{t\nu}^{(l)} \times \{ \vec{\mathcal{H}}_{t\mu}^{(r)} \}^* \right) \vec{e}_z da. \quad (4.16)$$

Zu beachten ist, dass die Anzahl zu berücksichtigender Moden links- und rechtsseitig sehr groß sein kann. Im planaren Fall müssen jeweils einige hundert bis tausend Moden berücksichtigt werden, im dreidimensionalen Fall sind es bereits bis zu einige zehntausend Moden. Entsprechend hoch ist die Anzahl durchzuführender Integrationen. Für die Anordnungen dieser Arbeit lassen sich aufgrund der herrschenden Symmetrien die Integrationen analytisch durchführen.

### Planare Wellenleiter

In einer planaren Anordnung sind im Fall transversalelektrischer Wellen Integrale der Form

$$Q_{\mu\nu}^{(lr)} = \frac{k_{z\mu}}{\omega\mu} \Delta y \int_{z=z_c} \mathcal{E}_{y\nu}^{(l)}(x) \{ \mathcal{E}_{y\mu}^{(r)}(x) \}^* dx \quad (4.17)$$

zu lösen. Der Integralkern besteht aus Produkten trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen und die Integrationen sind entsprechend elementar durchführbar. Für die Kombination aus linksseitiger Parallelplattenleitung und rechtseitigem Schichtwellenleiter wurde (4.17) exemplarisch im Anhang A.3.1 gelöst. Zur Notation sei angemerkt, dass die Phasenkonstanten  $k_x$  und  $k_z$  der Übersichtlichkeit wegen nur über den Index  $\nu$  oder  $\mu$  unterschieden werden. Ob die Phasenkonstante zum links- oder rechtsseitigen Wellenleiter gehört, muss über die Zuordnung in (4.17) entschieden werden.

### Zylindrische Fasern

In kreiszylindrischen Koordinaten nimmt (4.16) die Form

$$Q_{\mu\nu}^{(lr)} = \int_{\varrho=0}^b \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left( \mathcal{E}_{\varrho\nu}^{(l)} \mathcal{H}_{\varphi\mu}^{(r)*} - \mathcal{E}_{\varphi\nu}^{(l)} \mathcal{H}_{\varrho\mu}^{(r)*} \right) \varrho d\varphi d\varrho \quad (4.18)$$

an. Wird im linksseitigen Rundhohlleiter ein transversalelektrischer Mode mit der elektrischen Feldstärke (3.30) betrachtet und rechtsseitig ein Fasermode mit der magnetischen Feldstärke (3.35) angesetzt, dann folgt aus (4.18) der Integralausdruck

$$Q_{\mu\nu}^{(lr)} = -\frac{\omega\mu_0}{k_{\varrho\nu}^2} \frac{\pi}{k_i^2 - k_{z\mu}^2} \int_{\varrho=0}^{\infty} \left( \frac{m}{\varrho} J_m(k_{\varrho\nu}\varrho) \left( \omega\varepsilon_i B_{1i}'^*(\varrho) + m \frac{k_{z\mu}^*}{\varrho} B_{2i}^*(\varrho) \right) \right. \\ \left. + k_{\varrho\nu} J_m'(k_{\varrho\nu}\varrho) \left( m \frac{\omega\varepsilon_i}{\varrho} B_{1i}^*(\varrho) + k_{z\mu}^* B_{2i}'^*(\varrho) \right) \right) \varrho d\varrho. \quad (4.19)$$

Darin sind die  $B_{1/2i}(\varrho)$  gemäß (3.33) bzw. (3.34) Kombinationen aus gewöhnlichen oder modifizierten Besselfunktionen. Auch dieses Integral ist analytisch lösbar. Der Rechenaufwand ist jedoch im Vergleich zur planaren Anordnung deutlich höher. Die Lösung von (4.19) ist exemplarisch für einen geführten Fasermode im Anhang A.3.2 aufgeführt.



## Numerik

Das Vorhandensein analytischer Lösungen garantiert noch keine fehlerfreie Bestimmung des Integralwertes. Da auf einem Rechensystem immer nur eine begrenzte Stellenanzahl zur Verfügung steht, ist zum einen der gültige Zahlenbereich eingeschränkt. Es kann somit zu Zahlenbereichsüberläufen kommen. Das zweite, in der Regel schwerer wiegende Problem ist das Phänomen der Auslöschung. Dieser Fall tritt insbesondere auf, wenn das Überlappintegral mit einem Strahlungsmoder der Faser gebildet wird. Ein Faktor in den Lösungen ist der Term

$$\frac{1}{k_{\varrho\nu}^2 + k_{\varrho2\mu}^2} = \frac{1}{k_{\varrho\nu}^2 - \tilde{k}_{\varrho2\mu}^2}, \quad (4.20)$$

vgl.(A.60). Mit wachsendem Radius des leitenden Schirms steigt die Anzahl der Lösungen  $\tilde{k}_{\varrho2\mu}^2$  und damit auch die Wahrscheinlichkeit, dass aufgrund von Auslöschung ein erhöhter Fehler resultiert. Abhilfe schafft eine Taylorentwicklung. Sei  $F(x,y)$  mit  $x \hat{=} k_{\varrho\nu}$  und  $y \hat{=} \tilde{k}_{\varrho2\mu}$  eine Stammfunktion des Überlappintegrals, mit

$$F(x,y) = \frac{1}{(x+y)(x-y)} g(x,y). \quad (4.21)$$

Wird die Funktion  $g(x,y)$  in eine Taylorreihe bzgl. ihres zweiten Arguments um den Punkt  $y = x + \Delta x$  entwickelt, ergibt sich nach Abbruch hinter dem linearen Glied

$$g(x, x + \Delta x) \approx g(x, x) + \left. \frac{d}{dy} g(x, y) \right|_x \Delta x. \quad (4.22)$$

Da in den Integralausdrücken stets  $g(x, x) = \text{konstant}$  gilt, folgt für den Integralwert  $I(x, y)$  nach Einsetzen der Grenzen

$$I(x, y) = F(x, y) \Big|_{\varrho=a}^{\varrho=b} \approx -\frac{1}{x+y} g'(x, x) \Big|_{\varrho=a}^{\varrho=b}. \quad (4.23)$$

Die Kennzeichnung  $g'$  steht für die Ableitung nach dem zweiten Argument. Die Konstante  $g(x, x)$  entfällt durch die Auswertung der Stammfunktion an den Grenzen  $\varrho = [a, b]$ . Der für  $x \approx y$  numerisch schlecht auszuwertende Term  $x - y$  ist in dieser Approximation nicht enthalten. Alternativ oder zur Kontrolle der korrekten Berechnung des Integralwertes kann eine numerische Integration in  $\varrho$ -Richtung durchgeführt werden.

### 4.1.4. Durchführung des Mode-Matching

Nach Abarbeitung der genannten Vorleistungen muss zur Bestimmung der Amplituden der reflektierten und transmittierten Moden eines der beiden Gleichungssysteme (2.85) oder (2.86) gelöst werden. Im planaren Fall sind in der Regel bis zu 1000 berücksichtigte Moden auf beiden Seiten der Schnittstelle ausreichend. Die Dimension des resultierenden Gleichungssystems ist damit handhabbar und ohne große Hardwareanforderungen mit einem direkten Verfahren lösbar. Die Verwendung eines direkten Verfahrens, wie z.B. eine LR-Zerlegung, birgt zudem den Vorteil, dass sie einmalig durchgeführt für verschiedene rechtsseitige Vektoren und damit verschiedene Anregungen verwendet werden kann.

Die Anzahl zu berücksichtigender Fasern ist ungleich höher. Das Modenspektrum der Faser ist jedoch so geartet, dass Moden unterschiedlicher azimuthaler Ordnung orthogonal sind. Diese azimuthale Orthogonalität gilt auch für Moden unterschiedlicher zirkulärsymmetrischer Wellenleitertypen. Werden  $M_F$  azimuthale Ordnungen berücksichtigt, kann das Gleichungssystem somit in  $M_F$  Gleichungssysteme kleinerer Dimension aufgeteilt werden. Die Dimension der resultierenden Gleichungssysteme ist wiederum hinreichend klein.

Der insgesamt zu leistende Rechenaufwand zur Beschreibung der Einkopplung in die Faser übersteigt den Aufwand zur Beschreibung der Einkopplung in den Schichtwellenleiter um ein Vielfaches. In der planaren Anordnung liegt die Rechenzeit für die einzelne Simulation insgesamt im Bereich einiger Sekunden und erhöht sich nur mäßig für jede weitere Variation der Anregung<sup>3</sup>. Bei der Faser wird der Großteil der Rechenzeit für die Reihenentwicklung der Anregung benötigt. Allerdings muss diese nur einmalig durchgeführt werden, um unterschiedliche Fasern zu simulieren. Lediglich ein konstanter Radius des leitenden Schirms ist Voraussetzung. Sofern nur die Leistung interessiert, die in die geführten Moden eingekoppelt wird, muss sich die Reihenentwicklung zudem nur über die entsprechenden azimuthalen Ordnungen erstrecken. Hinsichtlich der Implementierung auf einem Rechensystem empfiehlt sich die Erstellung einer Lookup-Tabelle für die diversen Besselfunktionswerte.

## 4.2. Koppleffizienz für Stufenindex-Wellenleiter

Die in diesem Kapitel präsentierten Ergebnisse basieren auf dem zuvor präsentierten wellentheoretischen Lösungsansatz zur Beschreibung der Einkopplung eines Gaußstrahls in einen dielektrischen Wellenleiter. Es werden zunächst Ergebnisse für die dielektrische Faser gezeigt. Anschließend wird kurz auf die Unterschiede zur planaren Geometrie eingegangen. Alle Ergebnisse beziehen sich auf eine  $y$ -gerichtete Polarisierung. Die Unterschiede zur orthogonalen  $x$ -gerichteten Polarisierung sind jedoch nicht signifikant und liegen in den Abbildungen unterhalb der darstellbaren Genauigkeit.

### 4.2.1. Definition der Koppleffizienz

Es wird angenommen, eine Welle trifft aus negativer  $z$ -Richtung kommend auf die Stirnfläche des dielektrischen Wellenleiters. Diese Welle führt die Leistung  $\overline{P}^{(+l)}$ . Dann ist die Koppleffizienz  $\eta$  definiert als Quotient der in die geführten Moden eingekoppelten Leistung und der einfallenden Leistung  $\overline{P}^{(+l)}$ :

$$\eta = 100\% \cdot \frac{1}{2\overline{P}^{(+l)}} \sum_{\substack{\nu \in \\ \{\text{gef. Moden}\}}} |C_\nu^{(+r)}|^2 Q_\nu^{(+r)}. \quad (4.24)$$

Zur besseren Unterscheidung in den Diagrammen von der später eingeführten relativen Abweichung  $\delta$  wird die Koppleffizienz in Prozent angegeben.

<sup>3</sup>Herkömmlicher PC, z.B. 2 GHz Prozessor mit einem Kern und 1 GB Arbeitsspeicher.

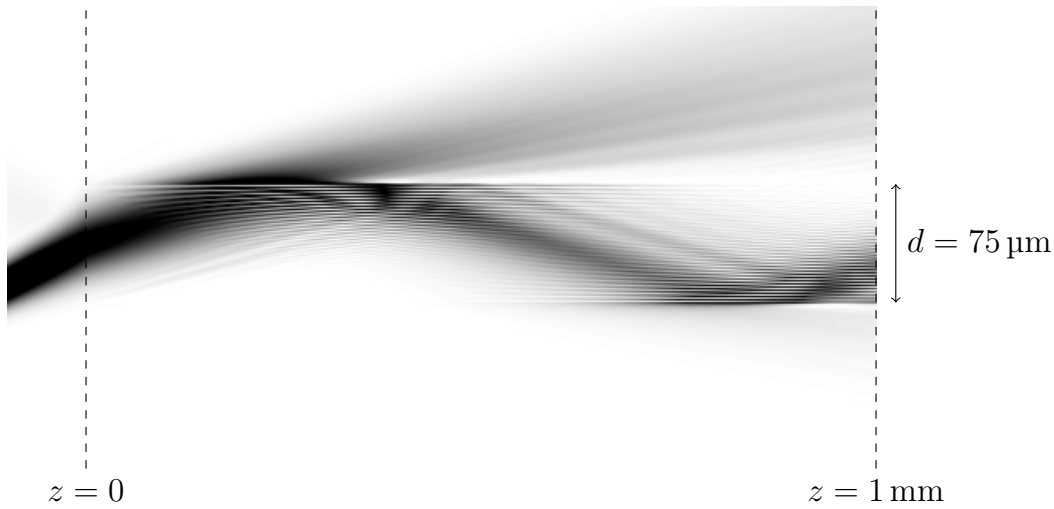


Abbildung 4.2.: Leistungfluss im Schichtwellenleiter bei nicht idealer Einkopplung.

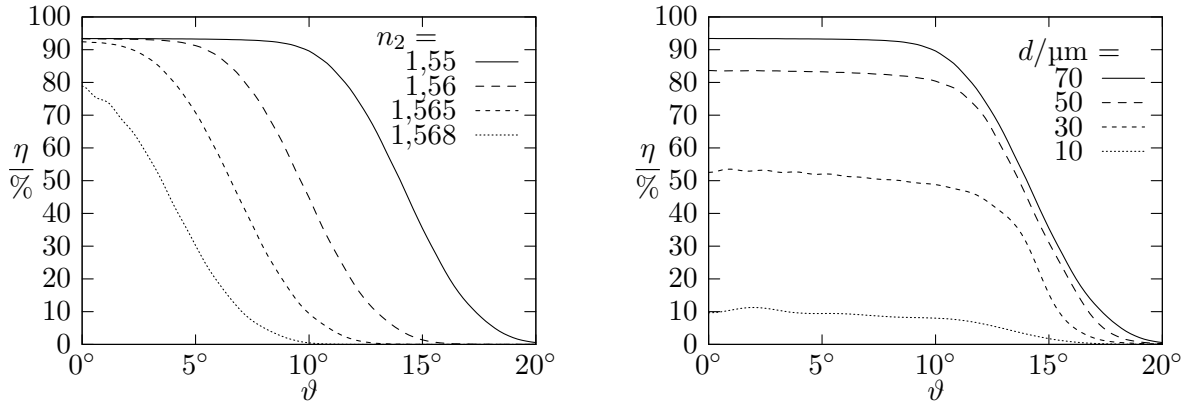
Bei sehr kurzen Wellenleitern ist die Definition (4.24) ggf. zu modifizieren. Durch eine nicht ideale Kopplung kann Leistung in das Spektrum der Strahlungsmoden eingekoppelt werden, die dann vom Wellenleiterkern weg, radial nach außen abgestrahlt wird. Dieser Prozess bedarf aber einer gewissen Wellenleiterlänge. Ist diese sehr kurz, kann ein Empfänger am Wellenleiterende auch Leistung aufnehmen, die im Spektrum der Strahlungsmoden geführt wird. Abbildung 4.2 zeigt exemplarisch die zeitl. gemittelte Leistungsflussdichte  $|\Re\{\vec{S}\}|$  am Anfang eines Schichtwellenleiters. Die Darstellung in Abbildung 4.2 ist in transversaler Richtung um den Faktor zwei gestreckt. Der Einfallswinkel des Gaußstrahls beträgt  $14,5^\circ$ .

#### 4.2.2. Koppeffizienz bei Variation der Einfallsrichtung

Zunächst sollen einige elementare Ergebnisse betrachtet werden, die die Einarbeitung in die Thematik erleichtern. Es werden daher auch Ergebnisse gezeigt, die nicht von praktischem Interesse sind, da die Koppeffizienz zu gering ist. Die maximal erreichbare Koppeffizienz liegt für die gewählten Parameter aufgrund von Reflektionsverlusten nicht bei 100 %, sondern etwa 5 % darunter. Die Strahlbreite des Eingangsstrahls ist zunächst konstant mit  $b = 50 \mu\text{m}$ .

##### Verdrehung des Eingangsstrahls

Abbildung 4.3a zeigt Ergebnisse für einen Kerndurchmesser  $d = 70 \mu\text{m}$  und vier verschiedene Mantelbrechzahlen. Die Strahlachse trifft meridional auf ( $h = 0$ ). Mit einer Strahlbreite von  $b = 50 \mu\text{m}$  wird die Stirnfläche des Wellenleiterkerns nahezu vollständig ausgeleuchtet, da die Felder des Gaußstrahls noch über den Strahlradius hinaus ragen. Die maximale Koppeffizienz ist mit 93,42 % bereits etwas kleiner als das theoretische Maximum, dass sich für deutlich kleinere Strahlbreiten ergibt und bei etwa 95,1 % liegt. Bei der Verdrehung des Eingangsstrahls um einen Winkel  $\vartheta$  wird erwartet, dass die Koppeffizienz ab einem bestimmten kritischen Winkel stark abnimmt. Dieser kritische Winkel sollte aufgrund der

(a) Variation der Mantelbrechzahl ( $d = 70 \mu\text{m}$ )(b) Variation des Kerndurchmessers ( $n_2 = 1,55$ )Abbildung 4.3.: Die Koppeleffizienz in Abhängigkeit des Einfallswinkels  $\vartheta$ .

Rotationssymmetrie des Gaußstrahls näherungsweise der Differenz des maximalen Einfallswinkels  $\Theta_c$  und des Divergenzwinkels  $\Theta_{a0}$  entsprechen:

$$\vartheta_c = \Theta_c - \Theta_{a0}. \quad (4.25)$$

Die in Abbildung 4.3a dargestellten Ergebnisse bestätigen diese Annahme. Zur Erinnerung: Der asymptotische Divergenzwinkel  $\Theta_{a0}$  des Gaußstrahls ist konstant gleich  $5^\circ$ . Mit den Werten für  $\Theta_c$  aus Tabelle 4.1 und den Mantelbrechzahlen  $n_2 = 1,55, 1,56, 1,565$  sind die kritischen Winkel  $\vartheta_c = 9,47^\circ, 5,19^\circ, 2,19^\circ$ . Im Fall  $n_2 = 1,568$  ist  $\vartheta_c$  negativ und wie erwartet stellt sich ein deutlicher Einbruch der maximalen Koppeleffizienz bei  $\vartheta = 0$  ein. Die 3 dB-Grenze, bei der die Koppeleffizienz auf 50 % des Maximalwerts abgefallen ist, liegt etwas unterhalb des maximalen Einfallswinkels  $\Theta_c$ .

Die Verkleinerung des Kerndurchmessers ohne Anpassung des Strahldurchmessers ist in der Praxis natürlich unsinnig. Abbildung 4.3b zeigt Ergebnisse für vier unterschiedliche Kerndurchmesser bei konstanter Mantelbrechzahl  $n_2 = 1,55$ . Schon bei Verkleinerung des Kerndurchmessers auf den Durchmesser des Strahls,  $d = 50 \mu\text{m}$ , sinkt die maximale Koppeleffizienz bei  $\vartheta = 0$  auf etwa 83,64 %. Es sei daran erinnert, dass die Leistung, die der Gaußstrahl innerhalb seines Strahlradius transportiert, gleich 86,47 % seiner Gesamtleistung ist. Wird der Kerndurchmesser weiter verkleinert, nimmt die erreichbare Koppeleffizienz deutlich ab. Zu bemerken ist noch, dass im Fall  $\vartheta = 0$  aufgrund der Rotationssymmetrie nur Moden der azimuthalen Ordnung  $m = 1$  angeregt werden. Für  $d = 10 \mu\text{m}$  existieren nur 5 geführte Moden in der Ordnung  $m = 1$ . Wird der Strahl verdreht, können auch Moden höherer azimuthaler Ordnung angeregt werden und die Koppeleffizienz kann leicht ansteigen. So erklärt sich das leicht oszillatorische Verhalten in den Graphen.

### Laterale Verschiebung des Eingangsstrahls

Neben der Verdrehung des Quellstrahls stellt die laterale Verschiebung der Quelle den zweiten wesentlichen Verlustmechanismus dar. Abbildung 4.4 zeigt Ergebnisse für die Koppeleffizienz in Abhängigkeit der lateralen Verschiebung bei senkrechtem Einfall des Gaußstrahls

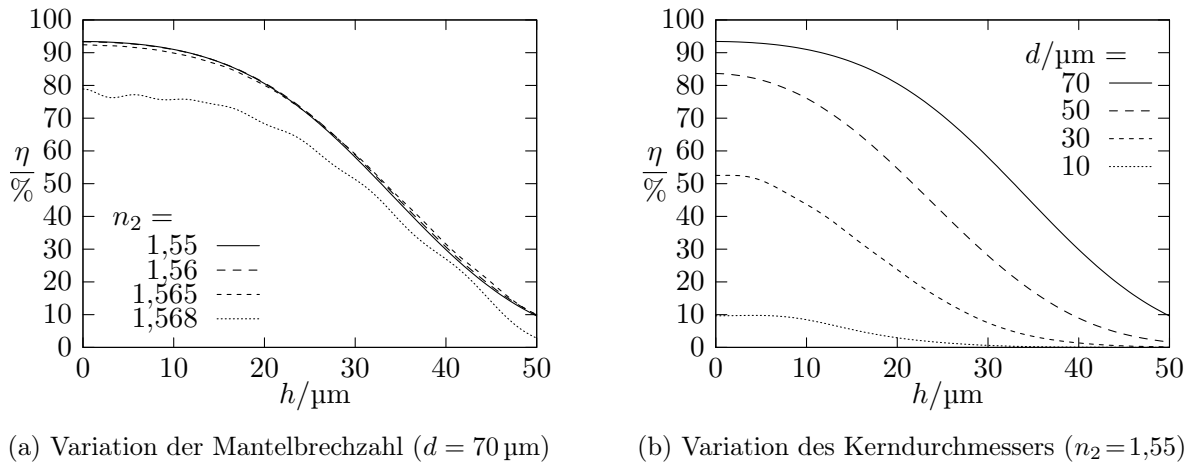


Abbildung 4.4.: Die Koppeffizienz in Abhängigkeit der lateralen Verschiebung  $h$ .

( $\vartheta = 0$ ). Dabei wurden dieselben Geometrie- und Materialparametervariationen wie zuvor berücksichtigt. Wie erwartet sind die Ergebnisse nahezu unabhängig vom Wert der Mantelbrechzahl und damit von der Numerischen Apertur  $NA$ , solange diese hinreichend groß ist, so dass in etwa  $\Theta_c > 1,5 \Theta_{a0}$  gilt, vgl. Tabelle 4.1. Erst für eine sehr kleine  $NA$  fällt die Koppeffizienz insgesamt ab.

Aufgrund der relativ großen Strahlbreite nimmt die Koppeffizienz auch für kleine Verschiebungen  $h$  schon leicht ab. Für  $d = 70 \mu\text{m}$  ist ab einer Verschiebung von etwa  $h = 15 \mu\text{m}$  ein stärkerer Abfall zu verzeichnen, da bei größeren Verschiebungen wesentliche Feldanteile des Gaußstrahls nicht mehr auf die Stirnfläche des Wellenleiterkerns treffen. Die 3 dB-Grenze liegt bei  $h = 34 \mu\text{m}$  und damit knapp unter dem Radius des Kerndurchmessers. Wird der Kernradius verkleinert, verschiebt sich entsprechend auch die 3 dB-Grenze.

#### 4.2.3. Koppeffizienz bei gleichmäßiger Verkleinerung des Kern- und des Strahldurchmessers

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist die Verifikation strahlenoptischer Methoden und insbesondere das Auffinden des Grenzbereichs, in dem ein erhöhter methodischer Fehler zu erwarten ist. Dieser wird erwartet, falls die Geometrie nicht hinreichend groß gegenüber der Wellenlänge ist. Die zu betrachtende Geometriegröße ist in diesem Fall der Durchmesser des Wellenleiterkerns. Eine Verringerung des Kerndurchmessers ohne entsprechende Skalierung der Strahlbreite des Gaußstrahls führt wie gezeigt zu Einbußen bei der Koppeffizienz. Es stellt sich die Frage, welchen Einfluss die gleichmäßige Verkleinerung des Kerndurchmessers und des Strahldurchmessers auf die Koppeffizienz hat. Schließlich ändert sich mit Variation des Kerndurchmessers auch das Spektrum der Moden. Ebenso ändert sich die Feldverteilung des Gaußstrahls in der Schnittfläche leicht.

Mit Blick auf den Vergleich zur Strahlenoptik werden zwei Fälle betrachtet. Zum einen der Fall einer idealen Koppelvoraussetzung, bei dem der Kerndurchmesser größer als der Strahldurchmesser ist. Es gilt  $d/b = 1,5$ . Ausgehend von einem Kerndurchmesser von  $d =$

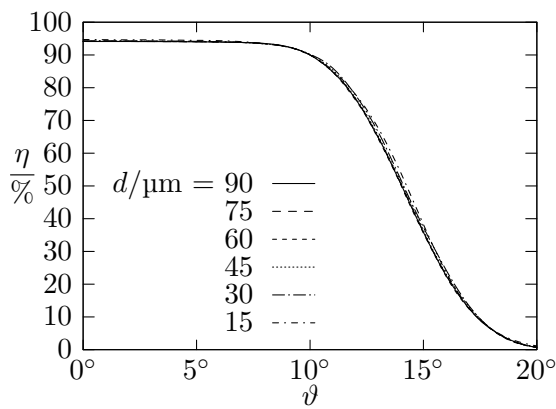
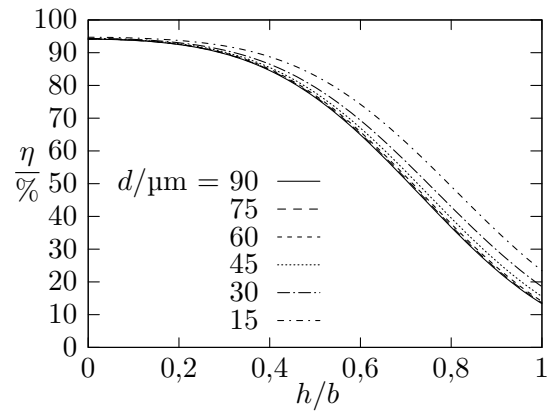
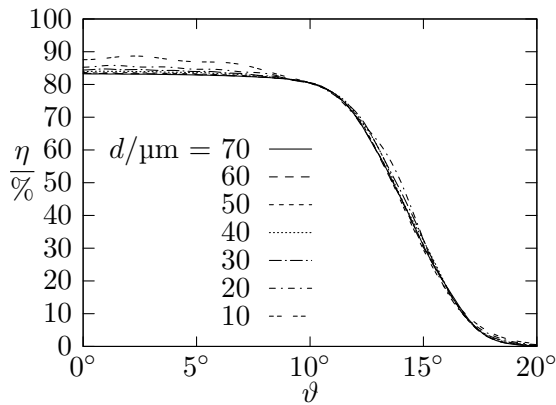
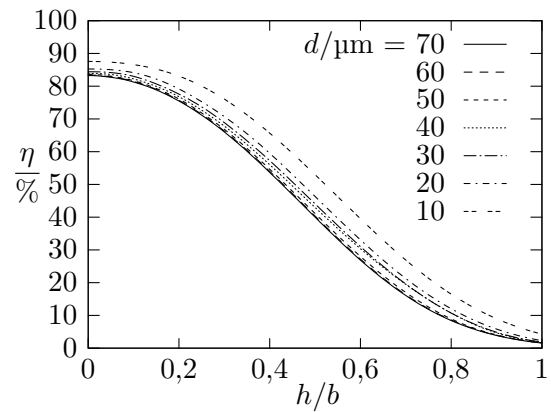
(a)  $d/b = 1,5$ (b)  $d/b = 1,5$ (c)  $d/b = 1,0$ (d)  $d/b = 1,0$ 

Abbildung 4.5.: Die Koppleffizienz bei gleichmäßiger Verkleinerung des Kerndurchmessers  $d$  und des Strahldurchmessers  $b$ . (a),(c): in Abhängigkeit des Einfallswinkels  $\vartheta$ . (b),(d): in Abhängigkeit der lateralen Verschiebung  $h$ .

90  $\mu\text{m}$  ( $b = 60 \mu\text{m}$ ) wird der Kern in fünf Schritten bis auf einen Durchmesser von  $d = 15 \mu\text{m}$  ( $b = 10 \mu\text{m}$ ) verkleinert. Die Ergebnisse für  $\eta$  zeigt Abbildung 4.5. Die numerische Apertur des Wellenleiters ist  $NA = 0,25$  mit  $n_2 = 1,55$ . Im zweiten Fall wird  $d/b = 1,0$  gewählt. Bei dieser Wahl ist die maximal erreichbare Koppleffizienz auf etwa 83 % begrenzt. Interessant ist diese Wahl, da die Stirnfläche des Wellenleiterkerns und des direkt umgebenen Mantels vollständig ausgeleuchtet sind.

Die Interpretation der Ergebnisse kann kurz ausfallen. Merkliche Abweichungen gibt es jeweils dann, wenn ein signifikanter Anteil des einfallenden Leistungsflusses auf den kernnahen Mantelbereich trifft. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn der Strahl lateral verschoben wird, Abbildungen 4.5b und 4.5d. Insgesamt lässt sich jedoch festhalten, dass die gesamte Anordnung innerhalb der gewählten Geometrieparameter weitestgehend skalierbar ist, ohne dass massive Änderungen in der Koppleffizienz zu erwarten sind. Die leichten Unterschiede erklären sich im Wesentlichen aus dem kleiner werdenden lokalen Divergenzwinkel des Gaußstrahls bei Verkleinerung des Strahldurchmessers  $b$  in der Wel-

lenleiterstirnfläche, vgl. Tabelle 4.2.

#### 4.2.4. Anmerkungen zur Approximation durch planare Wellenleiter

Da sich die Untersuchungen zur Wellenausbreitung im Kapitel 5 gänzlich auf den planaren Schichtwellenleiter beschränken, müssen einige Unterschiede im Vergleich zur Faser hinsichtlich der erreichbaren Koppeleffizienz hervorgehoben werden [65].

Alle in den vorherigen Kapiteln 4.2.2 und 4.2.3 gemachten Aussagen gelten qualitativ auch für den planaren Schichtwellenleiter. Aufgrund der fehlenden Abhängigkeit von einer Dimension ergeben sich jedoch einige quantitative Unterschiede. Diese betreffen nicht die wesentlichen Ausbreitungseigenschaften des Strahls. Insbesondere divergiert der Strahl unter einem identischen Winkel. Wie der Beschreibung des planaren Gaußstrahls im Anhang A.1.2 zu entnehmen ist, ist allerdings die innerhalb der Strahlbreite geführte Leistung mit über 95 % deutlich größer (vorher 86 %). Dementsprechend ist die erreichbare Koppeleffizienz je nach Verhältnis  $d/b$  im Durchschnitt ebenfalls deutlich größer. Erst ab einem Verhältnis von ca.  $d/b > 1,5$  und hinreichend geringer Verdrehung bzw. Verschiebung des Strahls stellen sich in etwa identische Koppeleffizienzen ein.

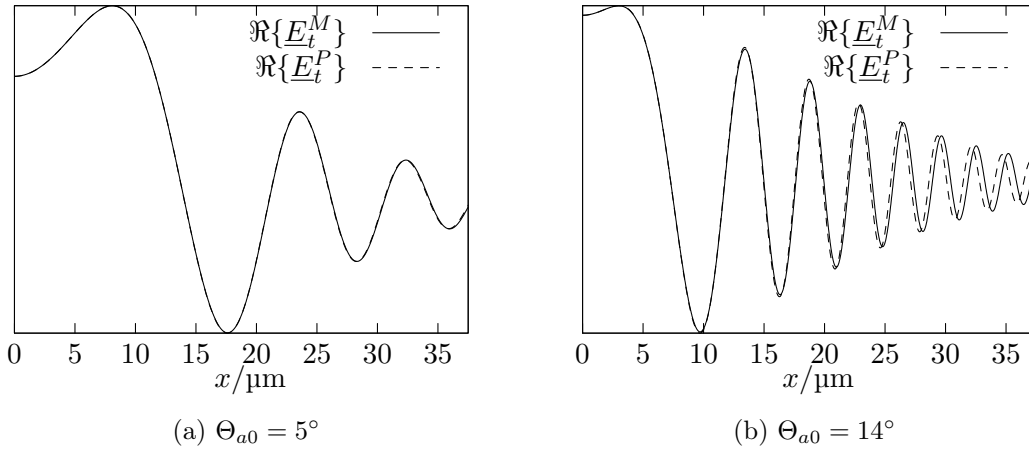
Die Besonderheit der planaren Approximation besteht insbesondere darin, dass sich verschiedene Effekte stärker auswirken. Besonders deutlich werden diese Effekte im strahlenoptischen Modell. Es sei z.B. die Goos-Hänchen-Verschiebung genannt. Ursache ist die fehlende transversale Abhängigkeit in einer Dimension, die im physikalisch realen Modell einzelne Effekte etwas verschleiert. Mehr dazu in Kapitel 4.4.3. Darüber hinaus sind signifikante Unterschiede insbesondere auch dann zu erwarten, wenn nur wenige geführte Moden existieren. Dieser Punkt steht jedoch nicht im Fokus dieser Arbeit.

### 4.3. Grenzen der Modellierung

Wie im Abschnitt 4.1.2 schon einleitend beschrieben, unterliegt das vorliegende Modell zur Beschreibung der Einkopplung optischer Wellen in einen dielektrischen Wellenleiter einigen Annahmen, die den allgemeinen Lösungsraum möglicherweise einschränken. Die folgenden Abschnitte sollen die Grenzen des vorliegenden Modells etwas näher beschreiben.

#### 4.3.1. Der Fehler der Paraxialen Näherung

Der Gaußstrahl wird in dieser Arbeit als Feld einer idealisierten Quelle herangezogen, um die weiteren Eigenschaften einer optisch multimodalen Übertragungsstrecke zu analysieren. Diese Untersuchungen erfolgen auf Basis der Theorie normaler Moden, Kapitel 2.3.1, mit dem Ziel einer möglichst exakten Modellierung zur Entwicklung eines Referenzmodells. Ist schon das Modell der Quelle mit einem hohen Fehler behaftet, ist dieses Ziel möglicherweise nicht zu erreichen. Um zunächst ein Gefühl für den zu erwartenden Fehler zu bekommen, ist in Abbildung 4.6 ein Vergleich der transversalen elektrischen Feldstärke des Maxwellschen



Abbildungung 4.6.: Vergleich des Realteils der transversalen elektrischen Feldstärke des Maxwell'schen  $\underline{E}_t^M$  und Paraxialen Gaußstrahls  $\underline{E}_t^P$  in Abhängigkeit der transversalen Koordinate für  $b = 50 \mu\text{m}$ .

und Paraxialen Gaußstrahls dargestellt. Die Feldgrößen sind in der Ebene  $z$  ausgewertet worden, in der die Strahlbreite jeweils den Wert  $b = 50 \mu\text{m}$  annimmt. Aufgrund der Rotationssymmetrie reicht die Darstellung in Abhängigkeit der radialen Koordinate aus. Der Divergenzwinkel  $\Theta_{a0} = 5^\circ$  wurde gewählt, da in diesem Fall die Abweichung zwischen den unterschiedlichen Feldlösungen gemäß Abbildung 4.6 vertretbar gering erscheint. Deutlich größer ist die Abweichung im Fall  $\Theta_{a0} = 14^\circ$ . Dieser Wert entstammt dem Datenblatt einer VCSEL-Diode.

Für eine weitere Abschätzung des Fehlers hervorgerufen durch die paraxiale Näherung wird das folgenden Fehlermaß

$$f_p(z_e) = \frac{\iint_{z=z_e} |\underline{E}_t^M(\vec{r}) - \underline{E}_t^P(\vec{r})|^2 da}{\iint_{z=z_e} |\underline{E}_t^M(\vec{r})|^2 da} \quad (4.26)$$

eingeführt. Darin steht wie schon in Abbildung 4.6  $\underline{E}_t^M$  für das transversale Feld des Maxwell'schen Gaußstrahls und  $\underline{E}_t^P$  für das transversale Feld des Paraxialen Gaußstrahls. Das Integral über das Betragsquadrat der elektrischen Feldstärke ist proportional zur transportierten Leistung. Das Fehlermaß  $f_p$  setzt somit die im Differenzfeld transportierte Leistung ins Verhältnis zur insgesamt transportierten Leistung. In der Strahltaile gilt  $f_p = 0$ , die Feldgrößen sind identisch. Mit wachsender Koordinate in Ausbreitungsrichtung werden die Abweichungen größer und auch  $f_p$  wird anwachsen.

Voraussetzung für die korrekte Berechnung von  $f_p$  ist die hinreichend genaue Bestimmung der Feldgrößen. Im Fall des Paraxialen Gaußstrahls ist mit (2.38a) eine analytische Lösung gegeben, die sich auch numerisch problemlos auswerten lässt. Der Maxwell'sche Gaußstrahl erfordert mit (2.31) jedoch die Auswertung eines uneigentlichen Integrals. Insbesondere bei kleinen Divergenzwinkeln ist anzunehmen, dass die Integration an einer bestimmten Stelle  $\varrho_0$  abgebrochen werden kann. Beispielsweise ist nicht zu erwarten, dass evaneszente



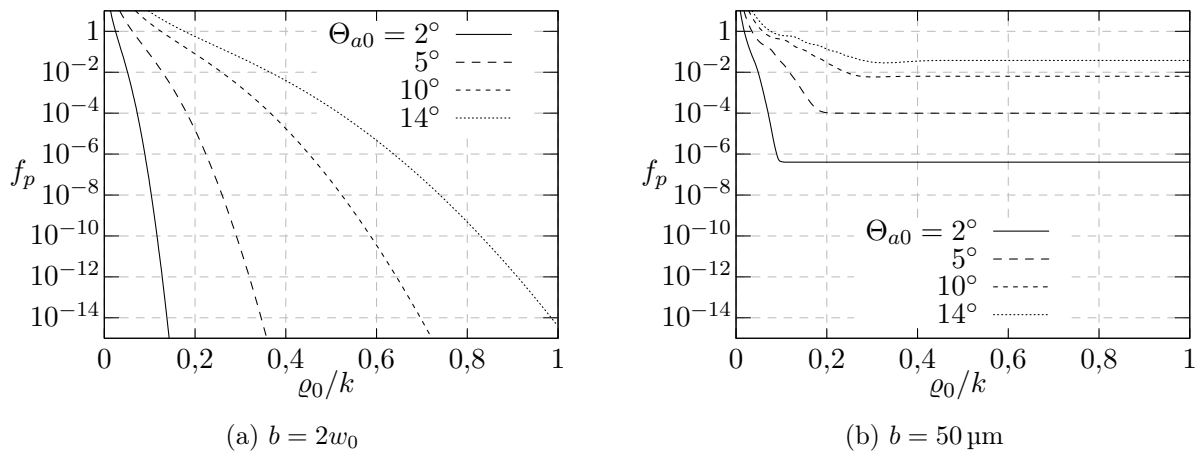


Abbildung 4.7.: Das Fehlermaß  $f_p$  in Abhängigkeit von  $\varrho_0/k$  für unterschiedliche Divergenzwinkel  $\Theta_{a0}$ .

Anteile einen signifikanten Beitrag liefern. Es gilt also näherungsweise

$$\underline{E}_t^M(\vec{r}) \approx \underline{E}_0 \frac{w_0^2}{2} \int_0^{\varrho_0} \exp\left(-\frac{w_0^2 \tilde{\varrho}^2}{4}\right) J_0(\tilde{\varrho} \sqrt{x^2 + y^2}) \exp\left(-j \sqrt{k^2 - \tilde{\varrho}^2} z\right) \tilde{\varrho} d\tilde{\varrho}. \quad (4.27)$$

Auf dieser Basis zeigt Abbildung 4.7 Ergebnisse für das Fehlermaß  $f_p$  in Abhängigkeit der Integrationsgrenze  $\varrho_0$ . Dargestellt sind Ergebnisse für vier unterschiedliche Divergenzwinkel. Des Weiteren werden die Fälle  $b = 2w_0$  ( $z_e = 0$ ) sowie  $b = 50 \mu\text{m}$  ( $z_e = 283,5 \mu\text{m}$ ) unterschieden. Im ersten Fall, Abbildung 4.7a, gilt  $f_p \rightarrow 0$  für  $\varrho_0 \rightarrow \infty$  und diese Tendenz wird auch in allen vier Fällen bestätigt, wie erwartet jedoch deutlich besser für kleine Divergenzwinkel. Evaneszente Feldanteile liefern aber selbst für  $\Theta_{a0} = 14^\circ$  keinen signifikanten Beitrag, da am Übergang  $\varrho_0 = k$  das Fehlermaß bereits auf  $f_p \approx 4 \cdot 10^{-15}$  abgefallen ist.

Für  $z > 0$  strebt  $f_p$  gegen einen konstanten Wert größer Null. In dem in Abbildung 4.7b dargestellten Fall mit  $b = 50 \mu\text{m}$  sind dies bei einer Genauigkeit von drei Stellen die in Tabelle 4.3 gegebenen Werte. Interessieren soll zunächst die Frage, welche Integrationsgrenze  $\varrho_0$  mindestens gewählt werden muss, um die Felder des Maxwellschen Gaußstrahls hinreichend genau zu berechnen. In den Kurven in Abbildung 4.7b ist insbesondere bei kleinem Divergenzwinkel deutlich ein Knick zu erkennen, ab dem sich der Wert  $f_p$  scheinbar nicht

| $\Theta_{a0}$          | $2^\circ$          | $5^\circ$          | $10^\circ$         | $14^\circ$         |
|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $f_p _{\varrho_0/k=1}$ | 4,04e-07           | 9,94e-05           | 6,35e-3            | 3,76e-2            |
| Min. $\varrho_0/k$     | 0,2                | 0,4                | 0,55               | 0,6                |
| $2w_0$                 | 15,5 $\mu\text{m}$ | 6,18 $\mu\text{m}$ | 3,06 $\mu\text{m}$ | 2,16 $\mu\text{m}$ |

Tabelle 4.3.: Exemplarische Grenzwerte des Fehlermaßes  $f_p$  an der Stelle  $b = 50 \mu\text{m}$ , empfohlene Integrationsgrenze  $\varrho_0$  und der minimale Strahldurchmesser  $b = 2w_0$ .

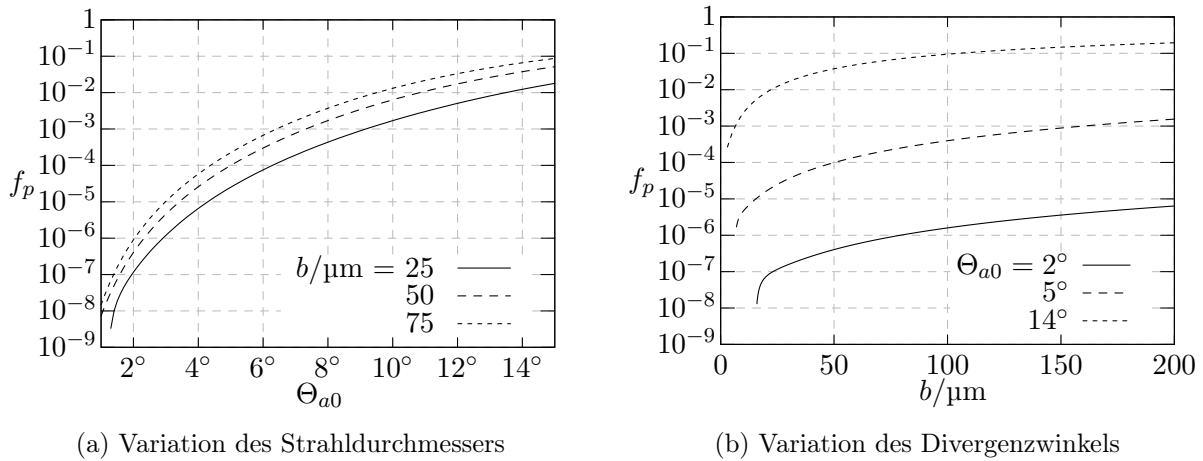


Abbildung 4.8.: Das Fehlermaß  $f_p$ : (a) in Abhängigkeit des Divergenzwinkels und (b) in Abhängigkeit des Strahldurchmessers  $b$ .

mehr ändert. Bei genauer Betrachtung, außerhalb der in Abbildung 4.7 darstellbaren Genauigkeit, stellt sich auch nach diesem Knick noch eine leichte Oszillation ein. Aus diesen Ergebnissen abgeleitete Grenzwerte für  $\varrho_0$  sind ebenfalls in Tabelle 4.3 aufgeführt.

Abschließend soll noch etwas detaillierter die Abhängigkeit des Fehlermaßes  $f_p$  vom Divergenzwinkel  $\Theta_{a0}$  und von der Strahlbreite  $b$  untersucht werden. In Abbildung 4.8a ist die Abhängigkeit von  $\Theta_{a0}$  für drei in dieser Arbeit verwendeten Strahlbreiten dargestellt. Wird ein maximaler Fehler von  $f_p = 10^{-3}$  angesetzt, ergibt sich für  $b = 75\mu\text{m}$  ein maximaler Divergenzwinkel von etwa  $6^\circ$ . In der Abbildung 4.8b ist zusätzlich die Entwicklung des Fehlers für größer werdende Strahldurchmesser  $b$  dokumentiert. Insbesondere bei großem  $\Theta_{a0}$  wächst der Fehler schnell so stark an, dass von der Verwendung der paraxialen Näherung abzuraten ist. Beispielsweise nimmt im Fall  $\Theta_{a0} = 14^\circ$  und  $b = 200\mu\text{m}$  das Fehlermaß den Wert  $f_p = 0,195$  an. Da das Fehlermaß eine leistungsbezogene Größe ist, variiert entsprechend auch die geführte Leistung nach der Entwicklung der Felder in Moden eines Hohlleiters. Genau wie die Felder des Maxwell'schen Gaußstrahls unterliegen die Moden des Hohlleiters nicht der paraxialen Näherung. Natürlich hängt der tolerierbare Fehler stark vom eigentlichen Ziel der Anwendung ab. Im Kontext dieser Arbeit ist dies die Entwicklung eines Referenzmodells, in dem der Gaußstrahl als Referenzquelle dient. Da der Vergleich zwischen den wellen- und strahlenoptischen Ergebnissen im Kapitel 4.4 teilweise Abweichungen aufzeigt, die lediglich im Promillebereich liegen, sollte an dieser Stelle ein maximales Fehlermaß zugelassen werden, das deutlich unter dem Promillebereich liegt. Mit einer maximalen Strahlbreite von  $b = 75\mu\text{m}$  und einem Divergenzwinkel von  $\Theta_{a0} = 5^\circ$  ist dies gegeben.

Als ergänzende Literatur empfiehlt sich insbesondere [69].

### 4.3.2. Geschlossene oder offene Wellenleiter?

Im Kapitel 3.1 wurde bereits thematisiert, dass in der Modellierung optischer Wellenleiter zwischen offenen und geschlossenen Anordnungen unterschieden werden kann. Dabei muss beachtet werden, dass beide Ansätze nur Modellcharakter besitzen. Standard-Multimode-Fasern besitzen in der Regel einen Kern mit Durchmessern von  $50\text{ }\mu\text{m}$  oder  $62,5\text{ }\mu\text{m}$ . Der Durchmesser des umgebenden Mantels ist gleich  $125\text{ }\mu\text{m}$  und damit etwa doppelt so groß wie der Kern. Es wird somit angenommen, dass die Felder der geführten Moden entsprechend schnell im Mantel abklingen. Dass dem auch so ist, zeigt exemplarisch Abbildung 4.9a. Für die Parameter  $n_1 = 1,57$ ,  $n_2 = 1,568$  und  $d = 75\text{ }\mu\text{m}$  ist das transversale Modenprofil des 14. und damit des letzten noch geführten Modes eines Schichtwellenleiters aufgetragen, vgl. Abbildung 3.2b. Eine hinreichend große Mantelschichtdicke  $a$  vorausgesetzt, dringt das Feld augenscheinlich ca.  $30\text{ }\mu\text{m}$  weit in den Mantel ein.

Unerlässlich ist in jedem Fall die hinreichend genaue Beschreibung des Spektrums der geführten Moden. Um den Einfluss des leitenden Schirms auf das Modenprofil zu verdeutlichen, zeigt Abbildung 4.9a Ergebnisse für unterschiedliche Mantelschichtdicken. Nimmt man eine Mantelschichtdicke von  $a = 500\text{ }\mu\text{m}$  als Referenzwert an, wird deutlich, dass selbst bei einer Dicke von nur  $10\text{ }\mu\text{m}$  das Feld im Kern ( $|x| < 37,5\text{ }\mu\text{m}$ ) noch hinreichend gut beschrieben wird. Lediglich im Mantel kommt es zu größeren Abweichungen. Bei noch kleineren Schichtdicken ändert sich das Modenprofil schließlich auch signifikant im Kern.

Die vergleichsweise kleine numerische Apertur wurde im Übrigen gewählt, da sich die Felder eines 14. Modes noch in einem akzeptablen Maßstab darstellen lassen. Im Mittel dringen die Felder bei kleiner werdender numerischer Apertur zwar weiter in den Mantel ein. Die Felder des letzten gerade noch geführten Modes eines Wellenleiters mit großer Apertur können aber durchaus noch weiter in den Mantel reichen, z.B. besitzt für  $n_2 = 1,55$  der

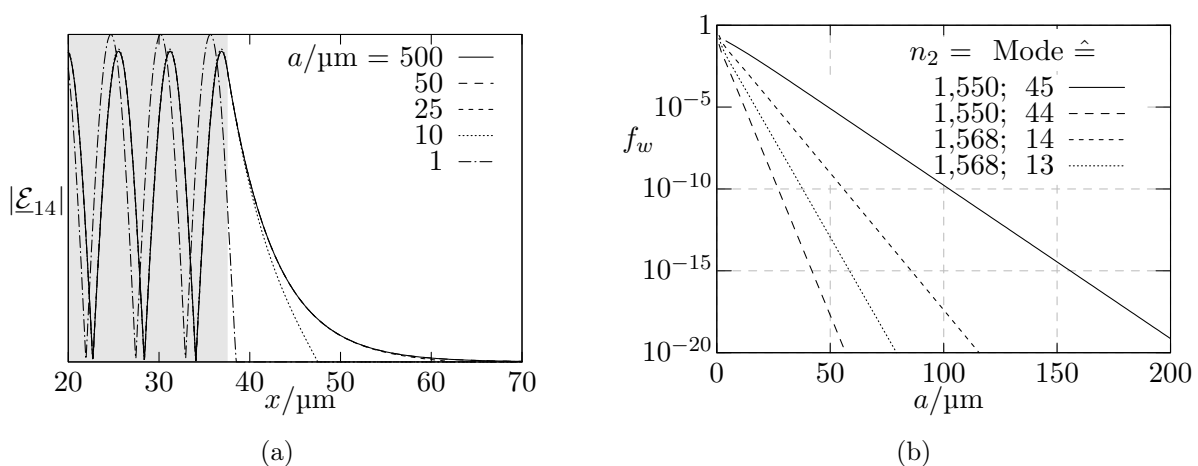


Abbildung 4.9.: (a): Ausschnitt des transversalen Modenprofils  $|\mathcal{E}_\nu|$  des 14. Modes für unterschiedliche Mantelschichtdicken  $a$ . Der Wellenleiterkern ist grau unterlegt. (b): Das Fehlermaß  $f_w$  in Abhängigkeit der Mantelschichtdicke  $a$ . Es gilt jeweils  $d = 75\text{ }\mu\text{m}$ .

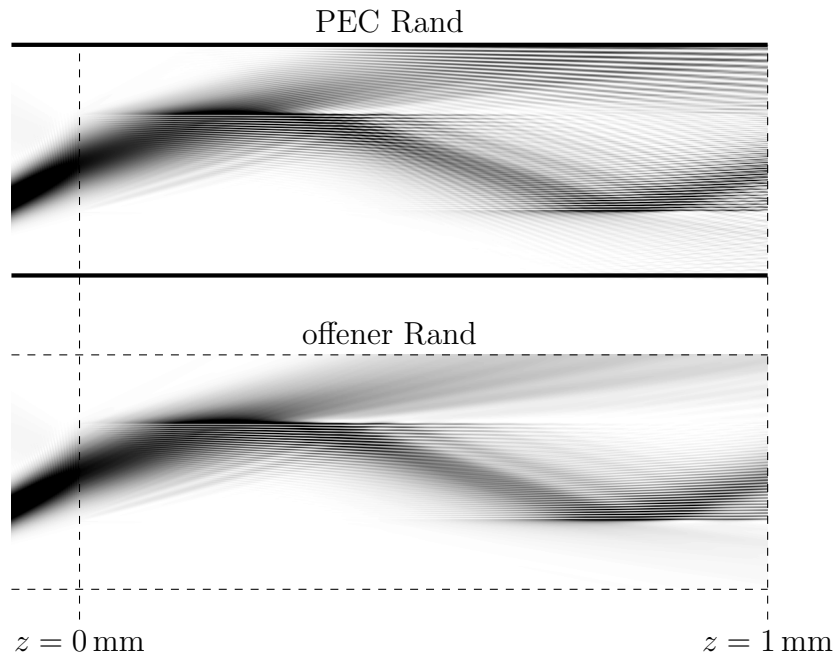


Abbildung 4.10.: Zeitlich gemittelte Leistungsflussdichte  $|\Re\{\vec{S}\}|$  bei Anregung in  $z = 0$  durch einen um  $14,5^\circ$  verdrehten Gaußstrahl für die Wellenleiterparameter:  $n_1 = 1,57$ ,  $n_2 = 1,55$  und  $d = 70 \mu\text{m}$ . Dargestellt ist der Vergleich zwischen einer geschlossenen und einer (näherungsweise) offenen Struktur.

45. und damit letzte geführte Mode nach  $60 \mu\text{m}$  noch merkliche Feldanteile.

Zur Quantifizierung des Fehlers im Profil der geführten Moden wurde wie im vorangegangenen Abschnitt ein Fehlermaß  $f$  berechnet:

$$f_w = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathcal{E}}_\nu^\infty(x) - \underline{\mathcal{E}}_\nu^{a<\infty}|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{\mathcal{E}}_\nu^\infty(x)|^2 dx}. \quad (4.28)$$

Darin kennzeichnet  $\underline{\mathcal{E}}_\nu^\infty$  das Feld eines Modes des offenen Wellenleiters. Das Ergebnis für die jeweils zwei letzten geführten Moden der beiden genannten Wellenleiter ist in Abbildung 4.9b dargestellt. Legt man wiederum einen maximalen Fehler von  $f = 10^{-3}$  zu Grunde, ist dieser auch im schlechtesten Fall bei  $a = \frac{d}{2}$  erreicht. Alle Moden niedrigerer Ordnung erreichen diese Fehlerschranke viel früher. Die Untersuchungen für die kreiszylindrische Faser bringen analoge Ergebnisse hinsichtlich der Eindringtiefe der Felder in den Mantel hervor. Es kann somit abschließend festgehalten werden, dass der Durchmesser des leitenden Schirms mindestens doppelt so groß sein sollte wie der Durchmesser des Kerns, um den Einfluss des leitenden Schirms auf die Koppleffizienz zu minimieren. Ein signifikanter Einfluss ist jedoch erst für deutlich kleinere Schirmdurchmesser zu erwarten.

Unter den genannten Bedingungen ist der Leistungsfluss im Kern des längshomogenen Wellenleiters aufgrund der Modenorthogonalität unabhängig vom Durchmesser des um-

gebenden Schirms. Voraussetzung ist natürlich die korrekte Berechnung der Amplituden der geführten Moden. Das Spektrum der Strahlungsmoden variiert jedoch zwangsläufig mit Änderung des Schirmradius, da durch den Schirm Reflexionen hervorgerufen werden. Abbildung 4.10 zeigt exemplarisch die Änderung in der Leistungsflussdichte für den Fall eines Schichtwellenleiters mit Schirmabstand  $a = 50 \mu\text{m}$  im Vergleich zu einem Wellenleiter mit  $a = 800 \mu\text{m}$ . Da sich im letztgenannten Fall der Einfluss des leitenden Schirms erst für deutlich größere  $z$  bemerkbar macht, wird in Abbildung 4.10 unten der Begriff offener Rand verwendet. Die Darstellungen sind in transversaler Richtung um den Faktor 2 gestreckt. In der oberen Abbildung werden durch den PEC-Rand (PEC, englisch für perfekter elektrischer Leiter) deutlich erkennbare Reflexionen hervorgerufen. In der Umgebung der Schnittfläche  $z = 0$  zeigen beide Abbildungen jedoch Übereinstimmung auf. Tatsächlich ist die mit beiden Anordnungen berechnete Koppleffizienz im Rahmen der erreichbaren Genauigkeit identisch.

Der Einfluss des leitenden Schirms auf das anregende Feld ist im Übrigen vernachlässigbar. Zwar werden die Felder, sofern noch signifikant vorhanden, durch den Schirm abgeschnitten. Diese abgeschnittenen Anteile rufen jedoch keine unerwünschten Effekte hervor, sondern werden nicht weiter berücksichtigt.

### 4.3.3. Die Anzahl zu berücksichtigender Moden

Wie bereits diskutiert, setzt sich das Modenspektrum eines jeden Wellenleiters auch im Fall eines diskreten Spektrums aus einer unendlichen Anzahl Moden zusammen. Unabhängig von der gewählten Vorgehensweise kann eine Simulation ohne zusätzliche Näherungen jedoch immer nur endlich viele Moden berücksichtigen. Im Folgenden soll zunächst untersucht werden, wie viele Moden für die hinreichend genaue Beschreibung des Gaußstrahls durch Hohlleitermoden erforderlich sind. Anschließend wird die Untersuchung auf die Durchführung des Mode-Matchings ausgedehnt.

#### Entwicklung des einfallenden Feldes

Die Entwicklung der Felder des Gaußstrahls in die Moden eines Rundhohlleiters ist der rechenintensivste Teil der Simulationen dieser Arbeit. Wünschenswert wäre es daher, nur die Amplituden der Moden zu berechnen, die auch signifikant angeregt werden. Zur Visualisierung des angeregten Modenspektrums wird die Folge der Partialsummen über die Leistung der einzelnen Moden

$$\bar{P}_{\Xi}(n_{\text{eff}}) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \bar{P}_{\nu} \quad \text{mit} \quad \mu = \max\{\nu | k_{z\nu} \geq k_0 n_{\text{eff}}\} \quad (4.29)$$

betrachtet. Der Übersichtlichkeit wegen und zur besseren Vergleichbarkeit wird  $\bar{P}_{\Xi}$  definiert als Funktion einer effektiven Brechzahl  $n_{\text{eff}}$ . Die Summation in (4.29) berücksichtigt Moden im Indexbereich  $n_1 > k_{z\nu}/k_0 > n_{\text{eff}}$ . Mit den in dieser Arbeit betrachteten diskreten Modenspektren verläuft  $\bar{P}_{\Xi}(n_{\text{eff}})$  stufenförmig, was jedoch aufgrund der Vielmodigkeit der Wellenleiter und der endlichen Darstellungsgenauigkeit oft nicht auffällt.

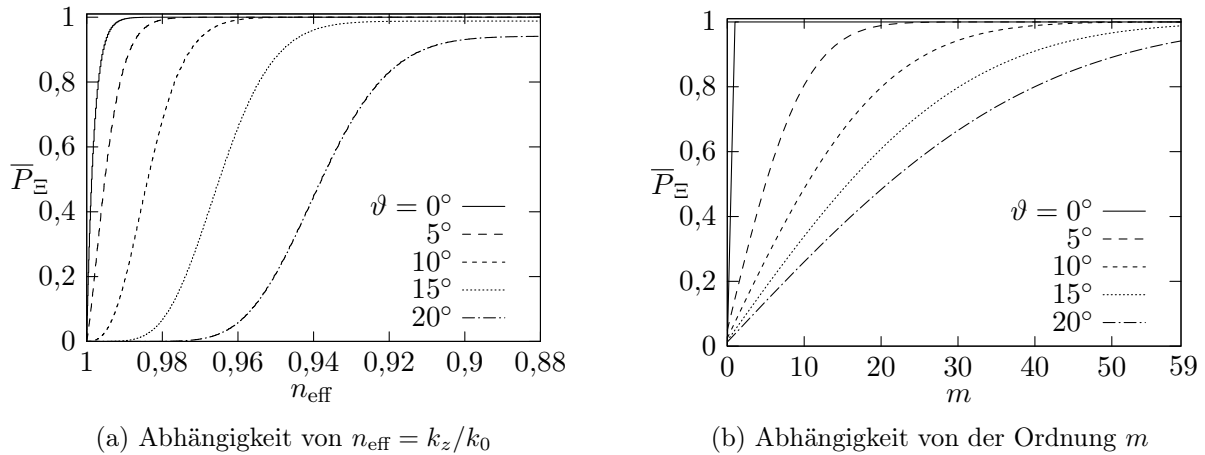


Abbildung 4.11.: Anregung des Modenspektrums im Hohlleiter: Akkumulierte Leistung  $\bar{P}_\Xi$  für verschiedene Einfallswinkel  $\vartheta$ . Es gilt  $\Theta_{a0} = 5^\circ$  und  $M_F = 59$ .

Die effektive Brechzahl ist für ausbreitungsfähige Moden reellwertig und liegt im Fall des luftgefüllten Hohlleiters im Intervall (0,1). Abbildung 4.11a zeigt exemplarisch den Verlauf von  $\bar{P}_\Xi(n_{\text{eff}})$  für einen Divergenzwinkel  $\Theta_{a0} = 5^\circ$  und unterschiedliche Einfallswinkel  $\vartheta$ . Sofern eine hinreichend große Anzahl ausbreitungsfähiger Moden existiert, ist die Darstellung nahezu unabhängig vom Radius des Hohlleiters. Die Leistung des einfallenden Gaußstrahls ist im Weiteren stets normiert auf ein Watt.

Es zeigt sich, dass mit wachsendem Einfallswinkel das angeregte Spektrum verschoben wird. Die Breite des angeregten Spektrums korrespondiert mit dem Divergenzwinkel des Gaußstrahls. Dies wird unmittelbar deutlich, wenn die Winkel  $\arccos(n_{\text{eff}})$  der jeweiligen Moden betrachtet werden. Da die maximale berücksichtigte azimuthale Ordnung  $M_F = 59$  ist, wird bei großem Einfallswinkel der Maximalwert nicht erreicht. Durch eine laterale Verschiebung des Gaußstrahls werden zwar Moden höherer azimuthaler Ordnung angeregt, jedoch keine Moden mit kleinerem effektiven Index. Entsprechend wird dieser Fall in Abbildung 4.11a nicht berücksichtigt. Dieses Ergebnis lässt sich aus der klassischen Fouriertheorie ableiten, nach der eine Verschiebung im Ursprungsbereich lediglich eine Änderung der Phase im Bildbereich hervorruft. Abgesehen von der fehlenden azimuthalen Ordnung resultieren für den planaren Schichtwellenleiter vollkommen analoge Ergebnisse.

Abbildung 4.11b zeigt zusätzlich die akkumulierte Leistung, aufgetragen über die azimuthale Modenzahl  $m$ . Im Fall  $\vartheta = 0$  werden nur Moden der Ordnung  $m = 1$  angeregt. Mit wachsendem Einfallswinkel werden dann verstärkt höhere Ordnungen angeregt.

Für den Algorithmus zur Berechnung der Amplituden der Hohlleitermoden empfiehlt sich somit die Implementierung eines Abbruchkriteriums bzgl. der Leistung pro Ordnung  $m$ . In dieser Arbeit wurde eine Schranke von  $\Delta\bar{P} = 5\text{e-}7$  verwendet. Ordnungen  $m$ , die weniger Leistung als  $\Delta\bar{P}$  führen, werden nicht mehr berücksichtigt. In jeder Ordnung  $m$  brauchen dann nur die Moden im entsprechenden Indexbereich berücksichtigt werden, wobei in dieser Arbeit standardmäßig alle ausbreitungsfähigen Moden einer Ordnung  $m$  berücksichtigt werden. Die Kontrolle der korrekten Entwicklung des Gaußstrahls erfolgt wiederum über

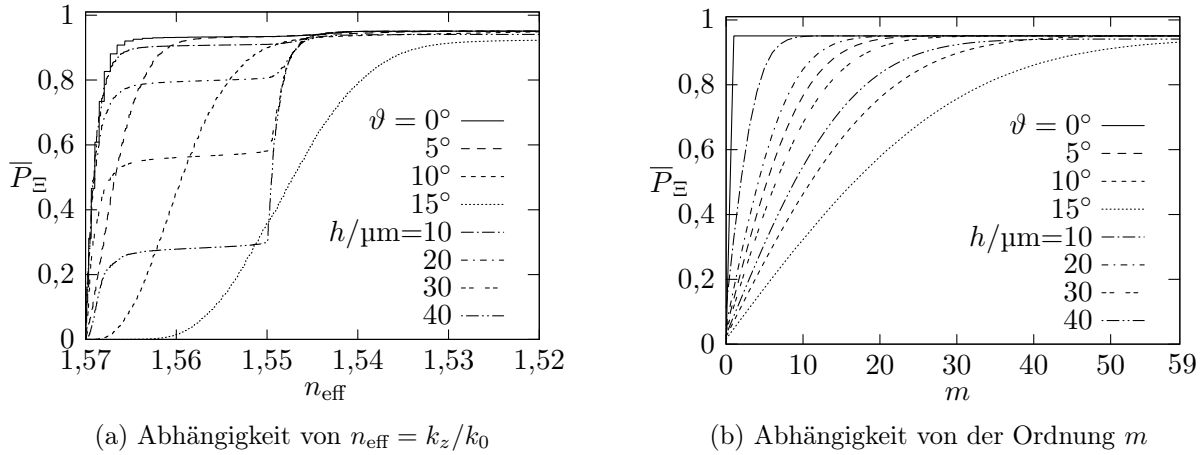


Abbildung 4.12.: Anregung des Modenspektrums der Faser: Akkumulierte Leistung  $\bar{P}_\Xi$  für verschiedene Einfallswinkel  $\vartheta$  und verschiedene Verschiebungen  $h$ . Es gilt  $d = 70 \mu\text{m}$ ,  $n_2 = 1,55$ ,  $\Theta_{a0} = 5^\circ$  und  $M_F = 59$ .

ein Fehlermaß äquivalent zu (4.26). Da die numerische zweidimensionale Integration sehr aufwändig ist, wurde nur über die Koordinatenachsen integriert. Im planaren Fall lässt sich zeigen, dass das Fehlermaß gegen Null strebt. Systematisch bedingt bleibt das Fehlermaß im Rundhohleiter in der Regel etwas oberhalb  $\Delta\bar{P}$ .

### Durchführung des Mode-Matching

Analog zu den vorherigen Untersuchungen zum Modenspektrum des Hohlleiters wurde auch das Spektrum der Faser analysiert. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.12 dargestellt. Aufgrund von Reflexionsverlusten ist die Gesamtleistung stets kleiner eins. Der effektive Index der Kernmoden der Faser liegt im Intervall (1,57, 1,55). Für  $n_{\text{eff}} < 1,55$  bilden sich Mantelmoden aus. Die Aufteilung in Kern- und Mantelmoden ist der entscheidende Unterschied zum Hohlleiter. Besonders deutlich wird dieser Unterschied in der Anregung des Modenspektrums bei Variation der lateralen Verschiebung, Abbildung 4.12a. Wiederum werden auch für große Verschiebungen keine Kernmoden mit kleinerem  $n_{\text{eff}}$  angeregt. Ist die Verschiebung so groß, dass wenig Leistung in die Kernmoden gekoppelt wird, werden stattdessen die Mantelmoden angeregt, deren effektiver Index nur unwesentlich kleiner als 1,55 ist. Physikalisch ist dies plausibel, da über den effektiven Index, bzw. über den Winkel des Wellenvektors zur Wellenleiterachse  $\arccos(n_{\text{eff}}/n_i)$ , die Richtung der Wellenausbreitung festgelegt wird.

Wie viele Moden nun tatsächlich in den Simulationen berücksichtigt werden müssen, ist wie gezeigt sowohl von der Anregung als auch von den Eigenschaften des dielektrischen Wellenleiters abhängig. Die Anzahl geführter Moden sowie die maximale azimuthale Ordnung  $M_F$ , bis zu der noch geführte Kernmoden existieren, ist in Tabelle 4.1 aufgeführt. Primär wird die Anzahl ausbreitungsfähiger Mantelmoden durch den Durchmesser des leitenden Schirms festgelegt. Abbildung 4.13 zeigt exemplarisch die über den effektiven Brechungsindex aufsummierte Anzahl ausbreitungsfähiger Moden des Hohlleiters und der Faser für

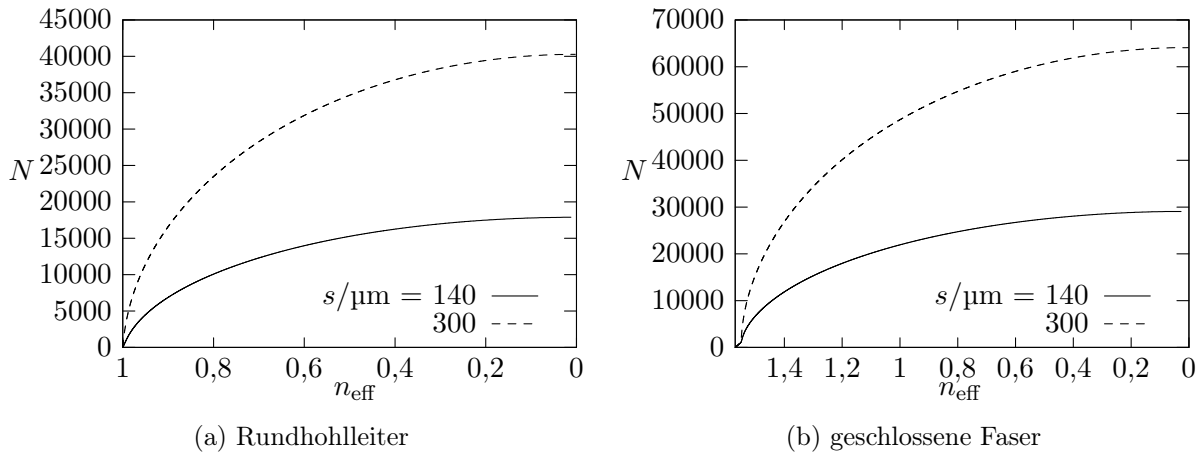


Abbildung 4.13.: Gesamtanzahl ausbreitungsfähiger Moden in einer Polarisation, aufsummiert über den effektiven Index  $n_{\text{eff}} = k_z/k_0$  bis zur Ordnung  $M_F = 59$ . Es gilt  $d = 70 \mu\text{m}$  und  $n_2 = 1,55$ .

zwei unterschiedliche Schirmdurchmesser. Dabei wurden nur Moden bis zur azimuthalen Ordnung  $M_F = 59$  berücksichtigt. Die Gesamtanzahl ausbreitungsfähiger Moden ist noch einmal deutlich größer. Aufgrund der größeren Brechzahlen der Faser, sowohl im Kern als auch im Mantel, ist die Anzahl ausbreitungsfähiger Moden für die Faser größer. Alle Angaben beziehen sich dabei auf nur eine Polarisation. Oft ist die maximal zu berücksichtigende azimuthale Ordnung deutlich kleiner als  $M_F$ , vgl. Abbildung 4.12b. Im Extremfall des senkrechten meridionalen Einfalls der Strahlachse muss nur die Ordnung  $m=1$  berücksichtigt werden. In dieser Ordnung existieren für  $s = 140 \mu\text{m}$  im Hohlleiter 329 und in der Faser 513 ausbreitungsfähige Moden (davon 41 Kernmoden). Im Fall  $s = 300 \mu\text{m}$  sind es 705 bzw. 1097 Moden. Wie bereits diskutiert brauchen nicht alle Moden einer Ordnung  $m$  berücksichtigt werden. Die Anzahl der Kern- und Mantelmoden im planaren Schichtwellenleiter entspricht nahezu der Anzahl Fasernmoden der Ordnung  $m = 1$ .

Zur Kontrolle der Randbedingungen wurde erneut ein im Vergleich zu (4.26) leicht modifiziertes Fehlermaß angewendet:

$$f_m = \frac{2 \iint_{-\infty}^{\infty} \left| \underline{E}_t^{(l)}(\vec{r}) - \underline{E}_t^{(r)}(\vec{r}) \right|^2 da_t}{\iint_{-\infty}^{\infty} \left| \underline{E}_t^{(l)}(\vec{r}) + \underline{E}_t^{(r)}(\vec{r}) \right|^2 da_t}. \quad (4.30)$$

Wiederum lässt sich im planaren Fall zeigen, dass das Fehlermaß gegen Null strebt. Der Aufwand für die zweidimensionale Querschnittsebene der Faser ist jedoch ungleich höher, da die Anzahl der Moden deutlich größer ist und zudem die mathematische Beschreibung der Fasernmoden aufwändiger ist. In den Simulationen wurden wiederum standardmäßig alle ausbreitungsfähigen Moden einer Ordnung  $m$  berücksichtigt. Bei großem Einfallswinkel müssen somit links- und rechtsseitig der Grenzschicht jeweils mehrere zehntausend Moden berücksichtigt werden. Anstelle der Flächenintegrationen in (4.30) wurde daher nur stichprobenartig über Linien  $\varphi = \text{konstant}$  integriert. Des Weiteren wurden vornehmlich Wellenleiter mit kleinem Kerndurchmesser untersucht, da diese im besonderen Fokus



des Interesses stehen, mit dem Nebeneffekt, dass die Anzahl zu berücksichtigender Moden relativ gering ist. Die Kontrolle für den Fall, dass die Achse des Gaußstrahls in einer Meridionalebene liegt, ergab für den senkrechten Einfall mit  $\vartheta = 0$  einen maximalen Fehler  $f < 10^{-7}$  und auch für größere Einfallswinkel einen maximalen Fehler  $f < 10^{-3}$ . Im Zweifelsfall wurde zusätzlich eine Sichtkontrolle durchgeführt, so dass in jedem Fall eine hinreichend genaue Beschreibung des Einkoppelprozesses garantiert ist.

#### 4.3.4. Anmerkungen zur numerischen Stabilität

In Anlehnung an die Erläuterungen des vorangegangenen Abschnitts soll noch einmal daran erinnert werden, dass auch eine korrekte analytische Lösung der Wellengleichung keine *stabile* Implementierung auf einem Rechensystem garantiert. Abgesehen vom grundsätzlich vorausgesetzten Determinismus der implementierten Algorithmen versteht sich das Attribut *stabil* in dieser Arbeit derart, dass insbesondere die folgenden Teilaufgaben mit hinreichender Genauigkeit durchgeführt werden:

- Auswertung aller Teilfunktionen (z.B. Besselfunktionen),
- Lösung der Eigenwertgleichungen,
- Durchführung der numerischen Integrationen.

Die ersten beiden genannten Punkte sind direkt miteinander verknüpft, da zur Lösung der Eigenwertgleichung bereits entsprechend viele elementare Funktionsauswertungen nötig sind. Durch die parallele Implementierung der zugehörigen Algorithmen in der Hochsprache C++ und der Interpretersprache des Computeralgebrasystems Maple<sup>®</sup> konnte die stabile Implementierung beider Teilaufgaben sichergestellt werden. Natürlich lassen sich dennoch nicht die grundsätzlichen numerischen Schwierigkeiten vermeiden, die mit einem endlichen verfügbaren Zahlenbereich verbunden sind, wie auch schon in Kapitel 4.1.3 angedeutet. Der Löser der Eigenwertgleichung beruht auf den bekannten Nullstellen der Besselfunktionen bzw. auf den Nullstellen der Kombinationen von Besselfunktionen. Insbesondere im Spektrum der Mantelmoden im Bereich des effektiven Index nahe der Mantelbrechzahl existieren Lösungen, die sich mit der Genauigkeit einer Variablen doppelter Genauigkeit nicht auflösen lassen. D.h. der Eigenwert stimmt quasi mit der Nullstelle einer Besselfunktion überein. Hier besteht die Gefahr eines erhöhten Fehlers, da im Verlauf der weiteren Rechnungen immer wieder Besselfunktionen mit entsprechendem Argument aufgerufen werden. In den Simulationen dieser Arbeit konnten jedoch keine wesentlichen Unstimmigkeiten beobachtet werden.

Es soll jedoch nicht verschwiegen werden, dass auch in der vorhandenen Implementierung einige Grenzen existieren. Beispielsweise können keine azimuthalen Ordnungen  $m > 97$  berücksichtigt werden. Diese werden jedoch erst für Wellenleiterkerndurchmesser größer 100  $\mu\text{m}$  benötigt. Darüberhinaus kommt es gelegentlich zu Schwierigkeiten bei der Auswertung einiger Teilfunktionen in der Ordnung  $M_F$ , in der gerade noch ein geführter Mode existiert. In dieser Arbeit tritt dieser Fall für  $d = 60 \mu\text{m}$  ( $M_F = 50$ ) und  $d = 90 \mu\text{m}$  ( $M_F = 77$ ) auf. Die Ursache dieses Problems wurde nicht weiter verfolgt, da in den entsprechenden Ordnungen  $m = M_F$  auch für große Einfallswinkel jeweils nur ein vernachlässigbar

kleiner Teil der Gesamtleistung geführt wird, vgl. Abbildung 4.12b.

Da für die notwendigen numerischen Integrationen dieser Arbeit zumeist Quadraturverfahren mit äquidistanten Stützstellen verwendet wurden, wurde die Anzahl der Stützstellen entweder direkt sehr hoch angesetzt oder aber zur Kontrolle stichprobenartig erhöht. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die implementierten Routinen dieser Arbeit sehr stabil arbeiten. Die wenigen Ausnahmefälle sind detektierbar und lassen sich entsprechend berücksichtigen.

## 4.4. Vergleich zur Strahlenoptik

Die vorangegangene Beschreibung des wellentheoretischen Modells hat einen nicht unerheblichen Rechenaufwand aufgezeigt. Der Rechenaufwand eines strahlenoptischen Modells ist in der Regel geringer. Jedoch ist dies nicht zwangsläufig der Fall, wenn eine hohe Anzahl Strahlen berücksichtigt werden muss. In jedem Fall ist die mathematische Beschreibung deutlich einfacher, da aufgrund der abschnittsweise homogenen Materialeigenschaften die Strahltrajektorien ebenfalls abschnittsweise gerade sind. Zu klären ist noch die Frage, welcher Bedingung ein Strahl genügen muss, damit er im Wellenleiterkern geführt wird.

### 4.4.1. Effektiver Kernquerschnitt und Akzeptanzwinkel

Bekanntlich klingen die Felder eines geführten Modes in transversaler Richtung erst im Mantel evaneszent ab, dringen also ein Stück weit in den Mantel ein. Wie im Kapitel 2.4.2 vorgestellt, kann das Eindringen der Felder in den Mantel strahlenoptisch mit Hilfe der Goos-Hänchen-Verschiebung nachgebildet werden. Das setzt jedoch Strahlen voraus, die bereits im Wellenleiterkern geführt werden. In der klassischen strahlenoptischen Theorie wird ein Strahl im Wellenleiterkern geführt, wenn er zuvor auf die Stirnfläche des Wellenleiterkerns aufgetroffen ist und anschließend an der Grenzfläche zwischen Kern und Mantel totalreflektiert wird. In einer möglichen Erweiterung dieses klassischen Modells könnten auch Strahlen zugelassen werden, die zwar neben der Stirnfläche des Wellenleiterkerns auftreffen, jedoch noch innerhalb der Goos-Hänchen-Verschiebung bleiben. Zur Illustration ist in Abbildung 4.14 der Grenzfall zweier möglicher Strahlpfade,  $S_1$  und  $S_2$ , dargestellt.

Beide Strahlen treffen in einem Punkt,  $P_1$  bzw.  $P_2$ , auf, der genau um den Betrag der Goos-Hänchen-Verschiebung neben der Kern-Mantel-Grenzfläche liegt. Da der Strahl  $S_2$  unter einem größeren Winkel auftrifft, dringt er gemäß der Definition (2.118) weiter in den Mantel ein. Die Eindringtiefe  $x_s$  berechnet sich in Abhängigkeit des Einfallswinkels für die  $TE$ -Polarisation gemäß

$$x_s^{TE} = \frac{1}{k_0 \sqrt{n_{\text{eff}}^2 - n_2^2}} = \frac{1}{k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2 - (\sin \Theta)^2}}. \quad (4.31)$$

Der Ausdruck für die  $TM$ -Polarisation ist etwas umfangreicher, vgl. (2.119). Im Ergebnis sind die Unterschiede zwischen den Polarisationen jedoch gering. Die minimale Eindring-

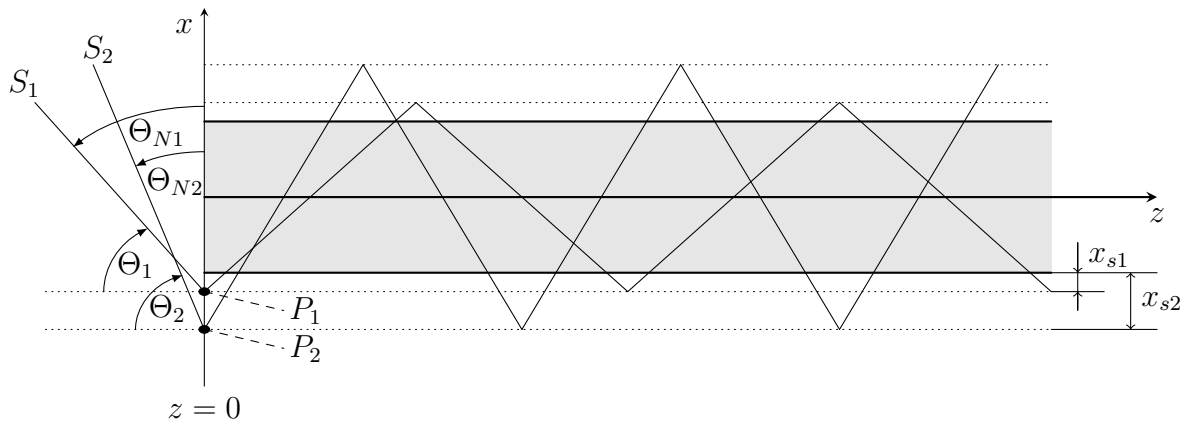


Abbildung 4.14.: Illustration zweier möglicher Strahlpfade im Wellenleiterkern unter Berücksichtigung der Goos-Hänchen-Verschiebung.

tiefe ergibt sich für  $\Theta = 0$  zu

$$x_{s0}^{TE} = \frac{1}{k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}. \quad (4.32)$$

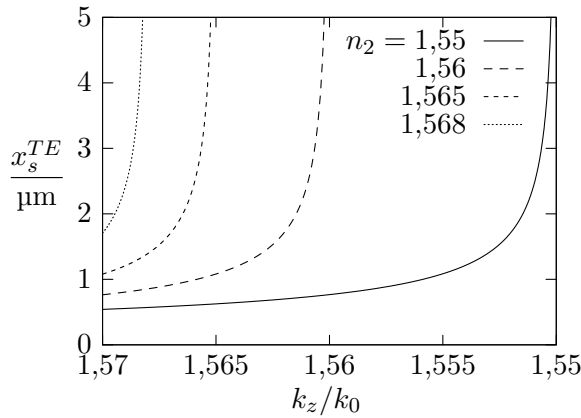
Für den Einfallswinkel  $\Theta$  sei angenommen

$$\sin \Theta < \sin \Theta_c = NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (4.33)$$

Der Verlauf der Eindringtiefe als Funktion des effektiven Brechungsindex  $n_{\text{eff}} = k_z/k_0$  ist für unterschiedliche Mantelbrechzahlen in Abbildung 4.15a dargestellt. Im Grenzpunkt  $\sin \Theta = NA$  bzw.  $n_{\text{eff}} = n_2$  ist die Funktion jeweils singulär. Beachtet werden muss, dass sich die Wellenzahl  $k_z$  auf die Ausbreitung im Wellenleiterkern bezieht.

Es ist nicht ersichtlich, warum ein Strahl, der unter großem Winkel weit abseits vom Kern einfällt, im Kern geföhrt wird, wohingegen ein senkrecht einfallender Strahl mit gleichem Aufpunkt nicht im Kern geföhrt wird. Ein Strahl, der mit dem Grenzwinkel  $\sin \vartheta = NA$  auftritt, würde sogar unabhängig vom Aufpunkt im Kern geföhrt. Gleichzeitig erscheint die vollkommene Vernachlässigung der Goos-Hänchen-Verschiebung bei der Einkopplung in den Wellenleiter ebenso nicht gerechtfertigt, denn die minimale Verschiebung  $x_{s0}$  für  $\sin \vartheta = 0$  kann bereits Werte im Mikrometerbereich annehmen. Die Tabelle in Abbildung 4.15b listet die zugehörigen Werte auf. In [37] wird der effektive Kernquerschnitt um die konstante Verschiebung  $x_s|_{k_{z,\min}}$  verbreitert. Darin ist  $k_{z,\min}$  die Wellenzahl des letzten gerade noch geföhrtten Modes. Der zugehörige effektive Index liegt bereits in der Nähe der Mantelbrechzahl  $n_2$ . Entsprechend groß ist  $x_s$ , z.B.  $x_s \approx 7 \mu\text{m}$  für  $n_2 = 1,55$ . Die Diskussion, in welcher Art die Goos-Hänchen-Verschiebung berücksichtigt werden sollte, wird im folgenden Kapitel anhand konkreter Beispiele fortgeföhrt.

Neben der effektiven Kernquerschnittsfläche ist der Einfallswinkel der Strahlen von besonderer Bedeutung. Gemäß Kapitel 2.4.3 trifft ein Strahl mit dem Richtungsvektor  $\vec{e}_s$  auf die Stirnfläche.

(a) Abhängigkeit von  $n_{\text{eff}} = k_z/k_0$ 

| $n_1$ | $n_2$ | $x_{s0}/\mu\text{m}$ |           |
|-------|-------|----------------------|-----------|
|       |       | <i>TM</i>            | <i>TE</i> |
| 1,57  | 1,550 | 0,527                | 0,541     |
| 1,57  | 1,560 | 0,754                | 0,764     |
| 1,57  | 1,565 | 1,073                | 1,080     |
| 1,57  | 1,568 | 1,702                | 1,706     |

(b) Die minimale Eindringtiefe

Abbildung 4.15.: Die Eindringtiefe abgeleitet aus der Goos-Hänchen-Verschiebung.

### Schicht- und Rechteckwellenleiter

Beim planaren Schichtwellenleiter werden Strahlen im Kern geführt, falls (4.33) gilt. Da in diesem Fall die  $y$ -Komponente des Ausbreitungsvektors gleich Null ist,  $e_{sy} = 0$ , verbleibt für die  $x$ -Komponente

$$|e_{sx}| < NA. \quad (4.34)$$

Im Fall eines Wellenleiters mit zweidimensionalem Querschnittprofil muss die Bedingung (4.33) erweitert werden. Für den rechteckförmigen Wellenleiter folgt analog zu (4.34) [37]

$$|e_{sx}| < NA \quad \wedge \quad |e_{sy}| < NA. \quad (4.35)$$

### Kreiszyklindrische Fasern

Deutlich aufwändiger wird die Beschreibung jedoch für die kreiszyklindrische Faser [58, 61]. Dazu wird Abbildung 4.16 betrachtet, die das Auftreffen eines Strahls auf die Kerngrenzfläche zeigt und einige notwendige Winkel definiert. Der Übersicht wegen werden zunächst Strahlen betrachtet, die bereits die Stirnfläche transmittiert haben. Diese Größen werden im Folgenden mit einer Schlange akzentuiert.

Nach den Gesetzen der geometrischen Optik für den ebenen Halbraum unterliegen Strahlen mit

$$\tilde{\Theta}_N < \frac{\pi}{2} - \tilde{\Theta}_c \quad (4.36)$$

nicht der Totalreflexion. Darin ist  $\tilde{\Theta}_N$  der Winkel zwischen dem Strahl und der Normalen der Grenzfläche.  $\tilde{\Theta}_c$  ist der kritische Winkel für Strahlen im Kern, mit  $\cos \tilde{\Theta}_c = \frac{n_2}{n_1}$ . Diese Beziehung behält auch für die konkav gekrümmte Grenzfläche ihre Gültigkeit, der verbleibende Bereich muss jedoch unterteilt werden. Strahlen mit

$$\tilde{\Theta}_z < \tilde{\Theta}_c \quad \text{und} \quad \tilde{\Theta}_N > \frac{\pi}{2} - \tilde{\Theta}_c \quad (4.37)$$

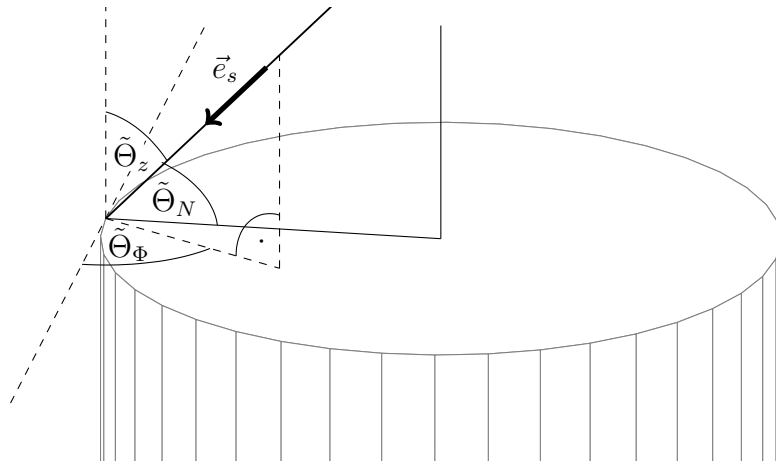


Abbildung 4.16.: Aufpunkt und zugehörige Winkel eines Strahls im Kern der kreiszyklindrischen Faser nach der Einkopplung.

werden ohne Abstrahlung im Kern geführt. Dagegen geben Strahlen mit

$$\tilde{\Theta}_z > \tilde{\Theta}_c \quad \text{und} \quad \tilde{\Theta}_N > \frac{\pi}{2} - \tilde{\Theta}_c \quad (4.38)$$

aufgrund von Tunnelverlusten Leistung an den Mantel ab. Diese Strahlen werden daher als Leckstrahlen bezeichnet. Es sind jedoch in der Regel deutlich mehr Reflexionen nötig, damit ein signifikanter Anteil der Leistung in den Mantel abgestrahlt wird, verglichen mit den Strahlen, die die Bedingung (4.36) verletzen. Der Winkel  $\tilde{\Theta}_N$  lässt sich mit Hilfe der Beziehung

$$\cos \tilde{\Theta}_N = \sin \tilde{\Theta}_z \sin \tilde{\Theta}_\Phi \quad (4.39)$$

aus den Komponenten des Ausbreitungsvektors  $\vec{e}_s$  bestimmen. Aufgrund der in dieser Arbeit gewählten Anregung wird nur sehr wenig Leistung in die Leckstrahlen gekoppelt. Für eine detailliertere Darstellung und Interpretation der Strahlführung in kreiszyklindrischen Fasern sei daher auf [61] verwiesen.

Durch einen rotationssymmetrischen Gaußstrahl werden bei idealer Einkopplung, d.h. Strahlachse und Wellenleiterachse fallen zusammen, nur Strahlpfade angeregt, die in einer Ebene mit der Wellenleiterachse liegen. Man spricht auch von Meridionalebenen. In diesem Fall gilt für alle Strahlen  $\tilde{\Theta}_\Phi = \frac{\pi}{2}$  und mit (4.39) lässt sich direkt zeigen, dass Leckstrahlen, die der Bedingung (4.38) genügen, nicht existieren können. Damit ein maßgeblicher Anteil der einfallenden Leistung in Leckstrahlen eingekoppelt wird, müsste der Strahl gleichzeitig verdreht und lateral verschoben werden. Da die erreichbare Koppeleffizienz schnell abnehmen würde, wird dieser Fall in dieser Arbeit nicht betrachtet. Leckstrahlen werden daher nicht weiter berücksichtigt. Ein auf die Stirnfläche auftreffender Strahl muss damit wie beim planaren Wellenleiter nur der Bedingung (4.33) genügen. Bezogen auf die  $z$ -Komponenten des Ausbreitungsvektors des einfallenden Strahls gilt:

$$e_{sz} > \sqrt{1 - (n_1^2 - n_2^2)}. \quad (4.40)$$

### 4.4.2. Allgemeine Ergebnisse

Einleitend sollen zunächst kurz die Erwartungshaltung an die geometrische Optik und die daraus resultierenden Konsequenzen rekapituliert werden. Die geometrische Optik verspricht immer dann gute Ergebnisse, wenn die Geometrie groß gegenüber der Wellenlänge ist. Übertragen auf den optischen Wellenleiter impliziert dies einen hinreichend großen Kerndurchmesser und damit einen vielmodigen Wellenleiter. Die Anzahl der geführten Moden wird jedoch neben der Geometrie auch von der numerischen Apertur des Wellenleiters bestimmt, so dass mit kleiner werdender numerischer Apertur die Anzahl der geführten Moden abnimmt. Eine hinreichend große Anzahl geführter Moden ist auch Voraussetzung, wenn der Strahl als lokale ebene Welle interpretiert wird. Im klassischen strahlenoptischen Modell kann der Ausbreitungsvektor dieser lokalen ebenen Welle beliebige Winkel zur Wellenleiterachse annehmen. In der Theorie der normalen Moden sind es jedoch nur endlich viele zulässige Winkel. Damit die Annahme eines kontinuierlichen Winkelspektrums gerechtfertigt ist, sollte das diskrete Spektrum der normalen Moden also hinreichend dicht sein.

Unabhängig von den absoluten Abmessungen besitzt eine Stufenindexfaser stets abrupte Materialübergänge zwischen Kern und Mantel. Die zuvor geführte Diskussion hinsichtlich der Berücksichtigung der Goos-Hänchen-Verschiebung bei der Einkopplung in den Wellenleiter hat bereits aufgezeigt, dass ein Strahl, der im Grenzbereich zwischen Kern und Mantel auftrifft, möglicherweise nicht eindeutig als geführt zugeordnet werden kann. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass gute Übereinstimmung zwischen Wellentheorie und Strahlenoptik erwartet wird, wenn

- der Durchmesser des Wellenleiterkerns und die numerische Apertur hinreichend groß sind,
- wenig Leistung und damit wenig Strahlen auf den Bereich der Schnittstelle zwischen Kern und Mantel treffen.

Ein expliziter Vergleich soll nun zunächst anhand der bereits im Kapitel 4.2.2 herangezogenen Parametersätze erfolgen, siehe auch [64]. Für alle Parametersätze wurde die Koppeffizienz auf Basis strahlenoptischer Methodik neu berechnet. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse für die kreiszylindrische Faser ist in Abbildung 4.17 dargestellt. Dabei werden im strahlenoptischen Modell drei Methoden unterschieden, die den effektiven Kerndurchmesser betreffen. In der folgenden Auflistung der Methoden korrespondiert der Bezeichner mit den Legenden in Abbildung 4.17.

**STRAHL** Der Kernradius verbleibt unverändert.

**STRAHL GH** Der Kernradius wird um die winkelabhängige Goos-Hänchen-Verschiebung gemäß Abbildung 4.15a erweitert.

**STRAHL CGH** Der Kernradius wird um die konstante minimale Goos-Hänchen-Verschiebung gemäß der Tabelle in Abbildung 4.15b erweitert.

Der Bezeichner **WELLE** kennzeichnet die bereits im Kapitel 4.2.2 präsentierten wellentheoretischen Resultate. Die Definition der Koppeffizienz im strahlenoptischen Modell erfolgt analog zu (4.24), jedoch wird nun die Leistung der im Kern totalreflektierten Strahlen

aufsummiert. Um einen signifikanten Diskretisierungsfehler im strahlenoptischen Modell auszuschließen, wurde in der Notation des Kapitels 2.4.3 standardmäßig eine Diskretisierung von 500 Punkten in radialer Richtung und 1000 Punkten in azimuthaler Richtung gewählt. Zur Verifikation wurde die Anzahl der Punkte in beiden Richtungen verdoppelt, wobei keine Abweichungen in der Koppeffizienz in fünf signifikanten Stellen festgestellt werden konnte.

Die Interpretation der Ergebnisse in Abbildung 4.17 soll ausgehend von der Konfiguration erfolgen, die die größte Anzahl geführter Moden bereitstellt:  $d = 70 \mu\text{m}$  und  $n_2 = 1,55$ . Zur Erinnerung, die Kernbrechzahl ist konstant gleich  $n_1 = 1,57$  und der Strahldurchmesser ist konstant gleich  $b = 50 \mu\text{m}$ . Wie erwartet stimmen die Ergebnisse der unterschiedlichen Methoden sehr gut überein, solange der Strahl nur verdreht wird, Abbildung 4.17a mit  $d = 70 \mu\text{m}$ . Da wenig Leistung auf den Bereich der Schnittstelle zwischen Kern und Mantel trifft, hat die Goos-Hänchen-Verschiebung nahezu keinen Einfluss. Wird der Strahl jedoch lateral verschoben, stellen sich mit wachsender Verschiebung  $h$  deutliche Abweichungen in den Ergebnissen ein, Abbildung 4.17c mit  $d = 70 \mu\text{m}$ . Dabei verringert die Berücksichtigung der Goos-Hänchen-Verschiebung die Abweichung deutlich. Ob die Methode STRAHL GH oder STRAHL CGH verwendet wird, ist von untergeordneter Bedeutung, da sich die Winkel, unter denen die Strahlen auftreffen, durch die laterale Verschiebung nicht verändern.

Wird nun bei konstanter numerischer Apertur und konstantem Strahldurchmesser der Kerndurchmesser verringert, treffen zunehmend Strahlen im Grenzbereich Kern-Mantel auf und die Abweichungen zwischen den Ergebnissen der Strahlen- und Wellenoptik werden größer. Dies zeigt sich sowohl in Abbildung 4.17a als auch in Abbildung 4.17c. Bei Verdrehung des Gaußstrahls zeigen sich nun auch deutliche Unterschiede zwischen den Methoden STRAHL GH und STRAHL CGH auf. Waren bislang die strahlenoptisch berechneten Koppeffizienzen stets kleiner als die wellenoptische Referenz, ergeben sich ab einem Winkel  $\vartheta \approx 7^\circ$  größere Werte. Eine deutliche Überhöhung stellt sich insbesondere durch Verwendung der winkelabhängigen Goos-Hänchen-Verschiebung ein, Methode STRAHL GH. Diese Überhöhung wird hervorgerufen durch die Singularität im Ausdruck für die Eindringtiefe  $x_s$ , Gleichung (4.31), wenn Strahlen nahe oder gleich dem kritischen Winkel  $\Theta_c$  auftreffen. Als Zwischenfazit lässt sich festhalten, dass das klassische strahlenoptische Modell (Methode STRAHL) die Koppeffizienz in jedem Fall grob qualitativ richtig berechnet. Je nach Aufpunkt der Strahlachse und Größe des Kerndurchmessers stellt sich jedoch ein absoluter Fehler von bis zu 5 Prozentpunkten ein. Die Erweiterung des klassischen Modells um die minimale Goos-Hänchen-Verschiebung, Methode STRAHL CGH minimiert den mittleren Fehler deutlich.

Die Verkleinerung der numerischen Apertur bei konstantem Kerndurchmesser  $d = 70 \mu\text{m}$  sorgt erst mit deutlich kleinerer Apertur für einen größeren Fehler, Abbildungen 4.17b und 4.17d. Eine Verkleinerung von  $NA = 0,25$  auf  $NA = 0,177$  mit  $n_2 = 1,56$  lässt noch keinen signifikanten Anstieg des Fehlers erkennen, obwohl die Gesamtanzahl geführter Moden bereits etwa halbiert wird, vgl. Tabelle 4.1. Daher sind diese beiden Fälle in Abbildung 4.17d der Übersicht wegen nicht dargestellt. Bei einer weiteren Verkleinerung der numerischen Apertur stellen sich jedoch merkbare Abweichungen ein. Zwar stimmen bei ausschließlicher Verdrehung des Gaußstrahls die Kurvenläufe insbesondere für größere Einfallswinkel sehr gut überein, Abbildung 4.17c. Signifikante Unterschiede sind jedoch insbesondere für

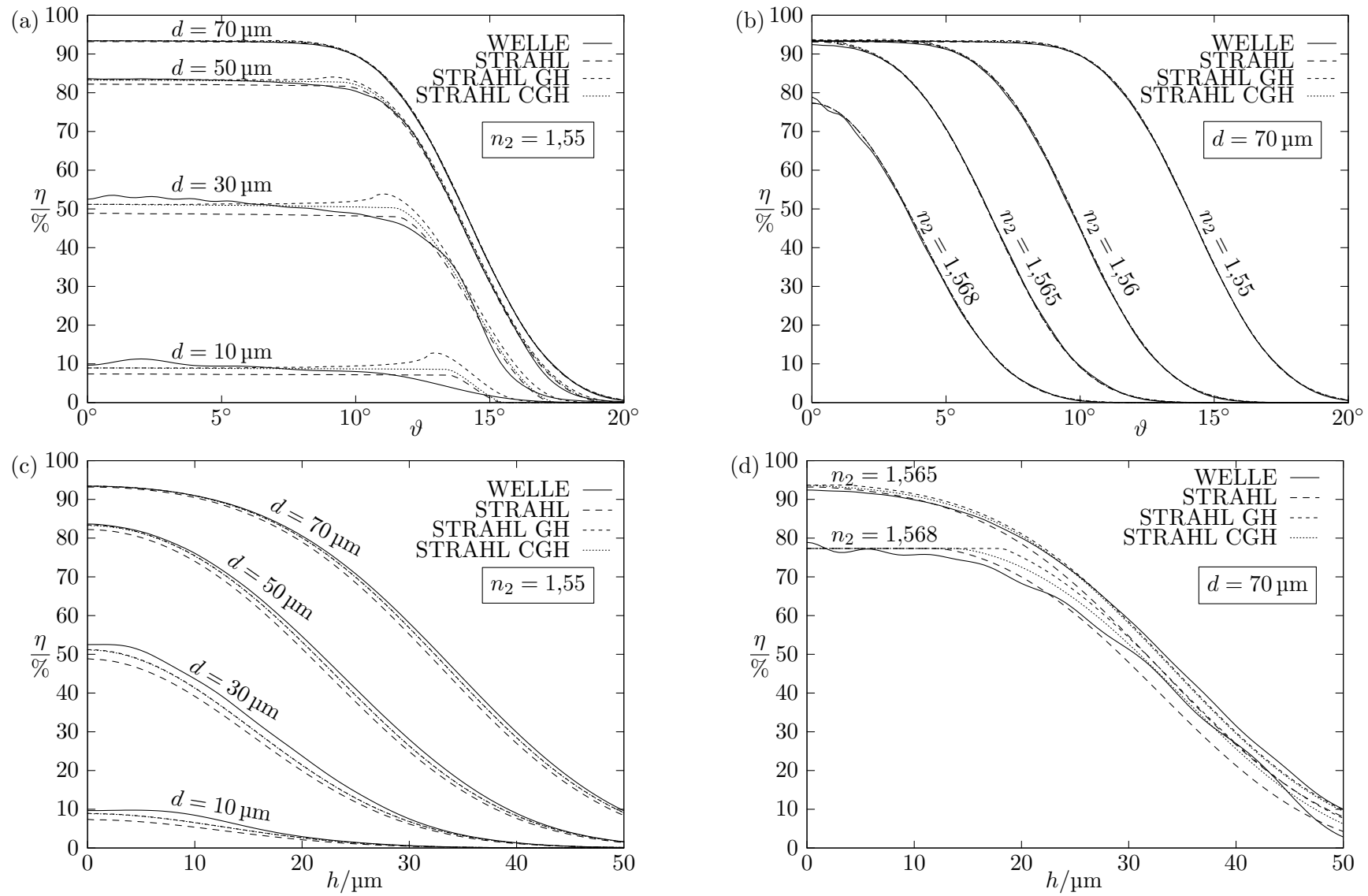


Abbildung 4.17.: Gegenüberstellung der wellentheoretischen und strahlenoptischen Ergebnisse für die erreichbare Koppeffizienz der Faser. Die Parametersätze entsprechen denen aus Kapitel 4.2.2. Wie zuvor gilt  $b = 50 \mu\text{m}$  und  $n_1 = 1,57$ .



kleine Einfallswinkel zu beobachten, obwohl wenig Leistung im Grenzbereich Kern-Mantel auftritt. Insbesondere stellt sich auch bei senkrechtem meridionalem Einfall der Strahlachse eine Abweichung von  $+0,75\%$  für  $n_2 = 1,565$  und  $-1,6\%$  für  $n_2 = 1,568$  ein. Hier gilt es zu berücksichtigen, dass bei senkrechtem meridionalem Einfall der Strahlachse nur Moden der azimuthalen Ordnung  $m = 1$  angeregt werden. Die Anzahl der Moden in dieser Ordnung ist mit 21 für  $n_2 = 1,565$  und 13 für  $n_2 = 1,568$  offenbar schon zu gering. Wird der Strahl verdreht, können auch Moden höherer azimuthaler Ordnung angeregt werden. Durch die insgesamt geringe Anzahl geführter Moden im Fall  $n_2 = 1,568$  ( $NA = 0,079$ ) ist der Kurvenverlauf der wellentheoretischen Berechnung leicht oszillatorisch. Die Graphen der strahlenoptischen Simulation sind dagegen vollkommen glatt<sup>4</sup> und ab einem definierten Punkt monoton fallend. Das leicht oszillatorische Verhalten ist auch in Abbildung 4.17d zu erkennen, in der die Abhängigkeit von der lateralen Verschiebung aufgetragen ist. Hier zeigen sich auch die größten Abweichungen, wenn der Strahl hinreichend weit verschoben wird, so dass der Grenzbereich Kern-Mantel vollkommen ausgeleuchtet ist.

Wie sich zeigt, birgt die Berücksichtigung der Goos-Hänchen-Verschiebung bei einer kleinen numerischen Apertur des Wellenleiters keinen Vorteil. In der Methode STRAHL GH tritt für  $n_2 = 1,568$  wieder eine deutliche Überhöhung auf. Auch die Methode STRAHL CGH verspricht im Mittel keinen kleineren Fehler. Bereits für die größere Apertur  $NA = 0,25$  hat sich gezeigt, dass bei einer Verdrehung des Gaußstrahls durch die Goos-Hänchen-Verschiebung ein erhöhter Fehler resultieren kann. Dieser ist offensichtlich besonders groß, wenn viel Leistung im Grenzbereich Kern-Mantel einfällt und die korrespondierenden Strahlen unter einem Winkel nahe dem kritischen Winkel  $\Theta_c$  auftreffen. Bei einer kleinen numerischen Apertur wird auch ohne Verdrehung des Gaußstrahls die gesamte Apertur des Wellenleiters vollständig ausgeleuchtet, d.h. der Divergenzwinkel des Gaußstrahls  $\Theta_{a0}$  ist unter Umständen sogar größer als der kritische Winkel  $\Theta_c$ . Dies ist z.B. für  $n_2 = 1,568$  und  $\Theta_{a0} = 5^\circ$  der Fall, vgl. Tabelle 4.1. Letztlich ist es aber die bereits zu geringe Anzahl geführter Moden, im Fall  $n_2 = 1,568$  sind es 113, die für das leicht oszillatorische Verhalten der Graphen sorgt und damit für einen nicht vorhersehbaren Fehler in den strahlenoptischen Ergebnissen. Eine Korrektur ist mit elementaren Mittel, wie einer Manipulation des effektiven Kernradius, nicht möglich.

Der insgesamt resultierende mittlere Fehler aller Ergebnisse in Abbildung 4.17 könnte durch eine weitere Modifikation der Goos-Hänchen-Verschiebung möglicherweise noch verringert werden. An einige Stellen ist selbst bei Verwendung der konstanten Goos-Hänchen-Verschiebung die berechnete Koppeleffizienz deutlich überhöht. Eine zumindest leichte Verbesserung könnte die Substitution  $x_{sm} = x_{s0}^2/x_s$  sein. Diese Funktion spiegelt gewissermaßen die Funktion  $x_s$  an der Linie  $x_{s0}$  und skaliert dabei, so dass  $x_{sm}|_{\Theta=\Theta_c} = 0$  gilt. Wird der Kerndurchmesser um  $x_{sm}$  erweitert, stellen sich Koppeleffizienzen ein, die zwischen denen der Methoden STRAHL und STRAHL CGH liegen. Im Fokus der weiteren Untersuchungen steht jedoch nicht die Reduktion des mittleren Gesamtfehlers. Stattdessen wird der aus praktischer Sicht relevante Bereich näher betrachtet, in dem Koppeleffizienzen von zumindest über  $80\%$  erreicht werden.

Zunächst soll jedoch der Vergleich zwischen Wellen- und Strahlenoptik ausgedehnt werden

<sup>4</sup>Die Umschreibung *vollkommen glatt* ist nicht als mathematische Definition zu verstehen, sondern resultiert allein aus der Anschauung.

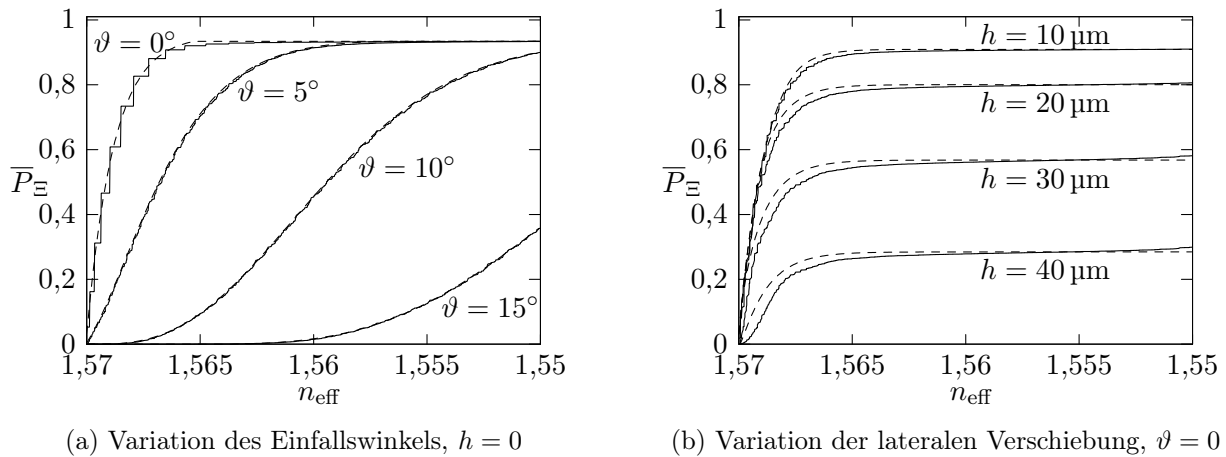


Abbildung 4.18.: Anregung des Modenspektrums der Faser (WELLE —) und der Vergleich zur Strahlenoptik (STRAHL CGH ---): Akkumulierte Leistung  $\bar{P}_E$  für die Parameter aus Abbildung 4.12a ( $d = 70 \mu\text{m}$ ,  $n_2 = 1,55$ ).

auf die Beschreibung der Anregung des Modenspektrums. Dieser Vergleich ist wichtig, da der Leistungsfluss im Wellenleiter bedingt durch die Modendispersion in Abhängigkeit der Anregung variieren kann. Betrachtet wird analog zu Abbildung 4.12a die akkumulierte Leistung  $\bar{P}_E$ , aufgetragen über den effektiven Index  $n_{\text{eff}}$ . Im strahlenoptischen Modell ist der effektive Index analog zur wellentheoretischen Referenz definiert über die  $z$ -Komponente des Ausbreitungsvektors. Da dieser jedoch auf den Betrag eins normiert ist, wird entsprechend mit der Kernbrechzahl skaliert:

$$n_{\text{eff}} = n_1 e_{sz}. \quad (4.41)$$

Die akkumulierte Leistung berechnet sich analog zu (4.29), jedoch wird die Leistung der einzelnen geführten Strahlen aufsummiert. Abbildung 4.18 zeigt die Ergebnisse, deren Interpretation kurz ausfallen kann. Bei ausschließlicher Verdrehung des Gaußstrahls stimmen die Ergebnisse sehr gut überein, wie schon die berechneten Koppeffizienzen, vgl. Abbildung 4.17a mit  $d = 70 \mu\text{m}$ . Da es bei der lateralen Verschiebung des Gaußstrahls bereits merkbare Abweichungen in der Koppeffizienz gibt, vgl. Abbildung 4.17c, stellen sich dementsprechend auch merkbare Abweichungen im angeregten Moden- bzw. Strahlspektrum ein. Die Auswirkungen auf den zu erwartenden Leistungsfluss sind jedoch noch nicht dramatisch, da das angeregte Spektrum im Wesentlichen nur leicht verschoben wird. Ohnehin ist die erreichbare Koppeffizienz für den praktischen Einsatz bereits bei  $h = 20 \mu\text{m}$  zu gering. Die Ergebnisse in Abbildung 4.18 für den senkrechten meridionalen Einfall,  $v = 0$  und  $h = 0$ , verdeutlichen auch noch einmal den wesentlichen Unterschied zwischen dem diskreten Modenspektrum des Wellenleiters und dem kontinuierlichen Winkelspektrum im strahlenoptischen Modell. In diesem Fall werden nur Moden der azimuthalen Ordnung  $m = 1$  angeregt und es stellt sich ein entsprechend treppenförmiger Verlauf ein, der im strahlenoptischen Modell nicht nachgebildet werden kann. In der Praxis ist dieses Problem jedoch unbedeutend, da beide Ergebnisse im lokalen Mittel übereinstimmen.

Bevor der Vergleich zwischen Wellen- und Strahlenoptik fortgesetzt wird, sollen einige An-

merkungen zu den Unterschieden gemacht werden, die sich bei Verwendung eines Schichtwellenleiters an Stelle der Faser einstellen.

### 4.4.3. Anmerkungen zur Approximation durch planare Wellenleiter

Wie im Kapitel 4.2.4 bereits angemerkt, existieren einige quantitative Unterschiede bei Verwendung eines planaren Wellenleiters. Wichtig ist jedoch zunächst zu betonen, dass alle qualitativen Aussagen des vorherigen Abschnitts auch für den planaren Schichtwellenleiter gelten. Die quantitativen Unterschiede resultieren aus der fehlenden Abhängigkeit von einer transversalen Koordinate. Im planaren Modell führt der Gaußstrahl deutlich mehr Leistung innerhalb seiner Strahlbreite. Dadurch sind die Auswirkungen der Verbreiterung der Kernschichtdicke durch die Goos-Hänchen-Verschiebung wesentlich ausgeprägter. Exemplarisch sind in Abbildung 4.19 Koppeffizienzen für die mit Abbildung 4.17a korrespondierenden Parametersätze aufgetragen. Dargestellt ist die Koppeffizienz in Abhängigkeit des Einfallswinkels  $\vartheta$  für unterschiedliche Kernschichtdicken  $d$  des Schichtwellenleiters bei konstanter Strahlbreite  $b = 50 \mu\text{m}$  und konstanter Mantelbrechzahl  $n_2 = 1,55$ . Dabei wurden im strahlenoptischen Modell 10 000 Strahlen angesetzt.

Wie bereits erwähnt, ist die erreichbare Koppeffizienz im Vergleich zur Faser stets etwas größer. Deutlich größer sind aber auch die Abweichungen zwischen den unterschiedlichen strahlenoptischen Verfahren, was insbesondere für kleine Winkel  $\vartheta$  wiederum aus der unterschiedlichen Leistungsverteilung innerhalb der Strahlbreite des Gaußstrahls resultiert. Für größere Winkel nahe dem kritischen Winkel ergibt sich insbesondere für kleine Kernschichtdicken eine markante Spitze im Verlauf der mit der Methode STRAHL GH berechneten Koppeffizienz. Diese Überhöhungen sind auch in Abbildung 4.17a zu erkennen, jedoch

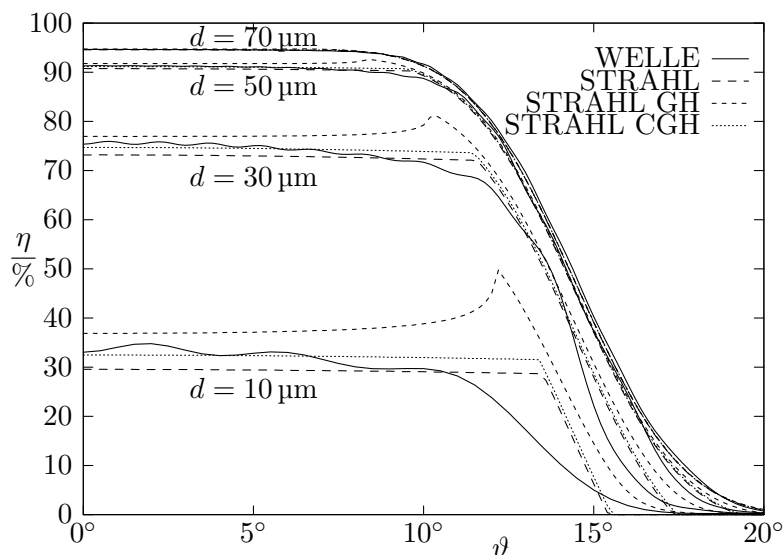


Abbildung 4.19.: Gegenüberstellung der wellentheoretischen und strahlenoptischen Ergebnisse für den Schichtwellenleiter für die Parametersätze aus Abbildung 4.17a.

nicht so ausgeprägt. Da die Verdrehung des Gaußstrahls lediglich eine Transformation der Felder bzw. der Strahlen in Abhängigkeit der bezüglich der Drehachse orthogonalen Koordinaten bewirkt, ändern sich die Feldgrößen in Richtung der Drehachse nur unwesentlich. Damit wirkt sich auch der Effekt der Goos-Hänchen-Verschiebung im Wesentlichen nur in einer transversalen Richtung aus. Im planaren Modell liegt aber ohnehin nur eine Abhängigkeit von einer transversalen Koordinate vor. Bezogen auf einen elementaren Strahl lautet die Transformationsvorschrift bei Verdrehung des Gaußstrahls allgemein

$$\vec{e}_{s\vartheta} = (e_{sx} \cos \vartheta + e_{sz} \sin \vartheta) \vec{e}_x + e_{sy} \vec{e}_y + (-e_{sx} \sin \vartheta + e_{sz} \cos \vartheta) \vec{e}_z. \quad (4.42)$$

Im planaren Modell gilt jedoch stets  $e_{sy} = 0$ .

Wie schon zuvor für die Faser liefert auch beim Schichtwellenleiter die Methode STRAHL CGH wieder im Mittel und insbesondere für kleine  $\vartheta$  die beste Approximation. Ebenso ist wieder ein leicht oszillatorisches Verhalten in den Graphen der wellentheoretischen Simulationen für kleine Kernschichtdicken zu erkennen, das durch ein strahlenoptisches Verfahren nicht nachgebildet werden kann. Dabei ist zu beachten, dass im Fall  $d = 10 \mu\text{m}$  lediglich 6 geführte Moden existieren. Für  $d = 30 \mu\text{m}$  sind es immerhin bereits 18. Zur Erinnerung sei erwähnt, dass für  $d = 70 \mu\text{m}$  auch nur 42 geführte Moden existieren, vgl. Tabelle 4.1. Dennoch kann dieser Wellenleiter bereits als hochmultimodal angesehen werden, denn ein Wellenleiter mit zweidimensionalem Querschnittsprofil führt bei gleichem Durchmesser schon über 1000 Moden.

#### 4.4.4. Gleichmäßige Verkleinerung des Kern- und des Strahldurchmessers

Die im Kapitel 4.4.2 präsentierten Ergebnisse dienen der allgemeinen Beurteilung der Qualität der strahlenoptischen Methoden. Da in einem realen System in der Regel mehrere Schnittstellen auftreten, sollte die Koppeffizienz einer einzigen Schnittstelle immer nahe am theoretischen Maximum sein, damit die Dämpfung des Gesamtsystems nicht zu groß ist. Denn neben den systematischen Verlusten durch Abstrahlung sind stets auch intrinsische Materialverluste und Verluste durch zufällige Störstellen zu erwarten. Um das Erreichen einer hinreichend großen Koppeffizienz sicherzustellen, muss

- der Strahldurchmesser  $b$  kleiner als der Kerndurchmesser  $d$  sein,
- die Quelle, hier der Gaußstrahl, hinreichend gut positioniert werden.

Im Folgenden wird daher eine maximale Verdrehung  $\vartheta = 5^\circ$  berücksichtigt, bei einer numerischen Apertur des Wellenleiters von  $NA = 0,25$ . Die maximale laterale Verschiebung ist abhängig vom Durchmesser des Gaußstrahls und gleich  $h = 0,2b$ . Der Strahldurchmesser  $b$  steht im festen Verhältnis zum Kerndurchmesser der Faser  $d$ , wobei zwei Fälle unterschieden werden. Zum Einen soll  $d/b = 1,5$  gelten. Der Kerndurchmesser ist deutlich größer als der Strahldurchmesser und die damit erreichbare Koppeffizienz liegt bei über 94 %. Im zweiten Fall gilt  $d/b = 1,0$ . Die erreichbare Koppeffizienz sinkt auf etwa 83 % und ist damit für die Praxis bereits zu gering. Für den Vergleich zwischen den unterschiedlichen

Simulationsmethoden ist dieser Fall jedoch interessant, da ein wesentlicher Teil der einfallenden Leistung im Grenzbereich Kern-Mantel auftritt und damit relativ große Differenzen zu erwarten sind.

Untersucht werden soll, wie sich der inhärente Fehler der strahlenoptischen Methoden entwickelt, wenn die Geometrie verkleinert wird. Im Kapitel 4.2.3 wurde schon einleitend festgestellt, dass die Geometrie bei gleich bleibender Koppeffizienz weitestgehend skalierbar ist. Erst für sehr kleine Kerndurchmesser steigt die Koppeffizienz aufgrund der unterschiedlichen lokalen Eigenschaften des Gaußstrahls leicht an. Wie schon im Kapitel 4.2.3 wird zunächst für  $d/b = 1,5$  der Kerndurchmesser, ausgehend von  $d = 90\text{ }\mu\text{m}$ , in fünf äquidistanten Schritten auf  $d = 15\text{ }\mu\text{m}$  verkleinert. Für einen expliziten Vergleich der unterschiedlichen Methoden wird in den folgenden Darstellungen jeweils die relative Abweichung

$$\delta_r = \frac{\eta_{\text{Welle}} - \eta_{\text{Strahl}}}{\eta_{\text{Welle}}} \quad (4.43)$$

aufgetragen. Darin ist  $\eta_{\text{Welle}}$  die mit Hilfe der wellentheoretischen Analyse errechnete Koppeffizienz, die als Referenz dient, und  $\eta_{\text{Strahl}}$  ist die auf Basis strahlenoptischer Methoden ermittelte Koppeffizienz.

In Abbildung 4.20 sind die Ergebnisse für  $d/b = 1,5$  aufgeführt. Abbildung 4.20a zeigt den Fehler der klassischen Methode STRAHL in Abhängigkeit des Einfallswinkels. Dem gegenübergestellt ist in Abbildung 4.20b der Fehler der Methode STRAHL CGH, wobei die um den Faktor 0,5 skalierte Ordinate berücksichtigt werden muss. Wie erwartet steigt der mittlere Fehler der Methode STRAHL mit kleiner werdendem Kerndurchmesser an. Die relative Abweichung nimmt jedoch maximal einen Wert von  $\delta_r = -0,007$  für  $d = 15\text{ }\mu\text{m}$  an und bleibt damit insgesamt sehr klein. Mit der Methode STRAHL CGH kann der Fehler auch für kleine Kerndurchmesser im Mittel deutlich reduziert werden, wenngleich die relative Abweichung mit wachsendem Einfallswinkel leicht ansteigt und für  $\vartheta = 5^\circ$  einen Wert von bis zu  $\delta_r = 0,001$  annehmen kann.

Die Entwicklung des Fehlers in Abhängigkeit der lateralen Verschiebung ist für die klassische Methode STRAHL in Abbildung 4.20c dargestellt. Wiederum mit unterschiedlich skalierte Ordinate ist in Abbildung 4.20d das Ergebnis für die Methode STRAHL CGH gegenübergestellt. Wie zuvor steigt die Abweichung  $\delta_r$  mit kleinere werdendem Kerndurchmesser an. Im Unterschied zur Verdrehung des Gaußstrahls nimmt die Abweichung nun jedoch mit wachsender Verschiebung weiter ab, so dass der Betrag der maximalen Abweichung für  $d = 15\text{ }\mu\text{m}$  deutlich über  $|\delta_r| = 0,01$  liegt. Durch Anwendung der Methode STRAHL CGH verringert sich der Fehler wiederum deutlich und bleibt für  $d \geq 45\text{ }\mu\text{m}$  immer unterhalb  $|\delta_r| = 0,001$ . Lediglich für den kleinsten Kernquerschnitt verbleibt auch für  $h = 0$  eine minimale Abweichung von  $\delta_r = -0,0018$ . Als Zwischenfazit lässt sich dennoch festhalten, dass bei idealen Koppelbedingungen der Fehler der Methode STRAHL CGH auch für sehr kleine Kernquerschnitte vernachlässigbar gering ist. Der maximale prozentuale Fehler der Methode STRAHL CGH liegt selbst für  $d = 15\text{ }\mu\text{m}$  ( $b = 10\text{ }\mu\text{m}$ ) unterhalb 4‰.

Bei einer maximalen Verschiebung  $h = 0,2b$  und einem Verhältnis  $d/b = 1,5$  ist der Überlapp zwischen den durch die Durchmesser  $b$  und  $d$  beschriebenen Kreisflächen immer maximal. Eine zwingende Voraussetzung, um die Koppeffizienz zu maximieren. In der

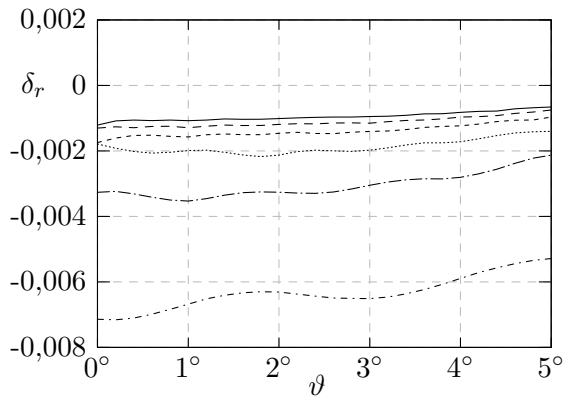
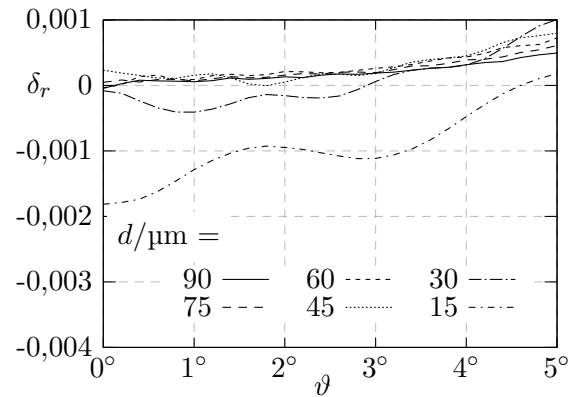
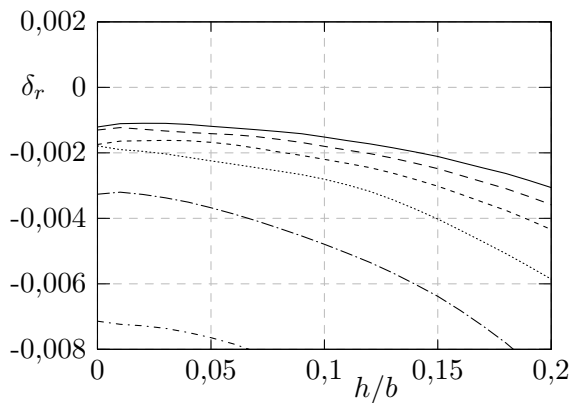
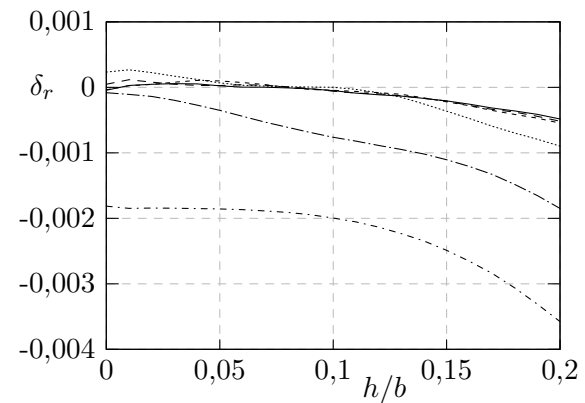
(a) Abhängigkeit von  $\vartheta$ , Methode STRAHL(b) Abhängigkeit von  $\vartheta$ , Methode STRAHL CGH(c) Abhängigkeit von  $h$ , Methode STRAHL(d) Abhängigkeit von  $h$ , Methode STRAHL CGH

Abbildung 4.20.: Relative Abweichung  $\delta_r$  für  $d/b = 1,5$ . Die Legende in Abbildung (b) ist für alle Abbildungen gültig. Es gilt  $n_2 = 1,55$ .

Praxis ist diese Voraussetzung sicher nicht immer gegeben und es soll daher nun der Fall  $d/b = 1,0$  betrachtet werden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.21 aufgetragen. Darin wird der Kerndurchmesser ausgehend von  $d = 70 \mu\text{m}$  in sechs äquidistanten Schritten auf  $d = 10 \mu\text{m}$  verkleinert. Auf den ersten Blick gleichen die Kurvenverläufe denen in Abbildung 4.20 sehr stark. Die Werte der relativen Abweichungen sind jedoch fast um eine Zehnerpotenz angestiegen. Des Weiteren ist die Abweichung stets negativ. Erneut lässt sich feststellen, dass der Fehler mit kleiner werdendem Kerndurchmesser ansteigt und dass die Goos-Hänchen-Verschiebung (Methode STRAHL CGH) den mittleren Fehler deutlich reduziert. Der prozentuale Fehler liegt in der Methode STRAHL auch beim größten Kerndurchmesser zwischen 1 % und 2 % und steigt auf über 6 % für den kleinsten Kerndurchmesser. Mit der Methode STRAHL CGH verringert sich der Fehler im Mittel auf weniger als 0,5 % für Kerndurchmesser bis  $d = 50 \mu\text{m}$  und Maximal 3,5 % für den kleinsten Kerndurchmesser.

Als Fazit lässt sich festhalten, dass die strahlenoptische Simulationstechnik unter Berücksichtigung eines erweiterten effektiven Kerndurchmessers grundsätzlich zur Bestimmung der Koppleffizienz geeignet ist. Bis zu einem Kerndurchmesser von  $d = 50 \mu\text{m}$  kann sie

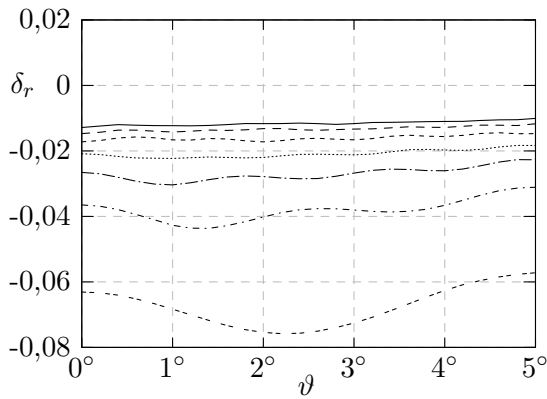
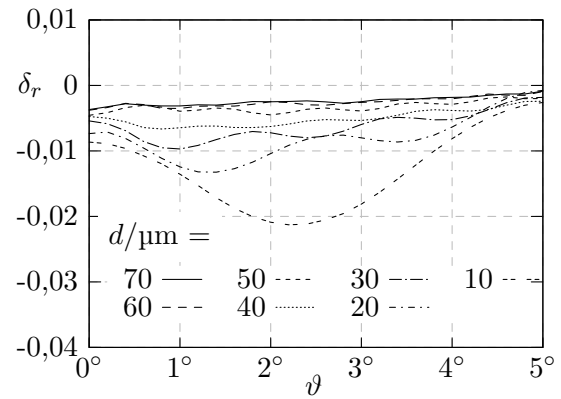
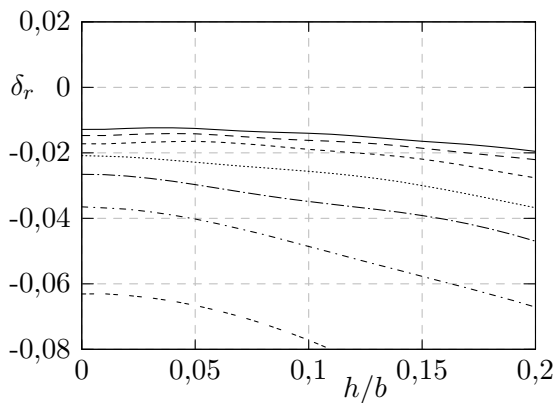
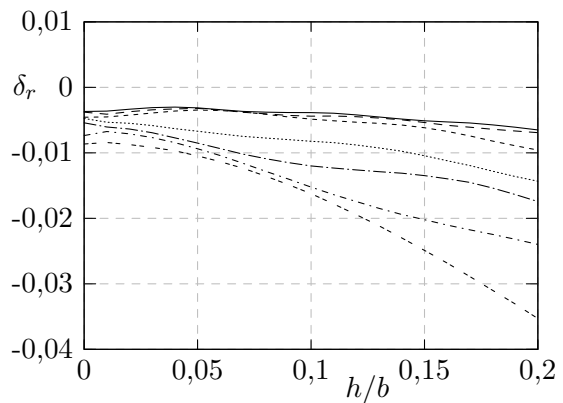
(a) Abhängigkeit  $\vartheta$ , Methode STRAHL(b) Abhängigkeit  $\vartheta$ , Methode STRAHL CGH(c) Abhängigkeit  $h$ , Methode STRAHL(d) Abhängigkeit  $h$ , Methode STRAHL CGH

Abbildung 4.21.: Relative Abweichung  $\delta_r$  für  $d/b = 1,0$ . Die Legende in Abbildung (b) ist für alle Abbildungen gültig.

nahezu bedenkenlos eingesetzt werden. Für kleinere Kerndurchmesser muss mit einem Fehler von maximal 2 % für  $d \geq 30 \mu\text{m}$  und 3,5 % für  $d \geq 10 \mu\text{m}$  gerechnet werden. Diese Werte verstehen sich im Rahmen dieser Arbeit als Maximalwerte. Der mittlere Fehler liegt im Mittel deutlich darunter, vgl. Abbildung 4.20. Es muss jedoch auch bedacht werden, dass der verwendete Gaußstrahl die Feldverteilung einer realen Quelle möglicherweise nur in grober Näherung wieder gibt, so dass eine konservative Einordnung des Fehlers sinnvoll erscheint.

In Ergänzung und zur Bestätigung des formulierten Fazits befinden sich im Anhang A.4 Ergebnisse für die numerische Apertur  $NA = 0,177$  ( $n_2 = 1,56$ ).

## 4.5. Näherungsverfahren für rechteckförmige Wellenleiter

Die Wellenleiter einer elektrooptischen Leiterplatte besitzen in der Regel ein rechteckförmiges Querschnittsprofil. Leider existieren für diesen Wellenleitertyp lediglich Näherungslösungen für die geführten Moden. Dieses Kapitel untersucht die Anwendbarkeit der im Kapitel 3.3.1 vorgestellten Feldlösungen von Marcatali zur Bestimmung der Koppeffizienz des rechteckförmigen Wellenleiters. Dazu wird zunächst ein wellentheoretisches Näherungsverfahren vorgestellt, das auf Basis von Überlappintegralen unter ausschließlicher Verwendung geführter Moden die Koppeffizienz bestimmt [66]. Anschließend wird ein Vergleich zur strahlenoptischen Simulation gezogen. Da die Ergebnisse für die dielektrische Faser gezeigt haben, dass die strahlenoptische Berechnung der Koppeffizienz für hinreichend große Geometrien sehr genaue Ergebnisse liefern kann, dient die Strahlenoptik in diesem Fall als Referenz.

### 4.5.1. Näherungsverfahren zur Berechnung der Koppeffizienz

Im Kapitel 2.3.2 wurde die Theorie zur Beschreibung der Reflexion und Transmission durch senkrechte Wellenleiterschnittstellen vorgestellt. Ist der Sprung in der mittleren Brechzahl zwischen dem links- und rechtsseitigen Wellenleiter gering, können reflektierte Wellen ggf. vernachlässigt werden. Aus (2.83a) folgt dann mit  $\mathbf{c}^{(-l)} = 0$  eine direkte Lösung für die Amplituden der transmittierten Wellen

$$\mathbf{c}_1^{(+r)} = (\mathbf{Q}^{(r)})^{-1} \mathbf{Q}^{(lr)} \mathbf{c}^{(+l)}. \quad (4.44)$$

Aus der alternativen Beschreibung ergibt sich

$$\mathbf{c}_2^{(+r)} = (\mathbf{Q}^{(r)*})^{-1} \mathbf{Q}^{(rl)\text{H}} \mathbf{c}^{(+l)}. \quad (4.45)$$

Da sich die Lösungen offensichtlich unterscheiden, wurden die Indices 1 und 2 eingeführt. Die Amplituden der transmittierten Moden lassen sich nun explizit angeben:

$$C_{1\mu}^{(+r)} = \frac{1}{Q_{\mu}^{(r)}} \sum_{\nu} Q_{\mu\nu}^{(lr)} C_{\nu}^{(+l)}, \quad (4.46)$$

$$C_{2\mu}^{(+r)} = \frac{1}{Q_{\mu}^{(r)*}} \sum_{\nu} Q_{\nu\mu}^{(rl)*} C_{\nu}^{(+l)}. \quad (4.47)$$

Diese Ausdrücke können auch durch eine Reihenentwicklung der linksseitigen Modenfunktionen in Termen der rechtseitigen Modenfunktionen hergeleitet werden. Der Gleichung (4.46) liegt dabei die elektrische Feldstärke zugrunde und der Gleichung (4.47) die magnetische Feldstärke.

Es existieren somit zwei fehlerbehaftete Lösungen. Zur Verdeutlichung des entstehenden Fehlers wird der einfache Fall einer Schnittstelle zweier Parallelplattenleitungen mit identischen Querschnittsabmessungen, aber unterschiedlichem Dielektrikum betrachtet. Da ein



linksseitiger Mode und ein rechtsseitiger Mode mit unterschiedlicher Ordnung orthogonal sind, gilt

$$C_{1\nu}^{(+r)} = \frac{Q_{\nu\nu}^{(lr)}}{Q_{\nu}^{(r)}} C_{\nu}^{(+l)}, \quad (4.48)$$

$$C_{2\nu}^{(+r)} = \frac{Q_{\nu\nu}^{(rl)*}}{Q_{\nu}^{(r)*}} C_{\nu}^{(+l)}. \quad (4.49)$$

Wird linksseitig ein beliebiger TE-Moden angeregt, folgt mit (3.12)

$$C_{1\nu}^{(+r)} = \frac{\int_{Gs} \left( \underline{\mathcal{E}}_{t\nu}^{(l)} \times \{ \underline{\mathcal{H}}_{t\nu}^{(r)} \}^* \right) \vec{e}_z da}{\int_{Gs} \left( \underline{\mathcal{E}}_{t\nu}^{(r)} \times \{ \underline{\mathcal{H}}_{t\nu}^{(r)} \}^* \right) \vec{e}_z da} C_{\nu}^{(+l)} = C_{\nu}^{(+l)}, \quad (4.50)$$

$$C_{2\nu}^{(+r)} = \frac{\int_{Gs} \left( \underline{\mathcal{E}}_{t\nu}^{(r)} \times \{ \underline{\mathcal{H}}_{t\nu}^{(l)} \}^* \right) \vec{e}_z da}{\int_{Gs} \left( \underline{\mathcal{E}}_{t\nu}^{(r)} \times \{ \underline{\mathcal{H}}_{t\nu}^{(r)} \}^* \right) \vec{e}_z da} C_{\nu}^{(+l)} = \frac{k_z^{(l)} \mu^{(r)}}{k_z^{(r)} \mu^{(l)}} C_{\nu}^{(+l)}. \quad (4.51)$$

Die exakte Lösung lautet

$$C_{\nu}^{(+r)} = \frac{2k_{z\nu}^{(l)} \mu^{(r)}}{k_{z\nu}^{(l)} \mu^{(r)} + k_{z\nu}^{(r)} \mu^{(l)}} C_{\nu}^{(+l)} = \frac{2}{1 + \frac{k_{z\nu}^{(r)} \mu^{(l)}}{k_{z\nu}^{(l)} \mu^{(r)}}} C_{\nu}^{(+l)}. \quad (4.52)$$

Mit der in der Optik allgemein angenommenen Beziehung  $\mu^{(l)} = \mu^{(r)}$  sowie der gemachten Annahme einer ausschließlich kleinen Änderung der Permittivität gilt

$$k_{z\nu}^{(l)} \approx k_{z\nu}^{(r)} \quad \Rightarrow \quad C_{1\nu}^{(+r)} \approx C_{2\nu}^{(+r)} \approx C_{\nu}^{(+r)}. \quad (4.53)$$

Ein analoges Ergebnis erhält man für die TM-Moden, wenn man in den Ausdrücken die Indices 1 und 2 vertauscht, sowie die Permeabilität durch die Permittivität ersetzt.

Im obigen Fall der Parallelplattenleitung lässt sich leicht zeigen, dass entweder

$$C_{1\nu}^{(+r)} \leq C_{\nu}^{(+r)} \leq C_{2\nu}^{(+r)} \quad \text{oder} \quad C_{2\nu}^{(+r)} \leq C_{\nu}^{(+r)} \leq C_{1\nu}^{(+r)} \quad (4.54)$$

gilt. Es liegt daher nahe, zur Bestimmung von  $C_{\nu}^{(+r)}$  einen Mittelwert aus  $C_{1\nu}^{(+r)}$  und  $C_{2\nu}^{(+r)}$  zu bilden. Eine interessante Eigenschaft offenbart das geometrische Mittel. Berechnet man auf dieser Basis die transmittierte Leistung, ergibt sich in Matrixschreibweise

$$\overline{P}^{(+r)} = \mathbf{c}_1^{(+r)\text{T}} \mathbf{Q}^{(r)} \mathbf{c}_2^{(+r)*}. \quad (4.55)$$

Unabhängig vom Wellenleitertyp konserviert diese Herangehensweise bei einem Wellenleiterübergang die Leistung, was mit (2.79) leicht gezeigt werden kann:

$$\begin{aligned} \overline{P}^{(+r)} &= \mathbf{c}_1^{(+r)\text{T}} \mathbf{Q}^{(r)} \mathbf{c}_2^{(+r)*} \\ &= \mathbf{c}_1^{(+r)\text{T}} \mathbf{Q}^{(rl)\text{T}} \mathbf{c}^{(+l)*} \\ &= \mathbf{c}^{(+l)\text{T}} \underbrace{\mathbf{Q}^{(lr)} \mathbf{Q}^{(r)-1} \mathbf{Q}^{(rl)\text{T}}}_{\text{vgl. (2.79)}} \mathbf{c}^{(+l)*} \\ &= \mathbf{c}^{(+l)\text{T}} \mathbf{Q}^{(l)} \mathbf{c}^{(+l)*} = \overline{P}^{(l+)}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Für sehr kleine Reflexionsverluste stellt (4.56) eine sehr gute Approximation dar. Für größere Reflexionsverluste können unter Berücksichtigung eines Korrekturfaktors  $\tilde{T}$  sehr gute Ergebnisse erzielt werden. Auf dieser Basis gilt für die Beträge der Amplituden  $C_\nu^{(+r)}$

$$|C_\nu^{(+r)}|^2 \approx \Re \left\{ \tilde{T} C_{1\nu}^{(+r)} Q_\nu^{(r)} C_{2\nu}^{(+r)*} \right\}. \quad (4.57)$$

In den noch folgenden Rechnungen wird der Faktor  $\tilde{T}$  durch den Leistungstransmissionsfaktor einer Ebenen Welle am dielektrischen Halbraum approximiert,  $\tilde{T} = T_F$  mit  $T_F$  aus Gleichung (2.99) oder (2.101). Die Phase der Lösungen  $C_{1\nu}^{(+r)}$  und  $C_{2\nu}^{(+r)}$  ist in der Regel nahezu identisch, so dass sich auch die Phase von  $C_\nu^{(+r)}$  rekonstruieren lässt. Formal ist jedoch nur die Summe (4.56) reellwertig, so dass in (4.57) der Realteiloperator erforderlich ist.

Neben dem vorgestellten Verfahren existieren einige weitere Approximationen, deren Implementierungsaufwand etwas geringer ist, da beispielsweise nur eine Feldgröße explizit berücksichtigt wird [33]. Die mit (4.57) definierte Vorgehensweise ist jedoch hinsichtlich der Genauigkeit überlegen.

## Verifikation des Näherungsverfahrens

Alle Rechnungen des Kapitels 4.2.2 wurden zur Verifikation des Näherungsverfahrens unter Anwendung der Approximation (4.57) wiederholt. Abbildung 4.22 zeigt die Ergebnisse in Form einer relativen Abweichung  $\delta_r$ , die analog zu (4.43) definiert ist. Die Interpretation der Ergebnisse kann erneut kurz ausfallen. In Bereichen, in denen hinreichend große Koppeffizienzen erreicht werden, ist der maximale relative Fehler in der Regel deutlich kleiner  $|\delta_r| = 0,001$ . Außerhalb dieser Bereiche steigt der Fehler nur mäßig an und bleibt, solange die Koppeffizienz merklich größer Null ist, im unteren Promillebereich. Die Qualität des Näherungsverfahrens ist demnach für die folgenden Simulationen ausreichend.

### 4.5.2. Ergebnisse für den rechteckförmigen Wellenleiter

Abschließend werden Ergebnisse für die Koppeffizienz des rechteckförmigen Wellenleiters gezeigt. Im Vordergrund steht dabei nicht die allgemeine Interpretation der Abhängigkeit von der Einfallrichtung und den Eigenschaften der Quelle, da diese sich nur unwesentlich von den Ergebnissen der kreiszylindrischen Faser unterscheiden. Stattdessen wird versucht, durch den Vergleich zur Strahlenoptik einige Aussagen über den Gültigkeitsbereich der Näherungslösungen von Marcatili abzuleiten. Im Folgenden werden wiederum die Parametersätze des Kapitels 4.2.2 verwendet, wobei der Durchmesser  $d$  des Faserkerns nun der Kantenlänge eines quadratischen Wellenleiterkerns entspricht. Aufgrund der größeren Querschnittsfläche des quadratischen Wellenleiters ist die Koppeffizienz bei entsprechender Anregung etwas größer als die der Faser, die Abhängigkeiten vom Einfallswinkel und von der Verschiebung des Gaußstrahls sind dennoch qualitativ gleich.

Die Näherungslösungen von Marcatili werden im Kapitel 3.3.1 beschrieben. Wie aufgezeigt unterliegen sie der einschränkenden Bedingung (3.59), welche fordert, dass die transversalen Wellenzahlen  $k_x$  und  $k_y$  wesentlich kleiner als die Ausbreitungskonstante  $k_z$  sind. Diese

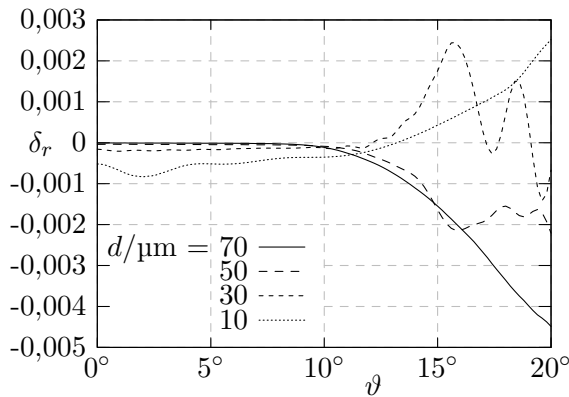
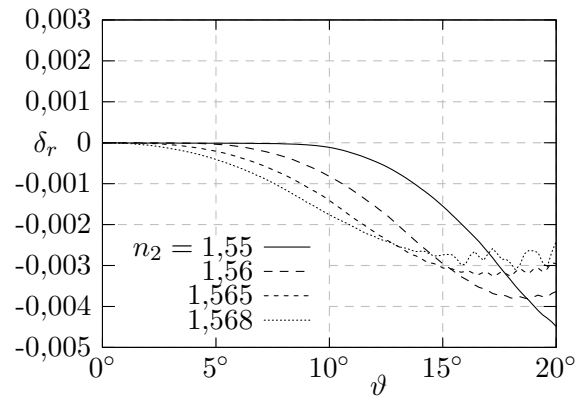
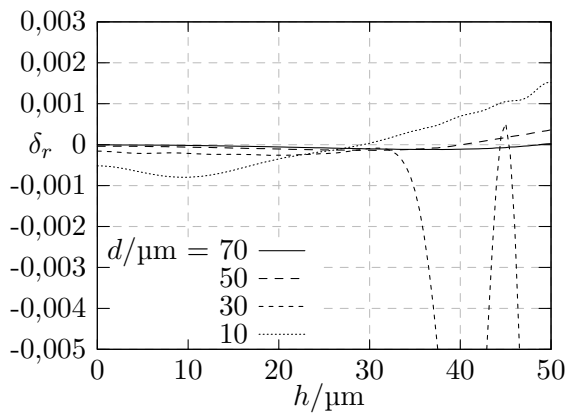
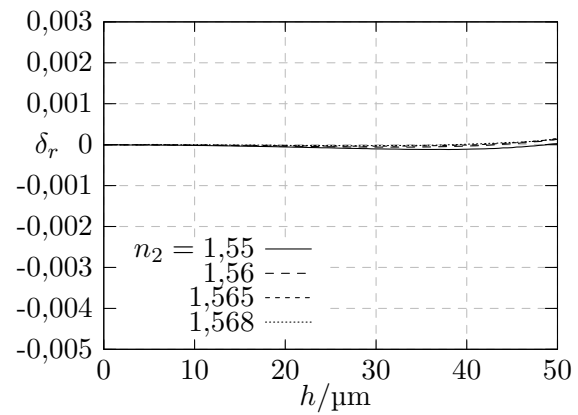
(a) Variation des Kerndurchmessers ( $n_2 = 1,55$ )(b) Variation der Mantelbrechzahl ( $d = 70 \mu\text{m}$ )(c) Variation des Kerndurchmessers ( $n_2 = 1,55$ )(d) Variation der Mantelbrechzahl ( $d = 70 \mu\text{m}$ )

Abbildung 4.22.: Relative Abweichung  $\delta_r$  der Koppeffizienz für die kreiszylindrische Faser im Vergleich zwischen der Näherungslösung und der exakten Lösung. Der Strahldurchmesser ist gleich  $b = 50 \mu\text{m}$ .

Bedingung wird offensichtlich von Moden nahe dem Cut-Off, d.h. mit einem effektiven Index nahe der Mantelbrechzahl, am schlechtesten erfüllt. Hier schließt sich unmittelbar die Frage an, welcher minimale effektive Index erlaubt ist, damit ein Mode dem Spektrum der geführten Moden zugeordnet werden kann. Wie im Kapitel 3.3.1 diskutiert, unterschätzt der Marcatili-Ansatz die Ausbreitungskonstanten  $k_z$  und damit auch den effektiven Index  $n_{\text{eff}} = k_z/k_0$ . Es wäre somit möglich, dass ein Mode mit  $n_{\text{eff}} < n_2$  noch den geführten Moden zuzuordnen ist. Diese Möglichkeit wird im Folgenden nicht weiter verfolgt, da nicht direkt ersichtlich ist, ob die zusätzliche Berücksichtigung eines Modes mit fehlerhafter Feldverteilung tatsächlich das Simulationsergebnis verbessert. Zusammenfassend lassen sich die vermuteten Ursachen für Fehler im Simulationsergebnis festhalten:

- Fehlerhafte Feldverteilung für Moden nahe am Cut-Off,
- Vernachlässigung von Moden aufgrund einer fehlerhaften Berechnung der Ausbreitungskonstanten.

Unter Berücksichtigung dieser Vermutungen sollen nun die Ergebnisse in Abbildung 4.23

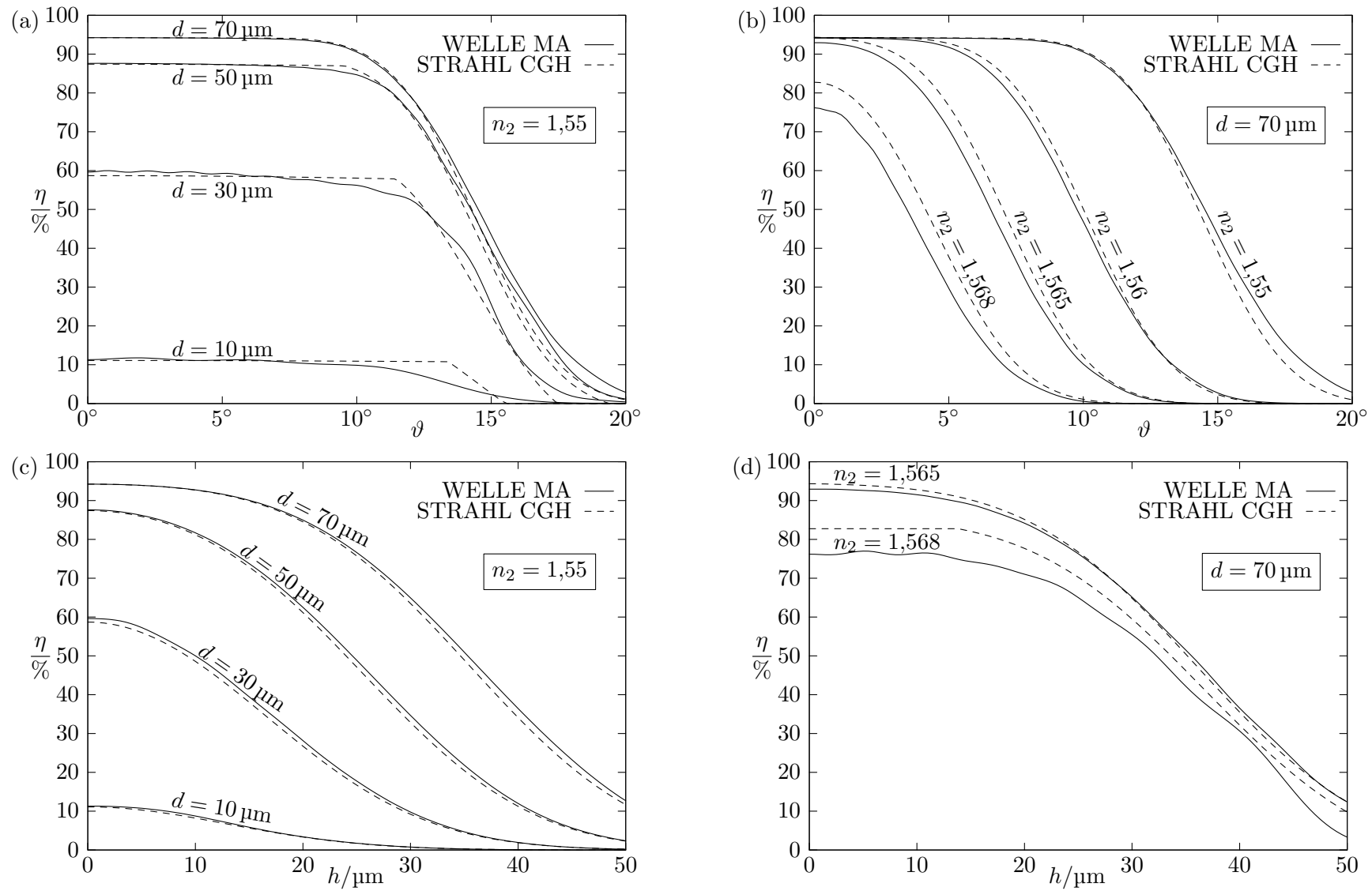


Abbildung 4.23.: Gegenüberstellung der wellentheoretischen und strahlenoptischen Ergebnisse für die erreichbare Koppeleffizienz des rechteckförmigen Wellenleiters. Die Parametersätze entsprechen denen aus Abbildung 4.17 für die kreiszylindrische Faser.

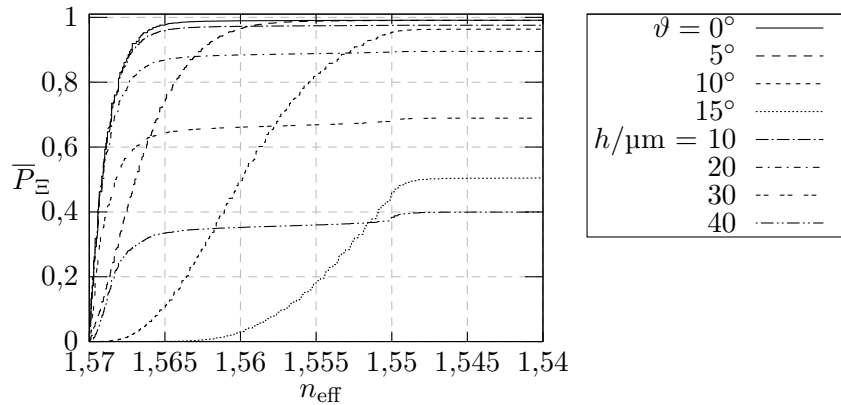


Abbildung 4.24.: Anregung des Modenspektrums des rechteckförmigen Wellenleiters auf Basis der Näherungslösungen von Marcatili. Es gilt  $d = 70 \mu\text{m}$ ,  $n_2 = 1,55$ . (Vgl. Abbildung 4.12a: Anregung des Modenspektrums der Faser.)

interpretiert werden. Diese müssen in Relation zu Abbildung 4.17 gesetzt werden, welche die Ergebnisse für die kreiszylindrische Faser zeigt. Abbildung 4.23 stellt die auf Basis der vorgestellten Näherungslösung (4.57) berechneten Koppeffizienzen den strahlenoptischen Ergebnissen gegenüber. Im strahlenoptischen Modell wurde der Kern um die konstante Goos-Hänchen-Verschiebung verbreitert (Methode STRAHL CGH).

Die Interpretation der Ergebnisse startet mit Abbildung 4.23c, da hier die geringsten Abweichungen auftreten. Bei konstanter  $NA$  sind nun Ergebnisse für unterschiedliche Kantenlängen des Wellenleiterkerns dargestellt. Der Gaußstrahl wird nur lateral verschoben, was auch im Fall des rechteckförmigen Wellenleiters im Bereich der geführten Moden zu keiner Verbreiterung des angeregten Modenspektrums führt. Abbildung 4.24 zeigt die Anregung des Modenspektrums des rechteckförmigen Wellenleiters für  $d = 70 \mu\text{m}$ . Da keine Lösungen für das Spektrum der Strahlungsmoden vorliegen, bleiben diese unberücksichtigt. Allerdings werden im Gegensatz zur Berechnung der Koppeffizienz Marcatili-Lösungen mit  $n_{\text{eff}} < n_2 = 1,55$  berücksichtigt. Im Graphen für  $h = 40 \mu\text{m}$  ist deutlich zu erkennen, dass diese Moden noch signifikant angeregt werden. Insgesamt entsprechen die Abweichungen in Abbildung 4.23c den bereits bei der Faser beobachteten Abweichungen zwischen den Ergebnissen der Wellentheorie und der Strahlenoptik. Ein deutliches Indiz dafür, dass die Näherungslösungen von Marcatili im hohen Indexbereich,  $n_1 = 1,57 > n_{\text{eff}} > 1,565$ , eine hinreichend gute Approximation darstellen.

Diese Aussage wird durch die Ergebnisse in Abbildung 4.23a bestätigt, welche bei identischen Geometrie- und Materialparametern des Wellenleiters die Verdrehung des Gaußstrahls berücksichtigt. Erst für sehr große Einfallswinkel stellen sich deutliche Abweichungen ein, die bei der Faser nicht beobachtet werden konnten. Demzufolge wird für große Einfallswinkel die Koppeffizienz durch Verwendung der Marcatili-Lösungen etwas überschätzt. Es zeigt sich jedoch auch, dass für  $d = 70 \mu\text{m}$  und  $\vartheta = 10^\circ$  immer noch eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen herrscht. Wie Abbildung 4.24 zeigt, wird in diesem Fall nahezu das gesamte Spektrum der geführten Moden angeregt. Erst wenn maßgeblich viel Leistung in die Moden nahe dem Cut-Off eingekoppelt wird, steigen die Abweichungen deutlich an, z.B. für  $\vartheta = 15^\circ$ .

Die Ergebnisse in Abbildung 4.23b und 4.23d bestätigen diese Annahme. Hier wird die Mantelbrechzahl verkleinert und damit werden bei gleich bleibendem Divergenzwinkel des Gaußstrahls automatisch Moden angeregt, die näher am Cut-Off liegen. Mit abnehmender Mantelbrechzahl nehmen die Abweichungen stark zu, jedoch unterschätzt die Verwendung der Marcatili-Lösungen nun die Koppeffizienz im Vergleich zur Strahlenoptik deutlich. Ein Verhalten, das bei der Faser nicht beobachtet werden konnte. Natürlich muss im strahlenoptischen Modell ein möglicher zusätzlicher Fehler berücksichtigt werden, hervorgerufen durch die Ecken im Querschnitt des Wellenleiterkerns, die ja im Modell der kreiszylindrischen Faser *fehlen*. In Abbildung 4.23b wird der Gaußstrahl jedoch nur verdreht und es trifft wenig Leistung in den Eckbereichen auf. Es ist daher davon auszugehen, dass die wellentheoretische Näherung hier einen Fehler verursacht. Da gemäß (3.72) der Marcatili-Ansatz bei kleiner  $NA$  eine bessere Näherungslösung verspricht, ist möglicherweise die Nichtberücksichtigung einiger Moden nahe am Cut-Off die Fehlerursache. Wohingegen zuvor in Abbildung 4.23a die Zunahme der Koppeffizienz vornehmlich aus der fehlerhaften Feldverteilung der Moden nahe am Cut-Off resultierten.

Als Fazit lässt sich festhalten, dass die Näherungslösungen von Marcatili einen sinnvollen Ansatz zur Modellierung rechteckförmiger Wellenleiter darstellen, solange vornehmlich Moden mit hinreichend großer effektiver Brechzahl angeregt werden. Mit den präsentierten Ergebnissen lässt sich zwar keine direkte Fehlerrechnung betreiben oder eine Fehlerschranke für die effektive Brechzahl ableiten. Es gibt jedoch deutliche Indizien dafür, dass insbesondere Lösungen im Intervall  $n_1 < n_{\text{eff}} < \frac{n_1+n_2}{2}$  eine hinreichend gute Approximation darstellen. Wie von Marcatili vorhergesagt, tritt für Moden mit  $n_{\text{eff}}$  nahe  $n_2$  ein deutlich erhöhter Fehler auf.

## 5. Wellenausbreitung in dielektrischen Wellenleitern

Die Beschreibung der Wellenausbreitung im dielektrischen Wellenleiter ist wie schon die Beschreibung der Einkopplung mathematisch sehr aufwändig und es sind nur wenige exakte Lösungen der Maxwellschen Gleichungen bekannt. Zur Erinnerung sei erwähnt, dass sich das Modell zur Beschreibung der Einkopplung auf bzgl. der Wellenleiterachse senkrechte Schnittstellen beschränkt. Sobald die Schnittstelle schräg verläuft oder Inhomogenitäten wie raue Oberflächen berücksichtigt werden müssen, existieren in der Regel keine analytischen Lösungen mehr. Analog dazu lässt sich die Wellenausbreitung ebenfalls nur im längshomogenen Wellenleiter exakt beschreiben, sofern das Modenspektrum des Wellenleiters bekannt ist. Einen analytischen Lösungsansatz gibt es darüber hinaus nur für zirkular gekrümmte Schichtwellenleiter.

Aufgrund der Vielmodigkeit der Wellenleiter ist auch die Feldberechnung im längshomogenen Wellenleiter stets mit einem nicht unerheblichen Rechenaufwand verbunden. Kapitel 5.1 stellt daher zunächst Ergebnisse für die monochromatische Anregung des Modenspektrums dar. Anschließend wird das transiente Übertragungsverhalten am Beispiel zeitperiodischer Anregungen betrachtet. Bei der Beschreibung zirkular gekrümmter Wellenleiter kann man sich nicht mehr der Theorie normaler Moden bedienen. Stattdessen muss ein kontinuierliches nichtorthogonales Modenspektrum angesetzt werden, aus dem sich jedoch wiederum quasigeführte Moden ableiten lassen. Dieser Thematik widmet sich Kapitel 5.2. Dass sich auch alle wesentlichen Ergebnisse auf Basis elementarer strahlenoptischer Methoden ableiten lassen, wird abschließend in Kapitel 5.3 diskutiert. Falls nicht anders notiert, gelten für alle Parameter dieselben Annahmen wie im vorangegangenen Kapitel 4.

### 5.1. Wellenausbreitung im längshomogenen Wellenleiter

Das Übertragungsverhalten monochromatischer Wellen im längshomogenen Wellenleiter ist nach erfolgter Berechnung der Leistungsverteilung auf das Modenspektrum trivial zu bestimmen. Der Übergang in den Zeitbereich erfolgt nach Multiplikation mit  $\exp(j\omega t)$  durch einfache Realteilbildung. Um die Ausbreitung beliebig zeitabhängiger Wellen zu beschreiben, muss jedoch die Fouriertransformation angewendet werden. Diese ist im Allgemeinen nur für einfache Spezialfälle effektiv durchführbar, da das Modenspektrum für die gesamte

Bandbreite des zeitabhängigen Signals bestimmt werden muss. Die im Folgenden gezeigten exemplarischen Ergebnisse beziehen sich daher auf den planaren Schichtwellenleiter.

### 5.1.1. Monochromatische Wellenausbreitung

Sobald die Anregung des Modenspektrums eines längshomogenen Wellenleiters bestimmt wurde, lässt sich das elektromagnetische Feld in jedem Punkt durch Überlagerung der Feldanteile aller Moden berechnen. Obwohl die monochromatische Anregung kein direktes praktisches Interesse offenbart – schließlich erfordert jede Form der Datenübertragung eine bestimmte Bandbreite – lassen sich gerade im multimodalen Wellenleiter aufgrund der Modendispersion interessante Interferenzerscheinungen beobachten [63]. Unter Annahme einer hinreichend schmalbandigen Anregung können diese Effekte auch im realen System ausgenutzt werden.

Abbildung 5.1 zeigt die zeitlich gemittelte Leistungsflussdichte  $|\Re\{\vec{S}\}|$  in einem Schichtwellenleiter der Dicke  $d = 70\ \mu\text{m}$  und der numerischen Apertur  $NA = 0,25$ . Die Achse des einfallenden Gaußstrahls trifft senkrecht und meridional bei  $z = 0$  auf. Strahlbreite und Divergenzwinkel sind gleich  $b = 50\ \mu\text{m}$  und  $\Theta_{a0} = 5^\circ$ . Die Darstellung ist in  $z$ -Richtung um den Faktor 50 gestaucht. Bedingt durch die symmetrische Anregung werden nur Moden

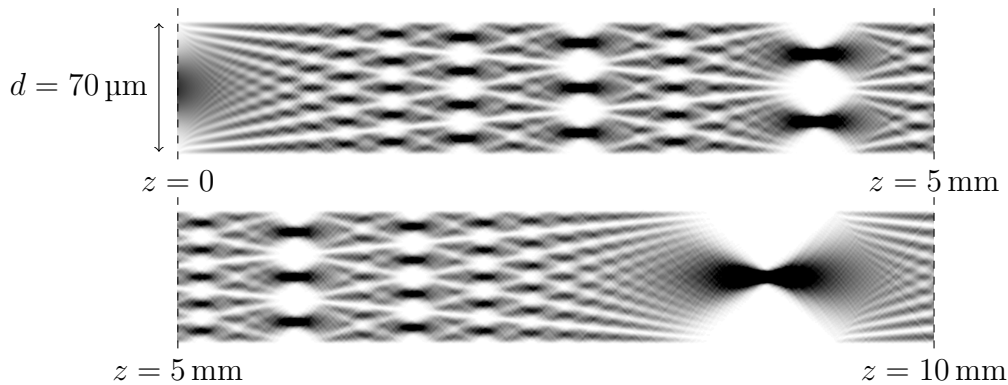


Abbildung 5.1.: Zeitlich gemittelte Leistungsflussdichte  $|\Re\{\vec{S}\}|$  in einem Schichtwellenleiter der Dicke  $d = 70\ \mu\text{m}$  und  $NA = 0.25$  bei Anregung in  $z = 0$  durch einen Gaußstrahl unter idealen Koppelbedingungen.

angeregt, die bzgl. der Wellenleiterachse eine gerades Profil aufweisen. Dementsprechend ist auch die transversale Flussdichteverteilung stets symmetrisch und bedingt durch die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Moden stellen sich die gezeigten Interferenzmuster ein. Besonders markante Intensitätsverteilungen ergeben sich für  $z = 4,2\text{ mm}$  und  $z = 8,9\text{ mm}$ . Im ersten Fall bilden sich zwei dominante lokale Maxima aus. Würde der Wellenleiter an dieser Stelle in der Mitte geteilt, könnte ein Splitterstruktur aufgebaut werden, die den Leistungsfluss in 3 dB-Anteile aufteilt. Im zweiten Fall konzentriert sich der Leistungsfluss auf einen einzigen, sehr schmalen Bereich. Hier könnte ein Wellenleiter mit kleinerem Durchmesser anschließen, ohne dass ein signifikanter Verlust durch Abstrahlung zu erwarten ist.



Da sich die Interferenzmuster mit Ausbreitung der Welle wiederholen, wird im Englischen von ‚Self-Imaging‘ gesprochen [63]. In der Praxis lassen sich diese Effekte jedoch nur mit erheblichem Aufwand ausnutzen, da sehr hohe Anforderungen an die Qualität und die Positionierung der Quelle gestellt werden müssen. Es sei auch noch einmal betont, dass sich die gezeigten Ergebnisse nur auf ein planares zweidimensionales Problem beziehen. Analoge Ergebnisse sind jedoch auch im Fall eines Wellenleiters mit zweidimensionalem Querschnittprofil zu erwarten, da bei Einfall eines Gaußstrahls unter idealen Koppelbedingungen immer nur ein entsprechender definierter Bereich im Modenspektrum angeregt wird, vgl. Abbildung 4.12a.

Die in Abbildung 5.1 gezeigten Interferenzmuster in der Leistungsflussdichte sind insbesondere auch dann von Bedeutung, wenn sich einem Stück geraden Wellenleiter ein gekrümmter Wellenleiter anschließt. Je nach Länge des geraden Stücks variiert die Feldverteilung am Anfang der Krümmung und damit auch das Übertragungsverhalten durch die Krümmung. Mehr dazu im Kapitel 5.2.

Abschließend soll noch ein weiteres Phänomen angesprochen werden, dass zwar offensichtlich ist, jedoch selten diskutiert wird. In der geometrischen Optik wird zu Testzwecken oft die  $NA$  des Wellenleiters homogen ausgeleuchtet. Dazu wird eine Punktquelle angesetzt, die Strahlen gleicher Intensität unter einer äquidistanten Winkeldiskretisierung aussendet. Wie sieht nun eine korrespondierende wellentheoretische Anregung aus? Diese Frage ist im Grunde nicht zu beantworten, da aus einem strahlenoptischen Modell aufgrund der fehlenden Phaseninformation eine elektromagnetische Welle nur eingeschränkt rekonstruiert werden kann. Abbildung 5.2 zeigt exemplarisch die Leistungsflussdichte in einem Schichtwellenleiter, wenn alle geführten Moden in  $z = 0$  gleichphasig angeregt werden<sup>1</sup>. In der

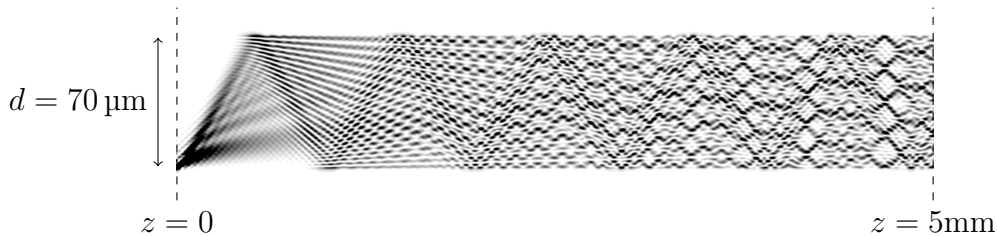


Abbildung 5.2.: Zeitlich gemittelte Leistungsflussdichte  $|\Re\{\vec{S}\}|$  bei gleichphasiger Anregung aller geführten Moden in  $z = 0$  eines Schichtwellenleiters der Dicke  $d = 70 \mu\text{m}$  sowie  $NA = 0,25$ .

Ebene  $z = 0$  konzentrieren sich die Felder am unteren Rand des Wellenleiterkerns. Wird die strahlenoptische Punktquelle ebenfalls am unteren Rand des Wellenleiterkerns platziert, lässt sich vermutlich eine größtmögliche Übereinstimmung hinsichtlich der weiteren Propagation der Wellen und Strahlen im Wellenleiter erwirken. Wird ein expliziter Vergleich der unterschiedlichen Theorien angestrebt, sollte jedoch immer das strahlenoptische Modell aus dem Poyntingvektorfeld der wellentheoretischen Analyse abgeleitet werden.

<sup>1</sup>Unter der Annahme einer analytischen Beschreibung des Modenspektrums wie z.B. im Kapitel 3.1.3 gilt für die Amplituden der geführten Moden  $C_\nu = 1$ .

### 5.1.2. Transientes Übertragungsverhalten

Um die Implementierung auf einem Rechnersystem zu vereinfachen, beschränkt sich die folgende Beschreibung auf eine periodische Zeitabhängigkeit des Modulationssignals und damit implizit auf die Theorie der Fourierreihen [17]. Im Fokus steht das reine Übertragungsverhalten des optischen Wellenleiters. Quelle und Empfänger werden als ideal angenommen. Ebenso werden die Schnittstellen zwischen den Bauteilen als ideal angenommen und damit Reflexionsverluste vernachlässigt.

Das elektrische Feld des Trägersignals sei  $y$ -polarisiert und gegeben durch

$$E_y^T(\vec{r}_0, t) = \Re \left\{ \underline{E}_0(\vec{r}_0, \omega_0) \exp(j\omega_0 t) \right\}. \quad (5.1)$$

Wird der Pumpstrom des Lasers durch eine periodische Pulsfolge moduliert, so besitzen neben der Ausgangsleistung des Lasers auch die zugehörigen Feldgrößen eine periodische Zeitabhängigkeit. Die Fouriersumme des Modulationssignals bezogen auf die Feldgrößen sei durch

$$g(t) = \sum_{n=-N}^N c_n \exp(jn\Omega t), \quad \text{mit } c_n \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad c_n = c_{-n} \quad (5.2)$$

gegeben. Darin ist  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  die Grundfrequenz und  $T$  ist die Grundperiode. Der kompakteren Schreibweise wegen beschränkt sich die Darstellung auf gerade Modulationssignale. Für die noch folgende Beschreibung des Leistungsflusses im Wellenleiter ist es sinnvoll, Koeffizienten mit  $|n| > N$  explizit gleich Null zu setzen, d.h. es gilt

$$c_n = 0 \quad \forall \quad |n| > N. \quad (5.3)$$

Das resultierende modulierte Feld vor der Wellenleiterstirnfläche berechnet sich zu

$$E_y^G(\vec{r}_0, t) = E_y^T(\vec{r}_0, t) g(t) = \Re \left\{ \underline{E}_0(\vec{r}_0, \omega_0) \sum_{n=-N}^N c_n \exp(j(\omega_0 + n\Omega)t) \right\}. \quad (5.4)$$

Anders als im freien Raum unterliegen die Felder im dielektrischen Wellenleiter der chromatischen Dispersion sowie der Modendispersion [47], welche im multimodalen Wellenleiter dominiert. Es ist daher von fundamentaler Bedeutung, wie sich die einfallende Leistung auf die einzelnen Moden verteilt. Trotz der ursprünglich monochromatischen Anregung (5.1) besitzt das Feld vor der Wellenleiterstirnfläche aufgrund der Modulation nun eine durch (5.2) definierte Bandbreite und für die exakte Beschreibung der Einkopplung müsste für jede Frequenz  $\omega_n = \omega_0 + n\Omega$  ein Mode-Matching durchgeführt werden. Allerdings ändert sich das Modenspektrum in Abhängigkeit von  $n\Omega$  nur unwesentlich<sup>2</sup>. Da auch die anregende Feldverteilung  $\underline{E}_0(\vec{r}_0, \omega_0)$ , die wie zuvor durch den Gaußstrahl gegeben ist, unabhängig von  $n\Omega$  ist, reicht es aus, das Mode-Matching einmalig für die Frequenz  $\omega_0$  durchzuführen.

---

<sup>2</sup>Zur Erinnerung: die Wellenlänge des optischen Trägers ist in dieser Arbeit gleich 850 nm. Damit liegt die Trägerfrequenz  $\omega_0$  im höheren Terahertz-Bereich und ist um einige Dekaden größer als die Modulationsfrequenz  $\Omega$ , die typischerweise im Gigahertz-Bereich liegt.

In der Notation gemäß Kapitel 2.3.1 lässt sich das Feld im Wellenleiter durch

$$E_y^W(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \exp(j\omega_0 t) \sum_{n=-N}^N c_n \exp(jn\Omega t) \underline{E}_{y,n}(\vec{r}, \omega_n) \right\}, \quad (5.5)$$

mit

$$\underline{E}_{y,n}(\vec{r}, \omega_n) = \sum_{\nu} C_{\nu} \underline{\mathcal{E}}_{\nu}(\vec{r}_t, \omega_n) \exp(-jk_{z\nu,n}z) \quad (5.6)$$

beschreiben. Zu beachten ist, dass die Frequenzabhängigkeit nun durch den Index  $n$  berücksichtigt wird. Die Amplituden  $C_{\nu}$  sind wie beschrieben frequenzunabhängig und da Verluste durch Reflexion oder Abstrahlung vernachlässigt werden, werden die Maxima im Leistungsfluss mit

$$\sum_{\nu} C_{\nu}^2 \bar{P}_{\nu} = 1 \quad (5.7)$$

auf Eins normiert. Darin ist  $\bar{P}_{\nu}$  die für  $\omega = \omega_0$  pro Mode geführte normierte Leistung, vgl. (2.63). Die Summation in (5.6) erstreckt sich nur über die geführten Moden des Wellenleiters.

Die Leistungsflussdichte im elektromagnetischen Feld beschreibt sich allgemein durch den Poyntingvektor. Für die gewählte Polarisation berechnet sich die Komponente in Ausbreitungsrichtung aus

$$S_z(\vec{r}, t) = -E_y^W(\vec{r}, t) H_x^W(\vec{r}, t). \quad (5.8)$$

Darin wird die magnetische Feldstärke analog zu (5.5) beschrieben durch

$$H_x^W(\vec{r}, t) = -\Re \left\{ \exp(j\omega_0 t) \sum_{n=-N}^N c_n \exp(jn\Omega t) \underline{H}_{x,n}(\vec{r}, \omega_n) \right\}, \quad (5.9)$$

$$\underline{H}_{x,n}(\vec{r}, \omega_n) = \sum_{\nu} \frac{k_{z\nu,n}}{\omega_n \mu} C_{\nu,n} \underline{\mathcal{E}}_{\nu}(\vec{r}_t, \omega_n) \exp(-jk_{z\nu,n}z). \quad (5.10)$$

In den Darstellungen (5.5) und (5.9) wurde die Zeitabhängigkeit vom hochfrequenten optischen Träger bewusst vorangestellt. Die Zeitabhängigkeit der Feldgrößen ist von der Form

$$\tilde{\Psi}_{1/2}(t) = \Re \{ \exp(j\omega_0 t) \Psi_{1/2}(t) \}. \quad (5.11)$$

Somit ergibt sich für das Produkt zweier Feldgrößen, und damit auch für den Poyntingvektor, die Zeitabhängigkeit

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1(\vec{r}, t) \tilde{\Psi}_2(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4} \left( \Psi_1(t) \exp(j\omega_0 t) + \Psi_1^*(t) \exp(-j\omega_0 t) \right) \\ &\quad \left( \Psi_2(t) \exp(j\omega_0 t) + \Psi_2^*(t) \exp(-j\omega_0 t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re \{ \Psi_1(t) \Psi_2^*(t) \} + \frac{1}{2} \Re \{ \Psi_1(t) \Psi_2(t) \exp(j2\omega_0 t) \}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

In dieser Darstellung ist der erste Summand nicht mehr von der Trägerfrequenz  $\omega_0$  abhängig, im Gegensatz zum zweiten Summanden, welcher mit der doppelten Trägerfrequenz oszilliert. Da dieser höchstfrequente Anteil von einer Photodiode nicht aufgelöst wird,

wird er im Folgenden vernachlässigt. Die tiefpassgefilterte Leistungsflussdichte berechnet sich dann zu

$$\tilde{S}_z(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \Re \left\{ \left( \sum_{n=-N}^N c_n \underline{E}_{y,n}(\vec{r}, \omega_n) \exp(jn\Omega t) \right) \left( \sum_{n=-N}^N c_{-n} \underline{H}_{x,-n}^*(\vec{r}, \omega_{-n}) \exp(jn\Omega t) \right) \right\}. \quad (5.13)$$

Dieses Produkt zweier Fouriersummen kann mit Hilfe einer Faltung der diskreten Spektren umgeformt werden:

$$\tilde{S}_z(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \Re \left\{ \sum_{n=-2N}^{2N} \left[ \sum_{m=-N}^N (c_m \underline{E}_{y,m}(\vec{r}, \omega_m)) (c_{m-n} \underline{H}_{x,m-n}^*(\vec{r}, \omega_{m-n})) \right] \exp(jn\Omega t) \right\}. \quad (5.14)$$

Die in Ausbreitungsrichtung transportierte Leistung ergibt sich durch Integration und ist gleich

$$\tilde{p}(z_c, t) = \frac{1}{2} \Re \left\{ \sum_{n=-2N}^{2N} \underbrace{\left[ \sum_{m=-N}^N c_m c_{m-n} \int_{z=z_c} \underline{E}_{y,m}(\vec{r}, \omega_m) \underline{H}_{x,m-n}^*(\vec{r}, \omega_{m-n}) da \right]}_{\tilde{p}_n(z_c)} \exp(jn\Omega t) \right\}. \quad (5.15)$$

Weiter folgt für die Fouriersumme der Leistung

$$\tilde{p}(z, t) = \sum_{n=-2N}^{2N} p_n(z) \exp(jn\Omega t) \quad \text{mit} \quad p_n(z) = \frac{1}{4} (\tilde{p}_n(z) + \tilde{p}_{-n}^*(z)). \quad (5.16)$$

Die Rechenzeiten zur Bestimmung des Leistungsfluss  $\tilde{p}(z, t)$  variieren in Abhängigkeit der Bandbreite des Modulationssignals. Eine hohe Bandbreite korrespondiert mit einer großen Anzahl Reihenglieder  $N$  und damit einer großen Anzahl Rechenoperationen zur Bestimmung des diskreten Faltungsprodukts. Des Weiteren muss pro Summand in (5.15) ein Integral gelöst werden, das zwar ggf. analytisch berechnet werden kann, in jedem Fall aber den Simulationsaufwand erhöht. Im Allgemeinen ist die Bandbreite jedoch hinreichend klein gegenüber der optischen Trägerfrequenz, so dass die Änderung im transversalen Modenprofil mit der Frequenz  $\omega$  vernachlässigt werden kann. Anstelle von (5.6) und (5.10) können die Feldausdrücke

$$\underline{E}_{y,n}(\vec{r}, \omega_n) \approx \sum_{\nu} C_{\nu} \underline{\mathcal{E}}_{\nu}(\vec{r}_t, \omega_0) \exp(-jk_{z\nu,n}z), \quad (5.17)$$

$$\underline{H}_{x,n}(\vec{r}, \omega_n) \approx \sum_{\nu} \frac{k_{z\nu,0}}{\omega_n \mu} C_{\nu} \underline{\mathcal{E}}_{\nu}(\vec{r}_t, \omega_0) \exp(-jk_{z\nu,n}z) \quad (5.18)$$

verwendet werden. Gleichung (5.15) vereinfacht sich damit zu

$$\tilde{p}(z, t) \approx \Re \left\{ \sum_{n=-2N}^{2N} \left[ \sum_{m=-N}^N c_m c_{m-n} \sum_{\nu} |C_{\nu}|^2 \bar{P}_{\nu} \exp(-j(k_{z\nu,m} - k_{z\nu,m-n})z) \right] \exp(jn\Omega t) \right\}. \quad (5.19)$$

Die Annahme, dass sich das transversale Modenprofil mit der Frequenz nur langsam ändert, soll nicht ausschließen, dass die Anzahl der geführten Moden nicht variiert. Insbesondere im hochmultimodalen Fall variiert die Anzahl der geführten Moden auch bei kleinen Frequenzänderungen. Die Änderungen betreffen maßgeblich nur den Teil des Modenspektrums nahe dem Cut-Off, d.h.  $n_{\text{eff}} \approx n_2$ . Sollen hohe Koppeleffizienzen erzielt werden, wird dieser Teil des Modenspektrums in der Regel nicht signifikant angeregt, vgl. Abbildung 4.12a.

Im Folgenden Beispiel wird ein Modulationssignal mit der Grundfrequenz  $\Omega = 10$  GHz betrachtet. Es gilt somit  $T = 100$  ps. Das Modulationssignal sei eine Folge von Sinusbögen gemäß

$$g(t) \approx \begin{cases} \cos(\frac{2\pi t}{T}), & \tilde{n} - 1/4 < t/T < \tilde{n} + 1/4, \quad \tilde{n} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.20)$$

Aufgrund der endlichen verfügbaren Bandbreite gilt (5.20) nur näherungsweise. Um die Auswirkungen der Modendispersion und die damit verbundene Pulsverformung zu verdeutlichen, wurde ein Puls-Pause Verhältnis von eins gewählt. Die Koeffizienten der zugehörigen Fouriersumme sind gleich

$$c_0 = \frac{1}{\pi}, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_n = \begin{cases} \frac{-2}{\pi(n^2-1)}(-1)^{n/2}, & n = 2, 4, 6 \dots \\ 0, & n = 3, 5, 7 \dots \end{cases} \quad (5.21)$$

Koeffizienten mit einem Index  $|n| > N$  sind gemäß (5.3) gleich Null. Die Folge der Fourierkoeffizienten klingt quadratisch ab. Da sich das Modulationssignal auf die Feldgrößen bezieht, besitzt der initiale Leistungsfluss eine entsprechend quadratische Abhängigkeit, d.h. es gilt  $\tilde{p}(0, t) \sim g^2(t)$ . Entsprechend schmalbandig ist das Frequenzspektrum<sup>3</sup>. Da jedoch für den späteren Vergleich zur Strahlenoptik auch rechteckförmige Pulse näherungsweise modelliert werden sollen, wird insgesamt ein Wellenlängenbereich von  $838 \text{ nm} < \lambda < 862 \text{ nm}$  berücksichtigt. Das entspricht einer Bandbreite von bereits etwa 10 THz und somit  $N = 500$  Reihengliedern in (5.2). Die Änderungen im Spektrum der geführten Moden sind in diesem Bereich vernachlässigbar. Für den im Folgenden betrachteten Schichtwellenleiter der Dicke  $d = 75 \mu\text{m}$  und der Apertur  $NA = 0,25$  sinkt die Anzahl der geführten Moden ab der Wellenlänge  $851,5 \text{ nm}$  zwar von 45 auf 44, das transversale Modenprofil der verbleibenden 44 Moden variiert jedoch nur sehr wenig.

In Abbildung 5.3 ist der normierte Leistungsfluss  $\tilde{p}(z, t)$  an verschiedenen Stellen  $z = L$  für unterschiedliche Anregungen des Modenspektrums aufgetragen. Es gilt  $d/b = 1,5$ , d.h. der Durchmesser des Gaußstrahls ist gleich  $b = 50 \mu\text{m}$ . Die Kurven für  $L > 0$  wurden auf der Zeitachse verschoben, so dass der Überlapp in Abbildung 5.3a am größten ist. Diese Abbildung zeigt den Fall der idealen Einkopplung, d.h. die Strahlachse trifft senkrecht meridional auf. Gemäß Abbildung 4.12a werden nur Moden mit großem effektiven Index  $n_{\text{eff}}$  angeregt und entsprechend gering ist die Pulsverformung. Dargestellt sind neben dem Eingangssignal Ergebnisse für fünf unterschiedliche Wellenleiterlängen  $L = 1, 2, \dots, 5 \text{ m}$ . Es zeigt sich, dass mit zunehmender Wellenleiterlänge wie erwartet die Amplitude der Pulse abnimmt und die Breite zunimmt. Beachtet werden muss, dass in einem realen Übertragungssystem keine derart große Pause zwischen den Pulsen existiert. Dennoch sollte in diesem Fall auch noch nach  $L = 5 \text{ m}$  eine Detektion der Pulse möglich sein. Da eine laterale Verschiebung  $h$

<sup>3</sup>Diese Aussage bezieht sich auf eine Definition wie etwa die 3 dB-Bandbreite.

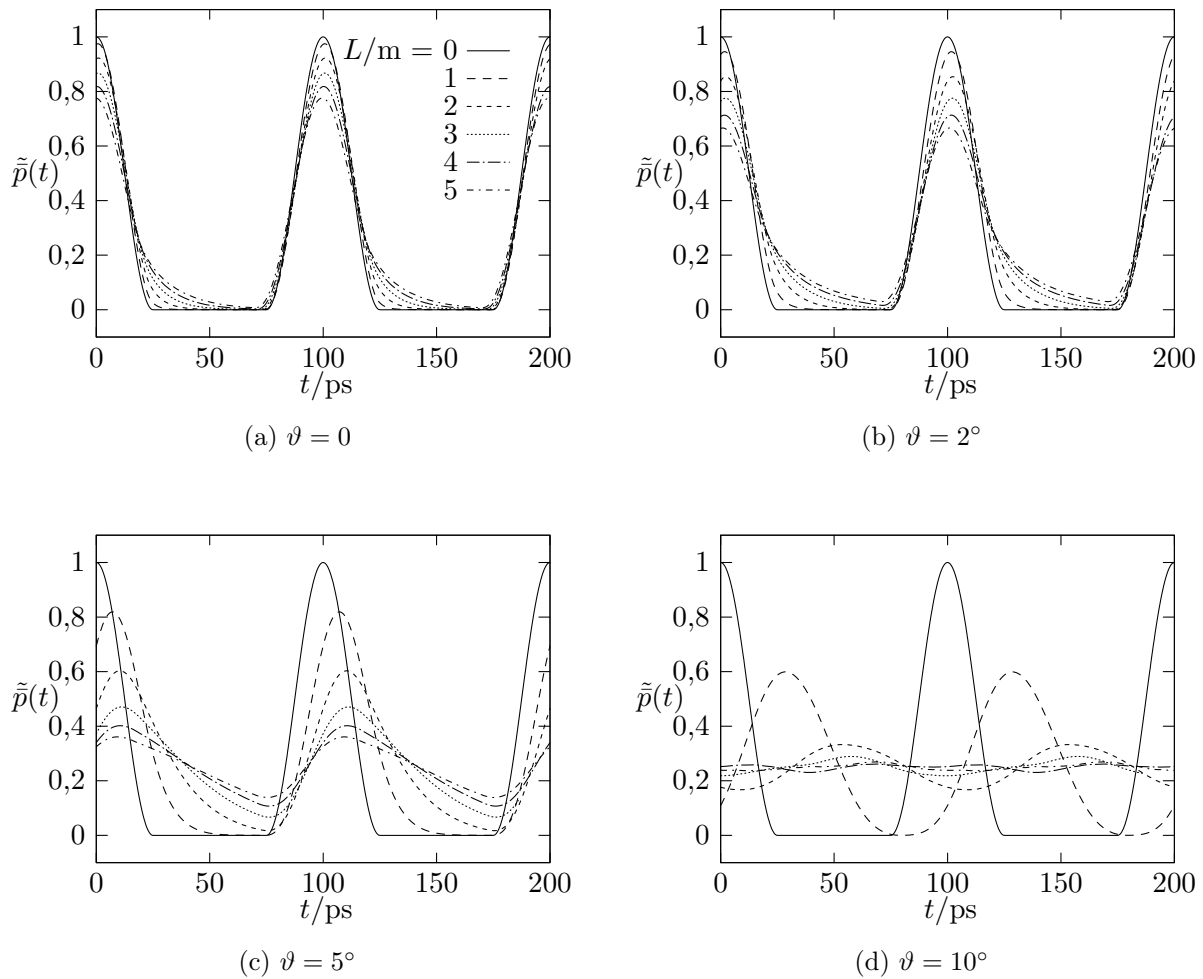


Abbildung 5.3.: Normierter Leistungsfluss an ausgewählten Stellen  $z = L$  in einem Schichtwellenleiter nach Einkopplung eines Gaußstrahls unter verschiedenen Winkeln  $\vartheta$ . Es gilt  $d = 75 \mu\text{m}$ ,  $b = 50 \mu\text{m}$ ,  $h = 0$  und  $NA = 0,25$ . Die Legende in Abbildung (a) gilt auch in (b), (c) und (d).

des Gaußstrahls nicht zu einer Verbreiterung des angeregten Modenspektrums führt, sind in den weiteren Abbildungen Ergebnisse für unterschiedliche Einfallswinkel  $\vartheta$  dargestellt.

Mit zunehmendem Einfallswinkel des Gaußstrahls verbreitert sich auch die Anregung des Modenspektrums, entsprechend nimmt der Einfluss der Modendispersion zu. Für  $\vartheta = 2^\circ$  ist die Pulsverbreiterung auch bei  $L = 5 \text{ m}$  noch moderat, die Amplitude sinkt auf etwa 0,666. Bei  $\vartheta = 5^\circ$  nimmt die Amplitude bereits nach  $L = 3 \text{ m}$  einen Wert unter 0,5 an. Im Fall  $\vartheta = 10^\circ$  wird nahezu das gesamte Modenspektrum angeregt, insbesondere auch die Moden hoher Ordnung. Die Amplitude sinkt bereits nach einem Meter auf etwa 0,6. Bedenkt man, dass in einem realen System zusätzliche parasitäre Effekte die Dispersion weiter verstärken können, dann ist eine Datenübertragung mit Wellenleiterlängen über 1 m wahrscheinlich nicht mehr möglich. Im Kontext der EOPCB-Technologie sind jedoch Wellenleiterlängen kleiner 1 m auch für den Einsatz in größeren Serversystemen oft ausreichend.

### 5.1.3. Übertragungsfunktion des planaren Schichtwellenleiters

Sofern, wie in dieser Arbeit angenommen, alle eingesetzten Materialien lineare Eigenschaften besitzen, stellt auch der optische Wellenleiter ein lineares Bauelement dar. Jedoch bezieht sich diese Linearität auf die Feldgrößen und nicht auf die übertragene Leistung, die bekanntlich aus dem Integral über den Poyntingvektor hervorgeht. In der klassischen inkohärenten Übertragungstechnik wird durch Modulation des Pumpstroms der eingesetzten Laserdiode die Ausgangsleistung variiert. Am Ende der Übertragungsstrecke wird umgekehrt die Eingangsleistung in einen Strom umgewandelt. Im Folgenden soll wie zuvor ein System betrachtet werden, in dem sowohl die Laserdiode als auch die Photodiode als ideal angenommen werden. Die Eingangsgröße ist dann proportional zur Leistung  $\tilde{p}(0,t)$  am Wellenleiteranfang. Entsprechend ist die Ausgangsgröße proportional zur Leistung  $\tilde{p}(L,t)$  am Wellenleiterende.

Das somit definierte System wird vollständig durch Gleichung (5.15) beschrieben. Die Charakterisierung des Systems ist jedoch schwierig, da sich die Eingangsgröße nicht explizit aus (5.15) isolieren lässt. Zwar lässt sich noch zeigen, dass das System das Verstärkungsprinzip (Homogenität) erfüllt. Im Allgemeinen ist das System jedoch nicht additiv. Dennoch kann das System als näherungsweise linear angenommen werden, so dass die Systemeigenschaften durch eine Übertragungsfunktion beschrieben werden können, die sich aus (5.16) gemäß

$$H(f_n) = \frac{p_n(L)}{p_n(0)} \quad \text{mit} \quad f_n = \frac{n\Omega}{2\pi} \quad (5.22)$$

ableiten lässt. Die Annahme eines linearen Systems ist gerechtfertigt, solange die chromatische Dispersion vernachlässigbar ist. In diesem Fall lässt sich die Dispersionsbeziehung der Moden linearisieren. Es gilt

$$k_{z\nu}(\omega) = k_{z\nu}(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk_{z\nu}}{d\omega} \right|_{\omega_0}. \quad (5.23)$$

Mit dieser Näherung kann (5.19)

$$\tilde{p}(z,t) = \Re \left\{ \sum_{n=-2N}^{2N} \left[ \sum_{m=-N}^N c_m c_{m-n} \sum_{\nu} |C_{\nu}|^2 \bar{P}_{\nu} \exp(-j(k_{z\nu m} - k_{z\nu, m-n})z) \right] \exp(jn\Omega t) \right\} \quad (5.24)$$

vereinfacht werden. In der gewählten Notation folgt aus (5.23)

$$k_{z\nu, n} = k_{z\nu, 0} + \frac{n\Omega}{v_{g\nu}} \quad \text{und} \quad k_{z\nu, m} - k_{z\nu, m-n} = \frac{n\Omega}{v_{g\nu}}, \quad \text{mit} \quad v_{g\nu} = \left. \frac{d\omega}{dk_{z\nu}} \right|_{\omega_0}. \quad (5.25)$$

Die Größe  $v_{g\nu}$  wird als Gruppengeschwindigkeit des Modes  $\nu$  bezeichnet. Eingesetzt in (5.24) ergibt sich

$$\tilde{p}(z,t) = \sum_{n=-2N}^{2N} \left( \sum_{\nu} |C_{\nu}|^2 \bar{P}_{\nu} \exp\left(-j \frac{n\Omega}{v_{g\nu}} z\right) \right) \left[ \sum_{m=-N}^N c_m c_{m-n} \right] \exp(jn\Omega t). \quad (5.26)$$

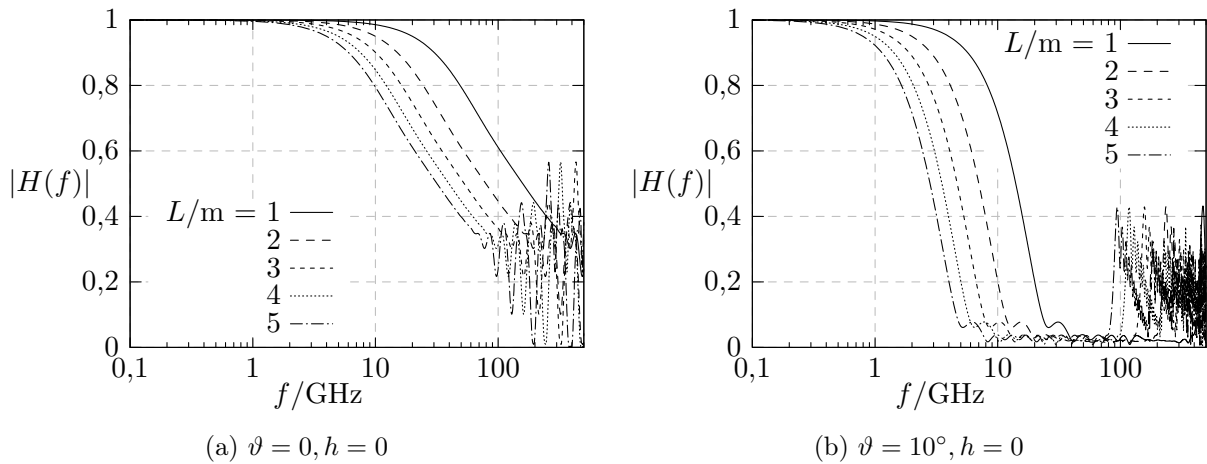


Abbildung 5.4.: Übertragungsfunktion des planaren Schichtwellenleiters. Es gilt  $d = 75 \mu\text{m}$ ,  $b = 50 \mu\text{m}$  und  $n_2 = 1,55$ .

Der Realteiloperator kann hier entfallen, da die Fourierkoeffizienten ein reelles Signal implizieren. Mit (5.7) folgt nun für das Eingangssignal

$$\tilde{p}(0, t) = \sum_{n=-2N}^{2N} \left[ \sum_{m=-N}^N c_m c_{m-n} \right] \exp(jn\Omega t) \quad (5.27)$$

und für das Ausgangssignal

$$\tilde{p}(L, t) = \sum_{n=-2N}^{2N} H_l\left(\frac{n\Omega}{2\pi}\right) \left[ \sum_{m=-N}^N c_m c_{m-n} \right] \exp(jn\Omega t). \quad (5.28)$$

Darin ist

$$H_l(f_n) = \sum_{\nu} |C_{\nu}|^2 \bar{P}_{\nu} \exp\left(-j \frac{2\pi f_n L}{v_{g\nu}}\right) \quad (5.29)$$

die Übertragungsfunktion des linearisierten Systems. Im Vergleich zur Definition (5.22), in der die Fourierkoeffizienten gemäß (5.16) berechnet werden, ist der erforderliche Rechenaufwand deutlich reduziert. Die Unterschiede sind jedoch in der Regel vernachlässigbar.

Abbildung 5.4 zeigt exemplarisch Ergebnisse für den Betrag der durch (5.22) definierten Übertragungsfunktion<sup>4</sup>. Die Parametersätze korrespondieren mit denen aus Abbildung 5.3a und 5.3d. Es gilt  $d = 75 \mu\text{m}$  und  $d/b = 1,5$  sowie  $NA = 0,25$ . Die Kurven zeigen das erwartete Tiefpassverhalten auf. Die 3 dB-Frequenz, die Frequenz, bei der  $|H(f)| = 0,5$  gilt, nimmt mit zunehmender Wellenlänge ab. In Abbildung 5.4a ist analog zu Abbildung 5.3a der Idealfall berücksichtigt, bei dem der Gaußstrahl senkrecht meridional auftrifft. Das Bandbreitenlängenprodukt beträgt  $f_{3\text{dB}} \cdot L = 159 \text{ GHz} \cdot \text{m}$ . Der aus praktischer Sicht relevantere Fall mit  $\vartheta = 10^\circ$ , bei dem nahezu das gesamte Modenspektrum angeregt wird, ist in Abbildung 5.4b dargestellt. In diesem Fall sinkt das Bandbreitenlängenprodukt auf

<sup>4</sup>Die Koeffizienten des Modulationssignals 5.2 wurden hierzu konstant gleich  $c_n = 1 \forall n$  gesetzt.



$f_{3\text{dB}} \cdot L = 14 \text{ GHz} \cdot \text{m}$ . Somit lässt sich das Ergebnis aus Abbildung 5.3d leicht erklären. Aus dem Bandbreitenlängenprodukt errechnet sich bei einer Frequenz von 10 GHz eine maximale Länge von lediglich 1,4 m. Bei einer Länge von 2 m ist bereits keine hinreichende Amplitude für eine zuverlässige Detektion mehr vorhanden.

Die Unterschiede zur Übertragungsfunktion (5.29) liegen in Abbildung 5.4 meist unterhalb der darstellbaren Genauigkeit. Lediglich in den Graphen für  $\vartheta = 10^\circ$  existieren im Bereich zwischen 10 GHz und 100 GHz merkliche, insgesamt jedoch vernachlässigbare Unterschiede. Diese begründen sich darin, dass der letzte geführte Mode mit einer effektiven Brechzahl  $n_{\text{eff}} = 1,550047$  für  $\lambda = 850 \text{ nm}$  bereits sehr nahe am Cut-Off liegt und hier die Linearisierung 5.23 problematisch ist. Es sei jedoch betont, dass er im betrachteten Frequenzbereich nicht unterhalb des Cut-Off fällt. Für Einfallswinkel  $\vartheta < 10^\circ$  wird dieser Mode nicht signifikant angeregt. Folglich ist die durch (5.22) bzw. (5.29) definierte Übertragungsfunktion ein sinnvolles Instrument zur Charakterisierung optischer Wellenleiter. Es muss jedoch auch betont werden, dass diese Übertragungsfunktionen nur Approximationen darstellen, die gerechtfertigt sind, solange die chromatische Dispersion vernachlässigbar ist. Die starken Oszillation in Abbildung 5.4 für Frequenzen größer 100 GHz sind im Übrigen ein Resultat der Modendispersion im Wellenleiter mit einer endlichen Anzahl geführter Moden. Je weniger Moden geführt werden, desto ausgeprägter fallen diese Oszillationen aus.

## 5.2. Wellenausbreitung im gekrümmten Schichtwellenleiter

Obwohl die Beschreibung der Wellenausbreitung in gekrümmten dielektrischen Wellenleitern schon lange Gegenstand wissenschaftlicher Arbeiten ist [13, 43], existieren mangels exakter analytischer Lösungen nahezu keine verifizierten Modellierungsansätze. Oft wird der sogenannte Leckwellen-Ansatz<sup>5</sup> als exakte physikalische Lösung der Maxwell'schen Gleichungen vorgestellt. Dieser in Kapitel 5.2.2 vorgestellte Ansatz berücksichtigt explizit radial nach außen propagierende Wellen zur Beschreibung der Abstrahlverluste. Diese Annahme erscheint auf den ersten Blick plausibel. Wie beim geraden Wellenleiter werden die Abstrahlverluste jedoch durch die Überlagerung von Strahlungsmoden beschrieben, d.h. der komplexe Poyntingsche Vektor des einzelnen Modes besitzt keine reelle radiale Komponente. Ein entsprechend modifizierter Ansatz wurde erstmalig von Morita und Yamada veröffentlicht [51]. Leider unterliegt dieser Arbeit ein Fehler in der Bestimmung des Modenspektrums, welcher von Kerndlmaier kurze Zeit später korrigiert wurde [31]. Sein Lösungsansatz und die wichtigsten abgeleiteten Ergebnisse werden in den Kapiteln 5.2.3 bis 5.2.5 vorgestellt. Da sich die Ergebnisse im Wesentlichen auf den Fall einer kleinen Anzahl geführter Moden beschränken, werden im Kapitel 5.2.6 Ergebnisse für multimodale Schichtwellenleiter präsentiert.

<sup>5</sup>In der englischsprachigen Literatur wird der Begriff *Leaky Mode* verwendet.

### 5.2.1. Überblick

Aus Sicht der geometrischen Optik erfolgt die Wellenführung im optischen Wellenleiter durch Totalreflexion an der Kern-Mantel Schnittstelle. Für nicht allzu starke Wellenleiterkrümmungen sind die erforderlichen Bedingungen für die Totalreflexion weiterhin in guter Näherung erfüllt, so dass ein Großteil der eingekoppelten Leistung nach Durchlaufen der Krümmung im Wellenleiterkern erhalten bleibt. Abbildung 5.5 zeigt den Übergang zweier um  $90^\circ$  verkippter gerader Wellenleiter, die durch einen zirkular gekrümmten Wellenleiterabschnitt mit mittlerem Radius  $R$  verbunden sind.

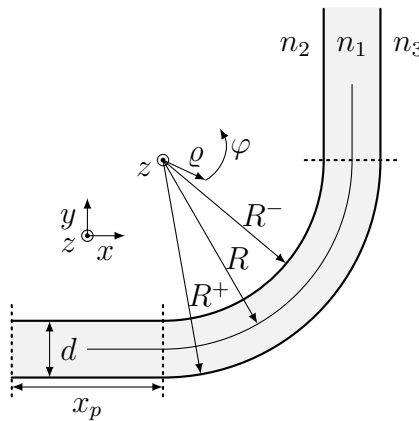


Abbildung 5.5.: Übergang zweier um  $90^\circ$  verkippter Wellenleiter.

Die Dicke des Schichtwellenleiterkerns ist gleich  $d$ , so dass ein innerer Radius  $R^- = R - d/2$  und ein äußerer Radius  $R^+ = R + d/2$  angegeben werden kann. Hinsichtlich der Brechzahlen gelten dieselben Annahmen wie zuvor in der Beschreibung der Moden des geraden Schichtwellenleiters, Kapitel 3.1.3. Ebenso wird wiederum nur der Fall transversalelektrischer Felder explizit betrachtet.

Es wird der Ansatz

$$\vec{E} = \vec{e}_z \underline{E}(\varrho, \varphi) = \vec{e}_z R(\varrho) \Phi(\varphi) \quad (5.30)$$

gewählt. Eingesetzt in die Helmholtz-Gleichung folgt

$$\frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial R}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \underbrace{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}}_{=-\nu^2} + k_i^2 = 0 \quad \text{mit} \quad k_i = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_i}. \quad (5.31)$$

Ansatz und Lösung sind analog zur Beschreibung der Moden der Faser in Kapitel 3.2, es liegt jedoch keine  $z$ -Abhängigkeit vor ( $k_z = 0$ ). Stattdessen erfolgt die Wellenausbreitung nun in  $\varphi$ -Richtung. Daher wird für  $\Phi$  ein Exponentialansatz gewählt

$$\Phi(\varphi) = \exp(\mp j\nu\varphi). \quad (5.32)$$

Darin ist  $\nu$  nun die Ausbreitungskonstante des Modes und nicht wie zuvor lediglich ein Zählindex. Für die Funktion  $R(\varrho)$  verbleibt wieder die Besselsche Differenzialgleichung mit

den Lösungen

$$\begin{aligned} R(\varrho) &= A_1 J_\nu(k_i \varrho) + A_2 N_\nu(k_i \varrho) \\ &= A_3 H_\nu^{(1)}(k_i \varrho) + A_4 H_\nu^{(2)}(k_i \varrho) . \end{aligned} \quad (5.33)$$

Da keine  $z$ -Abhängigkeit vorliegt, entfallen die modifizierten Besselfunktionen als Lösungsfunktionen. Es mag jedoch sinnvoll erscheinen Hankelfunktionen zu verwenden, da sich so leicht in radialer Richtung propagierende Wellen beschreiben lassen.

Die magnetische Feldstärke ergibt sich gemäß dem Induktionsgesetz zu

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left( (\mp j\nu) \vec{e}_\varrho \frac{R(\varrho)}{\varrho} - \vec{e}_\varphi \frac{\partial R(\varrho)}{\partial \varrho} \right) \exp(\mp j\nu\varphi) \quad (5.34)$$

und für den Poyntingschen Vektor folgt

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2\omega\mu} \left( (\pm\nu^*) \vec{e}_\varphi \frac{|R(\varrho)|^2}{\varrho} - j\vec{e}_\varrho R(\varrho) \frac{\partial R^*(\varrho)}{\partial \varrho} \right) \exp(\pm 2\Im(\nu - \nu^*)\varphi). \quad (5.35)$$

Es zeigt sich somit direkt, dass im Fall einer reellwertigen Funktion  $R(\varrho)$  der Poyntingvektor keine reelle Komponente in radialer Richtung besitzt.

### 5.2.2. Der Leckwellen-Ansatz

Die Annahme radial nach außen laufender Wellen zur Beschreibung der Abstrahlverluste ist physikalisch plausibel und gemäß der Abstrahlbedingung auch erforderlich [16]. Jedoch muss im Modenspektrum eines Wellenleiters nicht jeder einzelne Mode der Abstrahlbedingung genügen, sondern die resultierende Überlagerung aller Moden. In der vorhandenen Literatur wird dennoch oft ein Ansatz mit der Hankelfunktion  $H_\nu^{(2)}$  im Außenraum  $R^+ \leq \varrho$  zur Beschreibung der Abstrahlverluste gewählt [25, 40, 46]. Dieser Ansatz löst zwar die Maxwell'schen Gleichungen und führt zu einem diskreten Spektrum quasigeführter Moden mit komplexen Eigenwerten. Er führt jedoch nicht zum vollständigen Modenspektrum des zirkular gekrümmten Schichtwellenleiters. Es wird sich jedoch zeigen, dass der Leckwellen-Ansatz trotzdem eine sinnvolle Approximation darstellen kann.

Der Ansatz für die Funktion  $R(\varrho)$  lautet

$$R(\varrho) = a_\nu \begin{cases} J_\nu(k_2 \varrho) & , 0 \leq \varrho \leq R^- \\ A_{2\nu} J_\nu(k_1 \varrho) + A_{3\nu} N_\nu(k_1 \varrho) & , R^- \leq \varrho \leq R^+ \\ A_{4\nu} H_\nu^{(2)}(k_3 \varrho) & , R^+ \leq \varrho \end{cases} . \quad (5.36)$$

Darin entfallen im Innenraum  $\varrho \leq R^-$  die im Koordinatenursprung singulären Neumannfunktionen  $N_\nu$ . In den Grenzschichten  $\varrho = R^-$  und  $\varrho = R^+$  muss die tangential elektrische und magnetische Feldstärke stetig sein. Aus den resultierenden vier Gleichungen lässt sich ein überbestimmtes Gleichungssystem für die drei Koeffizienten  $A_{2\nu}$ ,  $A_{3\nu}$  und  $A_{4\nu}$  ableiten. Dieses Gleichungssystem ist nur dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der

Systemmatrix verschwindet. Dies ist der Fall, falls

$$\frac{k_2 J'_\nu(k_2 R^-) N_\nu(k_1 R^-) - k_1 J_\nu(k_2 R^-) N'_\nu(k_1 R^-)}{k_3 N_\nu(k_1 R^+) H_\nu^{(2)'}(k_3 R^+) - k_1 N'_\nu(k_1 R^+) H_\nu^{(2)}(k_3 R^+)} = \frac{k_1 J'_\nu(k_1 R^-) J_\nu(k_2 R^-) - k_2 J'_\nu(k_2 R^-) J_\nu(k_1 R^-)}{k_1 J'_\nu(k_1 R^+) H_\nu^{(2)}(k_3 R^+) - k_3 J_\nu(k_1 R^+) H_\nu^{(2)'}(k_3 R^+)} \quad (5.37)$$

gilt. Die Koeffizienten berechnen sich zu<sup>6</sup>

$$A_{2\nu} = \frac{\pi R^-}{2} (k_1 J_\nu(k_2 R^-) N'_\nu(k_1 R^-) - k_2 J'_\nu(k_2 R^-) N_\nu(k_1 R^-)), \quad (5.38)$$

$$A_{3\nu} = \frac{\pi R^-}{2} (k_2 J'_\nu(k_2 R^-) J_\nu(k_1 R^-) - k_1 J'_\nu(k_1 R^-) J_\nu(k_2 R^-)), \quad (5.39)$$

$$A_{4\nu} = \frac{A_2 J_\nu(k_1 R^+) + A_3 N_\nu(k_1 R^+)}{H_\nu^{(2)}(k_3 R^+)}. \quad (5.40)$$

Die Konstanten  $a_\nu$  bleiben als Amplituden der Moden zunächst unbestimmt.

Es sind also nur diskrete Eigenwerte  $\nu$  zulässig, die der Eigenwertgleichung (5.37) genügen. Die Lösung der Eigenwertgleichung ist durchaus anspruchsvoll, da die Eigenwerte komplexwertig sind. Der Imaginärteil ist die Dämpfungskonstante der Moden bezüglich der Ausbreitungsrichtung  $\varphi$ . Zur Lösung empfiehlt sich die in [49] präsentierte Vorgehensweise. Diese separiert zunächst die Lösungen in der komplexen Ebene. Aus der Funktionentheorie ist bekannt, dass sich die Phase einer Funktion  $f(\nu)$  beim Durchlauf einer geschlossenen Kontur  $\partial S$  um  $N2\pi$  ändert, falls sich innerhalb der geschlossenen Kontur  $N$  Nullstellen der Funktion  $f$  befinden. Es gilt

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial S} (\arg f(\nu)). \quad (5.41)$$

Die geschlossene Kontur wird dabei in mathematisch positiver Richtung durchlaufen. Sobald ein hinreichend kleines Gebiet mit nur einer Nullstelle isoliert worden ist, bieten sich Sekantenverfahren an, um die Lösung zu verbessern.

Im Vergleich zur Nullstellensuche auf der reellen Achse, wie es zuvor für die Bestimmung der reellen Eigenwerte der Moden des geraden Wellenleiters erforderlich war, erfordert die Entwicklung eines effizienten Löser zur Nullstellensuche in der komplexen Ebene deutlich mehr Implementierungsaufwand. Liegen Schätzwerte für die zu erwarteten Nullstellen vor, reduziert sich dieser Aufwand deutlich. Im vorliegenden Problem können aus den bekannten Eigenwerten des korrespondierenden geraden Wellenleiters Schätzwerte abgeleitet werden. Alternativ bietet sich die im folgenden Kapitel 5.2.3 präsentierte Vorgehensweise an.

## Orthogonalität und Leistung

Die Orthogonalität normaler Moden eines geraden Wellenleiters wird in der Literatur oft aufgezeigt, u.a. [46]. Es sei hier nur genannt, dass der Nachweis der Orthogonalität der

<sup>6</sup>Es gilt  $J_\nu(z) N'_\nu(z) - J'_\nu(z) N_\nu(z) = \frac{2}{\pi z}$ .

Moden des Leckwellen-Ansatzes analog geführt werden kann [25]. Aufgrund der komplexen Eigenwerte ist die Orthogonalität jedoch analog zu (2.62) definiert, d.h. ohne Konjugation der Feldgrößen.

Zur Bestimmung des Leistungsflusses im Mode  $\nu$  in Ausbreitungsrichtung wird die  $\varphi$ -Komponente des Poyntingvektors (5.35) über eine Fläche  $\varphi = \text{konstant}$  integriert:

$$\overline{P}'_\nu = \frac{\overline{P}_\nu}{\Delta z} = \frac{\Re\{\nu\}}{2\omega\mu} \exp(2\Im(\nu - \nu^*)\varphi) \int_0^\infty \frac{|R(\varrho)|^2}{\varrho} d\varrho. \quad (5.42)$$

Darin kennzeichnet  $\Delta z$  einen Längenabschnitt in  $z$ -Richtung. Die Integration kann analytisch durchgeführt werden [25], mit dem Ergebnis

$$\overline{P}'_\nu = \frac{|a_\nu A_{4\nu}|^2}{2\omega\mu|\Im(\nu)|\pi} \exp(|\Im(\nu)|\pi) \exp(2\Im(\nu - \nu^*)\varphi). \quad (5.43)$$

Der Imaginärteil des Eigenwerts  $\nu$  ist im Übrigen stets negativ.

### 5.2.3. Die Exakte Rechnung

Der Begriff *Exakte Rechnung* wurde von Kerndlmaier in seiner Dissertationsschrift geprägt [31]. Da sich seine Argumentation auf reelle Eigenwerte beschränkt, darf aus dem Hinweis auf eine exakte Rechnung nicht die Vollständigkeit des Lösungsraums abgeleitet werden. Die ausführlichen theoretischen Darstellungen von Kerndlmaier lassen jedoch darauf schließen, dass sich analog zur Theorie des geraden Wellenleiters alle wesentlichen Problemstellungen durch einen Ansatz mit rein reellen Eigenwerten lösen lassen. Als Beispiel seien die in dieser Arbeit betrachtete Übergänge zwischen geraden und gekrümmten Wellenleiterelementen genannt.

Die exakte Rechnung unterscheidet sich im Ansatz im Vergleich zu (5.36) bei der Beschreibung der Felder im Außenraum ( $\varrho > R^+$ ):

$$R(\varrho) = a_\nu \begin{cases} J_\nu(k_2\varrho) & , 0 \leq \varrho \leq R^- \\ A_{2\nu} J_\nu(k_1\varrho) + A_{3\nu} N_\nu(k_1\varrho) & , R^- \leq \varrho \leq R^+ \\ A_{4\nu} J_\nu(k_3\varrho) + A_{5\nu} N_\nu(k_3\varrho) & , R^+ \leq \varrho \end{cases} \quad (5.44)$$

Aus den zu erfüllenden Randbedingungen lassen sich wiederum vier Gleichungen ableiten, aus denen sich die vier Koeffizienten  $A_{2\nu}$  bis  $A_{5\nu}$  bestimmen lassen. Aufgrund der Äquivalenz zum Ansatz der Leckwellen (5.36) im Raum ( $\varrho < R^+$ ) bleiben die Konstanten  $A_{2\nu}$  und  $A_{3\nu}$  unverändert:

$$A_{2\nu} = \frac{\pi R^-}{2} (k_1 J_\nu(k_2 R^-) N'_\nu(k_1 R^-) - k_2 J'_\nu(k_2 R^-) N_\nu(k_1 R^-)), \quad (5.45)$$

$$A_{3\nu} = \frac{\pi R^-}{2} (k_2 J'_\nu(k_2 R^-) J_\nu(k_1 R^-) - k_1 J_\nu(k_2 R^-) J'_\nu(k_1 R^-)), \quad (5.46)$$

$$A_{4\nu} = \frac{\pi R^+}{2} \left( -k_1 N_\nu(k_3 R^+) (A_{2\nu} J'_\nu(k_1 R^+) + A_{3\nu} N'_\nu(k_1 R^+)) \right. \\ \left. + k_3 N'_\nu(k_3 R^+) (A_{2\nu} J_\nu(k_1 R^+) + A_{3\nu} N_\nu(k_1 R^+)) \right), \quad (5.47)$$

$$A_{5\nu} = \frac{\pi R^+}{2} \left( k_1 J_\nu(k_3 R^+) (A_{2\nu} J'_\nu(k_1 R^+) + A_{3\nu} N'_\nu(k_1 R^+)) \right. \\ \left. - k_3 J'_\nu(k_3 R^+) (A_{2\nu} J_\nu(k_1 R^+) + A_{3\nu} N_\nu(k_1 R^+)) \right). \quad (5.48)$$

Die Randbedingungen lassen sich somit für beliebige  $\nu$  erfüllen und folglich liegt ein vollständig kontinuierliches Modenspektrum vor. Wie oben erwähnt, wird angenommen, dass es ausreicht, rein reellwertige Lösungen zu berücksichtigen, analog zum kontinuierlichen Spektrum der Strahlungsmoden eines geraden Wellenleiters. Unter Zuhilfenahme der Beziehungen für Besselfunktionen im Anhang A.5.2 lässt sich im Fall  $A_{5\nu} = -jA_{4\nu}$  der Ansatz (5.44) in (5.36) überführen. Durch diese einschränkende Bedingung werden die diskreten komplexwertigen Eigenwerte des Leckwellen-Ansatzes erzwungen.

Die Moden des gekrümmten Schichtwellenleiters werden im Weiteren analog zu den Moden des geraden Wellenleiters (2.50) durch

$$\vec{E}_\nu(\vec{r}) = a_\nu \vec{\underline{E}}_\nu(\varrho) \exp(-j\nu\varphi), \quad (5.49a)$$

$$\vec{H}_\nu(\vec{r}) = a_\nu \vec{\underline{H}}_\nu(\varrho) \exp(-j\nu\varphi) \quad (5.49b)$$

beschrieben. Darin sind  $\vec{\underline{E}}$  und  $\vec{\underline{H}}$  die transversalen Modenfunktionen des gekrümmten Schichtwellenleiters. Die resultierenden Gesamtfeldstärken berechnen sich aus den Integralen über (5.49).

### Quasigeführte Moden

Im kontinuierlichen Modenspektrum existieren einige Lösungen, deren Felder sich auf den Wellenleiterkern konzentrieren. Dies ist der Fall, wenn gilt

$$A_{4\nu} = 0. \quad (5.50)$$

Aus der Anschauung lässt sich diese Gleichung wie folgt herleiten. Die Neumannfunktion  $N_\nu$  ist im Koordinatenursprung singulär und nimmt auch in der Ebene  $\varrho = R^+$  noch große negative Werte an, vgl. Abbildung A.4. Dahingegen nimmt die Besselfunktion  $J_\nu$  in diesem Bereich nur sehr kleine Werte an. Mit  $A_{4\nu} = 0$  folgt damit aus den Randbedingungen in  $\varrho = R^+$ , dass der Betrag von  $A_{5\nu}$  aufgrund des großen negativen Funktionswertes der Neumannfunktion ebenfalls nur sehr kleine Werte annehmen kann. Da der Betrag der Neumannfunktion mit wachsendem Argument schnell abnimmt, sind die Feldanteile im Außenbereich minimal.

### Nichtorthogonalität und Leistung

Das Konzept der *quasigeführten Moden* ist essentiell wichtig für die noch folgenden Betrachtungen dieser Arbeit. Die Beschreibungen aus [31] zur Nichtorthogonalität der Moden des gekrümmten Schichtwellenleiters liefern in diesem Rahmen wichtige Erkenntnisse und werden daher im Folgenden wiedergegeben.

Zur weiteren Charakterisierung des Modenspektrums empfiehlt sich eine Normierung der Feldstärken mit

$$a_\nu = \sqrt{\frac{2\omega\mu}{A_{4\nu}^2 + A_{5\nu}^2}}. \quad (5.51)$$

Die Moden des gekrümmten Schichtwellenleiters sind nichtorthogonal, d.h. es gilt

$$\overline{P}'_{\nu\xi} = \frac{\overline{P}_{\nu\xi}}{\Delta z} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \left( \vec{\mathcal{E}}_\nu \times \vec{\mathcal{H}}_\xi^* + \vec{\mathcal{E}}_\xi^* \times \vec{\mathcal{H}}_\nu \right)_\varphi d\varrho \neq 0 \quad \text{für } \nu \neq \xi. \quad (5.52)$$

Der im Vergleich zur Definition der Orthogonalität normaler Moden (2.63) abweichende Ansatz wird gewählt, da er im Folgenden zu einer symmetrischeren Darstellung führt. Das Integral in (5.52) kann analytisch gelöst werden [51], mit dem Ergebnis

$$\overline{P}'_{\nu\xi} = \frac{1}{\pi(\nu - \xi)} \Im \left\{ \frac{(A_{4\nu} + jA_{5\nu})}{\sqrt{A_{4\nu}^2 + A_{5\nu}^2}} \frac{(A_{4\xi} - jA_{5\xi})}{\sqrt{A_{4\xi}^2 + A_{5\xi}^2}} e^{j\frac{\pi}{2}(\nu - \xi)} \right\}. \quad (5.53)$$

Mit der Abkürzung  $\beta_\nu = \frac{A_{4\nu}}{A_{5\nu}}$  erhält man nach Bildung des Imaginärteils den Ausdruck

$$\overline{P}'_{\nu\xi} = \frac{1}{\pi(\nu - \xi)} \left( \frac{(\beta_\xi - \beta_\nu)}{\sqrt{(1 + \beta_\nu^2)(1 + \beta_\xi^2)}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\nu - \xi)\right) + \frac{1 + \beta_\nu\beta_\xi}{\sqrt{(1 + \beta_\nu^2)(1 + \beta_\xi^2)}} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\nu - \xi)\right) \right). \quad (5.54)$$

Dieser Ausdruck besitzt keine Singularitäten für  $\nu = \xi$ . Vielmehr gilt

$$\overline{P}'_{\nu\nu} = \overline{P}'_{\nu\xi} \Big|_{\nu \rightarrow \xi} = \frac{1}{\pi} \left( \lim_{\nu \rightarrow \xi} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(\nu - \xi))}{(\nu - \xi)} - \frac{1}{(1 + \beta_\nu^2)} \lim_{\nu \rightarrow \xi} \frac{(\beta_\nu - \beta_\xi)}{(\nu - \xi)} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi(1 + \beta_\nu^2)} \frac{d\beta_\nu}{d\nu}. \quad (5.55)$$

Werden nur quasigeführter Moden betrachtet gilt  $\beta_\nu = \beta_\xi = 0$  und somit

$$\overline{P}'_{\nu\xi} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(\nu - \xi))}{\pi(\nu - \xi)} \quad \text{falls } \nu \neq \xi, \quad (5.56)$$

sowie

$$\overline{P}'_{\nu\nu} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \frac{d\beta_\nu}{d\nu}. \quad (5.57)$$

Es wird sich noch zeigen, dass im Fall quasigeführter Moden  $\frac{d\beta_\nu}{d\nu}$  sehr große negative Werte annimmt. Folglich gilt

$$\overline{P}'_{\nu\nu} \gg \overline{P}'_{\nu\xi} \quad (5.58)$$

und die zugehörigen Moden können auch als quasiorthogonal angesehen werden, obwohl das Modenspektrum insgesamt nichtorthogonal ist. Der Ausdruck  $\overline{P}'_{\nu\nu}$  entspricht der im Mode geführten Leistung. Werden die Feldstärken an Stelle der Normierung (5.51) bzgl. der Leistung normiert, lässt sich aus (5.58) das Kriterium

$$1 \gg \frac{\overline{P}'_{\nu\xi}}{\sqrt{\overline{P}'_{\nu\nu} \overline{P}'_{\xi\xi}}}, \quad (5.59)$$

ableiten, welches zur Definition einer Quasi-Orthogonalität geeignet ist.

### Beschreibung physikalischer Felder

Wird der Übergang von einem geraden Wellenleiter in eine Krümmung betrachtet, Abbildung 5.5, müssen die tangentialen Feldgrößen in der Übergangsebene stetig sein. Sofern die Wellenleiterelemente identische Materialparameter besitzen, können Reflexionsverluste vernachlässigt werden, da diese erst bei sehr starken Krümmungen zu erwarten sind. Es reicht dann aus, die Randbedingung nur einer Feldstärke explizit zu berücksichtigen. Befindet sich die Übergangsebene in  $\varphi = 0$ , folgt für die tangentiale elektrische Feldstärke

$$\sum_{\mu} C_{\mu}^{(l)} \underline{\mathcal{E}}_{t\mu}^{(l)} = \int_{\nu} a_{\nu} \underline{\mathcal{E}}_{t\nu} d\nu. \quad (5.60)$$

Darin beschreibt die linksseitige Summation das Feld im geraden Wellenleiter. Eine vollkommen analoge Gleichung erhält man für die magnetische Feldstärke. Im Fall eines orthogonalen Modenspektrums lässt sich aus den Randbedingungen eine Gleichung der Form

$$\sum_{\mu} C_{\mu}^{(l)} \int \left( \underline{\mathcal{E}}_{t\mu}^{(l)} \times \underline{\mathcal{H}}_{t\xi}^* + \underline{\mathcal{E}}_{t\xi}^* \times \underline{\mathcal{H}}_{t\mu}^{(l)} \right)_{\varphi} d\varphi = \int_{\nu} a_{\nu} \int \left( \underline{\mathcal{E}}_{t\nu} \times \underline{\mathcal{H}}_{t\xi}^* + \underline{\mathcal{E}}_{t\xi}^* \times \underline{\mathcal{H}}_{t\nu} \right)_{\varphi} d\varphi d\nu \quad (5.61)$$

ableiten, wobei die rechtsseitige Integration nach  $\nu$  nur einen Beitrag für  $\nu = \xi$  liefern würde. Im Fall des nichtorthogonalen Modenspektrums verbleibt jedoch die Integralgleichung:

$$\sum_{\mu} C_{\mu}^{(l)} I_{\mu\xi} = \int_{\nu} a_{\nu} \overline{P}'_{\nu\xi} d\nu \quad (5.62)$$

mit

$$I_{\mu\xi} = \frac{1}{4} \int \left( \underline{\mathcal{E}}_{t\mu}^{(l)} \times \underline{\mathcal{H}}_{t\xi}^* + \underline{\mathcal{E}}_{t\xi}^* \times \underline{\mathcal{H}}_{t\mu}^{(l)} \right)_{\varphi} d\varphi. \quad (5.63)$$

Bei den Integralgleichungen (5.60) und (5.62) handelt es sich um Fredholmsche Integralgleichungen erster Art, die auch numerisch nur sehr schwer handhabbar sind. Es lassen sich jedoch Näherungslösungen finden, sofern angenommen werden kann, dass der Beitrag der quasigeführten Moden im Modenspektrum dominiert. In diesem Fall ist eine Linearisierung gemäß

$$\beta_{\nu} = -k \bar{\nu} \quad \text{mit} \quad \bar{\nu} = \nu - \nu_0 \quad \text{und} \quad -k = \left. \frac{d\beta_{\nu}}{d\nu} \right|_{\nu_0}. \quad (5.64)$$

möglich. Darin kennzeichnet  $\nu_0$  einen quasigeführten Mode. Im Rahmen dieser Näherung wird aus (5.54):

$$\overline{P}'_{\nu\xi} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{k}{\sqrt{(1+k^2 \bar{\nu}^2)(1+k^2 \bar{\xi}^2)}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\bar{\nu} - \bar{\xi})\right) + \frac{1+k^2 \bar{\nu} \bar{\xi}}{\sqrt{(1+k^2 \bar{\nu}^2)(1+k^2 \bar{\xi}^2)}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(\bar{\nu} - \bar{\xi})\right)}{\bar{\nu} - \bar{\xi}} \right). \quad (5.65)$$

Verwendet man diesen Integralkern in der Integralgleichung (5.62), lässt sich mit Hilfe des Residuensatzes zeigen, dass die Wurzel einer Lorentzverteilung ( $\sqrt{\text{Lorentz-Verteilung}}$ )

$$a_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2 \bar{\nu}^2}} \quad \text{mit} \quad k > 0 \quad (5.66)$$



Eigenlösung der Integralgleichung ist. Es gilt also

$$\int_{\nu} \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \bar{\nu}^2}} \bar{P}'_{\nu\xi} d\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \bar{\xi}^2}}. \quad (5.67)$$

Die Bedingung  $k > 0$  ist im Übrigen für alle quasigeführten Moden, anders als in [31] angemerkt, immer erfüllt.

Abschließend soll nun das Übertragungsverhalten des gekrümmten Wellenleiters untersucht werden. Dazu wird die Vorstellung der Ankopplung durch einen geraden Wellenleiter für den Moment fallen gelassen<sup>7</sup> und es wird angenommen, dass die Feldverteilung im Wellenleiter durch eine  $\sqrt{\text{Lorentz}}$ -Verteilung bestimmt sei. Es gilt

$$\vec{E}(\varrho, \varphi) = \int_{\nu} a_{\nu} \vec{E}_{t\nu}(\varrho) \exp(-j\nu\varphi) d\nu \quad \text{mit} \quad a_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \bar{\nu}^2}}. \quad (5.68)$$

Ein analoger Ausdruck lässt sich für die magnetische Feldstärke formulieren. Zu beachten ist, dass die Feldgrößen gemäß (5.51) normiert sind. Die Fragestellung ist nun, wie stark das durch  $\vec{E}(\varrho, 0)$  gegebene Eingangsfeld nach Durchlaufen einer Krümmung um den Winkel  $\varphi$  verändert wird. Dazu wird mit Hilfe des folgenden Skalarprodukts der Überlapp zwischen Eingangsfeld und Ausgangsfeld bestimmt:

$$B(\varphi) = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \left( \vec{E}(\varrho, 0) \times \vec{H}^*(\varrho, \varphi) + \vec{E}^*(\varrho, \varphi) \times \vec{H}(\varrho, 0) \right)_{\varphi} d\varrho. \quad (5.69)$$

Es folgt mit (5.68) und (5.52)

$$B(\varphi) = \int_{\xi} a_{\xi}^* \left( \int_{\nu} a_{\nu} \bar{P}'_{\nu\xi} d\nu \right) \exp(j\xi\varphi) d\xi \quad (5.70)$$

und mit (5.67) schließlich

$$B(\varphi) = \int_{\xi} \frac{1}{1 + k^2 \bar{\xi}^2} \exp(j\xi\varphi) d\xi. \quad (5.71)$$

Sofern die Integration von der reellen Achse auf die geschlossene Kontur der oberen Halbebene ausgedehnt wird, lässt sich das Integral mit Hilfe des Residuensatzes lösen:

$$\frac{B(\varphi)}{B(0)} = \frac{1}{\pi k} \oint_{\substack{\text{obere} \\ \text{Halbebene}}} \frac{\exp(j\xi\varphi)}{(\bar{\xi} - j/k)(\bar{\xi} + j/k)} d\xi = \exp(-\varphi/k) \quad (5.72)$$

mit

$$B(0) = \int_{\xi} \frac{1}{1 + k^2 \bar{\xi}^2} d\xi = \frac{\pi}{k}. \quad (5.73)$$

Es zeigt sich also, dass im Fall  $k \gg \varphi$  die initiale Feldverteilung (5.68) auch nach Durchlaufen der Krümmung in sehr guter Näherung erhalten bleibt. Sofern nun sicher gestellt

<sup>7</sup>An dieser Stelle unterscheidet sich die Interpretation etwas von [31], nicht jedoch die mathematische Beschreibung.

ist, dass sich beim Übergang vom geraden Wellenleiter Feldverteilungen einstellen, die sich durch eine oder mehrere  $\sqrt{\text{Lorentz}}$ -Verteilungen beschreiben lassen, dann liegt eine Feldlösung vor, die die Wellenausbreitung im gekrümmten Schichtwellenleiter in sehr guter Näherung korrekt beschreibt.

Das Arbeiten mit einem kontinuierlichen Spektrum ist jedoch nach wie vor dahingehend anspruchsvoll, als dass für jeden Punkt in der Übergangsschnittstelle ein Integral gelöst werden muss. Für große  $k$  ist die  $\sqrt{\text{Lorentz}}$ -Verteilung sehr schmalbandig und es scheint gerechtfertigt, die Breite des Spektrums als hinreichend klein anzunehmen, so dass explizit nur das Feld des diskreten quasigeführten Mode zu berücksichtigen ist. Für kleine  $k$  stellt diese Vorgehensweise nur eine grobe Näherung dar. Verwendet man jedoch den Wert  $\alpha = \frac{1}{k}$  als Dämpfungskonstante des quasigeführten Modes, ergeben sich für kleine  $k$  schnell sehr große Dämpfungswerte. Bevor diese Argumentation im Kapitel 5.2.5 fortgesetzt wird, soll zunächst der Vergleich zum Leckwellen-Ansatz gezogen werden.

#### 5.2.4. Vergleich der Ansätze

Mit den Lösungen des Leckwellen-Ansatzes und den quasigeführten Moden des exakten Ansatzes existieren zwei unterschiedliche Feldlösungen, von denen erwartet wird, dass sie die Wellenausbreitung im gekrümmtem Schichtwellenleiter für nicht allzu starke Krümmungen hinreichend genau beschreiben. Sofern dies der Fall ist, müssen die Ansätze entweder zumindest näherungsweise übereinstimmen oder auseinander hervorgehen. Zur Erinnerung sei erwähnt, dass die Eigenwerte der quasigeführten Moden des exakten Ansatzes aus

$$A_{4\nu} = 0 \quad (5.74)$$

hervorgehen, die Moden des Leckwellen-Ansatzes jedoch aus

$$A_{4\nu} = jA_{5\nu}. \quad (5.75)$$

Darin sind  $A_{4\nu}$  und  $A_{5\nu}$  durch (5.47) und (5.48) gegeben. Ein allgemeiner analytischer Nachweis der Äquivalenz beider Ansätze durch eine Abschätzung der Ausdrücke in den jeweiligen Eigenwertgleichungen ist unter Umständen möglich, jedoch sehr aufwändig. Da Implementierungen beider Ansätze vorliegen, bietet sich ein expliziter Vergleich anhand praktischer Beispiele an. Für nahezu alle Parametersätze dieser Arbeit wurden beide Eigenwertgleichungen gelöst und die folgenden Aussagen können daher als allgemein gültig angenommen werden. Aus Platzgründen werden nur die Ergebnisse für einen Wellenleiter angegeben, der im geraden Fall ( $R \rightarrow \infty$ ) sechs Moden führt. Die Parameter lauten:  $n_1 = 1,57$ ,  $n_2 = n_3 = 1,55$ ,  $d = 10 \mu\text{m}$ ,  $R = 3 \text{ mm}$  und  $\lambda = 850 \text{ nm}$ .

In der Tabelle 5.1 sind die Eigenwerte  $\nu_e$  des exakten Ansatzes und der Real- und Imaginärteil der komplexen Eigenwerte  $\nu_l$  des Leckwellen-Ansatzes aufgeführt. Der Imaginärteil von  $\nu_l$  ist das Dämpfungsmaß der Leckwellen und korrespondiert mit  $\alpha = \frac{1}{k}$  aus der exakten Rechnung. Die Ergebnisse in Tabelle 5.1 zeigen eine weitestgehende Übereinstimmung der beiden Ansätze auf. So stimmt für die ersten fünf Moden der Realteil von  $\nu_l$  innerhalb des dargestellten Bereichs mit  $\nu_e$  überein und weicht erst für den sechsten Mode leicht ab. Der Imaginärteil von  $\nu_l$  ist für die ersten vier Moden derart klein, dass er zum Einen

| Mode | $\nu_e$  | $\Re\{\nu_l\}$ | $-\alpha$  | $\Im\{\nu_l\}$ |
|------|----------|----------------|------------|----------------|
| 1    | 34820,05 | 34820,05       | -6,199e-34 | –              |
| 2    | 34772,80 | 34772,80       | -6,427e-28 | –              |
| 3    | 34720,68 | 34720,68       | -1,284e-21 | –              |
| 4    | 34650,55 | 34650,55       | -4,565e-14 | –              |
| 5    | 34561,82 | 34561,82       | -2,961e-6  | -2,957e-6      |
| 6    | 34460,38 | 34460,58       | -1,308     | -1,263         |

Tabelle 5.1.: Eigenwerte und Dämpfungskonstanten der quasigeführten Moden ( $\nu_e$  und  $\alpha$ ), sowie der Moden des Leckwellen-Ansatzes ( $\nu_l$ ).

Es gilt:  $n_1 = 1,57$ ,  $n_2 = n_3 = 1,55$ ,  $d = 10 \mu\text{m}$ ,  $R = 3 \text{ mm}$  und  $\lambda = 850 \text{ nm}$ .

vernachlässigt werden kann und des Weiteren ohnehin nicht mit einem elementaren Sekantenverfahren bei doppelter Genauigkeit ( $\sim 15$  Dezimalstellen) aufgelöst werden kann. Für den fünften Mode stellt sich immer noch ein sehr kleines Dämpfungsmaß ein. Der sechste Mode wird schließlich so stark gedämpft, dass bei Anregung dieses Modes nach einer  $90^\circ$ -Krümmung weniger als 2 % der Leistung verbleibt. Die Werte für  $-\alpha$  und  $\Im\{\nu_l\}$  stimmen dabei in drei (5. Mode) bzw. in zwei (6. Mode) Stellen überein. Dabei zeigt sich, dass die quasigeführten Moden der exakten Rechnung die Dämpfung immer etwas größer abschätzen als die Leckwellen.

Wie sich diese Unterschiede auf die Feldgrößen auswirken, ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Die Feldgrößen sind bezüglich der im Mode geführten Leistung normiert. Skizziert sind die Graphen der quasigeführten Moden  $\vec{\underline{E}}_t(\varrho)$  gemäß (5.49), der Real- und Imaginärteil der korrespondierenden Leckwellen sowie im Vergleich dazu der Mode eines geraden Wellenleiters  $\vec{\underline{E}}_t(\varrho)$  gegeben durch (3.14). Wie erwartet sind die Unterschiede zwischen den Ansätzen gering. Für den fünften Mode liegen die Unterschiede unterhalb der darstellbaren Genauigkeit. Der Imaginärteil aus dem Leckwellen-Ansatz ist vernachlässigbar klein und der Überlapp mit dem korrespondierenden Mode des geraden Wellenleiters ist relativ groß. Merkliche Unterschiede gibt es jedoch beim sechsten Mode, bei dem der Leckwellen-Ansatz einen deutlichen Imaginärteil ausbildet und sich entsprechend Unterschiede beim Realteil ergeben. Da beim Leckwellen-Ansatz das Feld im Außenraum durch eine Hankelfunktion beschrieben wird, ist der Betrag in diesem Fall eine monoton abklingende Funktion, im Gegensatz zur exakten Rechnung, bei der das Feld im Außenraum durch eine Neumannfunktion beschrieben wird. Ein Großteil der Leistung wird außerhalb des Kerns geführt und somit verringert sich die Amplitude im Kern und damit auch der Überlapp mit dem Mode des geraden Wellenleiters. Insgesamt sind die Unterschiede zwischen den beiden Ansätzen jedoch in der Regel vernachlässigbar, da signifikante Unterschiede erst auftreten, wenn die Dämpfungskonstante große Werte annimmt, so dass der Mode nach Durchlaufen einer hinreichend großen Bogenlänge nahezu keine Leistung mehr führt. Da der Aufwand zur Bestimmung der quasigeführten Moden nach der exakten Rechnung aufgrund der rein reellen Eigenwerte deutlich geringer ist als nach dem Leckwellen-Ansatz, ist dieser Ansatz vorzuziehen. Die zur Bestimmung der Dämpfungskonstanten  $\alpha = \frac{1}{k}$  durchzuführende

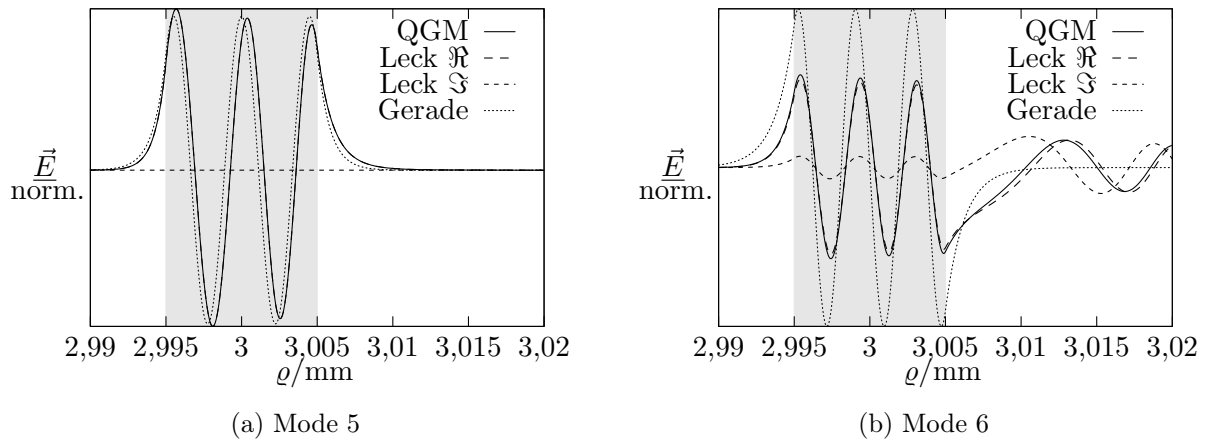


Abbildung 5.6.: Gegenüberstellung der elektrischen Feldstärke des 5. und 6. Modes: Quasi-geführter Moden (QGM), Real- und Imaginärteil des Leckwellen-Ansatzes (Leck  $\Re$  und Leck  $\Im$ ) und die Moden des geraden Wellenleiters (Gerade). Es gilt:  $n_1 = 1,57$ ,  $n_2 = n_3 = 1,55$ ,  $d = 10 \mu\text{m}$ ,  $R = 3 \text{ mm}$  und  $\lambda = 850 \text{ nm}$ . Der Wellenleiterkern ist grau hinterlegt.

Differenziation ist numerisch problemlos möglich.

### 5.2.5. Rechnung auf Basis quasigeführter Moden

Die vorangegangenen Erläuterungen haben aufgezeigt, dass eine Rechnung unter ausschließlicher Verwendung der quasigeführten Moden eine einfache und effektive Methode zur Beschreibung der Wellenausbreitung im gekrümmten Schichtwellenleiter ist, solange die Verluste durch Abstrahlung vernachlässigbar sind. Vorausgesetzt wird an dieser Stelle, dass beim Übergang vom geraden Wellenleiter vornehmlich quasigeführte Moden angeregt werden. Zunächst soll anhand der Parameter aus Tabelle 5.1 begründet werden, warum die Annahme eines diskreten Spektrums quasigeführten Moden gerechtfertigt ist. Da der Wert  $2/k = 2\alpha$  die Halbwertsbreite der Lorentz-Verteilung repräsentiert, liegt gemäß Tabelle 5.1 die Halbwertsbreite der ersten fünf Moden im Vergleich zum gegenseitigen Abstand der Eigenwerte in einem vernachlässigbar kleinen Bereich. Lediglich für den bereits stark gedämpften sechsten Mode stellt sich eine verbreiterte Verteilung ein, die sich jedoch immer noch stark um den Quasi-Eigenwert konzentriert. Da sich dieses Ergebnis sowohl auf Wellenleiter mit größerem Querschnitt und damit einer größeren Anzahl quasigeführter Moden als auch auf größere Krümmungsradien und somit weniger quasigeführte Moden übertragen lässt, erscheint es gerechtfertigt, einen Ansatz mit ausschließlich diskreten quasigeführten Moden zu wählen. Dieser formuliert sich für die Gewichtsfunktion  $a_\nu$  unter Verwendung der Dirac-Distribution zu

$$a_\nu = \sum_n C_n \exp(-\alpha_n \varphi) \delta(\nu - \nu_n). \quad (5.76)$$

Darin kennzeichnet  $C_n$  die Amplitude,  $\nu_n$  den Eigenwert und  $\alpha_n$  die Dämpfungskonstante eines quasigeführten Modes. Unter dieser Annahme lässt sich das Feld im gekrümmten

Wellenleiter durch

$$\vec{E}(\varrho, \varphi) = \int_{\nu} a_{\nu} \vec{E}_{t\nu}(\varrho) \exp(-j\nu\varphi) d\nu = \sum_n C_n \vec{E}_{\nu n}(\varrho) \exp(-j(\nu_n - j\alpha_n)\varphi) \quad (5.77)$$

beschreiben. Bevor auf dieser Basis die Ankopplung an gerade Wellenleiterelemente gemäß Abbildung 5.5 untersucht wird, sollen einige in dieser Hinsicht wichtige Eigenschaften des Spektrums der quasigeführten Moden hervorgehoben werden.

### Eigenschaften des Spektrums quasigeführter Moden

Der Abbildung 5.6 kann leicht die irrtümliche Annahme entnommen werden, dass der Überlapp zwischen einem quasigeführten Mode und dem korrespondierenden Mode eines geraden Wellenleiters immer dann groß ist, wenn das Dämpfungsmaß  $\alpha = 1/k$  hinreichend kleine Werte annimmt. Dass dies nicht der Fall ist, zeigt exemplarisch Abbildung 5.7a für den Grundmode eines Wellenleiters der Schichtdicke  $d = 50 \mu\text{m}$  bei gleichen Materialparametern wie zuvor. Bei einem Krümmungsradius von  $R = 3 \text{ mm}$  existieren 16 quasigeführte Moden im gekrümmten Wellenleiter gegenüber 30 Moden im geraden Wellenleiter. Dabei werden nur die Lösungen der Eigenwertgleichung (5.50) berücksichtigt, deren Feldamplitude im Kern größer ist als im Außenraum, vgl. Abbildung 5.6b. Abbildung 5.7a zeigt einen relativ geringen Überlapp zwischen den Feldbildern auf. Diese Tendenz ist gerade beim Grundmode im multimodalen Wellenleiter besonders ausgeprägt. Erst mit sehr großen Radien gehen die Modenfunktionen der quasigeführten Moden über in das korrespondierende Modenspektrum eines geraden Wellenleiters [31]. Damit werden auch bei schwachen Krümmungsverlusten stets mehrere quasigeführte Moden angeregt. Zum Vergleich ist in Abbildung 5.7b der Mode eines Singlemode-Wellenleiters mit gleicher numerischer Apertur und gleichem Krümmungsradius aufgetragen.

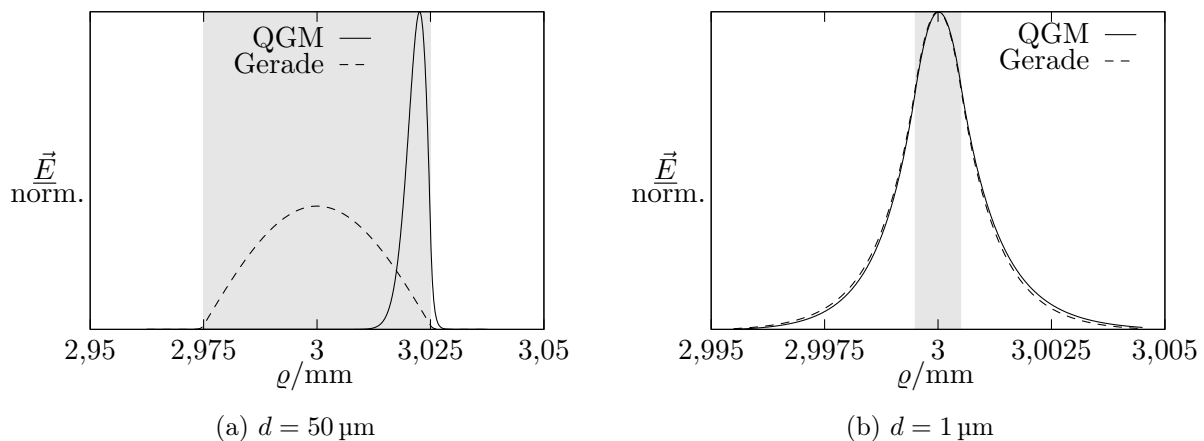


Abbildung 5.7.: Vergleich der elektrischen Feldstärke des jeweils 1. Moden der quasigeführten Moden (QGM) und der Moden des geraden Wellenleiters (Gerade).

Es gilt:  $n_1 = 1,57$ ,  $n_2 = n_3 = 1,55$ ,  $R = 3 \text{ mm}$  und  $\lambda = 850 \text{ nm}$ .

Der Wellenleiterkern ist grau hinterlegt.

Der Zusammenhang zum geraden Wellenleiter lässt sich über die Eigenwerte wie folgt herstellen. Unter der Annahme, dass die Wegstrecke  $z$  im geraden Wellenleiter der Bogenlänge  $R\varphi$  im gekrümmten Wellenleiter entspricht, gilt

$$\exp(-jk_z z) \approx \exp(-jk_z R\varphi) \quad \Rightarrow \quad \nu \approx k_z R. \quad (5.78)$$

Darin ist  $k_z$  ein Eigenwert des geraden Wellenleiters. Hierbei handelt es sich insbesondere für kleine Krümmungsradien nur um eine grobe Abschätzung, aus der jedoch der erwartete Wertebereich der Eigenwerte  $\nu$  abgeschätzt werden kann, vgl. (3.4):

$$k_0 n_2 < k_z < k_0 n_1 \quad \Rightarrow \quad k_0 n_2 R^- < \nu < k_0 n_1 R^+. \quad (5.79)$$

Diese Abschätzung ist für die Implementierung eines Löser der Eigenwertgleichungen (5.37) und (5.50) erforderlich, wobei sich gezeigt hat, dass für den Grundmode vereinzelt Lösungen mit  $k_0 n_1 R^+ < \nu$  auftreten. Die Eigenwerte sind näherungsweise proportional zum Krümmungsradius. Da der Eigenwert auch gleichzeitig der Ordnung der Besselfunktionen entspricht, ist ein großer Krümmungsradius problematisch hinsichtlich der Implementierung eines stabilen Algorithmus, da die Neumannfunktion insbesondere für große Ordnungen bei kleinem Argument Zahlenbereichsüberläufe provozieren kann, vgl. Abbildung A.4b.

Die Proportionalität der Eigenwerte  $\nu$  zum Krümmungsradius ist auch mit Blick auf den Abstand der Eigenwerte zueinander interessant. Betrachtet man zunächst wieder einen konstanten Krümmungsradius, so stellt sich ab einer bestimmten Schichtdicke eine konstante Anzahl quasigeführter Moden ein, z.B. existieren für  $R = 3 \text{ mm}$  ab einer Schichtdicke von ca.  $d = 40 \text{ }\mu\text{m}$  stets 16 quasigeführte Moden<sup>8</sup>. Ebenfalls konstant bleibt der Abstand der Eigenwerte zueinander. Das Modenspektrum verschiebt sich jedoch mit wachsender Schichtdicke insgesamt etwas in Richtung größerer Eigenwerte<sup>9</sup>, wodurch sich die transversale Feldverteilung der Moden ebenfalls leicht in Richtung des äußeren Rands verschiebt. Dieser Umstand und die Tatsache, dass die Anzahl der quasigeführten Moden nicht zunimmt, führt bei konstantem Krümmungsradius und wachsender Schichtdicke zu stärkeren Abstrahlungsverlusten. Um die Verluste zu minimieren, muss der Krümmungsradius proportional zur Schichtdicke wachsen. Da die Eigenwerte ebenfalls proportional zum Krümmungsradius wachsen, wird der Abstand der Eigenwerte zueinander größer. Dieser Abstand ist entscheidend für den Gültigkeitsbereich der (Quasi)-Orthogonalität der quasigeführten Moden, da die Differenz der Eigenwerte als Argument in der Si-Funktion auftritt, (5.56), welche den Überlapp zwischen den unterschiedlichen Moden beschreibt. Ein hinreichend großer Abstand ist Voraussetzung für die Beziehung (5.59), um auch im Fall kleiner  $k$  in guter Näherung erfüllt zu sein. Für das oben genannte Zahlenbeispiel nimmt die minimale Differenz benachbarter Eigenwerte etwa den Wert 20 an. Das Kriterium (5.59) ist damit auch für zwei Moden mit sehr kleinem  $k$  in guter Näherung erfüllt und die Annahme der Quasi-Orthogonalität ist damit gerechtfertigt.

<sup>8</sup>Es wurde eine maximale Schichtdicke  $d = 85 \text{ }\mu\text{m}$  berücksichtigt. Materialparameter wie zuvor  $n_1 = 1,57$  und  $n_2 = 1,55$ .

<sup>9</sup>Aufgrund dieser Verschiebung ist zu erwarten, dass bei deutlich größeren Schichtdicken die Anzahl der Eigenwerte wieder leicht zunimmt.

### Ein- und Auskopplung

Da das Spektrum der quasigeführten Moden in keinem Fall ein vollständiges Modenspektrum beschreibt, lassen sich unter ausschließlicher Berücksichtigung quasigeführter Moden die Randbedingungen in den Schnittstellen zu den geraden Wellenleiterelementen im Allgemeinen nicht erfüllen. Dennoch lassen sich aus den abgeleiteten Gleichungen (5.60) oder (5.62) die Amplituden der quasigeführten Moden bestimmen<sup>10</sup>. Aus (5.62) folgt mit (5.76) unmittelbar

$$\sum_{\mu} C_{\mu}^{(l)} I_{\mu\xi} = \sum_{\nu} C_{\nu}^{(b)} \bar{P}_{\nu\xi}'^{(b)}. \quad (5.80)$$

Darin kennzeichnen  $\nu$  und  $\xi$  nun ausschließlich quasigeführte Moden, so dass der Index  $n$  aus (5.76) nicht mehr dargestellt wird. Der umklammerte Index  $b$  kennzeichnet den Mode des gekrümmten Wellenleiters analog zu den Indices  $l$  und  $r$  für die geraden Ein- und Auskoppelwellenleiter. Unter Annahme der Quasi-Orthogonalität (5.59) folgt aus (5.80)

$$C_{\nu}^{(b)} \approx \frac{1}{\bar{P}_{\nu\nu}'^{(b)}} \sum_{\mu} C_{\mu}^{(l)} I_{\mu\nu} \quad (5.81)$$

und somit ein expliziter Ausdruck zur Berechnung der Amplituden  $C_{\nu}^{(b)}$ . Einen analogen, aber hinsichtlich der Implementierung effizienteren Ausdruck erhält man aus (5.60)

$$C_{\nu}^{(b)} \approx \frac{1}{2\bar{P}_{\nu\nu}'^{(b)}} \int_0^{\infty} \left[ \left( \sum_{\mu} C_{\mu}^{(l)} \underline{\mathcal{E}}_{t\mu}^{(l)} \right) \times \underline{\mathcal{H}}_{t\nu} \right]_{\varphi} d\varphi. \quad (5.82)$$

Hier wird explizit nur die Randbedingung der elektrischen Feldstärke berücksichtigt. Um die Anzahl der Integrationen zu reduzieren, wird die Summation über die Moden des geraden Wellenleiters bereits im Integranden durchgeführt.

Analog ergibt sich mit der elektrischen Feldstärke (5.77) nach Durchlaufen einer Krümmung um den Winkel  $\varphi_0$  für den erneuten Übergang in einen geraden Wellenleiter

$$C_{\mu}^{(r)} \approx \frac{1}{2\bar{P}_{\mu\mu}'^{(r)}} \int_0^{\infty} \left[ \left( \sum_{\nu} C_{\nu}^{(b)} \exp(-j(\nu - j\alpha_{\nu})\varphi_0) \underline{\mathcal{E}}_{t\nu} \right) \times \underline{\mathcal{H}}_{t\mu}^{(r)} \right]_{\varphi} d\varphi. \quad (5.83)$$

Darin ist  $\bar{P}_{\mu\mu}'^{(r)}$  die normierte Leistung pro Mode des geraden Wellenleiters, definiert durch (3.23), bezogen auf einen Längenabschnitt  $\Delta z$ . Die im Vergleich zu dem im Kapitel 3.1.3 angesetzten Koordinatensystem erforderliche Koordinatentransformation zur Beschreibung der Felder im Ein- und Auskoppelwellenleiter wird im Übrigen implizit vorausgesetzt.

Gänzlich unberücksichtigt blieb bislang die Frage, ob die Felddarstellung auf Basis quasigeführter Moden dahingehend hinreichend ist, dass die Anbindung an gerade Wellenleiter tatsächlich korrekt beschrieben wird, siehe Abbildung 5.5. Unabhängig von möglichen Verlusten durch Abstrahlung gilt es, ausgehend vom einfallenden Feld beschrieben durch geführte Moden des Einkoppelwellenleiters, die Anregung der geführten Moden des geraden

<sup>10</sup>Siehe auch Kapitel 4.5.1.

Auskoppelwellenleiters zu bestimmen. D.h. in den Beziehungen (5.82) und (5.83) werden nur geführte Moden des geraden Wellenleiters verwendet. Diese Vorgehensweise wird im Folgenden als QGM-Methode (Quasi-Geführte-Moden-Methode) bezeichnet.

Zur Validierung wird die Wellenausbreitung in zwei Wellenleitern mit unterschiedlichen Krümmungsradien modelliert und mit den Ergebnissen einer numerischen Simulation verglichen. Einmalig abweichend vom bisherigen Standard beträgt die Wellenlänge  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$  und die Kernbrechzahl  $n_1 = 1,1$ . Die Schichtdicke der Wellenleiter ist gleich  $d = 20 \mu\text{m}$  und die Mantelbrechzahlen sind mit  $n_2 = n_3 = 1,0$  die des freien Raums. Die Parameter verstehen sich als akademisches Beispiel und wurden so gewählt, dass mit den Krümmungsradien  $R = 250 \mu\text{m}$  und  $R = 125 \mu\text{m}$  eine numerische Simulation in einem angemessenem Zeitraum möglich ist. Diese Simulationen wurden mit Hilfe der Software CST MICROWAVE STUDIO® durchgeführt<sup>11</sup>. Die Rechenzeiten sind systemabhängig und bewegen sich für  $R = 250 \mu\text{m}$  in der Größenordnung von mehreren zehn Stunden<sup>12</sup>. Dagegen sind die Rechenzeiten der wellentheoretischen Approximation auf Basis quasigeführter Moden vernachlässigbar klein. Die numerische Simulation erfordert darüber hinaus mehrere zehn Gigabyte Arbeitsspeicher. Des Weiteren wurden die Krümmungsradien dahingehend gewählt, dass im ersten Fall nahezu keine Abstrahlung auftritt und im zweiten Fall bereits ein Großteil der eingehenden Leistung abgestrahlt wird. Angeregt wird im geraden Einkoppelwellenleiter, der 12 geführte Moden besitzt, nur der Grundmode. Im gekrümmten Wellenleiter existieren 10 bzw. 6 quasigeführte Moden, wobei der jeweils letzte Mode nach einer 90°-Krümmung bereits fast vollständig abgedämpft wird.

Abbildung 5.8 zeigt die Simulationsergebnisse der QGM-Methode in Form des Betrags der elektrischen Feldstärke in der Einkoppelebene  $\varphi = 0$  und in der Auskoppelebene  $\varphi = \pi/2$ . Zur Kontrolle der Randbedingungen ist jeweils das Feld im geraden und im gekrümmten Wellenleiter abgebildet. Zusätzlich ist für die Auskoppelebene das Feldeergebnis der numerischen Simulation dargestellt. Abbildung 5.8a verdeutlicht, dass im Fall eines hinreichend großen Krümmungsradius die Randbedingungen in  $\varphi = 0$  in guter Näherung erfüllt sind. Im direkten Vergleich dazu zeigt Abbildung 5.8c, dass schon bei der Beschreibung der Einkopplung in den gekrümmten Wellenleiter gravierende Abweichungen auftreten können. Es sei jedoch betont, dass diese Unterschiede in der Feldverteilung noch kein K.O.-Kriterium für die QGM-Methode bedeuten, denn diese nimmt an, dass die Leistung, die nicht in quasigeführte Moden eingekoppelt wird, während des Durchlaufs der Krümmung abgestrahlt wird. Dass diese Annahme nicht unbegründet ist, zeigt Abbildung 5.8d, in der das Feld in der Auskoppelebene dargestellt ist. Der Überlapp zwischen den Feldlösungen der QGM-Methode im gekrümmten Wellenleiter und im geraden Auskoppelwellenleiter ist deutlich größer. Merkliche Abweichungen gibt es nur im Bereich außerhalb des Wellenleiterkerns. Allerdings existieren noch deutliche Unterschiede im Vergleich zum Ergebnis der numerischen Simulation. Diese betreffen die lokalen Maxima innerhalb und außerhalb

<sup>11</sup>Die Simulationen wurden in Zusammenarbeit mit Herrn Dipl.-Ing. Bastian Bandlow durchgeführt. Verwendet wurde CST MICROWAVE STUDIO® in der Version MWS2009. Simulationemethode war die Finite Integration im Zeitbereich. Bei einer minimalen Auflösung von 20 Gitterlinien pro Wellenlänge resultierten für  $R = 250 \mu\text{m}$  insgesamt  $8053 \times 8053 \times 2$  Gitterpunkte. Für die seitliche Berandung wurde ein offener Rand (PML) gewählt.

<sup>12</sup>Diese Angabe bezieht sich auf Rechner mit z.B. 2×2,4 GHz Prozessoren und 128 GB Arbeitsspeicher.



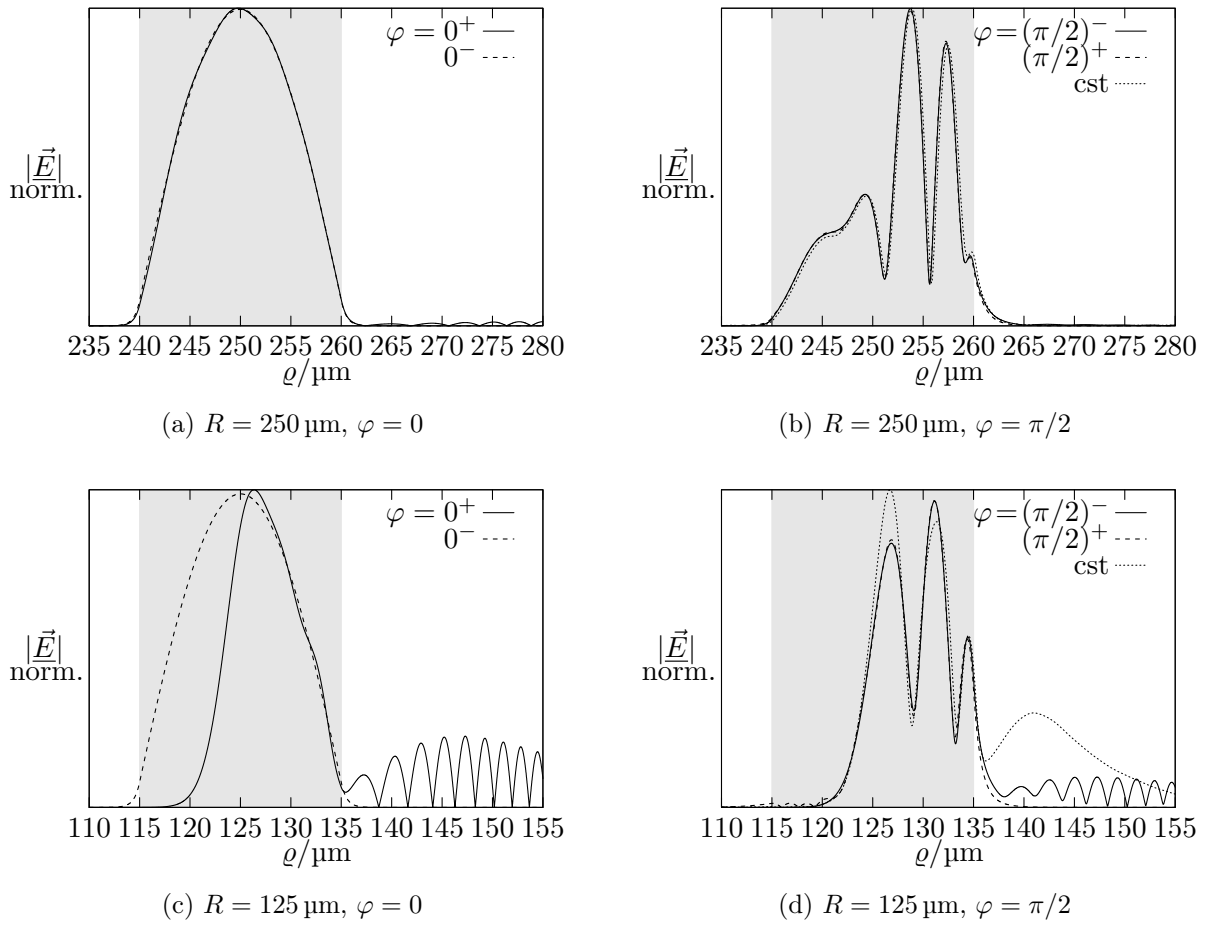


Abbildung 5.8.: Betrag der elektrischen Feldstärke in den Ebenen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi/2$ . Zur Validierung der QGM-Methode wird durch den oberen Index  $(-/+)$  das Feld vor und hinter der Grenzschicht unterschieden. Für  $\varphi = \pi/2$  ist zusätzlich das Simulationsergebnis aus CST MICROWAVE STUDIO<sup>®</sup> abgebildet. Der Wellenleiterkern ist grau hinterlegt. Einmalig abweichend gilt:  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 1,1$  sowie  $n_2 = n_3 = 1,0$  und  $d = 20 \mu\text{m}$ .

des Wellenleiterkerns. Abbildung 5.8b zeigt dagegen, dass im Fall eines hinreichend großen Krümmungsradius auch die Ausgangsfeldverteilungen in guter Näherung übereinstimmen.

Um die Abweichungen in Abbildung 5.8d zu erklären, wird die Feldstärke im Wellenleiter explizit betrachtet. Abbildung 5.9 zeigt die Resultate der numerischen Simulation. Die Ergebnisse in Abbildung 5.9a für  $R = 250 \mu\text{m}$  zeigen, dass nahezu keine Leistung abgestrahlt wird. Die dargestellte Feldverteilung ist im Rahmen der darstellbaren Genauigkeit identisch mit der Feldverteilung der QGM-Methode. Gänzlich anders verhält es sich für  $R = 125 \mu\text{m}$ , Abbildung 5.9b. Vornehmlich an zwei Stellen kommt es zur Abstrahlung vom Wellenleiterkern. Zunächst wird nach einem Winkel von ca.  $\varphi = 30^\circ$  deutlich Leistung abgestrahlt, danach erst wieder kurz vor dem Ende der  $90^\circ$ -Krümmung. Genau diese Abstrahlverluste verfälschen das Felddbild am Ende der Krümmung im Kontext der QGM-Methode dahingehend, als dass Feldanteile enthalten sind, die in keinem Fall die geführten Moden des

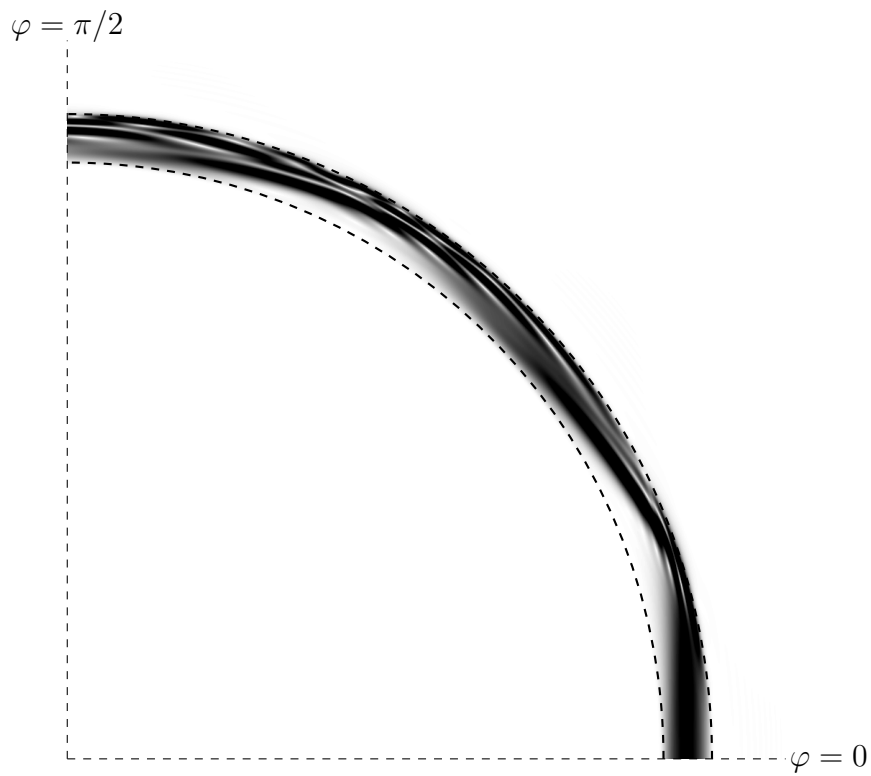
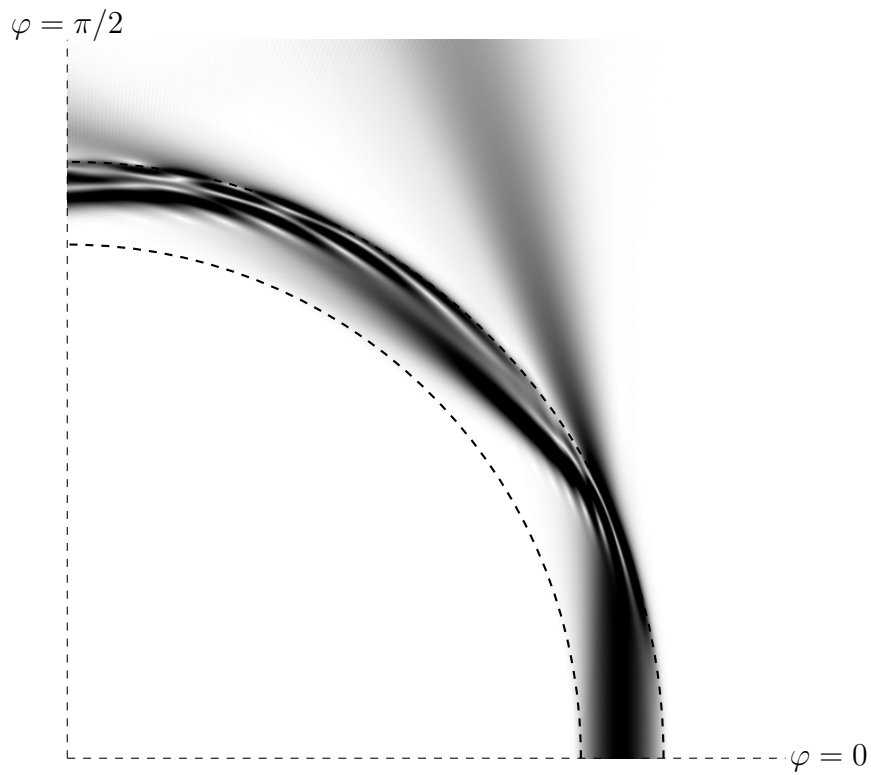
(a)  $R = 250 \mu\text{m}$ (b)  $R = 125 \mu\text{m}$ 

Abbildung 5.9.: Betrag der Elektrischen Feldstärke im gekrümmten Schichtwellenleiter bei Anregung durch den Grundmode eines geraden Wellenleiters. Simulationsergebnisse aus CST MICROWAVE STUDIO®. Einmalig abweichend gilt:  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 1,1$  sowie  $n_2 = n_3 = 1,0$  und  $d = 20 \mu\text{m}$ .

geraden Wellenleiters anregen können. Somit erklären sich die Abweichungen zwischen den Ergebnissen der QGM-Methode und der numerischen Simulation in Abbildung 5.8d.

Für eine Verifikation der QGM-Methode hinsichtlich der korrekten Beschreibung des Dämpfungsverhaltens, hervorgerufen durch Abstrahlverluste, sind sicherlich weitere Simulationen nötig. Die gezeigten Ergebnisse sind jedoch bereits gute Indizien, die für die Anwendbarkeit der QGM-Methode sprechen. Es sei noch einmal betont, dass mit quasigeführten Moden in keinem Fall eine Abstrahlung explizit beschrieben werden kann. Das heißt im Umkehrschluss, dass die Wellenleiterkrümmung einen hinreichend großen Winkel einschließen sollte, damit sichergestellt ist, dass Wellenanteile, die nicht den quasigeführten Moden zuzuordnen sind, am Wellenleiterende keine geführten Moden des geraden Wellenleiters anregen können. Im Folgenden werden daher ausschließlich 90°-Krümmungen betrachtet.

### 5.2.6. Ergebnisse für multimodale Wellenleiter

Die inhomogene Verbindung zweier gerader Wellenleiter sorgt in der Regel für eine Umverteilung der Leistung im Modenspektrum. Ein Teil der ursprünglich geführten Leistung wird zumeist auch in das Spektrum der Strahlungsmoden gekoppelt und vom Wellenleiterkern abgestrahlt. Diese Leistungsanteile stellen bezogen auf das Übertragungssystem Verluste dar, die es zu minimieren gilt. Bezogen auf die hier betrachteten zirkularen Krümmungen existiert gewöhnlich ein minimaler Krümmungsradius, ab dem erhöhte Verluste zu erwarten sind. Im Folgenden wird das Dämpfungsverhalten um 90° gekrümmter Wellenleiter in Abhängigkeit des Krümmungsradius untersucht. Die Wellenlänge ist nun wieder konstant gleich  $\lambda = 850 \text{ nm}$  und für die Brechzahlen gilt wie zuvor  $n_1 = 1,57$  und  $n_2 = n_3 = 1,55$ .

Abbildung 5.10 zeigt Ergebnisse für unterschiedliche Konfigurationen. Diese unterscheiden sich in der Schichtdicke  $d$  des Wellenleiters, in der Länge  $x_p$  des geraden Wellenleiters vor der Krümmung und in der Wahl der Anregung. Das Verhältnis zwischen Schichtdicke und Strahldurchmesser des anregenden Gaußstrahl ist stets gleich  $d/b = 1,5$ , dabei wird der Einfallswinkel des Gaußstrahls variiert. Die aufgetragenen Graphen zeigen jeweils die Leistung  $\overline{P}_A$ , die im geraden Ausgangswellenleiter geführt wird, bei auf eins normierter Eingangsleistung. Abbildung 5.10a berücksichtigt fünf unterschiedliche Einfallswinkel, wobei nun zwischen positiven und negativen Winkeln unterschieden wird. Die Schichtdicke ist zunächst gleich  $d = 75 \mu\text{m}$  und es gilt  $x_p = 0$ , d.h. der Gaußstrahl strahlt direkt in die Krümmung. Es ist daher unmittelbar ersichtlich, dass sich gravierende Unterschiede für unterschiedliche Vorzeichen des Einfallswinkels einstellen.

Es mag überraschen, dass sich für Ausgangsleistungen im Bereich  $\overline{P}_A > 0,5$  niedrigere Dämpfungswerte einstellen, wenn der Gaußstrahl entgegen dem Verlauf der Krümmung im mathematisch negativen Sinn verdreht wird ( $\vartheta < 0$ ). Durch einen negativen Einfallswinkel verschieben sich jedoch die Feldanteile etwas zum äußeren Rand bei  $\varrho = R^+$  und in diesem Fall ist damit der Überlapp mit den quasi-geführten Moden größer.

Neben dem Vorzeichen ist der Betrag des Einfallswinkels von entscheidender Bedeutung. Bei großem Einfallswinkel sind auch für große Krümmungsradien signifikanten Dämpfungswerte vorhanden. Obwohl in diesem Fall kein gerader Wellenleiter vorgeschaltet ist, empfiehlt es sich, die Anregung des Modenspektrums des geraden Wellenleiters zu rekapitu-

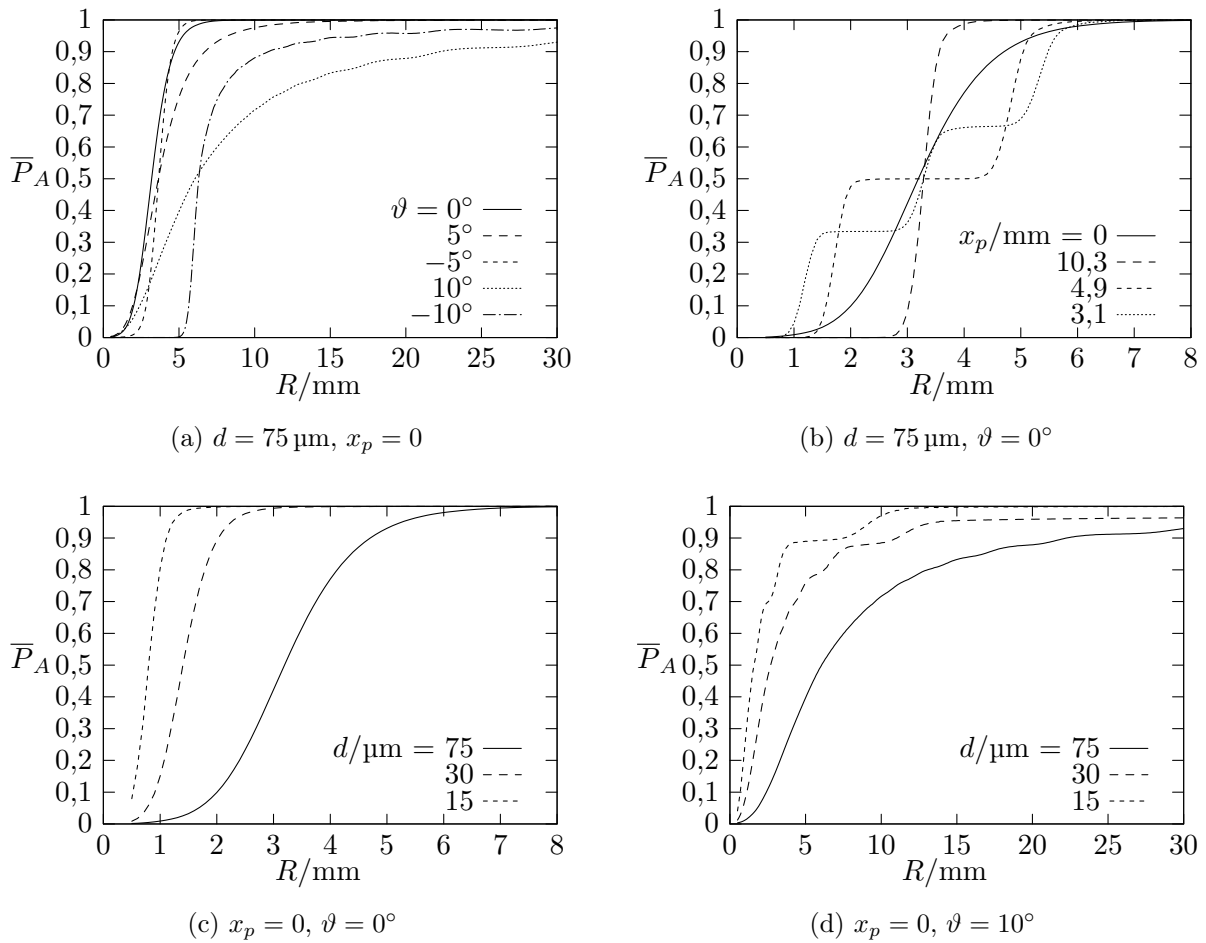


Abbildung 5.10.: Normierte Ausgangsleistung nach Durchlaufen einer  $90^\circ$ -Krümmung. Der anregende Gaußstrahl fällt meridional ( $h = 0$ ) unter dem Winkel  $\vartheta$  ein. In Abbildung (b) ist dem gekrümmten Wellenleiter ein gerader Wellenleiter der Länge  $x_p$  vorgeschaltet. Es gilt  $n_1 = 1,57$  und  $n_2 = n_3 = 1,55$ .

lieren, vgl. Abbildung 4.12a. Im Fall  $\vartheta = 10^\circ$  wird nahezu das gesamte Spektrum der geführten Moden angeregt. Insbesondere die Leistungsanteile in den Moden nahe am Cut-Off werden bereits bei relativ großen Krümmungsradien abgestrahlt.

An dieser Stelle muss betont werden, dass sich die Ergebnisse auf eine planare Approximation beziehen. Die aufgezeigten Effekte sind zwar auch im realen Wellenleiter mit zweidimensionalem Querschnitt zu erwarten, jedoch nicht in der ausgeprägten Form. Diese Aussage bezieht sich insbesondere auf die Ergebnisse in Abbildung 5.10b. Hier werden bei senkrechtem meridionalen Einfall des Gaußstrahls drei unterschiedlich lange gerade Wellenleiter vorgeschaltet. Zur Interpretation empfiehlt sich ein Blick zurück auf Abbildung 5.1, welche den Leistungsfluss im geraden Wellenleiter zeigt<sup>13</sup>. In Abhängigkeit der Länge des geraden Wellenleiterstücks stellen sich unterschiedliche Feldverteilungen am Anfang der Krümmung ein. Je nachdem ob sich ein, zwei oder drei lokale Maxima ausbilden,

<sup>13</sup>Die Schichtdicke ist in Abbildung 5.1 etwas kleiner. Daher verschieben sich die Werte für  $x_p$  etwas.

stellen sich die gezeigten Verläufe in der Ausgangsleistung ein.

Mit den Abbildungen 5.10c und 5.10d soll das Verhalten für kleiner werdende Schichtdicken  $d$  verdeutlicht werden. Bekanntermaßen nimmt die Dämpfung mit kleiner werdender Schichtdicke bei konstantem Krümmungsradius ab. Beim Vergleich der Graphen muss beachtet werden, dass die Anregung durch den Gaußstrahl nicht vollkommen analog zur Schichtdicke skaliert wird. Abbildung 5.10c zeigt Ergebnisse für den Fall der idealen Einkopplung des Gaußstrahls, bei dem im geraden Wellenleiter vornehmlich Moden mit großer effektiver Brechzahl angeregt werden. Dagegen lassen sich die Ergebnisse in Abbildung 5.10d mit  $\vartheta = 10^\circ$  fast schon als ungünstigster Fall bezeichnen. Hier macht sich mit kleiner werdender Schichtdicke die gleichzeitig abnehmende Anzahl geführter Moden deutlich bemerkbar. Für  $d = 15\ \mu\text{m}$  existieren nur noch 9 geführte Moden. Die leichten Stufen in den Graphen korrespondieren mit den einzelnen Moden dahingehend, dass mit jeder Stufe ein Mode durch die Krümmung *abgedämpft* wird. Eine geringe Anzahl geführter Moden führt dazu, dass auch bei nicht idealer Einkopplung erst ab einem vergleichsweise kleinen Krümmungsradius eine signifikante Dämpfung eintritt. Für  $d = 15\ \mu\text{m}$  liegt dieser Radius bei etwa 11 mm. Es sei jedoch betont, dass sich im Allgemeinen die Gesamtdämpfung nicht aus der Dämpfung einzelner Moden ableiten lässt. Dennoch lässt die hohe Dämpfung eines einzelnen Modes auch eine erhöhte Dämpfung der Gesamtwelle vermuten.

Neben der Ausgangsleistung ist die Leistungsverteilung im Modenspektrum des Ausgangswellenleiters von entscheidender Bedeutung. Würde sich die Breite des angeregten Modenspektrums durch eine Wellenleiterkrümmung vergrößern, könnte die Kaskadierung von Wellenleiterelementen beispielsweise in Form von S-Bögen eine erhöhte Dämpfung verursachen. Natürlich würde sich auch die Modendispersion stärker auswirken. Abbildung 5.11 zeigt das angeregte Modenspektrum in Form der akkumulierten Leistung  $\bar{P}_\Xi$  definiert durch (4.29) exemplarisch für ausgewählte Parametersätze. Zur Erinnerung daran, dass Krümmungsverluste nicht isoliert von der initialen Anregung analysiert werden sollten, berücksichtigt  $\bar{P}_\Xi$  auch Reflexionsverluste bei der Einkopplung, d.h. die Graphen erreichen nicht den Wert eins. Die Parameter der Abbildungen 5.11a bis 5.11c korrespondieren mit Abbildung 5.10a. Die Ergebnisse für  $\vartheta = -5^\circ$  verdeutlichen, dass sich das angeregte Spektrum in diesem Fall nicht verbreitert, solange die hervorgerufene Dämpfung vernachlässigbar ist. Eine Leistungsüberkopplung findet lediglich zwischen benachbarten Moden statt. Für  $\vartheta = 0$  werden initial nur sehr wenige Moden angeregt, so dass es zu einer leichten Verbreiterung des angeregten Spektrums kommt. Diese Verbreiterung auf eine gewisse Mindestbreite ist immer zu beobachten, insbesondere auch wenn ursprünglich nur der Grundmode angeregt wurde. Bei großem Einfallswinkel  $\vartheta = -10^\circ$  wird ohnehin das gesamte Modenspektrum angeregt und solange keine signifikanten Verluste auftreten, ändert sich dies im Wesentlichen nicht. Treten Verluste durch Abstrahlung auf, zeigt sich jedoch, dass insbesondere die Moden nahe am Cut-Off keine Leistung mehr führen. Da die Abstände zwischen den effektiven Brechzahlen benachbarter Moden nicht konstant sind, verdeutlicht Abbildung 5.12 den Zusammenhang zwischen der Modenzahl  $\nu$  und der effektiven Brechzahl  $n_{\text{eff}}$ . Insbesondere für den abschließend betrachteten Wellenleiter der Dicke  $d = 15\ \mu\text{m}$  muss beachtet werden, dass sich die Graphen aus einer Interpolation durch lediglich 9 Punkte zusammensetzen. Entsprechend erreichen die Graphen auch nicht den Endpunkt bei  $n_2 = 1,55$ . Abbildung 5.11d zeigt exemplarisch, dass auch im Wellenleiter mit wenigen geführten Moden keine wesentliche Leistungsüberkopplung zu Moden

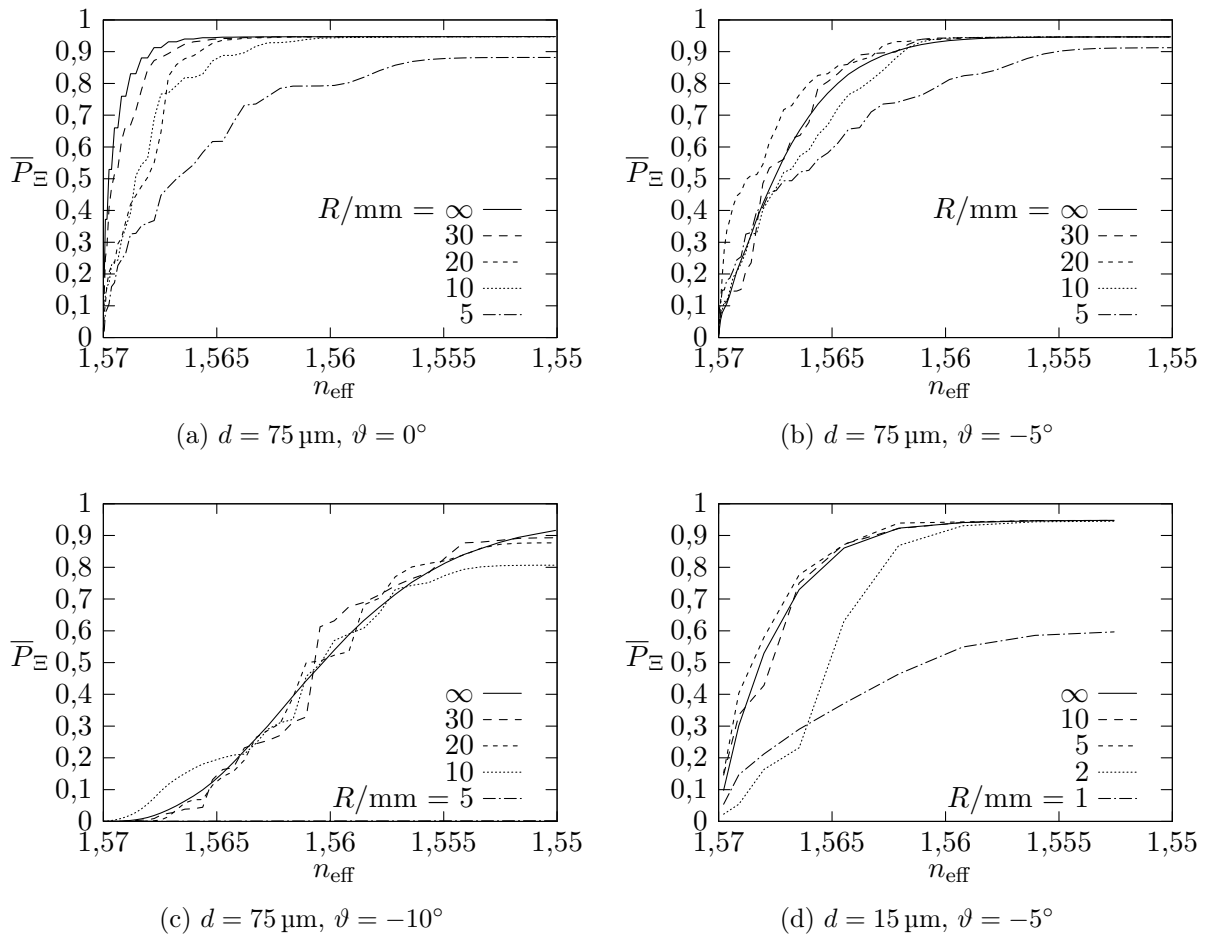


Abbildung 5.11.: Anregung des Modenspektrums nach Durchlaufen einer  $90^\circ$ -Krümmung: Akkumulierte Leistung  $\bar{P}_\Xi$  für unterschiedliche Krümmungsradien  $R$ . Diese Darstellung berücksichtigt auch Reflexionsverluste bei der Einkoppelung. Es gilt  $x_p = 0$ . Zur Erinnerung: Der asymptotische Divergenzwinkel des Gaußstrahls ist gleich  $\Theta_{a0} = 5^\circ$ .

höherer Ordnung stattfindet, vorausgesetzt die Dämpfung ist hinreichend klein.

Abbildung 5.12: Die Modenzahl  $\nu$  des geraden Wellenleiters aufgetragen über die effektive Brechzahl  $n_{\text{eff}}$  für unterschiedliche Schichtdicken  $d$ . Neben der Anzahl der Moden wird insbesondere der Abstand zwischen den effektiven Brechzahlen hervorgehoben.

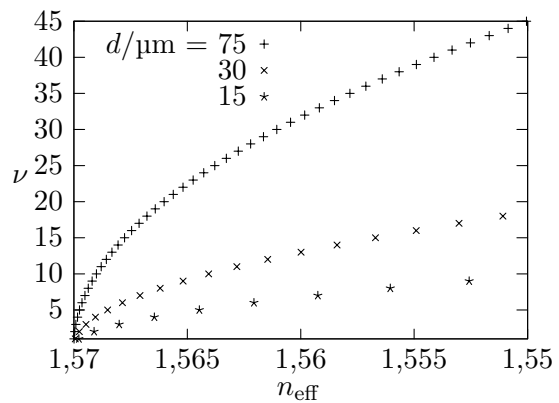


Abbildung 5.12.

## 5.3. Vergleich zur Strahlenoptik

Der Vergleich zur Strahlenoptik hinsichtlich der Einkopplung optischer Wellen in einen dielektrischen Wellenleiter hat zunächst eine grundsätzliche Eignung strahlenoptischer Verfahren aufgezeigt. Jedoch erfordert die Modellierung der Einkopplung keine explizite Beschreibung der Wellenausbreitung vor dem Wellenleiter, da das Poyntingvektormodell des Gaußstrahls aus der Feldverteilung in der Ebene der Wellenleiterstirnfläche abgeleitet wird. Wie bereits eingangs im Kapitel 2.4.3 erläutert, stellt sich ein einheitliches Poyntingvektormodell erst in hinreichender Entfernung von der Strahltaile ein, wenn der Divergenzwinkel des Gaußstrahls näherungsweise konstant ist. Die Beschreibung der Wellenausbreitung im dielektrischen Wellenleiter erfordert grundsätzlich Kenntnis über die Phase der Moden, vgl. Kapitel 5.1.1, welche in einer strahlenoptischen Modellierung gänzlich verloren geht. Die aus den Phasenbeziehungen resultierenden Interferenzmuster in der Intensitätsverteilung im längshomogenen Wellenleiter sind jedoch unerheblich, solange am Wellenleiterende ein Detektor mit hinreichend großer geometrischer Apertur aufwartet. Schließt sich jedoch beispielsweise eine Krümmung an<sup>14</sup>, kann die Feldverteilung am Anfang der Krümmung wie gezeigt deutlichen Einfluss auf den Leistungsfluss im bzw. auf die Abstrahlung vom Wellenleiter nehmen. Ob und wie ein strahlenoptisches Modell die zuvor gezeigten Ergebnisse der wellentheoretischen Simulationen reproduzieren kann, soll im Folgenden untersucht werden.

### 5.3.1. Strahlverfolgung im Schichtwellenleiter

Im abschnittsweise homogenen Raum werden die Strahltrajektorien stückweise durch Geraden beschrieben. Für die vergleichsweise einfachen Geometrien dieser Arbeit lassen sich daher effiziente analytische Verfahren ableiten, die im Weiteren kurz vorgestellt werden [6, 67]. Die Erläuterungen dieses Kapitels ergänzen das im Kapitel 2.4.3 vorgestellte Poyntingvektormodell der Quelle sowie die im Kapitel 4.4.1 beschriebene strahlenoptische Modellierung der Einkopplung in den Wellenleiter. Für die strahlenoptische Analyse eines (idealen) vollständigen Systems fehlt damit nur noch ein Modell eines Detektors, dass jedoch elementar realisierbar ist, sofern nur die empfangene Gesamtleistung bestimmt werden soll. Der Detektor versteht sich in dieser Arbeit als einfacher Summierer der Leistung aller eingefallenen Strahlen. Es muss jedoch beachtet werden, dass die Strahlen eines transienten Modells nur eine begrenzte Gültigkeitsdauer besitzen.

#### Gerade Wellenleiterelemente

Die Strahlausbreitung im homogenen Schichtwellenleiter ist elementar modellierbar, da sich der Winkel aller Strahlen zur Wellenleiterberandung nicht verändert, siehe Abbildung 5.13. Es wird in der folgenden Beschreibung nur der Fall eines positiven Einfallswinkels  $\Theta$  explizit

<sup>14</sup>Auch beliebig andere Abweichungen von der homogenen Wellenleitergeometrie sind denkbar, beispielsweise Störstellen, hervorgerufen durch Material- oder Fertigungsfehler.

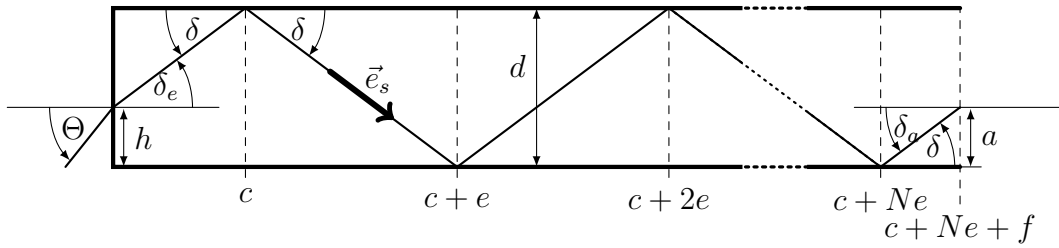


Abbildung 5.13.: Strahlpfad im homogenen Schichtwellenleiter.

betrachtet und es wird angenommen, dass im Wellenleiter der Länge  $L$  mindestens eine Reflexion an der Wellenleiterberandung auftritt.

Der Winkel  $\delta$  im Wellenleiter ergibt sich aus dem Brechungsgesetz von Snellius. In Abhängigkeit der  $N + 1$  Reflexionen an den Schnittstellen zum Mantel berechnet sich das Vorzeichen des Austrittswinkels  $\delta_a$  sowie der Aufpunkt  $a$  auf der Endfläche gemäß

$$\delta_a = \delta, \quad a = f \tan \delta \quad \text{falls} \quad N = 1, 3, 5, \dots, \quad (5.84)$$

$$\delta_a = -\delta, \quad a = d - f \tan \delta \quad \text{falls} \quad N = 0, 2, 4, \dots \quad (5.85)$$

Darin ist

$$f = L - c - Ne \quad \text{mit} \quad N = \left\lfloor \frac{L - c}{e} \right\rfloor \quad (5.86)$$

sowie

$$e = \frac{d}{\tan \delta} \quad \text{und} \quad c = \frac{d - h}{\tan \delta}. \quad (5.87)$$

Wie zuvor ist  $d$  die Schichtdicke des Wellenleiterkerns und  $h$  ist der Aufpunkt des initialen Strahls auf der Wellenleiterstirnfläche. Unterliegt der Strahl im Wellenleiter nicht der Totalreflexion, wird mit jeder Reflexion die Leistung des Strahls um den Leistungsreflexionsfaktor aus (2.100) bzw. (2.102) gedämpft. Mit den Beziehungen (5.84) - (5.87) ist das strahlenoptische Modell des homogenen Schichtwellenleiters bereits vollständig parametrisiert.

### Zirkular gekrümmte Wellenleiterelemente

Aufgrund der idealen zirkular gekrümmten Grenzflächen ist analog zum geraden Wellenleiter eine analytische Beschreibung möglich. Im Unterschied zum geraden Wellenleiter gibt es jedoch den Spezialfall, dass Strahlen nur an der äußeren Berandung des Wellenleiterkerns reflektiert werden<sup>15</sup>. Dieser Spezialfall wird im Folgenden nicht explizit betrachtet. Des Weiteren wird ein positiver initialer Winkel  $\delta$  angenommen und der Strahlpfad erfährt mindestens einmal eine Reflexion. Der Abbildung 5.14 ist jedoch zu entnehmen, dass sich auch die Beschreibung der übrigen Fälle leicht ableiten lässt.

<sup>15</sup>Im Englischen werden diese Strahlpfade als *Whispering Gallery Rays* bezeichnet.



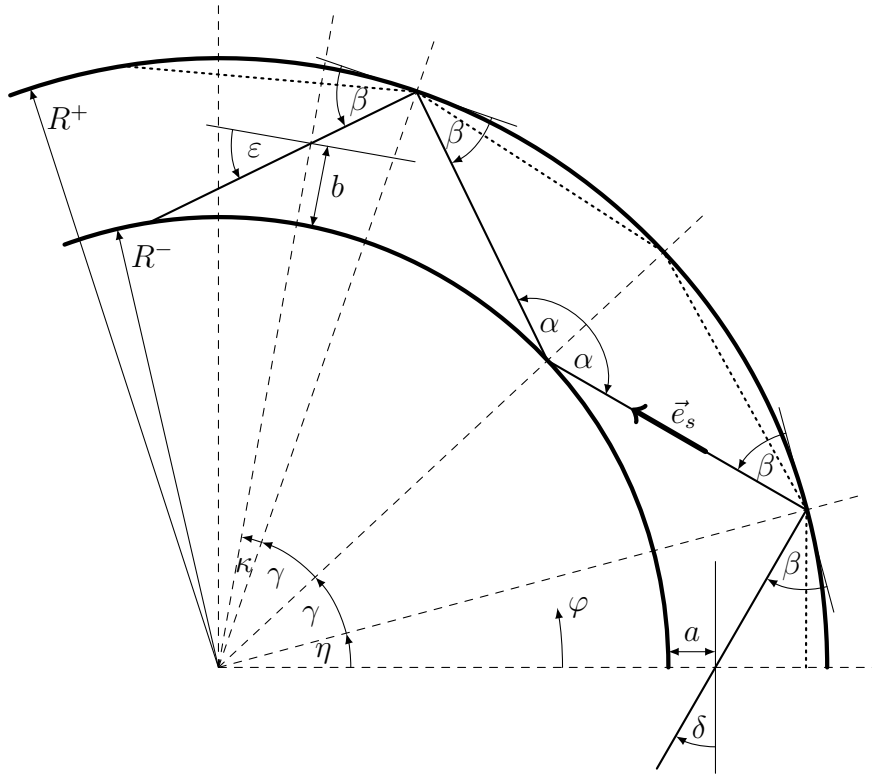


Abbildung 5.14.: Strahlpfad im zirkular gekrümmten Schichtwellenleiter.

Für die Winkel im Wellenleiter ergibt sich

$$\cos \beta = \frac{R^- + a}{R^+} \cos \delta \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{R^- + a}{R^-} \cos \delta. \quad (5.88)$$

Damit ein Strahlpfad auch Schnittpunkte mit der inneren Berandung besitzt, muss die Bedingung

$$\frac{R^- + a}{R^-} \cos \delta < 1 \quad (5.89)$$

erfüllt sein. Die Reflexionspunkte befinden sich in den Ebenen

$$\varphi = \eta + N\gamma, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (5.90)$$

mit

$$\eta = \beta - \delta \quad \text{und} \quad \gamma = \beta + \alpha - \pi/2. \quad (5.91)$$

Wird angenommen, dass sich die Krümmung über einen Gesamtwinkel  $\varphi_0$  erstreckt, dann gilt

$$\kappa = \varphi_0 - \eta - N\gamma \quad \text{mit} \quad N = \left\lfloor \frac{\varphi_0 - \eta}{\gamma} \right\rfloor. \quad (5.92)$$

Schließlich folgt für den Austrittswinkel  $\varepsilon$  sowie den Aufpunkt  $b$  auf der Wellenleiterendfläche

$$\varepsilon = \beta - \kappa, \quad b = \frac{\cos \beta}{\cos \varepsilon} R^+ - R^- \quad \text{falls} \quad N = 0, 2, 4, \dots, \quad (5.93)$$

$$\varepsilon = -(\pi/2 + \kappa - \alpha), \quad b = \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \varepsilon} - 1 \right) R^- \quad \text{falls } N = 1, 3, 5, \dots \quad (5.94)$$

Aufgrund der gekrümmten Grenzflächen tritt weit häufiger als im geraden Wellenleiter der Fall ein, dass Strahlen im Kern nicht totalreflektiert werden. Schließlich werden so die Abstrahlverluste beschrieben. Bei den Reflexionen am Außenrand müssen wie im Kapitel 2.4.2 beschrieben Tunnelverluste berücksichtigt werden, d.h. an Stelle von (2.100) wird (2.107) verwendet. Da der Strahl zuerst auf den Außenrand ( $R^+$ ) trifft, finden, falls  $N$  gerade ist, insgesamt  $N/2 + 1$  Reflexionen am Außenrand statt, sowie  $N/2$  Reflexionen am Innenrand. Für ungerade  $N$  ist die Anzahl der Reflexionen am Innen- und Außenrand gleich  $(N + 1)/2$ . Mit den Beziehungen (5.88)-(5.94) wird damit die Strahlausbreitung im gekrümmten Schichtwellenleiter vollständig beschrieben.

### 5.3.2. Transientes Übertragungsverhalten des längshomogenen Schichtwellenleiters

Die strahlenoptische Beschreibung des monochromatischen Leistungsflusses im homogenen planaren Schichtwellenleiter ist wie aufgezeigt elementar beschreibbar, da sich mit jeder Reflexion des Strahls an der Grenzfläche zum Mantel lediglich das Vorzeichen der transversalen Komponente des Richtungsvektors  $\vec{e}_s$  ändert. Dieses Verhalten bleibt natürlich auch bei der Beschreibung eines transienten Leistungsflusses erhalten. Jedoch lässt sich, wie im Kapitel 2.4.3 beschrieben, ein beliebiger transienter Leistungsfluss nicht mit einer einzigen Strahlschar modellieren, sondern erfordert mit jeder Änderung des initialen Leistungsflusses die Aussendung einer neuen Strahlschar. Eine Ausnahme bildet die Modellierung zeitlich rechteckförmiger Pulse oder auch die Bestimmung einer Sprungantwort. Da sich in diesem Fall der initiale Leistungsfluss am Wellenleiteranfang abrupt ändert, reicht eine Strahlschar zur Modellierung aus.

Gemäß der Notation aus Kapitel 2.4.3 lässt sich die Sprungantwort eines planaren dielektrischen Wellenleiters aus

$$a(t) = \sum_m P_m \sigma \left( t - \frac{L}{e_{szm}} \frac{n_1}{c_0} \right) \quad \text{mit} \quad \sigma(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (5.95)$$

berechnen. Aufgrund der Planarität der im Folgenden betrachteten Modelle, werden die Strahlen nur durch den Index  $m$  unterschieden. In (5.95) ist  $L/e_{szm}$  die optische Weglänge eines Strahls im Wellenleiter der Länge  $L$  und  $c_0/n_1$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Wellenleiterkern. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass diese Sprungantwort ein lineares System beschreibt. Im Gegensatz zur Wellenoptik arbeitet die geometrische Optik ausschließlich mit Leistungsgrößen und umgeht damit die im Kapitel 5.1.3 diskutierten Schwierigkeiten im wellentheoretischen Ansatz. Darüber hinaus bleiben chromatische Dispersionseffekte in der geometrischen Optik gänzlich unberücksichtigt. Durch Differenziation und Transformation in den Frequenzbereich lässt sich aus der Sprungantwort eine Übertragungsfunktion ableiten

$$H(f) = \sum_m P_m \exp \left( -j2\pi f \frac{L}{e_{szm}} \frac{n_1}{c_0} \right). \quad (5.96)$$

Sowohl die Sprungantwort als auch die Übertragungsfunktion lassen sich also ohne exakte Strahlverfolgung berechnen. Des Weiteren sind beide Funktionen nicht direkt abhängig von der Dicke  $d$  des Wellenleiterkerns. Allerdings können die Anzahl der geführten Strahlen und die Verteilung der Leistung auf die Strahlen und damit die  $P_m$  variieren.

Bevor nun ein expliziter Vergleich zwischen Wellen- und Strahlenoptik angestrebt wird, soll kurz die Erwartungshaltung an die Qualität der strahlenoptischen Ergebnisse rekapituliert werden. Der wesentliche Unterschied besteht im jeweiligen Spektrum der zulässigen Ausbreitungskonstanten. In der klassischen Strahlenoptik können sich Strahlen unter beliebigen Winkel und damit mit beliebiger Ausbreitungskonstante bzgl. der Wellenleiterachse ausbreiten. Wellenoptisch sind allerdings nur endlich viele Ausbreitungskonstanten zulässig. Ein größerer Fehler ist daher zu erwarten, wenn nur wenige geführte Moden existieren. Im Umkehrschluss heißt das: Solange ausreichend viele geführte Moden existieren und die Verteilung der Leistung auf die jeweiligen zugehörigen Ausbreitungskonstanten näherungsweise identisch ist, vgl. Abbildung 4.18, ist eine gute Übereinstimmung zu erwarten. Der direkte Vergleich zwischen (5.96) und der wellentheoretischen Approximation (5.29) zeigt des Weiteren, dass Unterschiede in der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Strahlen bzw. Moden existieren. Die effektive Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Strahls bzgl. der Wellenleiterachse ist stets proportional zur  $z$ -Komponente des Ausbreitungsvektors  $e_{sz}$ , während sich ein Mode im linearisierten Modell mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  ausbreitet.

Der Einfluss eines diskreten Modenspektrums mit nur wenigen geführten Moden wird besonders im transienten Leistungsfluss deutlich. Es soll daher zunächst ein Vergleich zwischen Wellen- und Strahlenoptik anhand der Pulsverformung eines Rechteckpulses untersucht werden. Strahlenoptisch kann ein Rechteckpuls modelliert werden, indem die Definition der Sprungantwort (5.95) um eine weitere Sprungfunktion  $\sigma$  ergänzt wird, welche die Pulsdauer berücksichtigt. Im wellentheoretischen Modell sind die Fourierkoeffizienten des Modulationssignals (5.2) bei einem Puls-Pause Verhältnis gleich eins durch

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_m = \begin{cases} \frac{2}{\pi m} (-1)^{\frac{m+1}{2}}, & m = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5.97)$$

gegeben. Das Spektrum eines Rechteckpulses ist aufgrund der steilen Flanken sehr breit und die Folge der Fourierkoeffizienten klingt daher nur mit  $1/m$  ab. Bei einer Grundfrequenz von 10 GHz beträgt die (einseitige) 3 dB-Bandbreite des einzelnen Pulses bereits 12 GHz. Der Rechteckpuls ist daher nur eine rein theoretische Modellannahme.

Zur Beschreibung der Wellenausbreitung in einem Wellenleiter muss zunächst die Einkopplung modelliert werden. Entsprechend müssen auch bei der Interpretation der Ergebnisse die Unterschiede zwischen Wellen- und Strahlenoptik, die schon bei der Einkopplung auftreten, gemäß Kapitel 4 berücksichtigt werden. Das Leistungsmaximum ist jedoch im Folgenden auf eins normiert, so dass die Unterschiede in der Koppeffizienz unberücksichtigt bleiben. Abbildung 5.15 zeigt Ergebnisse für vier unterschiedliche Schichtdicken  $d$  und damit für vier unterschiedliche Modenspektren. Alle Ergebnisse beziehen sich auf eine Wellenleiterlänge von  $L = 1$  m. Berücksichtigt sind drei unterschiedliche Anregungen  $\vartheta = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$  bei einem Verhältnis  $d/b = 1,5$ . Der Fourierreihe im wellentheoretischen Ansatz liegen wiederum 500 Reihenglieder zu Grunde, was bereits einer sehr großen Band-

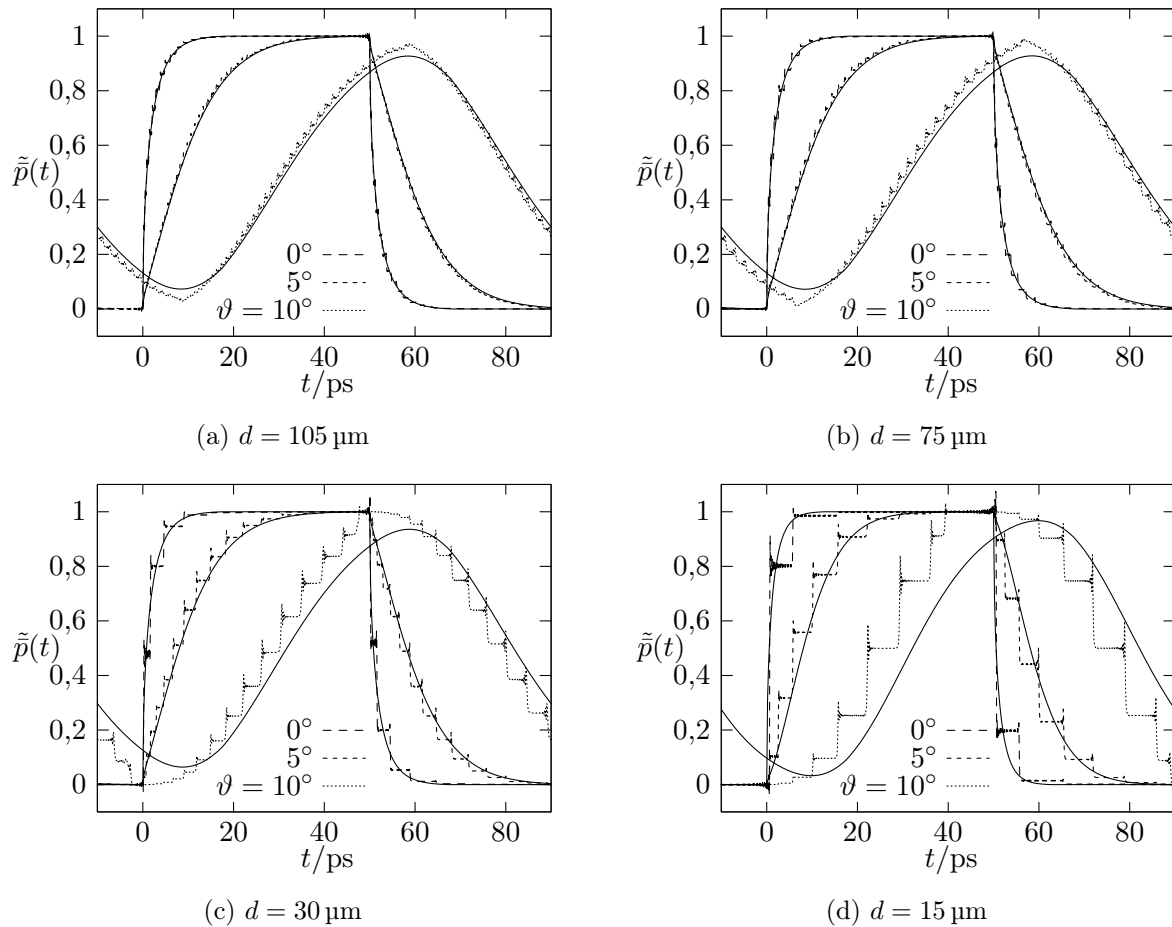


Abbildung 5.15.: Vergleich des transienten Leistungsflusses im Schichtwellenleiter der Länge  $L = 1$  m. Es gilt  $d/b = 1,5$ ,  $n_1 = 1,57$  und  $n_2 = 1,55$ . Die durchgezogenen Linien repräsentieren die strahlenoptischen Ergebnisse.

breite entspricht, jedoch naturgemäß aufgrund des Gibbs'schen Phänomens zu einem deutlichen Überschwingen führt. Im planaren strahlenoptischen Modell wurden 10 000 initiale Strahlen verwendet. Bedingt durch Einkoppelverluste kann die Anzahl der Strahlen, die sich im Kern ausbreiten, etwas geringer sein.

In den vorangegangenen Studien war meist ein Wellenleiter der Dicke  $d = 75 \mu\text{m}$  (bzw.  $d = 70 \mu\text{m}$ ) Ausgangspunkt der Untersuchungen. Dieser Fall ist in Abbildung 5.15b berücksichtigt. Um das Verhalten bei größeren Schichtdicken zu beurteilen, wurde in Abbildung 5.15a ein Wellenleiter der Dicke  $d = 105 \mu\text{m}$  verwendet. Besonders interessieren sollen jedoch die Ergebnisse für kleine Schichtdicken mit  $d = 30 \mu\text{m}$  und  $d = 15 \mu\text{m}$  in den Abbildungen 5.15c und 5.15d. Die Ergebnisse der strahlenoptischen Simulationen sind durch die durchgezogenen Linien gekennzeichnet. Dabei sind die Kurven um die minimale Signallaufzeit von  $Ln_1/c_0 = 5,237$  ns verschoben, so dass die positive Flanke, sofern noch vorhanden, bei  $t = 0$  liegt. Wie erwartet steigen die Unterschiede zwischen den Theorien mit kleiner werdender Geometrie, jedoch sind die Abweichungen insgesamt gering. Für die Einfallswinkel  $\vartheta = 0^\circ$  und  $5^\circ$  ist gewissermaßen eine perfekte Übereinstimmung festzu-

| Mode                               | 1        | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|------------------------------------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n_{\text{eff}}$                   | 1,56978  |       |       |       |       |       |       |       |       |
| $\Delta n_{\text{eff}} \cdot 10^3$ |          | -0,67 | -1,11 | -1,55 | -1,98 | -2,41 | -2,82 | -3,19 | -3,48 |
| $v_g/c_0$                          | 0,636864 |       |       |       |       |       |       |       |       |
| $\Delta v_g/c_0 \cdot 10^4$        |          | -2,35 | -3,87 | -5,34 | -6,69 | -7,82 | -8,53 | -8,14 | -3,34 |

Tabelle 5.2.: Effektive Brechzahl  $n_{\text{eff}}$  und die normierte Gruppengeschwindigkeit  $v_g/c_0$  des ersten TE-Modes sowie die Differenz zwischen benachbarten TE-Moden für  $d = 15 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 1,57$  und  $n_2 = 1,55$ .

stellen. Natürlich kann das strahlenoptische Modell den bedingt durch die endliche Anzahl geführter Moden treppenförmigen Verlauf des Leistungsflusses nicht nachbilden. Im lokalen zeitlichen Mittel gehen die Graphen jedoch näherungsweise ineinander über. Etwas größere Abweichungen sind nur für  $\vartheta = 10^\circ$  zu verzeichnen, da nun insbesondere auch Moden nahe dem Cut-Off angeregt werden.

Hier gilt es eine Besonderheit im Modenspektrum des dielektrischen Schichtwellenleiters hervorzuheben. Wie zuvor erwähnt existieren Unterschiede in der Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Strahls und eines Modes. Tabelle 5.2 listet die Veränderung der effektiven Brechzahlen und der Gruppengeschwindigkeit zum jeweils benachbarten Mode für  $d = 15 \mu\text{m}$  auf. Wie aus der Dispersionsbeziehung

$$k_z = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - k_x^2} \quad (5.98)$$

unmittelbar gefolgert werden kann, wächst der Abstand zwischen den Ausbreitungskonstanten  $\Delta k_z$  stetig an, da die  $k_x$  näherungsweise äquidistant sind. Wie die Tabelle 5.2 zeigt, gilt dies nicht für die Gruppengeschwindigkeiten der Moden, die leider nur numerisch bestimmt werden können. Der Abstand der Gruppengeschwindigkeiten  $\Delta v_g$  steigt zunächst ebenfalls an, nimmt dann für Moden nahe am Cut-Off aber wieder ab. Dieser Effekt existiert auch für größere Schichtdicken und damit einer größeren Anzahl geführter Moden. Er wirkt sich jedoch mit zunehmender Schichtdicke nicht mehr so stark aus, wie die Ergebnisse in den Abbildungen 5.15 für den Einfallswinkel  $\vartheta = 10^\circ$  zeigen. Im Verlauf der Graphen ist  $\Delta v_g$  näherungsweise proportional zu dem Abstand der *Stufen* im wellentheoretisch bestimmten Leistungsfluss. Als Zahlenbeispiel sei noch genannt, dass für  $d = 105 \mu\text{m}$  in einer Polarisation 62 geführte Moden existieren. Davon besitzen die letzten 14 Moden eine kleinere Gruppengeschwindigkeit als der letzte Mode des Wellenleiters mit  $d = 15 \mu\text{m}$ . Es sei daran erinnert, dass die strahlenoptischen Ergebnisse nahezu unabhängig von der Dicke des Wellenleiters sind. Aufgrund des etwas kleineren Divergenzwinkels des Gaußstrahls im Fall kleiner Schichtdicken, vgl. Tabelle 4.2, ist das angeregte Spektrum etwas schmaler und durch die geringere Modendispersion ist letztlich die Pulsaufweitung ebenfalls etwas abgeschwächt.

Zusammenfassend stimmen selbst für  $d = 15 \mu\text{m}$  und  $\vartheta = 10^\circ$  die Ergebnisse im Mittel immer noch gut überein. Der Graph des strahlenoptisch bestimmten Leistungsflusses scheint auf der Zeitachse etwas verschoben zu sein gegenüber der wellentheoretischen Referenz.

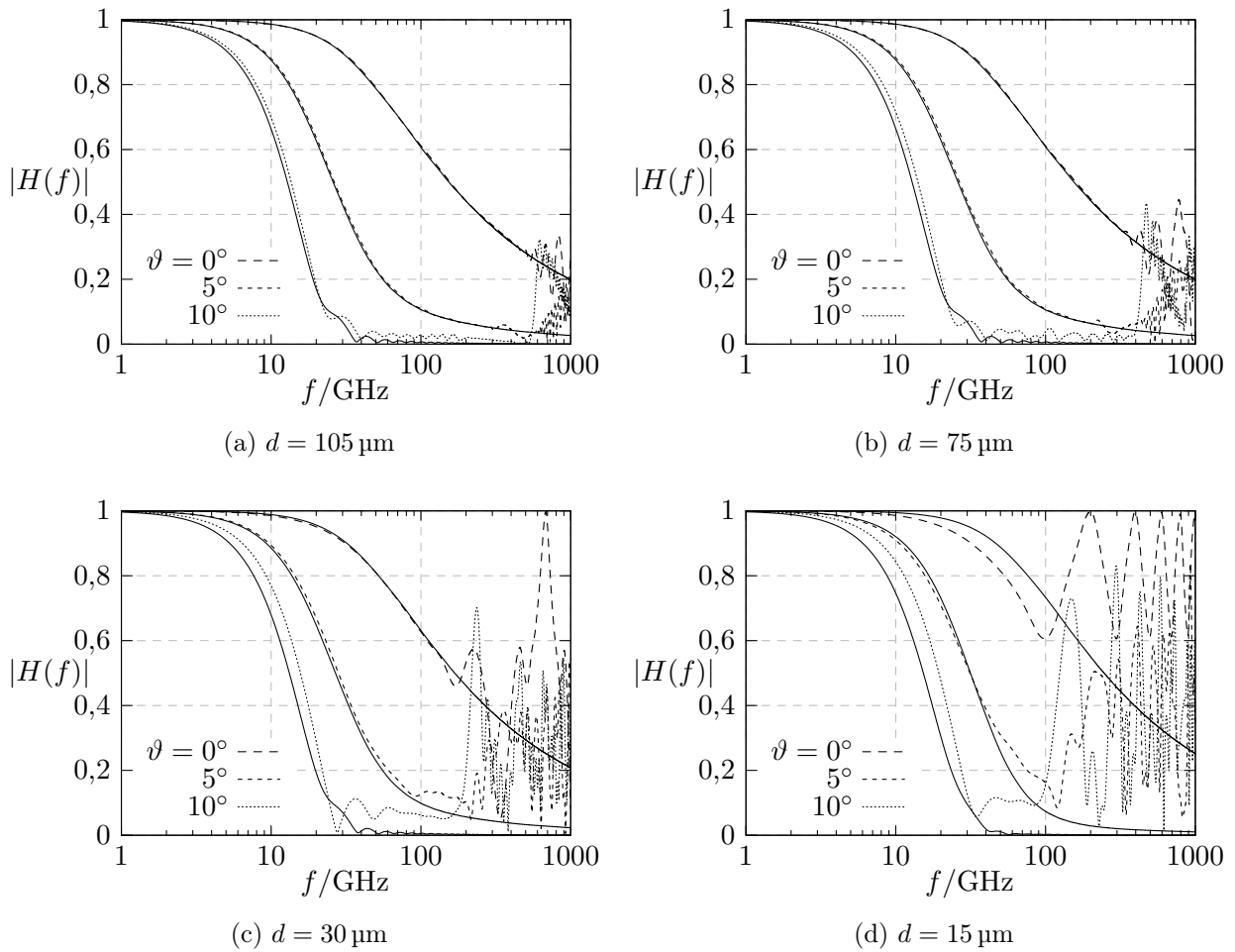


Abbildung 5.16.: Vergleich der Übertragungsfunktionen für die Parametersätze aus Abbildung 5.15. Die durchgezogenen Linien repräsentieren die strahlenoptischen Ergebnisse.

Diese Verschiebung um wenige Pikosekunden ist jedoch in der Regel nicht von praktischer Relevanz. Die strahlenoptischen Simulationen wurden im Übrigen mit konstanter Goos-Hänchen-Verschiebung durchgeführt. Abgesehen von der Beschreibung der Einkopplung hat die Goos-Hänchen-Verschiebung jedoch keinen Einfluss auf den Gesamtleistungsfluss im längshomogenen Wellenleiter.

Für alle Parametersätze wurde zusätzlich die Übertragungsfunktion sowohl wellentheoretisch gemäß (5.22) als auch strahlenoptisch gemäß (5.96) berechnet. Die Ergebnisse für den Betrag der Übertragungsfunktion sind in Abbildung 5.16 aufgetragen und spiegeln im Wesentlichen die bereits gewonnenen Erkenntnisse wieder. Mit kleiner werdender Geometrie und mit größer werdendem Einfallswinkel werden die Abweichungen im Mittel größer. Bei Anregung mit  $\vartheta = 10^\circ$  nimmt die Übertragungsfunktion im strahlenoptischen Modell im Frequenzbereich  $f < 20$  GHz immer etwas kleinere Werte an, was mit den kleineren Maximalwerten in Abbildung 5.15 korrespondiert. Für  $d = 105 \mu\text{m}$  ist insgesamt eine sehr gute Übereinstimmung zu verzeichnen. Aber auch hier macht sich für sehr große Frequenzen

$400 \text{ GHz} < f$  das diskrete Modenspektrum bemerkbar, die Übertragungsfunktion steigt wieder an und geht in ein oszillierendes Verhalten über. Die Grenzfrequenz, ab der dieses Verhalten eintritt, wird mit kleiner werdender Geometrie ebenfalls kleiner und insbesondere für  $\vartheta = 0^\circ$  kann die Übertragungsfunktion wieder annähernd den Wert eins annehmen. Dies ist möglich, da die Breite des angeregten Modenspektrums in diesem Fall minimal ist. Für  $d = 15 \mu\text{m}$  und  $\vartheta = 0^\circ$  werden im Wesentlichen nur zwei Moden signifikant angeregt, vgl. Abbildung 5.15d. Ein periodisches Signal zerfällt lediglich in zwei Impulsfolgen, die sich nach Durchlaufen einer definierten Strecke wieder nahezu vollkommen konstruktiv überlagern. D.h. die Laufzeitdifferenz ist gleich der Grundperiode der Anregung.

Die Unterschiede zwischen dem exakten wellentheoretischen Ansatz (5.22) und der Approximation (5.29) sind im Übrigen für alle Ergebnisse in Abbildung 5.15 vernachlässigbar, mit der in Kapitel 5.1.3 genannten Ausnahme. Abbildung 5.15 zeigt deutlich die Grenzen des sinnvollen Anwendungsbereichs einer Übertragungsfunktion für multimodale optische Wellenleiter auf. Zunächst sollte betont werden, dass der Verlauf der Übertragungsfunktion massiv von der Anregung des Modenspektrums abhängt. Damit kann ein Wellenleiter ohne Kenntnis über die Anregung nicht anhand einer Übertragungsfunktion charakterisiert werden. Werden nur wenige Moden angeregt oder hauptsächlich Moden nahe dem Cut-Off, ist zudem mit einem erhöhten Fehler im strahlenoptischen Modell zu rechnen. Ohnehin ist im Wellenleiter mit wenigen geführten Moden die Ableitung einer Übertragungsfunktion abwegig. Hier empfiehlt es sich, die Übertragungskapazität direkt aus den Gruppengeschwindigkeiten der Moden abzuleiten. Abschließend sollte noch einmal hervorgehoben werden, dass sich die gezeigten Ergebnisse auf einen Schichtwellenleiter beziehen. Im realen Wellenleiter mit zweidimensionalem Querschnittsprofil existieren bei gleicher numerischer Apertur deutlich mehr geführte Moden und die Abweichungen zur Strahlenoptik werden im Mittel geringer sein. Zumindest im theoretischen Modell muss jedoch beachtet werden, dass auch in der kreiszylindrischen Faser bei symmetrischer Anregung nur Moden der azimuthalen Ordnung  $m = 1$  angeregt werden. In dieser Ordnung existieren etwa genauso viele geführte Moden wie im Schichtwellenleiter.

### 5.3.3. Verluste durch Wellenleiterkrümmungen

Wie erwartet haben die Untersuchungen zur Wellenausbreitung im geraden Wellenleiter die Eignung strahlenoptischer Methoden im Wesentlichen bestätigt. Erst bei sehr kleinen Kerndurchmessern und einer geringen Anzahl angeregter Moden treten deutliche Abweichungen auf. Wie eingangs erläutert tritt bei der Beschreibung von Krümmungsverlusten jedoch möglicherweise ein erhöhter Fehler auf, da diese in Abhängigkeit von der Feldverteilung am Wellenleiteranfang variieren. Bevor ein expliziter Vergleich anhand der wellentheoretischen Ergebnisse aus Kapitel 5.2.6 präsentiert wird, soll der Einfluss des modifizierten Leistungstransmissionsfaktors für gekrümmte Grenzflächen gemäß Kapitel 2.4.2 sowie der Einfluss der Goos-Hänchen-Verschiebung untersucht werden. Für die im Folgenden betrachteten Ergebnisse ist das Verhältnis zwischen Kern- und Strahldurchmesser stets gleich  $d/b = 1,5$ . Die Numerische Apertur des Wellenleiters ist ebenfalls konstant gleich  $NA = 0,25$  mit  $n_2 = 1,55$ .

Abbildung 5.17a zeigt Ergebnisse für einen Wellenleiter der Dicke  $d = 75 \mu\text{m}$  und einen

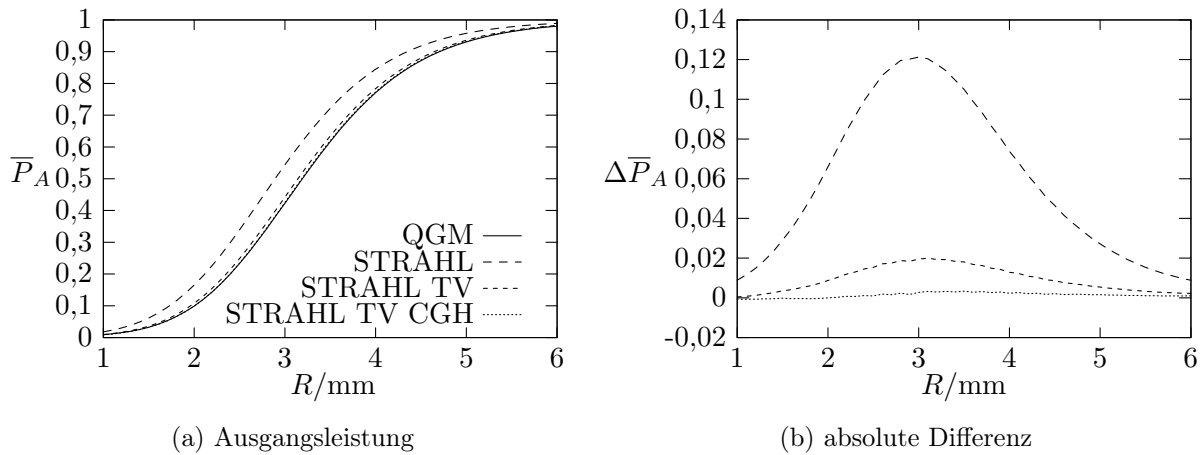


Abbildung 5.17.: Vergleich der unterschiedlichen strahlenoptischen Methoden: Normierte Ausgangsleistung nach Durchlaufen einer  $90^\circ$ -Krümmung und absolute Differenz. Es gilt  $d = 75 \mu\text{m}$ ,  $b = 50 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 1,57$  und  $n_2 = 1,55$ . Die Legende in Abbildung (a) gilt auch in (b).

senkrecht meridional einfallenden Gaußstrahl ( $\vartheta = 0$ ). Dargestellt ist wiederum die Ausgangsleistung nach Durchlaufen einer  $90^\circ$ -Krümmung bei auf eins normierter Eingangsleistung. Der Krümmung ist kein gerades Element vorgeschaltet,  $x_p = 0$ , so dass die initiale Feldverteilung am Anfang der Krümmung mit dem strahlenoptischen Poyntingvektormodell korrespondiert. Im strahlenoptischen Modell werden drei Methoden unterschieden.

**STRAHL** Es wird weder der modifizierte Transmissionsfaktor noch die Goos-Hänchen-Verschiebung berücksichtigt.

**STRAHL TV** Es wird der modifizierte Transmissionsfaktor, jedoch keine Goos-Hänchen-Verschiebung berücksichtigt.

**STRAHL TV CGH** Es wird sowohl der modifizierte Transmissionsfaktor als auch die konstante Goos-Hänchen-Verschiebung berücksichtigt.

Der Bezeichner QGM kennzeichnet die wellentheoretische Approximation wie im Kapitel 5.2.5 beschrieben. Die in Abbildung 5.17b aufgetragenen absoluten Differenzen zwischen den Ergebnissen der strahlenoptischen Methoden und der wellentheoretischen Referenz zeigen deutlich die durch Anwendung eines modifizierten Transmissionsfaktors (2.107) und der konstanten Goos-Hänchen-Verschiebung erreichbaren Verbesserungen auf. Für die Methode STRAHL TV CGH stellt sich bereits eine Abweichung ein, die nahezu unterhalb der darstellbaren Genauigkeit liegt. Daher wird im Weiteren ausschließlich diese Methode verwendet. Es sei noch einmal betont, dass der modifizierte Transmissionsfaktor lediglich bei der Reflexion am konkav gekrümmten äußeren Rand verwendet wird. Analog zu den Simulationen im Kapitel 4.4 führt die konstante Goos-Hänchen-Verschiebung bei den gegebenen Parametern zu einer Verbreiterung der effektiven Schichtdicke  $d$  um etwa  $1,08 \mu\text{m}$ .

Der Vergleich zwischen Wellen- und Strahlenoptik soll nun anhand der Ergebnisse aus Kapitel 5.2.6 fortgesetzt werden. Abbildung 5.18 zeigt Ergebnisse für die schon in Abbildung 5.10 verwendeten Parameter. Den mit der strahlenoptischen Methode STRAHL



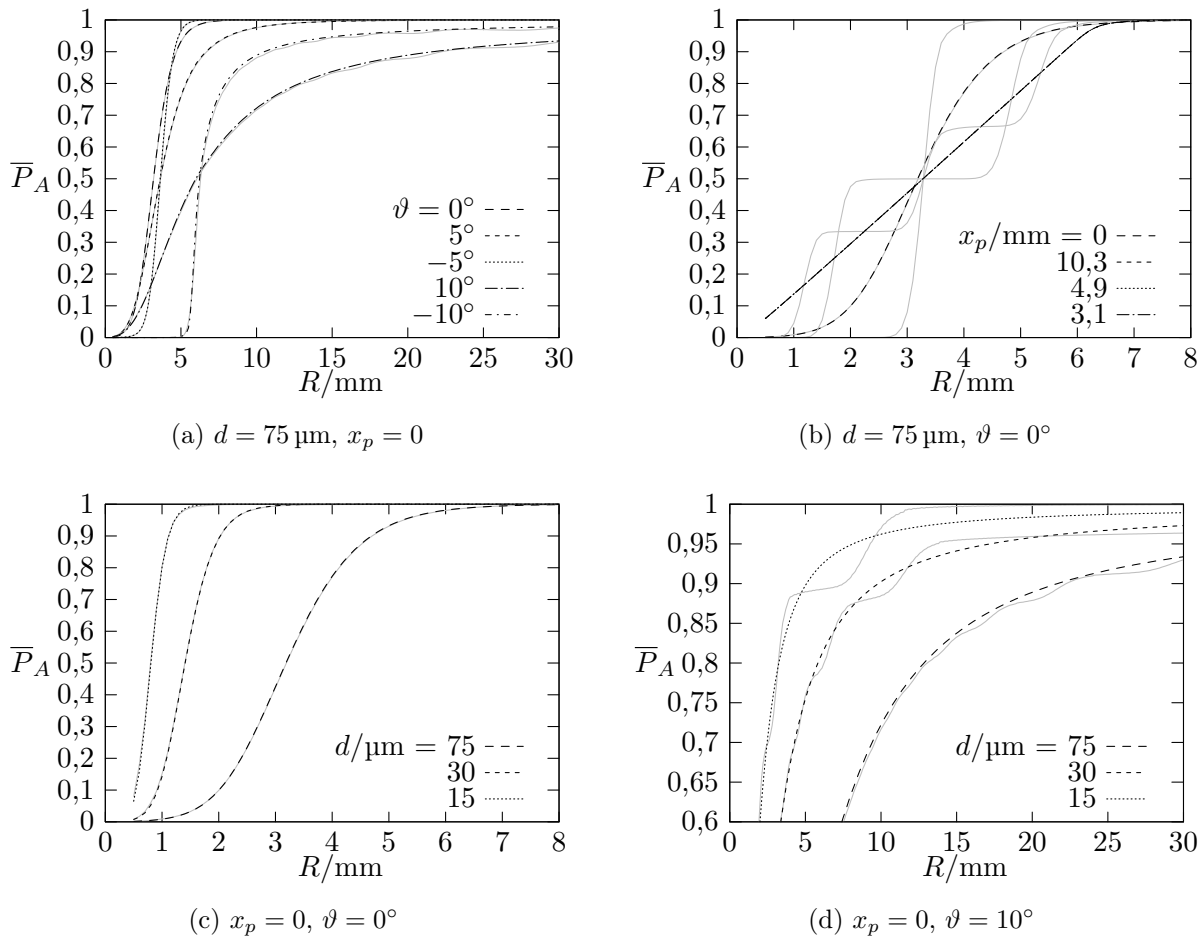


Abbildung 5.18.: Vergleich der normierten Ausgangsleistung nach Durchlaufen einer  $90^\circ$ -Krümmung. Als Referenz dienen die Ergebnisse aus Abbildung 5.10, welche grau hinterlegt sind.

TV CGH erstellten Graphen ist jeweils die wellentheoretische Referenz grau hinterlegt. Abbildung 5.18a zeigt zunächst noch einmal die hervorragende Übereinstimmung für den Wellenleiter der Dicke  $d = 75 \mu\text{m}$ , solange der Krümmung kein gerades Element vorgeschaltet ist. Es zeigt sich, dass diese Übereinstimmung auch bei Verdrehung der Strahlachse um  $\pm 5^\circ$  erhalten bleibt. Bei größeren Einfallswinkeln würden im geraden Wellenleiter dann zunehmend Moden nahe dem Cut-Off angeregt werden, welche auch schon bei großen Krümmungsradien abgestrahlt werden. Für  $\vartheta = \pm 10^\circ$  treten daher leichte Abweichungen auf, die im diskreten Modenspektrum begründet sind. Im strahlenoptischen Modell weisen die Graphen aufgrund der näherungsweise kontinuierlich verteilten Strahlschar immer einen vollkommen glatten Verlauf auf. Bei der vergleichsweise geringen Anzahl von 45 geführten Moden kommt es im wellentheoretischen Modell dagegen zu einem leicht oszillierenden Verlauf, da nach und nach die einzelnen Moden nahe dem Cut-Off abgedämpft werden.

Die Simulationsergebnisse in Abbildung 5.18b bestätigen die Annahme, dass die Variation der Länge des vorgeschalteten geraden Wellenleiters nicht adäquat im strahlenoptischen Modell berücksichtigt wird. Allerdings handelt es sich bei den gezeigten Ergebnissen im

Wesentlichen um akademische Spezialfälle, die in der Praxis vermutlich nicht derart ausgeprägt auftreten werden, zumal es sich nach wie vor um eine planare Approximation handelt. Wie sich zeigt, stellt die Strahlenoptik zwischen den Extremwerten jedoch einen ausgezeichneten Mittelwert dar, so dass die Ergebnisse in Abbildung 5.18b in keinem Fall als K.O.-Kriterium für die strahlenoptische Methodik zu werten sind. Die Graphen der strahlenoptischen Simulationen für  $x_p > 0$  fallen im Übrigen stets näherungsweise zusammen.

Eine kleinere Schichtdicke sorgt nicht zwangsläufig für einen erhöhten Fehler im strahlenoptischen Modell, wie Abbildung 5.18c für  $\vartheta = 0$  zeigt. Wie oben diskutiert gibt es jedoch Abweichungen, sobald Moden des geraden Eingangswellenleiters nahe dem Cut-Off angeregt werden, z.B. für  $\vartheta = -10^\circ$  in Abbildung 5.18d. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass nahe dem Cut-Off die Abstände zwischen den Phasenkonstanten maximal werden. Die Abstände zwischen den neun Phasenkonstanten der geführten Moden des Wellenleiters der Schichtdicke  $d = 15 \mu\text{m}$  wurden bereits exemplarisch in Tabelle 5.2 aufgeführt. Es liegt daher nahe, dass insbesondere bei kleinen Schichtdicken und somit wenigen geführten Moden die Abweichungen maximal sind. Dennoch liefert auch hier die Strahlenoptik näherungsweise immer einen Mittelwert zwischen den lokalen Oszillationen der wellentheoretischen Referenz.

Als Zwischenfazit lässt sich somit festhalten, dass die Ergebnisse der letztlich vollkommen unterschiedlichen Vorgehensweisen, Wellenoptik und Strahlenoptik, über weite Teile übereinstimmen. Solange im geraden Einkoppelwellenleiter wenig Leistung in Moden nahe dem Cut-Off geführt wird, ist diese Übereinstimmung nahezu unabhängig von der Schichtdicke des Wellenleiters. Wird jedoch auch Leistung in Moden nahe dem Cut-Off geführt, ist insbesondere für kleine Schichtdicken ein erhöhter Fehler zu erwarten. Darüber hinaus lassen sich bedingt durch das diskrete Modenspektrum stets Spezialfälle konstruieren, in denen die Strahlenoptik versagt bzw. nur näherungsweise einen Mittelwert ausgibt.

Abschließend soll noch die Leistungsverteilung im Modenspektrum des Ausgangswellenleiters mit der Leistungsverteilung in der Strahlschar des strahlenoptischen Modells verglichen werden. Abbildung 5.19 zeigt die Ergebnisse, die mit den Parametern aus Abbildung 5.11 korrespondieren, jedoch wurde in (b) und (c) das Vorzeichen des Einfallswinkels geändert, um etwas aussagekräftigere Darstellungen zu erhalten. Die wellentheoretischen Ergebnisse sind dabei wiederum grau hinterlegt. Aufgrund der gegenüber der zweidimensionalen Querschnittsgeometrie vergleichsweise geringen Anzahl geführter Moden ist grundsätzlich nur eine mäßige Übereinstimmung zu erwarten. Die Abbildungen 5.19a bis 5.19c zeigen jedoch eine sehr gute qualitative Übereinstimmung für die Schichtdicke  $d = 75 \mu\text{m}$ . Wie zu erwarten sind die Graphen der strahlenoptischen Simulation anschaulich wieder glatte Funktionen, während die wellentheoretischen Ergebnisse starke lokale Schwankungen aufweisen können. Insbesondere für kleine effektive Brechzahlen im Bereich  $1,555 > n_{\text{eff}} > 1,55$  ist jedoch eine gute Übereinstimmung zu verzeichnen, so dass die Breite des angeregten Spektrums korrekt wiedergegeben wird. Gleiches gilt näherungsweise auch für kleinere Schichtdicken. Durch die kleinere Anzahl geführter Moden werden die Abweichungen im Mittel wiederum größer. Abbildung 5.19d zeigt jedoch, dass auch für  $d = 15 \mu\text{m}$  noch eine gute qualitative Übereinstimmung herrscht, obwohl nur noch neun geführte Moden existieren. Die Abweichungen im Endwert für  $R = 1 \text{ mm}$  sind nicht von großer Bedeutung, da

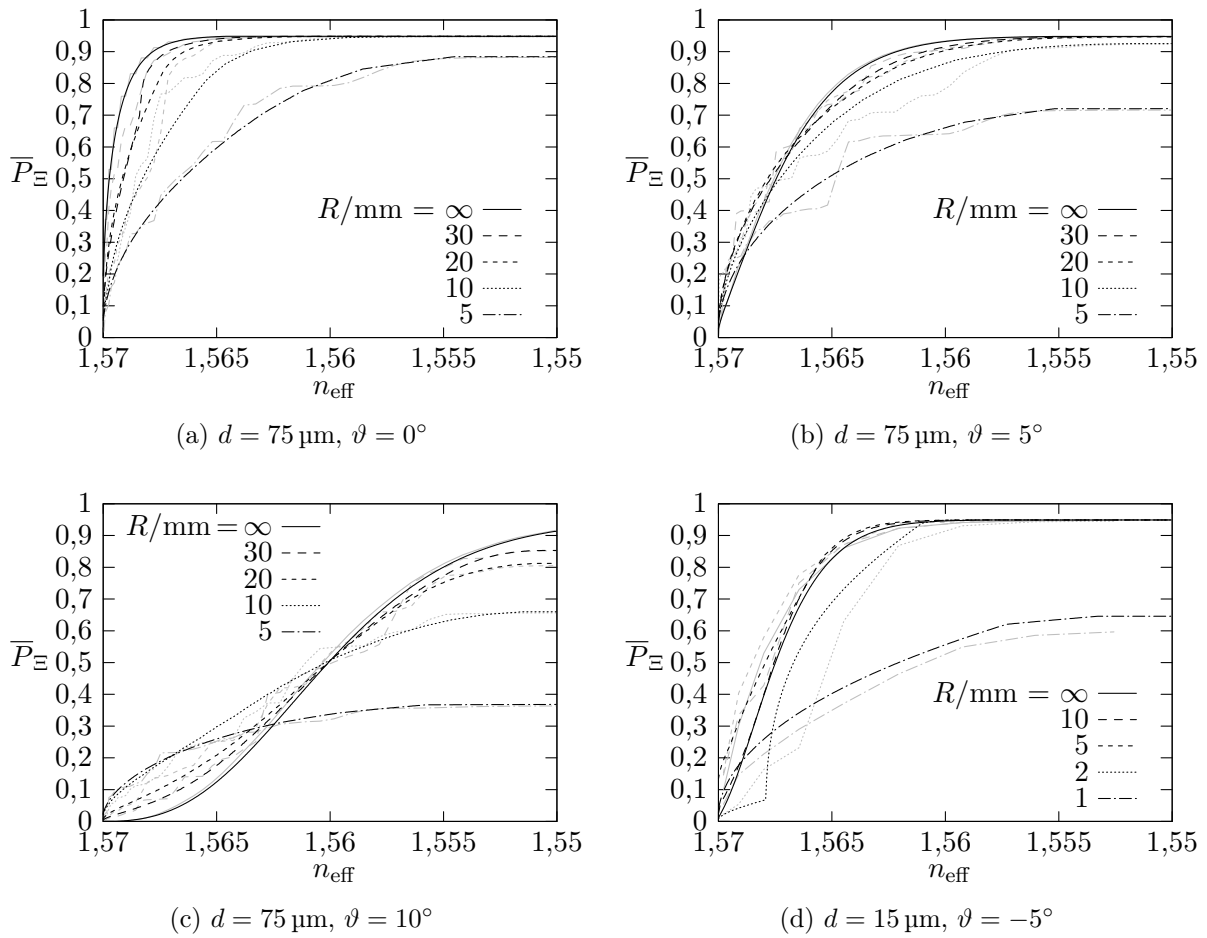


Abbildung 5.19.: Anregung des Modenspektrums nach Durchlaufen einer  $90^\circ$ -Krümmung: Akkumulierte Ausgangsleistung für unterschiedliche Krümmungsradien  $R$ . Die Parameter entsprechen denen der Abbildung 5.11, jedoch wurde in (b) und (c) das Vorzeichen des Einfallswinkels geändert. Die wellentheoretische Referenz ist grau hinterlegt.

die Verluste insgesamt schon sehr groß sind.



## 6. Zusammenfassung und Ausblick

### Zusammenfassung

Der Vergleich zwischen Wellen- und Strahlenoptik fokussiert sich zunächst auf die Beschreibung der Einkopplung monochromatischer optischer Wellen in einen dielektrischen Wellenleiter mit senkrechter Stirnfläche und wird dann auf die Beschreibung des Leistungsflusses im Wellenleiter ausgedehnt. Beides erfordert ein bekanntes Modenspektrum eines zunächst als längshomogen angenommenen Wellenleiters. Die Untersuchungen beschränken sich daher im Wesentlichen auf kreiszylindrische Fasern und planare Schichtwellenleiter, jeweils mit einem stufenförmigen Brechzahlprofil. Für das Randwertproblem eines rechteckförmigen Wellenleiters existiert kein analytischer Lösungsansatz. Daher werden für diesen in der Praxis wichtigen Wellenleiter die vorhandenen Näherungslösungen analysiert. Aber auch ein exakter Lösungsansatz erfordert stets die Lösung einer transzendenten Eigenwertgleichung. Des Weiteren muss das im Allgemeinen kontinuierliche Spektrum der Strahlungsmoden diskretisiert werden, z.B. wie in dieser Arbeit durch einen leitenden Schirm, und die Anzahl der berücksichtigten Moden begrenzt werden, so dass eine Implementierung auf einem Rechensystem möglich ist.

Insbesondere im Übertragungssystem mit multimodalen optischen Wellenleitern sind die Eigenschaften der Quelle von fundamentaler Bedeutung, da die Leistungsverteilung auf die Moden und damit die Übertragungseigenschaften des Systems von ihr abhängen. Das elektromagnetische Feld der Quelle wird durch einen paraxialen Gaußstrahl approximiert, dessen einfache mathematische Beschreibung und bekannte Eigenschaften einen umfassenden Vergleich zwischen Wellen- und Strahlenoptik ermöglichen. Aus dem resultierenden Poyntingvektorfeld wird das strahlenoptische Modell der Quelle abgeleitet. Zu beachten ist jedoch, dass der paraxiale Gaußstrahl nur eine Approximation für schwach divergierende Felder darstellt. Um einen erhöhten Fehler auszuschließen, lässt sich für diese Arbeit durch einen Vergleich mit einer Integraldarstellung über ebene Wellen ein maximaler Divergenzwinkel von  $5^\circ$  ermitteln. Zur effizienten Beschreibung der Einkopplung wird der Raum vor dem Wellenleiter ebenso wie der Wellenleiter selbst von einem leitenden Schirm umgeben und die Felder des Gaußstrahls durch die Moden des resultierenden Hohlleiters beschrieben. Somit ist es möglich, alle Teilfelder durch Wellenleitermoden zu beschreiben und die Amplituden der reflektierten und transmittierten Wellen durch Auswertung der Stetigkeitsbedingungen zu bestimmen. Nach einer ausführlichen Diskussion über die Auswirkungen des leitenden Schirms auf die Modellierung kann ein merklicher Einfluss auf die Anregung der geführten Moden der dielektrischen Wellenleiter ausgeschlossen werden.

Das kritische Element im strahlenoptischen Modell hinsichtlich der Modellierung der Einkopplung ist die Schnittstelle zwischen Kern und Mantel des Wellenleiters. Hierzu wird untersucht, ob die Verbreiterung des Faserkerndurchmessers um die Goos-Hänchen-Ver-

schiebung eine sinnvolle Ergänzung darstellt. Als erstes wichtiges Ergebnis dieser Arbeit lässt sich feststellen, dass die Berücksichtigung einer minimalen konstanten Goos-Hänchen-Verschiebung den mittleren Fehler im strahlenoptischen Modell deutlich reduziert, ohne den Simulationsaufwand zu erhöhen. Unter Anwendung dieser Methode wird anschließend die Entwicklung des Fehlers bei der Berechnung der Koppeffizienz für kleiner werdende Wellenleitergeometrien untersucht. Der maximale Kerndurchmesser von  $90\text{ }\mu\text{m}$  wird auf bis zu  $10\text{ }\mu\text{m}$  reduziert. Bei einer numerischen Apertur von 0,25 sinkt die Anzahl geführter Moden in einer Polarisation dabei von 1763 auf nur noch 26. Um hinreichend große Koppeffizienzen zu garantieren, muss der Durchmesser des Gaußstrahls kleiner als der Kerndurchmesser sein. Dieser Fall wird zunächst mit einem Verhältnis zwischen Kern- und Strahldurchmesser von 1,5 untersucht, wobei der einfallende Gaußstrahl um bis zu  $5^\circ$  verdreht und um bis zu 20 % der Strahlbreite lateral verschoben wird. Innerhalb dieses Bereichs resultiert eine hervorragende Übereinstimmung zwischen der wellentheoretischen und der strahlenoptischen Modellierung, mit relativen Abweichungen im unteren Promillebereich selbst für einen Strahldurchmesser von lediglich  $10\text{ }\mu\text{m}$ . Die Abweichungen erhöhen sich merklich, wenn Kern- und Strahldurchmesser gleich groß sind. Unter der Voraussetzung, dass eine hinreichend große Koppeffizienz erreicht wird, kann dieses Verhältnis als *schlechtester Fall* bezeichnet werden, da der gesamte Grenzbereich am Rand des Faserkerns ausgeleuchtet ist. Bei einer maximalen relativen Abweichung von 3,5 % für den Strahldurchmesser gleich  $10\text{ }\mu\text{m}$  und einem im Mittel deutlich geringeren Fehler lässt sich jedoch als Fazit festhalten, dass strahlenoptische Methoden nahezu uneingeschränkt zur Modellierung der Einkopplung in multimodale optische Stufenindex-Fasern geeignet sind. Deutlich erhöhte Abweichungen sind erst zu erwarten, wenn nur noch wenige geführte Moden existieren.

Der Modellierungsaufwand für die kreiszylindrische Faser ist nicht unerheblich, wenn neben dem Spektrum der geführten Moden auch das vollständige Spektrum der Strahlungsmoden berücksichtigt wird. Es wird daher zum Einen aufgezeigt, dass sich alle Ergebnisse auch aus einem Modell mit einem planaren Schichtwellenleiter ableiten lassen. Es resultieren aufgrund der fehlenden Abhängigkeit von einer Koordinate lediglich leichte quantitative Unterschiede im Vergleich zur Faser. Des Weiteren wird ein Näherungsverfahren vorgestellt, das lediglich geführte Moden berücksichtigt, aber dennoch eine sehr hohe Genauigkeit garantiert. Mit Hilfe dieses Verfahrens lässt sich auch der Lösungsansatz von Marcatili zur Modellierung rechteckförmiger Wellenleiter hinsichtlich der korrekten Beschreibung der Einkopplung in den Wellenleiter analysieren. Durch den Vergleich mit der strahlenoptischen Methodik kann als Ergebnis festgestellt werden, dass der Ansatz von Marcatili angewendet werden kann, solange keine Moden nahe dem Cut-Off angeregt werden. Dieses Ergebnis entspricht den bekannten Erwartungen und in der Praxis muss im Einzelfall entschieden werden, ob die damit verbundene Einschränkung hinnehmbar ist.

Im zweiten Schwerpunkt dieser Arbeit wird die Wellenausbreitung im dielektrischen Wellenleiter behandelt. Im Fokus steht neben der Beschreibung des transienten Leistungsflusses im längshomogenen Wellenleiter insbesondere die Bestimmung des Dämpfungsverhaltens zirkular gekrümmter Wellenleiter. Da zur Beschreibung des transienten Leistungsflusses das Modenspektrum innerhalb einer bestimmten Frequenzbandbreite bekannt sein muss, beschränkt sich die Untersuchung auf den planaren Schichtwellenleiter und auf periodische Zeitverläufe. Neben der Zeitbereichsdarstellung lässt sich unter Vernachlässigung der

chromatischen Dispersion auch eine Übertragungsfunktion für das Basisband ableiten. Es muss jedoch beachtet werden, dass die Übertragungsfunktion stark von der gewählten Anregung abhängt, d.h. die Übertragungseigenschaften eines multimodalen Wellenleiters sollten nicht isoliert von der Quelle analysiert werden. Wie erwartet stimmen die Ergebnisse der wellentheoretischen und strahlenoptischen Methoden für den längshomogenen Wellenleiter weitestgehend überein. Diese Übereinstimmung bezieht sich jedoch nur auf den tiefpassgefilterten Gesamtleistungsfluss und nicht auf die lokale Intensitätsverteilung im Wellenleiter, die im strahlenoptischen Modell aufgrund der fehlenden Phaseninformation nicht wiedergegeben werden kann. Gravierende Unterschiede im Leistungsfluss und in der Übertragungsfunktion des längshomogenen Wellenleiters existieren darüberhinaus erst, wenn nur sehr wenige geführte Moden existieren bzw. angeregt werden oder wenn ausschließlich Moden nahe dem Cut-Off angeregt werden.

Ein analytisch exakter Lösungsansatz für zirkular gekrümmte Wellenleiter existiert nur für den planaren Schichtwellenleiter. Allerdings ist das resultierende Modenspektrum kontinuierlich und zudem nichtorthogonal. Zur Beschreibung der Ankopplung an den Wellenleiter müssten daher Integralgleichungen gelöst werden, für die keine analytische Lösung bekannt ist und die auch numerisch schwer handhabbar sind. Aus dem Modenspektrum lassen sich jedoch einige wenige *quasigeführte Moden* isolieren, deren Felder die Wellenleiterkrümmung näherungsweise ungestört durchlaufen und für den unendlich großen Krümmungsradius in die geführten Moden des geraden Wellenleiters übergehen. Die Eigenwerte dieser Moden sind analog zum geraden Wellenleiter reellwertig, es lässt sich aber zusätzlich eine Dämpfungskonstante ableiten, die als Imaginärteil des Eigenwerts interpretiert werden kann. Dieser zusammengesetzte Eigenwert entspricht einer Lösung nach dem aus der Literatur bekannten Leckwellen-Ansatz, welcher explizit radial nach außen laufende Wellen ansetzt und deren Eigenwerte in der komplexen Ebene liegen. Der Rechenaufwand dieser Methode ist ungleich höher und die Methode der quasigeführten Moden ist daher vorzuziehen.

Die Rechnung auf Basis diskreter quasigeführter Moden verfolgt das Ziel, ausgehend von einem geraden Eingangswellenleiter die Anregung der geführten Moden im wiederum geraden Ausgangswellenleiter nach Durchlaufen einer  $90^\circ$ -Krümmung zu bestimmen. Zur Validierung wird ein Vergleich mit einer numerischen Simulation durchgeführt, welcher eine sehr gute Übereinstimmung für schwache Abstrahlverluste aufzeigt. Für stärkere Verluste stellt die Rechnung auf Basis quasigeführter Moden immer noch eine gute Näherung dar.

Den Abschluss dieser Arbeit bildet ein umfangreicher Vergleich zur strahlenoptischen Theorie. Nahezu unabhängig von der Schichtdicke des Wellenleiters herrscht immer dann eine sehr gute Übereinstimmung bezüglich der berechneten Ausgangsleistung, wenn dem gekrümmten Wellenleiter kein gerades Element vorgeschaltet ist. Andernfalls können zwar Abweichungen auftreten, da der örtliche Leistungsfluss im strahlenoptischen Modell nicht korrekt wiedergegeben wird, im Mittel herrscht jedoch immer noch gute Übereinstimmung. Insbesondere wird der Krümmungsradius, ab dem mit erhöhten Verlusten durch Abstrahlung zu rechnen ist, übereinstimmend berechnet. Merkliche Unterschiede existieren dann, wenn Moden nahe dem Cut-Off angeregt werden, was sich insbesondere im Wellenleiter mit kleiner Schichtdicke bemerkbar macht. Neben der Ausgangsleistung werden auch die Ausbreitungskonstanten der ausgangsseitig angeregten Moden und Strahlen verglichen.

Wieder lässt sich unabhängig von der Schichtdicke eine im Mittel gute Übereinstimmung registrieren.

## Ausblick

Die in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse haben aufgezeigt, dass strahlenoptische Verfahren grundsätzlich zur Modellierung optisch multimodaler Wellenleiter geeignet sind und zwar auch dann, wenn bei kleinem Kerndurchmesser nur noch einige zehn Moden geführt werden. Jedoch handelt es sich insbesondere bei der Beschreibung des gekrümmten Wellenleiters noch um ein rein akademisches Beispiel. Wünschenswert im Kontext der EOPCB-Technologie wäre es beispielsweise, den Vergleich zwischen Wellen- und Strahlenoptik auf gekrümmte rechteckförmige Wellenleiter auszudehnen. Wellentheoretische Modellierungsansätze hierzu gibt es bereits seit langem, doch mangels exakter Lösungen beruhen diese gänzlich auf Näherungslösungen und sind daher nur bedingt als Referenz geeignet. Einen Überblick verschaffen die Arbeiten [13, 57].

Wesentliche Fortschritte in der Modellierung optischer Wellenleiter sind daher voraussichtlich nur mit numerischen Methoden zu erwarten. Die stetigen Steigerungen der Rechenleistung und der Speicherkapazität der am Markt verfügbaren Hardware ermöglichen die Simulation immer größerer Problemstellungen und machen damit klassische gitterbasierte Verfahren zunehmend interessanter [10, 75]. Für eine ganzheitliche numerische Simulation einer optisch multimodalen Übertragungsstrecke mit absoluten Abmessungen von einigen hunderttausend Wellenlängen entlang der Wellenleitertrajektorie ist jedoch noch einige Entwicklungsarbeit erforderlich, so dass die Ergebnisse dieser Arbeit vermutlich noch einige Zeit lang eine hilfreiche Referenz darstellen werden. Numerische Verfahren sind insbesondere auch vielversprechend anwendbar in der Modellierung von Laserdioden, so dass anstelle eines idealen Gaußstrahls zukünftig Modelle realer Quellen verwendet werden könnten.



# A. Anhang

## A.1. Der Gaußstrahl: Ergänzungen

### A.1.1. Hertzsche Potenziale des Gaußstrahls

Vektorpotenziale sind oft ein geeignetes Hilfsmittel komplexe Problemstellungen der Feldtheorie transparenter darzustellen. Im zeitharmonischen Fall lassen sich die Feldgrößen durch  $z$ -gerichtete Hertzsche Potenziale wie folgt beschreiben [16]:

$$\vec{E} = \nabla \times \nabla \times \vec{e}_z \underline{\Pi}_{ez} - j\omega\mu \nabla \times \vec{e}_z \underline{\Pi}_{mz}, \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{H} = j\omega\varepsilon \nabla \times \vec{e}_z \underline{\Pi}_{ez} + \nabla \times \nabla \times \vec{e}_z \underline{\Pi}_{mz}. \quad (\text{A.2})$$

Darin sind  $\underline{\Pi}_{ez}$  und  $\underline{\Pi}_{mz}$  die  $z$ -Komponenten des elektrischen und magnetischen Hertzschen Vektors.

Die Spektraldarstellung der Hertzschen Vektoren sei bekannt, vgl. 2.22. Es gilt

$$\underline{\Pi}_{e/m,z} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \underline{A}_{\Pi_{e/m}}(k_x, k_y) h(k_x, k_y, \vec{r}) dk_x dk_y \quad (\text{A.3})$$

mit

$$h(k_x, k_y, \vec{r}) = \exp \left( -j \left( k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z \right) \right). \quad (\text{A.4})$$

Unter der Annahme, dass Rotation und Integration vertauscht werden dürfen, müssen die Rotationsoperatoren in (A.1) und (A.2) lediglich auf  $h$  angewendet werden. Mit

$$\nabla \times \vec{e}_z h(k_x, k_y, \vec{r}) = -j (k_y \vec{e}_x - k_x \vec{e}_y) h(k_x, k_y, \vec{r}) \quad (\text{A.5})$$

und

$$\nabla \times \nabla \times \vec{e}_z h(k_x, k_y, \vec{r}) = (-k_x k_z \vec{e}_x - k_y k_z \vec{e}_y + (k_x^2 + k_y^2) \vec{e}_z) h(k_x, k_y, \vec{r}) \quad (\text{A.6})$$

sowie

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (\text{A.7})$$

ergibt sich das elektrische Feld zu

$$\begin{aligned} \vec{E} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} & \left( (-k_x k_z \vec{e}_x - k_y k_z \vec{e}_y + (k_x^2 + k_y^2) \vec{e}_z) \underline{A}_{\Pi_e}(k_x, k_y) \right. \\ & \left. - \omega\mu (k_y \vec{e}_x - k_x \vec{e}_y) \underline{A}_{\Pi_m}(k_x, k_y) \right) h(k_x, k_y, \vec{r}) dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Wird angenommen, dass die transversale Spektralfunktion  $\underline{T}_t$  der elektrischen Feldstärke bekannt ist, dann folgt

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_t \underline{T}_t(k_x, k_y) = -k_x k_z \underline{A}_{\Pi_e}(k_x, k_y) - \omega \mu k_y \underline{A}_{\Pi_m}(k_x, k_y), \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_t \underline{T}_t(k_x, k_y) = -k_y k_z \underline{A}_{\Pi_e}(k_x, k_y) + \omega \mu k_x \underline{A}_{\Pi_m}(k_x, k_y). \quad (\text{A.10})$$

Somit lassen sich die Spektralfunktionen der Hertzischen Potenziale in Abhängigkeit von  $\underline{T}_t$  angeben:

$$\underline{A}_{\Pi_e}(k_x, k_y) = -\frac{(k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_t}{k_z (k_x^2 + k_y^2)} \underline{T}_t(k_x, k_y), \quad (\text{A.11})$$

$$\underline{A}_{\Pi_m}(k_x, k_y) = \frac{(k_x \vec{e}_y - k_y \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_t}{\omega \mu (k_x^2 + k_y^2)} \underline{T}_t(k_x, k_y). \quad (\text{A.12})$$

Für die elektrische und magnetische Feldstärke folgt weiter:

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \vec{e}_t - \frac{(k_x [\vec{e}_x \cdot \vec{e}_t] + k_y [\vec{e}_y \cdot \vec{e}_t])}{k_z} \vec{e}_z \right) \underline{T}_t(k_x, k_y) h(k_x, k_y, \vec{r}) dk_x dk_y \quad (\text{A.13})$$

und

$$\begin{aligned} \vec{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega \mu} & \left( -\left( \frac{k_x k_y}{k_z} [\vec{e}_x \cdot \vec{e}_t] + \frac{(k_y^2 + k_z^2)}{k_z} [\vec{e}_y \cdot \vec{e}_t] \right) \vec{e}_x \right. \\ & + \left( \frac{k_x^2 + k_z^2}{k_z} [\vec{e}_x \cdot \vec{e}_t] + \frac{k_x k_y}{k_z} [\vec{e}_y \cdot \vec{e}_t] \right) \vec{e}_y \\ & \left. + (k_x [\vec{e}_y \cdot \vec{e}_t] - k_y [\vec{e}_x \cdot \vec{e}_t]) \vec{e}_z \right) \underline{T}_t(k_x, k_y) h(k_x, k_y, \vec{r}) dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Diese Ausdrücke finden sich in einer kompakteren Operatorschreibweise in (2.27) und (2.28) wieder.

### A.1.2. Feldbeschreibung des planaren Gaußstrahls

Die Modellierung der Einkopplung in den planaren Schichtwellenleiter erfordert analog zur Beschreibung der Moden im Kapitel 3.1.3 eine Quelle, deren Feldgrößen unabhängig von einer transversalen Koordinate sind, hier der  $y$ -Koordinate.

Die Einhüllende  $u$  des planaren Gaußstrahls ist durch

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-jk \frac{x^2}{2R(z)}\right) \exp(j \frac{1}{2} \arctan(z/z_0)) \quad (\text{A.15})$$

gegeben, vgl. (2.39). Darin sind  $w_0$ ,  $w(z)$  und  $R(z)$  unverändert definiert durch (2.40). Entsprechend ändern sich auch die Ausbreitungseigenschaften des planaren Gaußstrahls

im Vergleich zum dreidimensionalen Gaußstrahl im Wesentlichen nicht. Jedoch ist die innerhalb des Strahlradius  $w(z)$  transportierte Leistung mit über 95% der Gesamtleistung deutlich größer.

Es ist sinnvoll, explizit zwischen einem transversalelektrischen und einem transversalmagnetischen Strahl zu unterscheiden:

$$\text{TE:} \quad \vec{H}(x,z) = -\frac{E_0}{Z} \left( \vec{e}_x - \frac{x}{z+jz_0} \vec{e}_z \right) u(x,z) \exp(-jkz), \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{E}(x,z) = E_0 \vec{e}_y u(x,z) \exp(-jkz), \quad (\text{A.17})$$

$$\text{TM:} \quad \vec{H}(x,z) = \frac{E_0}{Z} \vec{e}_y u(x,z) \exp(-jkz), \quad (\text{A.18})$$

$$\vec{E}(x,z) = E_0 \left( \vec{e}_x - \frac{x}{z+jz_0} \vec{e}_z \right) u(x,z) \exp(-jkz). \quad (\text{A.19})$$

Die Feldgrößen werden in den Simulationen dieser Arbeit hinsichtlich der transportierten Leistung normiert. Der Leistungstransport in  $z$ -Richtung pro Längenabschnitt  $\Delta y$  ist gegeben durch

$$\bar{P}'_z = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\} \vec{e}_z dx = \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,z)|^2 dx \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z} \frac{w_0}{w(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -2 \frac{x^2}{w^2(z)} \right) dx \quad (\text{A.21})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{|E_0|^2}{Z} w_0. \quad (\text{A.22})$$

Um analog zur Beschreibung im Kapitel 2.4.3 ein strahlenoptisches Modell des planaren Gaußstrahls abzuleiten, muss der Leistungsfluss in einem Längenabschnitt  $\Delta x$  bestimmt werden, mit dem Ergebnis

$$\bar{P}'_m = \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z} \frac{w_0}{w(z)} \int_{x_m}^{x_m+\Delta x} \exp \left( -2 \frac{x_m^2}{w^2(z)} \right) dx \quad (\text{A.23})$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|E_0|^2}{Z} w_0 \left( \text{erf} \left( \sqrt{2} \frac{x_m + \Delta x}{w(z)} \right) - \text{erf} \left( \sqrt{2} \frac{x_m}{w(z)} \right) \right). \quad (\text{A.24})$$

Der Aufpunkt eines Strahls ist nun gegeben durch

$$\tilde{x}_m = \left( m + \frac{1}{2} \right) \Delta x \quad \text{mit} \quad m \in \{-M/2, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, M/2 - 1\}. \quad (\text{A.25})$$

Die Anzahl  $M$  der angesetzten Strahlen ist somit gerade und analog zu (2.125) gilt

$$\frac{M}{2} = \frac{2,5w(z)}{\Delta x}. \quad (\text{A.26})$$

## A.2. Leistungstransport im optischen Wellenleiter

Die folgende Darstellung soll nur einen Überblick über den Implementierungsaufwand verschaffen und es werden daher nur die geführten Moden explizit berücksichtigt.

### A.2.1. Schichtwellenleiter

Die Bestimmung des Leistungstransports in Ausbreitungsrichtung im zeitlichen Mittel erfolgt durch Integration der  $z$ -Komponente des Poyntingvektors. Dieses Integral ist durch (3.23) gegeben

$$\bar{P} = \Delta y \frac{\Re\{k_z\}}{2\omega\mu} \int_{z=0} |\underline{\mathcal{E}}_y(x)|^2 dx. \quad (\text{A.27})$$

Darin ist die elektrische Feldstärke der TE-Moden gegeben durch (3.14)

$$\underline{\mathcal{E}}_y(x) = \begin{cases} -\sinh(k_{x3}(x - \frac{d}{2} - a_3)) / \sinh(k_{x3}a_3) & \text{für } \frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} + a_3 \\ \cos(k_{x1}(x - \frac{d}{2})) + A_1 \sin(k_{x1}(x - \frac{d}{2})) & \text{für } -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ A_3 \sinh(k_{x2}(x + \frac{d}{2} + a_2)) / \sinh(k_{x2}a_2) & \text{für } -a_2 - \frac{d}{2} < x < -\frac{d}{2} \end{cases}. \quad (\text{A.28})$$

Die Integrationen erstrecken sich über insgesamt fünf Teilintegrationen mit dem Ergebnis

$$\bar{P} = \Delta y \frac{\Re\{k_z\}}{4\omega\mu} \left( \frac{I_1}{|\sinh(k_{x3}a_3)|^2} + \frac{|A_3|^2 I_2}{|\sinh(k_{x2}a_2)|^2} + I_3 + |A_1|^2 I_4 + 2\text{Re}\{A_1 I_5\} \right). \quad (\text{A.29})$$

Darin sind:

$$I_1 = \int_{x=\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}+a_3} |\sinh(k_{x3}(x - \frac{d}{2} - a_3))|^2 dx = \frac{1}{2k_{x3}} (\cosh(k_{x3}a_3) \sinh(k_{x3}a_3) - k_{x3}a_3) \quad (\text{A.30})$$

$$I_2 = \int_{x=-\frac{d}{2}-a_2}^{-\frac{d}{2}} |\sinh(k_{x2}(x + \frac{d}{2} + a_2))|^2 dx = \frac{1}{2k_{x2}} (\cosh(k_{x2}a_2) \sinh(k_{x2}a_2) - k_{x2}a_2) \quad (\text{A.31})$$

$$I_3 = \int_{x=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} |\cos(k_{x1}(x - \frac{d}{2}))|^2 dx = \frac{1}{2k_{x1}} (\cos(k_{x1}d) \sin(k_{x1}d) + k_{x1}d) \quad (\text{A.32})$$

$$I_4 = \int_{x=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} |\sin(k_{x1}(x - \frac{d}{2}))|^2 dx = \frac{1}{2k_{x1}} (-\cos(k_{x1}d) \sin(k_{x1}d) + k_{x1}d) \quad (\text{A.33})$$

$$I_5 = \int_{x=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cos(k_{x1}(x - \frac{d}{2})) \sin(k_{x1}(x - \frac{d}{2})) dx = -\frac{\sin^2(k_{x1}d)}{2k_{x1}} \quad (\text{A.34})$$

### A.2.2. Kreiszyklindrische Faser

Die Integration des Poyntingvektors (3.52) über die Querschnittsfläche der Faser lässt sich aufteilen in Integrationen über die Kernfläche ( $\bar{P}_1$ ) und über die Mantelfläche ( $\bar{P}_2$ ). Die Gesamtleistung ergibt sich als Summe beider Anteile

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2. \quad (\text{A.35})$$

Im Kernbereich  $0 \leq \varrho < r_d$  gilt  $B_{21} = A_4 B_{11}$ . Zudem ist die Funktion  $B_{11}$  mit der Bedingung (3.8) stets reellwertig. Nach der elementar durchführbaren Integration in  $\varphi$ -Richtung verbleibt das Integral<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 = \frac{\pi}{2k_{\varrho 1}^4} \int_0^{r_d} & \left( (\omega \varepsilon_1 k_z + \omega \mu k_z^* |A_4|^2) \left( |B'_{11}(\varrho)|^2 + \frac{m^2}{\varrho^2} |B_{11}(\varrho)|^2 \right) \right. \\ & \left. + 2(k_1^2 A_4 + |k_z|^2 A_4^*) \frac{m}{\varrho} B'_{11}(\varrho) B_{11}(\varrho) \right) \varrho d\varrho. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Der Ausdruck ist bereits so umgeformt worden, dass nach Einsetzen von  $B_{11}$  die Beziehungen (A.82), (A.83) und (A.87) direkt angewendet werden können. Es folgt:

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 = \frac{\pi}{4k_{\varrho 1}^2} \frac{1}{J_m^2(k_{\varrho 1} r_d)} \int_0^{r_d} & \left( (\omega \varepsilon_1 k_z + \omega \mu k_z^* |A_4|^2) (J_{m-1}^2(k_{\varrho 1} \varrho) + J_{m+1}^2(k_{\varrho 1} \varrho)) \right. \\ & \left. + (k_1^2 A_4 + |k_z|^2 A_4^*) (J_{m-1}^2(k_{\varrho 1} \varrho) - J_{m+1}^2(k_{\varrho 1} \varrho)) \right) \varrho d\varrho. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Das Integral kann nun mit Hilfe von (A.100) gelöst werden, mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 = \frac{\pi r_d^2}{8k_{\varrho 1}^2} \frac{1}{J_m^2(k_{\varrho 1} r_d)} & \left( (\omega \varepsilon_1 + k_z^* A_4^*) (k_z + \omega \mu A_4) (J_{m-1}^2(k_{\varrho 1} r_d) - J_m(k_{\varrho 1} r_d) J_{m-2}(k_{\varrho 1} r_d)) \right. \\ & \left. + (\omega \varepsilon_1 - k_z^* A_4^*) (k_z - \omega \mu A_4) (J_{m+1}^2(k_{\varrho 1} r_d) - J_m(k_{\varrho 1} r_d) J_{m+2}(k_{\varrho 1} r_d)) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

<sup>1</sup>Da explizit nur geführte Moden berücksichtigt werden, wird auf eine Darstellung des Realteiloperators verzichtet.

Für die Integration über die Mantelfläche  $r_d \leq \varrho < r_s$  werden die Konstanten  $A_2$  und  $A_3$  sowie  $A_5$  und  $A_6$  zugunsten einer kompakten Schreibweise gemäß

$$\tilde{A}_2 = A_2 / I_m(k_{\varrho 2} r_d), \quad (\text{A.39})$$

$$\tilde{A}_3 = A_3 / K_m(k_{\varrho 2} r_d), \quad (\text{A.40})$$

$$\tilde{A}_5 = A_5 / (A_4 I_m(k_{\varrho 2} r_d)), \quad (\text{A.41})$$

$$\tilde{A}_6 = A_6 / (A_4 K_m(k_{\varrho 2} r_d)) \quad (\text{A.42})$$

substituiert. Diese neuen Konstanten sind zudem auch im Fall evaneszenter Moden stets reellwertig. Eingesetzt in (3.52) ergibt sich nach Integration in  $\varphi$ -Richtung der folgende Integralausdruck:

$$\begin{aligned} \overline{P}_2 = \frac{\pi}{2k_{\varrho 2}^2} \int_{r_d}^{r_s} \left[ \left( \omega \varepsilon_2 k_z \tilde{A}_2^2 + \omega \mu k_z^* |A_4|^2 \tilde{A}_5^2 \right) \left( I_m'^2 + \frac{m^2}{k_{\varrho 2}^2 \varrho^2} I_m^2 \right) \right. \\ + \left( 2\omega \varepsilon_2 k_z \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 + 2\omega \mu k_z^* |A_4|^2 \tilde{A}_5 \tilde{A}_6 \right) \left( I_m' K_m' + \frac{m^2}{k_{\varrho 2}^2 \varrho^2} I_m K_m \right) \\ + \left( \omega \varepsilon_2 k_z \tilde{A}_3^2 + \omega \mu k_z^* |A_4|^2 \tilde{A}_6^2 \right) \left( K_m'^2 + \frac{m^2}{k_{\varrho 2}^2 \varrho^2} K_m^2 \right) \\ + (|k_z|^2 A_4^* + k_2^2 A_4) \frac{m}{k_{\varrho 2} \varrho} \left( 2\tilde{A}_2 \tilde{A}_5 I_m' I_m + 2\tilde{A}_3 \tilde{A}_6 K_m' K_m \right. \\ \left. \left. + (\tilde{A}_3 \tilde{A}_5 + \tilde{A}_2 \tilde{A}_6) (K_m I_m' + K_m' I_m) \right) \right] \varrho d\varrho. \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

Das Argument der Besselfunktionen ist stets gleich  $k_{\varrho 2} \varrho$  und wurde daher nicht dargestellt. Des Weiteren wurde der Ausdruck so umgeformt, dass die Beziehungen (A.90), (A.91) und (A.92) direkt angewendet werden können. Es folgt

$$\begin{aligned} \overline{P}_2 = \frac{\pi}{2k_{\varrho 2}^2} \int_{r_d}^{r_s} \left[ \left( \omega \varepsilon_2 k_z \tilde{A}_2^2 + \omega \mu k_z^* |A_4|^2 \tilde{A}_5^2 \right) \frac{1}{2} (I_{m-1}^2 + I_{m+1}^2) \right. \\ - \left( 2\omega \varepsilon_2 k_z \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 + 2\omega \mu k_z^* |A_4|^2 \tilde{A}_5 \tilde{A}_6 \right) \frac{1}{2} (I_{m-1} K_{m-1} + I_{m+1} K_{m+1}) \\ + \left( \omega \varepsilon_2 k_z \tilde{A}_3^2 + \omega \mu k_z^* |A_4|^2 \tilde{A}_6^2 \right) \frac{1}{2} (K_{m-1}^2 + K_{m+1}^2) \\ + (|k_z|^2 A_4^* + k_2^2 A_4) \left( \frac{m}{k_{\varrho 2} \varrho} \left( 2\tilde{A}_2 \tilde{A}_5 I_m' I_m + 2\tilde{A}_3 \tilde{A}_6 K_m' K_m \right) \right. \\ \left. \left. - (\tilde{A}_3 \tilde{A}_5 + \tilde{A}_2 \tilde{A}_6) (I_{m-1} K_{m-1} - I_{m+1} K_{m+1}) \right) \right] \varrho d\varrho. \quad (\text{A.44}) \end{aligned}$$

Die Integrationen können mit Hilfe von (A.103) gelöst werden, mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \bar{P}_2 = \frac{\pi}{8k_{\varrho 2}^2} & \left[ \left( \omega \left( \varepsilon_2 k_z \tilde{A}_2^2 + \mu k_z^* |A_4|^2 \tilde{A}_5^2 \right) (I_{m-1}^2 + I_{m+1}^2 + I_m(I_{m-2} + I_{m+2})) \right. \right. \\ & + \omega \left( \varepsilon_2 k_z \tilde{A}_3^2 + \mu k_z^* |A_4|^2 \tilde{A}_6^2 \right) (K_{m-1}^2 + K_{m+1}^2 + K_m(K_{m-2} + K_{m+2})) \\ & - (D + E) (I_{m-1}K_{m-1} + I_{m-2}K_m + I_mK_{m-2}) \\ & \left. - (D - E) (+I_{m+1}K_{m+1} + I_mK_{m+2} + I_{m+2}K_m) \right) \varrho^2 \\ & \left. + (|k_z|^2 A_4^* + k_2^2 A_4) \frac{4m}{k_{\varrho 2}^2} \left( \tilde{A}_2 \tilde{A}_5 I_m^2 + \tilde{A}_3 \tilde{A}_6 K_m^2 \right) \right]_{r_d}^{r_s}. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Darin sind

$$D = \omega \left( \varepsilon_2 k_z \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 + \mu k_z^* |A_4|^2 \tilde{A}_5 \tilde{A}_6 \right)$$

und

$$E = (|k_z|^2 A_4^* + k_2^2 A_4) \left( \tilde{A}_3 \tilde{A}_5 + \tilde{A}_2 \tilde{A}_6 \right).$$

Die Integralgrenzen wurden zugunsten einer kompakteren Darstellung nicht eingesetzt. Im Bereich der Strahlungsmoden ist  $k_{\varrho 2}$  imaginär und es empfiehlt sich, bereits im Ansatz die Besselfunktionen gemäß (3.49) und (3.50) zu substituieren. Die Integration kann dann analog durchgeführt werden, jedoch mit Änderungen in den einzelnen Vorzeichen.

Im Fall evaneszenter Moden sind  $k_z$  und damit auch  $A_4$  rein imaginär. Bedingt durch die dann erforderliche Realteilbildung ist die im zeitlichen Mittel transportierte Leistung des einzelnen evaneszenten Modes wie erwartet gleich Null.

## A.3. Überlappintegrale abrupter Wellenleiterübergänge

Wie schon im vorherigen Abschnitt werden in der folgenden Beschreibung explizit nur geführte Moden berücksichtigt.

### A.3.1. Schichtwellenleiter

Im planaren Modell des Schichtwellenleiters muss gemäß (4.17) ein Überlappintegral der Form

$$Q_{\mu\nu}^{(lr)} = \frac{k_{z\mu}}{\omega\mu} \Delta y \int_{G_s} \underline{\mathcal{E}}_{y\nu}^{(l)}(x) \{ \underline{\mathcal{E}}_{y\mu}^{(r)}(x) \}^* dx \quad (\text{A.46})$$

gelöst werden. Darin wird das rechtsseitige Feld durch einen Mode des Schichtwellenleiters beschrieben (3.14):

$$\underline{\mathcal{E}}_{y\mu}^{(r)}(x) = \begin{cases} -\sinh(k_{x3\mu}(x - \frac{d}{2} - a_3)) / \sinh(k_{x3\mu}a_3) & \text{für } \frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} + a_3 \\ \cos(k_{x1\mu}(x - \frac{d}{2})) + A_1 \sin(k_{x1\mu}(x - \frac{d}{2})) & \text{für } -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ A_3 \sinh(k_{x2\mu}(x + \frac{d}{2} + a_2)) / \sinh(k_{x2\mu}a_2) & \text{für } -a_2 - \frac{d}{2} < x < -\frac{d}{2} \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

Das linksseitige Feld des Modes der Parallelplattenleitung ist gegeben durch (3.12):

$$\underline{\mathcal{E}}_{x\nu}^{(l)}(x, z) = \sin(k_{x\nu}(x - \frac{d}{2} - a_3)). \quad (\text{A.48})$$

Zur Bestimmung des Überlappintegrals sind vier Teilintegrationen erforderlich, mit dem Ergebnis

$$Q_{\mu\nu}^{(lr)} = \frac{k_{z\mu}}{\omega\mu} \Delta y \left( -\frac{I_1}{\sinh(k_{x3\mu}a_3)} + I_2 + A_1 I_3 + \frac{A_3 I_4}{\sinh(k_{x2\mu}a_2)} \right). \quad (\text{A.49})$$

Darin sind:

$$I_1 = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2} + a_3} \sinh(k_{x3\mu}(x - \frac{d}{2} - a_3)) \sin(k_{x\nu}(x - \frac{d}{2} - a_3)) dx = \frac{1}{k_{x3\mu}^2 + k_{x\nu}^2} \left( k_{x3\mu} \cosh(k_{x3\mu}a_3) \sin(k_{x\nu}a_3) - k_{x\nu} \sinh(k_{x3\mu}a_3) \cos(k_{x\nu}a_3) \right) \quad (\text{A.50})$$

$$I_2 = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \cos(k_{x1\mu}(x - \frac{d}{2})) \sin(k_{x\nu}(x - \frac{d}{2} - a_3)) dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos(k_{x\nu}a_3)}{k_{x1\mu} - k_{x\nu}} + \frac{\cos(k_{x\nu}a_3)}{k_{x1\mu} + k_{x\nu}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\cos(k_{x1\mu}d - k_{x\nu}(d + a_3))}{k_{x1\mu} - k_{x\nu}} + \frac{\cos(k_{x1\mu}d + k_{x\nu}(d + a_3))}{k_{x1\mu} + k_{x\nu}} \right) \quad (\text{A.51})$$



$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \sin(k_{x1\mu}(x - \frac{d}{2})) \sin(k_{x\nu}(x - \frac{d}{2} - a_3)) dx = \\
&\frac{1}{2} \left( \frac{\sin(k_{x\nu}a_3)}{k_{x1\mu} - k_{x\nu}} + \frac{\sin(k_{x\nu}a_3)}{k_{x1\mu} + k_{x\nu}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(k_{x1\mu}d - k_{x\nu}(d + a_3))}{k_{x1\mu} - k_{x\nu}} - \frac{\sin(k_{x1\mu}d + k_{x\nu}(d + a_3))}{k_{x1\mu} + k_{x\nu}} \right)
\end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{-\frac{d}{2}-a_2}^{-\frac{d}{2}} \sinh(k_{x2\mu}(x + \frac{d}{2} + a_2)) \sin(k_{x\nu}(x - \frac{d}{2} - a_3)) dx = \\
&- \frac{1}{k_{x2\mu}^2 + k_{x\nu}^2} \left( k_{x2\mu} \cosh(k_{x2\mu}a_2) \sin(k_{x\nu}(d + a_3)) + k_{x\nu} \sinh(k_{x2\mu}a_2) \cos(k_{x\nu}(d + a_3)) \right)
\end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

### A.3.2. Kreiszyindrische Faser

Das Überlappintegral zwischen Rundhohlleitermode und Fasermode ist durch (4.19) gegeben und nachfolgend leicht umgeformt aufgeführt:

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu}^{(lr)} &= -\frac{\omega\mu_0}{k_{\varrho\nu}^2} \frac{\pi}{k_i^2 - k_{z\mu}^2} \int_0^{r_s} \left( \omega\varepsilon_i \left( \frac{m}{\varrho} J_m(k_{\varrho\nu}\varrho) B_{1i}^*(\varrho) + \frac{m}{\varrho} k_{\varrho\nu} J'_m(k_{\varrho\nu}\varrho) B_{1i}^*(\varrho) \right) \right. \\
&\quad \left. + k_{z\mu}^* \left( \frac{m^2}{\varrho^2} J_m(k_{\varrho\nu}\varrho) B_{2i}^*(\varrho) + k_{\varrho\nu} J'_m(k_{\varrho\nu}\varrho) B_{2i}^*(\varrho) \right) \right) \varrho d\varrho. \quad (\text{A.54})
\end{aligned}$$

Anteilig wird zunächst die Integration über den Faserkern betrachtet. Werden die gemäß (3.33) definierten Ausdrücke  $B_{11}$  und  $B_{21}$  eingesetzt, lässt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu 1}^{(lr)} &= -\frac{\omega\mu_0}{k_{\varrho\nu}} \frac{\pi}{k_{\varrho1\mu}} \frac{1}{J_m(k_{\varrho1}r_d)} \int_0^{r_d} \left( \omega\varepsilon_1 \left( \frac{m}{k_{\varrho\nu}\varrho} J_m(k_{\varrho\nu}\varrho) J'_m(k_{\varrho1\mu}\varrho) + \frac{m}{k_{\varrho1\mu}\varrho} J'_m(k_{\varrho\nu}\varrho) J_m(k_{\varrho1\mu}\varrho) \right) \right. \\
&\quad \left. + k_{z\mu}^* A_4^* \left( \frac{m^2}{k_{\varrho\nu}k_{\varrho1\mu}\varrho^2} J_m(k_{\varrho\nu}\varrho) J_m(k_{\varrho1\mu}\varrho) + J'_m(k_{\varrho\nu}\varrho) J'_m(k_{\varrho1\mu}\varrho) \right) \right) \varrho d\varrho \quad (\text{A.55})
\end{aligned}$$

ableiten. Dieser Ausdruck vereinfacht sich mit Hilfe von (A.88) und (A.89) zu

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu 1}^{(lr)} &= -\frac{\omega\mu_0}{k_{\varrho\nu}} \frac{\pi}{k_{\varrho1\mu}} \frac{1}{J_m(k_{\varrho1}r_d)} \frac{1}{2} \int_0^{r_d} \left( (\omega\varepsilon_1 + k_{z\mu}^* A_4^*) J_{m-1}(k_{\varrho\nu}\varrho) J_{m-1}(k_{\varrho1\mu}\varrho) \right. \\
&\quad \left. - (\omega\varepsilon_1 - k_{z\mu}^* A_4^*) J_{m+1}(k_{\varrho\nu}\varrho) J_{m+1}(k_{\varrho1\mu}\varrho) \right) \varrho d\varrho. \quad (\text{A.56})
\end{aligned}$$

In dieser Schreibweise kann die Integration mit Hilfe von (A.101) durchgeführt werden, mit dem Ergebnis

$$Q_{\mu\nu 1}^{(lr)} = -\frac{\pi\omega\mu_0}{2k_{\varrho\nu}k_{\varrho 1\mu}} \frac{1}{J_m(k_{\varrho 1}r_d)} \frac{r_d}{k_{\varrho\nu}^2 - k_{\varrho 1\mu}^2} \left( (\omega\varepsilon_1 + k_{z\mu}^* A_4^*) [-k_{\varrho\nu} J_{m-2}(k_{\varrho\nu}r_d) J_{m-1}(k_{\varrho 1\mu}r_d) + k_{\varrho 1\mu} J_{m-1}(k_{\varrho\nu}r_d) J_{m-2}(k_{\varrho 1\mu}r_d)] \right. \\ \left. - (\omega\varepsilon_1 - k_{z\mu}^* A_4^*) [-k_{\varrho\nu} J_m(k_{\varrho\nu}r_d) J_{m+1}(k_{\varrho 1\mu}r_d) + k_{\varrho 1\mu} J_{m+1}(k_{\varrho\nu}r_d) J_m(k_{\varrho 1\mu}r_d)] \right). \quad (\text{A.57})$$

Die Integration über den Querschnitt des Fasermantels erfolgt in analoger Schrittfolge. Werden die gemäß (3.34) definierten Ausdrücke  $B_{12}$  und  $B_{22}$  eingesetzt, lässt sich der Ausdruck

$$Q_{\mu\nu 2}^{(lr)} = \frac{\omega\mu_0}{k_{\varrho\nu}} \frac{\pi}{k_{\varrho 2\mu}} \int_{r_d}^{r_s} \left( \frac{\omega\varepsilon_2 A_2^*}{I_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} \left[ \frac{m}{k_{\varrho\nu}\varrho} J_m(k_{\varrho\nu}\varrho) I'_m(k_{\varrho 2\mu}\varrho) + \frac{m}{k_{\varrho 2\mu}\varrho} J'_m(k_{\varrho\nu}\varrho) I_m(k_{\varrho 2\mu}\varrho) \right] \right. \\ + \frac{\omega\varepsilon_2 A_3^*}{K_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} \left[ \frac{m}{k_{\varrho\nu}\varrho} J_m(k_{\varrho\nu}\varrho) K'_m(k_{\varrho 2\mu}\varrho) + \frac{m}{k_{\varrho 2\mu}\varrho} J'_m(k_{\varrho\nu}\varrho) K_m(k_{\varrho 2\mu}\varrho) \right] \\ + \frac{k_{z\mu}^* A_5^*}{I_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} \left[ \frac{m^2}{k_{\varrho\nu}k_{\varrho 2\mu}\varrho^2} J_m(k_{\varrho\nu}\varrho) I_m(k_{\varrho 2\mu}\varrho) + J'_m(k_{\varrho\nu}\varrho) I'_m(k_{\varrho 2\mu}\varrho) \right] \\ \left. + \frac{k_{z\mu}^* A_6^*}{K_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} \left[ \frac{m^2}{k_{\varrho\nu}k_{\varrho 2\mu}\varrho^2} J_m(k_{\varrho\nu}\varrho) K_m(k_{\varrho 2\mu}\varrho) + J'_m(k_{\varrho\nu}\varrho) K'_m(k_{\varrho 2\mu}\varrho) \right] \right) \varrho d\varrho \quad (\text{A.58})$$

ableiten. Nach Umformungen mit Hilfe von (A.93) und (A.94) resultiert

$$Q_{\mu\nu 2}^{(lr)} = \frac{\omega\mu_0}{k_{\varrho\nu}} \frac{\pi}{k_{\varrho 2\mu}} \frac{1}{2} \int_{r_d}^{r_s} \left( \frac{\omega\varepsilon_2 A_2^*}{I_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} [J_{m-1}(k_{\varrho\nu}\varrho) I_{m-1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho) + J_{m+1}(k_{\varrho\nu}\varrho) I_{m+1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho)] \right. \\ + \frac{\omega\varepsilon_2 A_3^*}{K_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} [J_{m-1}(k_{\varrho\nu}\varrho) K_{m-1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho) + J_{m+1}(k_{\varrho\nu}\varrho) K_{m+1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho)] \\ + \frac{k_{z\mu}^* A_5^*}{I_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} [J_{m-1}(k_{\varrho\nu}\varrho) I_{m-1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho) - J_{m+1}(k_{\varrho\nu}\varrho) I_{m+1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho)] \\ \left. + \frac{k_{z\mu}^* A_6^*}{K_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} [J_{m-1}(k_{\varrho\nu}\varrho) K_{m-1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho) - J_{m+1}(k_{\varrho\nu}\varrho) K_{m+1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho)] \right) \varrho d\varrho. \quad (\text{A.59})$$

Schließlich können die Integrationen durch (A.104) und (A.105) gelöst werden, mit dem

Ergebnis

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu 2}^{(lr)} = & -\frac{\pi\omega\mu_0}{2k_{\varrho\nu}k_{\varrho 2\mu}} \frac{1}{k_{\varrho\nu}^2 + k_{\varrho 2\mu}^2} \left[ \right. \\
& \frac{\varrho}{I_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} (\omega\varepsilon_2 A_2^* + k_{z\mu}^* A_5^*) \left[ k_{\varrho\nu} J_{m-2}(k_{\varrho\nu}\varrho) I_{m-1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho) - k_{\varrho 2\mu} J_{m-1}(k_{\varrho\nu}\varrho) I_{m-2}(k_{\varrho 2\mu}\varrho) \right] \\
& + \frac{\varrho}{I_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} (\omega\varepsilon_2 A_2^* - k_{z\mu}^* A_5^*) \left[ k_{\varrho\nu} J_m(k_{\varrho\nu}\varrho) I_{m+1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho) - k_{\varrho 2\mu} J_{m+1}(k_{\varrho\nu}\varrho) I_m(k_{\varrho 2\mu}\varrho) \right] \\
& + \frac{\varrho}{K_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} (\omega\varepsilon_2 A_3^* + k_{z\mu}^* A_6^*) \left[ k_{\varrho\nu} J_{m-2}(k_{\varrho\nu}\varrho) K_{m-1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho) + k_{\varrho 2\mu} J_{m-1}(k_{\varrho\nu}\varrho) K_{m-2}(k_{\varrho 2\mu}\varrho) \right] \\
& + \frac{\varrho}{K_m(k_{\varrho 2\mu}r_d)} (\omega\varepsilon_2 A_3^* - k_{z\mu}^* A_6^*) \left[ k_{\varrho\nu} J_m(k_{\varrho\nu}\varrho) K_{m+1}(k_{\varrho 2\mu}\varrho) + k_{\varrho 2\mu} J_{m+1}(k_{\varrho\nu}\varrho) K_m(k_{\varrho 2\mu}\varrho) \right] \left. \right]_{r_d}^{r_s}.
\end{aligned} \tag{A.60}$$

Wiederum wurden der Übersichtlichkeit wegen die Integrationsgrenzen nicht eingesetzt.

Der Wert des Überlappintegrals ergibt sich aus der Summe

$$Q_{\mu\nu}^{(lr)} = Q_{\mu\nu 1}^{(lr)} + Q_{\mu\nu 2}^{(lr)}. \tag{A.61}$$

## A.4. Ergänzung zum Kapitel 4.4.4 für die Mantelbrechzahl $n_2 = 1,56$

Die Untersuchungen zur Koppeleffizienz bei gleichmäßiger Verkleinerung des Kern- und des Strahldurchmessers im Kapitel 4.4.4 beschränken sich auf Wellenleiter mit der numerischen Apertur  $NA = 0,25$  ( $n_2 = 1,55$ ). Obwohl dieser Wert im Kontext der EOPCB-Technologie üblich ist, lässt sich nicht gänzlich auszuschließen, dass in zukünftigen Anwendungen auch Wellenleiter mit kleinerer  $NA$  eingesetzt werden. Aus diesem Grund wurden die Simulationen des Kapitels 4.4.4 mit verkleinerter Mantelbrechzahl  $n_2 = 1,56$  wiederholt. Die Gesamtanzahl geführter Fasermode wird damit gemäß Tabelle 4.1 etwa halbiert.

Zunächst gilt es wiederum sicher zu stellen, dass die Koppeleffizienz bei gleichmäßiger Verkleinerung des Kern- und des Strahldurchmessers nicht zu stark variiert. Analog zur Abbildung 4.5, welche die Ergebnisse für  $n_2 = 1,55$  darstellt, zeigt Abbildung A.1 die

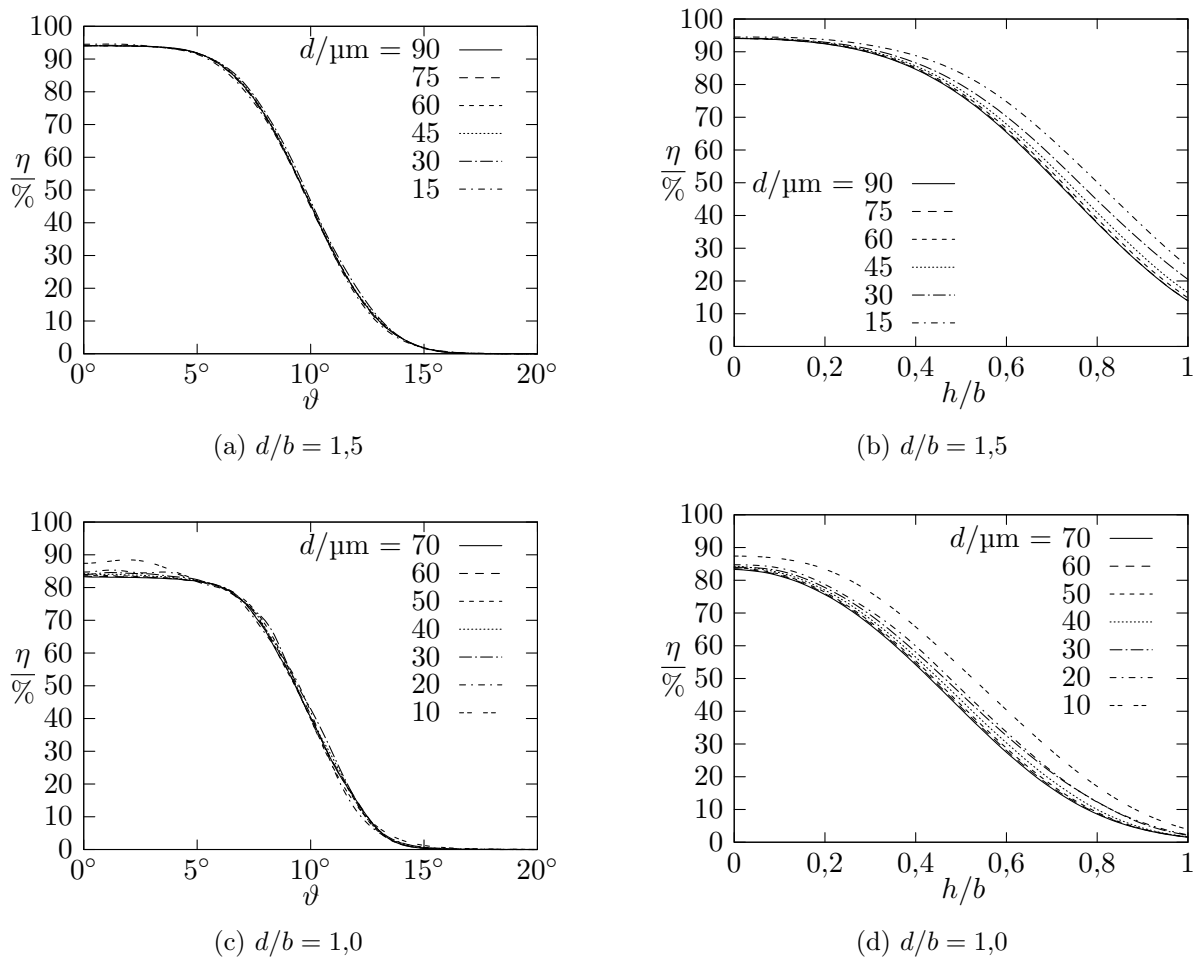
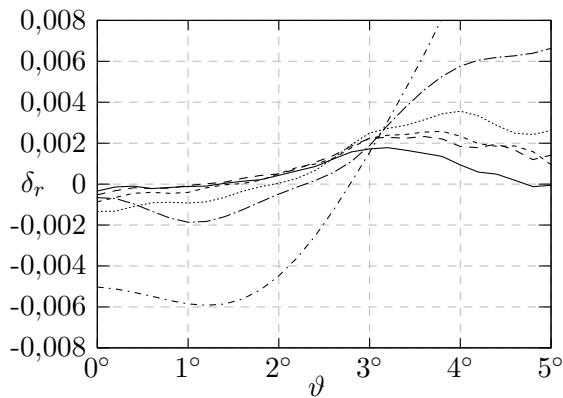


Abbildung A.1.: Die Koppeleffizienz bei gleichmäßiger Verkleinerung des Kerndurchmessers  $d$  und des Strahldurchmessers  $b$ . (a),(c): in Abhängigkeit des Einfallswinkels  $\vartheta$ . (b),(d): in Abhängigkeit der lateralen Verschiebung  $h$ .

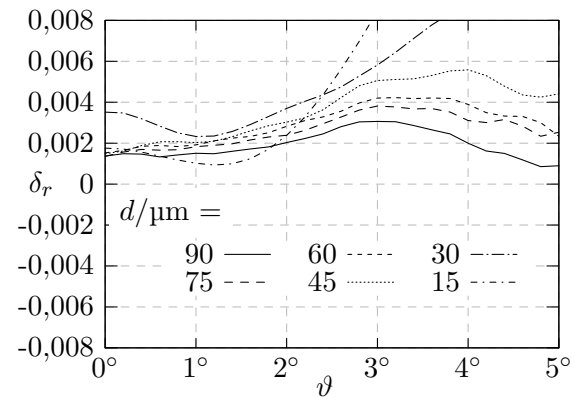
Ergebnisse für  $n_2 = 1,56$ . Wie zuvor lässt sich die gesamte Anordnung weitestgehend skalieren, mit den bereits genannten Einschränkungen.

Bevor die Entwicklung des Fehlers im strahlenoptischen Modell analog zum Kapitel 4.4.4 untersucht wird, soll kurz die Erwartungshaltung rekapituliert werden. Die Abbildungen 4.17b und 4.17d zeigen bereits allgemeine Ergebnisse für unterschiedliche  $NA$  eines Wellenleiters mit dem Durchmesser  $d = 70 \mu\text{m}$ . Insbesondere für sehr kleine  $NA$  weisen die Graphen der wellentheoretischen Simulation deutliche lokale Oszillationen auf, die in keinem Fall von einem strahlenoptischen Modell nachgebildet werden können. Infolgedessen ist auch durch die Berücksichtigung der Goos-Hänchen-Verschiebung keine Verbesserung zu erwarten, da die strahlenoptisch errechnete Koppeffizienz in einigen Fällen deutlich größere Werte annimmt als die wellentheoretische Referenz. Für  $n_2 = 1,56$  zeigt Abbildung 4.17b jedoch noch eine gute Übereinstimmung auf, so dass dieser Fall hier noch einmal näher untersucht wird.

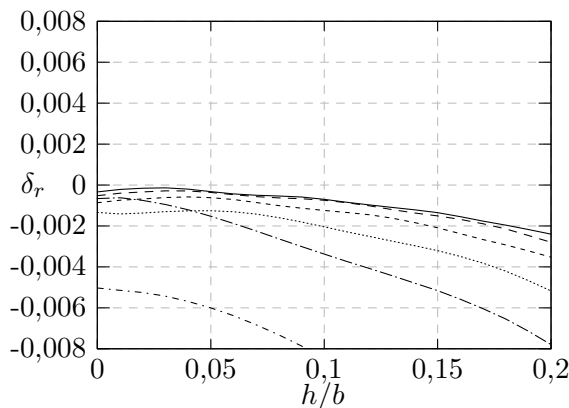
Abbildung A.2 zeigt die Ergebnisse für das Verhältnis Kerndurchmesser zu Strahldurchmesser gleich  $d/b = 1,5$ . Alle weiteren Parameter sind analog zu denen in Abbildung 4.20



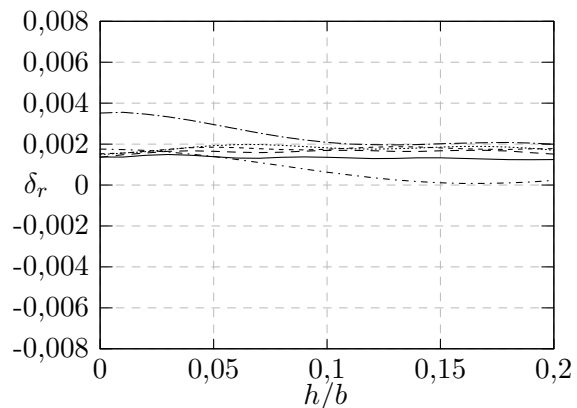
(a) Abhängigkeit von  $\vartheta$ , Methode STRAHL



(b) Abhängigkeit von  $\vartheta$ , Methode STRAHL CGH



(c) Abhängigkeit von  $h$ , Methode STRAHL



(d) Abhängigkeit von  $h$ , Methode STRAHL CGH

Abbildung A.2.: Relative Abweichung  $\delta_r$  für  $d/b = 1,5$ . Die Legende in Abbildung (b) ist für alle Abbildungen gültig.

definiert. Der relative Fehler  $\delta_r$  nimmt im Vergleich zu Abbildung 4.20 insgesamt deutlich größere Werte an, bleibt jedoch für  $d > 30 \mu\text{m}$  stets kleiner als 0,006 und steigt auch für kleine Kerndurchmesser nur mäßig an. Die Berücksichtigung der Goos-Hänchen-Verschiebung verspricht nur im Fall der lateralen Verschiebung  $h$  der Strahlachse eine leichte Verbesserung im Mittel. Insbesondere für große Einfallswinkel  $\vartheta$  zeigt sich jedoch eine deutliche Erhöhung der Abweichung. Der Fehler im strahlenoptischen Modell ist jedoch insgesamt im Mittel deutlich kleiner als 1% und damit in einem akzeptablen Bereich. Es muss zudem beachtet werden, dass eine Verdrehung der Strahlachse um  $5^\circ$  aufgrund der kleineren  $NA$  bereits einen Grenzwert darstellt. Größere Einfallswinkel führen bereits zu einer deutlichen Abnahme der Koppeffizienz, vgl. Abbildung A.1a.

Die Ergebnisse für das Verhältnis Kerndurchmesser zu Strahldurchmesser gleich  $d/b = 1,0$  sind in Abbildung A.3 dargestellt. Sie korrespondieren hinsichtlich der verbleibenden Parameter mit denen in Abbildung 4.21 und auch der relative Fehler im strahlenoptischen Modell bewegt sich in derselben Größenordnung. Wie zuvor für  $n_2 = 1,55$  führt die Berücksichtigung der Goos-Hänchen-Verschiebung zu einer deutlichen Reduktion des mittlere

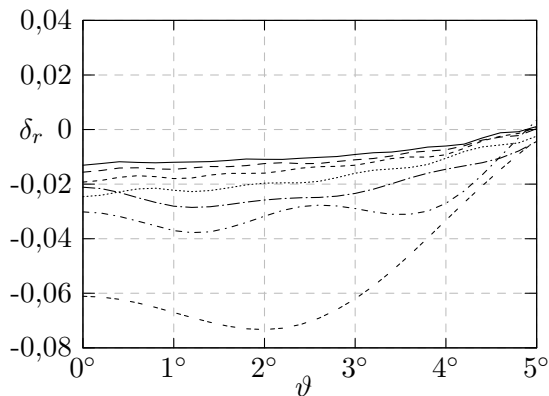
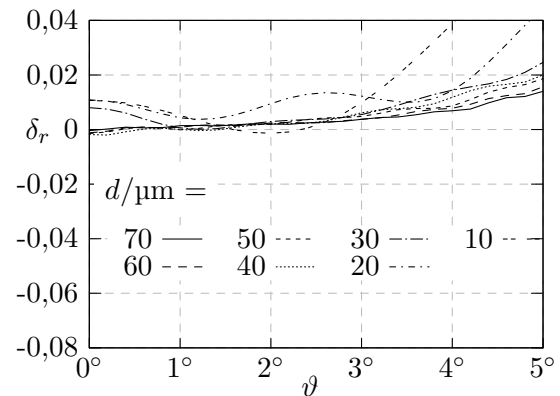
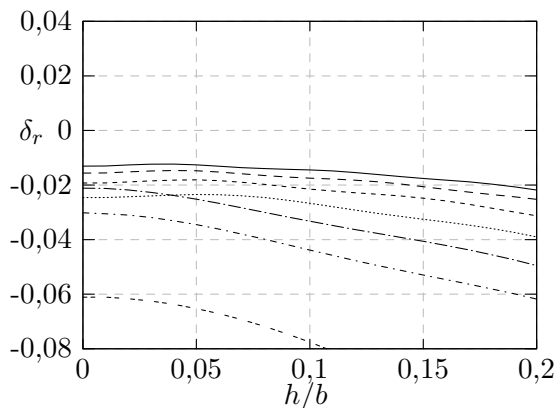
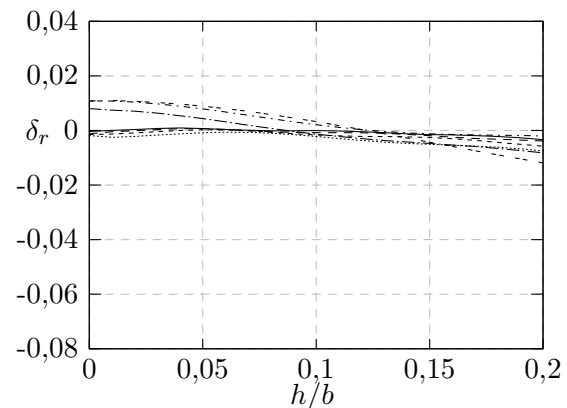
(a) Abhängigkeit  $\vartheta$ , Methode STRAHL(b) Abhängigkeit  $\vartheta$ , Methode STRAHL CGH(c) Abhängigkeit  $h$ , Methode STRAHL(d) Abhängigkeit  $h$ , Methode STRAHL CGH

Abbildung A.3.: Relative Abweichung  $\delta_r$  für  $d/b = 1,0$ . Die Legende in Abbildung (b) ist für alle Abbildungen gültig.

ren Fehlers. Lediglich für große Einfallswinkel kommt es wiederum zu einem Anstieg. Für Einfallswinkel  $\vartheta < 3^\circ$  und insbesondere bei ausschließlicher Verschiebung der Strahlachse nimmt die Abweichung selbst für den kleinsten Kerndurchmesser einen Maximalwert  $\delta_r < 0,015$  an. Im Mittel bleibt sie deutlich darunter, so dass das getroffene Fazit für die  $NA = 0,25$  hinsichtlich der Anwendbarkeit strahlenoptischer Verfahren auch für die  $NA = 0,177$  ( $n_2 = 1,56$ ) seine Gültigkeit behält.

## A.5. Mathematische Hilfsmittel

### A.5.1. Grundlagen

#### Zahlenmengen

Es werden die Mengen

$\mathbb{N}$  natürliche Zahlen:  $0, 1, 2, 3, \dots$

$\mathbb{Z}$  ganze Zahlen:  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$\mathbb{R}$  reelle Zahlen: z.B.  $x = 1/4$  (rationale Zahl) oder  $y = \sqrt{2}$  (irrationale Zahl)

$\mathbb{C}$  komplexe Zahlen:  $z = x + jy$

unterschieden.

In der obigen Beschreibung wird der Menge der natürlichen Zahlen auch die Null zugeordnet. Es ergibt sich aus dem Kontext, ob diese Zuordnung sinnvoll ist. Beispielsweise geht der TEM-Mode der Parallelplattenleitung für  $\nu = 0$  aus den TM-Moden hervor. Für TE-Moden verbleibt mit  $\nu = 0$  dagegen nur die triviale Nulllösung, vgl. (3.12).

#### Komplexe Konjugation

Die Konjugation einer komplexen Größe wird durch

$$z^* = x - jy \quad (\text{A.62})$$

gekennzeichnet. Daraus abgeleitet folgt

$$\Re\{z\} = \frac{1}{2}(z + z^*) = x \quad \text{und} \quad \Im\{z\} = \frac{1}{2j}(z - z^*) = y. \quad (\text{A.63})$$

In Matrixgleichungen tritt zusätzlich zur Konjugation oft gleichzeitig eine Transposition auf. Man erhält so die adjungierte Matrix

$$\mathbf{Q}^H = (\mathbf{Q}^*)^T. \quad (\text{A.64})$$

Elementweise gilt

$$(Q_{\nu\mu})^H = Q_{\mu\nu}^*. \quad (\text{A.65})$$

#### Operatoren

Die folgenden Operatoren werden exemplarisch in kartesischen Koordinaten angegebenen. Für krummlinige Koordinaten empfiehlt sich u.a. [8, 50].

Nabla-Operator:

$$\nabla := \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.66})$$



Gradient, Divergenz und Rotation:

$$\nabla U = \text{grad } U = \vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z} \quad (\text{A.67})$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.68})$$

$$\nabla \times \vec{A} = \text{rot } \vec{A} = \vec{e}_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.69})$$

Laplace-Operator:

$$\Delta U = \nabla \cdot \nabla U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (\text{A.70})$$

Vektoridentität:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (\text{A.71})$$

In vielen Problemstellungen dieser Arbeit sind die verbleibenden Größen lediglich abhängig von den transversalen Koordinaten

$$\vec{r}_t = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y. \quad (\text{A.72})$$

Analog dazu wird der transversale Nabla-Operator

$$\nabla_t := \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{A.73})$$

definiert und in den Beziehungen (A.67) - (A.70) verwendet.

## Die Fouriertransformation

Die Fouriertransformierte des Signals  $f(t)$  ist gegeben durch

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) \, d\omega. \quad (\text{A.74})$$

Es folgt für die Rücktransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \exp(j\omega t) \, d\omega. \quad (\text{A.75})$$

## Funktionsdefinitionen

Sprungfunktion: 
$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.76})$$

Kronecker-Delta: 
$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{A.77})$$

Ausblendeigenschaft der Dirac-Distribution:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (\text{A.78})$$

## A.5.2. Besselfunktionen

Im Folgenden werden die Besselfunktionen ganzzahliger Ordnung vorgestellt, wie sie für die Beschreibung der Fasermode benötigt werden. Viele der Zusammenhänge behalten jedoch auch im Fall einer beliebigen reell- oder komplexwertigen Ordnung ihre Gültigkeit. Für eine umfassende Einführung sei auf [2] und [74] verwiesen.

### Einteilung

Es wird unterschieden zwischen

$$\begin{aligned} J_n(z), N_n(z), & \quad \text{gewöhnliche Besselfunktionen (1. und 2. Art),} \\ I_n(z), K_n(z), & \quad \text{modifizierte Besselfunktionen (1. und 2. Art),} \\ H_n^{(1)}(z), H_n^{(2)}(z), & \quad \text{Hankelfunktionen (Besselfunktionen dritter Art),} \end{aligned}$$

mit  $z \in \mathbb{C}$  und hier  $n \in \mathbb{N}$ .

Die gewöhnlichen Besselfunktionen und die Hankelfunktionen sind über

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + jN_n(z) \quad , \quad H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - jN_n(z) \quad (\text{A.79})$$

miteinander verknüpft. Darüber hinaus gilt

$$I_n(z) = (-j)^n J_n(jz) \quad , \quad K_n(z) = j^{n+1} \frac{\pi}{2} H_n^{(1)}(jz). \quad (\text{A.80})$$

Nachfolgend steht  $\Psi_n$  und  $\tilde{\Psi}_n$  für eine beliebige gewöhnliche Besselfunktionen  $J_n$  oder  $N_n$  und  $\Upsilon_n$  für die modifizierte Besselfunktion  $I_n$  oder  $(-1)^n K_n$ .

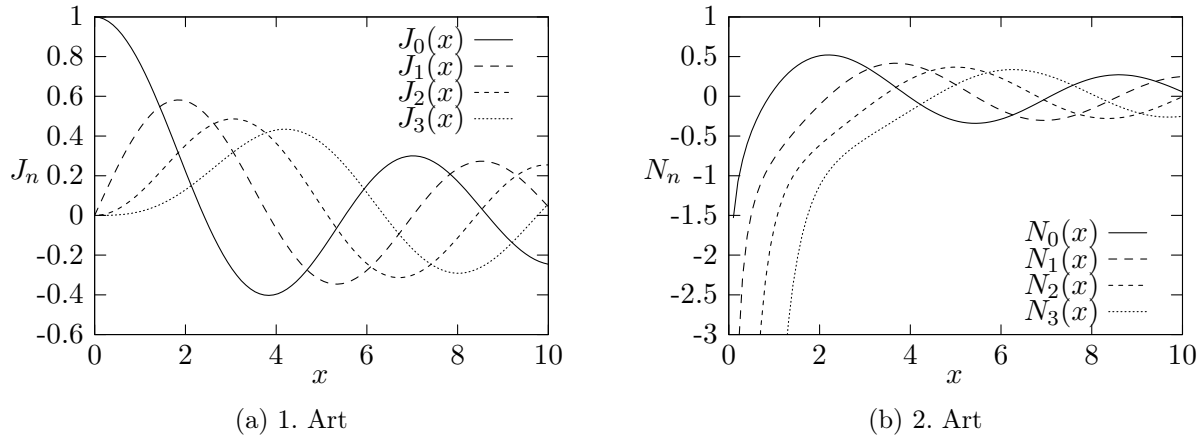


Abbildung A.4.: Funktionsverläufe gewöhnlicher Besselfunktionen.

### Negative Ordnung

$$\Psi_{-n}(z) = (-1)^n \Psi_n(z) \quad , \quad \Upsilon_{-n}(z) = \Upsilon_n(z) \quad (\text{A.81})$$

### Rekursion und Differenziation

$$\Psi_{n-1}(z) + \Psi_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} \Psi_n(z) \quad , \quad \Upsilon_{n-1}(z) - \Upsilon_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} \Upsilon_n(z) \quad (\text{A.82})$$

$$\Psi_{n-1}(z) - \Psi_{n+1}(z) = 2\Psi'_n(z) \quad , \quad \Upsilon_{n-1}(z) + \Upsilon_{n+1}(z) = 2\Upsilon'_n(z) \quad (\text{A.83})$$

$$\Psi'_n(z) = \Psi_{n-1}(z) - \frac{n}{z} \Psi_n(z) \quad , \quad \Upsilon'_n(z) = \Upsilon_{n-1}(z) - \frac{n}{z} \Upsilon_n(z) \quad (\text{A.84})$$

$$\Psi'_n(z) = -\Psi_{n+1}(z) + \frac{n}{z} \Psi_n(z) \quad , \quad \Upsilon'_n(z) = \Upsilon_{n+1}(z) + \frac{n}{z} \Upsilon_n(z) \quad (\text{A.85})$$

$$\Psi'_0(z) = -\Psi_1(z) \quad , \quad I'_0(z) = I_1(z) \quad , \quad K'_0(z) = -K_1(z) \quad (\text{A.86})$$

### Weitere abgeleitete Zusammenhänge

$$\Psi_n'^2(z) + \frac{n^2}{z^2} \Psi_n^2(z) = \frac{1}{2} (\Psi_{n-1}^2(z) + \Psi_{n+1}^2(z)) \quad (\text{A.87})$$

$$\Psi'_n(z) \tilde{\Psi}'_n(\tilde{z}) + \frac{n^2}{z\tilde{z}} \Psi_n(z) \tilde{\Psi}_n(\tilde{z}) = \frac{1}{2} (\Psi_{n-1}(z) \tilde{\Psi}_{n-1}(\tilde{z}) + \Psi_{n+1}(z) \tilde{\Psi}_{n+1}(\tilde{z})) \quad (\text{A.88})$$

$$\frac{n}{z} \Psi_n(z) \tilde{\Psi}'_n(\tilde{z}) + \frac{n}{\tilde{z}} \Psi'_n(z) \tilde{\Psi}_n(\tilde{z}) = \frac{1}{2} (\Psi_{n-1}(z) \tilde{\Psi}_{n-1}(\tilde{z}) - \Psi_{n+1}(z) \tilde{\Psi}_{n+1}(\tilde{z})) \quad (\text{A.89})$$

$$\Upsilon_n'^2(z) + \frac{n^2}{z^2} \Upsilon_n^2(z) = \frac{1}{2} (\Upsilon_{n-1}^2(z) + \Upsilon_{n+1}^2(z)) \quad (\text{A.90})$$

$$I'_n(z) K'_n(z) + \frac{n^2}{z^2} I_n(z) K_n(z) = -\frac{1}{2} (I_{n-1}(z) K_{n-1}(z) + I_{n+1}(z) K_{n+1}(z)) \quad (\text{A.91})$$

$$\frac{n}{z} (I_n(z) K'_n(z) + I'_n(z) K_n(z)) = -\frac{1}{2} (I_{n-1}(z) K_{n-1}(z) - I_{n+1}(z) K_{n+1}(z)) \quad (\text{A.92})$$

$$\Upsilon'_n(z)\Psi'_n(\tilde{z}) + \frac{n^2}{z\tilde{z}}\Upsilon_n(z)\Psi_n(\tilde{z}) = \frac{1}{2}(\Upsilon_{n-1}(z)\Psi_{n-1}(\tilde{z}) - \Upsilon_{n+1}(z)\Psi_{n+1}(\tilde{z})) \quad (\text{A.93})$$

$$\frac{n}{z}\Upsilon_n(z)\Psi'_n(\tilde{z}) + \frac{n}{\tilde{z}}\Upsilon'_n(z)\Psi_n(\tilde{z}) = \frac{1}{2}(\Upsilon_{n-1}(z)\Psi_{n-1}(\tilde{z}) + \Upsilon_{n+1}(z)\Psi_{n+1}(\tilde{z})) \quad (\text{A.94})$$

### A.5.3. Integrale

An dieser Stelle sind einige für diese Arbeit wichtige Integralausdrücke aufgelistet. Umfangreiche Integraltafeln befinden sich z.B. in [20].

#### Integrale über die kreiszylindrische Koordinate $\varphi$

$$\int_0^{2\pi} \exp(\mp j(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi))) d\varphi = 2\pi J_0(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (\text{A.95})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi) \cos(r\rho \cos(\varphi)) d\varphi = 0 \quad (\text{A.96})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi) \sin(r\rho \cos(\varphi)) d\varphi = 2\pi J_1(r\rho) \quad (\text{A.97})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi) \cos(r\rho \cos(\varphi)) d\varphi = 0 \quad (\text{A.98})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi) \sin(r\rho \cos(\varphi)) d\varphi = 0 \quad (\text{A.99})$$

#### Unbestimmte Integrale mit Besselfunktionen

Im Folgenden ist  $\zeta$  eine beliebige Besselfunktion,  $\Psi$  und  $\tilde{\Psi}$  sind beliebige gewöhnliche Besselfunktionen und  $\Phi$  bzw.  $\tilde{\Phi}$  sind beliebige modifizierte Besselfunktionen. Weiter gilt hier  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\int \zeta_n^2(\alpha z) z dz = \frac{z^2}{2} (\zeta_n^2(\alpha z) - \zeta_{n-1}(\alpha z) \zeta_{n+1}(\alpha z)) \quad (\text{A.100})$$

$$\int \Psi_n(\alpha z) \tilde{\Psi}_n(\beta z) z \, dz = \frac{z(-\alpha \Psi_{n-1}(\alpha z) \tilde{\Psi}_n(\beta z) + \beta \Psi_n(\alpha z) \tilde{\Psi}_{n-1}(\beta z))}{\alpha^2 - \beta^2} \quad (\text{A.101})$$

$$\begin{aligned} \int \Psi_n(\alpha z) \tilde{\Psi}_n(\alpha z) z \, dz = \frac{z^2}{4} (2\Psi_n(\alpha z) \tilde{\Psi}_n(\alpha z) - \Psi_{n-1}(\alpha z) \tilde{\Psi}_{n+1}(\alpha z) \\ - \Psi_{n+1}(\alpha z) \tilde{\Psi}_{n-1}(\alpha z)) \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

$$\begin{aligned} \int \Phi_n(\alpha z) \tilde{\Phi}_n(\alpha z) z \, dz = \frac{z^2}{4} (2\Phi_n(\alpha z) \tilde{\Phi}_n(\alpha z) + \Phi_{n-1}(\alpha z) \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha z) \\ + \Phi_{n+1}(\alpha z) \tilde{\Phi}_{n-1}(\alpha z)) \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

$$\int \Psi_n(\alpha z) I_n(\beta z) z \, dz = \frac{-z(\alpha \Psi_{n-1}(\alpha z) I_n(\beta z) - \beta \Psi_n(\alpha z) I_{n-1}(\beta z))}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\text{A.104})$$

$$\int \Psi_n(\alpha z) K_n(\beta z) z \, dz = \frac{-z(\alpha \Psi_{n-1}(\alpha z) K_n(\beta z) + \beta \Psi_n(\alpha z) K_{n-1}(\beta z))}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\text{A.105})$$



# Abkürzungen, Konventionen und verwendete Symbole

## Abkürzungen

Allgemein:

|         |  |
|---------|--|
| Cut-Off | Grenze des Bereichs der geführten Moden; definiert auf Seite 35.   |
| EOPCB   | Elektro-Optische Leiterplatte<br>(Englisch: Electro-Optical Printed Circuit Board).  |
| PEC     | Perfekter elektrischer Leiter (Englisch: Perfect Electric Conductor).  |
| VCSEL   | Halbleiterlaser, der senkrecht zur Ebene des Halbleitermaterials abstrahlt (Englisch: Vertical-Cavity Surface-Emitting Laser). |
| TE/M    | Transversal Elektrisch/Magnetisch  |

Strahlenoptische Methoden:

|               |  |
|---------------|--|
| STRAHL        | Klassische strahlenoptische Vorgehensweise ohne Zusätze.       |
| STRAHL GH     | Berücksichtigung der Goos-Hänchen-Verschiebung.                |
| STRAHL CGH    | Berücksichtigung der minimalen Goos-Hänchen-Verschiebung.      |
| STRAHL TV     | Berücksichtigung von Tunnelverlusten (gekrümmte Grenzflächen). |
| STRAHL TV CGH | Kombination der Methoden STRAHL TV und STRAHL CGH.             |

Wellentheoretische Methoden:

|          |  |
|----------|--|
| WELLE    | Allgemeiner Ansatz auf Basis der exakten Lösung.                           |
| WELLE MA | Näherungslösung von Marcatili für Rechteck-Wellenleiter.                   |
| QGM      | Näherungslösung für gekrümmte Wellenleiter auf Basis quasigeführter Moden. |

## Allgemeine Konventionen

- Vektoren des dreidimensionalen Raums werden durch einen Pfeil gekennzeichnet, z.B.  $\vec{E}$ .
- Vektoren und Matrizen des allgemeinen mehrdimensionalen Raums werden fett dargestellt, z.B.  $\mathbf{Q}$ .
- Feldgrößen im Frequenzbereich werden durch einen Unterstrich gekennzeichnet, z.B.  $\underline{E}$ . Ggf. wird auf diese Kennzeichnung verzichtet, sofern sich die Größen eindeutig

auf den Frequenzbereich beziehen.

- Die Abhängigkeiten der Feldgrößen werden im Allgemeinen nur einmalig bei der Definition angegeben. So wird z.B. die Frequenzabhängigkeit der komplexen Amplituden nur initial in Kapitel 2.1 angegeben.
- Einheitsvektoren werden durch  $\vec{e}$  gekennzeichnet. Ein zusätzlicher Index kennzeichnet:  
 $x, y, z$  kartesisches Koordinatensystem  
 $\varrho, \varphi, z$  kreiszylindrisches Koordinatensystem  
 $k$  Komponente in Ausbreitungsrichtung einer Welle  
 $t$  Komponente transversal zur Ausbreitungsrichtung einer Welle  
 $s$  Ausbreitungsrichtung eines Strahls  
 $g$  Normalenvektor einer Grenzfläche
- Analog zur Indizierung der Einheitsvektoren wird auf die Komponenten eines Vektors zurückgegriffen, z.B.  $E_x = \vec{e}_x \cdot \vec{E}$ .
- Der Index  $i$  kennzeichnet stets Größen, die ausschließlich in einem bestimmten Raumteil gültig sind.
- Indices können kombiniert werden, z.B.  $k_{x2}$  ist die  $x$ -Komponente des Vektors  $\vec{k}$  im Raumteil 2.

Nachfolgend werden die wichtigsten Formelzeichen aufgelistet, die von zentraler Bedeutung sind oder kapitelübergreifend verwendet werden. Zusätzlich wird der Ort des erstmaligen Auftretens angegeben. Nichtaufgelistete Symbole besitzen nur lokale Gültigkeit und ergeben sich aus dem Kontext.

### Lateinische Formelzeichen

|                       |  |
|-----------------------|--|
| $A_{\{1,2,\dots,6\}}$ | Konstanten im Separationsansatz zur Herleitung der Modenspektren, Glg. (3.14)                |
| $a, a_{\{2,3\}}$      | Mantelschichtdicke des Schichtwellenleiters, Abb. 3.2b                                       |
| $a_\nu$               | Gewichtungsfunktion des Modenspektrums des gekrümmten Wellenleiters, Glg. (5.36) bzw. (5.44) |
| $\vec{B}, B$          | Magnetische Flussdichte, Glg. (2.1b)   |
| $b$                   | Durchmesser des Gaußstrahls, $b = 2w$ , Glg. (2.42)  |
| $C_\nu$               | Amplitude eines Modes, Glg. (2.50)   |
| $c_0$                 | Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, Seite 32   |
| $c$                   | Lichtgeschwindigkeit im Medium, Seite 32   |
| $c_n$                 | Koeffizienten in der Fourierreihe des Modulationssignals, Glg. (5.2)                         |
| $\mathbf{c}$          | Vektor mit Einträgen $C_\nu$ , Glg. (2.83)   |
| $\vec{D}, D$          | Elektrische Flussdichte, Glg. (2.1a)   |
| $d$                   | Durchmesser des Faserkerns bzw. Kerndicke des Schichtwellenleiters, Abb. 3.2b                |
| $\vec{E}, E$          | Elektrische Feldstärke, Glg. (2.1c)  |



|                  |  |
|------------------|--|
| $E_0$            | Konstante Amplitude einer Welle, Glg. (2.17)   |
| $f_m$            | Fehlermaß, Kontrolle der Randbedingungen, Glg. (4.30)  |
| $f_p$            | Fehlermaß, Einfluss der paraxialen Näherung, Glg. (4.26)   |
| $f_w$            | Fehlermaß, Einfluss des leitenden Schirms, Glg. (4.28)   |
| $f$              | Frequenzvariable, Abb. (5.4)   |
| $G(\omega)$      | Frequenzspektrum von $g(t)$  |
| $g(t)$           | periodisches Modulationssignal, Glg. (5.2)   |
| $\vec{H}, H$     | Magnetische Feldstärke, Glg. (2.1d)  |
| $H_m^{(1)}$      | Hankelfunktion 1. Art der Ordnung $m$ , Glg. (5.33)  |
| $H_m^{(2)}$      | Hankelfunktion 2. Art der Ordnung $m$ , Glg. (5.33)  |
| $H(f)$           | Übertragungsfunktion des längshomogenen Wellenleiters, Glg. (5.22)   |
| $H_l(f)$         | Übertragungsfunktion des linearisierten Systems, Glg. (5.29)   |
| $h$              | laterale Verschiebung des Gaußstrahls, Abb. 4.1  |
| $I_m$            | modifizierte Besselfunktion 1. Art der Ordnung $m$ , Glg. (3.28)   |
| $I_\nu$          | modaler Strom, Glg. (2.59)   |
| $I_{\mu\xi}$     | Überlappintegral, Glg. (5.63)  |
| $\mathbf{i}$     | Vektor mit Einträgen $I_\nu$ , Glg. (2.73)   |
| $\vec{J}, J$     | Elektrische Stromdichte, Glg. (2.1d)   |
| $J_0$            | gewöhnliche Besselfunktion 1. Art der Ordnung 0, Glg. (2.31)   |
| $J_1$            | gewöhnliche Besselfunktion 1. Art der Ordnung 1, Glg. (2.32)   |
| $J_m$            | gewöhnliche Besselfunktion 1. Art der Ordnung $m$ , Glg. (3.27)  |
| $j$              | imaginäre Einheit, Glg. (2.3d)   |
| $\vec{K}$        | Flächenstromdichte, Glg. (2.11b)   |
| $K_m$            | modifizierte Besselfunktion 2. Art der Ordnung $m$ , Glg. (3.28)   |
| $k_0$            | Wellenzahl des Vakuums $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ , Glg. (2.7)  |
| $k$              | charakteristische Größe eines quasigeführten Modes des gekrümmten Wellenleiters, $k = 1/\alpha$ , Glg. (5.64)                              |
| $k$              | spezifische Wellenzahl $k = k_0\sqrt{\varepsilon_r}$ , Glg. (2.8)  |
| $\vec{k}$        | Wellenvektor mit $ \vec{k}  = k$ , Glg. (2.17)   |
| $L$              | Länge eines geraden Wellenleiterelements, Abb. 5.3   |
| $M$              | ohne Index: kontextabhängige Summationsgrenze, z.B. Glg. (2.122)   |
| $M_F$            | maximale azimuthale Modenzahl $m$ der zylindrischen Faser in der noch ein geführter Mode existiert, Seite 56                               |
| $m$              | azimuthale Modenzahl, Glg. (3.26)  |
| $N_m$            | gewöhnliche Besselfunktion 2. Art der Ordnung $m$ , Glg. (3.27)  |
| $NA$             | Numerische Apertur $NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$   |
| $N$              | ohne Index: kontextabhängige Summationsgrenze, z.B. Glg. (2.123)   |
| $N_F$            | Anzahl geführter Moden der kreiszylindrischen Faser, Seite 56  |
| $N_R$            | Anzahl geführter Moden des rechteckförmigen Wellenleiters, Seite 56  |
| $N_S$            | Anzahl geführter Moden des Schichtwellenleiters, Seite 56  |
| $N_W$            | Gesamtanzahl berücksichtigter Moden in einer Rechnung, Glg. (4.4)  |
| $n, n_i$         | Brechzahl $n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri}}$ , Glg. (2.9); in dieser Arbeit konstant: $n_1 = 1,57$ (Ausnahme Kapitel 5.2.5: Abb. 5.8 und 5.9) |
| $n_{\text{eff}}$ | effektive Brechzahl $n_{\text{eff}} = k_z/k_0$ , Seite 35  |
| $\overline{P}$   | zeitlich gemittelter Leistungsfluss durch eine Fläche $z = \text{konstant}$ , Glg. (2.41)  |

|                          |   |
|--------------------------|---|
| $\overline{P}'$          | zeitlich gemittelter Leistungsfluss pro Längenabschnitt $\Delta y$ bzw. $\Delta z$ , Glg. (5.42)  |
| $\overline{P}'_{\nu\xi}$ | Skalarprodukt zur Charakterisierung des Modenspektrums des gekrümmten Schichtwellenleiters, Glg. (5.52)   |
| $\overline{P}_A$         | Ausgangsleistung nach Durchlaufen einer Wellenleiterkrümmung bei auf ein Watt normierter Eingangsleistung, Abb. 5.10                                |
| $\overline{P}_\nu$       | spezifische geführte Leistung eines Modes, Glg. (2.63)  |
| $\overline{P}_v$         | zeitlich gemittelte Verlustleistung, Glg. (2.16)  |
| $\overline{P}_{mn}$      | Leistung geführt durch einen elementaren Strahl, Glg. (2.127)   |
| $\overline{P}_\Xi$       | akkumulierte Leistung des Modenspektrums bzw. einer Strahlschar, Glg. (4.29)  |
| $\overline{p}_v$         | zeitlich gemittelte Verlustleistungsdichte des elektrischen Feldes, Glg. (2.12)   |
| $\tilde{p}$              | tiefpassgefilterter Leistungsfluss im Wellenleiter, Glg. (5.15)   |
| $p_n$                    | Koeffizienten der Fourierreihe von $\tilde{p}$ , Glg. (5.16)  |
| $Q_\nu$                  | Wert des Skalarprodukts zur Definition der Modenorthogonalität im Fall verlustfreier Materialien; es gilt $Q_\nu = 2\overline{P}_\nu$ , Glg. (2.63) |
| $Q_{\nu\mu}$             | Erweiterung des Skalarprodukts $Q_\nu$ zur Berücksichtigung von Moden unterschiedlicher Wellenleiter (Koppelkoeffizienten), Glg. (2.69)             |
| <b>Q</b>                 | Matrix mit Inhalten $Q_{\nu\mu}$ , Glg. (2.73)  |
| $R_F$                    | Leistungs-Reflexionsfaktor für ebene Wellen am dielek. Halbraum, Glg. (2.100)   |
| $R(\varrho)$             | Funktion im Separationsansatz, Glg. (3.24)  |
| $R$                      | Krümmungsradius der Phasenfronten des Gaußstrahls auf der Ausbreitungsachse, Glg. (2.39)  |
| $R$                      | mittlerer Radius der Wellenleiterkrümmung, Abb. 5.5   |
| $R^-$                    | Innenradius der Wellenleiterkrümmung, Abb. 5.5  |
| $R^+$                    | Außenradius der Wellenleiterkrümmung, Abb. 5.5  |
| $\vec{r}$                | allgemeiner Aufpunkt (Ortsvektor), Glg. (2.1a)  |
| $\vec{r}_t$              | transversaler Ortsvektor $\vec{r}_t = \vec{r} - \vec{e}_z z$ , Glg. (2.38a)   |
| $r_d$                    | Radius des Faserkerns, Abb. 3.4a  |
| $r_s$                    | Radius des leitenden Schirms, Abb. 3.4b   |
| $r_F$                    | Reflexionsfaktor für ebene Wellen am dielektrischen Halbraum, Glg. (2.95)   |
| $\vec{S}, S$             | Leistungsflussdichte (Poyntingvektor), Glg. (2.12)  |
| $\tilde{S}_z$            | tiefpassgefilterte $z$ -Komponente der Leistungsflussdichte, Glg. (5.13)  |
| $\underline{S}$          | Hilfsgröße im strahlenoptischen Modell, Glg. (2.87)   |
| $S_{mn}$                 | Kennzeichnung eines Strahls innerhalb einer Strahlschar, Seite 31   |
| $s$                      | Durchmesser bzw. Plattenabstand des leitenden Schirms, Abb. 3.2a  |
| $\vec{T}$                | Spektralfunktion nach der Zerlegung in ebene Wellen, Glg. (2.22)  |
| $T_F$                    | Leistungs-Transmissionsfaktor für ebene Wellen am dielektrischen Halbraum, Glg. (2.99)  |
| $T$                      | verallgemeinerter Leistungs-Transmissionsfaktor für den Fall der Totalreflexion und gekrümmte Grenzflächen, Glg. (2.107)                            |
| $T$                      | Grundperiode der Fouriersumme, Glg. (5.2)   |
| $t$                      | Zeitvariable, Glg. (2.1a)   |
| $t_F$                    | Transmissionsfaktor für ebene Wellen am dielektrischen Halbraum, Glg. (2.96)  |
| $V_\nu$                  | modale Spannung, Glg. (2.58)  |
| <b>v</b>                 | Vektor mit Einträgen $V_\nu$ , Glg. (2.73)  |
| $v_{g\nu}$               | Gruppengeschwindigkeit des Modes $\nu$ , Glg. (5.25)  |

|                  |   |
|------------------|---|
| $u$              | Einhüllende des Gaußstrahls, Glg. (2.35)  |
| $w$              | Radius des Gaußstrahls, Glg. (2.39)   |
| $w_0$            | minimaler Radius des Gaußstrahls in der Strahltille, Glg. (2.24)                    |
| $\overline{w}_e$ | zeitlich gemittelte Energiedichte des elektrischen Feldes, Glg. (2.12)              |
| $\overline{w}_m$ | zeitlich gemittelte Energiedichte des magnetischen Feldes, Glg. (2.12)              |
| $x_p$            | Länge eines geraden Wellenleiterelements vor einer Krümmung, Abb. 5.5               |
| $x_s$            | Eindringtiefe abgeleitet aus der Goos-Hänchen-Verschiebung, Abb. 2.5                |
| $x_{s0}$         | minimale Eindringtiefe abgeleitet aus $x_s$ , Glg. (4.32)                           |
| $Z$              | Wellenwiderstand $Z = \sqrt{\mu_0/\varepsilon}$ , Glg. (2.19)                       |
| $z_0$            | Rayleigh-Länge des Gaußstrahls, Glg. (2.35)   |
| $z_c$            | Konstante zur Definition einer beliebigen Ebene $z = \text{konstant}$ , Glg. (2.62) |
| $z_e$            | longitudinale Verschiebung der Tille des Gaußstrahls, Tab. 4.2                      |
| $z_s$            | longitudinale Goos-Hänchen-Verschiebung eines Strahls, Abb. 2.5                     |

## Griechische Formelzeichen

|  |   |
|--|---|
| $\alpha$                                   | Dämpfungskonstante eines quasigeführten Modes, $\alpha = 1/k$ , Seite 122   |
| $\beta_\nu$                                | Charakteristische Größe zur Beschreibung des Modenspektrums des gekrümmten Wellenleiters, Glg. (5.54)                                       |
| $\delta$                                   | Dirac-Distribution, Glg. (5.76)   |
| $\delta_{\mu\nu}$                          | Kronecker-Delta, Glg. (2.62)  |
| $\varepsilon_0$                            | Permittivität des Vakuums, Glg. (2.2)   |
| $\varepsilon_r, \underline{\varepsilon}_r$ | Relative Permittivität, Glg. (2.2)  |
| $\eta$                                     | Koppeleffizienz, Glg. (4.24)  |
| $\Theta_a$                                 | lokaler Divergenzwinkel des Gaußstrahls, Glg. (4.3)   |
| $\Theta_{a0}$                              | asymptotischer Divergenzwinkel des Gaußstrahls, Glg. (2.45)   |
| $\Theta_c$                                 | Kritischer Winkel $\sin(\Theta_c) = NA$ , Seite 56  |
| $\vartheta$                                | Winkel um den der Gaußstrahl gedreht wird, Abb. 4.1   |
| $\vartheta$                                | Winkel um den eine ebene Welle gedreht wird, Abb. 2.3   |
| $\vartheta_c$                              | kritischer Winkel bei Verdrehung des Gaußstrahls, Glg. (4.25)   |
| $\kappa$                                   | Elektrische Leitfähigkeit, Glg. (2.2)   |
| $\lambda$                                  | Wellenlänge, in dieser Arbeit bei monochromatischer Anregung konstant gleich 850 nm (Ausnahme Kapitel 5.2.5: Abb. 5.8 und 5.9), Glg. (2.48) |
| $\mu_0$                                    | Permeabilität des Vakuums, Glg. (2.2)   |
| $\mu_r$                                    | relative Permeabilität, Glg. (2.2)  |
| $\nu$                                      | Modenzahl, Integer in den Kapiteln 2 und 4, komplexwertig im Kapitel 5  |
| $\nu_e$                                    | Eigenwert eines quasigeführten Modes, Tabelle 5.1   |
| $\nu_l$                                    | Eigenwert einer Leckwelle, Tabelle 5.1  |
| $\varrho$                                  | Elektrische Raumladungsdichte, Glg. (2.1a)  |
| $\varrho_K$                                | Radius einer gekrümmten Grenzfläche, Abb. 2.3   |
| $\sigma$                                   | Flächenladungsdichte, Glg. (2.11c)  |
| $\Phi(\varphi)$                            | Funktion im Separationsansatz, Glg. (3.24)  |
| $\Psi$                                     | skalare Komponente des elektrischen oder magnetischen Feldes, Glg. (2.87)   |
| $\Omega$                                   | Grundfrequenz der Fouriersumme, Glg. (5.2)  |
| $\omega$                                   | Frequenzvariable (Kreisfrequenz), Glg. (2.3)  |
| $\omega_0$                                 | Trägerfrequenz mit $\lambda = 850 \text{ nm}$ , Glg. (5.1)  |

## Operatoren

Siehe auch Anhang A.5.1.

|                  |   |
|------------------|---|
| $\Delta$         | Laplace-Operator, Glg. (2.10)   |
| $\vec{L}(\cdot)$ | Vektoroperator zur Beschreibung des Maxwellschen Gaußstrahls, Glg. (2.26) |
| $\nabla$         | Nabla-Operator, Glg. (2.1)  |
| $\Re$            | Realteil-Operator, $\Re\{x + jy\} = x$ , Glg. (2.16)                      |
| $\Im$            | Imaginärteil-Operator, $\Im\{x + jy\} = y$ , Seite 18                     |

## Spezielle Indices

Unten:

|                 |   |
|-----------------|---|
| $E, R, T$       | Einfallende, reflektierte oder transmittierte Teilwellen, Abb. 2.3                    |
| $\nu, \mu, \xi$ | Modenzahlen, Integer in den Kapiteln 2 und 4, komplexwertig in Kapitel 5, Glg. (2.50) |

Oben:

|              |   |
|--------------|---|
| $M$          | Feldgröße des Maxwellschen Gaußstrahls, Glg. (4.26)   |
| $P$          | Feldgröße des paraxialen Gaußstrahls, Glg. (4.26)   |
| $TE$         | Die elektrische Feldstärke besitzt keine Komponente in Ausbreitungsrichtung, Glg. (2.99)  |
| $TM$         | Die magnetische Feldstärke besitzt keine Komponente in Ausbreitungsrichtung, Glg. (2.101)   |
| $(b)$        | Quasigeführter Mode des gekrümmten Wellenleiters, Glg. (5.80)   |
| $(l)$        | Teilraum linksseitig der Schnittstelle, Glg. (2.68)   |
| $(-l), (+l)$ | Teilraum linksseitig der Schnittstelle; Wellenausbreitung in longitudinal negativer $(-l)$ bzw. positiver $(+l)$ Richtung, Abbildung 2.2  |
| $(r)$        | Teilraum rechtsseitig der Schnittstelle, Glg. (2.68)  |
| $(-r), (+r)$ | Teilraum rechtsseitig der Schnittstelle; Wellenausbreitung in longitudinal negativer $(-r)$ bzw. positiver $(+r)$ Richtung, Abbildung 2.2 |
| $(lr), (rl)$ | Kennzeichnung von Überlappintegralen, Glg. (2.69)   |

## Sonstige

Die nachfolgenden Symbole kennzeichnen Modenfunktionen, welche die Abhängigkeit der Feldgröße von den jeweils transversalen Koordinaten beschreibt.

|  |   |
|--|---|
| $\vec{\underline{E}}, \underline{E}$                     | elektrische Feldstärke des gekrümmten Schichtwellenleiters, Glg. (5.49) |
| $\vec{\underline{\mathcal{E}}}, \underline{\mathcal{E}}$ | elektrische Feldstärke eines geraden Wellenleiters, Glg. (2.50)         |
| $\vec{\underline{H}}, \underline{H}$                     | magnetische Feldstärke des gekrümmten Schichtwellenleiters, Glg. (5.49) |
| $\vec{\underline{\mathcal{H}}}, \underline{\mathcal{H}}$ | magnetische Feldstärke eines geraden Wellenleiters, Glg. (2.50)         |

# Literaturverzeichnis

- [1] *A Portable Package for Bessel Functions of a Complex Argument and Nonnegative Order*. [www.netlib.org/amos](http://www.netlib.org/amos)
- [2] ABRAMOWITZ, M. (Hrsg.) ; STEGUN, I. A. (Hrsg.): *Handbook of mathematical functions*. 7th. New York : Dover Publ., 1970
- [3] AMOS, D. E.: Algorithm 644: A portable package for Bessel functions of a complex argument and nonnegative order. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 12 (1986), Nr. 3, S. 265–273
- [4] ARNAUD, J. A.: *Beam and Fiber Optics*. New York, San Francisco, London : Academic Press, 1976
- [5] BEIL, P. ; DEMMER, P. ; FRANKE, M. ; MROZYNSKI, G. ; NEYER, A. ; PUSCH, R. ; SCHERR, S. ; SCHIEFELBEIN, F.-P. ; SCHRADER, J. : *Industrielle Produktionstechnik für Baugruppen mit integrierten optischen Kurzstreckenverbindungen: Ergebnisbericht des BMBF-Verbundprojektes OptiCon*. Dr. Markus A. Detert, 2005
- [6] BIERHOFF, T. : *Strahlenoptische Analyse der Wellenausbreitung und Modenkopplung in optisch hoch multimodalen Wellenleitern*, Paderborn, Universität, Diss., 2006
- [7] BORN, M. ; WOLF, E. : *Principles of optics*. 7. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1999
- [8] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H. : *Taschenbuch der Mathematik*. 5. Frankfurt am Main : Deutsch, 2000
- [9] BUCK, J. A.: *Fundamentals of Optical Fibers*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1995
- [10] CHIANG, K. S.: Review of numerical and approximate methods for the modal analysis of general optical dielectric waveguides. In: *Optical and Quantum Electronics* 26 (1994), Nr. 3, S. S113–S134
- [11] CHIANG, K. S. ; LO, K. M. ; KWOK, K. S.: Effective-index method with built-in perturbation correction for integrated optical waveguides. In: *J. Lightw. Technol.* 14 (1996), Nr. 2, S. 223–228
- [12] DANGEL, R. ; TOBIAS LAMPRECHT, F. H. ; OFFREIN, B. ; GMÜR, M. : Flexible Polymer Waveguides as Cost-Efficient, High-Density Capable, and Versatile Technology for Board-to-Board and On-Board Optical Interconnects. In: *14th Microoptics Conference MOC08 Technical Digest*, 2008, S. 150–151

- [13] DOERR, C. R. ; KOGELNIK, H. : Dielectric Waveguide Theory. In: *J. Lightw. Technol.* 26 (2008), Nr. 9, S. 1176–1187
- [14] DYOTT, R. B.: *Elliptical Fiber Waveguides*. Norwood : Artech House, 1995
- [15] ELEFThERIADES, G. ; OMAR, A. ; KATEHI, L. ; REBEIZ, G. : Some important properties of waveguide junction generalized scattering matrices in the context of the mode matching technique. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 42 (1994), Nr. 10, S. 1896–1903
- [16] FELSEN, L. B. ; MARCUVITZ, N. : *Radiation and Scattering of Waves*. New York : IEEE Press, 1973
- [17] FETTWEIS, A. : *Elemente nachrichtentechnischer Systeme*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1990
- [18] GOELL, J. E.: A Circular-Harmonic Computer Analysis of Rectangular Dielectric Waveguides. In: *The Bell System Technical Journal* 48 (1969), S. 2133–2160
- [19] GOOS, F. ; HÄNCHEN, H. : Ein neuer und fundamentaler Versuch zur Totalreflexion. In: *Annalen der Physik* 436 (1947), Nr. 7-8, S. 333–346
- [20] GRADSHTEYN, I. S. ; RYZHIK, I. M.: *Table of integrals, series, and products*. New York : Academic Press, 1980
- [21] HANSEN, T. B. ; YAGHJIAN, A. D.: *Plane-Wave Theory of Time-Domain Fields*. New York : IEEE Press, 1999
- [22] HAPPEL, T. ; FRANKE, M. ; NANAI, H. ; SCHRAGE, J. : Demonstration of Optical Interconnection- and Assembly Technique for Fully-Embedded Optical PCB at Data Rates of 10 Gbps/ch. In: *Proc. 1st Electronics System-Integration Technology Conference* Bd. 1, 2006, S. 247–252
- [23] HAUS, H. A.: *Waves and Fields in Optoelectronics*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1984
- [24] HENRY, C. H. ; VERBEEK, B. H.: Solution of the scalar wave equation for arbitrarily shaped dielectric waveguides by two-dimensional Fourier analysis. In: *J. Lightw. Technol.* 7 (1989), Nr. 2, S. 308–313
- [25] HIREMATH, K. R. ; HAMMER, M. ; STOFFER, R. ; PRKNA, L. ; CTYROKY, J. : Analytic approach to dielectric optical bent slab waveguides. In: *Optical and Quantum Electronics* 37 (2005), Jan., Nr. 1, S. 37–61
- [26] HONDROS, D. ; DEBYE, P. : Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten. In: *Annalen der Physik* 337 (1920), Nr. 8, S. 465–476
- [27] JABLONSKI, T. F.: Complex modes in open lossless dielectric waveguides. In: *J. Opt. Soc. Am. A* 11 (1994), Apr., Nr. 4, S. 1272–1282. <http://dx.doi.org/doi:10.1364/JOSAA.11.001272>. – DOI doi:10.1364/JOSAA.11.001272
- [28] JACKSON, J. D.: *Klassische Elektrodynamik*. 2. Berlin : de Gruyter, 1982. – Kurt Müller (Übersetzer)

- [29] KARPPINEN, M. : *High bit-rate optical interconnects on printed wiring board*, University of Oulu, Diss., 2008
- [30] KATZIER, H. ; LANGE, F. J. K.: Grundlegende Eigenschaften komplexer Wellen am Beispiel der geschirmten kreiszylindrischen dielektrischen Leitung. In: *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik* 37 (1983), Nr. 1/2, S. 1–5
- [31] KERNDLMAIER, W. : *Differentialgeometrische Formulierung der Maxwell-Gleichungen und deren Anwendung auf die Berechnung gekrümmter dielektrischer Wellenleiter*, München, Techn. Univ, Diss., 1992
- [32] KOGELNIK, H. : Theory of Optical Waveguides. In: TAMIR, T. (Hrsg.): *Guided-Wave Optoelectronics*. Berlin : Springer, 1988, Kapitel Theory of Optical Waveguides
- [33] KOLLECK, C. ; STALLEIN, M. ; MROZYNSKI, G. : Models for the coupling of light into multimode waveguides. In: *Proc. 8th IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects*, 2004, S. 141–144
- [34] KONG, J. A.: *Electromagnetic Wave Theory*. Cambridge : EMW Publishing, 2005
- [35] KOSHIBA, M. ; OKOSHI, T. (Hrsg.): *Optical Waveguide Analysis*. McGraw-Hill, 1992 (Advanced Science and Technology Series)
- [36] LEE, J. S. ; SHIN, S. Y.: On the validity of the effective-index method for rectangular dielectric waveguides. In: *J. Lightw. Technol.* 11 (1993), Nr. 8, S. 1320–1324
- [37] LEE, K.-Y. ; WANG, W.-S. : Ray-optics analysis of the coupling efficiency from a gaussian beam to a rectangular multimode embedded strip waveguide. In: *Fiber and Integrated Optics* 13 (1994), Nr. 3, S. 321–330
- [38] LEHNER, G. : *Elektromagnetische Feldtheorie*. 3. Berlin : Springer, 1996
- [39] LENZ, D. ; RANKOV, B. ; ERNI, D. ; BACHTOLD, W. ; WITTNEBEN, A. : MIMO channel for modal multiplexing in highly overmoded optical waveguides. In: *Proc. International Zurich Seminar on Communications*, 2004, S. 196–199
- [40] LEWIN, L. ; CHANG, D. C. ; KUESTER, E. F.: *Electromagnetic waves and curved structures*. Stevenage, Herts., England : Peter Peregrinus, Ltd., 1977 (IEE Electromagnetic Waves Series, Volume 2)
- [41] LIOUBTCHENKO, D. ; TRETYAKOV, S. ; DUDOROV, S. : *Millimeter-Wave Waveguides*. Boston : Kluwer Academic Publishers, 2003
- [42] LUKOWICZ, P. ; JAHNS, J. ; BARBIERI, R. ; BENABES, P. ; BIERHOFF, T. ; GAUTHIER, A. ; JARCZYNSKI, M. ; RUSSELL, G. ; SCHRAGE, J. ; SÜLLAU, W. ; SNOWDON, J. ; WIRZ, M. ; TRÖSTER, G. : Optoelectronic interconnection technology in the HOLMS system. In: *IEEE J. Sel. Topics Quantum Electron.* 9 (2003), Nr. 2, S. 624–635
- [43] MARCATILI, E. A. J.: Bends in optical dielectric guides. In: *The Bell System Technical Journal* 48 (1969), S. 2103–2132
- [44] MARCATILI, E. A. J.: Dielectric Rectangular Waveguide and Directional Coupler for Integrated Optics. In: *The Bell System Technical Journal* 48 (1969), S. 2071–2102

- [45] MARCUSE, D. : Solution of the vector wave equation for general dielectric waveguides by the Galerkin method. In: *IEEE J. Quantum Electron.* 28 (1992), Nr. 2, S. 459–465
- [46] MARCUSE, D. : *Light Transmission Optics*. 2. New York : Van Nostrand, 1982
- [47] MARCUSE, D. : *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. 2. New York : Academic Press, 1991
- [48] MEDERER, F. ; JAGER, R. ; UNOLD, H. J. ; MICHALZIK, R. ; EBELING, K. J. ; LEHMACHER, S. ; NEYER, A. ; GRIESE, E. : 3-Gb/s data transmission with GaAs VCSELs over PCB integrated polymer waveguides. In: *IEEE Photon. Technol. Lett.* 13 (2001), Nr. 9, S. 1032–1034
- [49] MEYLAN, M. H. ; GROSS, L. : A parallel algorithm to find the zeros of a complex analytic function. In: *ANZIAM J.* 44 (2003), Nr. E, S. E236–E254
- [50] MOON, P. ; SPENCER, D. E.: *Field Theory Handbook*. 2. Berlin : Springer, 1971
- [51] MORITA, N. ; YAMADA, R. : Electromagnetic fields in circular bends of slab waveguides. In: *J. Lightw. Technol.* 8 (1990), Nr. 1, S. 16–22
- [52] OEVEL, W. : *Einführung in die numerische Mathematik*. Heidelberg : Spektrum, Akad. Verlag, 1996
- [53] OKOSHI, T. : *Optical fibers*. New York : Academic Press, 1982
- [54] OMAR, A. ; SCHUNEMANN, K. : Complex and Backward-Wave Modes in Inhomogeneously and Anisotropically Filled Waveguides. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 35 (1987), Nr. 3, S. 268–275
- [55] ORTEGA-MONUX, A. ; WANGUEMERT-PEREZ, J. ; MOLINA-FERNANDEZ, I. ; SILVESTRE, E. ; ANDRES, P. : Enhanced accuracy in fast-Fourier-based methods for full-vector modal analysis of dielectric waveguides. In: *Photonics Technology Letters, IEEE* 18 (2006), Nr. 10, S. 1128–1130
- [56] ROZZI, T. ; PIERANTONI, L. ; FARINA, M. : General constraints on the propagation of complex waves in closed lossless isotropic waveguides. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 46 (1998), Nr. 5, S. 512–516
- [57] SCARMOZZINO, R. ; GOPINATH, A. ; PREGLA, R. ; HELFERT, S. : Numerical techniques for modeling guided-wave photonic devices. In: *IEEE J. Sel. Topics Quantum Electron.* 6 (2000), Nr. 1, S. 150–162
- [58] SNYDER, A. : Leaky-ray theory of optical waveguides of circular cross section. In: *Applied Physics A: Materials Science & Processing* 4 (1974), Nr. 4, S. 273–298
- [59] SNYDER, A. W. ; LOVE, J. D.: Goos-Hänchen shift. In: *Appl. Opt.* 15 (1976), Nr. 1, S. 236–238
- [60] SNYDER, A. W. ; LOVE, J. D.: *Optical Waveguide Theory*. Boston : Kluwer Academic Publishers, 2000
- [61] SNYDER, A. W. ; MITCHELL, D. J. ; PASK, C. : Failure of geometric optics for analysis of circular optical fibers. In: *J. Opt. Soc. Am.* 64 (1974), Nr. 5, S. 608–614



- [62] SNYDER, A. ; LOVE, J. : Reflection at a Curved Dielectric Interface — Electromagnetic Tunneling. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 23 (1975), Nr. 1, S. 134–141
- [63] SOLDANO, L. B. ; PENNINGS, E. C. M.: Optical multi-mode interference devices based on self-imaging: principles and applications. In: *J. Lightw. Technol.* 13 (1995), Nr. 4, S. 615–627
- [64] STALLEIN, M. : Coupling Efficiency of Gaussian Beams Into Step-Index Waveguides - An Improved Ray-Optical Approach. In: *J. Lightw. Technol.* 26 (2008), Nr. 16, S. 2937–2945
- [65] STALLEIN, M. ; KOLLECK, C. ; MROZYNSKI, G. : Coupling of a Gaussian Beam into a Planar Slab Waveguide using the Mode Matching Method. In: *Extended Papers of the Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2004)*. Pisa, Italy, 2004, S. 309–312
- [66] STALLEIN, M. ; KOLLECK, C. ; MROZYNSKI, G. : Improved Analysis of the Coupling of Optical Waves into Multimode Waveguides Using Overlap Integrals. In: *Extended Papers of the Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2005)*. Hangzhou, China, 2005, S. 464–468
- [67] STUEBBE, O. ; MROZYNSKI, G. : Analytic ray-tracing for fast computation of transient transfer functions of pcb level optical interconnects. In: *14th Microoptics Conference MOC08 Technical Digest*, 2008, S. 133–134
- [68] TEMME, N. : Numerical algorithms for uniform Airy-type asymptotic expansions. In: *Numerical Algorithms* 15 (1997), Nr. 2, S. 207–225
- [69] TUOVINEN, J. : Accuracy of a Gaussian beam. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 40 (1992), Nr. 4, S. 391–398
- [70] VASSALLO, C. : Circular Fourier analysis of full Maxwell equations for arbitrarily shaped dielectric waveguides-application to gain factors of semiconductor laser waveguides. In: *J. Lightw. Technol.* 8 (1990), Nr. 11, S. 1723–1729
- [71] VASSALLO, C. : 1993-1995 Optical Mode Solvers. In: *Optical and Quantum Electronics* 29 (1996), S. 95–114
- [72] VASSALLO, C. : *Optical Waveguide Concepts*. Amsterdam : Elsevier, 1991
- [73] WANG, Y.-H. ; VASSALLO, C. : Circular Fourier analysis of arbitrarily shaped optical fibers. In: *Opt. Lett.* 14 (1989), Nr. 24, S. 1377–1379
- [74] WATSON, G. N.: *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge : Univ. Press, 1966
- [75] WEILAND, T. : Eine Methode zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen für sechskomponentige Felder auf diskreter Basis. In: *AEÜ* 31 (1977), Nr. 3, S. 116–120
- [76] WEILAND, T. : Quasi-mode-matching technique for unbounded waveguide discontinuities. In: *Frequenz* 59 (2005), S. 66–68

- [77] WELLS, C. ; BALL, J. : Mode-matching analysis of a shielded rectangular dielectric-rod waveguide. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 53 (2005), Nr. 10, S. 3169–3177
- [78] ZAKI, K. ; ATIA, A. : Modes in Dielectric-Loaded Waveguides and Resonators. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 83 (1983), Nr. 12, S. 1039–1045