Zusammenfassung

Es gibt eine interessante Beziehung zwischen zwei Familien von Distributionen, welche zu Eigenfunktionen φ_{λ_k} des Laplace-Operators einer kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeit Y assoziiert werden:

Gegeben eine Pseudodifferentialoperatoren-Quantisierung, d. h. eine Vorschrift $Op : C^\infty(S^*Y) \to B(L^2(Y))$, die Symbolen a der Ordnung 0 auf dem Kosphärenbündel L^2-beschränkte Operatoren auf Y zuweist, so erhält man aus den Funktionalen $\rho_{\lambda_j,\lambda_k}(A) = \langle A\varphi_{\lambda_j}, \varphi_{\lambda_k}\rangle_{L^2}$ auf den Raum der Pseudodifferentialoperatoren nullter Ordnung die Wigner-Distributionen $W_{\lambda_j,\lambda_k}(a) = \rho_{\lambda_j,\lambda_k}(Op(a))$ auf dem Kosphärenbündel S^*Y. Diese sind die Schlüsselobjekte der Quanten-Ergodizität: Man studiert die Schwingungs- und Konzentrationseigenschaften der Eigenfunktionen, indem man das Hochfrequenzverhalten der Distributionen W_{λ_j,λ_k} untersucht, d.h. wenn die Eigenwerte gegen unendlich streben.

Falls Y ein symmetrischer Raum nichtkompakten Typs ist, so wird der Laplace-Operator durch die gesamte Algebra der invarianten Differentialoperatoren ersetzt. Gegeben moderate Eigenfunktionen φ und ψ auf Y, so liefern ihre Helgason-Randwerte sogenannte Patterson-Sullivan Distributionen $PS_{\varphi,\psi}$ auf S^*Y.

Im Falle kompakter hyperbolischer Flächen $Y = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ beobachteten N. Anantharaman und S. Zelditch eine exakte und eine asymptotische Beziehung zwischen diesen Distributionen.

Wir verallgemeinern Teile eines speziellen nicht-euklidischen Kalküls von Pseudodifferentialoperatoren, welcher zuerst von S. Zelditch für hyperbolische Flächen eingeführt wurde, auf symmetrische Räume $X = G/K$ nichtkompakten Typs und ihre kompakten Quotienten $Y = \Gamma\backslash G/K$. Wir werden uns bei einigen Resultaten auf den Fall von Räumen vom Rang eins beschränken. Das nicht-euklidische Setting erweitert die Definitionen der Patterson-Sullivan Distributionen auf natürliche Weise auf symmetrische Räume nichtkompakten Typs. Wir verallgemeinern die exakte Beziehung zwischen diesen und den Wigner-Distributionen und studieren die wichtigen Eigenschaften der Patterson-Sullivan Distributionen. Schließlich beschreiben wir asymptotische Verbindungen zwischen verschiedenen Arten von Distributionen.