

# **Numerische Approximation der Stokes-Gleichung mit künstlichen Randbedingungen in 3D Rohrsystemen**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften im Fachbereich  
Mathematik-Informatik der Universität Paderborn

vorgelegt von  
Stephan Blazy  
Paderborn  
2001



# Inhaltsverzeichnis

<b>0 Einleitung</b>	<b>iv</b>
<b>1 Künstliche Randbedingungen</b>	<b>1</b>
1.1 Existenz und Eindeutigkeit im unbeschränkten Gebiet . . . . .	1
1.2 Randwertprobleme in $\Omega_R$ . . . . .	6
1.3 Fehlerabschätzung . . . . .	32
<b>2 Approximation der Stokes-Gleichung</b>	<b>36</b>
2.1 Einleitung und Ziel . . . . .	36
2.2 Definitionen und Bemerkungen sowie einige grundlegende Sätze .	36
2.3 Das diskrete Problem . . . . .	43
2.4 Herleitung der linearen Gleichungssysteme . . . . .	54
<b>3 Numerische Simulation</b>	<b>58</b>
3.1 PadFEM . . . . .	58
3.2 Der Aufbau von PadFEM . . . . .	59
3.3 Netzgenerierung und Schnittstellen . . . . .	64
3.4 Lastverteilung und Partitionierung . . . . .	65
3.5 Adaption und Fehlerindikator . . . . .	65
3.6 Löser . . . . .	65
3.7 Lösung des 3D Stokes-Systems . . . . .	70
3.8 Modellproblem I . . . . .	72
3.9 Modellproblem II . . . . .	77
<b>4 Anhang: Weitere Testrechnungen</b>	<b>93</b>
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>97</b>



# 0 Einleitung

In der angewandten und theoretischen Hydromechanik wird der Behandlung von Problemen in unbeschränkten Gebieten eine hohe Aufmerksamkeit gewidmet. Randwertprobleme für die Stokes- sowie Navier-Stokes Gleichung in einem Zylinder oder Rohr gehören zu dieser Klasse von Problemen. Obwohl bekanntlich keine unendlichen Volumina in der Natur existieren, kann eine derartige Strömung mit Hilfe von Randwertproblemen in unbeschränkten Gebieten, bzw. in Rohrsystemen mit unendlich langen Ausflüssen, modelliert werden [NaPi99]. In dieser Arbeit untersuchen wir den stationären Fluss einer viskosen Flüssigkeit in einem Rohrsystem. Dazu betrachten wir im folgenden das Stokes-System

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= f_4 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{v} &= g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{0.1}$$

wobei  $u = (\mathbf{v}, p)^t$  den Vektor der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und des Druckes  $p$  bezeichnet,  $\nu$  den Viskositätsparameter und  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit unendlich langen zylindrischen Ausflüssen sei.

Randwertprobleme dieser Art erfordern asymptotische Bedingungen im Unendlichen, welche bereits in der Wahl der zu betrachtenden Funktionenräume enthalten sind oder explizit als vorgeschriebener Fluss bzw. Druckgradient angegeben werden können. Um unbeschränkte Gebiete numerisch behandeln zu können, müssen die unendlich langen Rohre an einer geeigneten Stelle abgeschnitten werden (siehe Kapitel 1.1). Das erhaltene endliche Gebiet bezeichnen wir mit  $\Omega_R$ . Um nun  $u$  mit Lösungen  $u^R$  zu approximieren, ist es erforderlich, das System (0.1) mit einer Randbedingung  $B^R u^R = h$  auf den Rändern  $\Gamma_R = \partial\Omega_R \setminus \partial\Omega$  zu ergänzen. Diese Art von Randbedingungen werden üblicherweise als künstliche Randbedingungen bezeichnet. Das nun neu entstandene Problem auf dem beschränkten Gebiet  $\Omega_R$  nennen wir Approximationsproblem.

Eine der wesentlichen Fragen aus den Bereichen Akustik, Elektrodynamik, Mechanik und der Strömungssimulation ist, wie die Wahl der künstlichen Randbedingungen auszusehen hat. Besonders im Bereich der numerischen Strömungssimulation ist die geeignete Behandlung von derartigen Rändern ausschlaggebend für die Qualität sowie die Performance von numerischen Verfahren. Die Wahl der künstlichen Randbedingung (siehe [Sp97]) sollte dabei den folgenden Kriterien genügen

- Das Approximationsproblem besitzt eine eindeutige Lösung  $u^R = (\mathbf{v}^R, p^R)^t$ .
- Die Lösung  $u^R$  sollte auf  $\Omega_R$  möglichst nah an der Lösung  $u$  des ursprünglichen Problems liegen.

Die derzeit am häufigsten angewendeten Techniken für die Entwicklung von künstlichen Randbedingungen können in zwei Gruppen eingeteilt werden, in lokale und globale Randbedingungen. Globale Randbedingungen, auch exakte künstliche Randbedingung genannt, sind selbstverständlich die beste Wahl mit Blick auf das zweite Kriterium, da in diesem Fall  $(u - u^R)|_{\Omega_R} = 0$  gilt. Es handelt sich hierbei um Pseudo-Differentialoperatoren, die nur für einfache Geometrien praktisch konstruiert werden können. Wir werden uns in dieser Arbeit auf lokale Randbedingungen beschränken, d.h. Randbedingungen in Differentialform derart, daß (0.1) unter Hinzunahme der künstlichen Randbedingung elliptisch ist im Sinne von Agmon-Douglis-Nirenberg [ADN]. Der lokale Ansatz hat den Vorteil einer guten algorithmischen Umsetzung und ist zudem geometrisch universell einsetzbar. Eine ausführliche Zusammenfassung beider Methoden wird in der Arbeit von Tsynkov [Ts98] dargestellt. Außerdem wird in der Arbeit von Tsynkov eine neue Methode, in der eine Kombination der globalen und lokalen Ansätze benutzt wird, vorgestellt.

Das mathematische Werkzeug für die korrekte Realisierung der asymptotischen Bedingungen zusammen mit der physikalischen Interpretation wurde in [NaPi99] entwickelt. Um zu prüfen, ob eine lokale künstliche Randbedingung zu einer guten Approximation mit  $R$  gegen unendlich führt, wird die folgende Vorgehensweise benutzt:

Wir betrachten ein gemischtes elliptisches Randwertproblem für das Stokes - System ( $S$  bezeichne den formalen Differentialoperator des Stokes-Systems und  $B$  den Dirichletoperator)

$$\begin{aligned} S U &= F \quad \text{in } \Omega_R \\ B U &= G \quad \text{auf } \partial\Omega \cap \partial\Omega_R \\ B^R U &= H \quad \text{auf } \Gamma_R \end{aligned} \tag{0.2}$$

und zeigen eine Abschätzung von der Form

$$\|U; D\| \leq \alpha(R) \|(F, G, H); R\|, \tag{0.3}$$

wobei  $D, R$  geeignete Produkte von Funktionenräumen sind und  $\alpha$  eine von  $R$  abhängige Funktion darstellt.  $B^R$  bezeichnet den Randoperator auf dem künstlichen Rand. Der Differentialoperator  $S$  und der Randoperator  $B$  auf dem Mantelrand  $\partial\Omega(R) = \partial\Omega \cap \partial\Omega_R$  wird fest gewählt.

Es sei  $u$  die Lösung im unbeschränkten Gebiet  $\Omega$  und  $u^R$  die Approximationslösung auf  $\Omega_R$ . Setzen wir nun  $U = u - u^R$  so gilt  $F = 0$  und  $G = 0$ . Damit erhält man

$$\|u - u^R; D\| \leq \alpha(R) \|(h - B^R u)|_{\Gamma_R}\|. \tag{0.4}$$

Der Fehler hängt somit von dem asymptotischen Verhalten von  $h - B^R u$  mit  $R \rightarrow \infty$  ab, d.h. das Abklingverhalten des Fehlers steigt, falls die künstliche

Randbedingung derart gewählt wird, daß der asymptotische Hauptteil von  $B^R u$  (siehe Kapitel 1.2, (1.19)ff) verschwindet.

Während in [Sp97] Lösungen von (0.1) mit vorgeschriebenen Fluß betrachtet wurden, studieren wir hier asymptotische Bedingungen im Unendlichen für (0.1), welche äquivalent mit dem Vorschreiben des Druckes am Ausfluss sind. Im Gegensatz zu den Ergebnissen aus [Sp99] erhält man Randbedingungen mit singulären Koeffizienten. Die hier diskutierten Ergebnisse enthalten außerdem Abschätzungen für die in [HeRaTu96] beschriebene do-nothing-Methode.

In Kapitel 1 werden wir die Geometrie des Gebietes  $\Omega$  sowie einige Bezeichnungen und Funktionenräume erläutern. Anschließend werden die Resultate zur Lösung von (0.1) mit dem Setzen der Bedingungen im Unendlichen zusammengestellt und Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für eine Klasse von gemischten Randwertproblemen mit singulären Koeffizienten auf dem künstlichen Rand in gewichteten Sobolevräumen (Kondratiev-Räumen) gezeigt. Zum Abschluss von Kapitel 1 wird eine Abschätzung des Fehlers für (0.4) bewiesen.

Zur numerischen Behandlung von (0.2) stehen eine Vielzahl von Finite-Element-Ansätzen zur Verfügung [GiRa86, BrFo91, Ve84, Pi95]. Da bekannt ist, daß ein linearer Ansatz für Geschwindigkeit und Druck (P1-P1 Ansatz, dabei bezeichnet P1 den Raum aller Polynome vom Grad 1) nicht stabil ist, haben wir uns in dieser Arbeit für das Mini-Element entschieden. Hierbei wird der Ansatzfunktionsraum der Geschwindigkeit eines P1-P1 Ansatzes mit Bubblefunktionen (Blasenfunktionen) auf jedem Tetraederelement erweitert, um ein stabiles Element zu erhalten. Vorteile dieses Elements sind zum einen die gleiche Approximationsgüte wie der quadratisch-lineare Taylor-Hood Ansatz und zum anderen ein geringer Implementationsaufwand (siehe Kapitel 2 und 3).

Der Randoperator  $B^R$  aus (0.2) führt nach Kapitel 1 (siehe 1.28) zu einem gemischten Randwertproblem, der so genannten dritten Randwertaufgabe oder Robin-Randbedingung, in der Form

$$(\nabla \mathbf{v} - \mathbf{I} p) \cdot \mathbf{n} + \tilde{\mathbf{C}}(R, T, \psi^{-1}) \mathbf{v} = h \text{ auf } \omega_j, j = 1, \dots, J.$$

Dabei ist  $\mathbf{n}$  die äußere Normale,  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix und  $J$  die Anzahl der Ausflußrohre. Die Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}$  hängt dabei von  $R$ , dem simulierten realen Ende  $T$  und  $\psi$ , der Lösung eines 2D Laplace Problems

$$\begin{aligned} -\Delta \psi &= 2 \text{ in } \omega_j \\ \psi &= 0 \text{ auf } \partial \omega_j \end{aligned}$$

ab.  $\omega_j$  bezeichnet hierbei den künstlichen Rand des  $j$ 'ten Ausflußrohres für  $j = 1, \dots, J$ . Diese Probleme müssen zusätzlich numerisch mit einem Finite-Element Ansatz gelöst werden, da die Lösung im allgemeinen nicht analytisch angegeben werden kann. Hierzu kann ein linearer 2D Ansatz benutzt werden. Somit ist die Lösung von (0.2) gekoppelt mit der Lösung dieser zweidimensionalen Randwertprobleme. Es ist daher erforderlich, ein Finite-Element Programm zu entwickeln,

welches zweidimensionale und dreidimensionale Lösungen solcher Systeme gleichzeitig unterstützt.

Zur Lösung des Stokes-Problems mit einem Mini-Element Ansatz muß ein Gleichungssystem der folgenden Art (siehe Abschnitt 2.4)

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ g \end{pmatrix}$$

gelöst werden. In den letzten Jahren wurde eine große Klasse von Lösungsmethoden für die Stokes-Gleichung geschaffen, angefangen vom einfachen Uzawa-Algorithmus [Tem77] bis hin zu komplexen konjugierten Gradientverfahren (CG) und Multigrid (MG)-Methoden. Mit dem Einsatz von Parallelcomputern entstanden Gebietszerlegungsmethoden und gemischte CG-MG Verfahren, welche heute in Abhängigkeit der Problemspezifikation jeweils zum Einsatz kommen [BlBoDr95, Ve84]. Die Iterationsverfahren bestehen im allgemeinen aus Matrix-Vektor-Multiplikationen mit den Matrizen  $B$ ,  $B^t$ ,  $C$  und dem Invertieren der symmetrisch positiv definiten Matrix  $A$ . Diese Matrizen entsprechen den diskreten Operatoren

$$A \equiv -\Delta_h, \quad B^t \equiv \nabla_h, \quad B \equiv \operatorname{div}_h.$$

Die Matrix  $C$  entsteht aus einem Petrov-Galerkin Ansatz, siehe Kapitel 2. Zur Lösung des zu der Matrix  $A$  korrespondierenden Laplace-Problems sind die bekannten schnellen Multigrid-Löser bestens geeignet. Eine andere Möglichkeit besteht darin, das Gleichungssystem mit Iterationsverfahren, die speziell für diese Matrix-Struktur entwickelt worden sind, direkt zu behandeln, siehe [GoWa99, SaSa98, SiWa94, SiWa94]. In dieser Arbeit haben wir uns für eine CG-CG Variante zur Lösung der Schur-Komplement Gleichung

$$(C - BA^{-1}B^t)p = g - BA^{-1}\mathbf{f}$$

[GoLo96, Ve94] entschieden, d.h.  $A^{-1}$  wurde ebenfalls mit einem CG-Verfahren berechnet.

In Kapitel 2 werden wir die Anforderungen an die Tetraedierung bzw. Triangulierung vorstellen und Interpolationseigenschaften [BrFo91], [GiRa86] auf solchen Netzen angeben. Anschließend betrachten wir die schwache Formulierung von (0.2) und definieren die zugehörigen Ansatzfunktionenräume. Um die Existenz und Eindeutigkeit der diskreten Lösung zu zeigen, beweisen wir die Gültigkeit der Babuska-Brezzi Bedingung [ArBrFo84, BrFo91, GiRa86] und im Anschluß daran eine Abschätzung für den Fehler  $|u^R - u_h^R|$ . Zu beachten ist, daß die Brezzi-Konstante zwar unabhängig von dem Diskretisierungsparameter  $h$ , aber nicht unabhängig von  $\Omega_R$  ist (siehe auch [ChOl99]).

In Kapitel 3 stellen wir die Methode zur numerischen Simulation von (0.2), einige Modellprobleme und deren numerische Ergebnisse vor. Zur Simulation benutzen wir ein Konzept, daß auf der Datenstruktur des parallelen adaptiven

Finite-Element-Pakets PadFEM, welches derzeit im Sonderforschungsbereich 376, "Massive Parallelität" Teilprojekt A3 entwickelt wird, beruht. PadFEM ist eine Objekt-Orientierte Bibliothek mit verschiedenen Werkzeugen zur Partitionierung von 2D Netzen, Lastverteilungsmethoden und Routinen für die Adaption von zweidimensionalen unstrukturierten Netzen. Die Basis von PadFEM [Pad] besteht aus einer parallelen Datenstruktur, in der Zugriff auf Knoten, Kanten und Flächen sowie das Löschen bzw. Einfügen von Elementen ermöglicht wird. Weiterhin sind automatisierte Funktionen zum Verschieben von Elementen in andere Partitionen integriert, d.h Knoten und Kanten werden von einer Partition in eine andere transportiert.

PadFEM enthält Module zum Datenimport- und export, eine zweidimensionale Netzgenerierung mit graphischer Oberfläche, Partitionierungstools, Routinen zur Matrixaufstellung und numerische Standardlöser, wie z.B. das parallele CG-Verfahren.

Desweiteren sind Fehlerindikatoren und Netzverfeinerungsmodule integriert sowie Routinen zur dynamischen Lastverteilung. Außerdem ermöglicht die Datenstruktur das gleichzeitige Behandeln von zwei- und dreidimensionalen Problemen. In dieser Arbeit benutzen wir ein sequentielles Verfahren zur Lösung von (0.2). Die numerischen Ergebnisse und der Ausblick werden jedoch zeigen, daß eine Parallelisierung des Verfahrens für realistische Simulationen unumgänglich ist. Die parallele Version des dreidimensionalen Problems wird in einer anschließenden Arbeit behandelt werden.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei meiner Doktormutter Frau Prof. Dr. M. Specovius-Neugebauer, für alles, wodurch sie das Entstehen dieser Arbeit ermöglicht hat, bedanken. Herrn Prof. Dr. B. Monien möchte ich für die fruchtbare Zusammenarbeit über die Jahre zwischen Informatik und Mathematik danken. Die Teamarbeit dieser Arbeitsgruppe hat wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Herrn Prof. Dr. H. Sohr danke ich für das Interesse und für die Übernahme eines Korreferats.

Weiterhin möchte ich den Arbeitskollegen des PC<sup>2</sup> -Paderborn Center for Parallel Computing- herzlich danken, besonders Jan Hungershöfer für die freundliche Unterstützung sowie Axel Keller und Andreas Krawinkel für die technisch perfekte und funktionierende Arbeitsumgebung.

Zum Schluß möchte ich mich bei meiner Familie bedanken: Meinen Eltern, meinen Kindern und insbesondere bei meiner Frau Monika, die mich bei meiner Arbeit tatkräftig unterstützt hat. Ihr sei diese Arbeit gewidmet.



# 1 Künstliche Randbedingungen

## 1.1 Existenz und Eindeutigkeit im unbeschränkten Gebiet

### Geometrische Bezeichnungen

Wir betrachten ein Gebiet  $\Omega$  mit  $J$  zylindrischen Ausströmrohren  $\Omega_1, \dots, \Omega_J$ . Mit  $\Omega_0$  bezeichnen wir das Gebiet, welches alle Teilgebiete  $\Omega_j$ ,  $j = 1, \dots, J$  miteinander verbindet, d.h.  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_J$ . Dabei nehmen wir an, daß  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  gilt. Der Rand  $\partial\Omega$  sei aus der Klasse  $C^{l+2}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Für jedes Teilgebiet  $\Omega_j$ ,  $j \geq 1$  existieren lokale Koordinaten

$$x^j = (y^j, z^j),$$

sodaß  $\Omega_j = \{x^j; x^j \in \omega_j \times [1, \infty)\}$ . Hierbei ist  $\omega_j$  eine glatt berandete Schnittfläche der jeweiligen Ausströmzyylinder. Ferner wählen wir eine Kugel  $K(\Omega_0, R_0)$  mit Radius  $R_0 > 0$  die  $\Omega_0$  umschließt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit

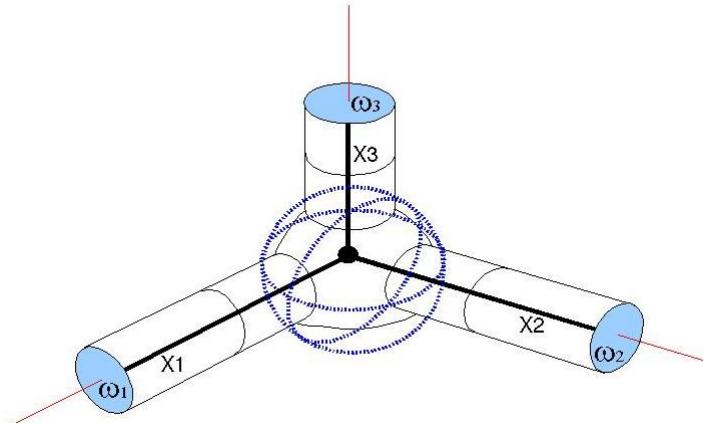


Abbildung 1: Darstellung von  $\Omega$

gelte  $\omega_j \times [2, \infty) \cap \Omega_0 = \emptyset$ . Weiterhin bezeichnen wir mit  $\Pi_j$  den Zylinder  $\omega_j \times \mathbb{R}$  und mit  $\Pi_j^-$  den Zylinder  $\omega_j \times (-\infty, 0)$ .

Wir definieren nun einige Funktionenräume:

Mit  $H^l(\Omega)$  bezeichnen wir den gewöhnlichen Sobolevraum meßbarer Funktionen in  $L^2(\Omega)$ , deren Ableitungen im Distributionssinn bis zur Ordnung  $l$  noch in  $L^2(\Omega)$  enthalten sind

$$H^l(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) | D^\alpha v \in L^2(\Omega) \text{ mit } |\alpha| \leq l\}.$$

Mit  $H_{loc}^l(\Omega)$  bezeichnen wir den Raum aller meßbaren Funktionen  $v$  mit  $v|_K \in H^l(K)$  für jedes beschränkte Teilgebiet  $\overline{K} \subset \Omega$ .

Es sei  $\wp \in C^\infty(\Omega)$  eine Gewichtsfunktion mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}\wp(x) &= 1 && \text{für } x \in \Omega_0 \quad \text{und} \\ \wp(x) &= z_j && \text{für } x \in \Omega_j \text{ für } j = 1 \dots, J.\end{aligned}$$

Dazu definieren nun die gewichteten Sobolev-Räume:

$W_\beta^l(\Omega)$  sei die Menge aller Funktionen  $u \in H_{loc}^l(\Omega)$  derart, daß die Norm von  $u$

$$\|u; W_\beta^l(\Omega)\| = \|ue^{\beta\wp}; H^l(\Omega)\| < \infty$$

beschränkt bleibt.

Für  $l \geq 1$  sei

$$W_\beta^{l-1/2}(\partial\Omega) = \{u|_{\partial\Omega} : u \in W_\beta^l(\Omega)\} \quad (1.1)$$

der zugehörige Spurraum versehen mit folgender Norm

$$\|u; W_\beta^{l-1/2}(\partial\Omega)\| = \inf_{\substack{\tilde{u} \in W_\beta^l \\ \tilde{u}=u \text{ auf } \partial\Omega}} \|\tilde{u}; W_\beta^l(\Omega)\|. \quad (1.2)$$

**Bemerkung 1.1.** Es gilt

- i)  $C_0^l$  liegt dicht in  $W_\beta^l$ ; für  $l \geq 1$
- ii)  $W_\beta^l \subset W_\beta^{\bar{l}}$  für  $l \geq \bar{l}$  und  $\beta \geq \bar{\beta}$
- iii)  $W_\beta^l \hookrightarrow W_\beta^{\bar{l}}$  für  $l > \bar{l}$  und  $\beta > \bar{\beta}$ .

Für das System (0.1) führen wir den natürlichen Bildraum  $\mathcal{R}$  und den Definitionsräum  $\mathcal{D}$  als Produkt von geeigneten gewichteten Sobolev-Räumen wie folgt ein:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\beta^l W(\Omega) &:= W_\beta^{l+1}(\Omega)^3 \times W_\beta^l(\Omega) \\ \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega) &:= W_\beta^{l-1}(\Omega)^3 \times W_\beta^l(\Omega) \times W_\beta^{l+1/2}(\Omega)^3.\end{aligned}$$

Mit  $\mathbb{S}_\beta$  definieren wir die folgende Abbildung

$$\mathbb{S}_\beta : \mathcal{D}_\beta^l W(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega, \partial\Omega) \quad (1.3)$$

$$u \mapsto (Su, v|_{\partial\Omega}) = (-\nu\Delta v + \nabla p, \operatorname{div} v, v|_{\partial\Omega}). \quad (1.4)$$

**Bemerkung 1.2.**  $\mathbb{S}_\beta$  ist linear und stetig (siehe [NaPi99]) und es gelten folgende Greensche Formeln:

$$(Su, U)_\Omega = -(Nu, V)_{\partial\Omega} + (\nabla v, \nabla V)_\Omega - (p, \operatorname{div} V)_\Omega - (\operatorname{div} v, P)_\Omega \quad (1.5)$$

$$(Su, U)_\Omega - (u, SU)_\Omega = (v, NU)_{\partial\Omega} - (Nu, V)_{\partial\Omega} \quad (1.6)$$

für  $u = (v, p) \in \mathcal{D}_\beta^l W(\Omega)$ ,  $U = (V, P) \in \mathcal{D}_{-\beta}^l W(\Omega)$ .

$N$  bezeichne den Neumannoperator  $Nu = (\nabla v \cdot n - pn)|_{\partial\Omega}$ , wobei  $n$  die äußere Normale auf  $\partial\Omega$  ist, ferner sei  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  und  $(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$  das  $L^2$ -Skalarprodukt auf  $\Omega$  bzw.  $\partial\Omega$ .

**Satz 1.1.** ([NaPl91], [NaPi99]) Es sei  $l \in \mathbb{N}$  und  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{I}$ . Dann gilt

- i) Die Abbildung (1.3) definiert einen Fredholm Operator für alle  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{I}$ , wobei  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  eine diskrete abzählbare Teilmenge ist.
- ii) Es gilt:

- a)  $0 \in \mathcal{I}$
- b)  $\beta \notin \mathcal{I} \Rightarrow -\beta \notin \mathcal{I}$
- c)  $\beta \in \mathcal{I} \Rightarrow \ker \mathbb{S}_\beta = \text{coker } \mathbb{S}_{-\beta}$
- d)  $\mathbb{S}_\beta$  ist injektiv für  $\beta > 0$ ,  
 $\mathbb{S}_\beta$  ist surjektiv für  $\beta \in (-\infty, 0) \setminus \mathcal{I}$ .

Uns interessieren hier die  $\beta \in \mathbb{R}$  mit

$$|\beta| < \beta^*, \quad (1.7)$$

wobei  $\beta^*$  der kleinste positive Wert aus  $\mathcal{I}$  sei. Mit Theorem 3.6 aus [NaPi99] gilt

$$\dim \ker \mathbb{S}_{-\beta} = J, \quad (J = \text{Anzahl der Abflußrohre}), \quad (1.8)$$

d.h. zu  $(f, g) \in \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega, \partial\Omega)$  existiert eine Lösung  $(v, p) \in \mathcal{D}_\beta^l W(\Omega)$  von (0.1) nur unter  $J$  Nebenbedingungen der folgenden Form

$$(f, U)_\Omega - (g, NU)_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.9)$$

für alle  $U \in \ker \mathbb{S}_{-\beta}$ .

Da  $\mathcal{R}_\beta^l W(\Omega, \partial\Omega) \subset \mathcal{R}_{-\beta}^l W(\Omega)$ , erhält man für Gleichung (0.1) Lösungen  $u \in \mathcal{D}_{-\beta}^l(\Omega)$ . Weiterhin ist bekannt, daß für  $(f, g) \in \mathcal{R}_\beta^l(\Omega, \partial\Omega)$  jede Lösung  $u \in \mathcal{D}_{-\beta}^l$  von (0.1) folgende Darstellung erlaubt:

(vergl. [NaPi99, Th. 3.7])

$$u(x) = \sum_{j=1}^J \mathcal{X}_j(x) \{a_j u^{0j} + b_j u^{1j}\} + \tilde{u}(x). \quad (1.10)$$

Dabei ist  $\chi_j \in C^\infty(\Omega)$  eine Abschneidefunktion mit Träger  $\text{supp } \chi \subset \Omega_j$  für die gilt

$$\chi_j(\mathbf{y}_j, z_j) = 1 \quad \text{für } z_j \geq 2 \quad \text{mit } j = 1, \dots, J,$$

und  $\tilde{u} \in \mathcal{D}_\beta^l$ , d.h.  $\tilde{u}$  nimmt exponentiell in den Ausströmrohren des Zylinders ab.  $u^{0j}$  und  $u^{1j}$  sind spezielle Lösungen des homogenen Problems (0.1) im Zylinder. Dabei ist  $u^{0j}$  die konstante Drucklösung und  $u^{1j}$  der Poiseuille Fluß:

$$u^{0j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u^{1j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{w}_j \psi^{(j)}(y_j) \\ -2\bar{w}_j z_j \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Hierbei löst  $\psi^{(j)}$  das folgende Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta \psi^{(j)} &= 2 && \text{in } \omega_j \\ \psi^{(j)} &= 0 && \text{auf } \partial \omega_j. \end{aligned}$$

$\bar{w}_j$  ist ein Normierungsfaktor derart, daß

$$\int_{\omega_j} \bar{w}_j \psi^{(j)}(y_j) dy_j = 1 \quad \text{gilt.}$$

**Bemerkung 1.3.**  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_j)$  und  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_j)$  sind Vektoren mit je  $J$  Komponenten, die durch die Lösung  $u$  eindeutig bestimmt sind, d.h. es gibt einen Isomorphismus  $\mathcal{J}$  vom Urbild

$$\mathbb{S}_{-\beta}^{-1} \mathcal{R}_\beta^l(\Omega, \partial\Omega) \quad \text{auf} \quad \mathcal{D}_\beta^l \times \mathbb{C}^{2J} =: \mathbb{D}_\beta^l(\Omega)$$

definiert durch  $\mathcal{J}u = (\tilde{u}, a, b)$  mit

$$u = \sum_{j=1}^J \chi_j (a_j u^{0j} + b_j u^{1j}) + \tilde{u}.$$

Nach Satz 1.1 und (1.8) wissen wir, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{S} : \mathbb{D}_\beta^l W(\Omega) &\rightarrow \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega, \partial\Omega) \\ u &\mapsto (Su, v|_{\partial\Omega}) \end{aligned}$$

surjektiv ist und einen  $J$ -dimensionalen Kern besitzt. Um eine Lösung zu fixieren, ist es notwendig, zusätzliche Randbedingungen im unendlichen festzulegen. Dazu betrachten wir die folgende Gleichung (vergl. [NaPi99])

$$\mathbb{B} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathbf{h}, \quad (1.12)$$

wobei  $\mathbb{B} = (\mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1)$  eine  $J \times 2J$ -Matrix in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist und  $\mathbb{B}$  maximalen Rang,  $Rg\mathbb{B} = J$ , hat.

Als Beispiel wählen wir  $\mathbb{B}_0 = 0$  und  $\mathbb{B}_1 = \mathbf{I}$ , dabei bezeichne  $\mathbf{I}$  die  $J$ -dimensionale Einheitsmatrix. Durch Einsetzen erhält man

$$0 \cdot \mathbf{a} + \mathbf{I}\mathbf{b} = \mathbf{h} \Leftrightarrow \mathbf{I}\mathbf{b} = \mathbf{h},$$

d.h. wir schreiben den mittleren Fluß  $h_j$  in jedem Ausströmzylinder  $\Omega_j$  vor. In dieser Arbeit betrachten wir Bedingungen im Unendlichen der folgenden Art:

**Satz 1.2. (Pileckas, Nazarov) [NaPi99]** Es sei  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\beta^* \text{ aus (1.7)}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \beta < \beta^*$ ,  $\mathbb{B}_0 = \mathbf{I}$  und  $\mathbb{B}_1 = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_J)$ . Dann gibt es ein  $R^* > 0$  mit folgender Eigenschaft. Zu jedem Paar  $(f, g) \in \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega, \partial\Omega)$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^J$  und  $\gamma_j > R^*$  für alle  $j = 1, \dots, J$  existiert eine eindeutige Lösung  $u \in \mathbb{D}_\beta^l W(\Omega)$  des Problems (1.1), (1.16). Des Weiteren gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \sum (|a_j| + |b_j|) + \|\tilde{u}_i \mathcal{D}_\beta^l W(\Omega)\| \\ & \leq c \|(f, g); \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega, \partial\Omega)\| + \sum |h_j|. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Außerdem erhält man mit einer Konstanten  $\rho_1 > 0$ , für die die nachstehende Ungleichung erfüllt ist,

$$\|(f, g); \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega, \partial\Omega)\| + \sum |h_j| < \rho_1,$$

eine eindeutige Lösung der nichtlinearen Gleichung Navier-Stokes Gleichung

$$\begin{aligned} v \cdot \nabla v - \nu \Delta v + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} v &= f_4 \quad \text{in } \Omega, \\ v &= g \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

welche die asymptotische Randbedingung (1.12) und die Abschätzung (1.13) erfüllt.

Im folgenden betrachten wir ein System von Zylindern  $\Omega_1, \dots, \Omega_J$ , wobei für jedes  $\Omega_j$  das reale Ende an der Stelle  $z_j = T_j$  ist. Wählen wir nun  $\gamma_j = 2\bar{w}_j T_j$ , so erhalten wir aus (1.16)

$$2\bar{w}_j T_j b_j - a_j = h_j. \tag{1.14}$$

Aus (1.10) erkennen wir, daß die linke Seite von (1.14) mit dem ersten asymptotischen Term des Druckes am realen Ende vergleichbar ist, d.h. wir können diese Randbedingung als Vorgabe des Druckes an der Stelle  $T_j$  interpretieren.

## 1.2 Randwertprobleme in $\Omega_R$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns nur mit Randbedingungen in dem beschränkten Gebiet  $\Omega_R$ . Dazu führen wir folgende Bezeichnungsweisen ein.

$$\Omega_R = \{x \in \Omega : z_j < R \text{ mit } x = (\mathbf{y}_j, z_j) \in \Omega_j\}$$

bezeichne das endliche (abgeschnittene) Gebiet und

$$\partial\Omega(R) = \partial\Omega \cap \partial\Omega_R$$

den "lateralen" Rand. Mit

$$\Gamma_{R,j} = \{(\mathbf{y}_j, R) \in \Omega_j\}$$

bezeichnen wir die Schnittfläche am abgeschnittenem Ausströmrohr von  $\Omega_j$ .  $\Gamma_R$  bezeichne die Vereinigung aller Ein- bzw. Ausströmflächen

$$\Gamma_R = \bigcup_j \Gamma_{R,j}.$$

$\partial\Gamma_{R,j} := \{(y_j, R) : y_j \in \partial\omega_j\}$  bezeichne die Randkurve der Schnittflächen von  $\Omega_j$  und  $\partial\Gamma_R$  sei die Vereinigung aller Randkurven

$$\partial\Gamma_R = \bigcup_{j=1}^N \partial\Gamma_{R,j}.$$

Abbildung 2 erläutert noch einmal die Bezeichnungen.

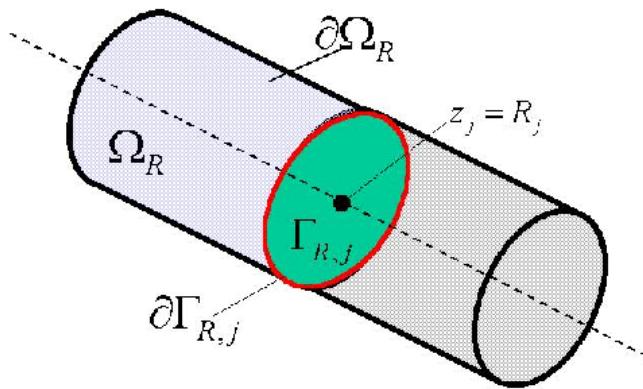


Abbildung 2: Ausschnitt eines Zylinders

Wie in der Einleitung erwähnt, soll die künstliche Randbedingung den asymptotischen Term derart aufheben, daß der Fehler mit  $R \rightarrow \infty$  verschwindet, vergleiche (0.3). Da wir die Konstanten  $a_j, b_j$  nicht kennen, sondern nur die Relation (1.14), ist es nicht möglich, mit einer Dirichlet oder gemischten Randbedingung zum Ziel zu gelangen (vergl. [Sp99]). Daher betrachten wir zunächst die Anwendung des Neumann Operators auf  $\Gamma_{R,j}$  in lokalen Koordinaten von  $\Omega_j$ . Mit  $Nu = (\nabla v \cdot n - pn)$  bezeichnen wir den Neumannoperator,  $n$  sei die äußere Normale und  $e_z$  sei der Einheitsvektor in  $z$ -Richtung. Es gilt

$$a_j Nu^{0j} = a_j N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_j (\vec{0} \cdot v - I1) = -a_j e_z, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} b_j Nu^{1j} &= b_j N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3(y_i) \\ p(y_i, z_j) \end{pmatrix} \\ &= b_j \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_z v_3 \end{pmatrix} \cdot e_z - (-2\bar{w}_j z_j) e_z \right] = 2b_j \bar{w}_j z_j e_z. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Die Ableitung von  $v_3$  verschwindet, da  $v_3$  nicht von  $z_j$  abhängt. Somit erhält man

$$\begin{aligned} Nu|_{z_j=R} &= N(a_j u_0^j + b_j u_1^j) \\ &= (-a_j + 2\bar{w}_j z_j b_j) e_z|_{z_j=R} = 2(\bar{w}_j R b_j - a_j) e_z. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Wir wählen die künstlichen Randbedingungen wie folgt:

$$(B^R u^R) \times n = (Nu^R) \times n = 0, \quad (1.18)$$

$$(B^R u^R) \cdot n = Nu^R + 2 \frac{(T-R)}{\psi^j} v^R \cdot n = h_j. \quad (1.19)$$

Dann gilt in lokalen Koordinaten

$$\partial_z v^R(y, R) - p^R(y, R) e_z + c(y, R)(v^R e_z) = h_j e_z$$

und daher folgt aus (1.14), (1.19) und mit  $c(y, R) = 2(T - R)(\psi^j(y))^{-1}$ :

$$B^R u^R - B^R u = B^R \tilde{u},$$

wobei  $u$  die Lösung des Stokes-Systems von Satz 1.2 ist und  $\tilde{u}$  der exponentiell abklingende Anteil.

Kommen wir nun zu der Abschätzung vom Typ (0.3). Es sei  $U = (V, P) \in \mathcal{D}$ . Wir betrachten das folgende Problem

$$\begin{aligned} SU &= F \quad \text{in } \Omega_R \\ B^R U &= H \quad \text{auf } \Gamma_R \\ V &= G \quad \text{auf } \partial\Omega(R) \end{aligned} \tag{1.20}$$

zu gegebenen  $(F, G, H) \in \mathcal{R}$ . Die Räume  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{R}$  seien so gewählte Funktionen- und Spurräume, daß der Operator zwischen  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{R}$  ein Fredholm-Operator ist. Da  $\Omega_R$  ein Gebiet mit Kanten ist und der Randoperator  $B^R$  singuläre Koeffizienten hat, ist es nicht möglich,  $\mathcal{D}(\Omega_R) = H^{l+1}(\Omega) \times H^l(\Omega)$  unabhängig von  $l$  zu wählen. Die allgemein übliche Wahl der  $H^l$ -Räume und eine analoge Wahl von  $(F, H, G)$  führt hier nicht zu einem Fredholm-Operator. Daher müssen in diesem Fall gewichtete Sobolev-Räume (Kondratiev-Räume) benutzt werden. Das zugehörige Gewicht berechnet sich dabei aus dem Abstand eines Punktes von  $\Omega_R$  zum jeweiligen Rand  $\partial\Gamma_{R,j}$ .

### Zulässige Randoperatoren und Funktionenräume

Wir wollen hier eine Klasse von Randoperatoren  $B^R$  für unser Problem (1.20) untersuchen. Hierzu machen wir zunächst eine geometrische Vorüberlegung.

**Bemerkung 1.4.** Zu jedem  $x \in \partial\Gamma_R$  existiert eine Umgebung

$$\mathcal{O}_\varepsilon(x) = \{\bar{x}; |x - \bar{x}| < \varepsilon\}$$

und ein  $C^{l+2}$ -Diffeomorphismus  $\mathcal{K}: \mathcal{O}_\varepsilon \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_\varepsilon$  derart, daß

$$\mathcal{K}(\partial\Gamma_R \cap \mathcal{O}_\varepsilon) = (\{0\} \times \{0\} \cap \mathbb{R}) \cap \tilde{\mathcal{O}}_\varepsilon \tag{1.21}$$

$$\mathcal{K}(\partial\Omega(R) \cap \mathcal{O}_\varepsilon) = (\{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{O}_\varepsilon =: \Gamma_D \tag{1.22}$$

$$\mathcal{K}(\Gamma_R \cap \mathcal{O}_\varepsilon) = (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{O}_\varepsilon =: \Gamma_{ABC}. \tag{1.23}$$

Siehe dazu Abbildung 3.

Wir setzen zu jedem  $\phi$  auf  $M \subset \mathcal{O}_\varepsilon \cap \overline{\Omega}_R$

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) := \phi(\mathcal{K}^{-1}(\tilde{x})) \quad \text{für } \tilde{x} \in \widetilde{M} = \mathcal{K}(M).$$

Bevor wir zur eigentlichen Konstruktion der Randoperatoren kommen, benötigen wir noch einige Vorarbeit.

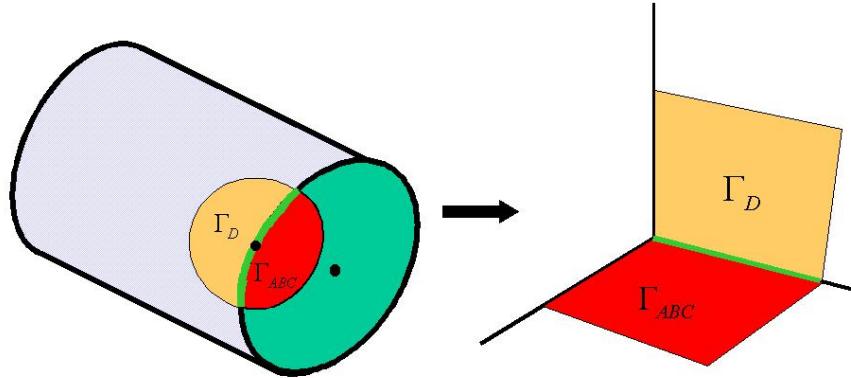


Abbildung 3: Transformierte Umgebung eines Randpunktes

**Definition 1.1.** Ein skalarer Differentialoperator

$$p(x, \nabla) = \sum_{|\alpha| \leq q} p_\alpha(x) \partial_x^\alpha$$

mit Koeffizienten in  $C^\infty(\Omega_R \setminus \Gamma_R)$  heißt zulässig, falls für jede Umgebung  $\mathcal{O}_\varepsilon$  und den  $\mathcal{K}$ -transformierten Koeffizienten  $\tilde{p}_\alpha$  gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\alpha(\tilde{y}) &= r^{-q+|\alpha|} p_\alpha^0(r, \theta, z) \quad \text{mit} \\ p_\alpha^0 &\in C^{l+2}(\overline{R}_+ \times [0, \pi/2] \times \mathbb{R}) \cap \tilde{\mathcal{O}}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Hier ist  $z$  ein Parameter der Kurve  $\partial\Gamma_R$  und  $(r, \phi)$  sind die zu  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  zugehörigen sphärischen Koordinaten.

**Definition 1.2.** Ein Matrix-Differentialoperator heißt zulässig, falls jeder Matrixeintrag zulässig ist.

Diese Definitionen müssen für Randoperatoren auf  $\Gamma_D$  und  $\Gamma_{ABC}$  gelten. Die Operatoren des Stokes-Systems so wie die Dirichlet-Bedingungen erfüllen die Zulässigkeitsbedingungen.

Betrachten wir die künstliche Randbedingung

$$\begin{aligned} M u(x) &= (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{I} p) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{v}(x) \\ &= N u(x) + \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{v}(x), \end{aligned} \quad (1.24)$$

für  $x = (\mathbf{y}_j, R) \in \Gamma_{R,j}$ . Dabei ist  $\mathbf{C}(x)$  eine auf  $\Gamma_{R,j}$  definierte  $3 \times 3$  Matrix. Man erkennt sofort, daß wir im Fall  $\mathbf{C} \neq 0$ , eine Randbedingung vom Robin-Typ oder die sogenannte dritte Randwertaufgabe erhalten. Für  $\mathbf{C} = 0$  erhält man den gewöhnlichen Neumann-Operator.

Wir nehmen zunächst an, daß  $C_{ik} \in C^{l+2}(\Gamma_{R,j})$  ist, allerdings kann  $C_{ik}$  für  $i, k = 1, \dots, 3$  singulär werden, wenn das Argument  $y$  gegen den Rand von  $\omega_j$  läuft. In diesem Fall können wir eine hinreichende Bedingung für eine zulässige Randbedingung folgendermaßen angeben:

Es sei

$$C_{ik}(y, R)^{-1} = \psi(y) \quad \text{für } \psi(y) \in C^{l+2}(\bar{\omega}_j),$$

wobei  $\psi(y) \neq 0$  für alle  $y \in \omega_j$ , und falls  $\psi(y) = 0$  für  $y \in \partial\omega_j$ , so ist  $\partial_n \psi(y) \neq 0$ . Die nachfolgende Konstruktion zeigt die Gültigkeit dieser Behauptung.

Mit  $\mathcal{O}_\varepsilon$ ,  $\mathcal{K}$  und  $\tilde{\mathcal{O}}_\varepsilon$  wie oben definiert, gilt

$$\tilde{\psi} \in C^{l+2}(\tilde{\Gamma}_{ABC}) \quad \text{und} \quad \partial_n \tilde{\psi} = -\partial_1 \tilde{\psi}(0, 0, z) = \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{\psi}(0, 0, z),$$

da  $r = \tilde{x}_1$ .

Mit Taylorentwicklungen um  $\tilde{x}_1 = 0$  erhält man

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}_1, 0, z) = \tilde{\psi}(0, 0, z) + \partial_1 \tilde{\psi}(0, 0, z) \tilde{x}_1 + O(\tilde{x}_1^2) \quad \forall z,$$

wobei  $\partial_1 \tilde{\psi}(0, 0, z) \in C^{l+2}$ . Vernachlässigen wir die Terme höherer Ordnung, so gilt  $\tilde{C}_{ij} \approx \frac{1}{\tilde{x}_1} \tilde{C}_{ij}^0$  mit

$$\tilde{C}_{ij}^0(\tilde{x}_1, 0, z) = \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{\psi}(0, 0, z) + \partial_1 \tilde{\psi}(0, 0, z) \tilde{x}_1 + \dots}. \quad (1.25)$$

Da sogar in einer Umgebung von  $(0, 0, z)$  entweder  $\tilde{\psi}(0, 0, z) \neq 0$  oder die Ableitung  $\partial_1 \tilde{\psi}(0, 0, z) \neq 0$  gilt, erhalten wir die Behauptung.

Wir betrachten nun das Problem (1.20) in folgenden Kondratiev-Räumen  $V_\beta^l(\Omega_R, \partial\Gamma_R)$ . Dazu sei  $\rho$  eine glatte Funktion auf  $\overline{\Omega}_R$  mit

$$\rho(x) = \text{dist}(x, \partial\Gamma_R)$$

in einer  $\varepsilon_0$ -Umgebung von  $\partial\Gamma_R$  und

$$\rho(x) = 1 \quad \text{für } \text{dist}(x, \partial\Gamma_R) > 2\varepsilon_0.$$

Für  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}_R \setminus \partial\Gamma_R)$  setzen wir

$$\|\varphi; V_\gamma^l(\Omega_R, \partial\Gamma_R)\| = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq l} \|\rho^{\gamma-l+|\alpha|} \partial^\alpha \varphi_j L^2(\Omega_R)\|^2} \quad (1.26)$$

und definieren  $V_\gamma^l(\Omega_R, \partial\Gamma_R)$  als den Abschluß von  $C_0^\infty(\overline{\Omega}_R \setminus \partial\Gamma_R)$  bezüglich der Norm (1.26)

$$V_\gamma^l(\Omega_R, \partial\Gamma_R) := \overline{C_0^\infty(\overline{\Omega}_R \setminus \Gamma_R)}^{\|\cdot\|}. \quad (1.27)$$

Desweiteren benötigen wir Spurräume für den "lateralen" Rand  $\partial\Omega(R)$ , sowie für die Schnittflächen  $\Gamma_{R,j}$ . Dazu definieren wir

$$\|\varphi; V_\gamma^{l-1/2}(M, \partial\Gamma_R)\| = \inf \|\tilde{\varphi}; V_\gamma^l(\Omega, \partial\Gamma_R)\|, \quad (1.28)$$

für  $M = \partial\Omega(R)$  oder  $M = \Gamma_{R,j}$ . Das Infimum werde über alle  $\tilde{\varphi} \in V_\gamma^l(\Omega, \partial\Gamma_R)$  mit  $\tilde{\varphi}|_M = \varphi$  genommen.

Für zulässige Differentialoperatoren erhält man in Verbindung mit (1.20)

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{ABC} : \mathcal{D}_\gamma^l(\Omega_R) &\rightarrow \mathcal{R}_\gamma^l(\Omega_R); \\ u &\mapsto (Su, v|_{\partial\Omega(R)}, B^R u|_{\Gamma_R}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

mit

$$\mathcal{D}_\gamma^l(\Omega_R) = V_\gamma^{l+1}(\Omega_R)^3 \times V_\gamma^l(\Omega_R) \quad (1.30)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\gamma^l(\Omega_R) \\ = V_\gamma^{l-1}(\Omega_R)^3 \times V_\gamma^l(\Omega_R) \times V_\gamma^{l+1/2}(\partial\Omega(R))^3 \times \prod_{j=1}^J V_\gamma^{l-1/2}(\Gamma_{R,j})^3 \end{aligned} \quad (1.31)$$

einen linearen und stetigen Operator. Nach [NaPl91, Ch. 8] gilt, daß Fredholm-eigenschaften für zulässige Randwertprobleme im allgemeinen in einem endlichen Intervall für den Gewichtsindex  $\gamma$  erwartet werden können.

Um

$$\|u - u_R; \mathcal{D}\| \leq \alpha(R) \|h - B^R u|_{\Gamma_R}\|$$

zu zeigen, reicht es aus die folgende Abschätzung

$$\|U; \mathcal{D}\| \leq \alpha(R) \|(F, G, H); \mathcal{R}\|$$

mit  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{R}$  wie oben beschrieben, für ein zulässiges  $\gamma$ , zu beweisen.

Für jede Lösung  $u$  des Dirichlet-Problems von (0.1) mit  $u \in \mathcal{D}_\beta^l(\Omega)$  gilt  $u \in H_{loc}^{l+1}(\overline{\Omega}) \times H_{loc}^l(\overline{\Omega})$ . Somit ist leicht einsehbar, daß die Einschränkung  $u|_{\partial\Omega_R}$  in  $\mathcal{D}_\gamma^l$  für  $\gamma = l + 1$  enthalten ist. Aber, wie in [NaPl91, Ch. 8] beschrieben, gilt nicht für alle Randoperatoren, daß  $\gamma = l + 1$  in einem unkritischen Intervall  $(\gamma_0, \gamma_1)$  enthalten ist. Wir werden aber sehen, daß der Index  $\gamma = l$ , d.h. der Fall  $\nabla v \in L^2(\Omega_R)$ , immer möglich ist.

## Das Modellproblem

Die Behandlung von Randwertproblemen mit Kanten baut wesentlich auf der Theorie von Modellproblemen mit unendlichen Kanten auf. Es sei dazu

$$\mathbb{D} = d \times \mathbb{R} \quad \text{mit } d = d_{\pi/2} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ .$$

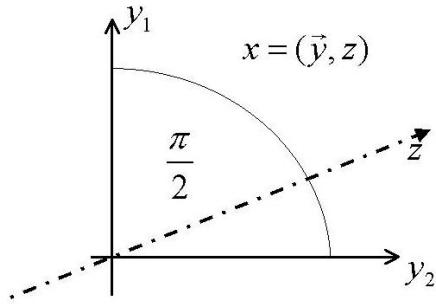


Abbildung 4: Transformiertes Gebiet  $\mathbb{D}$

Zu jedem  $x_0 \in \partial\Gamma_R$  betrachten wir den Hauptteil des transformierten Systems, wobei für den Diffeomorphismus  $\mathcal{K}$  gilt  $\mathcal{K}(x_0) = 0$ . Dort betrachten wir den Hauptteil des transformierten Operators.  $S$  sei wieder der Stokes-Operator mit

$$Su = (-\Delta \mathbf{v} + \nabla p, -\operatorname{div} \mathbf{v}) .$$

Weiterhin sei

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{und} \quad f' = (f_1, f_2, f_3) \quad \text{sowie} \quad g = (g_1, g_2, g_3)$$

mit  $f = (f', f_4)$ , sowie  $u = (v, p)$  und  $u' = \mathbf{v}$ ,  $u_4 = p$ . Wir betrachten also

$$\begin{aligned} S(\nabla_x)u &= f && \text{in } \mathbb{D} \\ u' &= \mathbf{g} && \text{auf } \Gamma_{\mathbb{D}} = \{x \in \mathbb{D}, y_1 = 0\} . \end{aligned} \tag{1.32}$$

Auf  $\Gamma_{ABC}$  gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v_i}{\partial y_2} + \frac{1}{x_1} \sum_{k=1}^3 C_{ik} v_k &= h_i \quad \text{für } i = 1, 3 \\ -\frac{\partial v_2}{\partial y_2} + p + \frac{1}{x_1} \sum_{n=1}^3 C_{2k} v_k &= h_2 . \end{aligned} \tag{1.33}$$

Die Matrix-Einträge von  $\mathbf{C} = (C_{ik})_{i,k=1,\dots,3}$  sind nun reelle Zahlen mit  $C_{ik} = 0$ , falls  $c_{ik}(y)$  stetig in  $x_0 \in \Gamma_R$ ,

$$\text{sonst } C_{ik} = -\frac{1}{\lim_{x_1 \rightarrow 0+} \partial_1(\widetilde{C}_{ik}^0(x_1, 0, z)^{-1})}$$

wobei  $\widetilde{C}_{ik}^0$  aus (1.24).

Weiterhin bezeichnen wir mit  $\mathcal{E}$  die Kante des Keils durch

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{x} = (0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} .$$

Dazu führen wir analog zu (1.29) Kondratiev -Räume  $V_\gamma^l(\mathbb{D}, \mathcal{E})$ ,  $\mathcal{D}_\gamma^l(\mathbb{D}, \mathcal{E})$  und  $\mathcal{R}(\mathbb{D}, \mathcal{E})$  ein. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{ABC}^0 \mathcal{D}_\gamma^l(\mathbb{D}, \mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{R}_\gamma^l(\mathbb{D}, \mathcal{E}) \\ u &\mapsto (Su, v|_{\Gamma_D}, Bu|_{\Gamma_{ABC}}) \end{aligned} \tag{1.34}$$

definiert einen stetig linearen Operator. Mit Hilfe der Resultate aus [NaPl91, Ch. 8, §2, Th. 21] folgt, dass die Fredholmeigenschaft von (1.34) auf die Fredholmeigenschaft für den Operator aus (1.29) in einem geeignetem Intervall  $(\gamma_1, \gamma_2)$  für den Gewichtsindex  $\gamma$  zurückgeführt werden kann. Um das Intervall zu berechnen, benutzen wir dieselbe vorgehensweise wie in [NaPl91]: Man führt eine Fouriertransformation in Richtung  $z \rightarrow \zeta$  entlang der  $z$ -Achse durch, d.h.

$$x = (y_1, y_2, z) \rightarrow (\mathbf{y}, \zeta) .$$

Mittels Koordinatentransformation von  $(\mathbf{y}, \zeta)$  zu  $\eta = |\zeta|y$  wird das Randwertproblem in ein 2-dimensionales Randwertproblem in dem Winkelwinkel  $d$

$$d = \{x = (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

überführt, siehe dazu [NaPl91, 8.1.2] und [So83, p. 402].

Man erhält also das transformierte System

$$\begin{aligned} S(\nabla_y, \pm i) U(\eta) &= \mathcal{F}(\eta) , \quad \eta \in d \\ U(0, \eta_2) &= \mathcal{G}(\eta_2) \\ B(\nabla_y, i) U(\eta_1, 0) &= \mathcal{H}(\eta_1) \end{aligned} \tag{1.35}$$

mit

$$\begin{aligned}\nabla_y &= \left( \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right), \\ U(\eta) &= \begin{pmatrix} V(\eta) \\ P(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\zeta| v(|\zeta|^{-1}\eta, \zeta) \\ p(|\zeta|^{-1}\eta, \zeta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \mathcal{F}(\eta) &= \begin{pmatrix} |\zeta|^{-1} f'(|\zeta|^{-1}\eta, \zeta) \\ f_4(|\zeta|^{-1}\eta, \zeta) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

nach diesen Manipulationen gilt für die Normen : (siehe [NaPl91, Ch. 8, Lemma 2.1])

$$\|w; V_\gamma^l(\mathbb{D}, \boldsymbol{\varepsilon})\| \simeq \left( \int_{\mathbb{R}} |\zeta|^{2(l-\gamma-1)} \|W(\cdot, \zeta); E_\gamma^l(d)\|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}$$

mit

$$W(\eta, \zeta) = w(|\zeta|^{-1}\eta, \zeta)$$

und

$$\|W; E_\gamma^l(d)\| = \left( \sum_{|\alpha| \leq l} \| |\eta|^\gamma (1 + |\eta|^{|\alpha|-l}) D_\eta^\alpha W; L^2(d) \| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1.35) definiert also eine stetige lineare Abbildung

$$\mathbb{S}^0(\pm i) : \mathcal{D}_\gamma^l E(d) \rightarrow \mathcal{R}_\gamma^l E(d), \quad (1.36)$$

wobei  $\mathcal{D}_\gamma^l E(d)$ ,  $\mathcal{R}_\gamma^l E(d)$  analog zu (1.29) definiert werden können. Man ersetze hierbei  $V_\gamma^l(\Omega_R)$  durch  $E_\gamma^l(d)$ . In [KeOs76], [NaPi99] wird gezeigt, daß die Fredholmmeigenschaft von (1.36) die von (1.35) impliziert. Dies ist, wie bereits oben erwähnt, für  $\gamma$  aus einem beschränkten Intervall  $(\gamma_1, \gamma_2) \subset \mathbb{R}$ , möglich.

Um die Existenz eines solchen Intervalls zu zeigen, ist es notwendig eine Anzahl von Bedingungen zu prüfen, welche im nun folgenden Lemma zusammengefaßt sind. Man stellt fest, daß in einer Umgebung von  $\eta = 0$  die Norm in  $E_\gamma^l$  mit den Normen aus  $V_\gamma^l$  für den 2D - Winkel

$$d = \{ \eta = (r \cos \theta, r \sin \theta) \mid r > 0, 0 < \theta < \pi/2 \}$$

übereinstimmt.

Da nur die Hauptterme aus  $(1.35)_{\pm i}$  entscheidend sind um geeignete Indizes zu finden, reicht es aus, nach [NaPl91, Th. 8.2.3], das fouriertransformierte System  $S(0)$  in  $\mathcal{I}$  zu betrachten. Daher können wir  $(\pm i)$  in (1.35) durch 0 ersetzen. Die

Randwertprobleme existieren nun in dem 2D-Winkel  $d$  und definieren bijektive Abbildungen zwischen

$$V_\gamma^{l+1}(d)^3 \times V_\gamma^l(d)$$

und

$$V_\gamma^{l-1}(d)^3 \times V_\gamma^l(d) \times V_\gamma^{l+1/2}(\{\eta_1 = 0\})^3 \times V_\gamma^l(\{\eta_2 = 0\})$$

für alle  $(\gamma - l) \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{I}$ , wobei  $\mathcal{I}$  die abzählbare diskrete Menge der nicht zulässigen Indizes ist. Dabei sei für  $\gamma \in \mathbb{R}$  und  $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} V_\gamma^l(d) &= \left\{ \phi \in H_{loc}^l(d) : \|\phi; V_\gamma^l(d)\|^2 \right. \\ &\quad \left. = \sum_{|\alpha| \leq l} \| |\eta|^{l-\gamma+|\alpha|} \partial^\alpha \phi; L^2(d) \|^2 \leq \infty \right\}. \end{aligned}$$

Mit Theorem 8 aus [NaPl91] erhält man folgendes Lemma:

**Lemma 1.1.** *Die Abbildung (1.36) ist genau dann ein Fredholm-Operator, wenn sie einen Isomorphismus definiert. Hierfür sind die beiden folgenden Eigenschaften hinreichend.*

- i)  $\gamma - l = 0$  ist ein zulässiges Gewicht für das Fouriertransformierte System in  $\zeta = 0$ , d.h.  $(\gamma - l = 0) \notin \mathcal{I}$ .
- ii) Abbildung (1.36) definiert einen Isomorphismus für  $+i$  und  $-i$ .

Sind i) und ii) erfüllt, dann existiert ein  $\delta_0 > 0$  derart, daß (1.36) bijektiv ist für alle  $\gamma + \delta$  mit  $|\delta| < \delta_0$ .

**Bemerkung 1.5.** Angenommen,  $\gamma - l \notin \mathcal{I}$ , dann liegt  $\gamma$  zwischen zwei nicht zulässigen Indizes  $a_1$  und  $a_2$ . Das Intervall  $(a_1 - l, a_2 - l)$  hingegen ist frei von nicht zulässigen Indizes. Damit kann  $\delta_0$  berechnet werden als

$$\delta_0 = \min\{\gamma - a_1, \gamma - a_2\}. \quad (1.37)$$

Um ii) mit den gleichen Argumenten wie aus [NaPl91, Lemma 2.1] zu beweisen, ist es ausreichend, die Injektivität zu zeigen, da die Operatoren  $\mathbb{S}^0(+i)$  und  $\mathbb{S}^0(-i)$  formal adjungiert (bezüglich einer passenden Greenschen-Formel) sind.

Beginnen wir mit dem Beweis von i) für  $\gamma - l = 0$ .

i) Anwenden der Fourier-Transformation liefert:

$$\begin{aligned} -\nabla_y^2 V_j(y) + \zeta^2 V_j(y) + \frac{\partial}{\partial y_j} P(y) &= F_j(y), \quad j = 1, 2, \\ -\nabla_y^2 V_3(y) + \zeta^2 V_3(y) + i\zeta P(y) &= F_3(y), \\ -\partial_{x_1} V_1 - \partial_{x_2} V_2 - i\zeta V_3 &= F_4. \end{aligned}$$

Mit  $V' = (V_1, V_2)$  und  $\zeta = 0$  folgt

$$\begin{aligned} -\nabla_y^2 V' + \nabla_y P &= F' \\ -\operatorname{div} V' &= F_4 \\ -\nabla_y^2 V_3 &= F_3 \end{aligned} \tag{1.38}$$

mit der Randbedingung

$$V(y) = V(x_1, x_2) = G(y_2) \quad \text{für } x_1 = 0.$$

Für  $C \neq 0$  in (1.33) lautet die zweite Randbedingung nun

$$-\frac{\partial V_j}{\partial y_2} + l_j P + \frac{1}{x_1} \sum_{j=1}^3 \tilde{c}_{jk} V_j = H_j, \quad l_j = (0, 1, 0) \tag{1.39}$$

für  $j = 1, \dots, 3$ .

Man beachte, daß für Neumann-Randbedingungen ( $C \equiv 0$ ) das System in zwei Probleme zerfällt, nämlich in ein 2-dimensionales Stokes Problem für  $(V', P)$  und in ein Laplace Problem für  $V_3$  in  $d$ .

Siehe dazu [So83, Eq.(6.4), (6.5)]. Um die Zulässigkeit des Indizes  $\gamma = l$  zu beweisen, kann man für beide Fälle von  $C$  den gleichen Trick benutzen.

**Lemma 1.2.** *Sei  $C$  symmetrisch und nicht negativ. Dann ist das Gewicht  $\gamma = l$  zulässig für (1.38).*

**Beweis** Angenommen,  $\gamma = l$  wäre nicht zulässig, dann existiert eine Lösung  $U$  in  $d$  des homogenen Problems (1.38) in folgender Form:

$$U = (V, P) = (V(\theta), \frac{1}{r} P(\theta)),$$

wobei  $(\gamma, \theta)$  die Polarkoordinaten von  $d$  bezeichnen. Die Randbedingungen lassen sich in folgender Kurzform schreiben

$$V = 0 \quad \text{für } \theta = \pi/2 \tag{1.40}$$

$$\begin{pmatrix} N' \in (V', P) \\ \partial_n V_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{x_1} C \cdot V = 0 \quad \text{für } \theta = 0, \tag{1.41}$$

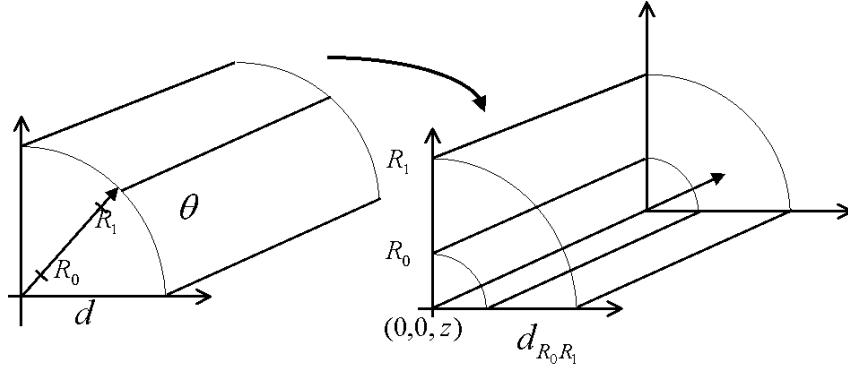


Abbildung 5: Gebiet  $d_{R_0,R_1}$

dabei ist  $N_y$  der 2-dimensionale Neumann Operator auf dem Strahl  $x_2 = 0$ . Für  $0 < R_0 < R_1$  sei  $d_{R_0,R_1}$  der Schnitt von  $d$  mit der Teilmenge  $\{R_0 < r < R_1\}$ .  $U$  ist bis zum Rand von  $d_{R_0,R_1}$  glatt. Multiplizieren wir die Gleichungen aus (1.38) skalar in  $L^2(d_{R_0,R_1})^3$  mit  $V$ , so erhält man mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{d_{R_0,R_1}} -\Delta' V' \cdot V' + \nabla' P \cdot V' - \Delta' V_3 V_3 dx \\ &= \int_{d_{R_0,R_1}} |\nabla' V'|^2 + |\nabla' V_3|^2 dx - \int_{R_0}^{R_1} (N' U \cdot V' + \partial_n V_3 V_3)(x_1, 0) dx_1 \\ &= \int_{d_{R_0,R_1}} |\nabla V|^2 dx + \int_{R_0}^{R_1} ((C \cdot V) \cdot V)(x_1, 0) dx_1. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Das Randintegral über  $x_1 = 0$  verschwindet nach (1.40), während die Integrale  $\int_{r=R_0}$  und  $\int_{r=R_1}$  sich gegenseitig aufheben aufgrund der speziellen Form von  $U$ . Die rechte Seite von (1.42) ist größer oder gleich  $\|\nabla V; L^2(d_{R_0,R_1})\|$ , und somit gilt  $V = \text{const} = 0$  wegen der Nullrandbedingung (1.40) und  $P = 0$  nach (1.38). Damit wäre  $U$  die triviale Lösung und dies ist ein Widerspruch. ■

Um Bedingung ii) aus Lemma 1 zu beweisen, müssen wir die Injektivität von (1.36) für  $\gamma - l = 0$  zeigen.

**Lemma 1.3.** Sei  $\gamma - l = 0$ . Die durch (1.36) definierten Operatoren  $\mathbb{S}^0(\pm i) : \mathcal{D}_\gamma^l E(d) \rightarrow \mathcal{R}_\gamma^l E(d)$  sind injektiv, falls die Matrix  $C$  in (1.33) symmetrisch und nicht negativ ist.

**Beweis** Für  $\gamma - l = 0$  führt das Verhalten der Gewichte mit  $r \mapsto 0$  oder  $r \mapsto \infty$  zu folgender Eigenschaft. Es gilt

$$\mathcal{D}_\gamma^l E(d) \subset H^1(d)^3 \times L^2(d). \quad (1.43)$$

Sei nun  $U \in \ker \mathbb{S}^0(\pm i)$ . Mit (1.41) erhalten wir

$$\begin{aligned} -\Delta' V' + \nabla' P &= 0 \\ -\Delta' V_3 + V_3 \pm iP &= 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$-\operatorname{div} V' \pm iV_3 = 0. \quad (1.45)$$

Die Randbedingung für  $x_2 = 0$  ist

$$NU + \frac{1}{x_1} C \cdot V = 0 \quad \text{mit} \quad NU = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} V_1 \\ -\partial_{x_2} V_2 + P \\ -\partial_{x_2} V_3 \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Multiplizieren von (1.44) und (1.45) mit  $V$  in  $L^2(d_{R_0, R_1})$  und partielle Integration führt auf folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_d (-\Delta' V' + \nabla' P) \bar{V}' dx + \int_d (-\Delta' V_3 + V_3 \pm iP) \bar{V}_3 dx \\ &= \int_d \nabla' V : \nabla' \bar{V} dx + \int_d V \cdot \bar{V} dx + \int_d \nabla V_3 \nabla \bar{V}_3 dx \\ &\quad - \int_d P (\operatorname{div} V' \pm i \bar{V}_3) dx - \int_{\partial d} \partial_n V \cdot \bar{V} ds - \int_{\partial d} P (V' \cdot n) ds. \end{aligned}$$

Nach (1.46) folgt, daß alle Integrale mit  $P$  verschwinden. Mit (1.45) und den Eigenschaften von  $C$  folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \|\nabla V\|^2 + \|V\|^2 + (NU, V)_{L^2(\partial d)} \\ &= \|\nabla V\|^2 + \|V\|^2 + \int_0^\infty \frac{1}{x_1} CV \bar{V} dx_1. \end{aligned}$$

Somit folgt  $V = 0$  und  $P = 0$  mit (1.45). ■

### Lösbarkeit in beschränkten Gebieten

Fassen wir nun alle vorherigen Ergebnisse zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

**Satz 1.3.** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit  $J$  unendlichen zylindrischen Ausströmrohren und  $\Omega_R$  wie in Abschnitt 1.2 beschrieben. Für  $x \in \partial\Gamma_R$  sei  $\mathbf{C}(x)$  eine Matrixfunktion auf  $\partial\Gamma_R$  derart, daß der unter (1.24) definierte Randoperator  $M$  auf  $\Gamma_j$  zulässig ist.  $\mathbf{C}(x)$  sei symmetrisch und nicht negativ  $\forall x \in \partial\Gamma_R$ , dann

existiert ein  $\delta = \delta(M) > 0$  so, daß für jedes Tripel  $(F, G, H) \in \mathcal{R}_\gamma^l V(\Omega_r, \partial\Gamma_R)$  zu dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} SU &= F \quad \text{in } \Omega_R \\ V &= G \quad \text{auf } \partial\Omega_R \\ MU &= NU + C \cdot V \\ &= H \quad \text{auf } \Gamma_R \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung  $U \in \mathcal{D}_\gamma^l V(\Omega_R, \partial\Gamma_R)$  existiert, vorausgesetzt  $|\gamma - l| < \delta$ ;  $\mathcal{D}_\gamma^l$  sowie  $\mathcal{R}_\gamma^l$  sind wie in (1.30), (1.31) definiert.

**Beweis** Nach Lemma 1.1, 1.2 und 1.3 hat die Abbildung (1.29) für  $|\gamma - l| < \delta$ ,  $\delta > 0$  die Fredholmeigenschaft. Wir zeigen, daß  $\mathbb{S}_{ABC}$  bijektiv ist. Zunächst leiten wir eine Green'sche Formel her.

Dazu seien  $u, U \in C_0^2(\overline{\Omega_R} \setminus \partial\Gamma_R)^3 \times C_0^1(\overline{\Omega_R} \setminus \partial\Gamma_R)$ . Dann gilt mit partieller Integration

$$\int_{\Omega_R} Su \cdot U dx + \int_{\partial\Omega(R)} Nu \cdot V do + \int_{\Gamma_R} Mu \cdot V do = q(u, U), \quad (1.47)$$

wobei  $q(u, U) := q_{\Omega_R}(u, U) + q_{\Gamma_R}(u, U)$  eine symmetrische Bilinearform ist mit

$$q_{\Omega_R}(u, U) = \int_{\Omega_R} \nabla v : \nabla u - (p \operatorname{div} V + \operatorname{div} v P) dx$$

und

$$q_{\Gamma_R}(u, U) = \int_{\Gamma_R} v^T \cdot C \cdot U do.$$

Für  $C = 0$  folgt  $q_{\Gamma_R} = 0$ ,  $M$  ist in diesem Fall der Neumannoperator. Aus (1.47) erhält man die zweite Green'sche Formel

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_R} Su \cdot U dx + \int_{\partial\Omega(R)} Nu \cdot V do + \int_{\Gamma_R} Mu \cdot V do \\ &= \int_{\Omega_R} U \cdot SU dx + \int_{\partial\Omega(R)} v \cdot Nu do + \int_{\Gamma_R} v \cdot Mu do. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Diese Formeln gelten mit den üblichen Argument über die stetige Fortsetzung von stetigen Bilinearformen auch für

$$u \in \mathcal{D}_\gamma^l V(\Omega_R) \quad \text{und} \quad U \in \mathcal{D}_{2l-\gamma}^0 V(\Omega_R, \partial\Gamma_R).$$

Aus [NaPl91, Ch. 8, Th. 3.1] erhalten wir, daß der  $\ker \mathbb{S}_{ABC}$  sowie der  $\operatorname{coker} \mathbb{S}_{ABC}$  in dem Intervall  $|\gamma - l| < \delta$  konstant ist. Überdies sind die folgenden notwendigen

Bedingungen an die Daten ausreichend für die Existenz einer Lösung. Aus (1.48) folgt, daß der Operator  $(S, B_1, M)$  mit  $B_1 U = V|_{\partial\Omega(R)}$  formal selbstadjungiert ist. Somit impliziert die Eindeutigkeit der Lösung in  $\mathcal{D}_\gamma^l(\Omega_R)$  für alle Daten aus  $\mathcal{R}_{2l-\gamma}^l(\Omega_R)$  die Existenz von Lösungen in  $\mathcal{D}_{2l-\gamma}^l(\Omega_R)$ . Es reicht also,  $\gamma - l = 0$  zu betrachten, hier ist  $\mathcal{D}_\gamma^l(\Omega_R) = \mathcal{D}_{2l-\gamma}^l(\Omega_R)$ . Setzt man in (1.47) für  $u = U$  eine beliebige Lösung des homogenen Problems ein, so erhalten wir  $\nabla v = 0$  und somit  $v = 0$  aufgrund der Dirichletbedingung auf dem lateralen Rand. Damit ist  $\nabla p = 0$ , d.h.  $p = \text{const} = 0$  mit  $MU = 0$  auf  $\Gamma_R$ . ■

## Die Abschätzung $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^R|$

Wenden wir uns den Abschätzungen im beschränkten Gebiet zu. Wir wollen nun (0.3) prüfen, d.h. wir suchen eine Abschätzung derart, daß

$$\|\mathbb{S}_{ABC}^{-1} : \mathcal{R}_\gamma^l(\Omega_R) \rightarrow \mathcal{D}_\gamma^l(\Omega_R)\| \leq c\alpha(R), \quad (1.49)$$

wobei wir  $\alpha$  als Funktion von  $R$  bestimmen und  $c > 0$  unabhängig von  $R$  ist. Hierzu konstruieren wir einen stetigen linearen Operator

$$\mathcal{A} : \mathcal{R}_\gamma^l(\Omega_R) \rightarrow \mathcal{D}_\gamma^l(\Omega_R)$$

derart, daß  $\mathbb{S}_{ABC}\mathcal{A} = \text{id} + D$  gilt.  $\text{id}$  bezeichne die Identität und  $D$  einen Operator auf  $\mathcal{R}(\Omega_R)$  mit

$$\|D\| < q < 1$$

unabhängig von  $R > R^*$ , d.h.  $(\text{id} + D)^{-1}$  existiert somit als Neumann-Reihe und wir erhalten die Darstellung

$$\mathbb{S}_{ABC}^{-1} = \mathcal{A}(\text{id} + D)^{-1}.$$

Um (1.49) zu erhalten, zeigen wir  $\|\mathcal{A}\| \leq \alpha(R)$ . Letztere kann mit Hilfe zweier Grenzwertprobleme gezeigt werden.

**Das erste Grenzwertproblem:** ist die Lösung des Stokes-Problems in  $\Omega$

$$SU_\infty = F_\infty \quad \text{in } \Omega, \quad V_\infty = G_\infty \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (1.50)$$

Die Lösung dieses Problems ist in Kapitel 1.2 bereits behandelt worden.

**Das zweite Grenzwertproblem:** ist das auf dem Halbzylinder  $\Pi_j^- = \{(y, \zeta) \in \omega_j \times (-\infty, 0)\}, j = 1, \dots, J$  definierte Randwertproblem

$$\begin{aligned} SU_{\Pi_j} &= F_{\Pi_j} && \text{in } \Pi_j^- \\ V_{\Pi_j} &= G_{\Pi_j} && \text{auf } \partial\omega \times (-\infty, 0) \\ MU_{\Pi_j} &= H_j && \text{für } \zeta = 0, \end{aligned} \quad (1.51)$$

wobei

$$MU_{\Pi_j} = \partial_\zeta V_{\Pi_j} e_3 - P_\Pi e_3 + C(y) \cdot V_{\Pi_j},$$

und  $\omega(\zeta) := \omega \times \{\zeta\}$ . Betrachten wir  $\partial\Pi_j^-$ , so stellt man fest, daß zwei Singularitätstypen existieren:

- a) der unendliche Ausfluß nach  $-\infty$  und
- b) die Kante  $\partial\omega(0)$  in  $\zeta = 0$ .

Somit sind die Funktionenräume, in denen wir die Lösung suchen können, gewichtete Sobolevräume mit zwei Gewichtstypen.

Wir wählen, wie schon einmal,  $\rho \in C^\infty(\Pi^-)$  mit  $\rho(x) = 1$  für alle  $x = (y, \zeta)$  mit  $\zeta < -2\varepsilon$  und  $\rho(x) = \text{dist}(x, \partial\omega(0))$  für  $\text{dist}(x, \partial\omega(0)) < \varepsilon$ , wobei  $\varepsilon$  wie in Bemerkung 1 definiert ist. Für  $\gamma, \beta \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$\mathbb{W}_{\gamma, \beta}^l(\Pi^-) = \left\{ \varphi \in H_{loc}^l(\Pi^-); \sum_{|\alpha| \leq l} \|\rho^{\gamma-l+|\alpha|} |\partial^\alpha \varphi| e^{\beta\zeta}; L^2(\Pi^-)\| < \infty \right\} \quad (1.52)$$

mit  $\mathbb{W}_{\gamma, \beta}^l(\Pi^-) \subset \mathbb{W}_{\gamma, \tilde{\beta}}^l$  für  $\beta < \tilde{\beta}$ . Die Spurräume auf  $\Lambda = \partial\omega \times (-\infty, 0)$  und  $\Lambda = \omega = \omega(0)$  definieren wir wie üblich mit

$$\mathbb{W}_{\gamma, \beta}^{l-1/2}(\Lambda) = \{\varphi|_{T_i}, \varphi \in W_{\gamma, \beta}^l(\Pi^-)\},$$

versehen mit der Norm

$$\|\varphi; W_{\gamma, \beta}^{l-1/2}\| = \inf_{\tilde{\varphi}|_\Lambda = \varphi} \|\tilde{\varphi}; W_{\gamma, \beta}^l\|.$$

Weil hier das exponentielle Gewicht vernachlässigt werden kann, ist

$$W_{\gamma, \beta}^{l-1/2}(\omega) = V_\gamma^{l-1/2}(\omega(0)).$$

Desweiteren seien  $\mathcal{D}_{\gamma, \beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)$  und  $\mathcal{R}_{\gamma, \beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)$  analog zu (1.30) und (1.31) definiert. Dann erhalten wir für Problem (1.51) das folgende Lemma

**Lemma 1.4.** *Seien  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $l \in \mathbb{N}$  derart, daß  $|\gamma - l| < \delta$ .  $\delta$  sei die Konstante aus Satz 1.3. Weiterhin sei  $0 < |\beta| < \beta^*$ , wobei  $\beta^*$  definiert ist wie in Satz 1.2. Dann ist der folgende Operator  $S_{\Pi, \beta}$  ein Fredholmoperator:*

$$\begin{aligned} S_{\Pi, \beta} : \mathcal{D}_{\gamma, \beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-) &\rightarrow \mathcal{R}_{\gamma, \beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-) \quad \text{mit} \\ u &\rightarrow (Su, v|_{\partial\omega \times (-\infty, 0)}, Mu|_{\omega(0)}). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Es gilt:

i) Für  $0 < \beta < \beta^*$  ist  $S_{\Pi,\beta}$  surjektiv und  $\dim \ker S_{\Pi,\beta} = 1$ .

ii)  $\mathbb{S}_{\Pi,\beta}$  ist injektiv und für  $(f, g, h) \in \mathcal{R}_{\gamma,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)$  existiert zu Problem (1.51) eine Lösung  $u \in \mathcal{D}_{\gamma,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)$  genau dann, wenn

$$\int_{\Pi^-} f \cdot u^\sharp dx - \int_{\partial\omega \times (-\infty, 0)} g \cdot N u^\sharp ds + \int_{\omega(0)} h(y) v^\sharp dy = 0, \quad (1.54)$$

wobei  $u^\sharp$  eine Basis des Kerns von  $\mathbb{S}_\beta$  ist.  $u$  erfüllt dann folgende Abschätzung

$$\|u; \mathcal{D}_{\gamma,-\beta}^l(\Pi^-)\| \leq C \|(f, g, h) : \mathcal{R}_{\gamma,-\beta}^l(\Pi, \partial\omega \times (-\infty, 0), \omega(0))\|. \quad (1.55)$$

Des Weiteren gilt in Analogie zu (1.10), daß sich in  $\Pi^- = \Pi_j^-$  jede Lösung  $u \in \mathcal{D}_{\gamma,\beta}^l \mathbb{W}(\Pi_j^-)$  darstellen lässt durch

$$u = A_j u^{0j} + B_j u^{1j} + \tilde{u}, \quad (1.56)$$

mit  $\tilde{u} \in \mathcal{D}_{\gamma,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)$ . Dabei entsprechen  $u^{0j}$  und  $u^{1j}$  der konstanten Drucklösung und dem Poiseuille Fluß in  $\Pi_j^-$ .

**Beweis** Mit Satz 1.3 und Satz 3.1.1 in [NaPl91] für Randwertprobleme in geraden Zylindern kann eine Rechts und Links-Parametrix von  $\mathbb{S}_\Pi$  genauso wie in Lemma 5.2 [Sp99] konstruiert werden. Die Aussagen über den Kern sowie den co-Kern des Operators und die asymptotische Darstellung der Lösung können mit Hilfe von [Sp99] verifiziert werden. Die Green'schen Formeln (1.47), (1.48) gelten auch für  $u \in \mathcal{D}_{\gamma,\beta}^l(\Pi^-)$  und  $U \in \mathcal{D}_{2l-\gamma,-\beta}^l(\Pi^-)$ . Die Notwendigkeit von (1.54) folgt, indem man in (1.48) für  $U$  die Funktion  $u^\sharp$  einsetzt. Das die Bedingung auch hinreichend für die Existenz von Lösungen ist, folgt aus den im Beweis von Satz 1.3 angeführten allgemeinen Ergebnissen. ■

Nun nehmen wir an, daß  $\mathbf{C}(y) = \mathbf{C}^{(j)}(y)$  entweder die Null-Matrix ist, also  $M = N$ , oder, daß wir ein  $\mathbf{C}$  wie in (1.18), (1.19) haben, d.h. in lokalen Koordinaten von  $\Omega_j$  ist  $C_{ik} = 0 \forall i, k = 1, 2, 3$  außer für  $(i, k) = (3, 3)$  und  $C_{33} = 2(T - R)(\psi_j(y))^{-1}$ , wobei  $\psi$  die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} -\Delta\psi &= 2 \quad \text{in } \omega_j \\ \psi &= 0 \quad \text{auf } \partial\omega_j \end{aligned}$$

ist. Aus dem Maximum-Prinzip für subharmonische Funktionen folgt  $\psi(y) > 0$  und  $\partial_\nu\psi(x_0) \neq 0$  für alle  $x_0 \in \partial\omega_j$  (siehe dazu [GiTru83, Lemma 3.4, p.33]).

Mit den Bemerkungen zu (1.24) folgt:  $M$  ist ein zulässiger Randoperator und die Abbildung

$$\begin{aligned} V_{k+1}^{k+1/2}(\omega, \partial\omega) &\rightarrow V_k^{k+1/2}(\Omega, \partial\omega) \\ v(y) &\mapsto \frac{v(y)}{\psi(y)} \end{aligned} \quad (1.57)$$

ist beschränkt. Desweiteren sind für  $R < T$  die Anforderungen von Lemma 1.3 und Satz 1.4 erfüllt. Allerdings hängt die Lösung des zweiten Grenzwertproblems hier explizit von  $R$  ab. Im folgenden schränken wir uns auf den Fall  $\gamma = l$  ein, d.h. mit Definition von  $\mathcal{D}_{\gamma,\beta}^l(\Pi^-)$  ist  $\nabla v \in L_{loc}^2(\overline{\Pi}^-)$ . Die Lösung des homogenen Problems  $u^\sharp \in \mathcal{D}_{\gamma,\beta}^l$  mit  $\beta \in (0, \beta^*)$  hat folgende Darstellung

$$u^\sharp = u^{1j} + 2(T - R)\overline{w}_j u^{01}. \quad (1.58)$$

Wieder halten den Index  $j$  fest und lassen ihn im folgenden Lemma weg:

**Lemma 1.5.** *Es sei  $\beta \in (0, \beta^*)$  und  $M$  wie in (1.23). Dann gilt*

$$\begin{aligned} &\|u; \mathcal{D}_{\gamma,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)\| \\ &\leq c(1 + T - R) \| (Su, v|_{\partial\omega \times (-\infty, 0)}, Mu|_{\zeta=0}) ; \mathcal{R}_{\gamma,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-) \|, \end{aligned} \quad (1.59)$$

wobei  $c > 0$  unabhängig von  $R$  und den Daten ist.

**Beweis** Wir werden den Beweis in zwei Schritten durchführen.

1) Zunächst betrachten wir den semi-homogenen Fall.

Dazu sei  $u \in \mathcal{D}_{\gamma,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)$  fest mit

$$\begin{aligned} Su &= 0 \\ v|_{\partial\omega \times (-\infty, 0)} &= 0. \end{aligned}$$

Mit  $\beta \in (0, \beta^*)$  erhalten wir aus Lemma 1.4, der Stetigkeit von (1.57) und Spur-Abschätzungen:

$$\begin{aligned} &\|u; \mathcal{D}_{\gamma,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)\| \leq c \|Nu; V_l^{l-1/2}(\partial\omega)\| \\ &\leq c \left( \|Mu; V_l^{l-1/2}(\partial\omega)\| + (T - R) \left\| \frac{v}{\psi}; V_l^{l-1/2}(\partial\omega) \right\| \right) \\ &\leq c \left( \|Mu; V_l^{l-1/2}(\partial\omega)\| + (T - R) \|v; V_{l-1}^{l-1/2}(\partial\omega)\| \right) \\ &\leq c \left( \|Mu; V_l^{l-1/2}(\partial\omega)\| + (T - R) \|v; V_{l-1}^l(\omega \times (-1, 0))\| \right) \end{aligned} \quad (1.60)$$

Für  $l = 1$  schätzen wir den zweiten Term auf der rechten Seite direkt ab. Anwendung der Friedrichschen-Ungleichung liefert

$$\|v; V_{-1}^0(\omega \times (-1, 0))\| \leq c \|\nabla v; L^2(\omega \times (-1, 0))\| , \quad (1.61)$$

da  $v|_{\partial\omega \times x(-\infty, 0)} = 0$  (siehe dazu auch [NaPl91] und [Sp99, Lemma 4]). Für den Gradienten  $\nabla v$  auf  $\omega \times (-1, 0)$  gilt mit der Green'schen Formel (1.47)

$$\int_{\Pi^-} |\nabla v|^2 dx + (T - R) \int_{\omega} \frac{|v_3(y, 0)|^2}{\psi(y)} dy \quad (1.62)$$

$$= \int_{\omega} Mu \cdot v dy$$

$$\leq \|Mu; V_{1/2}^0(\omega)\| \|v; V_{-1/2}^0(\omega)\|$$

$$\leq \|Mu; V_l^{l-1/2}(\omega)\| \|v; V_0^1(\omega \times (-1, 0))\|$$

$$\leq c\varepsilon \|\nabla v; (\omega \times (-1, 0))\|^2 + \frac{c}{\varepsilon} \|Mu; V_l^{l-1/2}(\omega)\|^2 . \quad (1.63)$$

Durch weiteres Anwenden der Friedrich'schen-Ungleichung erhalten wir

$$\|v; V_0^1(\omega \times (-1, 0))\| \leq \int_{\Pi^-} |\nabla v|^2 dx \leq c \|Mu; V_l^{l-1/2}(\partial\omega)\| . \quad (1.64)$$

Mit (1.60) folgt also

$$\|u; \mathcal{D}_{1,-\beta}^1(\Pi^-)\| \leq c(1 + T - R) \|Mu; V_1^{1/2}(\omega)\| , \quad (1.65)$$

wobei  $c > 0$  unabhängig von  $R$  ist. Aus der Definition der Spurnormen erhalten wir

$$\|v; V^{l+1/2}(\omega(0))\| \leq c \|u; \mathcal{D}_{l,-\beta}^l(\Pi^-)\| .$$

Daher folgt mit vollständiger Induktion

$$\|u; \mathcal{D}_{l,-\beta}^l(\Pi^-)\| \leq c(1 + T - R) \|Mu; V_l^{l-1/2}(\omega)\| . \quad (1.66)$$

Damit ist (1.59) für den semihomogenen Fall bewiesen.

- 2) Sei nun  $u \in \mathcal{D}_{l,-\beta}^l(\mathbb{W}(\Pi^-))$  beliebig. Setze  $Su = f$ ,  $v|_{\partial\omega \times (-\infty, 0)} = g$  und  $Mu|_{\zeta=0} = h$ . Wir zerlegen  $u$  in zwei Teile  $u = u^1 + u^2$  mit

$$Su^1 = f , \quad v^1|_{\partial\omega \times (-\infty, 0)} = g , \quad Nu^1 = h^1 ,$$

wobei  $h^1 = h + \tilde{h}$  derart gewählt wird, dass  $u^1 \in \mathcal{D}_{l,-\beta}^l(\Pi^-)$  und  $u^2$  die Lösung eines semihomogenen Problems wie aus Schritt 1 ist. Dabei gilt

$$Mu^2|_{\zeta=0} = -\tilde{h} - \frac{(T - R)}{\psi} u^1|_{\zeta=0} .$$

Bis auf einen konstanten Faktor ist  $u^{1j}$  (Poiseuille Fluß) die Lösung von (1.51) mit  $C = 0$ . Folglich ist nach (1.63)  $u^1 \in D_{l,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)$ , falls

$$\int_{\Pi^-} f \cdot u^{1j} dx - \int_{\partial\omega \times (-\infty, 0)} g \cdot N u^{1j} do + \int_{\omega} h^1 \cdot v^{1j} dy = 0. \quad (1.67)$$

Da wir schon wissen, dass  $(f, g, h)$  die Bedingung (1.54) mit  $u^\sharp$  aus (1.58) erfüllt, und weiterhin

$$\int_{\omega} h \cdot v^\sharp dy = \int_{\omega} h \cdot v^{1j} dy = \int_{\omega} h_3 \psi^{(j)}(y) \bar{w}_j dz \quad (1.68)$$

gilt, sieht man, dass (1.67) erfüllt ist, falls

$$\tilde{h} = (T - R) \bar{w}_j \left( \int_{\Pi^-} f_4 dx - \int_{\partial\omega \times (-\infty, 0)} g \cdot n do \right) e_z.$$

gewählt wird. Beachte hierbei, dass wegen der Normalisierung des Poisseuille Flusses

$$\int_{\omega} v_3^{1j}(y) dy = 1 \text{ ist. Ferner ist}$$

$$\|\tilde{h}; V_l^{l-1/2}(\omega)\| \leq c(T - R) \|(f, g); \mathcal{R}_{l,\beta}^l(\Pi^-; \partial\omega \times (-\infty, 0))\|.$$

Aus Lemma 1.4 folgt nun

$$\begin{aligned} \|u^1; \mathcal{D}_{l,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)\| &\leq c\|(f, g, h^1); \mathcal{R}_{l,-\beta}^l(\Pi^-, \partial\omega \times (-\infty, 0), \omega)\| \\ &\leq c(1 + T - R) \|(f, g, h); \mathcal{R}_{l,-\beta}^l(\Pi^-, \partial\omega \times (-\infty, 0), \omega)\|. \end{aligned}$$

Da  $u^1, u$  in  $\mathcal{D}_{l,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)$  enthalten sind, gilt:  $u^2 = u - u^1 \in \mathcal{D}_{l,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u^2; \mathcal{D}_{l,-\beta}^l \mathbb{W}(\Pi^-)\| &\leq c\|Mu^2; V_l^{l-1/2}(\omega)\| \\ &\leq c \left( \|Mu^1; V_l^{l-1/2}(\omega)\| + \|\tilde{h}; V_l^{l-1/2}(\omega)\| \right) \\ &\leq c \left( \|u^1; \mathcal{D}_{l,-\beta}^l(\Pi^-)\| \right. \\ &\quad \left. + (T - R) \|(f, g); \mathcal{R}_{l,-\beta}^l(\Pi^-, \partial\omega \times (-\infty, 0))\| \right). \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

## Konstruktion eines "fast" inversen Operators

Zunächst wiederholen wir einige Bezeichnungsweisen.  $\Omega$  sei das unbeschränkte Gebiet,  $\wp \in C^\infty(\overline{\Omega})$  eine Gewichtsfunktion mit  $\wp(x) = 1$  im verbindenden Gebiet  $\Omega_0$  und  $\wp(x) = z_j$  für  $x = (\mathbf{y}_j, z_j) \in \Omega_j$  mit  $z_j > 2$ . Weiterhin sei  $R/2 > \max\{\varepsilon_0, R_0\}$ , wobei  $\varepsilon_0$  wie nach (1.25) und  $R_0$  wie in Abbildung 1 gewählt sei. Auf  $\Omega_R$  definieren wir nun  $\wp_R(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}_R)$  derart, daß  $\wp_R(x) = \wp(x)$  für  $z_j < R/2 - \varepsilon_0$  und  $\wp_R(x) = R - z_j$  für  $z_j > R/2 + \varepsilon_0$ .

Zu  $\varphi \in V_\gamma^l(\Omega_R)$  definieren wir die folgende Norm

$$\|\varphi; \mathbb{V}_{\gamma,\beta}^l(\Omega_R)\|^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \|\partial^\alpha \varphi e^{\beta \wp_R}; V_{\gamma-l+|\alpha|}^0(\Omega_R, \partial\Gamma_R)\|^2,$$

d.h. jede Halbnorm aus (1.26) ist um eine Gewichtsfunktion  $e^{\beta \wp_R}$  ergänzt worden. Für  $\beta = 0$  erhalten wir wieder die Original-Norm. Die soeben definierten Normen sind für alle  $\beta \in \mathbb{R}$  äquivalent. Wir erhalten

$$\|\varphi; \mathbb{V}_{\gamma,\beta}^l(\Omega_R)\| \leq \|\varphi; \mathbb{V}_{\gamma,\beta+\delta}^l(\Omega_R)\| \leq e^{\delta R/2} \|\varphi; \mathbb{V}_{\gamma,\beta}^l(\Omega_R)\|. \quad (1.69)$$

Als nächstes wählen wir eine Familie von glatten Abschneidefunktionen  $\{\chi_{\tilde{R}}\}_{T>R_0}$  auf  $\Omega$  und  $\Omega_R$  mit

$$\chi_{\tilde{R}} \equiv 1 \quad \text{für } x \in \Omega_{\tilde{R}-\varepsilon_0}$$

und

$$\chi_{\tilde{R}} \equiv 0 \quad \text{für } x \in \Omega \setminus \Omega_{\tilde{R}-\varepsilon_0}.$$

Wir zerlegen die vorzugebenden Daten  $F$  und  $G$ :

$$F = \chi_{R/2} F + (1 - \chi_{R/2}) F = F_\infty + F_\Pi.$$

$F_\infty$  kann mit 0 fortgesetzt werden zu  $F_\infty \in \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega)$ , d.h.  $e^{\beta \wp} F_\infty \in H^{l+1}(\Omega)^3 \times H^l(\Omega)$  für  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Andererseits kann jeder Anteil  $(1 - \chi_{R/2}) F|_{\Omega_R \cap \Omega_j}$  auf dem Halbzyylinder  $\omega_j \times (-\infty, R]$  fortgesetzt werden. Ebenso zerlegen wir die Funktionen  $G$  auf dem "lateralen" Rand mit

$$G = \chi_{R/2} G + (1 - \chi_{R/2}) G = G_\infty + G_\Pi.$$

Wir wenden die Koordinatentransformation

$$\zeta_j = z_j - R$$

an und bilden somit den Halbzylinder  $\omega_j \times (-\infty, R)$  auf  $\Pi_j^-$  ab. Anschließend setzen wir

$$(F_{\Pi_j}, G_{\Pi_j}) = (1 - \chi_{R/2})(F, G)(y_j, \zeta_j + R) \quad \text{für } \zeta_j > R/2 - \varepsilon$$

und setzen dies anschließend mit Null fort. Für die Konstruktion unseres "fast" inversen Operators benötigen wir vorab noch einige Abschätzungen.

**Proposition 1:** Es sei  $(F_\infty, G_\infty)$ ,  $(F_{\Pi_j}, G_{\Pi_j})$  wie oben definiert:  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt für jedes  $\delta > 0$  mit  $c > 0$  unabhängig von  $R$ :

$$\|(F_\infty, G_\infty); \mathcal{R}_{\beta+\delta}^l W(\Omega, \partial\Omega)\| \leq ce^{\frac{\delta R}{2}} \|(F, G); \mathcal{R}_{\beta,\gamma}^l \mathbb{V}(\Omega_R, \partial\Omega)\|$$

und

$$\begin{aligned} \|(F_{\Pi_j}, G_{\Pi_j}); \mathcal{R}_{-\beta, -\delta}^l \mathbb{W}(\Pi_j, \partial\omega_j \times (-\infty, 0))\| \\ \leq ce^{\frac{\delta R}{2}} \|(F, G); \mathcal{R}_{\gamma, \beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R, \partial\omega(R))\|. \end{aligned}$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der folgenden Ungleichung

$$e^{(\beta+\delta)\wp} < ce^{\frac{\delta R}{2}} e^{\beta\wp} \quad \text{für } z_j < \frac{R}{2} - \varepsilon_0.$$

Es bezeichne

$$[S, \chi_{\tilde{R}}]U = S(\chi_R U) - \chi_{\tilde{R}}(SU)$$

den Kommutator von  $S$  und  $\chi_{\tilde{R}}$ .

**Proposition 2:** Es sei  $l, \gamma, \delta$  wie in Proposition 1 und  $\beta, \delta \geq 0$ .

i) Für  $\tilde{U}_\infty \in \mathcal{D}_{\gamma, \beta+\delta}^l$  gilt:

$$\|[S, \chi_{\frac{3}{4}\tilde{R}}]\tilde{U}_\infty; \mathcal{R}_{\gamma, \beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R)\| \leq ce^{-\frac{2\beta+3\delta}{4}R} \|U_\infty; \mathcal{D}_{\beta+\delta}^l W(\Omega)\|.$$

ii) Für  $U_{\Pi_j} \in \mathcal{D}_{\gamma, -\beta-\delta}^l \mathbb{W}(\Pi_j^-)$  sei  $\tilde{U}_{\Pi_j}(y_0, z_j) = U_{\Pi_j}(y_j, z_j - R)$ . Dann erhält man

$$\|[S, (1 - \chi_{\frac{1}{4}R})]\tilde{U}_{\Pi_j}; \mathcal{R}_{\gamma, \beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R)\| \leq ce^{-\frac{2\beta+3\delta}{4}R} \|U_{\Pi_j}; \mathcal{D}_{\gamma, -\beta-\delta}^l \mathbb{W}(\Pi_j^-)\|.$$

**Beweis** Wir beschränken uns hier im Beweis auf Teil i), der Beweis von Teil ii) ist völlig analog.

Per Definition von  $\chi_T$  gilt:

$$\text{supp } [S, \chi_{\frac{3}{4}R}] U \subset \text{supp } \nabla \chi_{\frac{3}{4}R},$$

wobei

$$\text{supp } \nabla \chi_{\frac{3}{4}R} \subset \bigcup \left\{ x = (y_j, z_j) \in \Omega_j : \frac{3}{4}R - \varepsilon_0 \leq z_j \leq \frac{3}{4}R + \varepsilon_0 \right\}$$

und  $\wp_R(x) = (R - \frac{3}{4}R) = R/4$ . Daraus folgt für  $x \in \text{supp } \nabla \chi_{\frac{3}{4}R}$

$$e^{\beta \wp_R} \leq c e^{\frac{\beta R}{4}} = c e^{-\frac{2\beta+3\delta}{4}R} e^{\frac{3}{4}(\beta+\delta)R} \leq \tilde{c} e^{-\frac{2\beta+3\delta}{4}R} e^{(\beta+\delta)\wp}.$$

Wir setzen die in die Definition der Normen ein. Berücksichtigen wir noch, dass  $\rho(x) = 1$  auf dem Träger  $\text{supp } [S, \chi_{\frac{3}{4}R}] U_\infty$  für genügend großes  $R$  ist, so folgt (i). ■

**Lemma 1.6.** [Sp99] Es sei  $v \in H^{l+1}(\overline{\Omega}_R)$  mit  $v(x) = 0$  für  $x \in \partial\Omega(R)$  und  $\text{dist}(x, \partial\Gamma_R) < \varepsilon$ , dann ist  $v \in V_l^{l+1}(\Omega_R)$ .

Mit Prop. 1, Prop. 2 und Lemma 1.6 können wir folgenden Satz beweisen:

**Satz 1.4.** Es seien  $\Omega_R, \partial\Omega(R), \Gamma_R$  wie in Abschnitt 1.1 definiert,  $l \in \mathbb{N}$  und  $\beta \geq 0$  mit  $\beta < \beta^*$  wie in Satz 1.2,  $R < T$  und  $T$  sei so groß gewählt, daß Satz 1.2 mit Bedingung (1.14) gültig ist. Setze

$$SU = (-\Delta V + \nabla P, -\operatorname{div} v).$$

$M$  sei in lokalen Koordinaten  $(y, z)$  des Ausflußrohres von  $\Omega_j$  wie folgt definiert,

$$\begin{aligned} MU &= NU = \partial_z V - p e_z|_{z=R} \quad \text{oder} \\ MU &= (\partial_z V_y, \partial_z V_z - P + \frac{2(T-R)}{\psi_j} V_z)|_{z=R}, \end{aligned}$$

wobei  $V_y$  der Tangentialanteil von  $V$  sei und  $V_z$  der Normalenanteil auf  $\Gamma_R$ . Dann gilt für  $U \in \mathcal{D}_l^l(\Omega_R)$  folgende Abschätzung

$$\|U; \mathcal{D}_{l,\beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R)\| \leq c R^{3/2} e^{\frac{\beta R}{2}} \| (SU, V|_{\partial\Omega(R)}, MU), \mathcal{R}_{l,\beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R) \|, \quad (1.70)$$

wobei  $c > 0$  unabhängig von  $R$  und  $U$  ist.

**Beweis** Setze

$$SU = F, \quad V|_{\partial\Omega(R)} = G \quad \text{und} \quad MU|_{\Gamma_{R_j}} = H^j.$$

Zerlege  $F = F_\infty + F_\Pi$ ,  $G = G_\infty + G_\Pi$  und  $F_{\Pi_j}$ ,  $G_{\Pi_j}$  entsprechend wie oben. Es sei  $\delta > 0$  fest, derart daß  $0 < \beta + \delta < \beta^*$  und  $\bar{U}_\infty \in \mathcal{D}_{-\beta-\delta}^l W(\Omega)$  die Lösung des ersten Grenzwertproblems sei, dann hat  $\bar{U}_\infty$  die folgende asymptotische Darstellung

$$\bar{U}_\infty = \sum \chi_j (a_j u^{0j} + b_j u^{1j}) + \tilde{U}_\infty,$$

wobei  $a_j, b_j$  später bestimmt werden.

$u^{0j}$  ist hierbei die konstante Drucklösung, während  $u^{1j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(y) \\ -2c_\psi z_j \end{pmatrix}$  den Poiseuille-Fluß im  $j$ -ten Ausfluß beschreibt ( $\Pi_j = \omega_j \times \mathbb{R}$ ). Wir setzen  $U_\infty$  wie folgt:

$$\begin{aligned} U_\infty &= \sum \chi_j (a_j u^{0j} + b_j u^{1j}) + \chi_{\frac{3}{4}R} \tilde{U}_\infty, \text{ dann folgt} \\ MU_\infty &= M(a_j u^{0j} + b_j u^{1j}) \\ &= -a_j e_z + b_j \left( N u^{1j} + \frac{2(T-R)}{\psi} v^{1j} e_z \right) =: \mathcal{Y}_j e_z, \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{Y}_j = \begin{cases} b_j 2\bar{\omega}T - a_j & \text{für } C \neq 0 \\ b_j 2\bar{\omega}R - a_j & \text{für } C = 0, \text{ d.h. } M = N \end{cases}. \quad (1.71)$$

Nach Lemma 1.4 ist  $\mathcal{Y}_j e_z \in V_\gamma^{l-1/2}(\omega_j)$ . Für  $(y, z) \in \Omega_j$  setze  $\hat{\zeta} = (y, \zeta)$  mit  $\zeta = z - R$ . Betrachten wir das 2te Grenzwertproblem

$$\begin{aligned} S_\zeta U_{\Pi,j}(\hat{\zeta}) &= F_{\Pi,j}(\hat{\zeta}), \quad \hat{\zeta} \in \Pi_j^- \\ V_{\Pi,j}(\hat{\zeta}) &= G_{\Pi,j}(\hat{\zeta}), \quad \hat{\zeta} \in \partial\omega \times (-\infty, 0) \\ M_\zeta U_{\Pi,j}(\hat{\zeta}) &= H^{(j)}(y) - \mathcal{Y}_j e_z =: H_{\Pi,j}(y), \quad \zeta = 0. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Lemma 1.4 liefert uns die Existenz einer Lösung in  $\mathcal{D}_{l,\beta+\delta}^l \mathbb{W}(\Pi_j^-)$ . Hier gilt es zu erreichen, daß  $U_{\Pi,j}$  exponentiell mit  $\zeta_j$  gegen  $-\infty$  abklingt, d.h.  $U_{\Pi,j} \in V_{l,-\beta-\delta}^l \mathbb{W}(\Pi_j^-)$ . Nach Lemma 1.4 ist dies nur möglich, falls die Kompatibilitätsbedingung (1.54) erfüllt ist. Da wir  $H_{\Pi,j}$  durch Wahl von  $\mathcal{Y}_j$  variieren können, erhalten wir (1.54) durch angemessene Wahl von  $a_j$  und  $b_j$ .

Nach Satz 1.2 existiert eine eindeutige Lösung des ersten Grenzwertproblems in Abhängigkeit von der Bedingung  $b_j 2\bar{\omega}R - a_j$ , wobei  $\bar{R} = T$  oder  $\bar{R} = R$  gilt,

vorausgesetzt,  $\bar{R}$  ist groß genug. Sei weiterhin  $u_{(j)}^\sharp \in \mathcal{D}_{l,\beta+\delta}^l \mathbb{W}(\Pi_j^-)$  eine Lösung des homogenen zweiten Grenzwertproblems, d.h. gilt

$$\begin{aligned} u_{(j)}^\sharp &= u^{j1} \quad \text{falls } M = N \quad \text{oder} \\ u_{(j)}^\sharp &\quad \text{ist von der Form (1.58).} \end{aligned}$$

Wir beachten an dieser Stelle, daß in beiden Fällen aufgrund der Poiseuille-Normalisierung gilt

$$\int_\omega v_{(j),3}^\sharp(y, \zeta) dy = 0, \quad \zeta \leq 0. \quad (1.73)$$

Setzen wir  $(F_{\Pi_j}, G_{\Pi,j}, H_{\Pi_j})$  in (1.54) ein, so erhalten wir mit (1.73), daß  $u_{\Pi,j} \in \mathcal{D}_{l,-\beta-\delta}^l \mathbb{V}(\Pi_j^-)$  für

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_j &= \int_{\Omega_j(0)} \mathcal{Y}_j v_{(j)}^\sharp(y, 0) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_{\omega_j} F_{\Pi_j} \cdot u_{(j)}^\sharp dx - \int_{\partial\omega_j} G_{\Pi,j} N u_{(j)}^\sharp do \\ &\quad + \int_{\Omega_j(0)} H^{(j)}(y) v_{(j)}^\sharp(y, 0) \chi_R dy. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Mit der Hölder Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}_j| &= c(\omega_j) \left\| (F_{\Pi_j}, G_{\Pi,j}, H_{\Pi,j}); \mathcal{R}_{l,-\beta-\delta}^l \mathbb{W}(\Pi_j^-) \right\| \sqrt{\int_{-\frac{1}{2}R-\varepsilon_j}^{-\frac{1}{2}R-\varepsilon_j} \zeta^2 e^{2(\beta+\delta)\zeta} d\zeta} \\ &\leq c(\omega_j) e^{\frac{\delta R}{2}} \left\| (F, G, H); \mathcal{R}_{l,\beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R) \right\|. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Mit Theorem 1 in [NaPi99] erhalten wir mit  $R > R^*$  eine eindeutige Lösung des ersten Grenzwertproblems  $\bar{U}_\infty \in \mathcal{D}_{\pm(\beta+\delta)}^l(\Omega)$ , wobei  $a_j$  und  $b_j$  (1.71) erfüllen. Wir erhalten folgende Abschätzung für  $\bar{U}_\infty$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J (|a_j| + |b_j|R) &+ \|\bar{U}_\infty; \mathcal{D}_{\beta+\delta}^l W(\Omega)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^J |\mathcal{Y}_j| + \|(F_\infty, G_\infty); \mathcal{R}_{\beta+\delta}^l W(\Omega, \partial\Omega)\| \\ &\leq ce^{\frac{\delta R}{2}} \left\| (F, G, H); \mathcal{R}_{l,\beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R) \right\|. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Falls (1.74) erfüllt ist, so finden wir in jedem Halbzyylinder  $\Pi_j^-$  eine eindeutige Lösung  $U_{\Pi,j}$  des zweiten Grenzwertproblems (1.72) mit

$$\begin{aligned} \|U_{\Pi,j}; \mathcal{D}_{l,-\beta-\delta}^l \mathbb{W}(\Pi_j^-)\| &\leq c \left\| (F_{\Pi,j}, G_{\Pi,j}, H_{\Pi,j}); \mathcal{R}_{l,-\beta-\delta}^l \mathbb{W}(\Pi_j^-) \right\| \\ &\leq ce^{\frac{\delta R}{2}} \left\| (F, G, H); \mathcal{R}_{l,\beta}^l (\Omega, R) \right\|. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Nun können wir den "fast inversen" Operator definieren. Dazu setzen wir

$$\tilde{U}_{\Pi,j}(y, z) = U_{\Pi,j}(y, z - R) \quad \text{mit } (y, z) \in \Omega_j$$

und

$$U_{\Pi} = \sum_{j=1}^J (1 - \chi_{\frac{R}{4}}) \tilde{U}_{\Pi,j},$$

wobei jeder Ausdruck  $(1 - \chi_{\frac{R}{4}}) \tilde{U}_{\Pi,j}$  durch Null auf  $\Omega_R \setminus \Omega_j$  fortgesetzt wird.  
Wir setzen

$$\mathcal{A}(F, G, H) = U_{\infty} + U_{\Pi} .$$

Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned} (V_{\infty} + V_{\Pi})_{\partial\Omega(R)} &= G \quad \text{und} \\ M(U_{\infty} + U_{\Pi}) &= H \quad \text{auf } \Gamma_R . \end{aligned}$$

Da  $S\tilde{U}_{\infty} = S\bar{U}_{\infty} = 0$  für  $z \geq \frac{R}{2} + \varepsilon_0$ , erhalten wir

$$SU_{\infty} = S\bar{U}_{\infty} - S((1 - \chi_{\frac{3}{4}R})\tilde{U}_{\infty}) = F_{\infty} + [S, \chi_{\frac{3}{4}R}]\tilde{U}_{\infty} .$$

Ebenso erhält man für den zweiten Teil

$$SU_{\Pi} = F_{\Pi} + \sum_{j=1}^J [S, 1 - \chi_{\frac{1}{4}R}] \tilde{U}_{\Pi,j} .$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} S\mathcal{A}(F, G, H) &= F + [S, \chi_{\frac{3}{4}R}]\tilde{U}_{\infty} + \sum_{j=1}^J [S, 1 - \chi_{\frac{1}{4}R}] \tilde{U}_{\Pi,j} \\ &= F + \mathcal{D}(F, G, H) . \end{aligned}$$

Mit (1.76) und (1.77) und Proposition 1 gilt

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{D}(F, G, H), 0, 0); \mathcal{R}_{l,\beta}^l(\Omega_R)\| \\ &\leq ce^{-(\frac{2\beta+3\delta}{4})R} \left( \|\tilde{U}_{\infty}; \mathcal{D}_{\beta+\delta}^l W(\Omega)\| + \sum_{j=1}^J \|\tilde{U}_{\Pi,j}; \mathcal{D}_{l,-(\beta+\delta)}^l \mathbb{V}(\Pi_j^-)\| \right) \\ &\leq e^{-\frac{2\beta+3\delta}{4}R} e^{\frac{\delta R}{2}} \|(\mathcal{D}(F, G, H), \mathcal{R}_{l,\beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R))\| \\ &\leq q \|(\mathcal{D}(F, G, H), \mathcal{R}_{l,\beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R))\| \end{aligned}$$

mit einem geeigneten  $q < 1$  unabhängig von  $R > R^*$ .

. Um (1.70) einzusehen, reicht es aus

$$\|\mathcal{A}; \mathcal{R}_{l,\beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R) \rightarrow \mathcal{D}_{l,\beta}^l(\Omega_R)\| \leq c R^{3/2} e^{\frac{\beta R}{2}} \quad (1.78)$$

zu zeigen. Um dies zu erreichen, schätzen wir  $U_\infty + U_\Pi$  wie folgt ab:

$$\begin{aligned} & \|U_\infty + U_\Pi; \mathcal{D}_{l,\beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R)\| \\ & \leq c (\|U_\infty; \mathcal{D}_{l,\beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R)\| + \|U_\Pi; \mathcal{D}_{l,\beta}^l \mathbb{V}(\Omega_R)\|) \\ & \leq c \left( \sum_{j=1}^J \int_0^R a_j^2 e^{2\beta \zeta_R} + b_j^2 \zeta^2 e^{2\beta \zeta_R} d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + \|\tilde{U}_\infty; \mathcal{D}_{l,\beta}^l W(\Omega)\| + \sum_{j=1}^J \|U_{\Pi,j}; \mathcal{D}_{l,-\beta}^l W(\Pi_j^-)\| . \end{aligned}$$

Mit Proposition 1 für  $\beta = 0$ , Lemma 1.5 und (1.76) mit  $\delta = 0$  majorisieren wir die rechte Seite der Abschätzung mit der aus (1.70). ■

### 1.3 Fehlerabschätzung

Wir werden mit Hilfe der bisher erhaltenen Ergebnisse eine Fehlerabschätzung angeben. Mit Satz 1.3 zeigen wir die Existenz einer Lösung  $u^R$  und mit Satz 1.4 beweisen wir anschließend eine Abschätzung für  $|u - u^R|$ . Da die Einschränkung von  $(f, g)$  auf  $\Omega_R$  im allgemeinen nicht in  $\mathcal{R}_l^l V(\Omega_R)$  liegt, müssen wir einige Modifikationen vornehmen (siehe auch [Sp99]).

Es sei  $\varepsilon_0$  die Konstante vor (1.26). Für  $R > R_0$  betrachten wir Abschneidefunktionen wie nach (1.69). Setze  $\chi^R = \chi_{R-2\varepsilon_0}$ , d.h.  $\chi^R(x) = 1$  für  $x \in \overline{\Omega}_R$  mit  $\text{dist}(x, \Gamma_R) \geq 3\varepsilon_0$  und  $\chi^R(x) = 0$  für  $\text{dist}(x, \Gamma_R) < \varepsilon_0$ .

**Korollar 1.1.** Es sei  $l \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \beta < \beta^*$ ,  $\beta^*$  definiert durch (1.7),  $T_j \geq R > R_0$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Für jedes Tupel  $(f, g) \in \mathcal{R}_\beta^l(\Omega, \partial\Omega)$  und  $H \in \mathbb{R}^J$  existiert eine eindeutige Lösung  $u^R \in \mathcal{D}_l^l V(\Omega_R)$  zu

$$\begin{aligned} S u^R &= \chi^R f|_{\Omega_R} \quad \text{in } \Omega_R \\ v^R &= \chi^R g \quad \text{auf } \partial\Omega(R) \end{aligned} \quad (1.79)$$

mit

$$B^R u^R = N u^R + \frac{2(T_j - R)}{\psi} (v \cdot n) = H_j \cdot n \quad \text{auf } \Gamma_{R_j} \quad (1.80)$$

mit  $j = 1, \dots, J$ . Sollten  $f_4 = 0$  und  $g = 0$  in einer genügend großen Umgebung von  $\Gamma_R$  sein, so kann die Abschneidefunktion in (1.79), (1.80) ignoriert werden.

**Beweis** Für  $f \in W_\beta^{l-1}(\Omega) \subset W_{loc}^{l-1}(\Omega)$  gilt  $f|_{\Omega_R} \in V_l^{l-1}(\Omega_R)$ , da  $\chi^R(f, g) = 0$  in einer Umgebung von  $\Gamma_R$  gilt. Weiterhin gilt mit den gleichen Argumenten aus Satz 1.4, daß  $\chi^R f_4 \in V_l^l(\Omega_R)$  und  $\chi^R g \in V_l^{l+1/2}(\partial\Omega(R))$  sowie  $H_j \mathbf{n} \in V_l^{l-1/2}(\Gamma_R)$  ist. Damit ist die Behauptung mit Hilfe von Satz 1.3 bewiesen. ■

Aus Korollar 1.1 und Satz 1.4 folgt

**Satz 1.5.** Es seien  $l, \beta, T_j$  und  $R$  wie in Korollar 1.1. Es seien  $f' \in W_\beta^{l-1}(\Omega)$ ,  $f_4 = 0$ ,  $g = 0$  in einer Umgebung des Randes  $\Gamma_R$ . Desweiteren sei  $u \in \mathcal{D}_\beta^l W(\Omega)$  Lösung des Problems (0.1), d.h.

$$u = \sum \chi_j (a_j u^{0j} + b_j u^{1j}) + \tilde{u} \quad (1.81)$$

und  $u^R$  eine Lösung von (1.79), (1.80). Falls  $T_j \geq R$  für alle  $j = 1, \dots, J$ , gilt

$$\begin{aligned} \|u - u^R; \mathcal{D}_\beta^l V(\Omega_R)\| &\leq c R^{3/2} \left( \sum_{j=1}^J |2\bar{\omega}_j T_j b_j - a_j - H_j| \right. \\ &\quad \left. + e^{-\beta R} \left[ \|(f, g); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega, \partial\Omega)\| + \sum_{j=1}^J (|a_j| + |b_j|) \right] \right). \end{aligned} \quad (1.82)$$

**Beweis** Sind  $a_j$  und  $b_j$  nicht durch eine Randbedingung im Unendlichen bestimmt, so so folgt für  $u$  mit Satz 1.2

$$\|\tilde{u}; \mathcal{D}_\beta^l W(\Omega, \partial\Omega)\| \leq c \left[ \|(f, g); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega)\| + \sum_{j=1}^J |a_j| + |b_j| \right]. \quad (1.83)$$

Aus (1.70) erhalten wir

$$\|u - u^R; \mathcal{D}_\beta^l V(\Omega_R)\| \leq c R^{3/2} \|B(u - u^R); V_l^{l-1/2}(\Gamma_R)\|.$$

Wir rechnen  $B^R u$  mit Hilfe von (1.17) aus:

$$Bu = (2\bar{w}Rb_j - a_j)e_z + 2\bar{w}b_j(T_j - R)e_z + B\tilde{u}, \quad (1.84)$$

wobei der zweite Term nur für  $T_j > R$  erscheint. Weiterhin haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|B\tilde{u}; V_l^{l-1/2}(\Gamma_R)\| &\leq c \sum_{j=1}^J \|\tilde{u}; \mathcal{D}_\beta^l V(\omega_j \times (R - \varepsilon_0, R))\| \\ &\leq c e^{-\beta R} \|\tilde{u}, \mathcal{D}_\beta^l W(\Omega)\| \\ &\leq c e^{-\beta R} \left( \|(f, g); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega, \partial\Omega)\| + \sum_{j=1}^J (|a_j| + |b_j|) \right), \end{aligned}$$

welche man durch (1.83) erhält. Man beachte hier, daß die Konstante in dieser Spurabschätzung unabhängig von  $R$  ist. (1.82) folgt nun unmittelbar aus (1.84) sowie der letzten Ungleichung. ■

**Bemerkung 1.6.** Sind  $T, H \in \mathbb{R}^J$  derart gewählt, daß die rechte Seite von (1.83) verschwindet, so klingt der Fehler exponentiell ab. Dies ist aber schwer zu erreichen, wenn wir keine Informationen über  $a_j$  und  $b_j$  haben.

Betrachten wir das Problem mit vorgeschriebenem Fluß, d.h. wir wählen  $b_j = h_j$ . Dies ist nur dann möglich, wenn  $\sum h_j = 0$ . In diesem Fall führt eine Randbedingung vom Typ Neumann oder Robin nicht zu einem abklingenden Fehler. Dies gilt ebenfalls für  $H_j = 2\omega T_j h_j$  oder  $H_j = 2\omega R h_j$ , da im allgemeinen alle  $a_j \neq 0$  gilt.

Wir betrachten nun Lösungen von (0.1) mit festen Randbedingungen im Unendlichen.

**Satz 1.6.** Es seien  $\beta$  und  $l$  wie in Satz 1.5,  $(f, g) \in \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega, \partial\Omega)$  und  $H, T \in \mathbb{R}^J$  mit  $T_j \gg R_0$  für  $j = 1, \dots, J$ . Weiterhin sei  $u \in \mathbb{D}_\beta^l(\Omega)$  die eindeutige Lösung von (0.1) mit den Randbedingungen im Unendlichen

$$2\bar{w}T_j b_j - a_j = H_j. \quad (1.85)$$

Für  $R \leq T_j$  sei  $u^R$  die eindeutige Lösung des Problems (1.79), (1.80). Dann gilt folgende Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \|v - v^R; H^{l+1}(\Omega_{R-\varepsilon_0})\| + \|p - p^R; H^l(\Omega_{R-\varepsilon_0})\| \\ \leq ce^{-((\beta-\varepsilon)R)} \|(f, g); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega, \partial\Omega)\|, \end{aligned} \quad (1.86)$$

wobei  $c$  unabhängig von  $R$  und  $(f, g)$  ist.

**Beweis** Wir reduzieren das Problem auf eine entsprechende Situation wie in Satz 1.5. Es sei

$$U^\infty = \sum \chi_j (A_j^\infty U^{0j} + B_j^\infty u^{1j}) + \tilde{U}^\infty$$

eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} S U^\infty &= \chi^R f && \text{in } \Omega \\ V^\infty &= \chi^R g && \text{auf } \partial\Omega \\ 2\bar{w}_j T_j B_j^\infty - A_j^\infty &= H_j. \end{aligned}$$

Dann löst  $u - U^\infty$  das folgende Problem

$$\begin{aligned} S(u - U^\infty) &= (1 - \chi^R)f \quad \text{in } \Omega \\ v - V^\infty &= (1 - \chi^R)g \quad \text{auf } \partial\Omega \\ 2\bar{w}_j T_j(b_j - B_j^\infty) - (a_j - A_j^\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Da  $(1 - \chi^R)(f, g) \in \mathcal{R}_{\bar{\varepsilon}}^l(\Omega, \partial\Omega)$   $\forall \bar{\varepsilon} \in (0, \beta)$  und

$$\|(1 - \chi^R)(f, g) \in \mathcal{R}_{\bar{\varepsilon}}^l(\Omega, \partial\Omega)\| \leq c e^{-(\beta - \bar{\varepsilon}_0 - R)} \|(f, g); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega, \partial\Omega)\|, \quad (1.87)$$

erhalten wir mit Satz 1.2

$$\begin{aligned} &\|v - V^\infty; H^{l+1}(\Omega_{R-\varepsilon})\| + \|p - P^\infty; H^l(\Omega_{R-\varepsilon_0})\| \\ &\leq c \left( |b_j - B_j^\infty| R^{3/2} + |a_j - A_j| R^{1/2} + \|\tilde{u} - \tilde{U}^\infty; \mathcal{D}_{\bar{\varepsilon}}^l(\Omega)\| \right) \\ &\leq c R^{3/2} \|(1 - \chi^R)(f, g); \mathcal{R}_{\bar{\varepsilon}}^l(\Omega, \partial\Omega)\| \\ &\leq c e^{-(\beta - \bar{\varepsilon}_0)R} \|(f, g); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega, \partial\Omega)\|. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Für  $u - u^R = u - U^\infty + U^\infty - u^R$  folgt nun

$$\|U^\infty - u^R; H^{l+1}(\Omega_{R-\varepsilon_0})^3 \times H^l(\Omega_{R-\varepsilon_0})\| \leq c \|U^\infty - u^R; \mathcal{D}_l^l V(\Omega)\|. \quad (1.89)$$

Auf  $U^\infty - u^R$  wenden wir Satz 1.5 an. Aufgrund der Wahl der künstlichen Randbedingung verschwindet die erste Summe aus (1.82) und da  $a_j$  und  $b_j$  nun durch (1.85) fest bestimmt sind, folgt (1.86) aus (1.88), (1.89), (1.82) und (1.13). ■

## 2 Approximation der Stokes-Gleichung

### 2.1 Einleitung und Ziel

In diesem Kapitel werden wir zunächst erläutern, was wir unter einer zulässigen Triangulierung, beziehungsweise Tetraedierung des endlichen Gebiets  $\Omega_R$  verstehen. Weiterhin geben wir einige Details zur Transformation von Tetraedern auf den Standardtetraeder sowie Interpolationseigenschaften der Ansatzfunktionenräume. Wir stellen das Mini-Element vor, welches in dieser Arbeit als Finite-Element zur Approximation der Stokes Gleichung dienen soll. Anschließend werden wir die Existenz und Eindeutigkeit des diskreten Problems, wie allgemein üblich, durch die Babuska-Brezzi-Bedingung zeigen. Im Anschluss folgt eine Fehlerabschätzung des diskreten Fehlers  $|u_R^h - u_R|$ .

In Abschnitt 2.4 beschreiben wir das entstehende lineare Gleichungssystem. Da die Lösung von  $-\Delta\psi = 2$ ,  $\psi = 0$  aus Kapitel 1 im allgemeinen nicht analytisch angegeben werden kann, erhält man hier ein zusätzliches zweidimensionales Finite Element Problem, welches wir hier kurz darstellen wollen. Die Lösung dieses Problems wird im nächsten Kapitel anhand eines Anwendungsbeispiel beschrieben werden.

### 2.2 Definitionen und Bemerkungen sowie einige grundlegende Sätze

Bevor wir zur diskreten Formulierung von (1.79), (1.80) kommen, benötigen wir noch die Definition einer zulässigen Zerlegung von  $\Omega_R$  und die der Ansatzfunktionenräume über  $\Omega_R$ .

**Definition 2.1.** Es sei  $\Omega_R \subset \mathbb{R}^{2,3}$  ein polygonal beschränktes Gebiet ( $\Gamma = \partial\Omega_R$  ist stetig stückweise linear). Eine Zerlegung  $\mathcal{T}_h = \{T_1, \dots, T_N\}$  von  $\Omega_R$  in abgeschlossene Tetraeder  $T_j$  heißt zulässig, falls gilt:

- i)  $\overline{\Omega}_R = \bigcup_{j=1}^N T_j$ .
- ii) Gilt für  $T, S \in \mathcal{T}_h$ , daß  $S \cup T = \{x\}$ , so ist  $x$  Eckpunkt von  $T$  und  $S$ .
- iii) Gilt für  $T, S \in \mathcal{T}_h$ , daß  $S \cup T = \{e\}$ , so ist  $e$  Randkante der Tetraeder  $T$  und  $S$ .
- iv) Für  $T, S \in \mathcal{T}_h$  gilt  $\overset{\circ}{S} \cap \overset{\circ}{T} = \{\emptyset\}$ .
- v) Jede Randfläche eines Tetraeders  $T \in \mathcal{T}_h$  gehört entweder zum Rand  $\Gamma$  oder ist Randfläche eines anderen Tetraeders  $S \in \mathcal{T}_h$ .

vi) Es sei  $\rho_T$  der Radius des größten Innenkreises (Innenkugel) eines Elements  $T \in \mathcal{T}_h$  und  $h_T$  der Durchmesser (die kleinste äußere Kugel) von  $T$ . Weiterhin bezeichne  $h = \max_T h_T$  das Maximum über alle  $h_T$ . Es existiert eine Konstante  $\delta$  derart, daß

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \delta, \forall T \in \mathcal{T}_h, \text{ mit } h \text{ gegen } 0.$$

vii) Die Zerlegung erfülle die inverse Bedingung, d.h. es existiert eine Konstante  $c$  derart, daß

$$\frac{h}{h_T} \leq c, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Damit haben wir mit Hilfe von Definition 2.1 eine konforme Zerlegung von  $\Omega_R$  garantiert, d.h. es existieren keine hängenden Knoten (siehe Abbildung 6b).

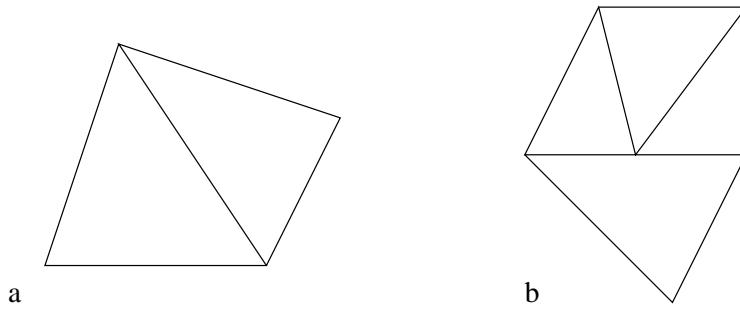


Abbildung 6: a) konforme b) nicht konforme Zerlegung

Da wir im folgenden gemischte Randwertprobleme betrachten werden, bezeichne  $\Gamma_D$  die Vereinigung aller Teilränder von  $\Gamma$  mit einer Dirichlet-Randbedingung,  $\Gamma_N$  entsprechend die Vereinigung aller Teilränder mit einer Neumann-Randbedingung und schließlich  $\Gamma_{ABC}$  die Vereinigung aller Teilränder mit einer Robin-Randbedingung.

Weiterhin bezeichne  $\mathcal{F}(T)$  die Menge aller Flächen eines Elements  $T \in \mathcal{T}_h$ . Dabei unterscheiden wir die Menge aller Flächen

$$\mathcal{F}_h := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{F}(T),$$

wie folgt:

$$\mathcal{F}_h := \mathcal{F}_{h,\Omega} \cup \mathcal{F}_{h,D} \cup \mathcal{F}_{h,N} \cup \mathcal{F}_{h,ABC},$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{h,\Omega} &= \{F \in \mathcal{F}_h : F \subset \Omega\} \\ \mathcal{F}_{h,D} &= \{F \in \mathcal{F}_h : F \subset \Gamma_D\} \\ \mathcal{F}_{h,N} &= \{F \in \mathcal{F}_h : F \subset \Gamma_N\} \\ \mathcal{F}_{h,ABC} &= \{F \in \mathcal{F}_h : F \subset \Gamma_{ABC}\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{F}_{h,\Omega}$  bezeichnet alle inneren Flächen,  $\mathcal{F}_{h,D}$  alle Dirichlet-,  $\mathcal{F}_{h,N}$  alle Neumann- und  $\mathcal{F}_{h,ABC}$  alle Robin-Flächen. Mit  $h_F$  bezeichnen wir den Flächeninhalt von  $F$ . Äquivalent hierzu sei  $\mathcal{E}(T)$  die Menge aller Kanten von  $T \in \mathcal{T}_h$ . Auch hier unterscheiden wir die Menge aller Kanten

$$\mathcal{E}_h(T) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}(T).$$

entsprechend:

$$\mathcal{E}_h := \mathcal{E}_{h,\Omega} \cup \mathcal{E}_{h,D} \cup \mathcal{E}_{h,N} \cup \mathcal{E}_{h,ABC},$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{h,\Omega} &= \{E \in \mathcal{E}_h : E \subset \Omega\} \\ \mathcal{E}_{h,D} &= \{E \in \mathcal{E}_h : E \subset \Gamma_D\} \\ \mathcal{E}_{h,N} &= \{E \in \mathcal{E}_h : E \subset \Gamma_N\} \\ \mathcal{E}_{h,ABC} &= \{E \in \mathcal{E}_h : E \subset \Gamma_{ABC}\}.\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit  $T_E^d$ ,  $d = 2, 3$  die Standardelemente im zwei- und dreidimen-

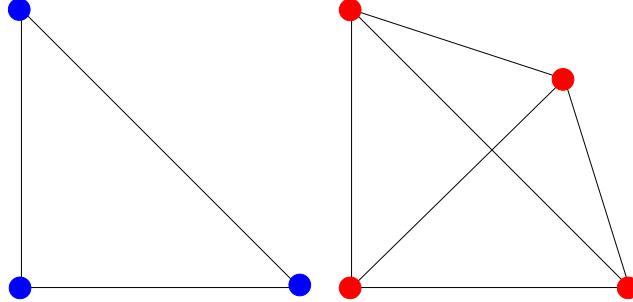


Abbildung 7: Standardelemente in 2D und 3D

sionalen Fall, welche wie folgt definiert sind (siehe Abbildung 7).

$$\begin{aligned}T_E^2 &:= \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1 ; 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1\} \\ T_E^3 &:= \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq 1 ; 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1 ; 0 \leq x_3 \leq 1 - x_1 - x_2\}.\end{aligned}$$

$P_k$  sei der Raum aller Polynome vom Grad  $\leq k$  in  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  Variablen, d.h. ein Polynom  $p \in P_k$  hat die Form

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$$

$$\text{mit } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad a_{\alpha_i} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Mit Hilfe baryzentrischer Koordinaten kann ein Element  $T_n$  wie folgt als konvexe Hülle beschrieben werden: Mit  $\lambda_i = \lambda_i(x)$  sei

$$\lambda_i \in P_1, \quad \lambda_i(a_j) = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n+1$$

Dabei sind  $a_i$  die Ecken des Dreiecks bzw. Tetraeders. Die baryzentrischen Koordinaten erfüllen folgende Bedingungen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \quad \text{und} \quad p = \sum_{i=1}^{n+1} p(a_i) \lambda_i \quad \forall p \in P_1.$$

Außerdem gilt

$$T_n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, 1 \leq i \leq n+1\}.$$

Kommen wir nun zu der Transformation eines Elements aus der Triangulierung, beziehungsweise Tetraedierung auf das Standardelement. Gegeben sei ein beliebiges Element aus  $T_h^n$ ,  $n = 2, 3$  mit den Knoten  $(\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_{n+1})$ .

Das zu dem Standardelement gehörige Koordinatensystem bezeichnen wir mit  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Um einen Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  in  $\xi$ -Koordinaten auszudrücken, betrachten wir folgende Darstellung:

$$x_j = \sum_{i=1}^n b_{ji} \xi_i + b_{jn+1} \quad \text{für } j = 1, \dots, n \tag{2.1}$$

mit  $b_{ij} \in \mathbb{R}^n$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen weiter an, daß die Knoten  $\hat{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  wie in Abbildung 8 angeordnet sind, d.h.

$$\hat{P}_i = e_i^n,$$

wobei  $e_i^n$  der i-te Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^n$  ist. Einfaches Einsetzen in (2.1) liefert somit

$$b_{jn+1} = \hat{P}_1(i), \quad \text{die i-te Komponente von } \hat{P}_1$$

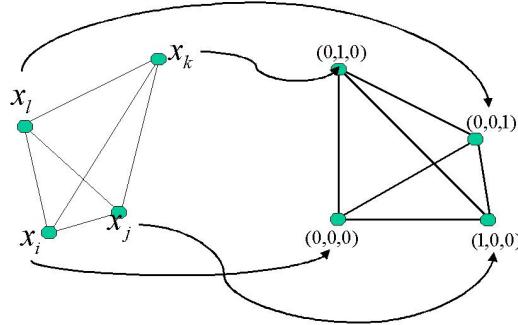


Abbildung 8: Transformation der Knoten eines Tetraeders auf das Standardelement

und für  $b_{ji}$  gilt

$$b_{ji} = \hat{P}_{j+1}(i) - \hat{P}_1(i), \quad \text{für } (i, j = 1, \dots, n).$$

Damit können wir die Transformationsabbildung definieren

$$F_T : E \rightarrow T : \xi \mapsto F_T(\xi) := B_T \xi + b_T \quad (2.2)$$

und für die Matrix  $B_T$

$$B_T := b_{ji} \quad \text{und} \quad b := b_j \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n.$$

Da  $F_T(\xi)$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist, lässt sich der Satz über die Integraltransformation anwenden. Es gilt für offene Mengen  $U, V \subset \mathbb{R}^3$  und für alle  $f \in C_c(V)$

$$\int_U f(F(\xi)) |\det \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)| d^n x = \int_V f(y) d^n y.$$

Dieser Transformationssatz erleichtert die Implementation eines numerischen Finite-Element-Verfahrens in entscheidender Weise, da sämtliche Berechnungen auf dem Standardelement durchgeführt werden können. Nach dem Transformationsatz müssen wir nur  $\Lambda := |\det \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)|$  berechnen. Es gilt

$$\Lambda := |\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)| = |\det B|.$$

Setzen wir für  $x_{\kappa i} := \hat{P}_\kappa - \hat{P}_1$ ,  $\kappa = i, j, k, l$  erhalten wir:

$$\Lambda^2 := |x_{ji}y_{ki} - x_{ji}y_{li}|,$$

$$\Lambda^3 := |x_{ji}y_{ki}z_{li} - x_{ji}y_{li}z_{ki} - y_{ji}x_{ki}z_{li} + y_{ji}x_{li}z_{ki} + z_{ji}x_{ki}y_{li} - z_{ji}x_{li}y_{ki}|.$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist damit durch

$$|T_2| := \int_T d\mathbf{x} = \frac{\Lambda^2}{2}$$

und das Volumen eines Tetraeders durch

$$|T_3| := \int_T d\mathbf{x} = \frac{\Lambda^3}{6}$$

gegeben. Für die folgenden Abschätzungen des Interpolationsfehlers sowie des Approximationsfehlers zeigen wir einige Eigenschaften der Transformationsmatrix.

Aus den eben aufgeführten Schritten folgt, daß die Determinante von  $B$  folgende Gleichung erfüllt

$$|\det(B)| = \frac{|T|}{|E|}.$$

Kommen wir zurück auf die Abbildung  $F_T$  zwischen  $T$  und  $E$ . Mit

$$(v : T \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto (\hat{v} = v \circ F_T : E \rightarrow \mathbb{R})$$

und

$$(\hat{v} : E \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto (v = \hat{v} \circ F_T^{-1} : T \rightarrow \mathbb{R})$$

gilt das folgende Lemma.

**Lemma 2.1.** [GiRa86] Für  $m = 0, 1, 2$  ist die Abbildung  $v \mapsto \hat{v} = v \circ F_T$  ein Isomorphismus von  $H^m(T)$  auf  $H^m(E)$  mit

$$|\hat{v}|_{m,E} \leq c_1 \|B_T\|^m |\det(B_T)|^{-1/p} |v|_{m,T} \quad \forall v \in H^m(T)$$

und

$$|v|_{m,T} \leq c_2 \|B_T^{-1}\|^m |\det(B_T)|^{1/p} |\hat{v}|_{m,E} \quad \forall v \in W^m(T)$$

und es gilt

$$|\hat{v}|_{m,E} \leq c_1 \rho_T^{-m} h_T^m c_2 \rho_T^{-n/p} |v|_{m,T} = c_3 h_T^m \rho_T^{-(m+n)/p} |v|_{m,T}.$$

Weiterhin gilt für den Gradienten

$$\nabla_\xi \hat{v}(\xi) = (B_T^t \nabla_x v) \circ F_T(\xi)$$

und die Normale

$$\hat{n}(\xi) = \left[ (B_T^t n) / \|B_T^t n\| \right] \circ F_T(\xi) .$$

Dabei bezeichnen  $n$  und  $\hat{n}$  die äußere Normale.

Die folgenden Abschätzungen und Aussagen gelten nach [GiRa86], [CiLi91].

Für die Transformationsmatrix  $B$  aus  $F_T$  gilt:

$$\|B_T\| \leq \frac{h_T}{\rho_E} \quad \text{und} \quad \|B_T^{-1}\| \leq \frac{h_E}{\rho_T} .$$

Außerdem erfüllt die Determinante von  $B$  mit Konstanten  $c_1(n), c_2(n)$ ,  $n = 2, 3$  die folgende Abschätzung

$$c_2(n)\rho_T^n \leq |\det(B_T)| \leq c_1(n)h_T^n .$$

Es sei  $\hat{\pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(E), H^m(E))$  mit

$$\hat{\pi}t = t \quad \forall t \in P_k .$$

Nach [GiRa86, Cor.A.1] existiert dann eine Konstante  $c > 0$ , abhängig von  $k, m, E$  und  $\hat{\pi}$  derart, daß gilt

$$\|\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}\|_{m,E} \leq c |\hat{v}|_{k+1,E} \quad \forall \hat{v} \in H^{k+1}(E) .$$

Es sei  $T$  ein  $N$ -Simplex des  $\mathbb{R}^N$  und

$$\pi \in \mathcal{L}(H^{k+1}(T); H^m(T)) : (\pi v) \circ F_T = \hat{\pi}(v \circ F_T) ,$$

dann existiert eine Konstante  $c > 0$  abhängig von  $k, m, E$  und  $\hat{\pi}$  so, daß

$$|v - \pi v|_{m,T} \leq C C_T^m h_T^{k+1-m} |v|_{k+1,T} \quad \forall v \in H^{k+1}(T) .$$

Für  $v \in H^2(\Omega)$  mit  $v = 0$  auf  $\Gamma_D$  gilt für den Interpolationsoperator  $I_h : H^2 \rightarrow V_h$  ( $V_h$  Ansatzfunktionenraum)

$$\|v - I_h v\|_{0,T} \leq ch |v|_{1,T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h .$$

Siehe dazu auch [GiRa86], [CiLi91], [Ve94].

## 2.3 Das diskrete Problem

In diesem Abschnitt werden wir zunächst für das diskrete Stokes-System die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung nachweisen und anschließend eine Fehlerabschätzung bezüglich des Mini-Finite-Element Ansatzes liefern. Wir werden zeigen, wie die linearen Gleichungssysteme entstehen und deren Lösungsansätze beschreiben.

Gesucht ist das dreidimensionale Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  und der Druck  $p$  zu gegebener rechter Seite  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $g$  und  $\mathbf{h}$ , welches die folgende Gleichung erfüllt

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_R \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= g \quad \text{in } \Omega_R \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} M(v, p) &= \mathbf{h} \quad \text{auf } \Gamma_{ABC} \\ v &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_{LAT}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Da wir uns ausschließlich auf dem beschränktem Gebiet befinden, setzen wir der Einfachheit halber  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^R$ .  $\Omega_R \subseteq \mathbb{R}^3$ , das endliche Rechengebiet, habe die aus Kapitel 1 definierten Eigenschaften,  $\Gamma_{ABC}$  ist die Schnittfläche des unendlichen Rohres an der Stelle  $(x, y, z) = (x, y, R)$  in jedem Zylinder.  $\Gamma_{LAT}$  sei der “laterale” Rand eines jeden Zylinders. Mit  $\Gamma_D$  bezeichnen wir einen Dirichlet-Rand und mit  $\nu$  den Viskositätsparameter.

Bevor wir die schwache Formulierung von (2.3),(2.4) betrachten, definieren wir noch einige Ansatzfunktionenräume. Mit  $H^s = W^{s,2}$ ,  $s \in \mathbb{R}$  bezeichnen wir, wie gewöhnlich, die Sobolev-Slobodetskii-Räume, und für die Eckensingularitäten benutzen wir die gewichteten Sobolev-Räume (Kondratiev - Räume) wie wir sie schon in Kapitel 1 beschrieben haben. Im folgenden bezeichnen wir die Approximationsräume mit

$$\begin{aligned} H^1 &:= H^1(\Omega_R) = \{u \in L_2(\Omega_R) : D^\alpha u \in L_2(\Omega_R) \text{ für } |\alpha| \leq 1\} \\ H_{0,D}^1 &:= H_{0,D}^1(\Omega_R) = \{u \in H^1 : u = 0 \text{ auf } \Gamma_{LAT} \text{ und } \Gamma_D\}. \end{aligned}$$

Für  $X = (H_{0,D}^1)^3$  und  $Q = H^1$  erhalten wir aus (2.3) die folgende schwache Formulierung

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{\Omega_R, \psi} + \langle \mathbf{h}, \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_{ABC}, \psi} \quad \forall \mathbf{w} \in X \\ b(\mathbf{v}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &:= \langle \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w} \rangle_{\Omega_R} + \langle C\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_{ABC}} \\ b(\mathbf{v}, p) &= -\langle \operatorname{div} \mathbf{v}, p \rangle_{\Omega_R}. \end{aligned}$$

Dabei ist das Skalarprodukt auf  $\Omega_R$  gegeben durch

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_R} = \int_{\Omega_R} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

bzw. für den Gradienten gilt

$$\langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle_{\Omega_R} = \int_{\Omega_R} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

Das Randskalarprodukt ist gegeben durch

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_{ABC}} = \int_{\Gamma_{ABC}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} do$$

und mit  $C = 2(T - R)\psi^{-1}$  gelte

$$\langle C\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_{ABC}} = 2(T - R) \int_{\Gamma_{ABC}} \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{\psi} do.$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß  $\Gamma_{ABC}$ , bzw.  $\Gamma_{LAT}$  immer aus der Vereinigung aller  $j = 1, \dots, J$  Ränder besteht.

Mit Satz 1.5, Kapitel 1 wissen wir, daß eine eindeutige Lösung des kontinuierlichen endlichen Systems (2.3) existiert und für  $u = (\mathbf{v}, p) \in \mathcal{D}_f^l V(\Omega_R)$  die Abschätzung (1.82) und (1.84) erfüllt ist. Es reicht daher, hier die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des diskreten Systems nachzuweisen. Da wir für unsere Implementation das Mini-Element benutzen, d.h. einen  $P_1 \times P_1$  Ansatz mit dem, um die Bubblefunktionen angereicherten Geschwindigkeitsraum führen wir noch die Menge der Bubblefunktionen  $B$  ein

$$B := \{b \in H_0^1(T) : b(x) = \alpha(T) \prod_{j=1}^4 \lambda_i(x) \quad T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Mit  $X_h$  bezeichnen wir den endlich dimensionalen Unterraum der Geschwindigkeit und mit  $Q_h$  den des Druckes, wobei  $X_h, Q_h$  wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_h &:= \{v \in (H_{0,D}^1)^3 : v|_T \in P_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ X_h &:= \{v \in (H_{0,D}^1)^3 : v|_T \in (P_1 \oplus B)^3 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ Q_h &:= \{q \in H^1 : q|_T \in P_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ M_h &:= Q_h \subset L^2(\Omega_R). \end{aligned}$$

$T$  bezeichne hier ein Element (Tetraeder) aus der Tetraedierung  $\mathcal{T}_h$ . Die Freiheitsgrade auf jedem Element  $T$  sind für die Geschwindigkeit durch die Eckpunkte eines jeden Tetraeders und seines Bubbleknoten gegeben (Blaue Knoten).

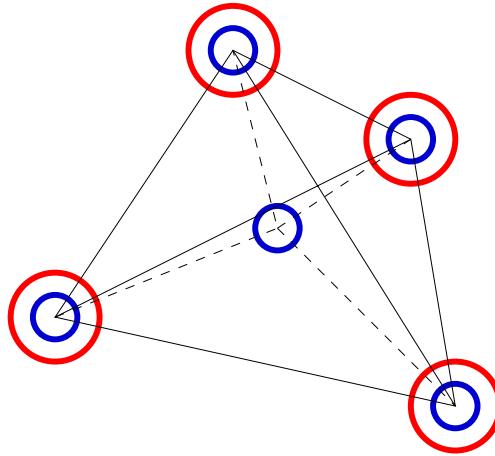


Abbildung 9: Tetraeder mit Bubble-Knoten

Der Druck hat seine Freiheitsgrade auf den Eckknoten (Rote Knoten), siehe Abbildung 9.

Im allgemeinen Fall ist es nicht möglich,  $\psi$  aus Kapitel 1 analytisch anzugeben. Daher ist es erforderlich, für das Laplace-Problem (1.11) ebenfalls ein 2D Finite-Element Problem zu lösen. Es bezeichne

$$X_{\Gamma_{ABC}} = H_{0,\Gamma}^1 = H_0^1(\Gamma_{ABC})^2$$

und

$$X_{h,\Gamma_{ABC}} = \{v \in H_{0,\Gamma}^1 | v|_F \in P_1 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h\},$$

dann lautet die zugehörige schwache Formulierung:

Gesucht ist ein  $\psi_h \in X_h$  mit

$$\tilde{a}(\psi_h, \varphi_h) = \langle 2, \varphi_h \rangle \quad \forall \varphi_h \in X_{h,\Gamma_{ABC}}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\psi_h, \varphi_h) &= \int_{\Gamma_{ABC}} \nabla \psi_h \cdot \nabla \varphi_h \, do \\ \langle 2, \varphi_h \rangle_{\Gamma_{ABC}} &= 2 \int_{\Gamma_{ABC}} \varphi_h \, do. \end{aligned}$$

Für das 3D-Stokes Problem lautet die diskrete schwache Formulierung:

Gesucht ist ein Paar  $(v_h, p_h) \in X_h \times M_h$  mit

$$a(v_h, w_h) + b(w_h, p_h) = \langle f, w_h \rangle + \langle h, w_h \rangle_{\Gamma_{ABC}} \quad \forall w_h \in X_h \quad (2.5)$$

$$b(v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (2.6)$$

Dabei gilt für  $a$  und  $b$ :

$$a(v_h, w_h) = \langle \nabla v_h, \nabla w_h \rangle_{\Omega_R} + \langle v_h, w_h \rangle_{\Gamma_{ABC}, \psi_h} \quad \text{und} \quad (2.7)$$

$$b(v_h, q_h) = -\langle \operatorname{div} v_h, q_h \rangle_{\Omega_R}, \quad (2.8)$$

mit

$$\langle v_h, w_h \rangle_{\Gamma_{ABC}, \psi_h} = 2(T - R) \int_{\Gamma_{ABC}} \frac{v_h w_h}{\psi_h} do.$$

Dabei ist  $M(v, p) := B^R u^R$  aus (1.80). Wir führen nun eine Petrov-Galerkin-Stabilisierung durch, d.h. wir zerlegen die Geschwindigkeit in den linearen Anteil und den Bubble Anteil

$$v_h := v_{h,L} + v_{h,B}.$$

Für  $v_{h,L}$  und  $v_{h,B}$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} \nabla v_{h,B} : \nabla v_{h,L} d\mathbf{x} &= \sum_{t \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla v_{h,B} : \nabla v_{h,L} d\mathbf{x} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v_{h,B} \partial_n v_{h,L} \eta_t do - \int_T v_{h,B} \Delta v_{h,L} d\mathbf{x} \\ &= 0, \quad \text{da } v_{h,B} \text{ auf } \partial T \text{ verschwindet und } \Delta v_h \equiv 0. \end{aligned}$$

Außerdem erhalten wir für den Randterm auf  $\Gamma_{ABC}$ , da  $v_{h,B}$  und  $w_{h,B}$  auf  $F \in \mathcal{F}$  verschwinden,

$$\begin{aligned} 2(T - R) \int_{\Gamma_{ABC}} \frac{v_h w_h}{\psi_h} do &= \sum_{F \in \mathcal{F}_h} 2(T - R) \int_F \psi^{-1} (v_{h,L} + v_{h,B}) \cdot (w_{h,L} + w_{h,B}) h_F do \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}_h} 2(T - R) \int_F \psi^{-1} v_h w_{h,L} do, \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\Gamma_{ABC}} h \cdot w_h do = \int_{\Gamma_{ABC}} h(w_{h,L} + w_{h,B}) do = \int_{\Gamma_{ABC}} h w_{h,L} do.$$

Übrig bleibt also folgende Identität

$$\int_T \nabla v_{h,B} : \nabla w_{h,B} d\mathbf{x} - \int_T p_h \operatorname{div} (w_{h,B}) d\mathbf{x} = \int_T f w_{h,B} d\mathbf{x}.$$

Für  $v_{h,B} = \alpha(T)w_{h,B}$  folgt dann

$$\begin{aligned} \int_T \alpha(T) |\nabla w_{h,B}|^2 d\mathbf{x} + \int_T \nabla p_h w_{h,B} d\mathbf{x} &= \int_T f w_{h,B} d\mathbf{x} \\ \Leftrightarrow \alpha(T) \int_T |\nabla w_{h,B}|^2 d\mathbf{x} &= \int_T (f - \nabla p_h) w_{h,B} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

und somit

$$\alpha(T) = \left( \int_T (f - \nabla p_h) w_{h,B} d\mathbf{x} \right) \left( \int_T |\nabla w_{h,B}|^2 d\mathbf{x} \right)^{-1} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h .$$

Daraus folgt für die Divergenzgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_R} \operatorname{div} v_h q_h d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_R} q_h \operatorname{div} v_{h,L} d\mathbf{x} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q_h \operatorname{div} (\alpha(T) w_{h,B}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_R} q_h \operatorname{div} v_{h,L} d\mathbf{x} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \alpha(T) w_{h,B} \nabla q_h d\mathbf{x} . \end{aligned}$$

Das Randintegral verschwindet, da  $w_{h,B} \equiv 0$  auf  $\partial T$ , also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_R} q_h \operatorname{div} v_{h,L} d\mathbf{x} \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \int_T (f - \nabla p_h) w_{h,B} d\mathbf{x} \right) \underbrace{\left( \int_T |\nabla w_{h,B}|^2 d\mathbf{x} \right)^{-1}}_{:= \alpha_{1,T}^{-1}} \left( \int_T \nabla q_h w_{h,B} d\mathbf{x} \right) , \end{aligned}$$

da  $\nabla p_h \equiv \text{const}$  auf  $T \in \mathcal{T}_h$  folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_R} q_h \operatorname{div} v_{h,L} d\mathbf{x} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_{1,T}^{-1} \left( \int_T f w_{h,B} d\mathbf{x} \right) \left( \int_T |\nabla q_h w_{h,B}|^2 d\mathbf{x} \right) \\ &\quad - \left( \int_T \nabla p_h w_{h,B} d\mathbf{x} \right) \left( \int_T \nabla q_h w_{h,B} d\mathbf{x} \right) \\ \Leftrightarrow \langle q_h, \operatorname{div} v_{h,L} \rangle_{\Omega_R} &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_{2,T} \int_T \nabla p_h \nabla q_h d\mathbf{x} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \int_T f w_{h,B} d\mathbf{x} \right) \left( \int_T \nabla q_h w_{h,B} d\mathbf{x} \right) \alpha_1^{-1} \end{aligned}$$

mit

$$\alpha_{2,T} = \left( \int_T (w_{h,T})^2 d\mathbf{x} \right) \cdot |T|^{-1} \cdot \alpha_1^{-1} . \quad (2.9)$$

Setzt man nun noch  $f = f_T$  konstant in  $T$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle q_n, \operatorname{div} v_{h,L} \rangle_{\Omega_R} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_{2,T} \langle \nabla p_h, \nabla q_h \rangle_T \\ = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_{2,T} \langle f, \nabla q_h \rangle_T \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Damit lautet die schwache Formulierung:

Gesucht ist das Paar  $(v_h, p_h) \in \tilde{X}_h \times M_h$  für das gilt:

$$\begin{aligned} \langle \nabla v_{h,L}, \nabla w_{h,L} \rangle_{\Omega_R} + \langle v_{h,L}, w_{h,L} \rangle_{\Gamma_{ABC}, \psi_h} - \langle p_h, \operatorname{div} w_{h,L} \rangle_{\Omega_R} \quad \forall w_{h,L} \in \tilde{X}_h \\ = \langle f, w_{h,L} \rangle_{\Omega_R} + \langle h, w_{h,L} \rangle_{\Gamma_{ABC}, \psi_h} \\ \langle q_h, \operatorname{div} v_{h,L} \rangle_{\Omega_R} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_2 \langle \nabla p_h, \nabla q_h \rangle_T = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_2 \langle f, \nabla q_h \rangle_{\Omega_R} \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung ist es erforderlich, daß die Babuska-Brezzi Bedingung erfüllt ist. Dazu führen wir eine Bilinearform auf  $X_h \times M_h$  ein. Es sei  $\mathcal{L}([v_h, p_h], [w_h, q_h]) = l_h([v_h, q_h])$ , mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([v_h, p_h], [w_h, q_h]) := & \int_{\Omega_R} \nabla v_h : \nabla w_h \, d\mathbf{x} + 2(T - R) \int_{\Gamma_{ABC}} \frac{v_h w_h}{\psi_h} \, do \\ & - \int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} v_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_R} q_h \operatorname{div} v_h \, d\mathbf{x} \\ & + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_{2,T} \int_T \nabla p_h \nabla q_h \, d\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2.11}$$

und

$$l_h([w_h, q_h]) := \int_{\Omega_R} f \cdot w_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{ABC}} h \cdot w_h \, do + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_{2,T} \int_T f \cdot \nabla w_h \, d\mathbf{x}, \tag{2.12}$$

dabei ist  $c_{T,h}^1 := \alpha_2$ .

Man beachte hierbei, daß  $\alpha_2$  proportional  $h_T^2$  ist, da gilt: Mit  $w_{h,B} \in B^3$

$$\alpha_2 = \left( \int_T w_{h,B} \, d\mathbf{x} \right)^2 \left( \int_T |\nabla w_{h,B}|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{-1} |T|^1.$$

Für den ersten Integrand gilt

$$\begin{aligned} \int_T w_{h,B} \, d\mathbf{x} &= |\det B_{3,T}| \int_E (w_{h,B} \circ F_T^{-1})(\zeta) \, d\zeta \\ &= |\det B_{3,T}| c_1 = c_2 |T|; \end{aligned}$$

der zweite Integranden führt auf

$$\begin{aligned}
\int_T |\nabla w_{h,B}|^2 d\mathbf{x} &= |\det B_{3,T}| \int_E |\nabla w_{h,B} \circ F_T^{-1}|^2 d\zeta \\
&= |\det B_{3,T}| \int_E |(B_{3,T})^{-1} \nabla \tilde{w}_{h,B}|^2 d\zeta \\
&\leq |T| 6 |B_{T,3}^{-1}|^2 c_2 = c_3 |T| \rho_T^2.
\end{aligned}$$

Wir können für  $\alpha_{2,T}$  auch schreiben

$$c_{T,h} = \rho_T h_T^2.$$

Desweiteren definieren wir auf  $X_h \times M_h$  die folgende Norm

$$\| [v_h, p_h] \|_h := \{ |v_h|_1^2 + \|p_h\|_0^2 + \|p_h\|_{1,h}^2 \}^{1/2}.$$

Die diskrete Formulierung des Problems lautet:

Finde  $[v_h, p_h] \in X_h \times M_h$  derart, daß

$$\mathcal{L}_h([v_h, p_h], [w_h, q_h]) = l_h([w_h, q_h]) \quad \forall [w_h, q_h] \in X_h \times Q_h.$$

Um die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu ziegen ist es erforderlich, daß die Bilinearform  $\mathcal{L}$  die Babuska-Brezzi-Bedingung erfüllt. Dazu diene der folgende Satz.

**Satz 2.1.** Es existiert eine Konstante  $\rho_0 > 0$ , die nur von der Regularitätskonstanten  $c_T$  der Tetraedierung  $\mathcal{T}$  und  $\Omega_R$  abhängt, so daß für alle Parameter  $\rho = (\rho_T, \rho_F, \rho_E)$  mit  $\rho_{max} \leq \rho_0$  und  $\rho_{min} > 0$  gilt:

$\exists \beta > 0 : \beta = \beta(\rho_{min})$  derart, das gilt

$$\inf_{[v_h, p_h] \in X_h \times M_h \setminus \{0\}} \sup_{[w_h, q_h] \in X_h \times M_h \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{L}([v_h, p_h], [w_h, q_h])}{\| [v_h, p_h] \|_h \| [w_h, q_h] \|_h} \geq \beta.$$

**Beweis** Wir zeigen zunächst eine Abschätzung für  $\mathcal{L}_h([v_h, p_h], [v_h, p_h])$ . Dazu nehmen wir ein beliebiges Paar  $[v_h, p_h] \in X_h \times M_h$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}([v_h, p_h], [v_h, p_h]) &= \int_{\Omega_R} \nabla v_h : \nabla v_h d\mathbf{x} + 2(T - R) \int_{\Gamma_{ABC}} \frac{v_h v_h}{\psi_h} do \\
&\quad - \int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} v_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} v_h d\mathbf{x} \\
&\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \rho_T h_T^2 \int_T \nabla p_h \nabla p_h d\mathbf{x} \\
&\geq |v_h|_1^2 + c_{\Gamma_{ABC}} |v_h|_1^2 + \rho_{min} \|\nabla p_h\|_0^2 + \|p_h\|_0^2 - \|p_h\|_0^2 \\
&> \rho_{min} \{ \| [v_h, p_h] \|_h^2 - \|p_h\|_0^2 \}
\end{aligned}$$

mit  $1 + c_{\Gamma_{ABC}} > \rho_{min}$ .

Man beachte, daß  $c_{\Gamma_{ABC}} = c_{\Gamma_{ABC}}(T, R)$  abhängig von  $T$  und  $R$  aus Kapitel 1 ist. Es sei  $q_0^h \in M_h$  beliebig, aber fest gewählt. Da  $q_0^h$  auch ein Element von  $L^2(\Omega_R)$  ist, existiert ein  $w^0 \in X$  [Ba20] derart, daß

$$\operatorname{div} w^0 = -q_0^h \quad \text{mit} \quad \int_{\Omega_R} q_0^h d\mathbf{x} \neq 0 \quad \text{und} \quad |w^0|_1 \leq c \|q_h\|_0.$$

Für jedes  $q_h \in L^2(\Omega_R)$  erhalten wir

$$q_h = q_h^* + \alpha q_0^h.$$

Dabei sei  $\alpha$  bestimmt durch

$$\alpha := \frac{\int_{\Omega_R} q_h d\mathbf{x}}{\int_{\Omega_R} q_0^h d\mathbf{x}}.$$

Daher ist  $q_h^* \in L_0^2(\Omega_R) = \{q \in L^2(\Omega_R) \text{ mit } \int_{\Omega_R} q d\mathbf{x} = 0\}$  und es gilt  $\|q_h^*\| \leq c_4 \|q_h\|$ . Mit [GiRa86, Cor.2.4, p.24] existiert ein  $w^* \in X$ , derart daß

$$\operatorname{div} w^* = -q_h^* \quad \text{und} \quad |w^*|_1 \leq c_5 \|q_h^*\|_0$$

gilt. Setzen wir

$$w = w^* + \alpha w^0,$$

so folgt für die Divergenz von  $w_q$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} w &= \operatorname{div} (w^* + \alpha w^0) \\ &= \operatorname{div} w^* + \alpha \operatorname{div} w^0 \\ &= q_h^* + \alpha q_0^0 = -q_h \end{aligned} \tag{2.13}$$

mit folgender Abschätzung

$$|w|_1 \leq |w^*|_1 + |\alpha| |w^0|_1 \leq c_6 \|q_h\|_0.$$

Wir betrachten die Bilinearform

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h([v_h, p_h], [w_h, 0]) &= \int_{\Omega_R} \nabla v_h : \nabla w_h d\mathbf{x} \\ &\quad + 2(T - R) \int_{\Gamma_{ABC}} \frac{v_h w_h}{\psi_h} do \\ &\quad - \int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} w_h d\mathbf{x} \\ &\geq -c_7 |v_h|_1 |w_h|_1 - \int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} (w_h - w + w) d\mathbf{x} \\ &= -c_7 |v_h|_1 |w_h|_1 - \int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} (w) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} (w - w_h) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Machen wir nun Gebrauch von (2.13), so folgt für die obige Abschätzung

$$\mathcal{L}_h([v_h, p_h], [w_h, 0]) \geq -c_7 |v_h|_1 |w_h|_1 + \|p_h\|_0^2 + \int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} (w - w_h) d\mathbf{x} .$$

Es bleibt also noch der Term

$$\int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} (w - w_h) d\mathbf{x} .$$

Betrachten wir das Integral Elementweise und integrieren partiell, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} (w - w_h) d\mathbf{x} &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T p_h \operatorname{div} (w - w_h) d\mathbf{x} \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla p_h (w - w_h) d\mathbf{x} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F p_h (w - w_h) n_F do . \end{aligned}$$

Da wir eine stetige Druckapproximation haben, verschwinden alle Integrale über innere Flächen und wir erhalten (siehe [Ve94], [Ve96])

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} (w - w_h) d\mathbf{x} \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla p_h (w - w_h) d\mathbf{x} + \sum_{F \in \mathcal{F}_{N,h}} \int_F p_h (w - w_h) n_F do \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\nabla p_h\|_0 \|w - w_h\|_0 h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_{N,h}} h_F^{+1/2} \|p_h\|_{0,F} \|w - w_h\|_{0,F} h_F^{-1/2} \\ &\leq \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\nabla p_h\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|w - w_h\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \sum_{F \in \mathcal{F}_{N,h}} h_F \|p_h\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_F h_F^{-1} \|w - w_h\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|p_h\|_{1,h} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|w - w_h\|_0^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} h_F^{-1} \|w - w_h\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_8 \|p_h\|_1 |w|_1 \leq c_9 \|p_h\|_{1,h} \|p_h\|_0 . \end{aligned}$$

Setzt man das Ergebnis dieser Abschätzung für  $\mathcal{L}_h([v_h, p_h], [w_h, 0])$  ein, so erhält man

$$\mathcal{L}_h([v_h, p_h], [w_h, 0]) \geq \|p_h\|_0^2 - c_7 |v_h|_1 |w_h|_1 - c_9 \|p_h\|_{1,h} \|p_h\|_0$$

$$\begin{aligned}
&\geq \|p_h\|_0^2 - c_{11}|v_h|_1^2 - c_{12}\|p_h\|_{1,h}^2 \\
&\geq \|p_h\|_0^2 - c_{13}(|v_h|_1^2 + \|p_h\|_{1,h}^2) \\
&= \|p_h\|_0^2 + \|p_h\|_0^2 c_{13} - (\|p_h\|_0^2 + |v_h|_1^2 + \|p_h\|_{1,h}^2) c_{13} \\
&= (1 + c_{13})\|p_h\|_0^2 - c_{13} \quad \text{für } |||[v_h, p_h]||| \equiv 1.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{[v_h, p_h] \\ \in X_h \times M_h \setminus \{0\}}} \frac{\mathcal{L}_h([v_h, p_h], [w_h, q_n])}{|||[v_h, q_h]|||_h} \\
&\geq \max \left\{ \frac{\mathcal{L}_h([v_h, p_h], [v_h, p_n])}{|||[v_h, p_h]|||_h}, \frac{\mathcal{L}_h([v_h, p_h], [w_h, 0])}{|||[w_h, 0]|||_h} \right\} \\
&\geq \max \{ \rho_{min}(1 - \|p_h\|_0^2), c_{14}\|p_h\|_0 - c_{13}\|p_h\|_0^{-1} \} \\
&\geq \min_{y \in \mathbb{R}^+} \{ \rho_{min}(1 - y^2), c_{14}y - c_{13}y^{-1} \} =: \beta > 0.
\end{aligned}$$

■

Wir zeigen nun die Fehlerabschätzung für  $|u^R - u_h^R|$ .

**Satz 2.2.** Die Bezeichnungen und Voraussetzungen seien ebenso wie in Satz (2.1). Es bezeichne  $[v, p] \in X \times M$  die eindeutige schwache Lösung der Stokes-Gleichung (2.7) und  $[v_h, p_h] \in X_h \times M_h$  die eindeutige Lösung von (2.10). Es sei  $v \in (H^2(\Omega_R))^3$  und  $p \in H^1(\Omega_R)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
i) &|||[v^R - v_h^R, p^R - p_h^R]|||_h \\
&\leq c \inf_{\substack{[w_h, q_h] \in \\ X_h \times M_h}} \left\{ |||[v^R - w_h, p^R - q_h]|||_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\Delta(v^R - w_h)\|^2 \right\}^{1/2} \\
ii) &|||[v^R - v_h^R, p - p_h]|||_h \leq ch \{ |u|_2 + |p|_1 \}.
\end{aligned}$$

**Beweis** Es sei  $[v_h^R, q_h^R] \in X_h \times M_h$  beliebig. Mit der Dreiecksungleichung folgt für  $||| \cdot |||$

$$|||[v^R - v_h^R, p^R - p_h^R]|||_h \leq |||[v^R - w_h^R, p - q_h]||| + |||[v^R - w_h, q_h - p_h^R]|||.$$

Mit Satz 2.1 folgt

$$|||[v^R - w_h, p_h^R - q_h]|||_h \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\substack{[s_h, r_h] \in \\ X_h \times M_h}} \frac{\mathcal{L}_h([v^R - w_h, p_h^R - q_h], [s_h, r_h])}{|||[s_h, r_h]|||_h}.$$

Betrachten wir ein beliebiges Element  $[s_h, r_h] \in X_h \times M_h$  mit  $\| [s_h, r_h] \|_h \equiv 1$ . Aufgrund der Bilinearität von  $\mathcal{L}_h$  ist

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_h([v_h^R - w_h, p_h^R - q_h], [s_h, r_h]) \\ &= \mathcal{L}_h([v^R - w_h, p^R - q_h], [s_h, r_h]) + \mathcal{L}_h([v_h^R - v^R, p_h^R - q_h], [s_h, r_h]). \end{aligned}$$

Bei der ersten Definition von  $\mathcal{L}$  haben wir die Terme  $\Delta u_h$  sowie die Sprünge  $[p_h]$  über die Tetraederflächen ignoriert, da beide Terme verschwinden. Da  $p \in H^1(\Omega_R)$ , verschwindet der Term auch jetzt, jedoch bleibt  $-\Delta u$  erhalten. D.h. wir ergänzen (2.11) um  $-\Delta u_h$  wie folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([v_h, p_h], [w_h, q_h]) &:= \int_{\Omega_R} \nabla v_h : \nabla w_h \, d\mathbf{x} + 2(T - R) \int_{\Gamma_{ABC}} \frac{v_h w_h}{\psi_h} \, do \\ &\quad - \int_{\Omega_R} p_h \operatorname{div} v_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_R} q_h \operatorname{div} v_h \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_{2,T} \int_T [-\Delta u_h + \nabla p_h] \nabla q_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Für  $v^R$  hingegen bedeutet dies

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_h([v_h^R - v, p_h^R - p], [s_h, r_h]) \\ &= \mathcal{L}_h([v_h^R, p_h^R], [s_h, r_h]) - \mathcal{L}_h([v^R, p^R], [s_h, r_h]) \\ &= l_h([s_h, r_h]) - \mathcal{L}_h([v, p], [s_h, r_h]) \\ &= \int_T f^R \cdot s_h \, d\mathbf{x} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \rho_T h_T^2 \int_T f \cdot \nabla r_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{ABC}} h^R \cdot s_h \, do \\ &\quad - \int_{\Omega_R} \nabla v^R : \nabla s_h \, d\mathbf{x} - 2(T - R) \int_{\Gamma_{ABC}} \psi^{-1} v^R s_h \, do \\ &\quad + \int_{\Omega_R} p \operatorname{div} s_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_R} r_h \operatorname{div} v \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \rho_T h_T^2 \int_T (-\Delta v^R + \nabla_p^R) \cdot \nabla r_h \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_R} f^R \cdot s_h \, d\mathbf{x} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \rho_T h_T^2 \int_T f^R \cdot \nabla r_h \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega_R} f^R \cdot s_h \, d\mathbf{x} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \rho_T h_T^2 \int_T f^R \cdot \nabla r_h \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Für den verbleibenden Ausdruck gilt die Abschätzung

$$\mathcal{L}_h([v^R - w_h, p^R - q_h], [s_h, r_h])$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Omega_R} \nabla(v^R - w_h) : \nabla s_h d\mathbf{x} + 2(T - R) \int_{\Gamma_{ABC}} \psi^{-1}(v^R - w_h) s_h do \\
&\quad - \int_{\Omega_R} (p^R - q_h) \operatorname{div} s_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega_R} r_h \operatorname{div} (v^R - w_h) d\mathbf{x} \\
&\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \rho_T h_T^2 \int_T [-\Delta(v^R - w_h) + \nabla(p^R - q_h)] \nabla r_h d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Regel von L'Hospital für das Integral über

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_h([v^R w_h, p^R - q_h], [s_h, r_h]) \\
&\leq \|\nabla(v^R - w_h)\|_0 \|\nabla s_h\|_0 + \|p^R - q_h\|_0 \|\operatorname{div} s_h\|_0 \\
&\quad + \|r_h\|_0 \|\operatorname{div} (v^R - w_h)\|_0 + \|C_h\|_{max} \|v^R - w_h\|_{\Gamma_{ABC}} \|s_h\|_{\Gamma_{ABC}} \\
&\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \rho_T h_T^2 \left( \|\Delta(v^R - w_h)\|_{0,T} + \|\nabla(p^R - q_h)\|_{0,T} \right) \|\nabla r_h\|_{0,T} \\
&\leq |v^R - w_h|_1 \|s_h\|_1 + c_1 \|p^R - q_h\|_0 |s_h|_1 + c_2 \|r_h\|_0 |v^R - w_h|_1 \\
&\quad + \|C_h\|_{max} c_3 |v^R - w_h|_1 |s_h|_1 + |p^R - q_h|_{1,h} \|\nabla r_h\| \\
&\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \rho_T h_T^2 \left( \|\Delta(v^R - w_h)\|_{0,T} \|\nabla r_h\| \right) \\
&\leq c_4 |v^R - w_h|_1 |s_h|_1 + c_2 |v^R - w_h|_1 \|r_h\|_0 + c_1 \|p^R - q_h\|_0 |s_h|_1 \\
&\quad + |p^R - q_h|_{1,h} |r_h|_{1,h} + V(v^R - w_h, r_h) \\
&= |v^R - w_h|_1 (c_4 |s_h|_1 + c_2 \|r_h\|_0) + c_1 \|p^R - q_h\|_0 |s_h|_1 \\
&\quad + |p^R - q_h|_{1,h} |r_h|_{1,h} + V \\
&\leq c(|v^R - w_h|_1^2 + \|p^R - q_h\|_0^2 + |p^R - q_h|_{1,h}^2 + V^2) \|[s_h, r_h]\| .
\end{aligned}$$

Abschätzung ii) folgt unmittelbar mit den Aussagen aus 2.2. ■

## 2.4 Herleitung der linearen Gleichungssysteme

Um jeden Fall abzudecken, nehmen wir an, daß ein Rand von  $\partial\Omega_R$  ein inhomogener Dirichletrand  $\Gamma_D$  sei. Das inhomogene Problem wird wieder homogen gemacht, indem wir eine Funktion wie folgt definieren:  $\mathbf{w} := \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ , wobei

$\mathbf{v}_0 \in (H^1)^3$  und identisch mit  $\mathbf{v}$  am Rand  $\Gamma_D$  ist. Mit  $g = 0$  setzen wir

$$-\nu\Delta(\mathbf{w} + \mathbf{v}_0) + \nabla p = \mathbf{f} \quad (2.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = -\operatorname{div} \mathbf{v}_0 \quad (2.15)$$

$$M(w, p) = \mathbf{h}. \quad (2.16)$$

Nun multiplizieren wir 2.14 mit  $\boldsymbol{\varphi} \in \tilde{X}_h$  und 2.15 mit  $\phi \in Q_h$  und setzen die Randbedingung

$$M(\mathbf{w}, p) = \partial_n \mathbf{w} - \mathbf{I} p n + 2(T - R)\psi^{-1} \mathbf{w}$$

ein. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \nu \langle \nabla \mathbf{w}, \nabla \boldsymbol{\varphi} \rangle_\Omega - \langle p, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \rangle_\Omega &= \nu \int_{\Gamma_{ABC}} \left( \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{w} - \mathbf{I} p n \right) \boldsymbol{\varphi} \, do \\ &= \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_\Omega - \nu \langle \nabla \mathbf{v}_0, \nabla \boldsymbol{\varphi} \rangle_\Omega \end{aligned}$$

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{w}, \phi \rangle_\Omega = -\langle \operatorname{div} \mathbf{v}_0, \phi \rangle_\Omega .$$

Mit 2.16 folgt

$$\begin{aligned} \nu \langle \nabla \mathbf{w}, \nabla \boldsymbol{\varphi} \rangle_\Omega + \nu \int_{\Gamma_{ABC}} \frac{\mathbf{w} \boldsymbol{\varphi}}{\psi} \, do - \langle p, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \rangle_\Omega \\ = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_\Omega - \nu \langle \nabla \mathbf{v}_0, \nabla \boldsymbol{\varphi} \rangle_\Omega + \nu \int_{\Gamma_{ABC}} \mathbf{h} \boldsymbol{\varphi} \, do . \end{aligned}$$

Da die Geschwindigkeit aus den sogenannten normalen Knoten und den Bubbleknoten besteht, zerlegen wir  $w$  wie gehabt

$$w = w_N + w_B .$$

Dabei bezeichne  $w_N$  die Lösung auf den Gitterknoten ohne Bubbleknoten und  $w_B$  die Lösung auf den Bubbleknoten. Wir erhalten dann die folgende Darstellung

$$\begin{aligned} \nu \langle \nabla \mathbf{w}_N, \nabla \boldsymbol{\varphi}_N \rangle_\Omega + 2(T - R)\nu \int_{\Gamma_{ABC}} \frac{w_N \boldsymbol{\varphi}}{\psi} \, do - \langle p, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle_\Omega \\ = \langle \mathbf{f}_N, \boldsymbol{\varphi}_N \rangle_\Omega - \nu \langle \nabla \mathbf{v}_{0N}, \nabla \boldsymbol{\varphi}_N \rangle_\Omega + \nu \int_{\Gamma_{ABC}} h_N \boldsymbol{\varphi}_N \, do \quad (2.17) \end{aligned}$$

$$\nu \langle \nabla \mathbf{w}_B, \nabla \boldsymbol{\varphi}_B \rangle_\Omega - \langle p, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_B \rangle_\Omega = \langle \mathbf{f}_B, \boldsymbol{\varphi}_B \rangle_\Omega - \nu \langle \nabla \mathbf{v}_{0B}, \nabla \boldsymbol{\varphi}_B \rangle_\Omega \quad (2.18)$$

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{w}_N, \phi \rangle_\Omega + \langle \operatorname{div} \mathbf{w}_B, \phi \rangle_\Omega = -\langle \operatorname{div} \mathbf{v}_{0N}, \phi \rangle_\Omega - \langle \operatorname{div} \mathbf{v}_{0B}, \phi \rangle_\Omega . \quad (2.19)$$

Um die Implementation zu erleichtern, schreiben wir von nun an die Gleichungen als Summe über alle Elemente. Dazu benutzen wir die Finite Element Approximation für jede Funktion in der Art

$$w_{N|\tau}^k := \sum_{i=1}^4 w_{N,i}^{h,k} \varphi^k(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad w_B^k = w_B^{h,K} \varphi_B^k(\mathbf{x}),$$

wobei  $k = 1, 2, 3$  die Raumkomponenten und  $h$  die Finite Approximation kennzeichnet. Unter Ausnutzung statischer Kondensation, bzw. der Petrov-Galerkin Stabilisierung und mit Hilfe partieller Integration erhalten wir durch Summieren über  $\sum_{\tau \in \mathcal{T}}$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^4 \left\{ \nu w_{N,i}^{h,k} \langle \nabla \varphi_{N,i}^k, \nabla \varphi_{N,j}^k \rangle_{\tau} - p_i \langle \psi_i, \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_{N,j}^k \rangle_{\tau} \right\} \\ & + 2(T - R) \sum_{i=1}^3 u_{N,i}^{hn} \frac{|F|^3}{3} \sum_{l=1}^3 (\zeta(m_E)) \\ & = \langle f_N^k, \varphi_{N,j}^k \rangle_{\tau} - \nu \sum_{i=1}^4 v_{0,N,i}^{h,k} \langle \nabla \varphi_{N,i}^k, \nabla \varphi_{N,j}^k \rangle_{\tau} \\ & + \int_{\Gamma_{ABC}} h^k \varphi_{N,j}^k \, do =: \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^4 \left\{ \sum_{k=1}^3 w_{N,i}^{h,k} \langle \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_{N,i}^k, \phi_j \rangle_{\tau} - \alpha_{\tau} p_i \langle \nabla \phi_i, \nabla \phi_j \rangle_{\tau} \right\} \\ & = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^3 v_{0,N,i}^{h,k} \langle \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_{N,i}^k, \phi_j \rangle_{\tau} \\ & + v_{0,B,\tau}^{h,k} (\nu - \langle \boldsymbol{\varphi}_{B,\tau}, \nabla \psi_j \rangle_{\tau}) - \alpha_{\tau} \langle \mathbf{f}_B, \nabla \phi_j \rangle_{\tau} =: g, \end{aligned} \quad (2.21)$$

wobei  $\alpha_{\tau}$  durch

$$\alpha_{\tau} := \frac{\langle \mathbf{1}, \boldsymbol{\varphi}_B \rangle_{\tau}^2}{\nu |\tau| \| \nabla \boldsymbol{\varphi}_B \|_{2,\tau}^2}$$

gegeben ist und  $m_E$  die Kantenmittelwerte von  $\zeta := \varphi_{N_i} \varphi_j \psi_n^{-1}$  sind.

Die Matrizen  $A, B, B^t$  und  $C$  des zugehörigen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ g \end{pmatrix}$$

ergeben sich durch Summation über alle Tetraederelemente wie folgt:

$$\begin{aligned} A_k &\equiv \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^4 \nu \langle \nabla \varphi_{N,i}^k, \nabla \varphi_{N,j}^k \rangle_{\tau} + 2(T-R) \sum_{i=1}^3 \frac{|F|^3}{3} \sum_{l=1}^3 (\zeta(m_E)) \\ B_k &\equiv \sum_{\tau \in \mathcal{T}} = -\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_{N,i}^k, \psi_j \rangle_{\tau}, \quad C \equiv \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \alpha_{\tau} \langle \nabla \psi_i, \nabla \psi_j \rangle_{\tau}. \end{aligned}$$

Die Matrix  $A$  besteht dabei aus einer Diagonalmatrix der Matrizen  $A_k$  und  $B$  bzw.  $B^t$  aus dem Vektor der Matrizen  $B_k$  für  $k = 1, 2, 3$ . Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß diese Formulierung direkt als Implementation genutzt werden kann.

### 3 Numerische Simulation

In diesem Kapitel wollen wir die parallele Entwicklungsumgebung PadFEM vorstellen und anhand einiger Beispiele deren Funktionsumfang sowie die Handhabung erklären. Anschließend beschreiben wir kurz die in dieser Arbeit angewandten Lösungsmethoden und geben einen Überblick über bereits existierende Verfahren. Für die numerische Simulation definieren wir im dritten Abschnitt einige Modellprobleme, die die Güte des Programmpakets zeigen sollen. Die im Anschluß daran folgenden Testrechnungen werden die theoretischen Ergebnisse aus Kapitel 1 und 2 unterstreichen.

#### 3.1 PadFEM

PadFEM - “Parallel adaptive Finite Elemente Methoden” ist eine parallele adaptive Programmierumgebung, welche innerhalb des Sonderforschungsbereiches 376 -Massive Parallelität- Teilprojekt A3 - Balancierung dynamischer Netze - entwickelt wird.

Der Schwerpunkt von PadFEM ist die Unterstützung von 2D bzw. 3D Finite Element Simulationen auf unstrukturierten Netzen für Parallelsysteme mit verteiltem Speicher. Basis des gesamten Systems ist die parallele Datenstruktur, auf die wir später noch etwas genauer eingehen werden. Auf ihr liegt eine Klasse von Modulen, die folgende Themen umfasst:

- Adaption für zweidimensionale Netze (3D in Vorbereitung)
- 2D interne Netzgenerierung und die Möglichkeit, extern erzeugte 3D Netze zu lesen
- Integrierte Lastverteilungsalgorithmen und Partitionierungstools, die im SFB 376 Teilprojekt A3 entwickelt werden, sowie Anbindung an externe Tools wie Party [Par]
- Eine Klasse von Standardlösern (paralleles Konjugierte Gradienten Verfahren) und (sequentielle Multigrid-Methoden)

Wir werden genauer auf einige dieser Themen eingehen. Des Weiteren wird der Entwurf von Algorithmen durch eine sequentielle Version mit graphischer Benutzeroberfläche und virtueller Parallelität angeboten.

Zur Visualisierung von berechneten, zweidimensionalen Lösungen oder zur graphischen Kontrolle von entworfenen Programmen und deren Funktion dient das Modul XFEM. Für den dreidimensionalen Fall, bzw. die dreidimensionale Darstellung existiert eine POV-Ray-Schnittstelle [Pov] zur Datenvisualisierung.

## 3.2 Der Aufbau von PadFEM

Wir werden nun die Datenstruktur etwas genauer betrachten und die einzelnen Module von PadFEM vorstellen. Für eine detaillierte Beschreibung sei hier auf folgende Arbeiten verwiesen [Hu98, Reh98, Schl98, He99, Fu98] und auf die über Internet zugängliche Dokumentation.

Wie oben bereits erwähnt, besteht PadFEM aus einer parallelen Datenstruktur und einer Klasse von Modulen. Diese Module dienen zur Behandlung von Teilproblemen, wie sie bei der Simulation von Strömungsvorgängen oder bei strukturmechanischen Problemen, z. B. Rißausbreitungsvorgängen, vorkommen. Das Programmpaket stellt für diesen Aufgabenbereich eine Klasse von Basisobjekten zur Verfügung, wie sie in Abbildung 10 beschrieben sind.

Die Zielsetzung der Datenstruktur sei in den folgenden Stichpunkten zusammen-

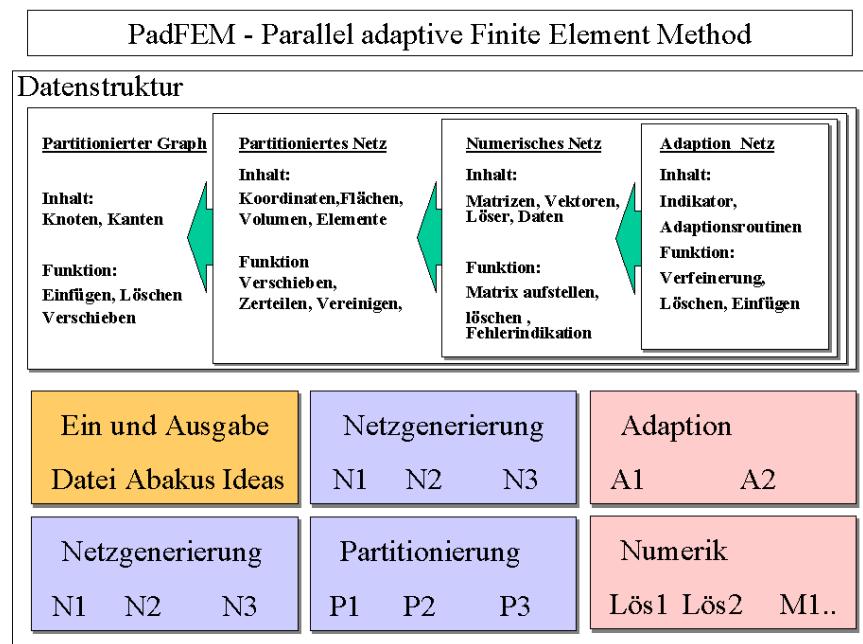


Abbildung 10: PadFEM - Strukturatur

gefaßt:

- Einfache Benutzbarkeit, d.h keine hohen Einarbeitungszeiten;
- Basisfunktionalitäten (Integrierte Kommunikationsroutinen)
- Effizienz, (Flexibilität vs. Geschwindigkeit)
- Wiederverwendbarkeit

- Unterstützung sowohl paralleler als auch sequentieller Implementationen

In vielen Fällen ist die Komplexität eines solchen Programmpekts, welches nicht mit dem Hintergrund "Vermarktung" entwickelt wird, für den Benutzer undurchschaubar und erschwert so die Einarbeitung. Da die Simulation von Strömungsvorgängen, bzw. Rißausbreitungsvorgängen eine Vielzahl von Nebenbedingungen hat, sollte das Paket nicht nur von Experten benutzbar sein, sondern auch von Studenten oder Anwendern problemverwandter Fachbereiche. Da aber parallele Programmierung nicht "mal eben..." erlernt werden kann, sollten dem reinen Anwender diese Schwierigkeiten erspart bleiben. Oftmals wird nur ein schneller Löser benötigt.

Ein unerwünschter Nebeneffekt einer solchen flexiblen Datenstruktur ist leider ein Effizienzverlust. Daher sind solche Pakete immer unter zwei Gesichtspunkten zu betrachten. Zum einen die Flexibilität und zum anderen die Effizienz. Ein weiter wesentlicher Faktor ist die Wiederverwendbarkeit bereits existierender Module. Da im allgemeinen jedes Problem aus vielen Teilproblemen besteht, sollte die Möglichkeit geschaffen werden, auf Module, die bereits entwickelt worden sind, zuzugreifen, da verschiedenste Probleme meist gemeinsame Teilprobleme besitzen. Ein Beispiel sei das hier betrachtete Stokes Problem. Ein Teilproblem beim numerischen Lösen dieser Gleichung ist das Lösen der Laplace-Gleichung. Es sollte also möglich sein, einen Stokes Löser aus einem Modul 'Laplace' und einigen eigenen Routinen zusammenzustellen. Der Vorteil einer sequentiellen Version mit virtueller Parallelität wird später noch eingehend betrachtet. Wir wollen an dieser Stelle einige Eigenschaften ausführlicher vorstellen.

Die Knoten eines Finite-Element-Netzes können in beliebiger Dimension gehalten werden, d.h. Variablen können in Abhängigkeit des mathematischen Problems definiert werden. Betrachten wir hierzu das Beispiel der Stokes-Gleichung, so unterscheidet man die Raumdimension, also zwei- oder dreidimensional, von der Problemdimension, welche in 2D die Ordnung 3 und entsprechend in 3D die Ordnung 4 besitzt. Der Lösungsvektor  $U$  am Knoten  $k$  hat also folgende Darstellung

$$\text{node } [k] \rightarrow U[j],$$

wobei

$$j \quad \text{von} \quad 1, \dots, n+1$$

läuft und  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n = 2, 3$  die Raumdimension bezeichnet. Formal haben wir  $n+1$  Gleichungen in  $n$  Dimensionen,

$$\begin{aligned} -\Delta v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p &= f_i, \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} v_i &= g_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U[j] &= v_j \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{und} \\ U[j] &= p \quad j = 4. \end{aligned}$$

Weiterhin existieren Klassen für Kanten, die zwei Knoten miteinander verbinden, sowie Flächen und Volumen. Zur Verwaltung des Netzes und dessen Partitionierung dienen ebenfalls spezielle Klassen, die wiederum multidimensional ausgelegt sind. D.h. die Datenstruktur ist in der Lage, zweidimensionale und dreidimensionale Geometrien zu halten.

Für die Parallelisierung stehen Kommunikationsklassen, welche auf dem Message Passing Interface (MPI) aufsetzen, zur Verfügung. Diese Methoden sind sehr transparent gehalten, so daß der Benutzer in keinem direkten Kontakt mit den eigentlichen parallelen Routinen kommt, wie wir später sehen werden.

Wie in der Einleitung erwähnt, ist die Datenstruktur auch sequentiell benutzbar, so daß parallele Programme mit moderaten Netzen am Arbeitsplatz entwickelt werden können. Unter dem Stichpunkt "virtuelle Parallelität" versteht man die sequentielle Abarbeitung der parallelen Prozesse. Wobei in PadFEM kein wirklicher Unterschied in der Programmierung besteht.

Zur Anschauung diene folgendes Beispiel: Zu berechnen sei das Skalarprodukt eines Vektors  $x$  im Rechengebiet  $\Omega$ , welches nun aber in  $p$ -Partitionen zerlegt ist.

Die Rechenvorschrift wäre also diese:

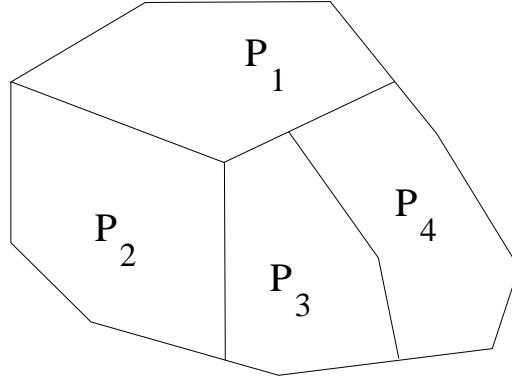


Abbildung 11: Zerlegung in  $p$  Partitionen

$S$  enthält  $\langle x, x \rangle_{\Omega}$   
 $\forall P_i \in \Omega$  berechne  $s_i := \langle x, x \rangle_{p_i}$   
 sammel alle  $s_i$   
 und addiere sie in  $S$   
 teile allen Partitionen das Ergebnis mit.

Die zugehörige Implementation sehe dann wie folgt aus

```

 $s = 0$ 
seq: for  $p = 1 \dots N$  [forall Partitionen]
par:   for  $i = 1 \dots \# \text{Knoten}$ 
seq:      $sl = sl + (\text{node}[i] \rightarrow x)^2$ 
par:    $s = s + sl$ 
par:  $s = \text{Sum}(sl)$  Kommunikation

```

Nach Prüfung des implementierten Verfahrens kann ein Algorithmus ohne wesentlichen Aufwand auf einem parallelen System mit Standard MPI-Unterstützung portiert werden, um somit große numerische Probleme behandeln zu können.

Betrachten wir nun die Datenhaltung innerhalb der Datenstruktur. Sie basiert im Gegensatz zur hierarchischen Datenhaltung (Dünnbesetzte-Matrix-Implementation siehe Abbildung 12) auf dem Prinzip vollständiger Referenzen. Während im

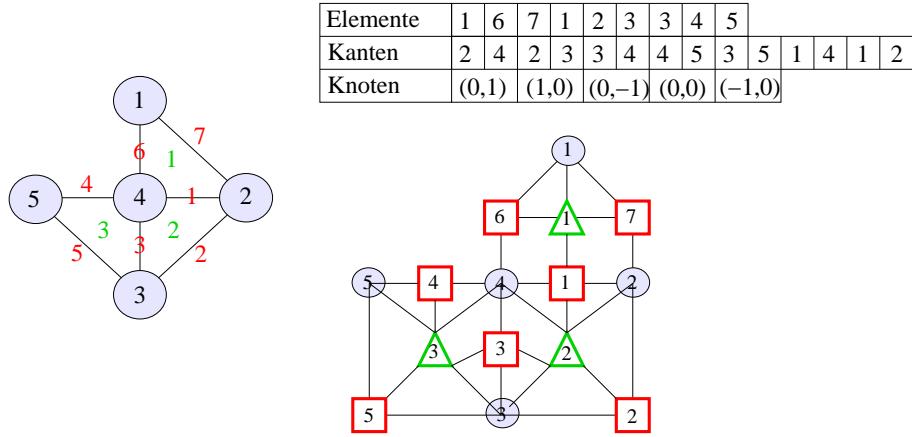


Abbildung 12: Speichertechniken

Fall des hierarchischen Ansatzes die Elemente, Knoten und Kanten in Listen mit Indexzugriff gehalten werden und somit einen festen Grad besitzen, handelt es sich bei vollständigen Referenzen um verzeigerte Strukturen. Die Vorteile eines hierarchischen Ansatzes liegen in der Effizienz der parallelen Implementierung von schnellen Lösungsmethoden für große lineare Gleichungssysteme. Als Nachteil hingegen stellt sich die hohe Inflexibilität bei adaptiven Rechnungen heraus. Während im hierarchischen Ansatz die komplette Matrix in jedem Adoptions-schritt neu aufgestellt werden muß, können in den verzeigerten Strukturen die Anteile der zur Verfeinerung markierten Elemente heraus gerechnet werden und die neu eingefügten Elemente, d.h. deren Matrixeinträge, einfach hinein gerechnet werden.

Der klare Nachteil dieser Referenzmethode ist der höhere Speicherbedarf sowie die komplexere Parallelisierung. Dies bezieht sich jedoch nur auf die untere

Kommunikationsschicht. Dem Anwender bleiben diese Schwierigkeiten verborgen.

Die Objekt-Orientierte Entwicklung garantiert eine freie Erweiterbarkeit der Datenstruktur durch den Benutzer und die Kombinierbarkeit mit bereits existierenden Modulen. Wo und wie Module einzufügen sind, zeigt die Darstellung der Vererbungshierarchie.

Einige wesentliche Eigenschaften sind, daß Finite Element Flächen bzw. Knoten

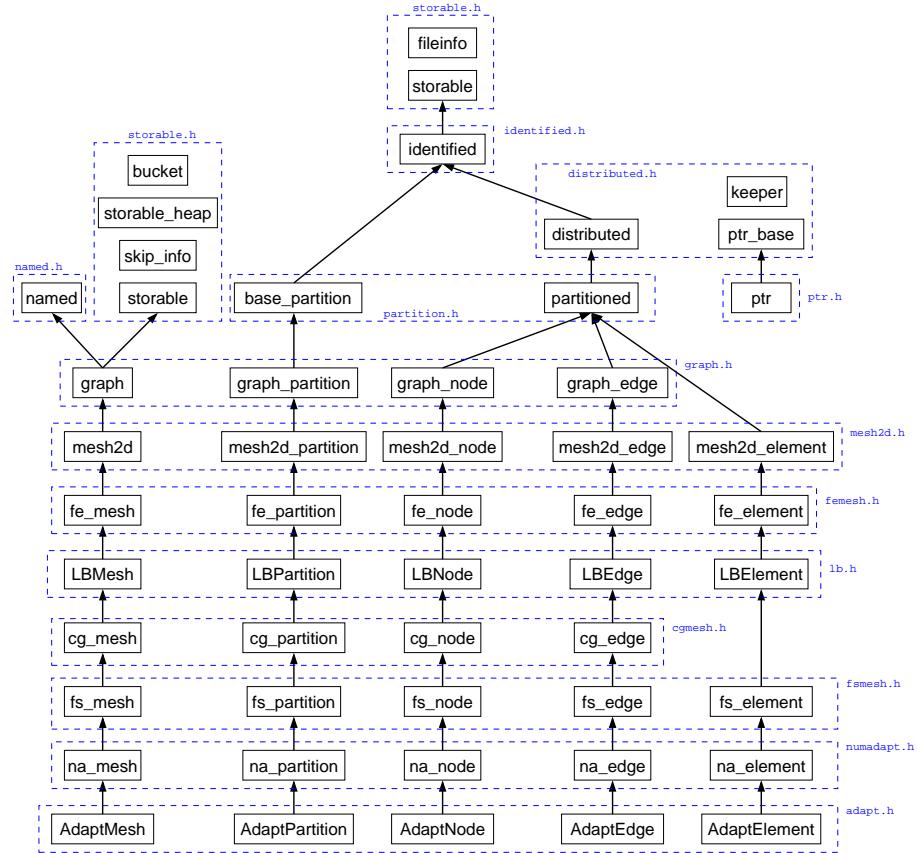


Abbildung 13: Klassenbaum

Informationen über die Koordinaten, die Materialeigenschaften sowie Nachbarschaftsbeziehungen enthalten. Die Klasse Löser erweitert die Knoten und Kanten um Matrixeinträge oder Hilfsvektoren. Das Modul Fehlerschätzer erweitert Flächen, bzw. Volumen um Fehlerskalen etc. Besonders im Fall der Adaption zeichnet sich die Datenstruktur durch ihr eigenständiges Verwalten von neu eingefügten Objekten aus, d.h. die Referenzen sowie Zugehörigkeiten werden automatisch erzeugt oder gelöscht. Dies schließt das Kopieren, Löschen und Verschieben von Objekten im Fall der Lastverteilung und Partitionierung ein. Zusammengefaßt bietet die Datenstruktur eine Basis für die einfache Implementierung von sequentiellen oder parallelen Algorithmen.

### 3.3 Netzgenerierung und Schnittstellen

Die Netzgenerierung in PadFEM umfaßt die grafische Java Umgebung FEMit2D. Der Editor erlaubt eine einfache Konstruktion von zweidimensionalen Gebieten. Die zu betrachtenden Gebiete können als Polygonzüge mit Hilfe der Maus oder mit direkter Koordinateneingabe erzeugt werden. Eine detaillierte Beschreibung des Editors findet man unter [SFB]. Wir wollen hier nur die wesentlichen Merkmale des Editors aufzeigen. Möglich ist das Zeichnen von Linien, Rechtecken, Winkeln und offenen Splines. Des weiteren ist das Gruppieren, Rotieren, Spiegeln und Zoomen von Objekten integriert. Nachdem das Polygon, bzw. die Polygone eingegeben worden sind, erfolgt die Zuweisung von Rand-Informationen wie z.B. Dirichlet oder Neumann-Randbedingungen. Man hat hier die Möglichkeit Funktionen als Zeichenkette zu definieren. Die Funktionen werden im Programm ge-parst und ersetzt. Sind alle Eigenschaften des Randpolygons editiert, kann mittels eines Quadtree - basierten Netzgenerators [NeuDi96, NeuHu98, Neu98, Neu98a] ein Netz erzeugt werden. Auch hier sind mehrere Möglichkeiten der Netzgenerierung gegeben.

Zur dreidimensionalen Netzgenerierung wurde auf das kommerzielle Tool

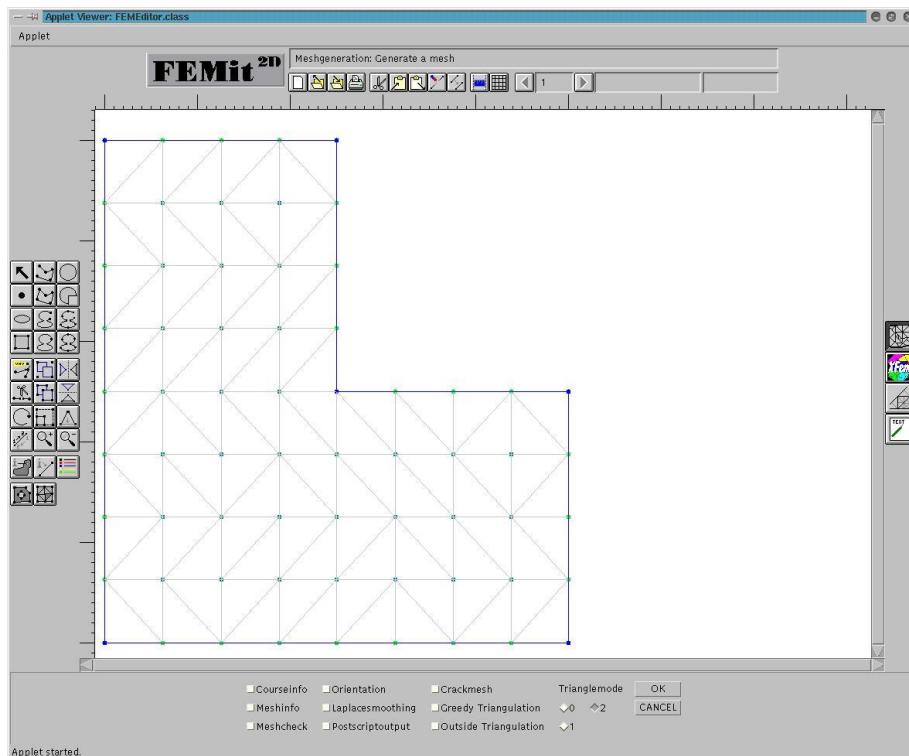


Abbildung 14: FEMit2D

“IDEAS“ zurückgegriffen, welches freundlicherweise vom Fachbereich 10 der Universität Paderborn zur Verfügung gestellt wurde.

PadFEM benutzt wie viele andere Tools sein eigenes File-Format, daher gibt es einen Konverter, der es ermöglicht, Fremdformate zu lesen. Dazu gehören Abacus, Ideas und Matlab.

### 3.4 Lastverteilung und Partitionierung

Die unter PadFEM verwendeten Lastverteilungsmethoden werden ausführlich in [Diek98, MonDi97, MonDiPr96] beschrieben. Die Partitionierungstools sind in [Schl98, Par] untersucht worden. Der Benutzer hat die Möglichkeit, durch einen einfachen Funktionsaufruf nach einem Adaptionsschritt die Lastverteilungsroutine aufzurufen (siehe Löser). Die Partitionierung findet beim Einlesen des Netzes in PadFEM oder direkt nach der Erstellung des Netzes statt. Auch dies erfordert vom Benutzer lediglich ein simples Knopfdrücken in FEMit oder einen Parameteraufruf beim Start von PadFEM.

### 3.5 Adaption und Fehlerindikator

Zur Verfeinerung von strukturierten und unstrukturierten Netzen in 2D und 3D existieren eine Vielzahl von Algorithmen siehe [Mi89, NeuHu98, Ri84]. Die in PadFEM zur Adaption enthaltenen Algorithmen basieren auf einem von Verführt [Ve96] entwickelten Fehlerschätzer. Eine für die Lameé - Gleichung entwickelte Fehlerindikation steht ebenfalls zur Verfügung. Detailierte Beschreibungen der Adaptionstechniken können in [Fu98] nachgelesen werden.

### 3.6 Löser

Hier wollen wir die einfache Handhabung der fast dimensions-unabhängigen Implementierung mathematischer Probleme anhand eines Modellbeispiels vorstellen. Betrachten wir dazu die folgende Problembeschreibung:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u|_{\Gamma} &= g \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.1}$$

$\Omega$  sei hier ein polygonal berandetes Gebiet, welches mit FEMit2D erzeugt wurde.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, die Lösung von (3.1) zu berechnen. Sind in FEMit2D alle Randbedingungen gesetzt, kann ein Netz erzeugt werden. Durch anschließendes Ausführen der XFEM-Funktion wird eine Rechnung gestartet. Nachdem das zugehörige Gleichungssystem gelöst wurde, kann die Lösung in XFEM betrachtet werden, siehe Abbildung 18.

Die zweite Möglichkeit ist der Entwurf einer eigenen Routine für (3.1). Setze dazu

$$w := u - u_0, \quad u_0 \in H^1(\Omega) \quad \text{mit } u_0|_{\Gamma} = g.$$

Dann erhält man durch einfaches Einsetzen

$$\begin{aligned} -\Delta(w + u_0) &= -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \\ w &= 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die zugehörige schwache Formulierung lautet nun in Elementarschreibweise:

Finde  $w \in H_0^1$  derart, daß

$$\sum_{\tau \in T} \langle \nabla w, \nabla \varphi \rangle_\tau = \langle f, \varphi \rangle_\tau - \langle \nabla u_0, \nabla \varphi \rangle , \quad \varphi \in H_0^1 .$$

$T$  sei hierbei eine zulässige Triangulierung von  $\Omega$  (siehe Kapitel 2). Geht man nun zum endlichen dimensionalen Raum über, so erhalten wir auf jedem Element  $\tau \in T$

$$\sum_{i=1}^3 w_i^h \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle_\tau = \langle f, \varphi_j \rangle_\tau - \sum_{i=1}^3 u_{0,i}^h \langle \nabla \tilde{\varphi}_i, \nabla \varphi_j \rangle_\tau .$$

Man beachte, daß die Ansatzfunktion für  $u_0$  aus  $H^1$  stammt. Wir erhalten also folgendes lineares Gleichungssystem

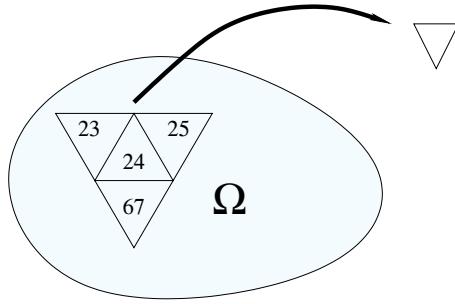
$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}) = \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle_\Omega \\ b &= (b_j) = \langle f, \varphi_j \rangle_\Omega \\ g &= (g_j) = u_{0,n}^j \langle \nabla \tilde{\varphi}_i, \nabla \varphi_j \rangle_\Omega \\ Aw &= b + g . \end{aligned}$$

Im folgenden beschreiben wir den Implementationsweg.

Die Datei-Schnittstelle liest ein Netz im nachstehenden Format ein:

```
// FEMEditor store()
classes: ( 5
("mesh" "name partition_count types conditions
           problem_count functions ")
("partition" "global_id node_count edge_count
           element_count ")
("node" "global_id coordinates edges elements boundary
           conditions values rightside ")
("edge" "global_id nodes elements type boundary
           conditions values rightside ")
("element" "global_id nodes edges elements boundary
           material thick ")
)
```

Während des Lese-Prozesses wird die Matrix aufgestellt. Abbildung 15 soll veranschaulichen, daß die Implementierung des Problems der schwachen Formulierung sehr nahe kommt.



Für alle Elemente:

1. Für alle Knoten  $i=1..4$  berechne  
Anteil der Hauptdiagonalen :

```
for (i=1;i<=4; i++){
    n[i]->matA+=DeltaInt(i,i);
    n[i]->R+=Intf(i,i);
    :
}
```

2. Für alle Kanten an Knoten  $n[i]$  berechne die Nebendiagonaleinträge:

```
for (j=1;j<=n[i]->edgesize();j++) {
    n[i]->edge[j]>matA+=DeltaInt(i,j);
    n[i]->R+=Intf(i,i);
    :
}
```

Abbildung 15: Berechnung der Matrixeinträge

Man erkennt also, daß die Syntax der mathematischen Formulierung übernommen werden kann. Als Standardlöser in PadFEM dient ein konjugiertes Gradienten Verfahren. Die folgenden Beispiele zeigen die unwesentlichen Unterschiede der sequentiellen Version gegenüber der parallelen Version.

CG-Algorithmus:

Wähle  $x_0, r^0 = Ax^0 - b ; p^1 = -r^0 ; \delta_0 := \langle r^0, r^0 \rangle$   
 Falls  $\delta_0 < \epsilon \Rightarrow$  STOP (Residuum schon klein genug)  
 solange  $\delta_1 > \epsilon \{$

$h^k$	$:= Ap^{k-1}$
$\tau_k$	$:= \delta_0 / \langle p^{k-1}, h^k \rangle$
$x^k$	$:= x^{k-1} + \tau_k p^k$
$r^k$	$:= r^{k-1} + \tau_k h^k$
$\delta_1$	$:= \langle r^k, r^k \rangle$
$\alpha_{k-1}$	$:= \delta_1 / \delta_0$
$p^k$	$:= -r^k + \alpha_{k-1} p^{k-1}$

}

END.

Dazu betrachten wir das gewöhnliche CG-Verfahren [Hes, Hes2]. Die für eine parallele Implementierung wichtigen Programmteile sind

- i) die Matrix-Vektor Multiplikation,
- ii) sowie die Berechnung der Skalarprodukte.

Die unten angegebenen Programmausschnitte beschreiben diese Berechnungen. Die in den Boxen gekennzeichneten Programmzeilen sind notwendig für die parallele Version. Dabei bedeutet **update(P\_VAL)**, daß das Feld (**P\_VAL**) auf den Kommunikationsrändern (den sogenannten Überlappungsranden) abgeglichen wird.

D.h. bevor eine neue Matrix-Vektor Multiplikation durchgeführt werden kann,

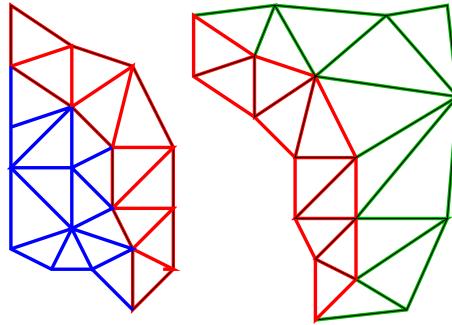


Abbildung 16: Kommunikationsrand

muß sicher gestellt werden, daß alle Prozessoren die aktuellen Daten des Vektors (**P\_VAL**) erhalten haben. In Abbildung 16 beschreiben Blau und Grün jeweils eine Partition und Rot den zugehörigen Überlappungsrand.

Matrix - Vektor-Multiplikation:

```
update(P_VAL);

for (i=0;i<nNodes;i++)  if (!data[i]->value->is_fixed()) {
    Wn = 0;
    Wn+= data[i]->value->matrix(0,0)*data[i]
                    ->value>column(P_VAL,0);
    for (ed=0;ed<data[i]->edges.size();ed++)
        if (!data[i]->edges[ed]->is_fixed())
            Wn+= data[i]->edges[ed]->matrix(0,0)
                    *data[i]->nodes[ed]->column(P_VAL,0);
    data[i]->value->column(W_VAL, 0) = Wn;}
```

Das Skalarprodukt berechnet sich wie schon eingangs beschrieben. Es wird in  $\alpha_1$  das lokale Skalarprodukt berechnet und anschließend die Summe aller  $\alpha_i$  in  $\alpha$  gebildet. Das Ergebnis wird nach der Berechnung an alle Prozessoren (Partitionen) verschickt.

### Skalarprodukt:

```
Alpha1=0.0;j=0;  
for (i=0;i<nNodes;i++)  
    if (!data[i]->value->is_fixed())  
        for (j=0;j<size();j++)  
            Alpha1 +=data[i]->value>column(R_VAL, j)  
            *data[i]->value>column(R_VAL, j);
```

```
Alpha=sum(Alpha1);
```

Wir geben nun noch ein Beispiel der zweidimensionalen Netz- und Graphikausgabe. Es sei erwähnt, daß bei der graphischen Ausgabe die Möglichkeit besteht, einzelne Elemente per Maus zu selektieren, um so sämtliche gespeicherten Informationen am Element zu erfahren. Dies ist gerade beim Algorithmenentwurf eine entscheidende Hilfe. Die Darstellung der Lösung kann mit Netz und ohne Netz erfolgen, weiterhin kann zwischen einzelnen Komponenten umgeschaltet werden. D.h. bei Navier - Stokes oder Stokes Rechnungen kann die Geschwindigkeit und der Druck am Netz visualisiert werden. Ist man im Bereich der Strömungssimulation an Lastverteilungsmethoden im Fall adaptiver Rechnungen interessiert, so kann man in XFEM die Aufteilung der Partitionen sowie die Partitionsränder betrachten. Man kann also die Auswirkung verschiedener Lastverteilungsmethoden während einer Rechnung beobachten. Interessant sind hier zum Beispiel die Länge eines Partitionsrandes und der Aspekt-Ratio der einzelnen Partitionen. Diese sind besonders bei der Entwicklung von gebietsabhängigen Präkonditionern

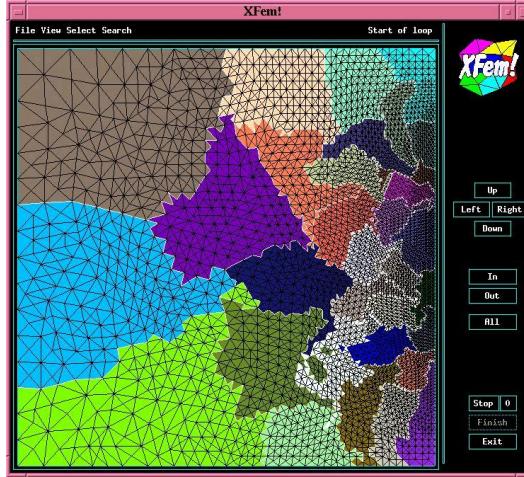


Abbildung 17: Netz -und Graphikausgabe in 2D

Verfahren von entscheidender Bedeutung [BlBoDr95]. Die Lösung einer Rechnung wird visualisiert, indem man mittels der Lösungsdaten an den Knoten eines Dreiecks eine Min-Max-Skala von Farbwerten bildet. Mit Hilfe dieser Farbwerte wird nun das Dreieck eingefärbt.

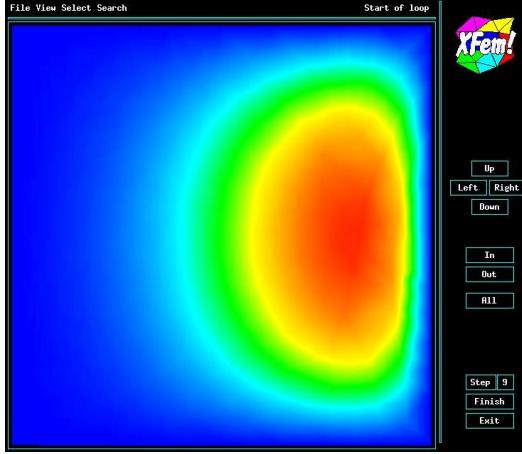


Abbildung 18: Netz -und Grafikausgabe in 2D

Kommen wir nun zu den dreidimensionalen Simulationen.

### 3.7 Lösung des 3D Stokes-Systems

In diesem Teil wollen wir uns mit der Lösung der unter Abschnitt 2.4 erhaltenen Gleichungssysteme befassen. Zur Lösung solcher Systeme findet man eine Vielzahl von Lösungsstrategien, angefangen vom klassischen Uzawa Algorithmus bis hin zu modernen Multigrid oder Präkonditionierten CG - Verfahren [BaWe82, BrSa97, ElSi96, GoLo96, GoWa99, Kla98, Kla98a, LaQu86, NoSi98, NoSi98, SaSa98, SiWa94, Ve84]. Das resultierende Gleichungssystem hat folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_1^t \\ 0 & A_2 & 0 & B_2^t \\ 0 & 0 & A_3 & B_3^t \\ B_1 & B_2 & B_3 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ g \end{pmatrix}$$

Es sei  $n$  die Anzahl der Geschwindigkeitsunbekannten und  $m$  die des Druckes, dann ist

$$A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}, B_i^t \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, C \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Die Schur- Komplement Formulierung liefert für dieses System

$$A\mathbf{v} + B^t p = \mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{v} = A^{-1}(\mathbf{f} - B^t p).$$

Durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} B\mathbf{v} + Cp &= g \Leftrightarrow \\ B(A^{-1}(\mathbf{f} - B^t p)) + Cp &= g \Leftrightarrow \\ -BA^{-1}B^t p + Cp &= g - BA^{-1}\mathbf{f}. \end{aligned}$$

Mit  $D := (C - BA^{-1}B^t)$  und  $h = g - BA^{-1}\mathbf{f}$  erhalten wir ein Gleichungssystem für  $p$

$$Dp = h. \quad (3.3)$$

Zur Lösung von (2.20),(2.21) verwenden wir das klassische CG-Verfahren in der folgenden Form:

Start:

$$\begin{aligned} p &:= p^0 = 0 \in M_h, \\ \mathbf{r} &:= Dp - h = -h \\ \mathbf{q} &:= -r \\ \delta_0 &= \langle r, r \rangle \\ \text{Falls } (\delta_0 > \varepsilon) \{ & \\ h &= Dq \Leftrightarrow \\ \mathbf{d} &= B^t q \Leftrightarrow d_i = B_i^t q \\ \mathbf{v} &= A^{-1}\mathbf{d} \Leftrightarrow v_i = A_i^{-1}d_i \\ w_1 &= B\mathbf{v} \Leftrightarrow w_1 = \sum_{i=1}^3 B_i v_i \\ w_2 &= Cq \\ h &= w_2 - w_1 \\ \tau &= \delta_0 / \langle q, h \rangle \\ p &= p + \tau q \\ r &= r - \tau h \\ \delta_1 &= \langle r, r \rangle \\ \alpha &= \delta_1 / \delta_0 \\ \delta_0 &= \delta_1 \\ q &= -r + \alpha q \\ \text{END} \} & \end{aligned}$$

### 3.8 Modellproblem I

In den folgenden Abschnitten betrachten wir einige Testmodelle. In dem ersten Modell betrachten wir einen unendlich langen Zylinder mit Radius  $r = 1$ . Dabei sei  $\Omega_R$  das endliche Rechnengebiet der Länge  $L = 10$ .

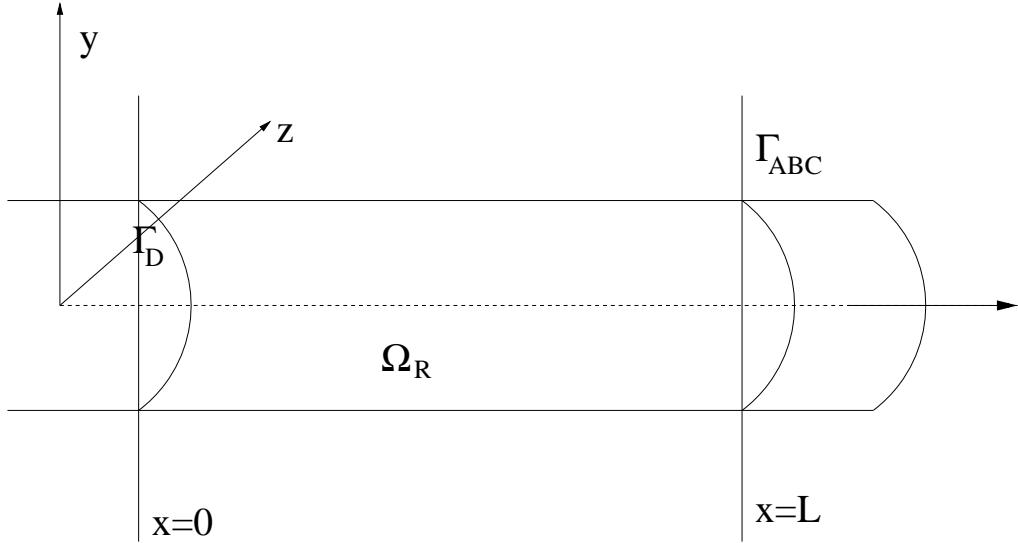


Abbildung 19: Modell I: Zylinder

Dazu betrachten wir das folgende Problem

$$\begin{aligned}-\Delta v + \nabla p &= 0 \\ \operatorname{div} v &= 0\end{aligned}$$

$$I : \quad v|_{\Gamma_D} = g_1, \quad v|_{\Gamma_{ABC}} = g_2$$

$$II : \quad v|_{\Gamma_D} = g_1, \quad \partial_n v|_{\Gamma_{ABC}} = 0$$

$$III : \quad v|_{\Gamma_D} = g_1, \quad M(v, p)|_{\Gamma_{ABC}} = h.$$

Wir werden zu vorgegebenen  $v, p$  die Lösungen der einzelnen Probleme mit unterschiedlichen Schrittweiten und Kanallängen vergleichen. Es sei

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) & = & \frac{(R^2 - r^2)}{2} = \frac{(R^2 - (y^2 + z^2))}{2} \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

daraus folg für den Druck  $p$  mit

$$-\Delta v_1(x, y, z) = -\frac{1}{2}(0 - 2 - 2) = 2 =: -\nabla p, \quad p = -2x.$$

Damit ist die homogene Stokes Gleichung mit

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3 = 0$$

erfüllt.

Das Gebiet  $\Omega_R$  wurde unter IDEAS mit zwei Schrittweiten  $h1=0.1$  und  $h2=0.5$  diskretisiert. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über Knoten und Elementanzahl zur jeweiligen Schrittweite:

h	Knoten	Elemente	Kanten
h1	3866	16713	22565
h2	20409	97162	125441

Wie eingangs erwähnt, wird die Strömung mit Povray visualisiert (siehe Abbildung 20). Im Schwerpunkt eines jeden Elements wird der Geschwindigkeitsvektor durch Pfeile dargestellt. Die Pfeile werden aus einem Zylinder und einem Kegel zusammengesetzt und anhand einer Min-Max-Skala der Geschwindigkeiten eingefärbt. Der Geschwindigkeitsverlauf ist durch Blau( $=0$ ) und maximale Geschwindigkeit Rot( $=\operatorname{Max}(v)$ ) gegeben. Abbildung 20 zeigt den Ausströmrund und das dort auftretende Poiseuille - Profil.

Die folgende Tabelle zeigt den Fehler zur exakten Lösung in der Max-Norm sowie in der  $L^2$ -Norm: Dabei bedeutet D Dirichlet-Randbedingung, N Neumann-Randbedingung und ABC die künstliche Randbedingung. Mit (UX,UY,UZ) bezeichnen wir die Lösungen der Geschwindigkeit in den jeweiligen Raumrichtungen und mit P den Druck.

h2	D UX	N UX	ABC-UX	D UY	N UY	ABC-UY
Max-Norm	1.46e-02	1.65e-02	1.46e-02	3.07e-03	7.59e-03	3.45e-03
$L^2$ -Norm	1.52e-01	3.97e-01	1.54e-01	4.04e-02	1.11e-01	4.05e-02
h2	D UZ	N UZ	ABC-UZ	D P	N P	ABC-P
Max-Norm	3.39e-03	9.18e-03	3.41e-03	3.37e-01	1.80e+00	2.523-01
$L^2$ -Norm	4.61e-02	1.16e-01	4.61e-02	3.87e+00	1.18e+01	2.41e+00
h1	D UX	N UX	ABC-UX	D UY	N UY	ABC-UY
Max-Norm	8.51e-03	1.46e-02	8.49e-03	1.67e-03	3.05e-03	1.67e-03
$L^2$ -Norm	1.53e-01	1.53e-01	1.53e-01	3.16e-02	4.02e-02	3.16e-02
h1	D UZ	N UZ	ABC-UZ	D P	N P	ABC-P
Max-Norm	1.71e-03	3.37e-03	1.71e-03	2.91e-01	2.85e-01	2.49e-01
$L^2$ -Norm	3.55e-02	4.59e-02	3.53e-02	5.41e+00	2.44e+00	3.33e+00

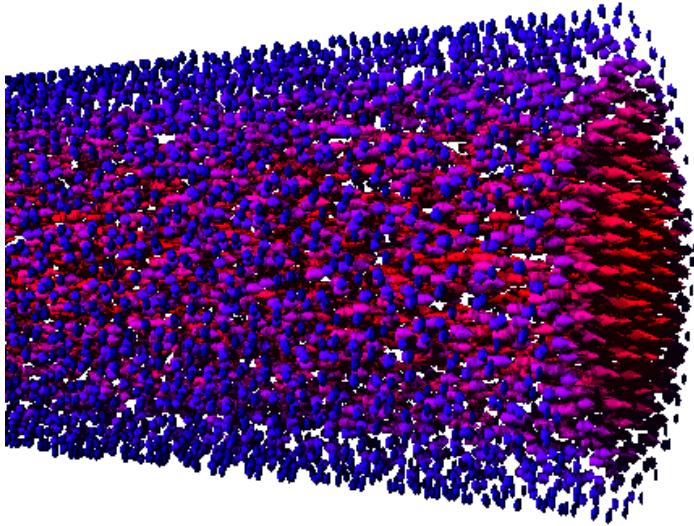


Abbildung 20: Visualisierung der Strömung durch den Zylinder mit Blick auf den Ausströmrand

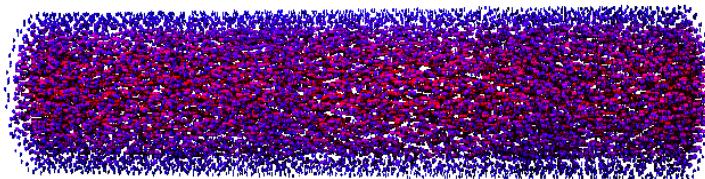


Abbildung 21: Gesamtansicht des Zylinders

In den Abbildungen 22 bis Abbildung 24 ist ein Vergleich zwischen dem exakten Druck und dem berechneten Druck zu sehen.

Im Dirichlet Fall ist der Druck, wie zu erwarten war, nur um eine Konstante verschoben.

Im Neumann Fall hingegen liegt der Druck zwar im richtigen Niveau, weist aber leichte Störungen im Ein- und Ausflußbereich auf.

Der Druck im Fall der dritten Randwertaufgabe liegt exakt auf dem tatsächlichen Druck ohne Störungen am Ein- bzw. Ausflußrand. Da der Druck als Vorgabe nur linear in x-Richtung ist stellen wir auch nur dessen Verlauf dar. Abbildung 25 soll zeigen, daß der Druck auch im Raum konstant liegt.

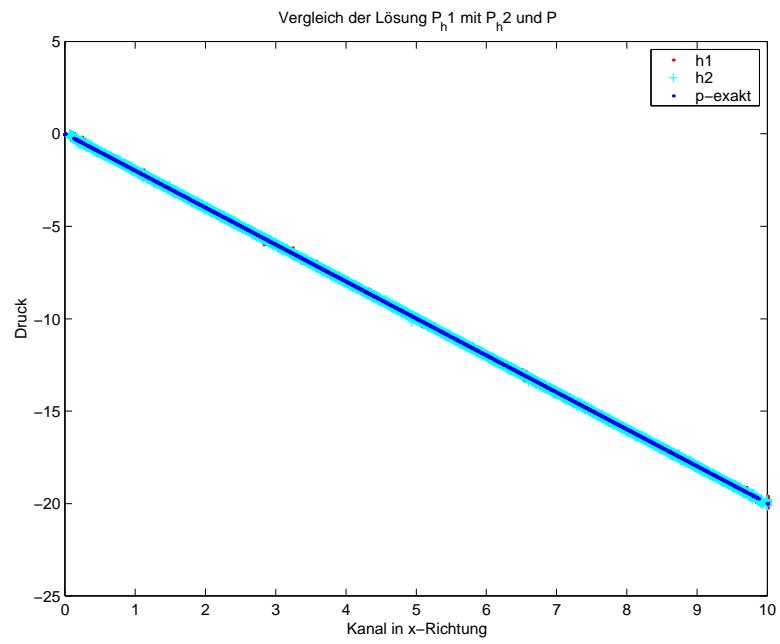


Abbildung 22: Vergleich des Druckes in der ABC-Rechnung

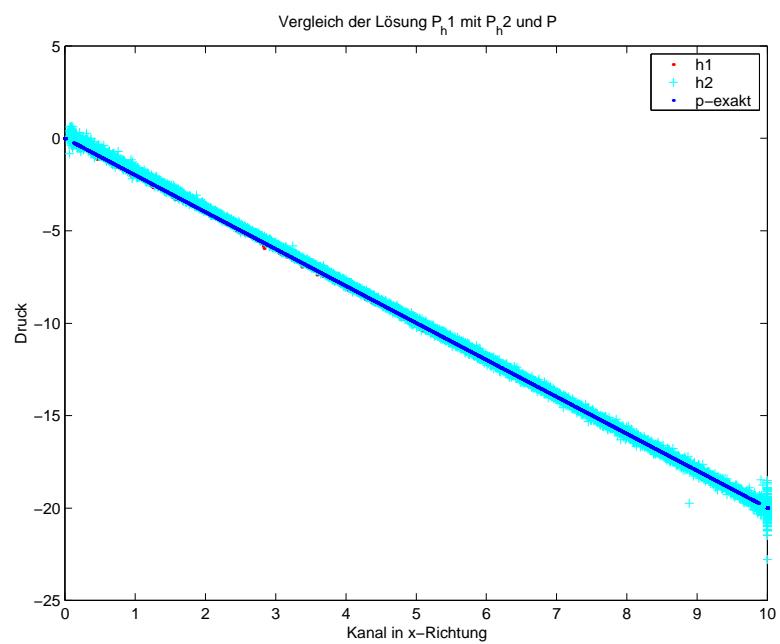


Abbildung 23: Vergleich Druck in der Neumann-Rechnung

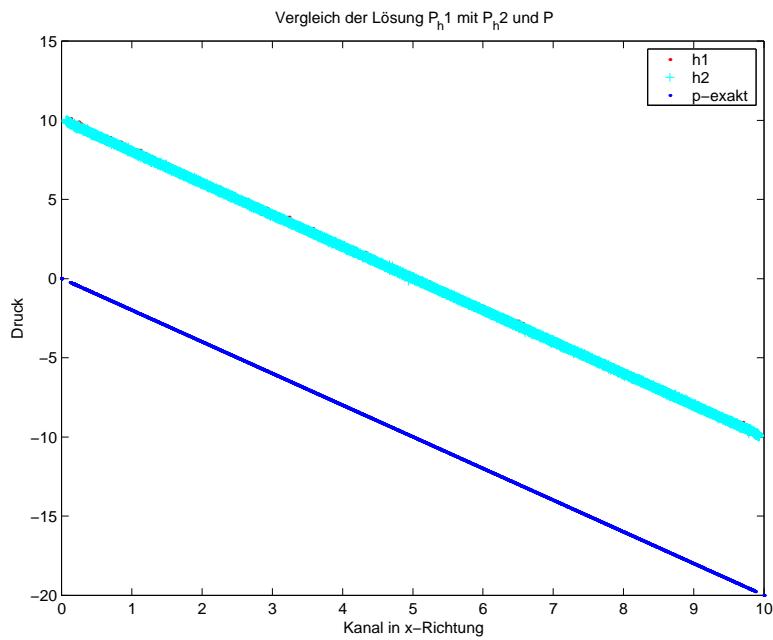


Abbildung 24: Vergleich Druck in der Dirichlet-Rechnung

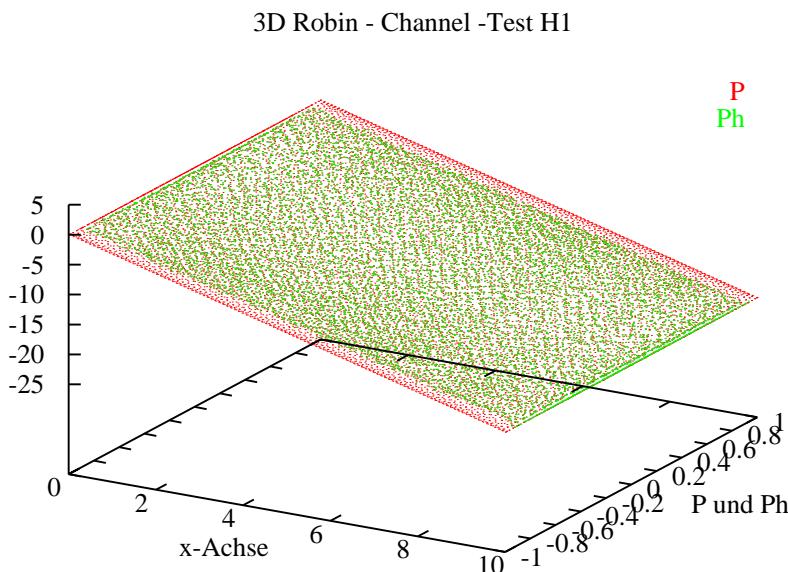


Abbildung 25: Vergleich Druck in 3D Ansicht

### 3.9 Modellproblem II

Wir betrachten ein unendlich langes Rohr mit einer Verjüngung, wie in Abbildung 26 beschrieben. Das Bild stellt den Querschnitt des Modells dar. Die reale Länge des gesamten Objekts beträgt für 3 verschiedene Testfälle  $L_1 = 110$ ,  $L_2 = 160$  und  $L_3 = 210$ . Der Radius des linken Zylinders ist  $R_2 = 6$  und der des rechten beträgt  $R_1 = 3$ . Im ersten Teil dieser numerischen Simulation werden eine Dirichlet- mit einer Neumann- und der künstlichen Robin - Randbedingung verglichen. Wir werden untersuchen, wie sich die Strömung unter der Robinrandbedingung mit verschiedenen vorgaben von  $T$  aus Kapitel 1 verhält.

Anschließend stellen wir die Ergebnisse der nun folgende Konstruktion einer Lösung nach Kapitel 1 vor.

Die Anzahl der Aus- bzw. Einströmzylinder ist hier  $J = 2$ , welche hier mit  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  bezeichnet sind. Das verbindende Teilgebiet  $\Omega_0$  ist das reduzierende Teilgebiet.

Die Netzdimensionen sind in der Tabelle angegeben, dabei bedeutet  $M_i h_i$  Modell  $i$  bei Schrittweite  $h_j$ .

	Knoten	Elemente	Kanten
$M_1 h_1$	6732	28685	39008
$M_1 h_2$	1319	4777	7003
$M_2 h_1$	10492	43845	61517
$M_2 h_2$	1920	6981	10222
$M_3 h_1$	14703	65619	87114
$M_3 h_2$	2476	8989	13173

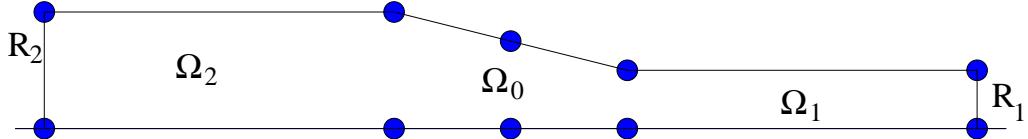


Abbildung 26: Querschnitt eines Zylinders mit Verjüngung

Um eine Aussage über die Approximationsgüte der in Kapitel 1 und 2 beschriebenen Techniken geben zu können, definieren wir nun eine Lösung auf diesem Gebiet nach folgender Darstellung

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^2 \chi_j (a_j u^{j_0} + b_j u^{j_1}) + \tilde{u}(\mathbf{x}). \quad (3.4)$$

Mit  $\chi_j$  bezeichnen wir die zugehörige Abschneidefunktion für den jeweiligen Zylinder  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ . Es bezeichne  $u^{j_0}$  die konstante Drucklösung und  $u^{j_1}$  den

Poiseuille-Fluß in  $\Omega_j$  für  $j = 1, 2$

$$u^{j_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } u^{j_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\omega}_j \Psi^j(x_1, x_2) \\ -2\bar{\omega}_j x_3 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Dabei ist  $\Psi^j(x_1, x_2)$  die in Kapitel 1 beschriebene Lösung von

$$-\Delta \Psi^j = 2 \text{ in } \omega^j \quad (3.6)$$

$$\Psi^j|_{\partial\omega^j} = 0 \text{ auf } \partial\omega^j \text{ für } j = 1, 2. \quad (3.7)$$

Hierbei bezeichne  $\omega_j$  die beiden Querschnittsflächen des linken, bzw. rechten Zylinders an einer Stelle  $T \in \mathbb{R}$ .

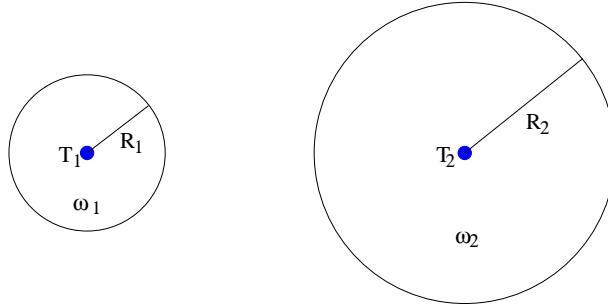


Abbildung 27: Ein- bzw. Ausflußrand  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2$

Die Lösung sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi^j &:= \frac{1}{2}(R_j^2 - (x_{2,j}^2 + x_{3,j}^2)) \\ &\stackrel{r_j^2=x_{2,j}^2+x_{3,j}^2}{=} \frac{1}{2}(R_j^2 - r_j^2), \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei  $r_j \in [0, R_j]$ ,  $R_j \in \mathbb{R}$  für  $j = 1, 2$ .

Es muß nun  $\bar{\omega}^j$  sowie eine Lösung als Vorgabe zur Verifikation bestimmt werden.

Betrachten wir dazu

$$\int_{\omega}^j \bar{\omega}^j \Psi^j(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = 1. \quad (3.9)$$

Man erhält mit Einsetzen von (3.3) in (3.4) die Gleichung

$$1 = \int_{\omega}^j \bar{\omega}^j \Psi^j d(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\omega}^j \bar{\omega}^j \frac{1}{2} (R_j^2 - (x_{1,j}^2 + x_{2,j}^2)) d(x_2, x_3) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_j} \bar{\omega}^j (R_j^2 - r_j^2) r dr \\
&= \bar{\omega}^j \pi R_j^4 / 4.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Konstante

$$\bar{\omega}^j = \frac{4}{\pi R_j^4}.$$

Setzen wir diese Konstante und die vorgegebene Lösung in (3.5) ein, so erhalten wir

$$u^{j_1} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(R_j^2 - r_j^2)/(\pi R_j^4) \\ -8x_3/(\pi R_j^4) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Wie schon in Kapitel 1 beschrieben, gilt für  $u^{j_1}$

$$-\Delta v + \nabla p = 0,$$

d.h.  $u^{j_1}$  ist eine Lösung des homogenen Stokes-Problems und erfüllt somit die Voraussetzung aus dem Kapitel 1. Es bleibt die Berechnung von  $\tilde{u}$  aus (1.1).  $\tilde{u}$  wird nun die Strömung in Teilgebiet  $\Omega_0$  repräsentieren und somit die beiden Poisseuille Strömungen aus den Teilgebieten  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  miteinander verbinden. Außerdem muß nach Kapitel 1  $\tilde{u}$  in den beiden Zylindern exponentiell mit  $x_1$  gegen  $\pm\infty$  abklingen.

Daher wählen wir die Ein- bzw. Ausflußbedingungen wie folgt

$$\tilde{\Psi}_j = 2 \frac{(R_j^2 - r_j^2)}{\pi R_j^4} \quad \text{für } j = 1, 2. \quad (3.11)$$

Um nun einen Übergang von  $\Omega_2$  zu  $\Omega_1$  zu definieren, wählen wir  $\tilde{v}$  in  $\Omega_0$  als lineare Funktion von  $\tilde{\Psi}_2$  nach  $\tilde{\Psi}_1$ .

$$\tilde{v}(\mathbf{x}) = \frac{2 \left( \frac{((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^2}{(z_2 - z_1)^2} - y^2 - z^2 \right) (z_2 - z_1)^4}{\pi ((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^4} \quad (3.12)$$

mit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \dots$

Für  $\tilde{v}$  gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(z_2) &= \tilde{\Psi}_2(x_1, x_2) \\
\tilde{v}(z_1) &= \tilde{\Psi}_1(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

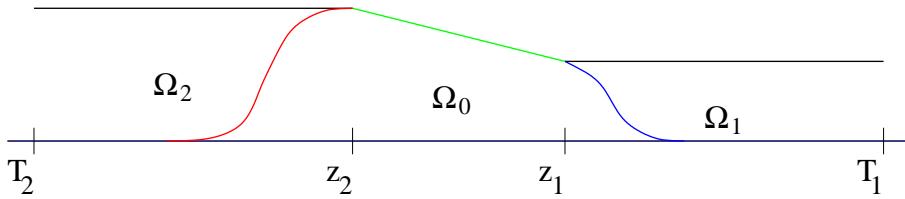


Abbildung 28: Definition von  $\tilde{u}$  in  $\Omega$

Wir bestimmen im folgenden den exponentiell abklingenden Term  $\tilde{u}$  aus (3.4)

Dazu definieren wir  $\tilde{v}$  in  $[T_j, z_j]$  für  $j = 1, 2$  wie folgt

$$\tilde{v} = \begin{cases} \Psi^j e^{x_1 - z_2} & \text{für } x_1 \in [T_2, z_2] \\ \Psi^j e^{-x_1 + z_1} & \text{für } x_1 \in [T_1, z_1] \end{cases} =: \begin{cases} \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_1 \end{cases}.$$

Der Druck wird wie die Geschwindigkeit linear in  $\Omega_0$  und exponentiell abklingend in  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  definiert, d.h mit

$$\omega_j = \frac{4}{\pi R_1^4} \quad \text{für } j = 1, 2$$

gelte

$$\tilde{p} := \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{2*(x_1(\omega^1 z_1 - \omega^2 z_2) - z_1 z_2 (\omega_1 - \omega_2))}{(z_2 - z_1)} & \text{für } \tilde{p} \text{ in } \Omega_0 \\ -2x_3 \omega_2 e^{x_1 - z_2} & \text{für } \tilde{p} \text{ in } \Omega_2 \\ -2x_3 \omega^1 e^{z_1 - x_1} & \text{für } \tilde{p} \text{ in } \Omega_1 \end{cases} \quad (3.13)$$

$\tilde{u}_1$  ergibt sich somit aus der Darstellung

$$\tilde{u}_3(\mathbf{x}) := \begin{cases} (\tilde{v}_2, u_4^{j_1}) & \text{in } [T_2, z_2] \\ (\tilde{v}, u_4^{j_1}) & \text{in } \Omega_0 \\ (\tilde{v}_1, u_4^{j_1}) & \text{in } [z_1, T_1] \end{cases} \quad (3.14)$$

und  $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, 0, 0)^t$ . Damit wäre  $\tilde{u}$  definiert und wir können die Stokes-Gleichung für das erste Modellproblem aufstellen. Setzt man nun die definierten Lösungen in die Stokes Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta v + \nabla p &= f && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} v &= g && \text{in } \Omega, \end{aligned} \quad (3.15)$$

ein, so erhält man nach Kapitel 1 mit den Konstanten  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  und  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  mit

$$\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die durch (1.1) vorgegebene Lösung in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \chi_1 u^{1_1}(\mathbf{x}) + \chi_2 u^{2_1}(\mathbf{x}) + \tilde{u}(\mathbf{x}).$$

Für  $v$  aus  $u^{1_1}$  und  $u^{2_1}$  gilt nun  $\Delta v = 0$  in  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ . Für  $\tilde{u}$  in  $\Omega_0$  gilt hingegen  $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, 0, 0)^t$

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{v}_0 &= 28 \frac{(z_2 - z_1)^2 (R_2 - R_1)^2}{\pi ((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^4} \\ &\quad + 40 \frac{\left( \frac{((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^2}{(z_2 - z_1)^2} - y^2 - z^2 \right) (z_2 - z_1)^4 (R_2 - R_1)^2}{\pi ((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^6} \\ &\quad - 8 \frac{(z_2 - z_1)^4}{\pi ((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^4} \end{aligned}$$

Es verbleiben die exponentiell abklingenden Anteile von  $\tilde{u}$ . Für diese Funktion gilt

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{v}_2 &= -\Delta \left( \tilde{\Psi}_2 e^{x-z_2} \right) = 2 \frac{e^{x-z_2} (4 - R_2^2 + y^2 + z^2)}{\pi R_2^4} \quad \text{in } \Omega_2 \\ -\Delta \tilde{v}_1 &= -\Delta \left( \tilde{\Psi}_1 e^{z_1-x} \right) = 2 \frac{e^{z_1-x} (4 - R_1^2 + y^2 + z^2)}{\pi R_1^4} \quad \text{in } \Omega_1. \end{aligned}$$

Für den Druckgradienten gilt

$$\nabla \tilde{p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{p} = \begin{cases} 8 \frac{z_1 R_2^4 - z_2 R_1^4}{\pi R_2^4 R_1^4 (z_2 - z_1)} & \text{in } \Omega_0 \\ 8 \frac{e^{z_1-x_1} (x_1 - 1)}{\pi R_1^4} & \text{in } \Omega_1 \\ -8 \frac{e^{x_1-z_2} (x_1 + 1)}{\pi R_1^4} & \text{in } \Omega_2. \end{cases}$$

Fassen wir nun die obigen Ausdrücke zusammen, so folgt für die rechten Seiten  $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2)$ :

$$\begin{aligned} f_0 &= 28 \frac{(z_2 - z_1)^2 (R_2 - R_1)^2}{\pi ((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^4} \\ &\quad - 40 \frac{\left( \frac{((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^2}{(z_2 - z_1)^2} - y^2 - z^2 \right) (z_2 - z_1)^4 (R_2 - R_1)^2}{\pi ((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^6} \\ &\quad + 8 \frac{(z_2 - z_1)^4}{\pi ((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^4} \\ &\quad + \left( -8 \frac{z_2}{\pi R_2^4} + 8 \frac{z_1}{\pi R_1^4} \right) (z_2 - z_1)^{-1} \\ f_1 &= 2 \frac{e^{z_1-x} (-R_1^2 + y^2 + z^2 + 4x)}{\pi R_1^4} \end{aligned}$$

$$f_2 = 2 \frac{e^{x-z_2} (-R_2^2 + y^2 + z^2 - 4x)}{\pi R_2^4}.$$

Für die Divergenz gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \tilde{u}_0 &= 4 \frac{(z_2 - z_1)^2 (R_2 - R_1)}{((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^3 \pi} \\ &\quad - \frac{8 \left( \frac{((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^2}{(z_2 - z_1)^2} - y^2 - z^2 \right) (z_2 - z_1)^4 (R_2 - R_1)}{\pi ((R_2 - R_1)x - R_2 z_1 + R_1 z_2)^5}, \\ \operatorname{div} \tilde{u}_1 &= 2 \frac{e^{x-z_1} (R_1^2 - y^2 - z^2)}{\pi R_1^4}, \\ \operatorname{div} \tilde{u}_2 &= 2 \frac{e^{z_2-x} (R_2^2 - y^2 - z^2)}{\pi R_2^4}.\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit auf dem “lateralen” Rand des Rohres sei  $v|_{\Gamma_D} = 0$ . Auf den Querschnittsflächen  $\Gamma_j$  für  $j = 1, 2$  definieren wir den Randoperator aus Kapitel 1

$$Mu|_{\Gamma_j} = h_j,$$

wobei hier  $h_j$  den normierten Druck an der Stelle  $T$  beschreibt. Für  $M$  gelte

$$Mu = Nu + Cv = h.$$

$N$  bezeichnet den Neumann-Operator mit

$$Nu = \nabla v \cdot \mathbf{n} - \mathbf{I} p \cdot \mathbf{n},$$

während  $C$  die aus Kapitel 1 definierte Matrix ist, d.h. wir erhalten durch Einsetzen die Randgleichung

$$\partial_z v - p e_z + c_{33} v = h e_z. \quad (3.16)$$

Für die Querschnitte  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  gilt dabei

$$\partial_z v(x_1, x_2, R_j) - p(x_1, x_2, R_j) e_z + 2 \frac{T_j - R_j}{\psi^j} v_3 = h_j e_z \quad (3.17)$$

für  $j = 1, 2$ . Da die hier die Normalenrichtung mit  $e_z$  übereinstimmt, folgt

$$0 - (-2\bar{\omega}_j R) + 2 \frac{T_j - R_j}{\psi^j} \bar{\omega}_j \psi^j = 2 T_j \bar{\omega}_j =: h_j e_z. \quad (3.18)$$

Damit wären die Voraussetzungen für die numerischen Tests geschaffen.

Betrachten wir zunächst die Robin Randbedingung im Kanal mit anwachsendem  $T$  und der groben Schrittweite.

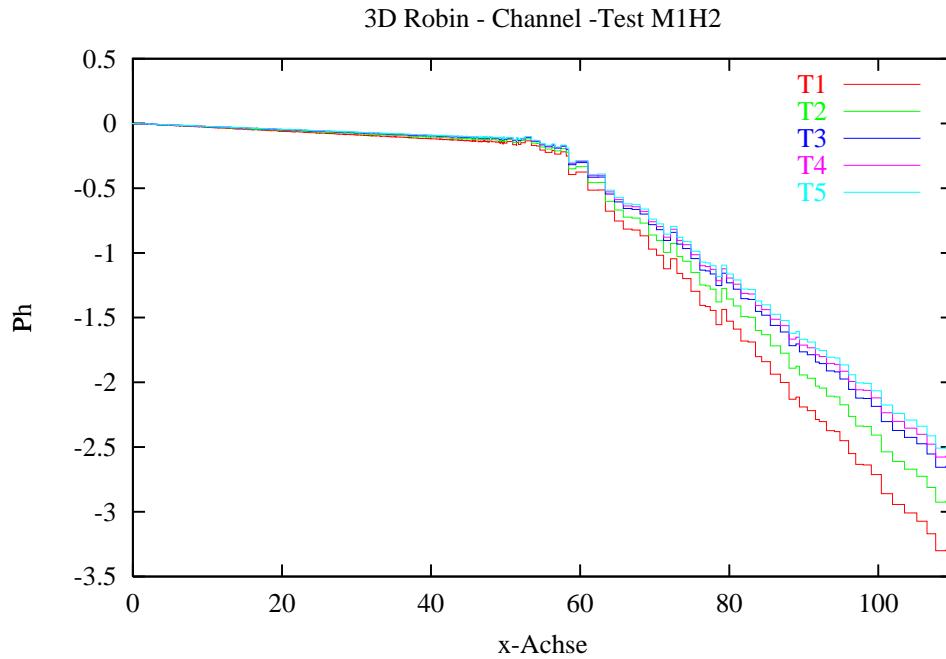


Abbildung 29: Vergleich des Druckes in der ABC-Rechnung L1

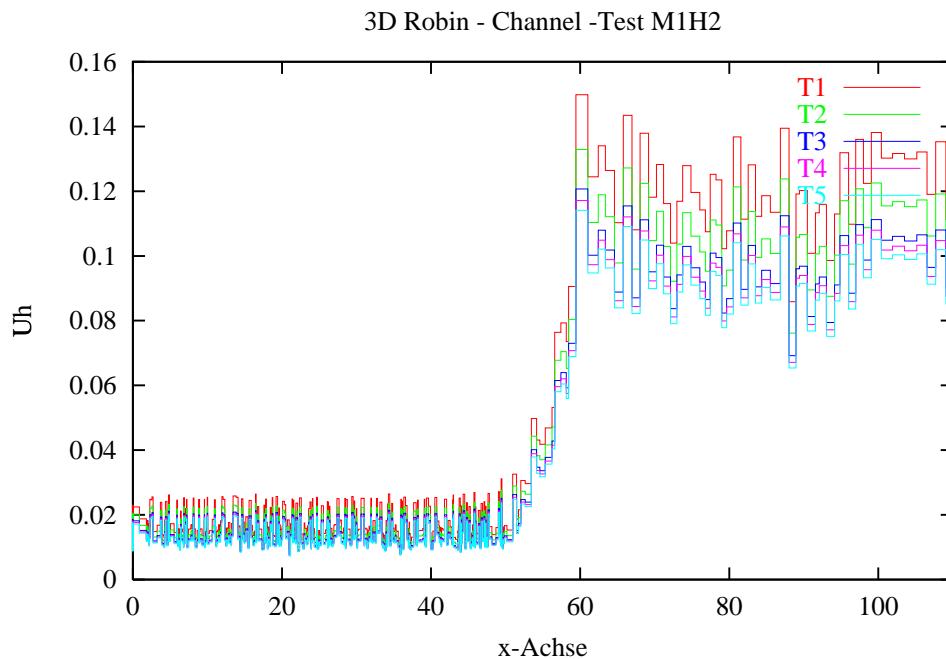


Abbildung 30: Vergleich Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L1

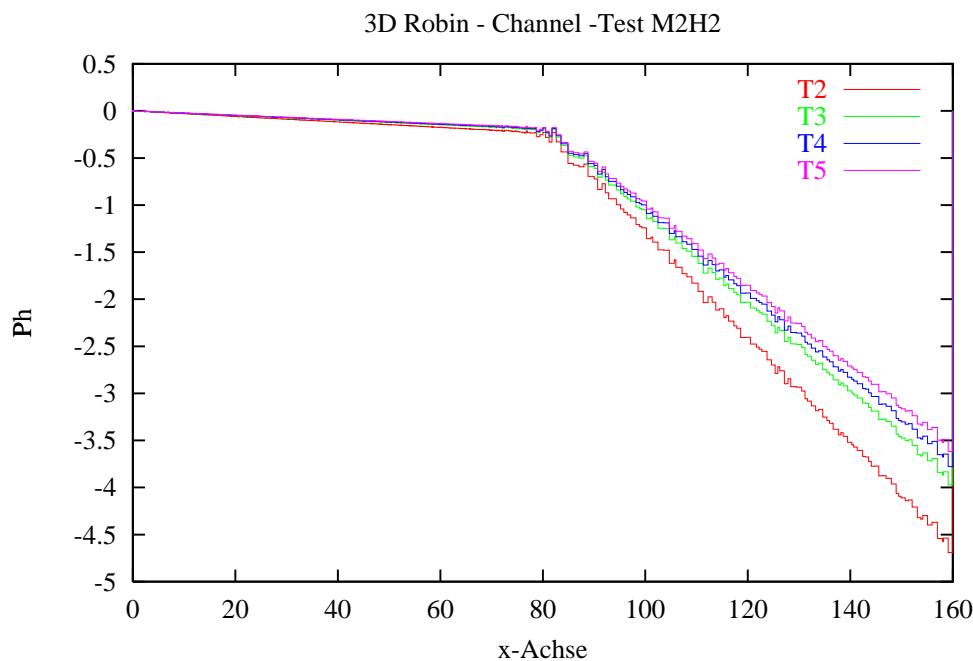


Abbildung 31: Vergleich des Druckes in der ABC-Rechnung L2

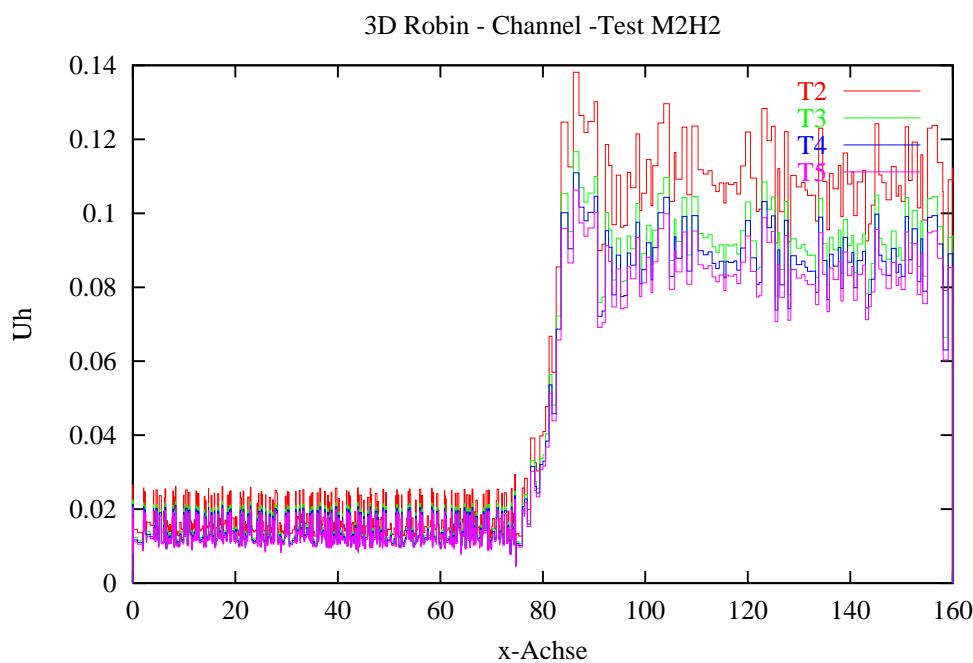


Abbildung 32: Vergleich der Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L2

3D Robin - Channel -Test M3H2

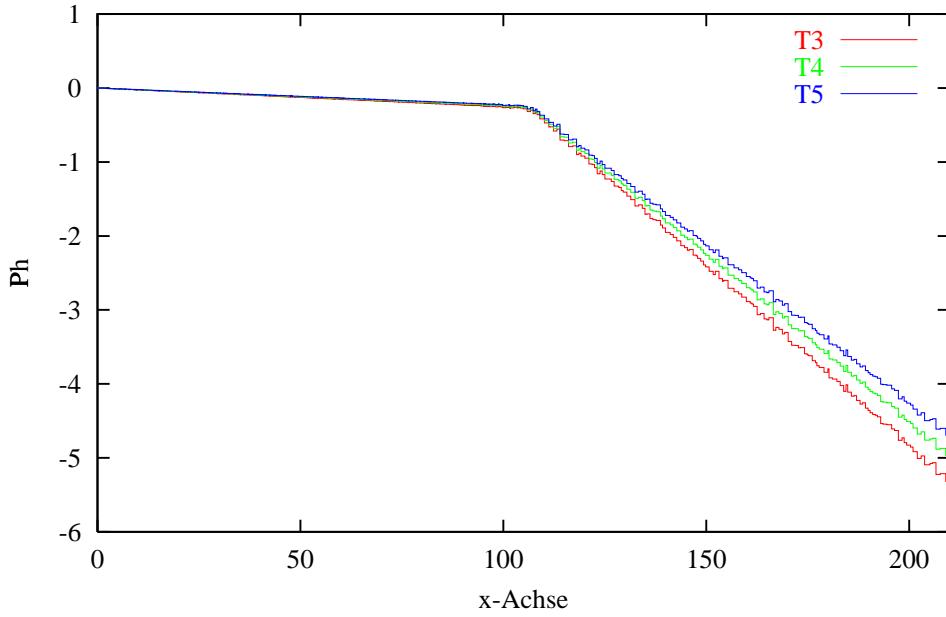


Abbildung 33: Vergleich des Druckes in der ABC-Rechnung L3

3D Robin - Channel -Test M3H2

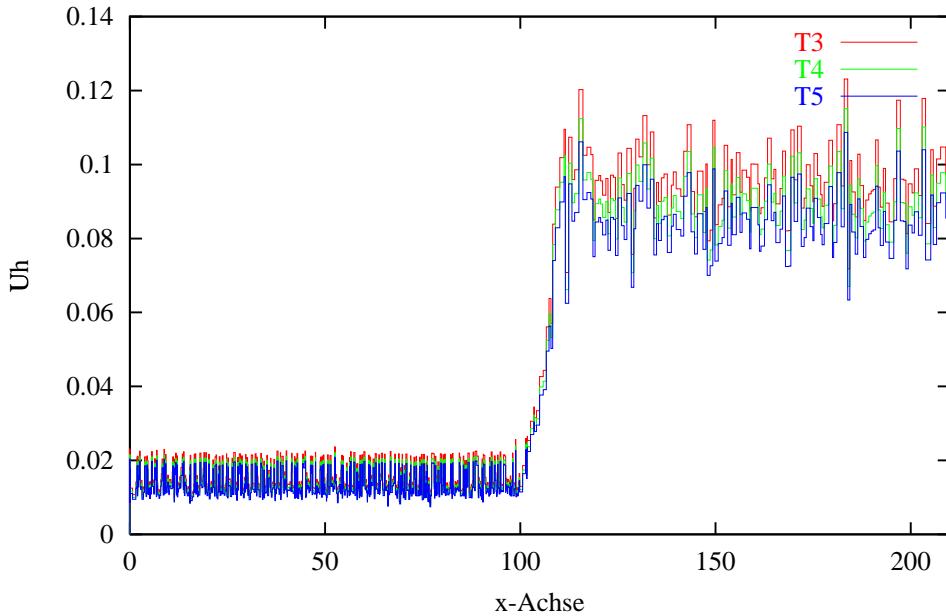


Abbildung 34: Vergleich der Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L3  
 Man erkennt, daß bei zunehmender Länge  $T$ , d.h. man entfernt sich von der Neumann Randbedingung, die Lösung des Druckes ein flacheres Profil aufweist. Außerdem nehmen die Schwankungen der Geschwindigkeitslösung im Querschnitt ab.

Betrachten wir nun die feinere Schrittweite.

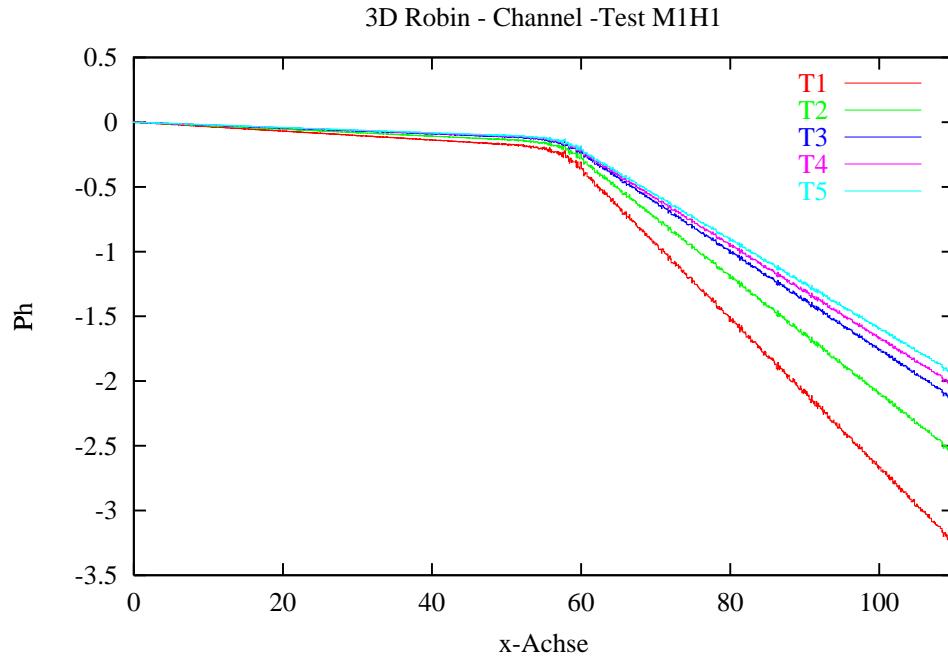


Abbildung 35: Vergleich Druck in der ABC-Rechnung L1

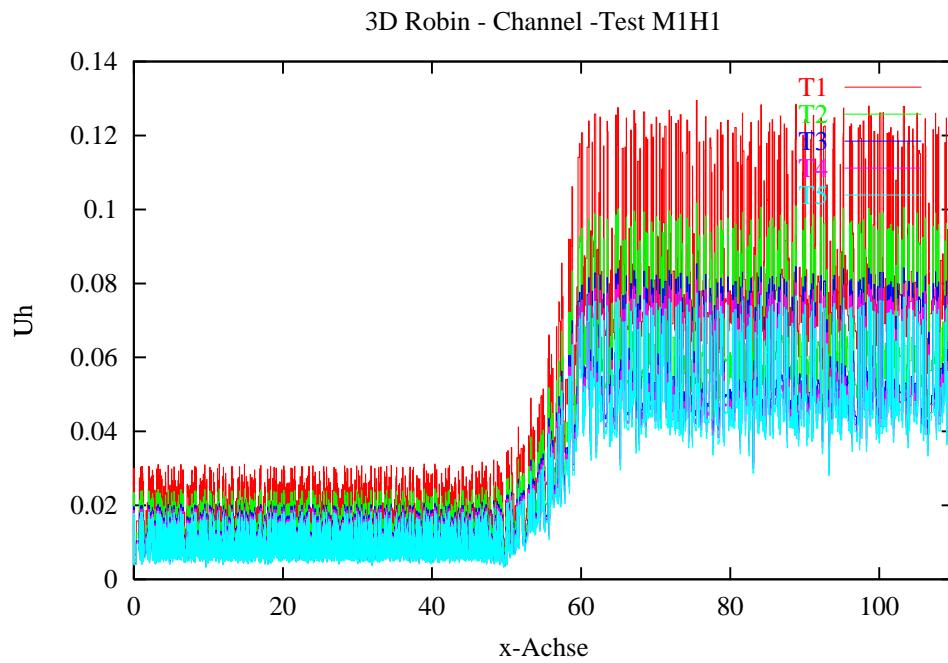


Abbildung 36: Vergleich Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L1

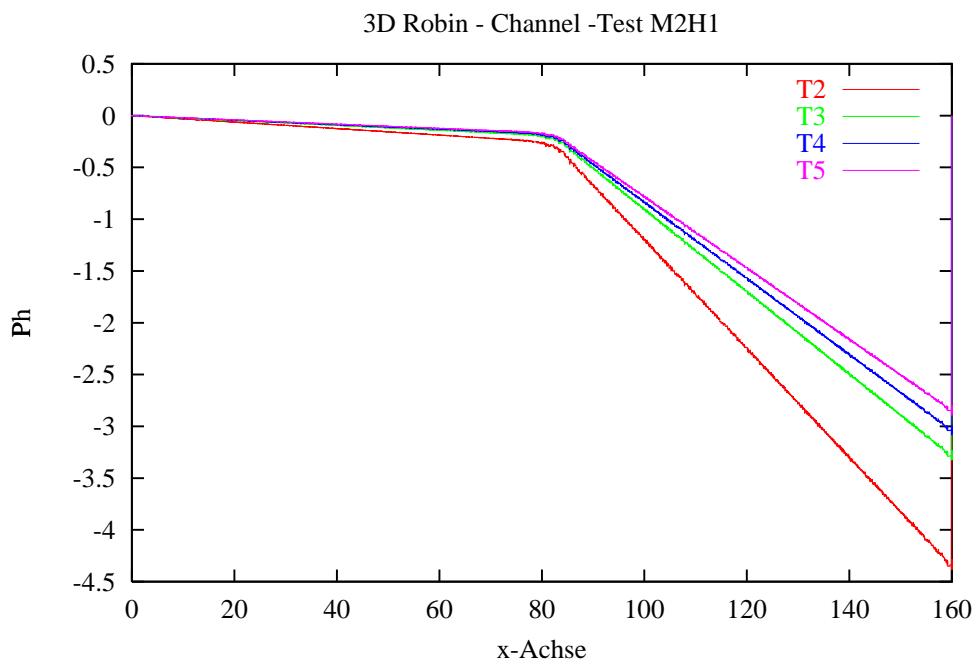


Abbildung 37: Vergleich Druck in der ABC-Rechnung L2

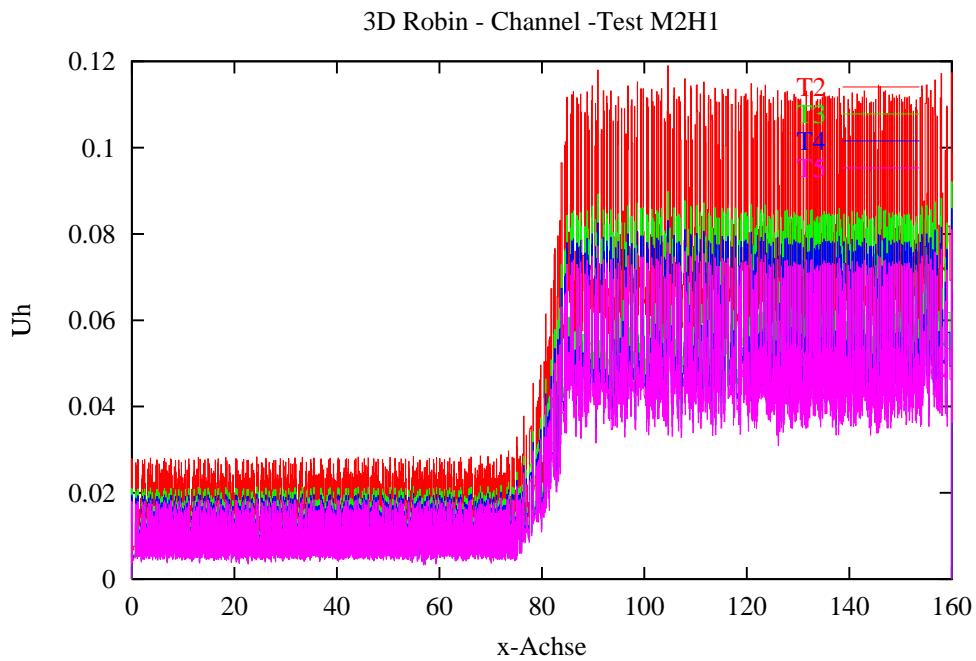


Abbildung 38: Vergleich Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L2

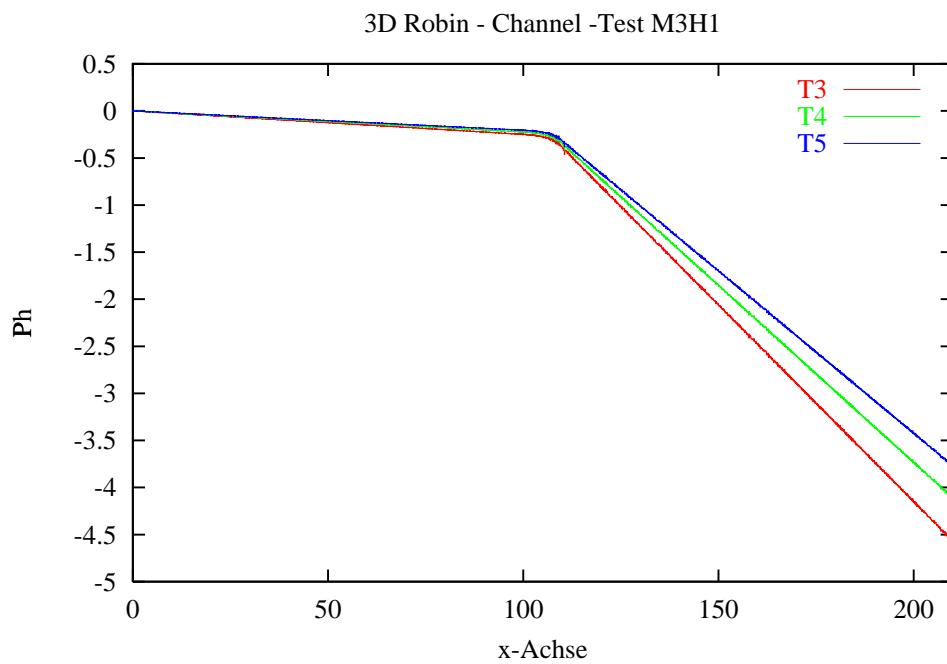


Abbildung 39: Vergleich Druck in der ABC-Rechnung L3

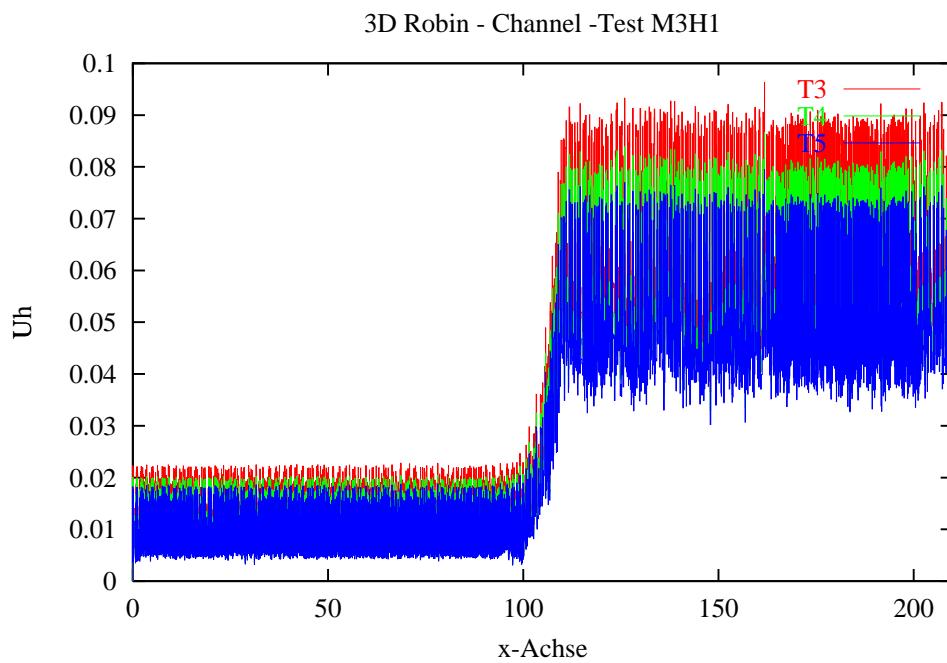


Abbildung 40: Vergleich Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L3

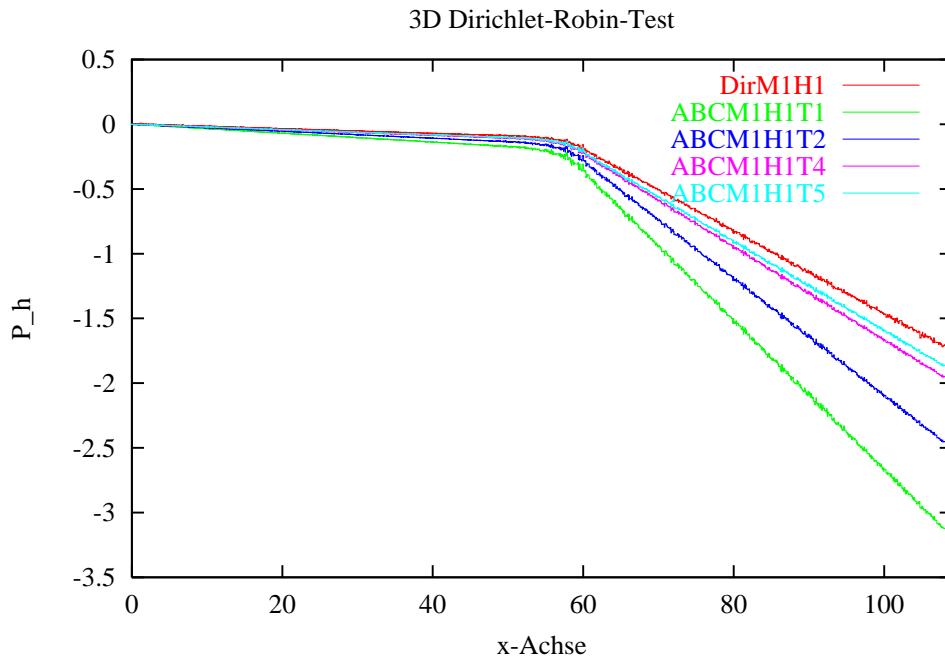


Abbildung 41: Vergleich Druck Dirichlet und Robin L1

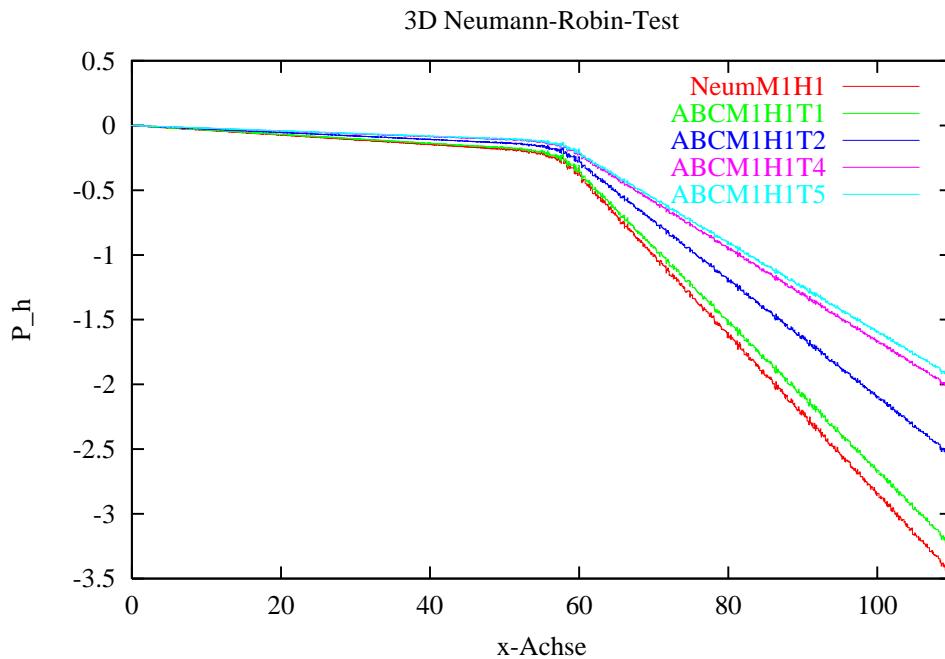


Abbildung 42: Vergleich Druck Neumann und Robin L1

Aus den Lösungen  $M_i h_1$  erkennt man, daß mit zunehmender Länge des Kanals, die Geschwindigkeits- und Drucklösung ebenfalls weniger Schwankungen im Profil aufweisen. In der Rechnung mit dem feineren Netz erhalten wir dasselbe Resultat, wobei hier aufgrund der kleineren Schrittweite erheblich weniger Störungen auftreten.

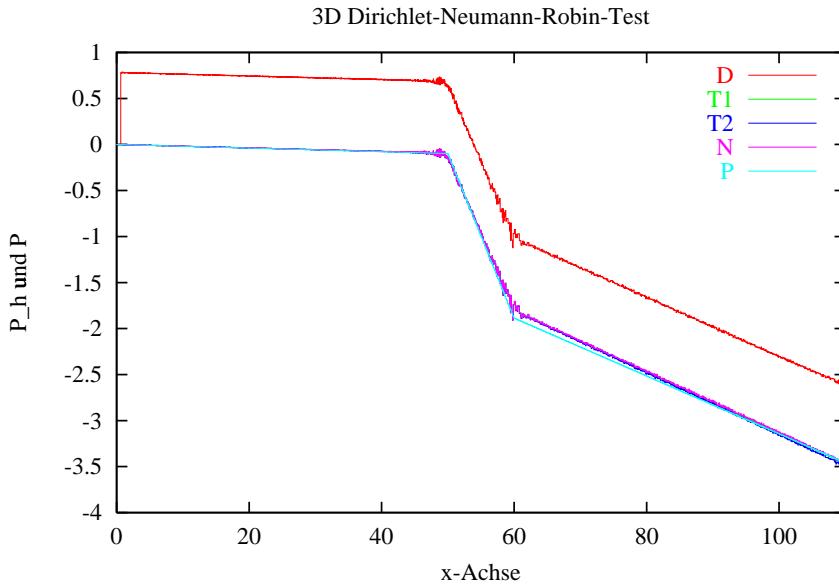


Abbildung 43: Vergleich Druck Dirichlet Neumann und Robin Lösung L1

Vergleicht man diese Resultate zunächst mit den Dirichlet Rechnungen, so stellt man fest, daß mit wachsendem  $T$ , die Robin Lösung gegen die Dirichlet Lösung strebt. Abbildung 41 und 42 zeigt, daß die Lösungen mit der künstlichen Randbedingung, zwischen der Dirichlet- und Neumannlösung liegen. Betrachten wir die Testrechnungen mit Vorgabe von  $\tilde{u}$ , so stellt sich heraus, daß der Verlauf der Lösung nahezu unabhängig von  $T$  ist. In den folgenden Tabellen und Abbildungen zeigen wir den Sachverhalt.

Die Tabelle zeigt den Fehler zur exakten Lösung in der Max-Norm sowie in der  $L^2$ -Norm für den Fall  $T = 500$  in Modellproblem II:

$h_2$	D UX	N UX	ABC-UX	D UY	N UY	ABC-UY
Max-Norm	3.60e-02	3.60e-02	4.12e-02	3.12e-02	3.12e-02	3.18e-02
$h_2$	D UZ	N UZ	ABC-UZ	D P	N P	ABC-P
Max-Norm	3.51e-02	3.51e-02	3.54e-02	6.22e-01	6.22e-01	6.09e-01
$h_1$	D UX	N UX	ABC-UX	D UY	N UY	ABC-UY
Max-Norm	3.49e-02	3.49e-02	3.44e-02	2.23e-02	2.23e-02	2.26e-02
$h_1$	D UZ	N UZ	ABC-UZ	D P	N P	ABC-P
Max-Norm	2.46e-02	2.46e-02	2.48e-02	1.87e-01	1.87e-01	1.82e-01

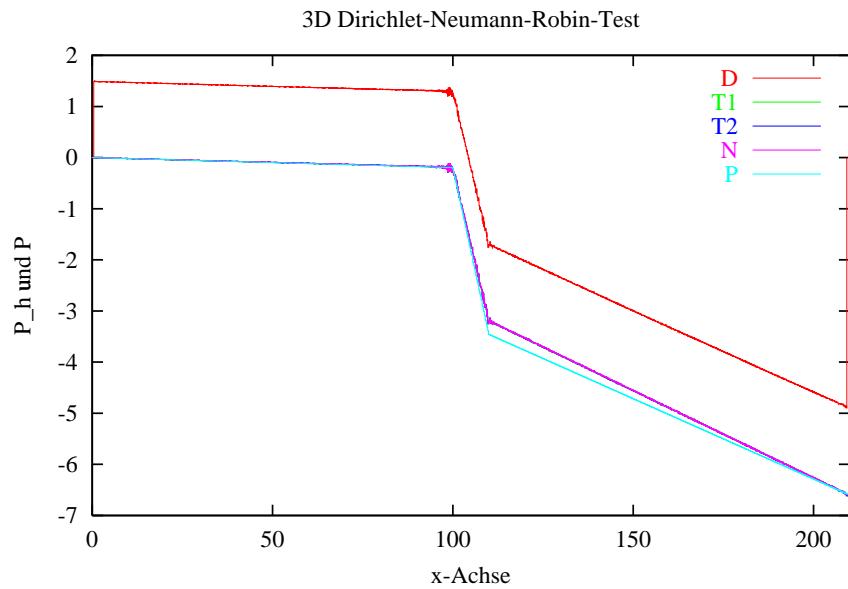
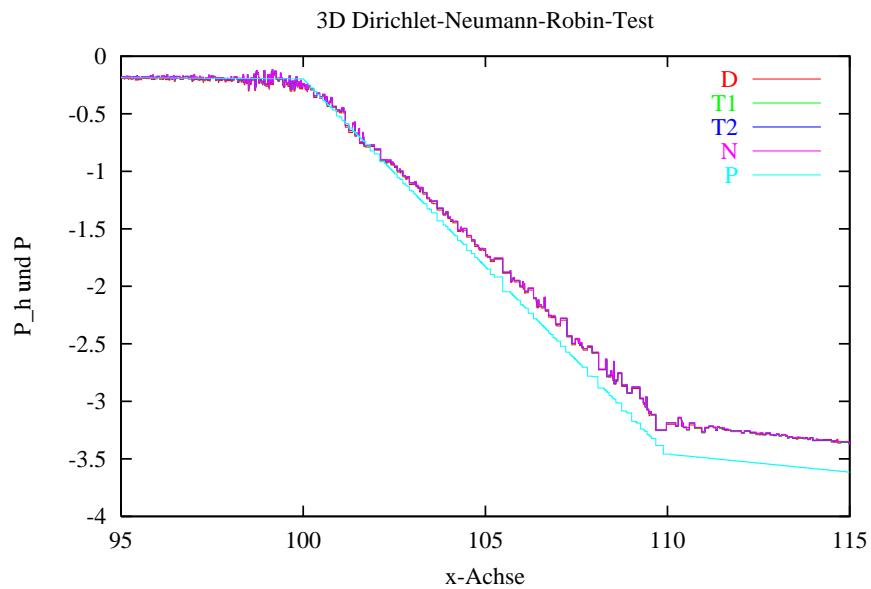


Abbildung 44: Vergleich Druck Dirichlet Neumann und Robin Lösung L3  
 Das folgende Bild zeigt noch einmal eine Vergrößerung der Drucklösung in der Kanalverjüngung. Die Unterschiede der einzelnen Lösungen sind geradezu verschwindend gering.



Die folgenden Abbildungen zeigen die mit Povray visualisierten Geschwindigkeitsfelder des Kanalsystems.

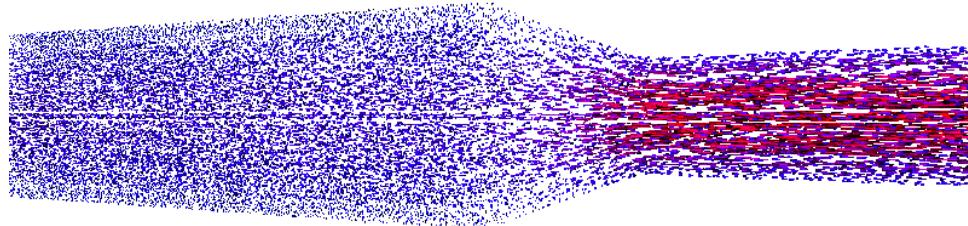


Abbildung 45: Kanalströmung

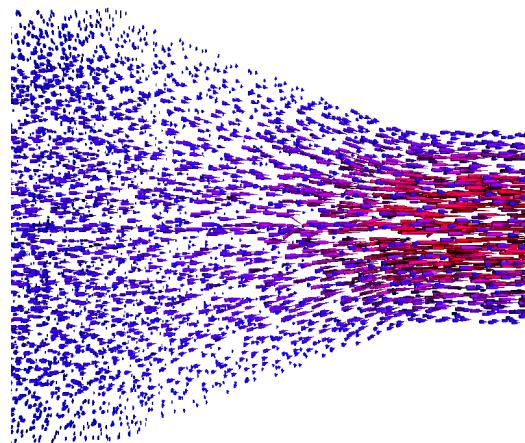


Abbildung 46: Geschwindigkeitsvektoren im Verjüngungsstück

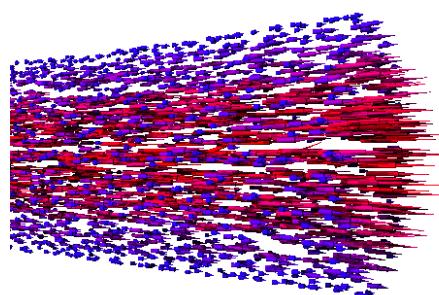


Abbildung 47: Geschwindigkeit am Kanalende

## 4 Anhang: Weitere Testrechnungen

Um ebenfalls Standard-Rechnungen mit unserem Code zu überprüfen liefern wir noch drei bekannte Testbeispiele.

Einen Neumann und Dirichlet-Test im Kubus mit Vorgabe der exakten Lösung und ein Vergleich der Druck sowie Geschwindigkeitslösungen.

Ein Driven - Cavity Test und eine Rechnung einer Strömung über eine Stufe (Backward-Facing-Step).

Als Vorgabe für das Neumann Dirichlet-Problem sei  $\mathbf{v}$  und  $p$  wie folgt gegeben.

### 1. Neumann- und Dirichlet-Test im Einheitswürfel $[0, 1]^3$

Gegeben sei das folgende Paar  $(\mathbf{v}, p)$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1(x, y, z) &= x^2yz \\ u_2(x, y, z) &= -\frac{1}{2}xy^2z \\ u_3(x, y, z) &= -\frac{1}{2}xyz^2 \end{pmatrix} \text{ und } p(x, y, z) = (x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{2}).$$

Für die Divergenz von  $\mathbf{u}$  ergibt sich

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 2xyz - xyz - xyz = 0.$$

Abbildung 48 zeigt den Fehler  $u - u_h$  im Würfel. Es werden die maximalen Fehler im Querschnitt längs der x-Achse abgetragen. Man kann erkennen das mit  $h$  gegen 0 der Fehler immer kleiner wird.

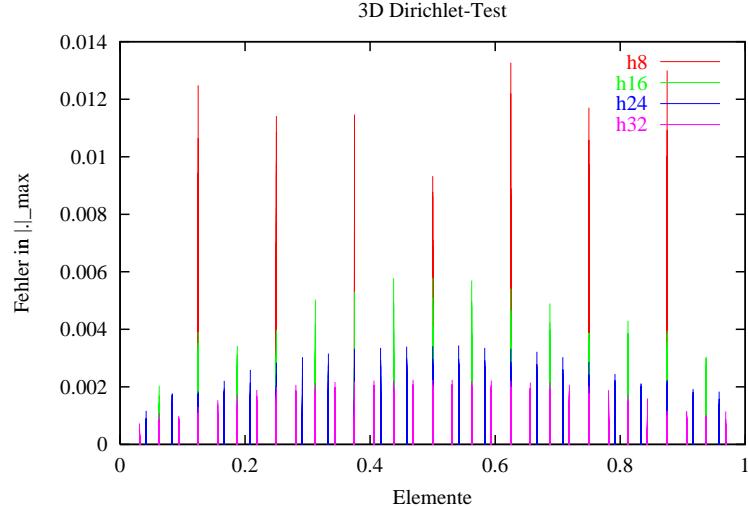


Abbildung 48: Fehler im Querschnitt

Die beiden folgenden Bilder zeigen die Drucklösung. Da im Dirichlet Fall der Druck nicht eindeutig bestimmt ist, der Mittelwert von P aber Null ist, konvergiert die Lösung gegen P mit der Konstanten 0. Am Rand weißt die Dirichlet Lösung gegenüber dem Neumann-Problem einige Schwierigkeiten auf. Dies paßt zu den Lösungen aus Modellproblem I, da die Neumann-Bedingung dort ebenfalls leichte Störungen aufzeigte.

3D Dirichlet-Test

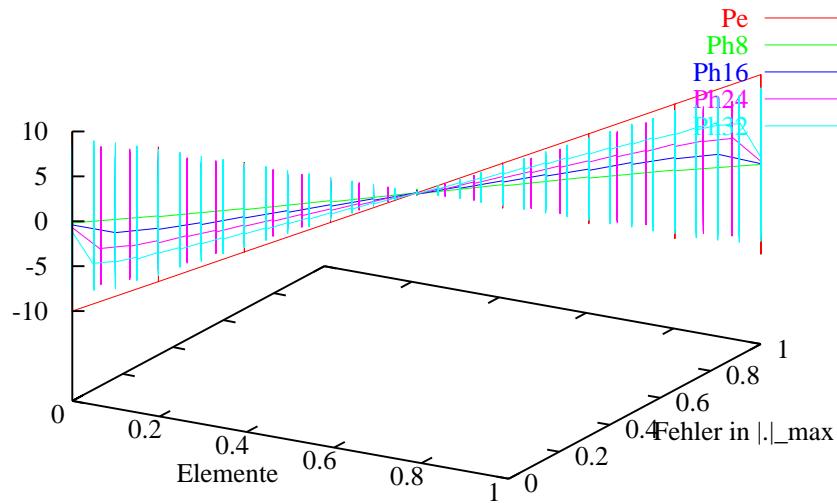


Abbildung 49: Druckvergleich Dirichlet mit Exakt

3D Neumann-Test

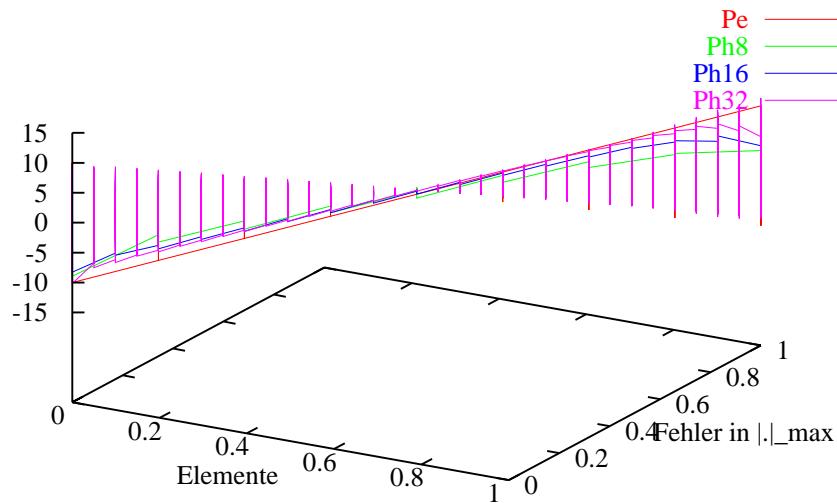


Abbildung 50: Druckvergleich Neumann mit Exakt

## 2. Driven Cavity Test im Einheitswürfel $[0, 1]^3$

In diesem Beispiel ist  $\nu = 0.01$ , die rechte Seite  $\mathbf{f}$  wurde gleich Null gesetzt. Die Randbedingungen sind ebenfalls Null bis auf die der oberen Seite des Würfels. Die Tangentialgeschwindigkeit auf der oberen Seite hat den Wert Eins. Abbildung 51 zeigt das Geschwindigkeitsfeld im Würfel.

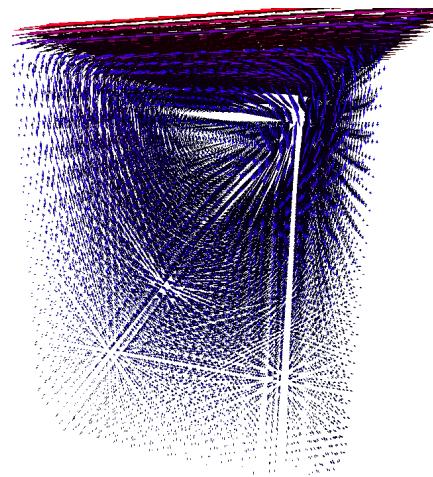


Abbildung 51: Driven - Cavity Test Geschwindigkeit  
Abbildung 52 zeigt den Druck und die Geschwindigkeit als Matlab-Ausgabe.

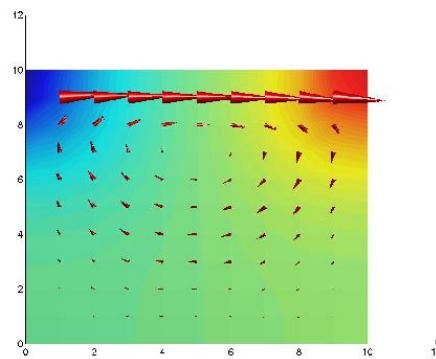


Abbildung 52: Driven - Cavity Test Druck

### 3. Backward Facing Step im Kanal mit Stufe

Wir betrachten hier den Fluß über eine Stufe. Das Problem wurde mit Null-Randbedingung an den Kanalrändern und zwei Dirichlet-Poiseuille Ein- und Ausströmbedingungen berechnet. Abbildung 53 zeigt das Geschwindigkeitsfeld und Abbildung 54 den Druck im Querschnitt des Kanals.

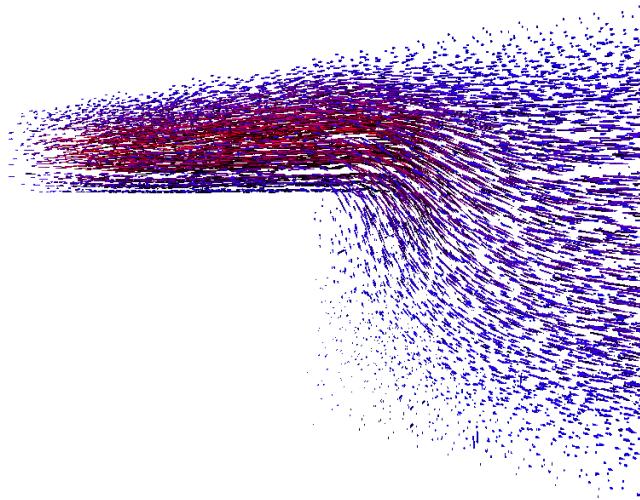


Abbildung 53: Backwar-Facing Step Geschwindigkeit

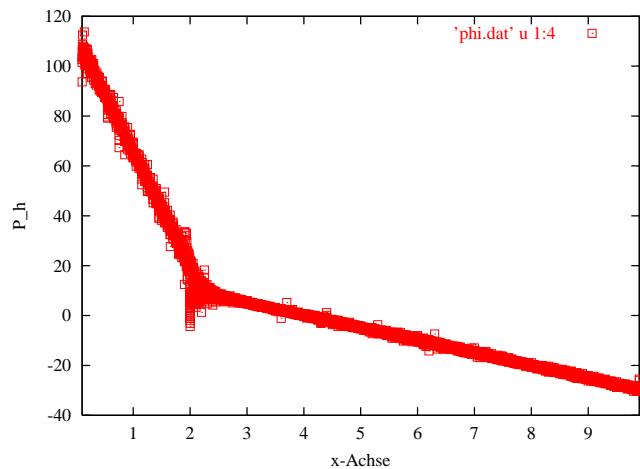


Abbildung 54: Backwar-Facing Step Geschwindigkeit

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden lokale künstliche Randbedingungen für die Stokes Gleichung in unendlich langen Rohrsystemen untersucht. Es wurde eine Finite-Element Approximation in 3D durchgeführt und ein Programm zur Simulation für derartige Probleme entwickelt. In Kapitel 1 haben wir die geometrischen Anforderungen an das Rechengebiet beschrieben. Anschließend wurden Funktionenräume definiert, in denen man die Existenz einer Lösung und deren Eindeutigkeit zeigen kann. Es wurden Bedingungen für zulässige Randoperatoren aufgezeigt und ein Modellbeispiel mit einer gemischten Randbedingung (Robin-Randbedingung) aufgestellt. Nachdem auch für dieses Problem die Existenz- und Eindeutigkeitsfragen im beschränkten Gebiet diskutiert wurden, haben wir am Ende von Kapitel 1 eine Fehlerabschätzung für  $|u - u^R|$  bewiesen.

In Kapitel 2 wurde das endliche Problem mit einem Mini Finite-Element Ansatz betrachtet, die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung in  $(H^2(\Omega_R))^3 \times H^1(\Omega_R)$  mit Hilfe der Babuska-Brezzi-Bedingung gezeigt und eine Fehlerabschätzung für  $|u^R - u_h^R|$  bewiesen.

In Kapitel 3 stellten wir die parallele Entwicklungsumgebung PadFEM sowie einige numerische Resultate anhand unterschiedlicher Modellbeispiele vor. Außerdem wurden im Anhang Standardtests mit dem 3D Code durchgeführt.

Da wir hier ausschließlich den stationären Fall der Stokes Gleichung betrachtet haben, soll im Anschluß an diese Arbeit der instationäre Fall theoretisch untersucht werden und numerische Experimente mit den existierenden Randbedingungen durchgeführt werden. Um genauere Aussagen über die Stabilität der Randbedingungen und die Qualität der Rechenergebnisse geben zu können, ist es erforderlich, den sequentiellen 3D Code zu parallelisieren. Nur durch eine parallele Version des 3D Codes wird es ermöglicht, das Verhalten der Algorithmen und der Finite-Element Approximationen bei feiner werdenden Diskretisierungen zu untersuchen. Hierzu ist es erforderlich, daß das 3D Stokes Modul in PadFEM integriert wird. Weiterhin wird im Rahmen des SFB 376 [SFB] an der Entwicklung bzw. Integration von existierenden Bibliotheken für eine 3D-Netzverfeinerung und speziellen Adaptionstechniken gearbeitet. Es soll mit Hilfe der Lastverteilungsmethoden und Partitionierungsalgorithmen ein effizientes Werkzeug zur Simulation von Strömungsvorgängen bzw. Problemen aus der Strukturmechanik zur Verfügung gestellt werden.

# Abbildungsverzeichnis

1	Darstellung von $\Omega$ . . . . .	1
2	Ausschnitt eines Zylinders . . . . .	6
3	Transformierte Umgebung eines Randpunktes . . . . .	9
4	Transformiertes Gebiet $\mathbb{D}$ . . . . .	12
5	Gebiet $d_{R_0, R_1}$ . . . . .	17
6	a) konforme b) nicht konforme Zerlegung . . . . .	37
7	Standardelemente in 2D und 3D . . . . .	38
8	Transformation der Knoten eines Tetraeders auf das Standardelement . . . . .	40
9	Tetraeder mit Bubble-Knoten . . . . .	45
10	PadFEM - Struktur . . . . .	59
11	Zerlegung in p Partitionen . . . . .	61
12	Speichertechniken . . . . .	62
13	Klassenbaum . . . . .	63
14	FEMit2D . . . . .	64
15	Berechnung der Matrixeinträge . . . . .	67
16	Kommunikationsrand . . . . .	68
17	Netz -und Graphikausgabe in 2D . . . . .	69
18	Netz -und Grafikausgabe in 2D . . . . .	70
19	Modell I: Zylinder . . . . .	72
20	Visualisierung der Strömung durch den Zylinder mit Blick auf den Ausströmrand . . . . .	74
21	Gesamtansicht des Zylinders . . . . .	74
22	Vergleich des Druckes in der ABC-Rechnung . . . . .	75
23	Vergleich Druck in der Neumann-Rechnung . . . . .	75
24	Vergleich Druck in der Dirichlet-Rechnung . . . . .	76
25	Vergleich Druck in 3D Ansicht . . . . .	76
26	Querschnitt eines Zylinders mit Verjüngung . . . . .	77
27	Ein- bzw. Ausflußrand $\omega_j$ , $j = 1, 2$ . . . . .	78
28	Definition von $\tilde{u}$ in $\Omega$ . . . . .	80
29	Vergleich des Druckes in der ABC-Rechnung L1 . . . . .	83
30	Vergleich Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L1 . . . . .	83
31	Vergleich des Druckes in der ABC-Rechnung L2 . . . . .	84
32	Vergleich der Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L2 . . . . .	84
33	Vergleich des Druckes in der ABC-Rechnung L3 . . . . .	85
34	Vergleich der Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L3 . . . . .	85
35	Vergleich Druck in der ABC-Rechnung L1 . . . . .	86
36	Vergleich Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L1 . . . . .	86
37	Vergleich Druck in der ABC-Rechnung L2 . . . . .	87
38	Vergleich Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L2 . . . . .	87
39	Vergleich Druck in der ABC-Rechnung L3 . . . . .	88

40	Vergleich Geschwindigkeit in der ABC-Rechnung L3 . . . . .	88
41	Vergleich Druck Dirichlet und Robin L1 . . . . .	89
42	Vergleich Druck Neumann und Robin L1 . . . . .	89
43	Vergleich Druck Dirichlet Neumann und Robin Lösung L1 . . . . .	90
44	Vergleich Druck Dirichlet Neumann und Robin Lösung L3 . . . . .	91
45	Kanalströmung . . . . .	92
46	Geschwindigkeitsvektoren im Verjüngungsstück . . . . .	92
47	Geschwindigkeit am Kanalende . . . . .	92
48	Fehler im Querschnitt . . . . .	93
49	Druckvergleich Dirichlet mit Exakt . . . . .	94
50	Druckvergleich Neumann mit Exakt . . . . .	94
51	Driven - Cavity Test Geschwindigkeit . . . . .	95
52	Driven - Cavity Test Druck . . . . .	95
53	Backwar-Facing Step Geschwindigkeit . . . . .	96
54	Backwar-Facing Step Geschwindigkeit . . . . .	96

# Literatur

- [Ada75] R. A. Adams: Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.
- [ADN] R.A. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying boundary conditions I. Comm. Pure. Appl. Math. 12, pp. 623-727, 1959, II, Comm. Pure. Appl. Math. 17, pp. 35-92, 1964.
- [Ap99] T. Apel: Anisotropic Finite Elements: Local Estimates and Applications. Habilitationsschrift, TU-Chemnitz, 1999.
- [ArBrFo84] D.N. Arnold: F. Brezzi and M. Fortin, A stable finite element for the Stokes equation, Calcolo. 21 ,pp. 337-344, 1984.
- [Ba20] W. Bao: Artificial boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations: A well-posed result. Comp. Meth. Appl. Engrg. 188, pp. 595-611, 2000.
- [BaBiJ97] P. Bastian, K. Birken, K. Johannsen, S. Lang, K. Eckstein, N. Neuss, H. Renz-Reichert, C. Wieners: UG - A Flexible Software Toolbox for Solving Partial Differential Equations. Computing and Visualization in Science, (1), 1997.
- [Be97] J. Behrens: Atmospheric and Ocean Modeling with an Adaptive Finite Element Solver for the Shallow-Water Equations. Techn. Report, Alfred-Wegener-Institut, Bremerhaven, 1997.
- [BlBoDr95] S. Blazy, W. Borchers, U. Dralle: Parallelization methods for a characteristic's pressure correction scheme. In: E.H. Hirschel (ed), Flow Simulation with High- Performance Computers II, Notes on Numerical Fluid Mechanics, 1995.
- [BlDi98] S. Blazy, R. Diekmann, U. Dralle, F. Neugebauer, R. Preis, T. Römke: Parallel Adaptive PCG. In: B. Topping (ed): Advances in Comp. Mechanics with Parallel and Distributed Processing, Saxe Coburg, Edinburgh, 1998.
- [BaWe82] R. E. Bank, B. D. Welfert: A posteriori error estimates for the Stokes equations: A comparison, Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg., 82 (1-3), pp. 323-340, 1990.
- [BaWe91] R. E. Bank, B. D. Welfert: A posteriori error estimates for the Stokes problem, SIAM J. Numer. Anal., 28, pp. 591-623, 1991.
- [BaWe90] R. Bank, B. Welfert, H. Yserentant: A class of iterative methods for solving saddle point problems, Numer. Math, 56, pp. 645-666, 1990.

- [Br92] D. Braess: Finite Elemente, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [BrSa97] D. Braess, R. Sarazin: An Efficient Smoother for the Stokes problem, Appl. Num. Math. 23, 3-20, 1997.
- [BrFo91] F. Brezzi, M. Fortin: Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1991.
- [JBr] J.H. Bramble, J.E. Pasciac, A.H. Schatz: The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring I, Math. Comp. 47, 1986.
- [CrRa73] M. Crouzeix, P. A. Raviart: Conforming and nonconforming finite elements for solving the stationary Stokes equations I, RAIRO 7 (R3), pp. 33-76, 1973.
- [Ci78] G. Ciarlet: The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [CiLi91] P. G. Ciarlet, J.L. Lions: Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, Finite Element Methods (Part 1), North Holland, 1991.
- [Cl75] P. Clement: Approximation by finite element functions using local regularization, R.A.I.R.O. Anal. Numer. 9, pp. 77–84, 1975.
- [ChOl99] E. V. Chizhonkov, M. Olshanskii: On the domain geometry dependence of the LBB-Condition, Math. Mod. and Num. Analysis, SMAI, 1999.
- [DeDr95] A.S. Deakin, J.R. Dryden: Numerically derived boundary conditions on artificial boundaries, J. of Comp. and Appl. Math. 58, pp. 1-16, 1995.
- [Diek98] R., Diekmann: Load Balancing Strategies for Data Parallel Applications, Logos Verlag Berlin, 1998.
- [Dram] DRAMA: Dynamic Re-Allocation of Meshes for parallel finite element Applications.  
<http://www.cs.kuleuven.ac.be/cwis/research/natw/DRAMA.html>
- [ElSi96] H. Elman, D. Silvester: Fast Nonsymmetric Iterations and Preconditioning for Navier-Sokes Equations. SIAM J. Sci. Comp. 17(1), pp 33–46, 1996.
- [Fo77] M. Fortin: Analysis of the convergence of mixed finite element methods, R.A.I.R.O. Anal. Numer., 11 , pp. 341–354, 1977.
- [Fu98] M. Fulland: Simulation von Rißausbreitungsvorgängen. Diplomarbeit, Universität Paderborn, 1998.

- [FraItSten93] L.P.Franca, T. Hughes, R. Stenberg: Stabilized finite element methods, Incompressible Computational Fluid Dynamics: Trends and Advances (M.D. Gunzburger and R.A. Nicolaides, eds.), Cambridge University Press, pp. 87-107, 1993.
- [Gal94a] G. P. Galdi: An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes equations, Vol I, Linearized Steady Problems. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Gal94b] G. P. Galdi: An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes equations, Vol II, Nonlinear Steady Problems. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [GiPaKe97] D. Givoli, I. Patlashenko: J. Keller, High-Order boundary conditions and finite elements for infinite domains, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 143, pp.13-39, 1997.
- [GiRa86] V. Girault, P. A. Raviart: Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [GoLo96] G. H. Golub, C. F. Van Loan: Matrix Computations Third Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- [GoWa99] G. H. Golub, A. Wathen: An iteration for indefinite Systems and its application to the Navier-Stokes equations, SIAM J. Sci. Computiong, Vol 19, No. 2, pp 530-539, 1999.
- [Ha89] L. Halpern: Artificial boundary conditions for incompressible viscous flows, SIAM J. Math. Anal., 20, pp. 308-353, 1989.
- [HaBa95] H. Han, W. BAO: An artificial boundary condition for the incompressible viscous flow in a no slip channel, J. Comp. Math., 13, pp. 51-63, 1995.
- [HeRaTu96] Heywood, J., Rannacher, R., Turek, S.: Artificial Boundaries and Flux and Pressure Conditions for the Incompressible Navier–Stokes equations, Intern. J. Num. Meth. in Fluids, 22, pp. 325-352, 1996.
- [Hu98] J. Hungershöfer: Parallele Algorithmen zur Verfeinerung zweidimensionaler Finite Element Netze. Diplomarbeit, Universität Paderborn, 1998.
- [He99] M. Hershoff: Numerische Finite Element Simulation einer 2D - Kanalströmung mit Hilfe von Mehrgittermethoden, Diplomarbeit, Universität. Paderborn, 1999.
- [Hes] Hestenes, M.R.: Conjugate Direction Methods in Optimization, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

- [Hes2] M. R. Hestenes, E. Stiefel: Methods of conjugate gradients for solving linear systems, J. Res., Nat. Bur. Standards 49, pp. 409-436, 1952.
- [Heu] Heuser, H.: Funktionalanalysis, B.G. Teubner Stuttgart, 1986.
- [JoPl97] M.T. Jones, P.E. Plassmann: Parallel Algorithms for Adaptive Mesh Refinement. SIAM J. on Sci. Comp. , 18, pp. 686-708, 1997.
- [JLiEMa] Lions, J.L., Magenes, E.: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [KaSi99] D. Kay, D. Silvester: A posteriori error estimation for stabilized mixed approximations of the Stokes equations, SIAM J. Sci. Comp. Vol. 21, No 4, pp. 1321-1336, 1999
- [Kla98] A. Klawonn, Block-Triangular preconditioner for saddle point problems with a penalty term, SIAM J. Sci. Computing, Vol 19, No.1, pp. 172-184, 1998.
- [Kla98a] A. Klawonn, An optimal preconditioner for a class of saddle point problems with a penalty term., SIAM J. Sci. Computing, Vol 19, No.2, pp. 540-552, 1998.
- [KeOs76] R.B. Kellogg, J.E. Osburn: A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon, J. Functional Analysis, 21, pp. 379-431, 1976.
- [LaSo83] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonikov: Determination of the solutions of boundary value problems for steady Stokes and Navier-Stokes equations having an unbounded Dirichlet integral, Zapiski Nauchn. Sem. LOMI, 96, pp. 117-160, 1980. Engl. Transl., J Sov. Math. 21, 728-761, 1983.
- [LaQu86] U. Langer, W. Queck, On the convergence factor of Uzawa's algorithm, J. of Comp. and Appl. Math. 15, 191-202, 1986.
- [Mi89] W.F. Mitchell: A Comparison of Adaptive Refinement Techniques for Elliptic Problems. ACM Transactions on Mathematical Software 15 40, pp. 326-347, 1989.
- [MonDi97] B. Monien, R. Diekmann: A Local Graph Partitioning Heuristic Meeting Bisection Bounds, Proc. 8th SIAM Conf. on Parallel Processing for Scientific Computing, 1997.
- [MonDiPr96] B. Monien, R. Diekmann, R. Preis: Lastverteilungsverfahren für Parallelrechner mit verteilem Speicher. In: W.E. Nagel (ed.): Partielle Differentialgleichungen, Numerik und Anwendungen, Konferenzen des Forschungszentrums Jülich, Band 18, 205-225, 1996.

[Mus96] D.Musser, A. Saini: STL Tutorial and Reference Guide. Addison-Wesley, 1996.

[MaNaPl91] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij: Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten, Akademie Verlag, Berlin, 1991.

[Nor97] J. Nordström, On extrapolation at artificial outflow boundaries for the time-dependent Navier-Stokes equations, Appl. Num. Math. 23, 457-468, 1997.

[NoSi98] S. Noburn, D. Silvester, Sabilised vs. stable mixed methods for incompressible flow, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. 166, pp. 131-141, 1998.

[Neu98] F. Neugebauer: Mesh Generation Methods. In: B.H.V. Topping (ed.): Advances in Computational Mechanics, Civil-Comp Press, Edinburgh, 1998.

[Neu98a] F. Neugebauer: Mesh Refinement Methods. In: B.H.V. Topping (ed.): Advances in Computational Mechanics, Civil-Comp Press, Edinburgh, 1998.

[NeuD96] F. Neugebauer, R. Diekmann: Improved Mesh Generation: Not Simple but Good. Proc. 5th Int. Meshing Roundtable, Pittsburgh, PA, Oct. 1996, Techn. Rep. SAND962301, Sandia Nat'l Lab., 257-270, 1996.

[NeHu98] F. Neugebauer, J. Hungershöfer: Using PadFEM for Parallel Mesh Refinement. In: B.W.V. Topping (ed.): Advances in Computational Mechanics, Civil-Comp Press, Edinburgh, 1998.

[NumC] Numerische Simulation auf massiv parallelen Rechnern. SFB 393, TU Chemnitz,  
<http://www.tu-chemnitz.de/sfb393>

[NaPi99] A., Nazarov, K., Pileckas: Asymptotic conditions at infinity for the Stokes and Navier-Stokes problems in domains with cylindrical outlets to infinity, in Advances in fluid dynamics, Maremonti, Paolo, ed., no. 4 in Quad. Mat., pp. 141-243, 1999.

[NaPl91] A., Nazarov, B. A., Plamenevskii: Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries, De Gruyter Verlag, Berlin, 1994.

[NST99] S. A. Nazarov, M. Specovius-Neugebauer, G. Thäter: Full steady Stokes system in domains with cylindrical outlets. Math. Ann., 314, pp. 729-762, 1999.

[Pi95] R. Pierre: Optimal selection of the bubble function in the stabili of the P1 -P1 element for the Stokes problem. SIAM J. Numer. Anal. 32, 1201-1224, 1995.

[Pad] PadFEM Dokumentation.

<http://www.uni-paderborn.de/cs/PadFEM>

[Par] PARTY Dokumentation.

<http://www.uni-paderborn.de/cs/Party>

[Pov] PovRay - Persistance of Vision -.

<http://http://www.povray.org>

[Reh98] E., Rehling: Parallele Datenstrukturen für adaptive Finite - Elemente - Methoden. Diplomarbeit, Universität. Paderborn, 1998.

[Ria20] V. Ryaben'kii, Non reflecting time-dependent boundary conditions on artificial boundaries of varying location and shape, Appl. Numer. Math. 33, 481-492, 2000.

[Ri84] M.-C. Rivara: Mesh Refinement Processes Based on the Generalized Bisection of Simplices. SIAM J. Numerical Analysis 21(3), 604-613, 1984.

[Roi96] Y. A. Roitberg: Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions, Math. Appl. 384, Kluwer Academic, Dordrecht, 1996.

[SaSa98] V. Sarin, A. Sameh: An efficient iterative method for the generalized Stokes problem, SIAM J. Sci. Comp. Vol. 19, No. 1, pp. 206-226, 1998.

[SiWa94] A. Wathen, D. Silvester: Fast iterative solution of stabilized Stokes systems. Part I: Using simple diagonal preconditioner, SIAM J. Numer. Anal., 30, pp. 630–649, 1993.

[SiWa94] D. Silvester, A. Wathen: Fast iterative solutions of stabilized Stokes systems Part II: Using general block preconditioner. SIAM J. Numer. Anal. 31(5), pp. 1352-1367, 1994.

[So83] V. A. Solonnikov: On the Stokes equations in domains with non-smooth boundaries and on viscous incompressible flow with a free surface, College de France Seminar, 4, pp. 240-349, 1983.

[Spe86] M. Specovius-Neugebauer: Exterior Stokes problem and decay at infinity. Math. Mech. Appl., 8, pp. 351-367, 1986.

[Sp97] M. Specovius-Neugebauer: Approximation of Stokes problems in unbounded domains, Habilitationsschrift Universität Paderborn, 1997.

[Sp99] M. Specovius-Neugebauer: Approximation of the stokes Dirichlet problem in domains with cylindrical outlets., SIAM J. Math. An., 30, pp. 645-677, 1999.

- [SSp98] H. Sohr, M. Specovius-Neugebauer: The Stokes problem for exterior domains in homogeneous Sobolev spaces. Ser. Adv. Math. Appl. Sc., 47, World Scientific, pp. 185-205, 1998.
- [Sto1845] G. G. Stokes: On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion. Trans. Cambridge Phil. Soc., 98, 287-319, 1848.
- [Schl98] F. Schlimbach: Load-Balancing Heuristics optimizing Subdomain Aspect Ratios for Adaptive Finite Element Simulations. Diplomarbeit, Universität Paderborn, 1998.
- [SFB] SFB376 Documentation.  
<http://www.uni-paderborn.de/cs/SFB376/>
- [SUM] SUMAA3D: Scalable unstructured Mesh Algorithms and Applications.  
Argonne Nat'l Lab.,  
<http://www.mcs.anl.gov/sumaa3d/>
- [Touh97] N. Touheed, P.K. Jimack: Parallel Dynamic Load-Balancing for Adaptive Distributed Memory PDE Solvers. Proc. 8th SIAM Conference on Parallel Processing for Scientific Computing, 1997.
- [Tem77] R. Temam: Navier-Stokes Equations. North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [Tri78] H. Triebel: Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. North-Holland, 1978.
- [Ts98] S. V. Tsynkov: Numerical solution of problems in unbounded domains, Appl. Num. Math., 27, pp. 465-532, 1998.
- [To81] F. Thomasset: Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Springer, New York, 1981.
- [Ve84] R. Verföhrt: A combined conjugate gradient-multigrid algorithm for the numerical solution of the Stokes problem, IMA J. Numer. Math., Anal. 4, pp. 441-455, 1984.
- [Ve89] R. Verfürth: A posteriori error estimators for the Stokes equations, Numer. Math., 55, pp. 309-325, 1989.
- [Ve94] R. Verfürth: A posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques, Jour. of. Comp. and Appl. Math. 50, pp. 67-83, 1994.
- [Ve96] R. Verfürth: A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, Wiley-Teubner, Chichester, UK, 1996.
- [Wei98] R. Weickenmeier: Netzerzeugung für dreidimensionale Objekte mit Löchern. Diplomarbeit, Universität Paderborn, 1998.
- [Yos80] K. Yosida: Functional Analysis, Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.