Numerische Approximation der Stokes-Gleichung mit künstlichen Randbedingungen in 3D Rohrsystemen

Stephan Blazy

Zusammenfassung

In dieser Arbeit betrachten wir die numerische Approximation der Stokes - Gleichung in dreidimensionalen Gebieten Ω mit unendlich langen zylindrischen Ausflüssen.

Randwertprobleme dieser Art erfordern asymptotische Bedingungen im Unendlichen, welche bereits in der Wahl der zu betrachtenden Funktionenräume enthalten sind oder explizit als vorgeschriebener Fluss bzw. Druckgradient angegeben werden können. Um unbeschränkte Gebiete numerisch behandeln zu können, schneidet man die unendlich langen Rohre an einer geeigneten Stelle ab und erhält ein endliches Gebiet Ω_R. Zur Approximation der Lösung u des Stokes - Problems im unendlichen Gebiet mit Lösungen u_R im endlichen Gebiet ist es erforderlich, das Stokes - System auf dem endlichen Gebiet mit einer Randbedingung auf $\Gamma_R = \partial\Omega_R \backslash \partial\Omega$ zu ergänzen. In Kapitel 1 werden zunächst einige geometrische Bezeichnungen und Funktionenräume erläutert und Existenz sowie Eindeutigkeitsaussagen im unbeschränkten Gebiet zusammengefaßt. Im Anschluß daran betrachten wir Randoperatoren im endlichen Gebiet Ω_R und untersuchen die Lösbarkeit in beschränkten Gebieten. Der Abschluss von Kapitel 1 beinhaltet eine Abschätzung des Fehlers von $|u - u_R|$.

In Kapitel 2 werden die Anforderungen an die Tetraedierung bzw. Triangulierung zusammengefasst und Interpolationseigenschaften angegeben. Anschließend betrachten wir die schwache Formulierung des Problems und definieren die zugehörigen Ansatzfunktionenräume. Zur numerischen Approximation verwenden wir in dieser Arbeit das Mini-Element, d.h ein P1-P1 Ansatz (linear in Druck und Geschwindigkeit), wobei der Ansatzfunktionenraum der Geschwindigkeit mit einer Bubblefunktion (Blasenfunktion) auf jedem Tetraederelement erweitert wird. Um die Existenz und Eindeutigkeit der diskreten Lösung zu zeigen, beweisen wir die Gültigkeit der Babuska-Brezzi Bedingung und zeigen im Anschluss eine Fehlerabschätzung für $|u^R - u_h^R|$. Zum Abschluss von Kapitel 2 werden die entstehenden linearen Gleichungssysteme beschrieben.

In Kapitel 3 stellen wir die Methode zur numerischen Simulation, einige Modellprobleme und deren numerische Ergebnisse vor. Die implementierten Algorithmen zur Lösung des diskreten Systems verwenden ein Konzept, welches auf der Datenstruktur des parallelen adaptiven Finite-Element-Pakets PadFEM (**P**arallel **ad**aptive **F**inite **E**lement **M**ethod) beruht. Zu Beginn von Kapitel 3 wird PadFEM mit einigen Beispielen vorgestellt. Anschließend werden verschiedene Randbedingungen anhand von Modellproblemen miteinander verglichen. Den Abschluss bilden Testrechnungen zu einigen Standardbeispielen.