

Graph-Einbettungen

unter besonderer Berücksichtigung von

Gitternetzwerken

Dissertation

von

Ulf-Peter Schroeder

Schriftliche Arbeit zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften

Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Paderborn

Paderborn,
Dezember 2000

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachbereich Mathematik/Informatik an der Universität Paderborn. Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Burkhard Monien für die Betreuung dieser Arbeit. Die Tätigkeit an seinem Lehrstuhl ermöglichte mir einen tiefgehenden und breiten Einblick in aktuelle Forschungsthemen. Darüber hinaus sorgte er sowohl durch die technische und finanzielle Ausstattung, als auch durch das Schaffen einer stimulierenden Arbeitsatmosphäre mit entsprechenden wissenschaftlichen Diskussionen für das Gelingen meiner Arbeit.

Für die vorbildliche wissenschaftliche Zusammenarbeit möchte ich mich des weiteren bei meinen Kollegen Dr. habil. Sergei Bezrukov und Dr. Markus Röttger bedanken. Viele der in dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse sind durch einen intensiven Ideenaustausch mit den vorgenannten Personen entstanden oder durch deren konstruktive Kritik erheblich verbessert worden.

Bei Christian Voss und Dr. Markus Röttger möchte ich mich zusätzlich für das Korrekturlesen dieser Arbeit bedanken, wodurch einige Fehler aufgedeckt werden konnten und die Lesbarkeit vieler Beweise deutlich verbessert werden konnte.

Weiterer Dank gilt meinen Kollegen Robert Elsässer, Dr. Ralf Diekmann, Robert Preis, Jürgen Schulze und Dr. Walter Unger für Anregungen, Hilfestellungen und fruchtbaren Diskussionen.

Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mich immer unterstützten und meine Ausbildung ermöglichten.

Paderborn, im Dezember 2000

Ulf-Peter Schroeder

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
1.1 Das Graph-Einbettungsproblem	3
1.2 Das Graph-Partitionierungsproblem	7
1.3 Resultate und Gliederung der Arbeit	9
2 Definitionen und Hilfssätze	11
3 Untere-Schranken-Methoden für einige Kostenmaße von Einbettungen	19
3.1 Isoperimetrische Probleme auf Graphen	19
3.2 Untere-Schranken-Methoden für die Kantenstreckung	26
3.3 Untere-Schranken-Methoden für die Kantenauslastung	28
3.4 Untere-Schranken-Methoden für den minimalen Schnitt einer k -Partitionierung .	29
4 Einbettungen binärer Hypercubes in d-dimensionale Gitter	33
4.1 Stand der Forschung	33
4.2 Überblick über die erzielten Ergebnisse	37
4.3 Betrachtung der Kantenauslastung	38
4.3.1 Die Schnittweite von Q^n	38
4.3.2 Das Kantenauslastungsproblem	43
4.3.3 Nachbetrachtungen	46
4.4 Betrachtung der Kantenstreckung	47
4.4.1 Das Kantenstreckungsproblem für zweidimensionale Gitter	47
4.4.2 Eine asymptotische obere Schranke für die Kantenstreckung	51
4.4.3 Eine asymptotische untere Schranken für die Kantenstreckung	55
4.5 Betrachtung der Leitungslänge	62
4.6 Betrachtung uniaxialer Algorithmen	65
4.7 Zusammenfassung	73

5 Einbettungen zweidimensionaler Gitter in zweidimensionale Gitter	75
5.1 Stand der Forschung und Überblick über die erzielten Ergebnisse	77
5.2 Betrachtung der Kantenauslastung	78
5.3 Betrachtung der Kantenstreckung	95
5.4 Zusammenfassung	99
6 Linie versus Ring	101
6.1 Stand der Forschung	102
6.2 Die zyklische Schnittweite beliebiger Bäume	103
6.2.1 Ein Einbettungsalgorithmus	103
6.2.2 Analyse des Einbettungsalgorithmus	107
6.3 Die zyklische Leitungslänge beliebiger Bäume	111
6.4 Zusammenfassung	115
7 Balancierte k-Partitionierungen von Hamming Graphen	117
7.1 Stand der Forschung	117
7.2 Schranken für den minimal erreichbaren Kantenschnitt	119
7.2.1 Diskussion der verschiedenen unteren Schranken für $\nabla_{H_a^n}(k)$	124
7.3 Asymptoten für $\nabla_{H_a^n}(k)$	126
7.4 Zusammenfassung	133
8 Zusammenfassung und Ausblick	137
8.1 Ergebnisse	137
8.2 Anwendungen	138
8.3 Erweiterungen	141
Literaturverzeichnis	147

Kapitel 1

Einleitung

Das parallele Rechnen hat sich in den letzten Jahren zweifelsfrei zu einer der Schlüsselfachrichtungen in der Informatik entwickelt. Diese Einschätzung wird auch durch die Tatsache gestützt, daß Parallelrechner mittlerweile in der Industrie eine nicht unerhebliche Akzeptanz erreicht haben. Diese Akzeptanz begründet sich wiederum durch die stetig wachsende Anzahl komplexer, industrieller Fragestellungen und Anwendungen in Verbindung mit den Schwierigkeiten, die Leistungsfähigkeit herkömmlicher, sequentieller Rechner entscheidend zu steigern. Die Autoren von strategischen Studien [47, 134] zu Hochleistungsrechnern (HPC) stimmen darin überein, daß diese Rechner in der Zukunft nur noch auf parallelen Architekturen basieren werden. Ein weiterer Aspekt, der die Akzeptanz von Parallelrechnern zusätzlich unterstützt, ist die kostengünstige Massenproduktion von Mikroprozessoren in Verbindung mit dem Trend in der architektonischen Entwicklung von HPC-Systemen, eine Vielzahl von standardisierten Prozessoren über Kommunikationsnetzwerke mit hoher Bandbreite in einer ökonomischen Weise zu einem Parallelrechner zu verknüpfen. Eine einfache und häufig verwandte Klassifizierung von Parallelrechnerarchitekturen wurde von Flynn (siehe [51]) gegeben. Danach gliedern sich Parallelrechner in SIMD- und MIMD-Rechner. SIMD steht dabei für „**S**ingle **I**nstruction **S**tream, **M**ultiple **D**ata **S**tream“. In SIMD-Rechnern führen alle Prozessoren simultan die gleiche Instruktion aber auf verschiedenen Daten aus. Wenn wir im weiteren von Parallelrechnern sprechen, gehen wir von dem mächtigeren Modell der MIMD-Rechner („**M**ultiple **I**nstruction **S**tream, **M**ultiple **D**ata **S**tream“) aus. Ein MIMD-System ist so konstruiert, daß jeder einzelne Prozessor unabhängig von den anderen Prozessoren ein eigenes Programm ausführen kann. Die Kommunikation der Prozessoren eines MIMD-Rechners geschieht bei allen relevanten Parallelrechnern diese Typs über einen verteilten Speicher mittels Nachrichtenaustausch (*Message Passing*).

Bedauerlicherweise steht dem enormen Leistungspotential heutiger Parallelrechner nach wie vor ein geringes Maß an Nutzungskomfort gegenüber. Die Programmierung eines Parallelrechners ist, gemessen an heutigen Maßstäben des *Software-Engineering*, relativ umständlich, und die Effizienzausbeute liegt oftmals weit unter dem theoretisch Möglichen. Dies liegt nicht zu-

letzt an der Tatsache, daß zur Effizienzsteigerung eines parallelen Programms die Architektur der Maschine berücksichtigt werden muß. Gemeinhin gehört es zu den Aufgaben der Programmierumgebung beziehungsweise des Betriebssystems, den Programmierer von diesen maschinenpezifischen Details zu entlasten. In den letzten Jahren wurden erhebliche Anstrengungen unternommen, Standards für parallele Programmierumgebungen zu entwickeln. In diesem Zusammenhang sei die Entwicklung von PVM (*Parallel Virtual Machine*) und die Definition von MPI (*Message Passing Interface*) erwähnt. Ein entscheidender Aspekt, um die Benutzerfreundlichkeit des parallelen Rechnens weiter zu steigern, ist die Entwicklung von effizienten Mechanismen für bestimmte *Basisdienste*, die gewisse von jedem Programmierer zu lösende Aufgaben übernehmen. Beispiele für solche Dienste sind die *Prozessorzuteilung*, *Lastverteilung* und die Realisierung komplexer *Kommunikationsprotokolle*. Effiziente Basisdienste ermöglichen effiziente Implementierungen einer ganzen Reihe von Anwendungen auf *Message Passing Systemen* mit verteiltem Speicher [110, 151]. Die Integration solcher Basisdienste in die Betriebssysteme der Parallelrechner vereinfacht die Entwicklung effizienter und portabler Software, wobei die Dienste eine Zwischenschicht zwischen dem Betriebssystem des Parallelrechners und dem Applikationsprogramm bilden. Innerhalb dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einer Auswahl theoretischer Fragestellungen für den Basisdienst „Prozessorzuteilung“, der auch „Prozeßmapping“ genannt wird. Ziel ist es hierbei, das parallele Programm möglichst „günstig“ auf den Parallelrechner abzubilden. Dabei bezieht sich das Maß „günstig“ auf die effiziente Ausnutzung der verfügbaren Ressourcen zum Zweck einer minimalen Programmabarbeitungszeit. Das parallele Programm besteht hierbei aus einer Menge in sich sequentieller Prozesse (*process, task, thread*), die an einer gemeinsamen Aufgabe arbeiten, und somit in einer bestimmten Art und Weise interagieren müssen (zum Beispiel beim Austausch von Zwischenergebnissen). Aus den Interaktionen der Prozesse ergibt sich direkt das Kommunikationsmuster des parallelen Programms, das es also gilt in geeigneter Weise auf den Parallelrechner abzubilden. Im wesentlichen werden wir uns in dieser Arbeit auf *statische Methoden* zur Prozessorzuteilung konzentrieren, die vor der Programmausführung unter Berücksichtigung gewisser Kenntnisse über die Applikation angewandt werden. Statische Methoden können bei einer ganzen Reihe von Applikationen angewandt werden. Als Beispiele seien nahezu alle Methoden in dem Bereich des *Scientific Computing* genannt. Im Gegensatz zu den statischen Methoden treffen *dynamische Methoden* ihre Plazierungsentscheidung während der Laufzeit basierend auf gewissen gesammelten Informationen. Applikationen bei denen dynamische Methoden eingesetzt werden zeichnen sich dadurch aus, daß während der Laufzeit in größtenteils unvorhersehbarer Weise neue Prozesse generiert werden, oder Prozesse ihre Kommunikationsanforderungen variieren. Beispiele für solche Applikationen sind adaptive Methoden zur numerischen Simulation. Auf Grund der Unvorhersagbarkeit der genauen Problemstellung zum Zeitpunkt der Plazierungsentscheidung basieren dynamische Methoden zumeist auf Heuristiken und werden häufig in Verbindung mit statischen Methoden angewandt. Effiziente statische wie auch dynamische Methoden hängen, wie bereits erwähnt, stark von der unterliegenden parallelen Architektur ab. Um theoretische Untersuchungen durchführen

zu können, werden abstrakte Modelle für die parallelen Architekturen verwandt. Diese Modelle sollen auf der einen Seite sehr einfach gehalten sein, aber auf der anderen Seite auch die wesentlichen Charakteristiken erfassen. Zu den populärsten Modellen, die sich jeweils in der Art und Weise wie die Prozessoren und das Kommunikationsnetzwerk beschrieben werden unterscheiden, gehören das *LogP*-Modell [39], das *BSP*-Modell [138] und das *Distributed Memory Model (DMM)* [86, 99].

Das *LogP*-Modell beschreibt die Kommunikationseigenschaften des parallelen Systems mit Hilfe der Parameter L , einer oberen Schranke für die Zeit, die das Netzwerk für die Übertragung einer Nachricht braucht (also quasi die Kommunikations-Verzögerung), o , dem *Overhead* für das Absetzen einer Nachricht in das Netzwerk und g , dem erforderlichen Zeitraum, der zwischen dem Absetzen zweier aufeinanderfolgender Nachrichten eines Prozessors mindestens vergehen muß. Der Parameter P steht für die Anzahl der Prozessoren in dem parallelen System.

Das *BSP*-Modell ist eher ein Programmier- als ein Maschinenmodell. In diesem Modell wird zwischen Berechnungs- und Kommunikationsphasen unterschieden. Eine (asynchrone) Kommunikation kann dabei durchaus in der Berechnungsphase aufgesetzt werden, jedoch stellt dann eine nachfolgende Synchronisation unter allen Prozessoren sicher, daß alle Nachrichten ihr Ziel erreicht haben, bevor die nächste Phase beginnt. Bei der Analyse einer Applikation wird die Anzahl der notwendigen Phasen gezählt.

Das *DMM* beschreibt die topologische Struktur des parallelen Systems mit Hilfe eines einfachen Graphen, bei dem die Prozessoren durch die Knoten und die Kommunikationsverbindungen durch die Kanten repräsentiert werden. Hierbei werden also Details wie beispielsweise die Zeit, die für das Aufsetzen einer Nachricht erforderlich ist, ignoriert, aber implizit Informationen zu der Nachrichtenverzögerung und die Kommunikationsbandbreite, soweit sie aus der Netzwerktopologie her ersichtlich sind, erfaßt. Im weiteren werden wir für unsere Untersuchungen dieses Modell verwenden.

1.1 Das Graph-Einbettungsproblem

Die Effizienz eines parallelen Programms, das auf einem MIMD-Rechner mit verteiltem Speicher umgesetzt wird, hängt entscheidend von der Plazierung der Prozesse des Programms ab. Bei dem statischen Prozessorzuteilungsproblem gehen wir davon aus, daß wir vor dem Start der Applikation vollständiges Wissen über die von dem parallelen Programm generierten Prozesse und deren Kommunikationsanforderungen haben. Da wir das *DMM* als Modell für den Parallelrechner verwenden, können wir somit das Problem der Prozessorzuteilung als ein Graph-Einbettungsproblem formulieren. Einbettungen sind mathematische Beschreibungen von Simulationen zwischen Strukturen, die durch Graphen abstrahiert werden können. Das Kommunikationsmuster der Applikation abstrahieren wir durch den Prozeßgraphen. Das heißt, jeder Knoten dieses Graphen entspricht einem Prozeß, und zwei Knoten sind durch eine Kante miteinan-

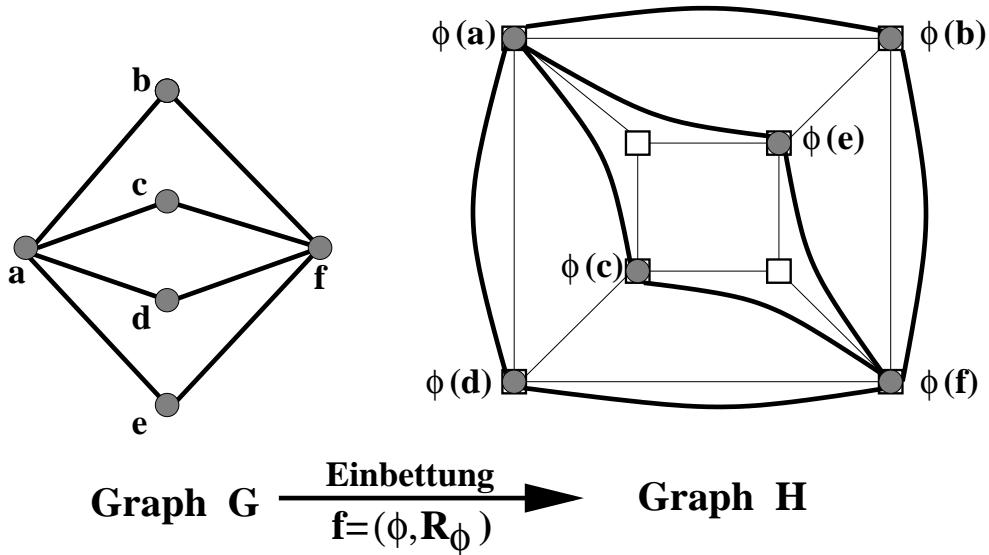


Abb. 1.1: Eine Einbettung $f = (\phi, R_\phi)$ eines Graphen G (linkes Bild) in einen dreidimensionalen Hypercube-Graphen H (rechtes Bild). Die Knotenabbildung ist durch die Funktion ϕ definiert und die Kantenabbildung, R_ϕ , durch die in Fettdruck dargestellten Wege. Die Last der Einbettung ist eins, die Kantenstreckung und die Kantenauslastung jeweils zwei, und die Leitungslänge zwölf. Betrachten wir die Kanten (a,c) und (a,e) des Graphen G , so werden diese jeweils auf einen Weg in H der Länge zwei „gestreckt“. Die Bilder dieser Kanten verlaufen über eine gemeinsame Kante des Graphen H . Das heißt, diese Kante wird zweifach „belastet“. Analoge Betrachtungen lassen sich für die Kanten (c,f) und (e,f) durchführen. Insgesamt werden jeweils vier Kanten auf die Länge eins und zwei gestreckt, also ist die Leitungslänge zwölf.

der verbunden, falls die jeweiligen Prozesse im Programmverlauf miteinander kommunizieren. Durch eine Einbettung des Prozeßgraphen in den Prozessorgraphen des DMM wird jeder Knoten im Prozeßgraphen auf einen Knoten im Prozessorgraphen und jede Kante des Prozeßgraphen auf einen Weg im Prozessorgraphen abgebildet. Die Güte einer Einbettung des Prozeßgraphen in den Prozessorgraphen wird üblicherweise durch die Kostenmaße Last, Kantenstreckung, Kantenauslastung und Leitungslänge beschrieben. Dabei entspricht die Last der maximalen Anzahl von Prozessen, die auf einen Prozessor abgebildet werden. Die Kantenstreckung beschreibt die maximale „Entfernung“ zwischen kommunizierenden Prozessen und die Leitungslänge ist die Summe aller Streckungen der Kanten des Prozeßgraphen. Die Kantenauslastung gibt an, wie oft eine Kante des Prozessorgraphen maximal in einem Weg, der dem Bild (bezüglich der Einbettung) einer Kante im Prozeßgraphen entspricht, enthalten sein kann (siehe Abbildung 1.1).

Falls sich eine bezüglich der gerade beschriebenen Kostenmaße qualitativ gute Einbettung eines Graphen G in einen Graphen H bestimmen lässt, so können wir davon ausgehen, daß ein paralleles Programm mit Prozeßgraph G auf einem Parallelrechner mit Prozessorgraph H „gut“ simuliert werden kann. Die Kostenmaße Last, Kantenstreckung und Kantenauslastung beschrei-

ben bei dieser Simulation die Verzögerung des parallelen Programms im Vergleich zu seiner Laufzeit auf einem Parallelrechner, dessen Prozessorgraph isomorph zu dem Prozeßgraphen ist. Existiert eine Einbettung eines Graphen G in einen Graphen H mit beliebiger aber fester Last, Kantenstreckung d und Kantenauslastung c , so kann ein Kommunikationsschritt im Prozeßgraphen G (das heißt, über jede Kante von G wird höchstens ein Datenpaket verschickt) in $d \cdot c$ Schritten auf einem Parallelrechner mit Prozessorgraph H simuliert werden. Leighton et al. konnten in [87] die Existenz eines optimalen *Schedulings* der Datenpakete nachweisen, das die Simulation eines solchen Kommunikationsschrittes in $O(d + c)$ Schritten erlaubt. In [88] beschrieben Leighton, Maggs und Richa die off-line Berechnung dieses *Schedulings*. Für weitere interessante Ergebnisse zu dieser Thematik, insbesondere zur on-line Berechnung eines *Schedulings*, siehe [104, 115, 123, 128].

Als Optimierungsprobleme formuliert bestehen die hier betrachteten allgemeinen Graph-Einbettungsprobleme darin, für zwei gegebene Graphen G und H eine Einbettung von G in H mit minimaler Last und minimaler Kantenstreckung beziehungsweise minimaler Kantenauslastung zu bestimmen. Für die entsprechenden Entscheidungsprobleme ist bekannt, daß sie *NP*-vollständig sind [54], so daß im allgemeinen keine beweisbar optimalen Einbettungsverfahren entwickelt werden können. Für spezielle wohldefinierte Graphen wurden in den letzten Jahren allerdings eine Vielzahl von hervorragenden Ergebnissen veröffentlicht, wobei sich die meisten Resultate auf die Entwicklung von Techniken und somit auf die Bestimmung von oberen Schranken für die beschriebenen Kostenmaße Last, Kantenstreckung und Kantenauslastung beschränken. Vom praktischen Standpunkt aus sind sogenannte *many-to-one* Einbettungen von besonderer Bedeutung. Das heißt, der Graph G hat (deutlich) mehr Knoten als der Graph H , und das primäre Optimierungsziel bei der Bestimmung einer Einbettung ist die Minimierung der Last. Da im allgemeinen durch geeignete Graphschrumpfungstechniken der Graph G auf einen Graphen mit gleicher oder nur geringfügig geringerer Knotenzahl als H „verkleinert“ werden kann ohne dabei die wesentlichen topologischen Eigenschaften des Graphen G zu verlieren, sind vom theoretischen Standpunkt aus insbesondere sogenannte *eins-zu-eins* beziehungsweise *injektive* Einbettungen Gegenstand der Forschung. Hierbei wird auf jeden Knoten von H höchstens ein Knoten von G abgebildet, und das Optimierungsziel bei der Bestimmung einer Einbettung ist die Minimierung der Kantenstreckung oder der Kantenauslastung.

Die Ergebnisse der graphentheoretischen Untersuchungen zu Einbettungen von Graphen wurden mehrfach als Grundlage verwandt, um Prozeßmapping-Bibliotheken als Basisdienste zu implementieren [97, 152, 153, 158]. Diese Bibliotheken bestehen aus einer Sammlung effizienter Einbettungen zwischen den populärsten Graphen (Gittern, Tori, Hypercubes, de Bruijn Graphen, vollständigen Graphen und vollständigen Bäumen). Der Benutzer kann mit Hilfe der Bibliotheken nahezu unabhängig von dem realen Netzwerk oder von der Größe des Parallelrechners auf dem System arbeiten, das am besten zu seinem parallelen Programm paßt. In Abbildung 1.2 ist dieses Vorgehen skizziert.

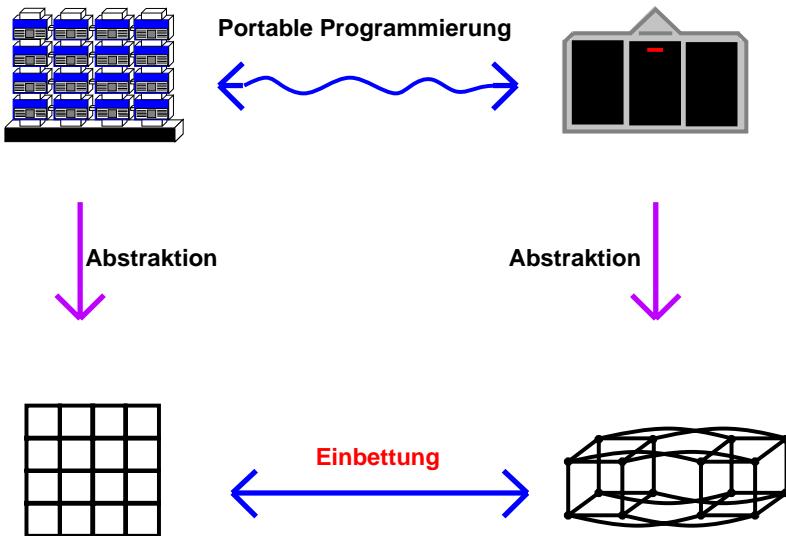


Abb. 1.2: Simulation zwischen einem gitterbasierten Parallelrechner und einem hypercubebasierten Parallelrechner durch die Berechnung einer Einbettung.

Einbettungen spielen neben ihrer grundsätzlichen graphentheoretischen Bedeutung und den hier beschriebenen Anwendungen, die durch das parallele Rechnen motiviert sind, auch zum Beispiel in dem Bereich VLSI-Design eine Rolle. (VLSI = „Very-Large-Scale-Integration“). Mit diesem Begriff wird der Entwurf integrierter Schaltkreise bezeichnet. Um eine Plazierung der Bauelemente und der Verbindungen des Schaltkreises auf einer Platine zu bestimmen, wird die Platine durch ein zweidimensionales Gitter abstrahiert und eine Einbettungen des dem Schaltkreis unterliegenden Graphen in eben dieses zweidimensionale Gitter berechnet. Für eine allgemeine Einführung in diesen Themenbereich siehe [19, 35, 89, 91]. Weitere Anwendungen von Einbettungen lassen sich in der Modellierung bestimmter kombinatorischer Fragestellungen finden. In [136] wird eine Übersicht zu diesem Themenbereich gegeben.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns im wesentlichen mit der Bestimmung beweisbar optimaler, injektiver Einbettungen von bestimmten strukturierten Graphen (Hypercubes, Gitter und beliebige Bäume) in mehrdimensionale Gitter (Kapitel 4, 5 und 6). Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Entwicklung und exemplarischen Anwendung von Methoden zur Bestimmung von unteren Schranken für die Kostenmaße Kantenstreckung und Kantenauslastung bei injektiven Einbettungen (Kapitel 3). Da, wie bereits erwähnt, die allgemeinen Graph-Einbettungsprobleme *NP*-vollständig sind, können wir nicht erwarten für unstrukturierte Graphen beweisbar optimale Einbettungsverfahren zu entwickeln. Vom praktischen Standpunkt aus wird deswegen im allgemeinen das Problem auf ein *Graph-Partitionierungsproblem* reduziert. Dieser Ansatz wird im nächsten Abschnitt genauer beschrieben.

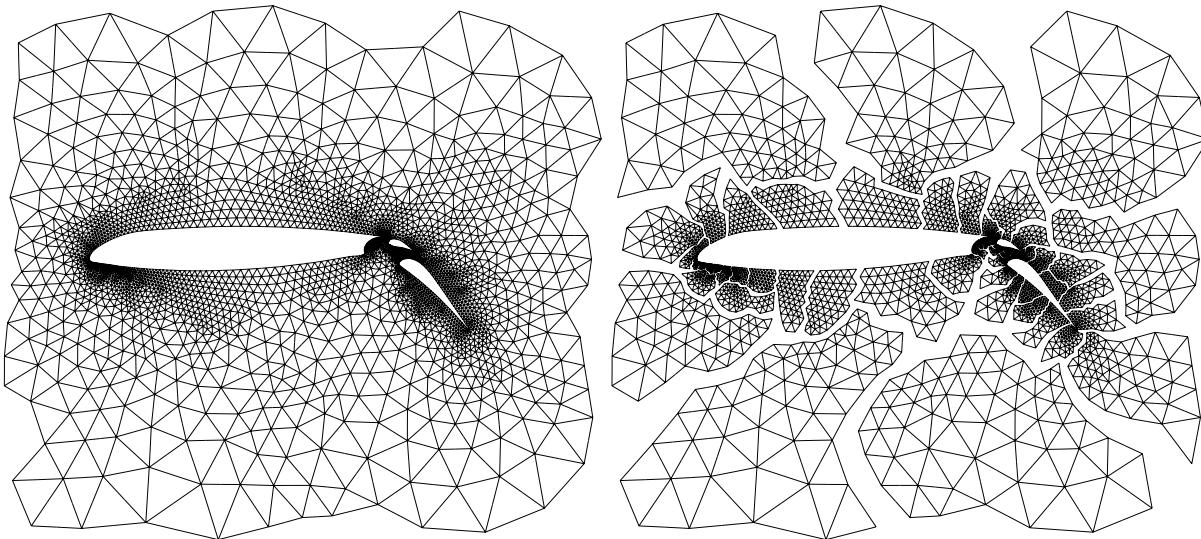


Abb. 1.3: Ein zweidimensionaler FEM Graph zur numerischen Berechnung der Luftströmung um eine Flugzeugtragfläche (linkes Bild), und derselbe Graph in 64 gleichgroße Partitionen aufgeteilt (rechtes Bild).

1.2 Das Graph-Partitionierungsproblem

Das Graph-Partitionierungsproblem kann als eine Relaxation des *many-to-one* Einbettungsproblems angesehen werden. Während bei der Konstruktion von Einbettungen die Topologie des simulierenden Graphen berücksichtigt wird, sollen bei dem Problem der Graphpartitionierung die Knoten des Graphen lediglich in eine vorgeschriebene Anzahl von gleichgroßen Teilmengen so aufgeteilt werden, daß die Anzahl der Kanten zwischen den Teilmengen minimal ist. Das heißt, es wird implizit davon ausgegangen, daß der simulierende Graph einem vollständigen Graphen (oder auch Clique genannt) entspricht. Das Problem der Berechnung einer balancierten k -Partitionierung (das heißt, einer Aufteilung der Knoten in k gleichgroße Teilmengen, so daß die Anzahl der Kanten zwischen den Teilmengen minimal ist) kann wiederum dadurch relaxiert werden, daß rekursiv eine Reihe von Partitionierungen in zwei Teilmengen durchgeführt werden. Die Lösung des balancierten k -Partitionierungsproblems ist schon für den Spezialfall der Partitionierung in zwei Teilmengen (Bisektionsproblem) NP -vollständig [54], und somit existieren keine effizienten Verfahren, die eine optimale Lösung für allgemeine Graphen berechnen. Für spezielle Graph-Klassen wurden in den letzten Jahren eine Reihe von exakten Ergebnissen oder aber untere und obere Schranken für die minimale Anzahl der Schnittkanten bei einer Aufteilung der Graphen in zwei gleichgroße Mengen ermittelt. Für einen Überblick siehe [18, 109, 120].

Für die meisten Anwendungen wird eine balancierte k -Partitionierung durch den rekursiven

Einsatz von effizienten Bisektionsheuristiken berechnet. Bei diesen Verfahren wird üblicherweise zwischen *globalen* (oder *Konstruktions-*) und *lokalen* (oder *Verbesserungs-*) Heuristiken [63] unterschieden. Die globalen Methoden erhalten den Graphen als Input und berechnen eine balancierte Bisektionierung, während die lokalen Methoden neben dem Graphen eine bestehende balancierte Bisektionierung als Input erhalten und versuchen, diese bezüglich der Anzahl der Schnittkanten zu verbessern. Die leistungsfähigsten globalen Techniken sind *Inertial*-, *Spectral*-, und *Geometric-Partitioning* [45, 57, 63, 70], insbesondere wenn diese mit Graphschrumpfungs-techniken zusammen verwandt werden [69, 78, 122]. Die effizientesten lokalen Methoden sind Varianten der *Kernighan-Lin* (KL) [81] und der *Helpful-Set* Heuristik (HS) [45]. Beide Methoden basieren auf dem Prinzip der lokalen Suche und versuchen Paare beziehungsweise Mengen von Knoten zu bestimmen, die bei einem Austausch zwischen zwei existierenden Partitionen die Anzahl der Schnittkanten verringern. Durch die Kombination leistungsfähiger globaler und lokaler Methoden werden die besten Ergebnisse [69, 79, 117, 121, 140] erzielt.

Um die Qualität gegebener Verfahren zu beurteilen, ist es neben entsprechenden Tests auf Benchmark-Graphen insbesondere wichtig, Schranken für die k -Partitionierung gewisser Graphen zu bestimmen. Ausgehend von der Fragestellung nach einer k -Partitionierung des Hypercubes beschreiben wir in Kapitel 7 unsere Ergebnisse für die den Hypercube beinhaltende Graph-Klasse der Hamming-Graphen.

Werden die erwähnten k -Partitionierungs-Techniken zur Bestimmung einer *many-to-one* Einbettung eines Graphen auf eine gegebene Zieltopologie verwandt, so geschieht dies durch ein zweistufiges Verfahren. Dabei wird zunächst der gegebene Graph unter Verwendung einer dieser Techniken in so viele Teile zerlegt, wie Knoten in der Zieltopologie vorhanden sind. Anschließend wird der sogenannte Clustergraph gebildet, indem jede entstandene Partition als ein Knoten aufgefaßt wird und zwei solche Knoten durch eine Kante miteinander verbunden werden, wenn in dem ursprünglichen Graphen mindestens zwei Knoten existieren, die durch eine Kante verbunden sind und die durch die Zerteilung nun den den beiden Knoten entsprechenden Partitionen zugeordnet wurden. Der so entstandene Graph wird dann auf die Zieltopologie abgebildet. Dieser zweite Schritt könnte für kleine Graphen beispielsweise mittels exakter Verfahren aus der Optimierungstheorie optimal gelöst werden. Für große Graphen jedoch wird mittels Meta-Heuristiken wie beispielsweise *Simulated Annealing* eine Näherung der Lösung bestimmt. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß wir im Rahmen unserer Forschung auch einen Ansatz untersucht und implementiert haben, der auf einer Adaption des Kohonen-Mappings für das Graph-Einbettungsproblem beruht und versucht, die gerade beschriebenen zwei Schritte miteinander zu vereinigen. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit allerdings auf der Bestimmung beweisbar optimaler Einbettungsverfahren liegt, werden wir auf diese Arbeiten nur kurz in dem Kapitel 8 eingehen.

Die oben beschriebene Vorgehensweise bei der Prozessorzuteilung entspricht einer statischen Methode. Falls bei einer Applikation allerdings während der Laufzeit neue Prozesse generiert

werden, oder die Prozesse ihre Kommunikationsanforderungen variieren, sind neue Plazierungsentscheidungen zu treffen. Dieses Problem wird durch zwei prinzipielle Ansätze angegangen. Einerseits werden Verfahren zur *dynamischen Lastverteilung* genutzt, die, aufbauend auf den bis dato getroffenen Plazierungsentscheidungen, versuchen, auf die neue Situation zu reagieren, indem eine unter gewissen Kostenkriterien zufriedenstellende Adaption der bisherigen Plazierung berechnet und durchgeführt wird. Für einen vertiefenden Einblick zu diesen Verfahren siehe [42, 49]. Als Alternative hierzu kommen wiederum Graph-Partitionierungsverfahren zum Einsatz [141]. Dabei wird zu diskreten Zeitpunkten auf die dynamische Veränderung des Prozeßgraphen durch eine komplette Neu-Partitionierung desselbigen reagiert. Dies führt im allgemeinen zwar zu einer guten Plazierung der Prozesse, demgegenüber steht allerdings ein hoher Aufwand zur Prozeßmigration. Das Ergebnis eines Vergleichs zwischen diesen beiden Ansätzen hängt im hohen Maße von der Dynamik der Anwendung ab.

1.3 Resultate und Gliederung der Arbeit

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Analyse von Einbettungen hypercubischer und gitterähnlicher Strukturen in d -dimensionale Gitter. Dabei unterscheiden wir zwischen beweisbar optimalen injektiven Einbettungen und der Untersuchung des entsprechenden k -Partitionierungsproblems. Besonderer Beachtung haben wir dabei der Entwicklung und exemplarischen Anwendung von Methoden zur Bestimmung von unteren Schranken für die entsprechenden Kostenmaße gewidmet. Darüber hinaus beschreiben wir in dieser Arbeit unsere Ergebnisse für einige weitere theoretische Fragestellungen, die sich im Zusammenhang mit der Untersuchung von Einbettungen in Gitternetzwerke ergeben haben. Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden auf mehreren internationalen Konferenzen vorgestellt beziehungsweise in verschiedenen Fachzeitschriften veröffentlicht (siehe Literaturverzeichnis ab Seite 143).

Kapitel 2 besteht aus einer Zusammenfassung der für das Verständnis dieser Arbeit benötigten formalen Definitionen der hier betrachteten Graph-Klassen, Einbettungen und deren wesentlichen Kostenmaße, sowie bestimmten fundamentalen mathematischen Aussagen.

In Kapitel 3 beschreiben wir die von uns entwickelten und verwandten Methoden zur Bestimmung unterer Schranken für die Kostenmaße einer injektiven Einbettung, Kantenstreckung und Kantenauslastung. Darüber hinaus gehen wir auf Methoden zur Bestimmung unterer Schranken für den minimalen Schnitt einer k -Partitionierung ein. Die hier beschriebenen Methoden bilden in den nachfolgenden Kapiteln die Grundlage für eine ganze Reihe von Beweisen.

Kapitel 4 ist der Bestimmung beweisbar optimaler Einbettungen von binären hypercubischen Graphen in mehrdimensionale Gitter gewidmet. Die in diesem Zusammenhang erzielten Ergebnisse (siehe Abschnitt 4.2) bilden die Basis für die Veröffentlichungen in dem Tagungsband der Konferenz *Mathematical Foundations of Computer Science* [145] und in dem Journal *Discrete Mathematics* [146].

In Kapitel 5 beschäftigen wir uns mit einem Spezialfall der Einbettung zweidimensionaler Gitter in andere zweidimensionale Gitter. Die erzielten Ergebnisse (siehe Abschnitt 5.1) runden neben ihrer eigenständigen Bedeutung auch die Betrachtungen des Kapitel 4 ab. Auszüge der hier dargestellten Ergebnisse bilden die Grundlage für die Veröffentlichungen in dem Tagungsband des internationalen *Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* [155] sowie in dem Journal *Discrete Applied Mathematics* [156].

In Kapitel 6 diskutieren wir das Problem, ob es bei der Einbettung eines Graphen bezüglich der Kostenmaße Kantenstreckung, Kantenauslastung und Leitungslänge von Bedeutung ist, ob die Zieltopologie eine Linie oder ein Ring ist. Neben prinzipiellen Aussagen untersuchen wir diese Fragestellung insbesondere für beliebige Bäume. Unsere Ergebnisse (siehe Abschnitte 6.2 und 6.3) können als Erweiterungen der Arbeiten [33] und [75] angesehen werden und sind in dem Journal *Discrete Applied Mathematics* [149] veröffentlicht.

In Kapitel 7 bestimmen wir ausgehend vom Hypercube Schranken für die k -Partitionierung von Hamming Graphen (einer Graph-Klasse, die den Hypercube beinhaltet). Dabei verwenden wir wiederum eine Methode zur Bestimmung einer unteren Schranke, die in Kapitel 3 beschrieben ist. Veröffentlicht sind die Ergebnisse dieses Kapitels (siehe Abschnitt 7.2) in dem Tagungsband der internationalen *Conference on Computing and Combinatorics* [148] sowie in dem Journal *Discrete Applied Mathematics* [147].

Im abschließenden Kapitel 8 fassen wir zunächst die wichtigsten in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse zusammen und gehen danach kurz auf die von uns implementierten Einbettungsbibliotheken für die parallele Laufzeitumgebung PARIX (**P**ARallel extensions to **U**nIX) ein. Die Arbeiten, die zu diesen Bibliotheken geführt haben, sind veröffentlicht in den Tagungsbändern der Konferenz *EURO-PAR Parallel Processing* [152], des *Workshop on Parallel Programming and Computation* [153] sowie der internationalen *Conference and Exhibition on High-Performance Computing and Networking* [158]. Darüber hinaus diskutieren wir in diesem Kapitel das Problem der Einbettung unstrukturierter Gitter, wie sie beispielsweise bei der numerischen Simulation von Differentialgleichungssystemen auftreten.

Kapitel 2

Definitionen und Hilfssätze

Wir führen hier zunächst die grundlegenden und in dieser Arbeit verwandten mathematischen Symbole und Bezeichnungen auf. Alle anderen in dieser Arbeit auftretenden Symbole und Bezeichner sind entweder im Verlaufe dieses Kapitels oder aber an den Stellen ihres ersten Auftritts explizit definiert.

\mathbb{N}, \mathbb{Z}	: die Menge der natürlichen beziehungsweise der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$: die Menge der reellen Zahlen größer oder gleich Null
$[a]$: kleinste ganze Zahl $\geq a$
$\lfloor a \rfloor$: größte ganze Zahl $\leq a$
$a b$: b ist durch a teilbar
$a \bmod m$: $b = a \bmod m$, genau dann wenn $m (a - b)$ mit $0 \leq b < m$
$a \equiv b \bmod m$: a ist kongruent zu b modulo m , das heißt $m (a - b)$
f^{-1}	: Umkehrfunktion zu einer injektiven Funktion f
$ A $: Kardinalität der Menge A
A^c	: Komplementmenge von A bezüglich einer festen Grundmenge

Definition 2.1 Gegeben seien die positiven Funktionen $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir verwenden folgende asymptotische Notationen:

$$(a) \ f = O(g) \Leftrightarrow \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n),$$

$$(b) \ f = \Theta(g) \Leftrightarrow f = O(g) \wedge g = O(f),$$

$$(c) \ f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0,$$

$$(d) \ f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Als nächstes werden wir den Begriff einer „Graph-Einbettung“ formal definieren.

Definition 2.2 Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ endliche, ungerichtete Graphen. Eine *Einbettung* $f = (\phi, R_\phi)$ des *Gastes* G in den *Gastgeber* H besteht aus einer Funktion $\phi : V_G \rightarrow V_H$ und einem Routing-Schema R_ϕ , das jeder Kante $e = \{u, v\} \in E_G$ einen einfachen Weg in H von $\phi(u)$ nach $\phi(v)$ zuordnet. Falls ϕ eine injektive Funktion ist, sprechen wir von einer *eins-zu-eins* beziehungsweise *injektiven* Einbettung, anderenfalls von einer *many-to-one* Einbettung. Der Wert $|V_H|/|V_G|$ wird als *Expansion einer Einbettung* bezeichnet.

Zur Beurteilung der Qualität einer Einbettung definieren wir nun die folgenden Kostenmaße.

Definition 2.3 Die *Auslastung einer Kante* $e' \in E_H$ bezüglich einer Einbettung f , $\text{con}_f(e')$, ist die Anzahl der Wege in R_ϕ , die e' enthalten. Das heißt, sie entspricht $|\{e \in E_G \mid e' \in R_\phi(e)\}|$. Das Maximum über die Auslastungen aller Kanten aus E_H wird als die *Kantenauslastung einer Einbettung* f , $\text{con}_f(G, H)$, bezeichnet.

Definition 2.4 Die *Streckung einer Kante* $e \in E_G$ bezüglich einer Einbettung f , $\text{dil}_f(e)$, ist die Länge des Weges $R_\phi(e)$. Unter der *Kantenstreckung einer Einbettung* f , $\text{dil}_f(G, H)$, wird die Länge des längsten Weges in $\{R_\phi(e) \mid e \in E_G\}$ verstanden.

Definition 2.5 Sei $\text{dil}_f(e)$ jeweils die Streckung einer Kante $e \in E_G$ bezüglich einer Einbettung f . Die *Leitungslänge einer Einbettung* f , $\text{wl}_f(G, H)$, entspricht der Summe über alle Streckungen der Kanten $e \in E_G$. Das heißt, $\text{wl}_f(G, H) = \sum_{e \in E_G} \text{dil}_f(e)$.

Definition 2.6 Für die Klasse F aller wohldefinierten injektiven Einbettungen f eines Graphen $G = (V_G, E_G)$ in einen Graphen $H = (V_H, E_H)$, definieren wir die folgenden Optimierungsprobleme

$$\begin{aligned}\text{dil}(G, H) &= \min_{f \in F} \max_{e \in E_G} \text{dil}_f(e), \\ \text{con}(G, H) &= \min_{f \in F} \max_{e' \in E_H} \text{con}_f(e'), \\ \text{wl}(G, H) &= \min_{f \in F} \text{wl}_f(G, H).\end{aligned}$$

Es ist bekannt, daß die entsprechenden Entscheidungsprobleme zu den oben genannten Optimierungsproblemen für allgemeine Graphen G und H allesamt *NP*-vollständig sind [54]. Als Beispiel sei hier das folgende Problem genannt: Gegeben sind die Graphen G und H und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Gibt es eine injektive Einbettung von G in H mit Kantenstreckung k ? Der Nachweis der *NP*-Vollständigkeit dieses Problems läßt sich relativ einfach durch eine Reduktion des Bandweitenproblems führen. Dieses Problem werden wir nun formal definieren.

Definition 2.7 Eine Knotennumerierung von $G = (V_G, E_G)$ ist eine bijektive Funktion $\eta : V_G \longrightarrow \{1, 2, \dots, |V_G|\}$. Eine solche Numerierung entspricht einer Einbettung des Graphen G in die Linie der Länge $|V_G|$. (Für die formale Definition einer Linie siehe Definition 2.14.) Für jedes l , $0 \leq l \leq |V_G|$, sei die Menge der ersten l Knoten von G bezüglich η wie folgt definiert: $S_l(\eta) = \eta^{-1}(\{1, \dots, l\})$. Wir bezeichnen die Menge $S_l(\eta)$ als *initiales Segment* der Ordnung η .

Definition 2.8 Die Bandweite von $G = (V_G, E_G)$ bzgl. einer Knotennumerierung η , $\text{bw}(G, \eta)$, ist wie folgt definiert: $\text{bw}(G, \eta) = \max\{|\eta(u) - \eta(v)| \mid \{u, v\} \in E_G\}$. Die *Bandweite von G* ist dann $\text{bw}(G) = \min_{\eta} \text{bw}(G, \eta) = \text{dil}(G, G^1)$, wobei G^1 dem eindimensionalen Gitter (respektive der Linie) der Länge $|V_G|$ entspricht. (Für die formale Definition von G^1 siehe Definition 2.14.)

Papadimitriou [116] zeigte, daß die Bestimmung der Bandweite für allgemeine Graphen (oder kurz das Bandweitenproblem) ein *NP*-vollständiges Problem ist. In der Folgezeit erschienen eine ganze Reihe von Arbeiten zum Bandweitenproblem, insbesondere zur Entwicklung von Approximationsalgorithmen. Für eine Übersicht siehe [34, 35, 139].

Definition 2.9 Die Schnittweite von $G = (V_G, E_G)$ bzgl. einer Knotennumerierung η , $\text{cw}(G, \eta)$, ist wie folgt definiert: $\text{cw}(G, \eta) = \max_{m \in \{1, \dots, |V_G|\}} |\{\{u, v\} \in E_G \mid \eta(u) \leq m < \eta(v)\}|$. Die *Schnittweite von G* ist dann $\text{cw}(G) = \min_{\eta} \text{cw}(G, \eta) = \text{con}(G, G^1)$, wobei wiederum G^1 dem eindimensionalen Gitter (respektive der Linie) der Länge $|V_G|$ entspricht.

Stockmeyer (siehe [55]) wies für allgemeine Graphen die *NP*-Vollständigkeit des Schnittweitenproblems nach. Auch hier erschienen in der Folgezeit eine Reihe von weiteren Arbeiten zu diesem Thema. In Kapitel 6 geben wir eine Übersicht hierzu.

Als nächstes werden wir den Begriff der „Graph-Partitionierung“ formal definieren.

Definition 2.10 Sei $G = (V_G, E_G)$ ein endlicher, ungerichteter Graph. Eine k -*Partitionierung* des Graphen G ist gegeben durch eine Funktion $\pi : V_G \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, die die Knoten des Graphen in Mengen $A_i = \{v \in V_G \mid \pi(v) = i\}$, $i = 1, \dots, k$, aufteilt. Wir bezeichnen die entsprechende k -Partitionierung mit $A_G = \{A_1, \dots, A_k\}$. Falls $||A_i| - |A_j|| \leq 1$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ gilt, so sprechen wir von einer *balancierten k -Partitionierung*.

Zur Beurteilung der Qualität einer k -Partitionierung definieren wir das folgende Kostenmaß.

Definition 2.11 Der *Kantenschnitt* einer k -Partitionierung $A_G = \{A_1, \dots, A_k\}$ ist durch die Menge $\nabla A_G = \{\{u, v\} \in E_G \mid u \in A_i, v \in A_j, i \neq j\}$ definiert. Für die Klasse P aller wohldefinierten, balancierten k -Partitionierungen von $G = (V_G, E_G)$ definieren wir das folgende Optimierungsproblem

$$\nabla_G(k) = \min_{A_G \in P} |\nabla A_G|.$$

Es ist bekannt, daß das entsprechende Entscheidungsproblem zu dem k -Partitionierungsproblem NP -vollständig ist [54]. Darüber hinaus bleibt das Problem NP -vollständig für $k = 2$, und in [25] wurde gezeigt, daß diese Aussage auch für reguläre Graphen zutrifft.

Als nächstes geben wir die formalen Definitionen der von uns betrachteten Graphen an.

Definition 2.12 Das *kartesische Produkt der Graphen* G_i , mit $G_i = (V_{G_i}, E_{G_i})$ für $i = 1, \dots, n$, wird mit $G_1 \times \dots \times G_n$ bezeichnet. Dieser Graph besteht aus der Knotenmenge $V_{G_1} \times \dots \times V_{G_n}$ und zwei Knoten (u_1, \dots, u_n) und (v_1, \dots, v_n) sind genau dann adjazent, wenn $\exists i : \{u_i, v_i\} \in E_{G_i}$ und $\forall j \neq i : u_j = v_j$.

Definition 2.13 Der *Hypercube der Dimension n*, $Q^n = (V_{Q^n}, E_{Q^n})$, ist der Graph mit der Knotenmenge $V_{Q^n} = \{0, 1\}^n$ und der Kantenmenge $E_{Q^n} = \{\{a, b\} \mid a, b \in V_{Q^n}, H(a, b) = 1\}$, wobei H die Hamming-Distanz bezeichnet, das heißt, die Anzahl der Bits, in denen sich die Argumente unterscheiden.

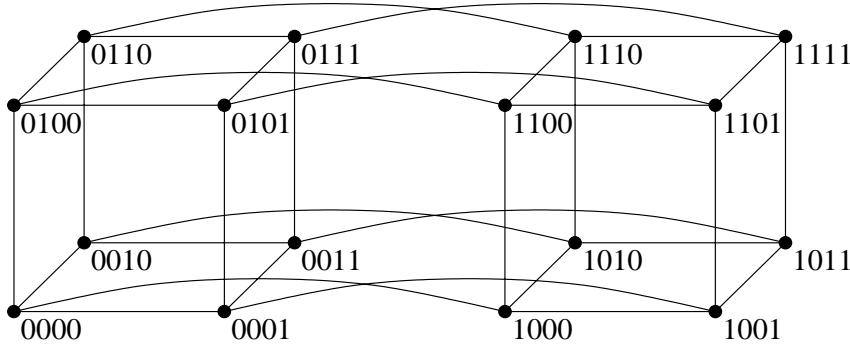


Abb. 2.1: Der Hypercube Q^4 .

Definition 2.14 Das *d-dimensionale Gitter* mit den Seitenlängen N_i , $i = 1, \dots, d$, bezeichnen wir im folgenden mit $G^d = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_d$. Es ist der Graph (V_{G^d}, E_{G^d}) mit der Knotenmenge $V_{G^d} = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid 0 \leq x_i < N_i\}$ und der Kantenmenge $E_{G^d} = \{\{(x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d)\} \mid (x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d) \in V_{G^d} \text{ und } \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1\}$. Das heißt, zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden und wenn der Absolutwert der Differenz in dieser Koordinate eins ist. Im Fall $d = 1$ bezeichnen wir den Graphen G^1 als *Linie* der Länge N_1 .

Im Spezialfall, wenn $N_i = 2$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ ist, entspricht das d -dimensionale Gitter dem d -dimensionalen Hypercube.

Definition 2.15 Den *d-dimensionalen Torus* mit den Seitenlängen N_i , $i = 1, \dots, d$, bezeichnen wir im folgenden mit $T^d = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_d$. Es ist der Graph (V_{T^d}, E_{T^d}) mit der Knotenmenge

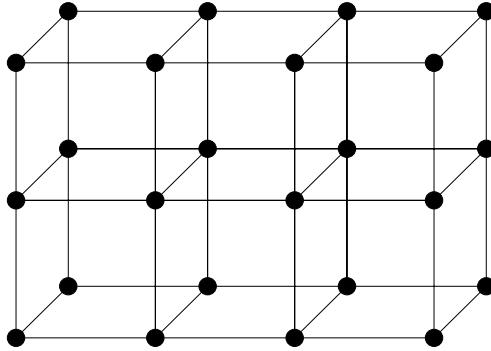


Abb. 2.2: Das dreidimensionale $3 \times 4 \times 2$ Gitter.

$V_{T^d} = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid 0 \leq x_i < N_i\}$ und der Kantenmenge $E_{T^d} = \{\{(x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d)\} \mid \exists j \in \{1, \dots, d\} : x_j = (y_j \pm 1) \bmod N_j \wedge \forall i \neq j : x_i = y_i\}$. Im Fall $d = 1$ bezeichnen wir den Graphen T^1 als *Ring* der Länge N_1 .

Definition 2.16 Der *vollständige Graph* $K_n = (V_{K_n}, E_{K_n})$ ist der Graph mit der Knotenmenge $V_{K_n} = \{1, \dots, n\}$ und der Kantenmenge $E_{K_n} = \{\{a, b\} \mid a, b \in V_{K_n}, a \neq b\}$.

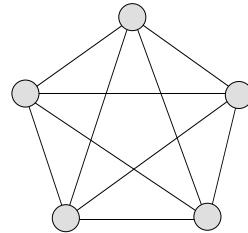


Abb. 2.3: Der vollständige Graph K_5 .

Definition 2.17 Der *Hamming Graph*, $H_a^n = (V_{H_a^n}, E_{H_a^n})$, ist der Graph mit der Knotenmenge $V_{H_a^n} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, \dots, a-1\}, i = 1, \dots, n\}$ und der Kantenmenge $E_{H_a^n} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V_{H_a^n}, H(u, v) = 1\}$, wobei H wiederum die Hamming-Distanz bezeichnet, das heißt, die Anzahl der Einträge, in denen sich die Argumente unterscheiden.

Mit dieser Definition ist klar, daß der Hamming Graph H_a^n gerade dem Graph entspricht, der sich als n -faches kartesisches Produkt des vollständigen Graphen mit a Knoten darstellen läßt. Das heißt, wir können alternativ zu der gerade gegebenen Definition schreiben

$$H_a^n = \underbrace{K_a \times \cdots \times K_a}_n.$$

Im Spezialfall, wenn $a = 2$, entspricht der Graph H_2^n dem n -dimensionalen Hypercube. Das heißt, es gilt $H_2^n = Q^n$.

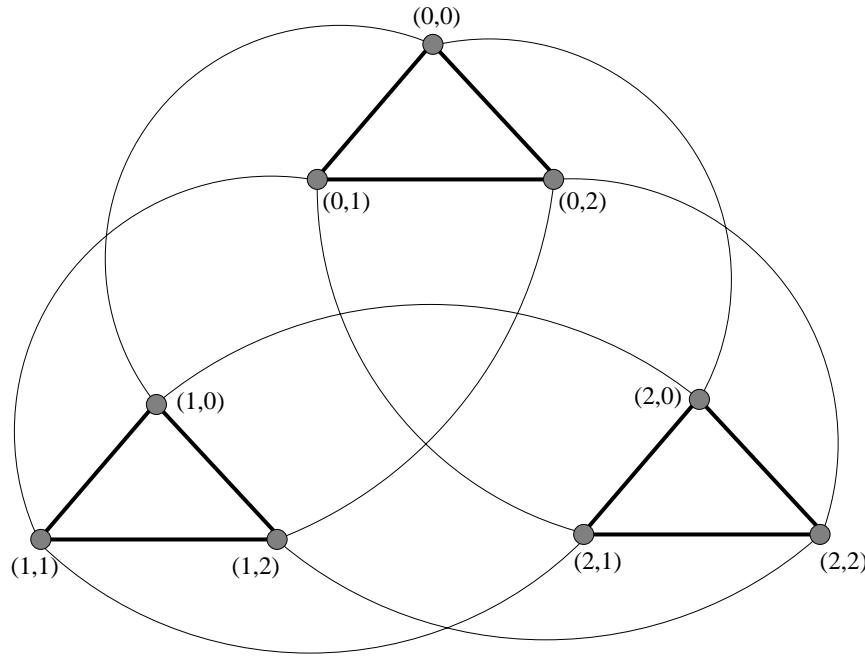


Abb. 2.4: Der Hamming Graph H_3^2 .

Definition 2.18 Einen zusammenhängenden, azyklischen Graphen bezeichnen wir als Baum, $B = (V_B, E_B)$. Das heißt, falls $|V_B| = n$ gilt, so ist $|E_B| = n - 1$.

Abschließend geben wir hier noch einige fundamentale mathematische Definitionen und Sätze an, die wir in den nachfolgenden Kapiteln verwenden.

Definition 2.19 Sei $G = (V_G, E_G)$ ein ungerichteter Graph, A die zugehörige Adjazenzmatrix und D der Vektor der Länge $|V_G|$ mit $D(i) = \text{Grad des Knotens } i$, mit $i \in \{1, \dots, |V_G|\}$. Die Laplace Matrix des Graphen G ist die Matrix $L_G = (D \cdot I - A)$, wobei I der Einheitsmatrix entspricht.

Satz 2.1 (Spektrum des kartesischen Produkts zweier Graphen, (siehe beispielsweise [36]))
Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ zwei ungerichtete Graphen und seien $\lambda_1(L_G) \leq \dots \leq \lambda_{|V_G|}(L_G)$ beziehungsweise $\lambda_1(L_H) \leq \dots \leq \lambda_{|V_H|}(L_H)$ die Eigenwerte der Laplace Matrizen L_G und L_H . Sei $G \times H$ das kartesische Produkt der Graphen G und H . Dann gilt für das Spektrum der Laplace Matrix $L_{G \times H}$: $\text{Spektrum}(L_{G \times H}) = \{\lambda_i(L_G) + \lambda_j(L_H) \mid i \in \{1, \dots, |V_G|\}, j \in \{1, \dots, |V_H|\}\}$.

Definition 2.20 Sei ξ eine stetige Zufallsvariable und $F(x)$ ihre Verteilungsfunktion (das heißt, $F(x) = P(\xi \leq x)$). ξ ist in $(-\infty, \infty)$ standardisiert normalverteilt, wenn

$$F(x) = \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz.$$

Definition 2.21 Sei eine Folge von diskreten Zufallsvariablen $\{\xi_n\}$ bezüglich einer endlichen Menge von Werten x_n^i mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten p_n^i gegeben. Ferner sei $F_n(x) = P(\xi_n \leq x) = \sum_{x_n^i \leq x} p_n^i$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen ξ_n , μ_n deren Erwartungswert und σ_n^2 deren Varianz. ξ_n ist *asymptotisch normalverteilt* mit dem Erwartungswert μ_n und der Varianz σ_n^2 , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_n^i \leq \mu_n + x\sigma_n} p_n^i = \Phi(x) \quad \text{für jedes } x \in (-\infty, \infty).$$

Definition 2.22 Die Zufallsvariablen ξ_1, \dots, ξ_n sind *unabhängig*, wenn

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n).$$

Satz 2.2 (Zentraler Grenzwertsatz, (siehe beispielsweise [50]))

Haben die unabhängigen, diskreten Zufallsvariablen ξ_1, \dots, ξ_n dieselbe Verteilungsfunktion F , den gleichen Erwartungswert μ und dieselbe Varianz σ^2 , dann ist die Zufallsvariable $\zeta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ asymptotisch normalverteilt mit dem Erwartungswert $n\mu$ und der Varianz $n\sigma^2$.

Definition 2.23 Ein *bipartiter Graph* $G = (U, V, E)$ ist ein Graph mit der Knotenmenge $U \cup V$ und der Kantenmenge $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u \in U, v \in V\}$. Das heißt, die Knoten aus U sind nur zu Knoten aus V adjazent und umgekehrt.

Satz 2.3 (Halls Matching-Theorem, (siehe beispielsweise [86]))

Ein aus $2N$ Knoten bestehender bipartiter Graph $G = (U, V, E)$ mit $|U| = |V|$ besitzt genau dann ein perfektes Matching, also eine Menge von N Kanten, die keine gemeinsamen Knoten besitzen, wenn für alle Teilmengen $S \subseteq U$ gilt:

$$|N(S)| \geq |S|,$$

wobei $N(S)$ die Knoten von V bezeichnet, die zu einem Knoten von S adjazent sind.

Kapitel 3

Untere-Schranken-Methoden für einige Kostenmaße von Einbettungen

In diesem Kapitel werden wir einige allgemeine Methoden entwickeln, die es uns erlauben, untere Schranken sowohl für die von uns betrachteten Kostenmaße, Kantenstreckung und Kanten- auslastung, zur Bewertung von injektiven Einbettungen zu bestimmen, als auch den minimalen Schnitt einer k -Partitionierung eines Graphen abzuschätzen. Dabei werden wir die Bestimmung von unteren Schranken auf die Lösungen von gewissen Extremalmengenproblemen aus der Dis- kreten Mathematik zurückführen.

Dieses Kapitel ist wie folgt gegliedert: In Abschnitt 3.1 formulieren wir einige Extremal- mengenprobleme auf Graphen, die in der Diskreten Mathematik als isoperimetrische Probleme bezeichnet werden. In den folgenden Abschnitten 3.2, 3.3 und 3.4 stellen wir jeweils dar, wie wir mit Hilfe der Lösung der formulierten isoperimetrischen Problemen untere Schranken für die jeweiligen von uns betrachteten graphentheoretischen Probleme erhalten können, und welche sonstigen Ansätze in der Literatur hierzu bekannt sind.

3.1 Isoperimetrische Probleme auf Graphen

Eines der ersten mathematischen (genauer gesagt geometrischen) Probleme, das bereits im antiken Griechenland untersucht wurde, war ein sogenanntes isoperimetrisches Problem, welches darin besteht, unter allen geschlossenen Kurven einer vorgegebenen Länge diejenige zu bestimmen, die die maximale Fläche einschließt.

Allgemeiner können wir die Probleme, die in der Mathematik als isoperimetrische Probleme bezeichnet werden, wie folgt formulieren: Gegeben ist eine Menge von Punkten und eine Definition einer Grenzschicht zu einer Punktmenge. Gesucht ist die Menge von Punkten einer vorgegebenen Größe, die eine minimale Grenzschicht aufweist, oder anders ausgedrückt, es wird

unter allen isoperimetrischen Punktmengen (das heißt, den Punktmengen gleicher Größe) nach der Punktmenge mit der minimalen Grenzschicht gesucht.

Die in der Literatur betrachteten isoperimetrischen Probleme unterscheiden sich einerseits darin, ob diskrete oder kontinuierliche Punktmengen betrachtet werden, und andererseits in der Definition der Grenzschicht.

Während die Betrachtung kontinuierlicher isoperimetrischer Probleme (dabei bezieht sich die Größe einer Punktmenge auf die Fläche oder das Volumen), wie eingangs schon erwähnt, eine lange Historie und eine Vielzahl von Anwendungen hat (siehe [119]), wurden diskrete isoperimetrische Probleme zumeist erst im zwanzigsten Jahrhundert untersucht.

In der obigen Terminologie stellen die Knoten eines Graphen eine diskrete Punktmenge dar, und die Isoperimetrie bezieht sich demnach auf die Kardinalität von Punktmengen. Wir unterscheiden im weiteren Knotengrenzschichten und Kantengrenzschichten und definieren dazu jeweils spezielle isoperimetrische Probleme.

Sei also $G = (V_G, E_G)$ ein beliebiger zusammenhängender Graph mit der Knotenmenge V_G und der Kantenmenge E_G . Für eine Teilmenge $A \subseteq V_G$ definieren wir die folgenden Funktionen

$$\Gamma_G(A) = \{u \in V_G \setminus A \mid \exists v \in A : \{u, v\} \in E_G\},$$

$$I_G(A) = \{\{u, v\} \in E_G \mid u, v \in A\},$$

$$\Theta_G(A) = \{\{u, v\} \in E_G \mid u \in A, v \in V_G \setminus A\}.$$

Damit sind in $\Gamma_G(A)$ alle Knoten aus V_G ohne A , die in Entfernung eins zu mindestens einem Knoten aus A liegen. Dies entspricht anschaulich der Menge der Grenzschichtknoten von A in G . Die Menge $I_G(A)$ umfaßt alle Kanten, die in dem durch A induzierten Teilgraphen von G existieren, und in $\Theta_G(A)$ liegen alle Kanten aus E_G , die es zu eliminieren gilt, um die Knoten aus A von den Knoten aus $V_G \setminus A$ zu separieren. Die Menge $\Theta_G(A)$ entspricht also anschaulich der Menge der Grenzschichtkanten von A in G .

Unter dem *knotenisoperimetrischen Problem auf einem Graphen G* (im weiteren kurz knotenisopermetisches Problem genannt) verstehen wir nun die Bestimmung des Minimums bezüglich der Kardinalität der Funktion Γ über alle Teilmengen von V_G mit der gleichen Kardinalität. Unter den *kantenisoperimetrischen Problemen auf einem Graphen G* (im weiteren kurz kantenisoperimetrische Probleme genannt) verstehen wir analog die Bestimmung des Maximums bezüglich der Kardinalität der Funktion I respektive des Minimums bezüglich der Kardinalität der Funktion Θ über alle Teilmengen von V_G mit der gleichen Kardinalität. Die Teilmengen, für die die entsprechenden Funktionen Extremwerte annehmen, werden als *isoperimetrische Teilmengen* oder auch als *optimale Mengen* bezeichnet. Wir können also das knotenisoperimetrische Problem und die entsprechenden kantenisoperimetrischen Probleme als Optimierungsprobleme wie folgt definieren:

$$\Gamma_G(m) = \min_{\substack{A \subseteq V_G \\ |A|=m}} |\Gamma_G(A)|,$$

$$I_G(m) = \max_{\substack{A \subseteq V_G \\ |A|=m}} |I_G(A)|,$$

$$\theta_G(m) = \min_{\substack{A \subseteq V_G \\ |A|=m}} |\theta_G(A)|.$$

Anschaulich gesprochen wird bei dem knotenisoperimetrischen Problem danach gefragt, wie viele Knoten es mindestens gibt, die in Entfernung eins zu einer Menge von Knoten der Kardinalität m liegen. Entsprechend wird bei den kantenisoperimetrischen Problemen nach der maximalen Anzahl von „inneren“ Kanten respektive nach der minimalen Anzahl von „Schnittkanten“ gefragt, wenn eine Menge von Knoten der Kardinalität m aus dem Graphen G herausgenommen wird.

Die Lösungen der beiden kantenisoperimetrischen Probleme sind miteinander eng verwandt und für k -reguläre Graphen sogar äquivalent. Um dies zu sehen betrachten wir den folgenden für k -reguläre Graphen offensichtlichen Zusammenhang:

$$2 \cdot |I_G(A)| + |\theta_G(A)| = k \cdot |A|.$$

Daraus folgt für $m = 1, \dots, |V_G|$: $2 \cdot I_G(m) + \theta_G(m) = k \cdot m$. Das heißt, daß eine Lösung des einen Problems gleichzeitig auch eine Lösung für das andere Problem liefert.

Für nicht reguläre Graphen kann der Unterschied zwischen den Lösungen der beiden Probleme jedoch erheblich sein. Eine weitere Anmerkung zu den beiden Problemen ist, daß obwohl beide Probleme NP -schwer sind (siehe [54]), das Problem I in dem Sinne etwas „einfacher“ ist, da es frei von sogenannten Seiteneffekten ist. Zur Verdeutlichung wollen wir kurz ein Beispiel diskutieren. Betrachten wir ein zweidimensionales Gitter als Graphen und sei $m = 4$. Es ist leicht zu sehen, daß jeder Kreis der Länge vier für die Funktion I eine isoperimetrische Teilmenge bildet. Falls jede Seitenlänge des zweidimensionalen Gitters mindestens vier ist, bilden jedoch für die Funktion θ nur die Kreise der Länge vier eine isoperimetrische Teilmenge, die in einer der Ecken des Gitters plaziert sind. Das heißt, daß der Wert von θ bezüglich eines Kreises der Länge vier von der Lage des Kreises in dem Gitter abhängt. Auf Grund solcher Effekte wurde in der Vergangenheit vornehmlich das Maximierungsproblem untersucht, wenngleich in den meisten Anwendungen, und so auch in den hier von uns betrachteten Anwendungen, das Minimierungsproblem als Teilproblem „auftaucht“. Aus diesem Grund werden wir uns im folgenden auch auf das Minimierungsproblem beschränken und dieses synonym für das kantenisoperimetrische Problem verwenden.

Auf Grund der Komplexität der Probleme wird im allgemeinen zunächst nach einer Funktion $f(G, m)$ gesucht, so daß $\Gamma_G(m) \geq f(G, m)$ beziehungsweise $\theta_G(m) \geq f(G, m)$ gilt. Eine solche Ungleichung wird in der Literatur als *isoperimetrische Ungleichung* bezeichnet. Im Idealfall ist es möglich die Funktion $\Gamma_G(m)$ beziehungsweise $\theta_G(m)$ explizit zu bestimmen. Falls isoperimetrische Teilmengen $A_i \subseteq V_G, i = 1, \dots, |V_G|$, mit $|A_i| = i$ existieren (bezüglich der betrachteten Funktion Γ, I, θ), für die $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{|V_G|}$ gilt, so sagen wir, das Problem weist die *nested structure of solution* Eigenschaft auf. In diesem Fall ist es möglich die isoperimetrischen

Teilmengen konstruktiv zu bestimmen, da eine totale Ordnung auf den Knoten von G definiert werden kann, so daß jedes *initiale Segment* der Ordnung (siehe Definition 2.7) eine isoperimetrische Teilmenge darstellt. Wir bezeichnen eine solche Ordnung als *optimale Ordnung*.

Eine optimale Ordnung ist nur für sehr wenige Graphen bekannt. Für den Hypercube allerdings konnte Larry Harper in [64, 65] für beide von uns betrachteten Probleme $\Gamma_{Q^n}(m)$ und $\theta_{Q^n}(m)$ eine optimale Ordnung nachweisen. Um diese Ergebnisse zu illustrieren, definieren wir zunächst zwei Ordnungen. Die *lexikographische Ordnung auf Q^n* (im weiteren mit L bezeichnet) und die *Bandweitenordnung auf Q^n* (im weiteren mit B bezeichnet).

Seien $x, y \in V_{Q^n}$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$. Wir sagen, x ist größer y bezüglich der Ordnung L (das heißt, $x >_L y$) genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot 2^{n-i} > \sum_{i=1}^n y_i \cdot 2^{n-i},$$

und x ist größer y bezüglich der Ordnung B (das heißt, $x >_B y$) genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^n x_i > \sum_{i=1}^n y_i \text{ oder } (\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \wedge x <_L y).$$

In der Abbildung 3.1(a) ist der Hypercube Q^4 in seiner schichtenweisen Darstellung abgebildet. Dabei sind alle Knoten des Hypercubes, für die die Quersumme ihrer binären Adresse gleich sind, auf einer horizontalen Schicht angeordnet. Diese Darstellung ist natürlich isomorph zu der aus Kapitel 2 und wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch des öfteren verwandt. In Abbildung 3.1(b) und (c) ist in der analogen Darstellung des Hypercubes Q^4 jedem Knoten seine Ordnungszahl bezüglich der lexikographischen Ordnung L beziehungsweise der Bandweitenordnung B zugewiesen.

Die Ergebnisse von Harper besagen nun, daß für jedes $m \in \{1, \dots, 2^n\}$ der Wert für $\theta_{Q^n}(m)$ durch die Menge der ersten m Knoten bezüglich der Ordnung L bestimmt werden kann. Das heißt, daß L eine optimale Ordnung für die Funktion $\theta_{Q^n}(m)$ ist. Analog kann der Wert für $\Gamma_{Q^n}(m)$ durch die Menge der ersten m Knoten bezüglich der Ordnung B bestimmt werden. Demnach ist B eine optimale Ordnung für die Funktion $\Gamma_{Q^n}(m)$.

Wenden wir uns nun den d -dimensionalen Gittern zu. Für das knotenisoperimetrische Problem $\Gamma_{G^d}(m)$ konnten Bollobás und Leader in [22] für den Fall, daß alle Seitenlängen gleich sind, eine optimale Ordnung F nachweisen. Bezrukov zeigte in [12], daß diese Ordnung auch für beliebige zweidimensionale Gitter optimal ist. Um diese Ergebnisse zu illustrieren, führen wir den Begriff der *i-ten Schicht des Gitters G^d* ein. Dies ist die Menge der Knoten des Gitters G^d , für die die Quersumme ihrer Koordinaten gleich i ist. Im wesentlichen entspricht die optimale Ordnung F der schichtenweisen Numerierung der Knoten. Formulieren wir nun die Ordnung F formal. Seien $x, y \in V_{G^d}$ mit $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ und $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$. Wir sagen, x ist größer

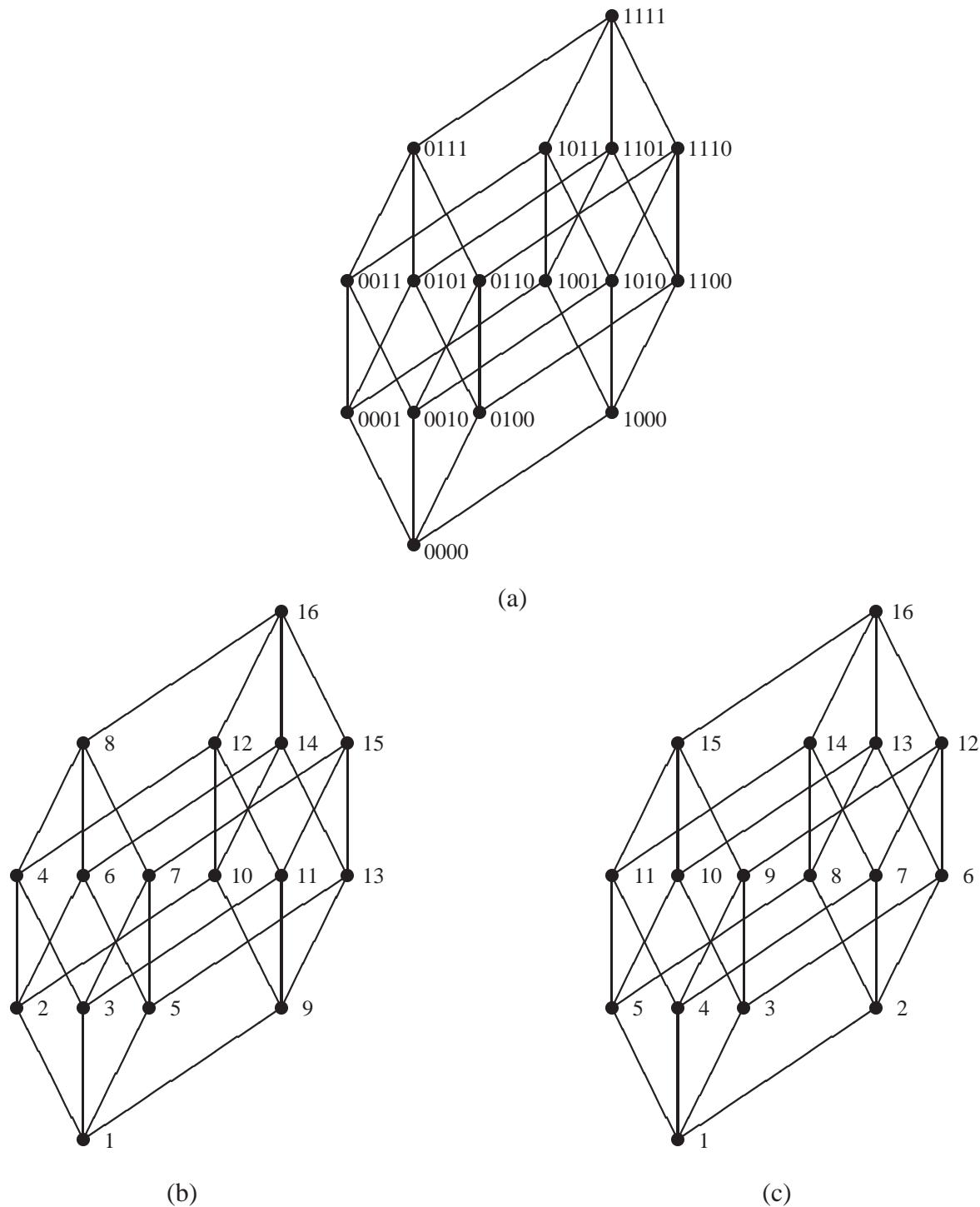


Abb. 3.1: In (a) ist die schichtenweise Darstellung des Hypercubes Q^4 gegeben. In (b) ist in analoger Darstellung jedem Knoten des Q^4 seine Ordnungszahl bezüglich der lexikographischen Ordnung zugewiesen und in (c) entsprechendes für die Bandweitenordnung.

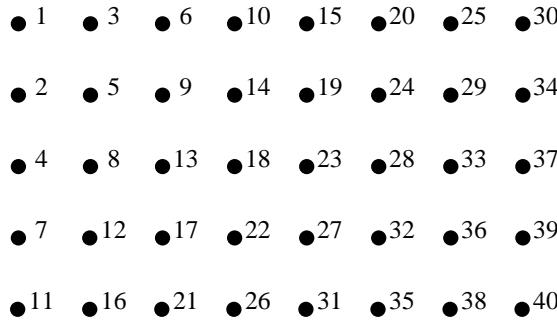


Abb. 3.2: Die Ordnung F auf dem 5×8 Gitter.

y bezüglich der Ordnung F (das heißt, $x >_F y$) genau dann, wenn

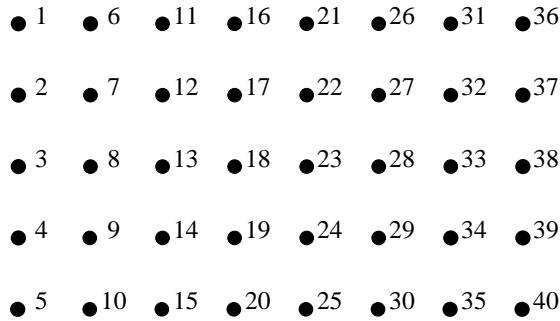
$$\sum_{i=1}^d x_i > \sum_{i=1}^d y_i \quad \text{oder} \quad \left(\sum_{i=1}^d x_i = \sum_{i=1}^d y_i \quad \wedge \quad \exists j \in \{1, \dots, d\} : x_j > y_j, \forall k > j : x_k = y_k \right).$$

Abbildung 3.2 zeigt die aus F resultierende Numerierung am Beispiel des 5×8 Gitters. Dabei haben wir, um die Abbildung übersichtlicher zu gestalten, die Kanten des 5×8 Gitters weggelassen und den linken, oberen Knotenpunkt als den Punkt mit den Koordinaten $(0, 0)$ angenommen.

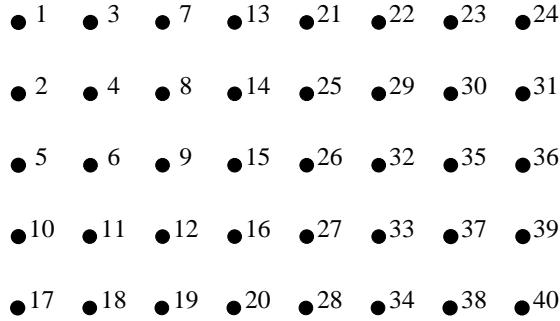
Für das kantenisoperimetrische Problem $\theta_{G^d}(m)$ ist bekannt, daß keine optimale Ordnung existiert (siehe [15]). Darüber hinaus ist bisher nur für spezielle Kardinalitäten m eine Lösung bekannt, so daß die allgemeine Fragestellung nach wie vor ein offenes Forschungsproblem ist. Für den Spezialfall beliebiger zweidimensionaler Gitter konnten Ahlswede und Bezrukow in [1] eine Lösung angeben. Sie untersuchten zunächst die *lexikographische Ordnung L* auf zweidimensionalen Gittern, die wie folgt definiert ist: Seien $x, y \in V_{G^2}$ mit $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$. Wir sagen, x ist größer y bezüglich der Ordnung L (das heißt, $x >_L y$) genau dann, wenn

$$(x_2 > y_2) \quad \text{oder} \quad (x_2 = y_2 \quad \wedge \quad x_1 > y_1).$$

Ahlswede und Bezrukow zeigten, daß für ein $N_1 \times N_2$ Gitter (o. E. d. A. sei $N_1 \leq N_2$) die Ordnung L das kantenisoperimetrische Problem für alle Kardinalitäten m löst, für die gilt $\lfloor (N_1/2)^2 \rfloor < m \leq N_1 N_2 - \lfloor (N_1/2)^2 \rfloor$. Abbildung 3.3 zeigt die aus L resultierende Numerierung wiederum anhand des 5×8 Gitters, wobei wir erneut die Kanten des Gitters weggelassen haben und den linken, oberen Knotenpunkt als den Punkt mit den Koordinaten $(0, 0)$ angenommen haben. Aus diesem Beispiel ist auch ersichtlich, daß die Ordnung L nicht für alle m eine Lösung für $\theta_{G^d}(m)$ liefert. Werden für $m = 4$ in der Abbildung 3.3 die Knoten mit den Nummern 1, 2, 6 und 7 ausgewählt, so besteht der Kantenschnitt, der sich aus dieser Menge ergibt, aus vier Kanten. Die ersten vier Knoten gemäß L sind aber mit den restlichen Knoten über fünf Kanten verbunden. Eine genauere Analyse dieser Beobachtung führt dann zu dem oben erwähnten Resultat von Ahlswede und Bezrukow. Es ist allerdings leicht eine andere Ordnung S anzugeben, so daß für

**Abb. 3.3:** Die Ordnung L auf einem 5×8 Gitter.

den Fall, daß $1 \leq m \leq \lfloor (N_1/2)^2 \rfloor$ oder $N_1 N_2 - \lfloor (N_1/2)^2 \rfloor < m \leq N_1 N_2$ gilt, die ersten m Knoten bezüglich dieser Ordnung mit den restlichen Knoten über eine minimale Anzahl von Kanten verbunden sind. Diese Ordnung entspricht im wesentlichen dem sukzessiven Vergrößern eines Einheitsquadrates. Abbildung 3.4 zeigt die aus S resultierende Numerierung am Beispiel des 5×8 Gitters.

**Abb. 3.4:** Die Ordnung S auf einem 5×8 Gitter.

In Kapitel 7 betrachten wir die Partitionierung von Hamming Graphen. Zur Bestimmung unterer Schranken werden wir hierbei eine Methode benutzen, die wir in Abschnitt 3.4 noch genauer vorstellen und die auf der Lösung des kantenisoperimetrischen Problems für Hamming Graphen beruht. Lindsey konnte in [94] für $\theta_{H_a^n}(m)$ eine optimale Ordnung nachweisen, die er als die *lexikographische Ordnung auf H_a^n* bezeichnete (im weiteren kurz L genannt). Analog zu der lexikographischen Ordnung auf dem Hypercube definieren wir für $x, y \in V_{H_a^n}$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$: x ist größer y bezüglich der Ordnung L (das heißt, $x >_L y$) genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot a^{n-i} > \sum_{i=1}^n y_i \cdot a^{n-i}.$$

In diesem Abschnitt haben wir nur die für unsere weiteren Betrachtungen maßgebenden Ergebnisse erörtert. Für weitere Ergebnisse im Zusammenhang mit der Untersuchung diskreter, isoperimetrischer Probleme sei auf die Aufsätze [14, 15] und die Monographie [36] verwiesen.

3.2 Untere-Schranken-Methoden für die Kantenstreckung

In diesem Abschnitt werden wir eine allgemeine Methode entwickeln, die es uns ermöglicht, für ein eins-zu-eins Einbettungsproblem eine untere Schranke für die Kantenstreckung zu erhalten.

Sei $G = (V_G, E_G)$ wiederum ein beliebiger zusammenhängender Graph mit der Knotenmenge V_G und der Kantenmenge E_G und $A \subseteq V_G$. Wir definieren die Distanz zwischen zwei Knoten $u, v \in V_G$, $\text{dist}_G(u, v)$, durch die Länge des kürzesten Weges in G von u nach v . Für $A \subseteq V_G$ und $u \in V_G$ erweitern wir diese Definition wie folgt:

$$\text{dist}_G(u, A) = \min_{v \in A} \{\text{dist}_G(u, v)\}.$$

Wir definieren nun mit Hilfe dieses Distanzmaßes die t -Grenzschicht von A bezüglich des Graphen G , $\delta_G^t(A)$, wie folgt:

$$\delta_G^t(A) = \{u \in V_G \setminus A \mid \text{dist}_G(u, A) = t\}.$$

Die Menge $\delta_G^t(A)$ besteht also genau aus den Knoten von V_G , die eine Distanz von genau t zu der Menge A haben. Es sei in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß $\delta_G^1(A) = \Gamma_G(A)$ gilt!

Das folgende Lemma stellt nun den Zusammenhang zwischen der Lösung des knotenisoperimetrischen Problems für einen Graphen G und der Kantenstreckung für eine injektive Einbettung des Graphen $G = (V_G, E_G)$ in einen Graphen $H = (V_H, E_H)$ dar. Dabei sei zunächst vereinfachend vorausgesetzt, daß $|V_G| = |V_H|$ gilt. Das heißt, die Knotenabbildung der Einbettung ist eine bijektive Funktion.

Lemma 3.1 Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ zwei Graphen mit $|V_G| = |V_H|$. Es gilt:

$$\text{dil}(G, H) \geq \max_{1 \leq m < |V_H|} \max_{\substack{D \subseteq V_H \\ |D|=m}} \min \{d : |\bigcup_{i=1}^d \delta_H^i(D)| \geq \Gamma_G(m)\}.$$

Beweis: Betrachten wir eine beliebige aber feste Menge D mit $D \subset V_H$ und $|D| = m$ für ein festes m mit $1 \leq m < |V_H|$. Des weiteren sei für eine beliebige aber feste Einbettung $f = (\phi, R_\phi)$ des Graphen G in den Graphen H gerade A die Menge der Knoten des Graphen G , die auf D abgebildet werden. Das heißt, $\phi(A) = D$. Die Streckung der Kanten aus E_G , die die Knoten aus A mit den Knoten aus $\Gamma_G(A)$ verbinden, ist mindestens so groß, wie die minimale Distanz einer Knotengrenzschicht zu D , die groß genug ist, $|\Gamma_G(A)|$ Knoten aufzunehmen. Das heißt,

$$\text{dil}_f(G, H) \geq \min \{d : |\bigcup_{i=1}^d \delta_H^i(D)| \geq |\Gamma_G(A)|\}.$$

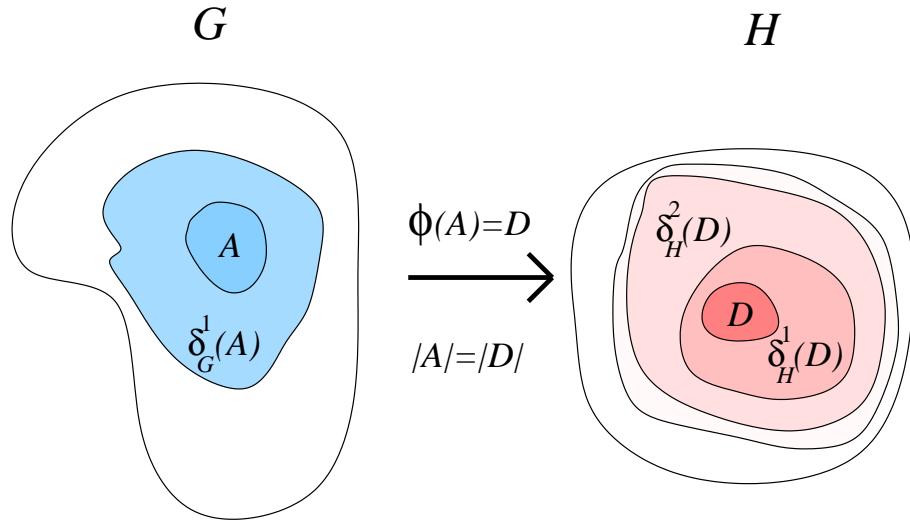


Abb. 3.5: Illustration der unteren-Schranken-Methode für die Kantenstreckung.

Da \$|V_G| = |V_H|\$, muß für jede Einbettung \$f\$ die Funktion \$\phi\$ bijektiv sein. Also gilt \$|A| = m\$ und somit \$|\Gamma_G(A)| \geq \Gamma_G(m)\$. Wir erhalten:

$$\text{dil}(G, H) \geq \min\{d : |\bigcup_{i=1}^d \delta_H^i(D)| \geq \Gamma_G(m)\}.$$

Diese Aussage gilt allerdings für jede Menge \$D \subset V_H\$ mit \$|D| = m\$ und ebenso für jedes \$m \in \{1, \dots, |V_H| - 1\}\$. Um eine möglichst scharfe untere Schranke zu erhalten, bilden wir hierüber das Maximum. ■

Der eben beschriebene Ansatz ist auf beliebige injektive Einbettungen erweiterbar, indem wir berücksichtigen, daß die Kardinalität der Menge \$D\$ größer sein kann als die Kardinalität der Menge \$A\$, also der Menge der Knoten des Graphen \$G\$, die auf \$D\$ abgebildet werden. Für eine beliebige aber feste Kardinalität \$|D| = l\$ muß, um eine möglichst scharfe Schranke zu erhalten, die Funktion \$\Gamma_G(A)\$ in dem Wertebereich \$\{l - |V_H| + |V_G|, \dots, l\}\$ für die Kardinalität der Menge \$A\$ bestimmt werden. Somit erhalten wir für beliebige injektive Einbettungen das folgende Korollar.

Korollar 3.1 Seien \$G = (V_G, E_G)\$ und \$H = (V_H, E_H)\$ zwei Graphen mit \$|V_G| \leq |V_H|\$. Es gilt:

$$\text{dil}(G, H) \geq \max_{1 \leq l < |V_H|} \max_{\substack{D \subset V_H \\ |D|=l}} \min_{l - |V_H| + |V_G| \leq m \leq l} \min\{d : |\bigcup_{i=1}^d \delta_H^i(D)| \geq \Gamma_G(m)\}.$$

In Kapitel 5 führen wir diese Erweiterung anhand einer konkreten Problemstellung durch. Eine weitere Variation des eben beschriebenen Ansatzes wird in Abschnitt 4.4.3 verwandt. Dabei schätzen wir nicht die Streckung der Kanten aus \$E_G\$ ab, die die Knoten aus \$A\$ mit den Knoten

aus $\Gamma_G(A)$ verbinden, sondern schätzen die Streckung eines beliebigen aber festen Weges P der Länge t ab, der einen Knoten von A mit einem Knoten aus $\delta_G^t(A)$ verbindet.

In der Literatur sind nur für bestimmte Graphen G und H untere Schranken für die Kantenstreckung einer entsprechenden injektiven Einbettung beschrieben. Eine triviale untere Schranke für die Kantenstreckung einer bijektiven Einbettung eines Graphen $G = (V_G, E_G)$ in den Graphen $H = (V_H, E_H)$ läßt sich mit Hilfe der Durchmesser der Graphen G und H angeben.

Proposition 3.1 *Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ zwei Graphen mit $|V_G| = |V_H|$. Es gilt:*

$$\text{dil}(G, H) \geq \frac{\max_{u, v \in V_H} \text{dist}_H(u, v)}{\max_{u, v \in V_G} \text{dist}_G(u, v)}.$$

3.3 Untere-Schranken-Methoden für die Kantenauslastung

In diesem Abschnitt entwickeln wir eine allgemeine Methode, die es uns ermöglicht, für ein eins-zu-eins Einbettungsproblem eine untere Schranke für die Kantenauslastung zu erhalten. Dabei gehen wir zunächst einmal wieder davon aus, daß die Knotenabbildung der Einbettung eine bijektive Funktion darstellt.

Lemma 3.2 *Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ zwei Graphen mit $|V_G| = |V_H|$. Es gilt:*

$$\text{con}(G, H) \geq \max_{1 \leq m < |V_G|} \frac{\theta_G(m)}{\theta_H(m)}.$$

Beweis: Sei $\phi : V_G \longrightarrow V_H$ eine beliebige aber feste bijektive Funktion und D eine Teilmenge von V_H . Dann gilt:

$$|\theta_H(D)| \cdot \text{con}(G, H) \geq |\theta_G(\phi^{-1}(D))|,$$

da jede Kante von $\phi^{-1}(D)$ nach $\phi^{-1}(D^c)$ mit $D^c = V_H \setminus D$ auf einen Weg von D nach D^c abgebildet wird, der mindestens eine Kante aus $\theta_H(D)$ beinhalten muß. Jede Kante $e' \in E_H$ kann höchstens in $\text{con}(G, H)$ Wegen zur Realisierung der Kanten aus E_G enthalten sein, so daß wir die obige Ungleichung erhalten. Falls D eine isoperimetrische Teilmenge ist mit $|D| = m$, so erhalten wir:

$$\theta_H(m) \cdot \text{con}(G, H) = |\theta_H(D)| \cdot \text{con}(G, H) \geq |\theta_G(\phi^{-1}(D))| \geq \theta_G(m).$$

Es gilt also:

$$\text{con}(G, H) \geq \frac{\theta_G(m)}{\theta_H(m)}.$$

Diese Aussage gilt für jedes $m \in \{1, \dots, |V_H| - 1\}$. Um also eine möglichst scharfe untere Schranke zu erhalten, bilden wir das Maximum des Terms auf der rechten Seite der Ungleichung über alle m . ■

Analog zu den Bemerkungen in Anschluß von Lemma 3.1 gilt auch hier, daß der eben beschriebene Ansatz auf beliebige injektive Einbettungen erweiterbar ist, indem wir berücksichtigen, daß die Kardinalität der Menge D größer sein kann, als die Kardinalität der Menge $\phi^{-1}(D)$, also der Menge der Knoten des Graphen G , die auf D abgebildet werden. Für eine beliebige aber feste Kardinalität $|D| = l$ erhalten wir, falls D eine isoperimetrische Teilmenge ist, analog zu dem gerade durchgeföhrten Beweis die Ungleichung

$$\theta_H(l) \cdot \text{con}(G, H) = |\theta_H(D)| \cdot \text{con}(G, H) \geq |\theta_G(\phi^{-1}(D))| \geq \theta_G(m),$$

mit $l - |V_H| + |V_G| \leq m \leq l$. Somit ergibt sich für injektive Einbettungen das folgende Korollar.

Korollar 3.2 *Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ zwei Graphen mit $|V_G| \leq |V_H|$. Es gilt:*

$$\text{con}(G, H) \geq \max_{\substack{1 \leq l < |V_H| \\ l - |V_H| + |V_G| \leq m \leq l}} \frac{\theta_G(m)}{\theta_H(l)}.$$

In Kapitel 5 verwenden wir diesen Ansatz zur Lösung einer konkreten Problemstellung.

In der Literatur sind wiederum nur für bestimmte Graphen G und H untere Schranken für die Kantenauslastung einer entsprechenden injektiven Einbettung beschrieben. Eine triviale untere Schranke für die Kantenauslastung einer injektiven Einbettung eines Graphen $G = (V_G, E_G)$ in den Graphen $H = (V_H, E_H)$ läßt sich mit Hilfe der Kardinalitäten der Mengen E_G und E_H angeben.

Proposition 3.2 *Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ zwei Graphen mit $|V_G| \leq |V_H|$. Es gilt:*

$$\text{con}(G, H) \geq \frac{|E_G|}{|E_H|}.$$

3.4 Untere-Schranken-Methoden für den minimalen Schnitt einer k -Partitionierung

In diesem Abschnitt beschreiben wir drei verschiedene Methoden, um für ein balancierendes k -Partitionierungsproblem eine untere Schranke für den erforderlichen Kantenschnitt zu erhalten. Dabei führen wir bei der ersten Methode das Problem wiederum auf die Lösung des kanten-isoperimetrischen Problems für den zu partitionierenden Graphen zurück. Die beiden anderen Methoden können als die klassischen Methoden zur Bestimmung einer unteren Schranke für den erforderlichen Kantenschnitt einer balancierten k -Partitionierung eines Graphen angesehen werden.

Lemma 3.3 Sei $G = (V_G, E_G)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph. Es gilt:

$$\nabla_G(k) \geq \frac{k}{2} \min \left\{ \theta_G \left(\left\lfloor \frac{|V_G|}{k} \right\rfloor \right), \theta_G \left(\left\lceil \frac{|V_G|}{k} \right\rceil \right) \right\}.$$

Beweis: Sei $A_G = \{A_1, \dots, A_k\}$ eine balancierte k -Partitionierung des Graphen $G = (V_G, E_G)$. Für $i \neq j$ sei $c_{i,j} = |\{\{u, v\} \in E_G \mid u \in A_i, v \in A_j\}|$ die Anzahl der Schnittkanten zwischen der Partition A_i und A_j und $c_{i,i} = 0$ für $i = 1, \dots, k$. Somit ist $\sum_{j=1}^k c_{i,j}$ die Summe der Schnittkanten für die Partition A_i . Wir erhalten demnach die folgende Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^k c_{i,j} = |\theta_G(A_i)| \geq \theta_G(|A_i|). \quad (3.1)$$

Wenn wir nun die Summe von $i = 1, \dots, k$ über (3.1) bilden, erhalten wir, da $c_{i,j} = c_{j,i}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{i,j} = 2|\nabla A_G| \geq \sum_{i=1}^k \theta_G(|A_i|).$$

Mit $\left\lfloor \frac{|V_G|}{k} \right\rfloor \leq |A_i| \leq \left\lceil \frac{|V_G|}{k} \right\rceil$ erhalten wir somit die Aussage des Lemmas. ■

In der Literatur [46, 86] sind zwei weitere Ansätze beschrieben, um eine untere Schranke für den erforderlichen Kantenschnitt bei einer balancierten k -Partitionierung eines gegebenen Graphen G zu erhalten. Die eine Methode [46] basiert auf der Berechnung des Spektrums der zu G gehörigen Laplace Matrix L_G und kann wie folgt zusammengefaßt werden.

Lemma 3.4 Sei $G = (V_G, E_G)$ ein ungerichteter Graph und seien $\lambda_1(L_G) \leq \dots \leq \lambda_i(L_G)$ die i kleinsten Eigenwerte der Laplace Matrix L_G . Es gilt:

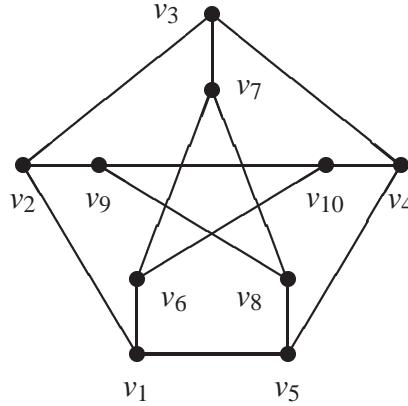
$$\nabla_G(k) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{|V_G|}{k} \cdot \sum_{j=1}^k \lambda_j(L_G).$$

Beweis: Für alle symmetrischen, positiv semidefiniten Matrizen M und N der Ordnung n gilt mit $\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \geq \dots \geq \lambda_n(M)$ und $\lambda_1(N) \geq \lambda_2(N) \geq \dots \geq \lambda_n(N)$:

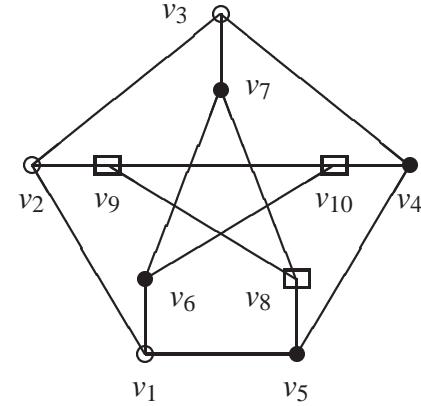
$$spur(M \cdot N) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i(M) \cdot \lambda_i(N).$$

Sei $M = -L_G$ also die negative Laplace Matrix eines Graphen G und N eine 01-Matrix, die die *Clusterung* der Knoten bei einer k -Partitionierung A_G beschreibt. Das heißt, der Matrixeintrag $n_{i,j}$ ist genau dann 1, wenn die Knoten i und j in der gleichen Partition A_l mit $l \in \{1, \dots, k\}$ liegen, und ansonsten ist $n_{i,j} = 0$. Die Matrix N ist symmetrisch und es gilt $\lambda_i(N) = |A_i|$ für $i = 1, \dots, k$ und $\lambda_i(N) = 0$ für $i = k+1, \dots, n$.

Um die eben definierte Matrix N zu illustrieren, haben wir als Beispiel im folgenden Bild den Petersen-Graphen gewählt. Neben der Darstellung des Petersen-Graphen haben wir eine einfache Partitionierung des selbigen in drei Partitionen durch die entsprechenden geometrischen Formen für die Knoten vorgegeben. Des weiteren haben wir die Laplace-Matrix des Petersen-Graphen und die der *Clusterung* der Knoten beschreibende Matrix N dargestellt. In diesem Fall ist die Matrix N eine Blockmatrix, was im allgemeinen jedoch nicht gilt.



Petersen-Graph



Partitionierung

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Laplace-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix N

Mit der so definierten Matrix N erhalten wir:

$$spur(L_G \cdot N) = 2 \cdot |\nabla A_G| \quad \text{beziehungsweise} \quad spur(-L_G \cdot N) = -2 \cdot |\nabla A_G|.$$

Zusammenfassend gilt:

$$-2 \cdot |\nabla A_G| = spur(-L_G \cdot N) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i(-L_G) \cdot \lambda_i(N) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(-L_G) \cdot |A_i| = (-1) \sum_{i=1}^k \lambda_i(L_G) \cdot |A_i|.$$

Also

$$|\nabla A_G| \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k |A_i| \cdot \lambda_i(L_G).$$

Für balancierte Partitionen A_i ergibt sich somit die Aussage des Lemmas. ■

Eine weitere Methode [86] basiert auf einer Einbettung des vollständigen Graphen K_n in den zu partitionierenden Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$.

Lemma 3.5 *Sei $G = (V_G, E_G)$ ein ungerichteter Graph mit $|V_G| = n$. Es gilt:*

$$\nabla_G(k) \geq \frac{n^2 \cdot (k - 1)}{2k \cdot \text{con}(K_n, G)}.$$

Beweis: Betrachten wir eine beliebige aber feste Einbettung von K_n in G mit Kantenauslastung c . Eine beliebige k -Partitionierung von G liefert direkt auch eine für K_n . Dabei werden durch jede Schnittkante in G höchstens c Kanten in K_n geschnitten. Der Kantenschnitt für eine balancierte k -Partitionierung von K_n lässt sich direkt berechnen (vereinfachend nehmen wir $k|n$ an):

$$\nabla_{K_n}(k) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) - k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{k} \cdot \left(\frac{n}{k} - 1\right) = \frac{n^2 \cdot (k - 1)}{2k}.$$

Wir erhalten somit:

$$\nabla_G(k) \cdot c \geq \frac{n^2 \cdot (k - 1)}{2k}.$$

Da dies für jede Einbettung gilt, erhalten wir durch diese Methode die beste untere Schranke für $\nabla_G(k)$, wenn wir die bezüglich der Kantenauslastung beste Einbettung von K_n in G bestimmen, das heißt, eine Einbettung mit Kantenauslastung $\text{con}(K_n, G)$. ■

Die beiden zuletzt beschriebenen Methoden sind im allgemeinen, also für beliebige Graphen G , unvergleichbar. Das heißt, es gibt sowohl Beispielgraphen für die die untere Schranke, die mittels der spektralen Methode berechnet werden kann, besser ist als die schärfste untere Schranke, die auf dem Einbettungsansatz beruht, und umgekehrt. Für den Spezialfall $k = 2$ also der Bisektion eines Graphen hat beispielsweise Robert Preis [120] in seiner Dissertation verschiedene Graphen bezüglich der Unvergleichbarkeit der beiden beschriebenen Methoden untersucht.

Kapitel 4

Einbettungen binärer Hypercubes in d -dimensionale Gitter

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Einbettungen des n -dimensionalen binären Hypercubes Q^n in das d -dimensionale Gitter G^d . Dabei liegt der Schwerpunkt unserer Arbeit auf der Betrachtung von bijektiven Einbettungen, das heißt, das d -dimensionale Gitter hat exakt 2^n Knoten. In diesem Fall teilt d also n , und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt: $G^d = 2^{n_1} \times \dots \times 2^{n_d}$, mit $n_1 + \dots + n_d = n$ und $n_1 \leq \dots \leq n_d$. Wir bestimmen eine exakte Lösung für das entsprechende Kantenauslastungsproblem und ferner eine exakte Lösung für das Leitungslängenproblem unter der Annahme, daß $n_1 = \dots = n_d$ gilt. Damit beantworten wir zwei seit langem offene Forschungsprobleme [35, 85]. Darüber hinaus präsentieren wir wiederum unter der Annahme, daß $n_1 = \dots = n_d$ gilt, asymptotisch optimale Lösungen für das Kantenstreckungsproblem. Des weiteren untersuchen wir die genannten Probleme für den Spezialfall einer injektiven Einbettung des n -dimensionalen binären Hypercubes Q^n in ein zweidimensionales Gitter G^2 . Dabei verwenden wir ein zweistufiges Verfahren. Zunächst berechnen wir eine optimale bijektive Einbettung des Hypercubes Q^n in ein zweidimensionales Zwischen-Gitter $G^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ mit $n_1 + n_2 = n$. Anschließend berechnen wir mittels einer Methode, die wir in Kapitel 5 eingehend analysieren, eine optimale Einbettung des Zwischengitters in das Zielgitter G^2 . Neben weiteren Nachbetrachtungen untersuchen wir dann noch die Simulation eines *uniaxialen Hypercube-Algorithmus* auf einem Gitternetzwerk.

4.1 Stand der Forschung

Die Konstruktion effizienter Einbettungen des Hypercubes Q^n in d -dimensionale Gitter nimmt neben ihrer grundsätzlichen graphentheoretischen Bedeutung auch beim Parallelen Rechnen und beim VLSI-Design eine exponierte Stellung ein.

Auf der einen Seite sind in vielen zur Zeit in Betrieb befindlichen Parallelrechnern die einzelnen Prozessoren als Gitter (oder Torus) vernetzt (beispielsweise Cray T3D, Parsytec GCel und GC-PP, Convex HP, Intel Touchstone, Delta und Paragon sowie Siemens-Nixdorf/SCALI SCI-Cluster). Eine Begründung für die Popularität von Gittern ist die Tatsache, daß Gitter eine recht „einfache“ Struktur haben, so daß eine entsprechende Vernetzung ohne erheblichen Aufwand realisiert werden kann und der entsprechende Rechner auch recht einfach erweiterbar ist.

Auf der anderen Seite existieren eine Reihe von Algorithmen und durchdachten Programmiertechniken für den Hypercube (zum Beispiel Ascend-Descend Algorithmen). Die Popularität des Hypercubes, seine Leistungsfähigkeit und Vielseitigkeit als Programmiernetzwerk ist darüber hinaus auch durch seine rekursive Struktur begründet, die sich bei der Parallelisierung vieler Algorithmen als hilfreich erweist (zum Beispiel Divide-and-Conquer Algorithmen).

Da wir das *Distributed Memory Model* (siehe Kapitel 1) zur Beschreibung der topologischen Struktur eines parallelen Rechners verwenden, besteht unser Ansatz, um effiziente Hypercube-algorithmen auf einem gitterbasierten Parallelrechner auszuführen, darin, eine Einbettung zur Portierung des Programms zu verwenden. Dieser Ansatz unterstützt eine hardwareunabhängige Implementierung paralleler Programme und trägt damit auch zu einer größeren Akzeptanz des Parallelen Rechnens bei.

Einbettungen des Hypercubes speziell in zweidimensionale Gitter spielen außerdem beim VLSI-Design eine Rolle. Mit diesem Begriff wird der Entwurf und die Entwicklung integrierter Schaltkreise bezeichnet. Zur Durchführung einer Operation des Prozessors muß der Strom im *Worst-Case* eine Strecke zurücklegen, die dem Umfang des Prozessors entspricht. Es ist also von Vorteil, die Prozessoren auf einer möglichst kleinen, rechteckigen Platine zu plazieren. Dazu werden häufig Einbettungen verwandt, wobei die Kostenmaße Kantenstreckung, Kantenauslastung und Leitungslänge die Effizienz der jeweiligen Plazierung beschreiben. Für eine allgemeine Einführung in dieses Themengebiet siehe [19, 35, 89, 91].

Im folgenden stellen wir den Stand der Forschung dar und zitieren dazu die wichtigsten Ergebnisse. Das Problem der Berechnung sowohl der *Bandweite* als auch der *Leitungslänge* von Q^n wurde von Larry Harper in [64, 65] gelöst. Die exakte *Schnittweite* von Q^n wurde unabhängig voneinander in den Arbeiten [9] und [114] bestimmt (siehe auch [146]).

Satz 4.1 (Harper [64, 65], Bel Hala [9], Nakano [114])

Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n und $G^1 = (V_{G^1}, E_{G^1})$ das eindimensionale Gitter mit $|V_{G^1}| = 2^n$. Es gilt:

$$\text{dil}(Q^n, G^1) = \max_{1 \leq m < 2^n} \Gamma_{Q^n}(m) = \max_{1 \leq m < 2^n} \min_{|A|=m} |\Gamma_{Q^n}(A)| = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}, \quad (4.1)$$

$$\text{con}(Q^n, G^1) = \max_{1 \leq m < 2^n} \theta_{Q^n}(m) = \max_{1 \leq m < 2^n} \min_{|A|=m} |\theta_{Q^n}(A)| = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 2 + (n \bmod 2)), \quad (4.2)$$

$$\text{wl}(Q^n, G^1) = \sum_{m=1}^{2^n} \theta_{Q^n}(m) = 2^{n-1} (2^n - 1). \quad (4.3)$$

Wir bezeichnen mit f_{ban} und f_{lex} die Einbettungen von Q^n in die Linie G^1 , die die entsprechenden Parameter aus (4.1) beziehungsweise (4.2) und (4.3) aufweisen. Hierbei ist f_{ban} dadurch definiert, daß für $i = 1, \dots, 2^n$ der i -te Knoten des Hypercubes bezüglich der Ordnung B (siehe Abschnitt 3.1) auf den Knoten $i - 1$ der Linie abgebildet wird, und das Routing-Schema durch die eindeutigen kürzesten Wege zwischen den entsprechenden Bildknoten festgelegt ist. In Abbildung 4.1 haben wir die Einbettung f_{ban} des Hypercubes Q^3 in die Linie der Länge acht dargestellt.

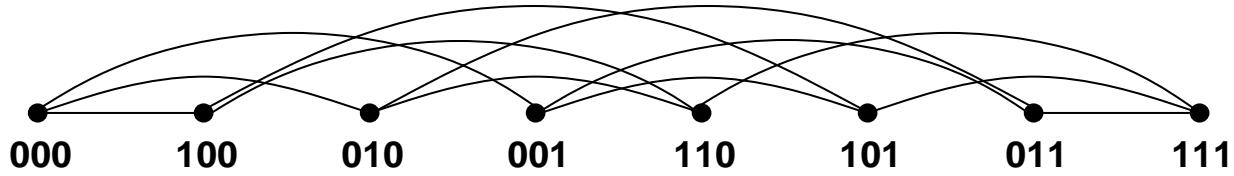


Abb. 4.1: Die Einbettung f_{ban} des Hypercubes Q^3 in die Linie der Länge acht.

Analog zu f_{ban} ist f_{lex} dadurch definiert, daß für $i = 1, \dots, 2^n$ der i -te Knoten des Hypercubes bezüglich der Ordnung L (siehe Abschnitt 3.1) auf den Knoten $i - 1$ der Linie abgebildet wird, und das Routing-Schema durch die eindeutigen kürzesten Wege zwischen den entsprechenden Bildknoten festgelegt ist. In Abbildung 4.2 haben wir die Einbettung f_{lex} des Hypercubes Q^3 in die Linie der Länge acht dargestellt.

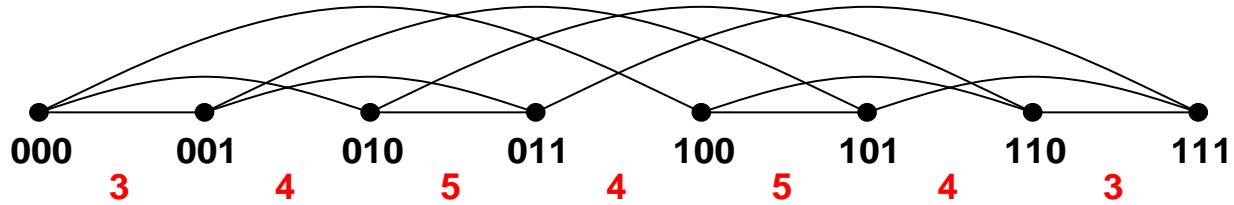


Abb. 4.2: Die Einbettung f_{lex} des Hypercubes Q^3 in die Linie der Länge acht. Die Zahlen unterhalb der Kanten sind die Werte für die Kantenauslastungen.

In [98] haben Ma und Tao bijektive Einbettungen zwischen höherdimensionalen Gittern und Tori untersucht. Wenden wir deren Methode auf die Fragestellung der Einbettung des binären Hypercube in ein zweidimensionales Gitter an, so erhalten wir eine Einbettung mit einer Kan tenstreckung die gerade die Hälfte der längsten Seitenlänge des Gitters entspricht.

Lemma 4.1 (Ma,Tao [98])

Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n und $G^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ das zweidimensionale Gitter mit $n_1 \leq n_2$ und $n_1 + n_2 = n$. Es gilt:

$$\text{dil}(Q^n, G^2) \leq \frac{2^{n_2}}{2}.$$

Chung hat in dem Aufsatz [35] einen Satz bewiesen, mit dem sich eine untere Schranke für die Kantenstreckung einer injektiven Einbettung eines beliebigen Graphen G in ein d -dimensionales Gitter ableiten lässt.

Satz 4.2 (Chung [35])

Sei $G = (V_G, E_G)$ ein Graph mit Durchmesser D , und $G^d = (V_{G^d}, E_{G^d})$ ein d -dimensionales Gitter mit $d \geq 2$ und $|V_G| \leq |V_{G^d}|$. Es gilt:

$$\text{dil}(G, G^d) \geq \frac{\sqrt[d]{|V_G|} - 1}{D}.$$

Die Anwendung dieses Satzes für den binären Hypercube Q^n als Graph G liefert somit

$$\text{dil}(Q^n, G^d) \geq \frac{\sqrt[d]{2^n} - 1}{n}.$$

Diese untere Schranke lässt sich allerdings leicht durch den Ansatz aus Proposition 3.1 verbessern. Sei Q^n der binäre Hypercube und $G^d = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_d$ ein d -dimensionales Gitter mit $\prod_{i=1}^d N_i \geq 2^n$. Für den Durchmesser des Gitters gilt: $N_1 + N_2 + \dots + N_d - d \geq d \cdot \sqrt[d]{2^n} - d$. Somit erhalten wir:

$$\text{dil}(Q^n, G^d) \geq \frac{d \cdot (\sqrt[d]{2^n} - 1)}{n}.$$

Bijektive Einbettungen des Hypercubes Q^n in quadratische, zweidimensionale Gitter wurden des weiteren von Lai und Sprague [85] untersucht, die den folgenden Satz zeigen konnten.

Satz 4.3 (Lai, Sprague [85])

Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n und $G^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ das zweidimensionale Gitter mit $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$. Es gilt:

$$\text{dil}(Q^n, G^2) = \Theta\left(\sqrt{\frac{2^n}{n}}\right).$$

Zienicke [143] konnte für die gleiche Problemstellung bezüglich der Kantenauslastung den folgenden Satz beweisen.

Satz 4.4 (Zienicke [143])

Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n und $G^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ das zweidimensionale Gitter mit $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$. Es gilt:

$$\text{con}(Q^n, G^2) = \Theta\left(\sqrt{2^n}\right).$$

Weitere Arbeiten [6, 60, 102], auf die wir hier jetzt nicht weiter eingehen werden, befassen sich mit Einbettungen des binären Hypercubes in Gitter mit sogenannten *wraparound Kanten*, also in Torus Netzwerke.

4.2 Überblick über die erzielten Ergebnisse

In Abschnitt 4.3 werden wir mit Hilfe der Methode aus Abschnitt 3.3 das Kantenauslastungsproblem für die bijektive Einbettung des binären Hypercubes in das d -dimensionale Gitter lösen. Unser Hauptergebnis in diesem Zusammenhang ist der folgende Satz.

Satz 4.5 *Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n , und $G^d = (V_{G^d}, E_{G^d})$ ein d -dimensionales Gitter $G^d = 2^{n_1} \times \cdots \times 2^{n_d}$ mit $|V_{G^d}| = 2^n$ und $n_1 \leq \dots \leq n_d$. Es gilt:*

$$\text{con}(Q^n, G^d) = \frac{1}{3} (2^{n_d+1} - 2 + (n_d \bmod 2)).$$

In Abschnitt 4.4 werden wir zunächst mit Hilfe der Methode aus Abschnitt 3.2 eine untere Schranke für das Kantenstreckungsproblem bei der Einbettung des Hypercubes Q^n in ein zweidimensionales Gitter $G^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ mit $n_1 + n_2 = n$ beweisen. Darüber hinaus werden wir eine einfache obere Schranken Technik vorstellen, die sich durch das Produkt der Bandweiteneinbettung ergibt. Wir erhalten so das folgende Lemma.

Lemma 4.2 *Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n , und $G^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ das zweidimensionale Gitter mit $n_1 \leq n_2$ und $n_1 + n_2 = n$. Es gilt:*

$$\left\lceil \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}}{2^{n_1}} \right\rceil \leq \text{dil}(Q^n, G^2) \leq \sum_{i=0}^{n_2-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}.$$

Für den Spezialfall, wenn das zweidimensionale Gitter quadratisch ist, werden wir die Schranken aus Lemma 4.2 explizit abschätzen und anschließend die Asymptote genauer fassen, die sich aus den Sätzen 4.4 und 4.3 bezüglich der Kantenstreckung ergibt, indem wir das folgende Lemma beweisen.

Lemma 4.3 *Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n und $G^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ das zweidimensionale Gitter mit $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$. Es gilt:*

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{dil}(Q^n, G^2)}{\sqrt{\frac{2^n}{n}}} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

(Es gilt $\sqrt{2/\pi} \approx 0.79$ und $2/\sqrt{\pi} \approx 1.128$.)

Dabei beweisen wir die asymptotische untere Schranke aus Lemma 4.3, indem wir wiederum die Methode aus Abschnitt 3.2 verwenden. Anschließend zeigen wir, wie diese Methode modifiziert werden kann, um die folgende bessere asymptotische untere Schranke zu erhalten.

Lemma 4.4 Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n und $G^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ das zweidimensionale Gitter mit $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$. Es gilt:

$$0.873 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{dil}(Q^n, G^2)}{\sqrt{\frac{2^n}{n}}}.$$

Für d -dimensionale Gitter erhalten wir eine Asymptote für die Kantenstreckung durch den folgenden Satz.

Satz 4.6 Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n , und $G^d = (V_{G^d}, E_{G^d})$ das d -dimensionale Gitter $G^d = 2^{n_1} \times \cdots \times 2^{n_d}$ mit $|V_{G^d}| = 2^n$ und $n_1 = \dots = n_d$. Es gilt:

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \leq \lim_{\substack{n,d \rightarrow \infty \\ d=o(n)}} \frac{\text{dil}(Q^n, G^d)}{\sqrt{\frac{d}{n}} 2^{\frac{n}{d}}} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Bezüglich des Kostenmaßes Leitungslänge werden wir im Abschnitt 4.5 für die bijektive Einbettung des binären Hypercubes in ein d -dimensionales Gitter den folgenden Satz beweisen.

Satz 4.7 Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n , und $G^d = (V_{G^d}, E_{G^d})$ das d -dimensionale Gitter $G^d = 2^{n_1} \times \cdots \times 2^{n_d}$ mit $|V_{G^d}| = 2^n$ und $n_1 = \dots = n_d$. Es gilt:

$$\text{wl}(Q^n, G^d) = \frac{d}{2} \cdot (2^{n(d+1)/d} - 2^n).$$

4.3 Betrachtung der Kantenauslastung

Wir werden zunächst in Abschnitt 4.3.1 einen Beweis für die Lösung des Schnittweitenproblems für den Hypercube angeben. In Abschnitt 4.3.2 werden wir dann mit Hilfe der Methode aus Abschnitt 3.3 das Kantenauslastungsproblem für die Einbettung des Hypercubes in d -dimensionale Gitter lösen.

4.3.1 Die Schnittweite von Q^n

Gegeben sei ein Graph $G = (V_G, E_G)$ und eine Knotennumerierung $\eta : V_G \longrightarrow \{1, 2, \dots, |V_G|\}$. Die Schnittweite des Graphen G bezüglich der Knotennumerierung η , $\text{cw}(G, \eta)$, kann als die maximale Anzahl von Leitungen interpretiert werden, die einen beliebigen Punkt auf einer eindimensionalen Leiterplatte passieren. Betrachten wir nun einen Punkt zwischen l und $l + 1$. Da jede Leitung, die ein Ende an einer Koordinate kleiner oder gleich l , und das andere Ende an einer Koordinate größer oder gleich $l + 1$ hat, diesen Punkt passieren muß, können wir festhalten:

$$\text{cw}(G, \eta) = \max_{0 \leq l \leq |V_G|} |\theta_G(S_l(\eta))|.$$

Es gilt nun aber

$$\theta_G(l) = \min_{\substack{A \subseteq V_G \\ |A|=l}} |\theta_G(A)| = \min_{\eta} |\theta_G(S_l(\eta))|.$$

Somit können wir die Schnittweite von G wie folgt bestimmen:

$$cw(G) = \max_{0 \leq l \leq |V_G|} \theta_G(l). \quad (4.4)$$

Satz 4.8 Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n . Es gilt:

$$cw(Q^n) = \begin{cases} \frac{2^{n+1}-2}{3} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{2^{n+1}-1}{3} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis: Aus [64] wissen wir, daß für Q^n durch die lexikographische Ordnung L der Knoten des Hypercubes, $\theta_{Q^n}(l)$ für jedes l bestimmt werden kann. Somit erhalten wir aus (4.4):

$$cw(Q^n) = \max_{0 \leq l \leq 2^n} |\theta_{Q^n}(S_l(L))|.$$

Um nun $cw(Q^n)$ zu berechnen, formulieren wir zunächst einmal eine Beobachtung bezüglich der Funktion θ . Für einen Graphen $G = (V_G, E_G)$ und einer Teilmenge $S \subseteq V_G$ gilt mit $S^c = V_G \setminus S$: $|\theta_G(S)| = |\theta_G(S^c)|$. Daraus folgt:

$$\theta_G(l) = \theta_G(|V| - l). \quad (4.5)$$

Gleichung (4.5) bedeutet, daß die Werte $\theta_{Q^n}(l)$ für $1 \leq l \leq 2^n$ eine palindrom Zahlenfolge bilden. Das heißt, die ersten 2^{n-1} Werte der Folge entsprechen in umgekehrter Reihenfolge den letzten 2^{n-1} Werten. Um das Maximum dieser Werte zu bestimmen, müssen wir daher nur den Wertebereich $1 \leq l \leq 2^{n-1}$ untersuchen.

Darüber hinaus erhalten wir für Q^n die folgende Rekursionsgleichung:

$$|\theta_{Q^n}(S_l(L))| = \begin{cases} 2l + |\theta_{Q^{n-2}}(S_l(L))| & \text{falls } 0 \leq l \leq 2^{n-2} \\ 2^{n-1} + |\theta_{Q^{n-2}}(S_{l-2^{n-2}}(L))| & \text{falls } 2^{n-2} \leq l \leq 2^{n-1}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Die Korrektheit dieser Rekursion erläutern wir kurz anhand eines Beispiels. Betrachten wir hierzu den Hypercube Q^4 und dessen Teilmenge $S_3(L) = \{0000, 0001, 0010\}$ (siehe die schwarz markierten Knoten in Abbildung 4.3). Für $|\theta_{Q^4}(S_3(L))|$ werden nun alle Kanten gezählt, die genau einen Endpunkt in $S_3(L)$ haben. Einige dieser Kanten liegen in dem Teilcube mit der Knotenmenge $\{0000, 0001, 0010, 0011\}$. Dies sind genau $|\theta_{Q^2}(S_3(L))|$ viele Kanten (siehe die grau gepunkteten Kanten in Abbildung 4.3). Darüber hinaus hat jeder Knoten aus $S_3(L)$ genau zwei zusätzliche Kanten, die in $|\theta_{Q^4}(S_3(L))|$ gezählt werden. Dies sind die Hypercubekanten der Dimensionen drei und vier, die einen Endpunkt in der Menge $S_3(L)$ besitzen (siehe die

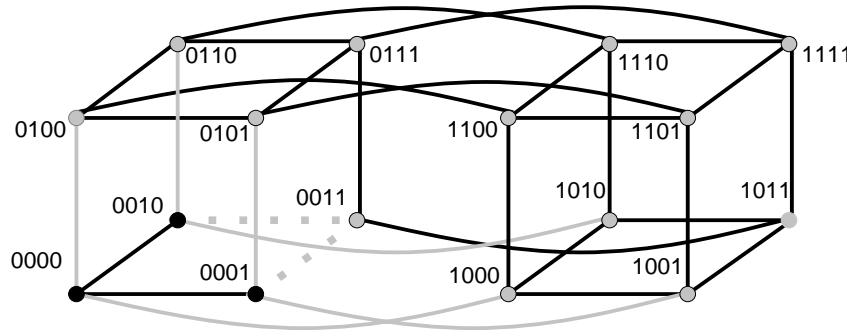


Abb. 4.3: Illustration zur Korrektheit der Rekursionsgleichung (4.6) für den Fall $0 \leq l \leq 2^{l-2}$ anhand des Hypercubes Q^4 .

durchgezogenen grauen Kanten in Abbildung 4.3). Insgesamt erhalten wir also $|\theta_{Q^4}(S_3(L))| = 2 \cdot 3 + |\theta_{Q^2}(S_3(L))|$ und allgemein für $0 \leq l \leq 4$: $|\theta_{Q^4}(S_l(L))| = 2 \cdot l + |\theta_{Q^{4-2}}(S_l(L))|$.

Betrachten wir nun die Teilmenge $S_5(L) = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100\}$ des Hypercubes Q^4 (siehe die schwarz markierten Knoten in Abbildung 4.4). Für $|\theta_{Q^4}(S_5(L))|$ werden wiederum alle Kanten gezählt, die genau einen Endpunkt in $S_5(L)$ haben. Zwei dieser Kanten liegen in dem Teilcube mit der Knotenmenge $\{0100, 0101, 0110, 0111\}$ (siehe die grau gepunkteten Kanten in Abbildung 4.4). Dies sind gerade $|\theta_{Q^2}(S_1(L))|$ viele Kanten. Die Anzahl der restlichen Kanten, die in $|\theta_{Q^4}(S_5(L))|$ gezählt werden, entspricht $2 \cdot 4$ beziehungsweise $2 \cdot 2^{4-2}$ (siehe die durchgezogenen grauen Kanten in Abbildung 4.4). Dies liegt daran, daß jeder Knoten des Teilcubes bestehend aus den Knoten von $S_4(L)$, im Prinzip genau zwei Hypercubekanten der Dimensionen drei und vier zu $\theta_{Q^4}(S_5(L))$ beiträgt. Wenn jedoch die Hypercubekante der Dimension drei von einem Knoten von $S_4(L)$ aus eine interne Kante des durch $S_5(L)$ induzierten Graphen ist, gibt es genau eine weitere Hypercubekante der Dimension vier, die zu $\theta_{Q^4}(S_5(L))$ gezählt wird. Insgesamt erhalten wir also $|\theta_{Q^4}(S_5(L))| = 2 \cdot 4 + |\theta_{Q^2}(S_1(L))|$ und allgemein für $4 \leq l \leq 8$: $|\theta_{Q^4}(S_l(L))| = 2 \cdot 2^{4-2} + |\theta_{Q^{4-2}}(S_{l-2^{4-2}}(L))|$. Eine Verallgemeinerung dieser Betrachtungen führt zu der Rekursionsgleichung (4.6).

Als nächstes ist die Frage zu beantworten, für welchen Parameter l der maximale Wert für $|\theta_{Q^n}(S_l(L))|$ erreicht wird. Eine genauere Betrachtung der Rekursionsgleichung (4.6) zeigt, daß dies für irgendein l im Bereich von 2^{n-2} bis 2^{n-1} sein muß. Zur Verdeutlichung dieser Tatsache, sei für jedes l , $0 \leq l \leq 2^{n-2}$, $l^* = l + 2^{n-2}$ definiert. Damit erhalten wir die folgende Ungleichung.

$$\begin{aligned}
 |\theta_{Q^n}(S_{l^*}(L))| &= 2^{n-1} + |\theta_{Q^{n-2}}(S_{l^*-2^{n-2}}(L))| \\
 &= 2^{n-1} + |\theta_{Q^{n-2}}(S_l(L))| \\
 &\geq 2l + |\theta_{Q^{n-2}}(S_l(L))| \\
 &= |\theta_{Q^n}(S_l(L))|.
 \end{aligned}$$

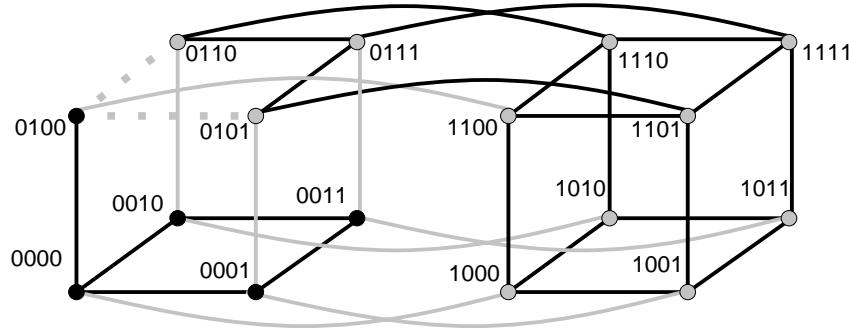


Abb. 4.4: Illustration zur Korrektheit der Rekursionsgleichung (4.6) für den Fall $2^{n-2} \leq l \leq 2^{n-1}$ anhand des Hypercubes Q^4 .

Insgesamt erhalten wir somit die folgende Rekurrenz für die Schnittweite des Hypercubes:

$$\text{cw}(Q^n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ 2^{n-1} + \text{cw}(Q^{n-2}) & \text{falls } n \geq 2. \end{cases}$$

Um die Rekurrenz zu lösen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

- n ist gerade:

$$\begin{aligned} \text{cw}(Q^n) &= 2^{n-1} + \text{cw}(Q^{n-2}) = 2^{n-1} + 2^{n-3} + \text{cw}(Q^{n-4}) \\ &= \dots = 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^1 + \text{cw}(Q^0) \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 2^{n-2i+1} = 2^{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^i \\ &= 2^{n+1} \cdot \left(\frac{\frac{1}{4}^{\frac{n+2}{2}} - 1}{\frac{1}{4} - 1} - 1 \right) \\ &= 2^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ &= \frac{2^{n+1} - 2}{3}. \end{aligned}$$

- n ist ungerade:

$$\begin{aligned} \text{cw}(Q^n) &= 2^{n-1} + \text{cw}(Q^{n-2}) = 2^{n-1} + 2^{n-3} + \text{cw}(Q^{n-4}) \\ &= \dots = 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + \text{cw}(Q^1) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i+1} = 1 + 2^{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + 2^{n+1} \cdot \left(\frac{\frac{1}{4}^{\frac{n+1}{2}} - 1}{\frac{1}{4} - 1} - 1 \right) \\
&= 1 + 2^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\
&= \frac{2^{n+1} - 1}{3}.
\end{aligned}$$

■

Wir schließen nun noch einige Nachbetrachtungen zu der Schnittweite des Hypercubes an, indem wir zwei sich aufdrängende Fragen behandeln. Was ist der kleinste Parameter l , für den $\theta_{Q^n}(l)$ den maximalen Wert annimmt, und für wieviele Parameter l wird dieser maximale Wert erreicht?

Sei $l_M(n)$ die Funktion, die jeweils den kleinsten Parameter l angibt, bei dem der Wert der Schnittweite bei der lexikographischen Einbettung f_{lex} des Hypercubes Q^n in die Linie der Länge 2^n auftritt. Das heißt, wir definieren

$$l_M(n) = \min\{l \mid \theta_{Q^n}(l) = \max_{0 \leq m \leq 2^n} \theta_{Q^n}(m)\}.$$

Es gilt:

$$l_M(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1, \end{cases}$$

und $l_M(n) \leq 2^{n-1}$ auf Grund der Gleichung (4.5). Aus (4.6) und den entsprechenden Erläuterungen dazu können wir des weiteren folgern, $l_M(n) = 2^{n-2} + l_M(n-2)$. Durch die Auflösung dieser Rekurrenz ergibt sich:

$$l_M(n) = \begin{cases} \frac{2^n - 1}{3} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{2^n + 1}{3} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Sei nun $\#(n)$ die Funktion, die angibt wie oft der Wert der Schnittweite bei der lexikographischen Einbettung f_{lex} des Hypercubes Q^n in die Linie der Länge 2^n auftritt. Das heißt, wir definieren

$$\#(n) = |\{l \mid \theta_{Q^n}(l) = \text{cw}(Q^n)\}|.$$

Es gilt:

$$\#(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ 3 & \text{falls } n = 2. \end{cases}$$

Auf Grund der Rekursion (4.6) und den entsprechenden Erläuterungen dazu wissen wir, daß für $n > 2$ der maximale Wert für $\theta_{Q^n}(l)$ für einen Parameter l mit $2^{n-2} < l < 2^{n-1}$ erreicht wird. Da

darüber hinaus die Werte $\theta_{Q^n}(l)$ für $1 \leq l \leq 2^n$ eine palindromische Zahlenfolge bilden, erhalten wir somit $\#(n) = 2 \cdot \#(n-2)$. Durch die Auflösung dieser Rekurrenz ergibt sich demnach:

$$\#(n) = \begin{cases} 3 \cdot 2^{\frac{n-2}{2}} & \text{falls } n > 0 \text{ und gerade} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{2^n} & \text{falls } n > 0 \text{ und gerade} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2^n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

4.3.2 Das Kantenauslastungsproblem

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Problem der Einbettung des Hypercubes Q^n in das d -dimensionale Gitter G^d unter Minimierung der Kantenauslastung. Dabei nehmen wir zunächst wiederum an, daß gilt: $G^d = 2^{n_1} \times \dots \times 2^{n_d}$ mit $d \geq 2, n_1 + \dots + n_d = n$ und $n_1 \leq \dots \leq n_d$. Das heißt, die Knotenabbildung der Einbettung ist eine bijektive Funktion.

Wir werden zunächst mittels der Methode aus Abschnitt 3.3 eine untere Schranke beweisen und anschließend eine Einbettung angeben, die diese Schranke erreicht. Somit haben wir für das Kantenauslastungsproblem $\text{con}(Q^n, G^d)$ eine optimale Lösung gefunden.

Satz 4.9 Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n , und $G^d = (V_{G^d}, E_{G^d})$ ein d -dimensionales Gitter $G^d = 2^{n_1} \times \dots \times 2^{n_d}$ mit $|V_{G^d}| = 2^n$ und $n_1 \leq \dots \leq n_d$. Es gilt:

$$\text{con}(Q^n, G^d) = \text{cw}(Q^{n_d}).$$

Beweis: Nach Lemma 3.2 gilt:

$$\text{con}(Q^n, G^d) \geq \max_{1 \leq l < 2^n} \frac{\theta_{Q^n}(l)}{\theta_{G^d}(l)}.$$

Unsere Strategie besteht nun darin, für ein bestimmtes l eine obere Abschätzung für $\theta_{G^d}(l)$ anzugeben und $\theta_{Q^n}(l)$ exakt zu berechnen, so daß wir insgesamt eine untere Abschätzung für den Term auf der rechten Seite der obigen Ungleichung erhalten.

Sei nun $n' = n_1 + \dots + n_{d-1}$ und $l = 2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3} - \dots + (-1)^{n-n'+1} \cdot 2^{n'}$ fest gewählt. Es gilt $2^{n-2} \leq l < 2^{n-1}$ und $l = a \cdot 2^{n'}$ für eine bestimmte ganze Zahl a . Dabei ist zu beachten, daß $l = 2^{n'} \cdot (2^{n-1-n'} - 2^{n-2-n'} + \dots + (-1)^{n-n'+1})$ und damit $a < 2^{n_d-1}$ gilt.

Wenn wir nun das Teilgitter T von G^d mit $T = 2^{n_1} \times \dots \times 2^{n_{d-1}} \times a$ betrachten, so ist

$$\theta_{G^d}(l) \leq |\theta_{G^d}(T)| = 2^{n'}.$$

Auf der anderen Seite erhalten wir mittels Gleichung (4.6) (beachte: $2^{n-2} \leq l < 2^{n-1}$)

$$\theta_{Q^n}(l) = 2^{n-1} + \theta_{Q^{n-2}}(l - 2^{n-2}) = 2^{n-1} + \theta_{Q^{n-2}}(2^{n-3} - \dots + (-1)^{n-n'+1} \cdot 2^{n'}).$$

Für n_d ungerade ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\theta_{Q^n}(l) &= 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + \theta_{Q^{n'+1}}(2^{n'}) \\ &= \sum_{i=1}^{\lceil \frac{n-n'}{2} \rceil} 2^{n-2i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{n_d+1}{2}} 2^{n-2i+1} \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^{n'}.\end{aligned}$$

Für n_d gerade erhalten wir analog

$$\begin{aligned}\theta_{Q^n}(l) &= 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + \theta_{Q^{n'+1}}(0) \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{n-n'}{2}} 2^{n-2i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{n_d}{2}} 2^{n-2i+1} \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^{n'+1}.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\theta_{Q^n}(l) = \begin{cases} 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^{n'} & \text{falls } n_d \text{ ungerade} \\ 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^{n'+1} & \text{falls } n_d \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\frac{\theta_{Q^n}(l)}{\theta_{G^d}(l)} &\geq \frac{1}{2^{n'}} \begin{cases} 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^{n'} & \text{falls } n_d \text{ ungerade} \\ 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^{n'+1} & \text{falls } n_d \text{ gerade} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{n_d-1} & \text{falls } n_d \text{ ungerade} \\ 2 + 2^3 + \dots + 2^{n_d-1} & \text{falls } n_d \text{ gerade} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2^{n_d+1}-1}{3} & \text{falls } n_d \text{ ungerade} \\ \frac{2^{n_d+1}-2}{3} & \text{falls } n_d \text{ gerade} \end{cases} \\ &= \text{cw}(Q^{n_d}).\end{aligned}$$

Das heißt, wir erhalten als Ergebnis aus unseren Betrachtungen $\text{con}(Q^n, G^d) \geq \text{cw}(Q^{n_d})$.

Für die obere Schranke konstruieren wir die folgende Einbettung, wobei wir die Tatsache ausnutzen, daß Q^n isomorph zu $Q^{n_1} \times \dots \times Q^{n_d}$ ist. Wir betten mittels der lexikographischen

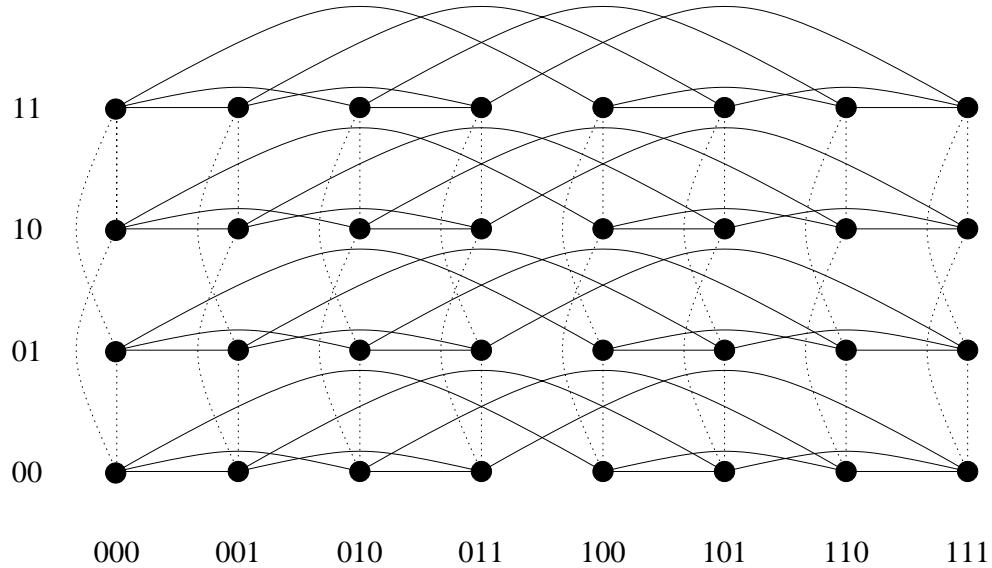


Abb. 4.5: Optimale Einbettung bezüglich der Kantenauslastung des $Q^5 = Q^2 \times Q^3$ in $G^2 = 4 \times 8$.

Einbettung f_{lex} jeweils den Teilcube Q^{n_i} in die Linie der Länge 2^{n_i} ein. Da $G^d = 2^{n_1} \times \dots \times 2^{n_d}$, erhalten wir durch das Kreuzprodukt der entsprechenden Linieneinbettungen eine Einbettung des Q^n in G^d . In Abbildung 4.5 ist diese Technik anhand eines Beispiels illustriert.

Durch diese Einbettungstechnik erhalten wir die folgende obere Schranke

$$\text{con}(Q^n, G^d) \leq \max_{i \in \{1, \dots, d\}} \text{cw}(Q^{n_i}) = \text{cw}(Q^{n_d}).$$

Da diese obere Schranke gleich der von uns berechneten unteren Schranke ist, können wir festhalten, daß die gerade beschriebene Technik eine optimale Einbettung für das Kantenauslastungsproblem $\text{con}(Q^n, G^d)$ liefert. ■

Beweis des Satzes 4.5: Aus Satz 4.8 und Satz 4.9 folgt unmittelbar Satz 4.5. ■

Wir haben im vorherigen eine exakte Lösung für das Kantenauslastungsproblem bei der bijektiven Einbettung eines n -dimensionalen binären Hypercubes Q^n in ein d -dimensionales Gitter G^d beschrieben. Für den Spezialfall $d = 2$ betrachten wir nun das gleiche Problem unter der Erweiterung, daß die Einbettung des n -dimensionalen binären Hypercubes Q^n in das zweidimensionale Gitter G^2 lediglich injektiv sein muß. Einschränkend setzen wir allerdings voraus, daß das Zielgitter nicht wesentlich mehr Knoten besitzt als der Hypercube. Formulieren wir diese Einschränkung formal, so ergeben sich als Anforderungen an das zweidimensionale Gitter $G^2 = N_1 \times N_2$ (o. E. d. A. sei $N_1 \leq N_2$) die folgenden Bedingungen: $N_1 \cdot (N_2 - 1) < 2^n < N_1 \cdot N_2$ und $N_1, N_2 \neq 2^i$ für ein $i \in \mathbb{N}$.

Zur Einbettung des n -dimensionalen binären Hypercubes Q^n in das zweidimensionale Gitter G^2 verwenden wir ein zweistufiges Verfahren. Zunächst berechnen wir eine kantenausla-

stungsoptimale bijektive Einbettung des Hypercubes Q^n in ein zweidimensionales Zwischengitter $ZG = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ mit $n_1 + n_2 = n$, $2^{n_1-1} < N_1 < 2^{n_1}$ und $2^{n_2} < N_2 < 2^{n_2+1}$. Dies geschieht mit der im Beweis des Satz 4.9 beschriebenen Methode. Für die Kantenauslastung dieser Einbettung erhalten wir ebenfalls aus Satz 4.9: $\text{con}(Q^n, ZG) = \text{cw}(Q^{\max\{n_1, n_2\}})$. Anschließend betten wir das Zwischengitter ZG in das Zielgitter G^2 mittels einer Methode ein, die wir in Kapitel 5 eingehend vorstellen und analysieren. Die Kantenauslastung dieser Einbettung wiederum ist maximal drei, was sich aus Satz 5.3 mit den entsprechenden Parametern ergibt. Exakt formuliert, erhalten wir für die Kantenauslastung dieses Schrittes eine obere Schranke der Gestalt $\lceil 2^{n_1}/N_1 \rceil + 1 \leq \lceil 2^{n_1}/2^{n_1-1} \rceil + 1 = 3$. Als Gesamtergebnis aus diesem Ansatz erhalten wir:

Korollar 4.1 *Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n , und $G^2 = N_1 \times N_2$ ein zweidimensionales Gitter mit $N_1 \leq N_2$, $N_1 \cdot (N_2 - 1) < 2^n < N_1 \cdot N_2$. Des weiteren seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ definiert durch $n_1 + n_2 = n$, $2^{n_1-1} < N_1 < 2^{n_1}$ und $2^{n_2} < N_2 < 2^{n_2+1}$. Es gilt:*

$$\text{con}(Q^n, G^2) \leq 3 \cdot \text{cw}(Q^{\max\{n_1, n_2\}}) = 2^{\max\{n_1, n_2\}+1} - 2 + ((\max\{n_1, n_2\}) \bmod 2).$$

4.3.3 Nachbetrachtungen

Es gehört zu den charakteristischen Eigenschaften des Hypercubes, daß er in vielfacher Weise als Kreuzprodukt von niedrigdimensionalen Teilcubes faktorisierbar ist. Im vorherigen Abschnitt konnten wir einen Zusammenhang zwischen der Schnittweite des größten Teilcubes, der in einer entsprechenden Faktorisierung vorkommt, und der Kantenauslastung für die Einbettung des Hypercubes in das d -dimensionale Gitter G^d nachweisen. Diese Tatsache wirft die Frage auf, ob dieser Zusammenhang bei der Einbettung eines jeden Graphen, der als Kreuzprodukt von Teilgraphen darstellbar ist, in das d -dimensionale Gitter G^d , vorhanden ist. Das folgende Beispiel zeigt, daß dies nicht der Fall ist. Betrachten wir das Kreuzprodukt der vollständigen Graphen K_4 und K_2 (siehe Abbildung 4.6). In Abbildung 4.7 ist eine Einbettung dieses Graphen in das 2×4 Gitter G^2 dargestellt. Dabei sei das Routing-Schema durch die dünn dargestellten Linien definiert. Es gilt nun:

$$\text{con}(K_4 \times K_2, G^2) = 3 < 4 = \text{cw}(K_4).$$

In Kapitel 5 verwenden wir die gleiche untere Schranken Methode für die Bestimmung der Kantenauslastung bei der Einbettung von zweidimensionalen Gittern in andere zweidimensionale Gitter. Wir erhalten als Ergebnis dieser Untersuchung wiederum eine scharfe untere Schranke für das entsprechende Kantenauslastungsproblem. Dies legt die Frage nahe, ob wir generell mit Hilfe unserer Methode eine scharfe untere Schranke erhalten. Ein kurzes Beispiel zeigt, daß dies nicht der Fall ist. Betrachten wir den zweidimensionalen Torus $T^2 = m \times n$ als Gastgraphen und nehmen wir an, dieser Graph ist in einen bezüglich der Knotenzahl gleichgroßen Ring T^1 der Länge $m \cdot n$ einzubetten. Vrto, Sýkora und Rolim konnten in [126] zeigen, daß für die so definierten Graphen $\text{con}(T^2, T^1) = \min\{m+2, n+2\}$ gilt. Mit unserer Methode aus Lemma 3.2 erhalten

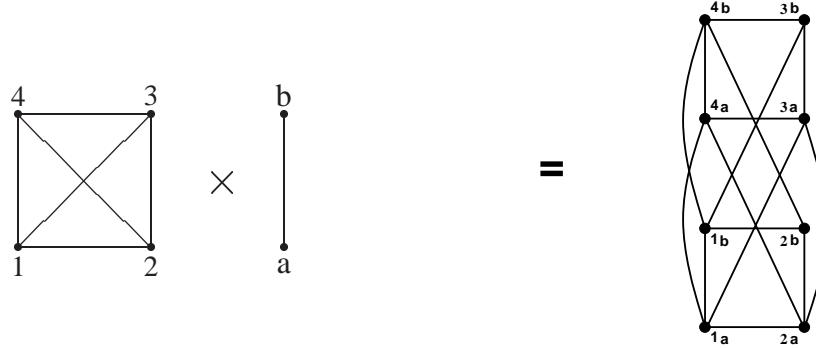


Abb. 4.6: Das kartesische Produkt der Graphen K_4 und K_2 .

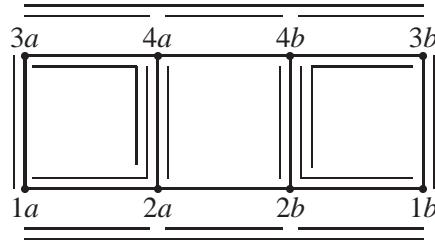


Abb. 4.7: Einbettung des $K_4 \times K_2$ in das 2×4 Gitter.

wir als untere Schranke

$$\text{con}(T^2, T^1) \geq \max_{1 \leq l < m \cdot n} \frac{\theta_{T^2}(l)}{\theta_{T^1}(l)} = \max_{1 \leq l < m \cdot n} \frac{\theta_{T^2}(l)}{2}.$$

Selbst wenn wir für $\theta_{T^2}(l)$ als obere Abschätzung $\text{cw}(T^2) = \min\{2m + 2, 2n + 2\}$ einsetzen, erhalten wir „nur“ $\text{con}(T^2, T^1) \geq \min\{m + 1, n + 1\}$ als untere Schranke für die Kantenauslastung. Unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus [126] ist klar, daß dies keine scharfe Schranke ist.

Mögliche Erweiterungen unserer Betrachtungen bieten sich durch die Anwendung unserer Methode auf andere Einbettungsprobleme mit der Linie beziehungsweise dem Gitter als Gastgebergraphen an. Die Bestimmung der zyklischen Schnittweite und der zyklischen Leitungslänge des Hypercubes, das heißt, der minimalen Kantenauslastung und der minimalen Leitungslänge bei der bijektiven Einbettung eines Hypercubes in den Ring, wurde in [9] und in [62] untersucht.

4.4 Betrachtung der Kantenstreckung

4.4.1 Das Kantenstreckungsproblem für zweidimensionale Gitter

Wir werden zunächst mit Hilfe der Methode aus Abschnitt 3.2 das Lemma 4.2 beweisen und anschließend die Lücke zwischen der unteren und der oberen Schranke im Spezialfall von quadratischen Gastgebergittern diskutieren. Zunächst betrachten wir also die Einbettung des Hypercubes

Q^n in ein beliebiges zweidimensionales Gitter $G^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ mit $n_1 \leq n_2$ und $n_1 + n_2 = n$.

Beweis des Lemma 4.2: Wie bereits erwähnt, verwenden wir die Methode aus Abschnitt 3.2. Sei m dabei so gewählt, daß $\Gamma_{Q^n}(m) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}$ gilt. Ferner wählen wir $D \subset V_{G^2}$ mit $|D| = m$ als die Menge der Knoten, die der Menge $S_m(L)$ entspricht. Das heißt, die Menge D besteht aus den ersten m Knoten des Gitters bezüglich der lexikographischen Ordnung auf dem Gitter $G^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$. Sei $A \subset V_{Q^n}$ die Menge der Knoten von Q^n , die mittels einer beliebigen aber festen Einbettung $f = (\phi, R_\phi)$ auf D abgebildet werden. Das heißt, $A = \phi^{-1}(D)$. Es gilt $|A| = m$ und

$$|\Gamma_{Q^n}(A)| \geq \Gamma_{Q^n}(m).$$

Bezüglich der Menge D gilt in dem Gitter G^2 für jedes d :

$$\left| \bigcup_{i=1}^d \delta_{G^2}^i(D) \right| \leq 2^{n_1} \cdot d.$$

Damit erhalten wir:

$$\Gamma_{Q^n}(m) > 2^{n_1} \cdot \left(\left[\frac{\Gamma_{Q^n}(m)}{2^{n_1}} \right] - 1 \right) \geq \left| \bigcup_{i=1}^{\left[\frac{\Gamma_{Q^n}(m)}{2^{n_1}} \right] - 1} \delta_{G^2}^i(D) \right|.$$

Mit Hilfe des Lemmas 3.1 gilt somit:

$$\text{dil}(Q^n, G^2) \geq \left[\frac{\Gamma_{Q^n}(m)}{2^{n_1}} \right] = \left[\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}}{2^{n_1}} \right].$$

Für die obere Schranke konstruieren wir die folgende Einbettung, wobei wir die Tatsache ausnutzen, daß Q^n isomorph zu $Q^{n_1} \times Q^{n_2}$ ist. Wir betten mittels der Bandweiteneinbettung f_{ban} jeweils den Teilcube Q^{n_i} in die Linie der Länge 2^{n_i} ein, mit $i \in \{1, 2\}$. Da $G^d = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$, erhalten wir also durch das Kreuzprodukt der entsprechenden Linieneinbettungen eine Einbettung des Q^n in G^2 . In Abbildung 4.8 haben wir diese Technik anhand eines Beispiels illustriert.

Durch diese Einbettungstechnik erhalten wir die folgende obere Schranke

$$\text{dil}(Q^n, G^2) \leq \max_{i \in \{1, 2\}} \text{bw}(Q^{n_i}) = \text{bw}(Q^{n_2}) = \sum_{i=0}^{n_2-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}.$$

■

Wir werden nun für den Spezialfall, daß das Gastgebergitter quadratisch ist, die Lücke zwischen der unteren und der oberen Schranke genauer bestimmen. In diesem Fall ist n eine gerade Zahl, so daß wir aus Lemma 4.2 die folgende Ungleichung erhalten:

$$\left[\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}}{2^{\frac{n}{2}}} \right] \leq \text{dil}(Q^n, G^2) \leq \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}. \quad (4.7)$$

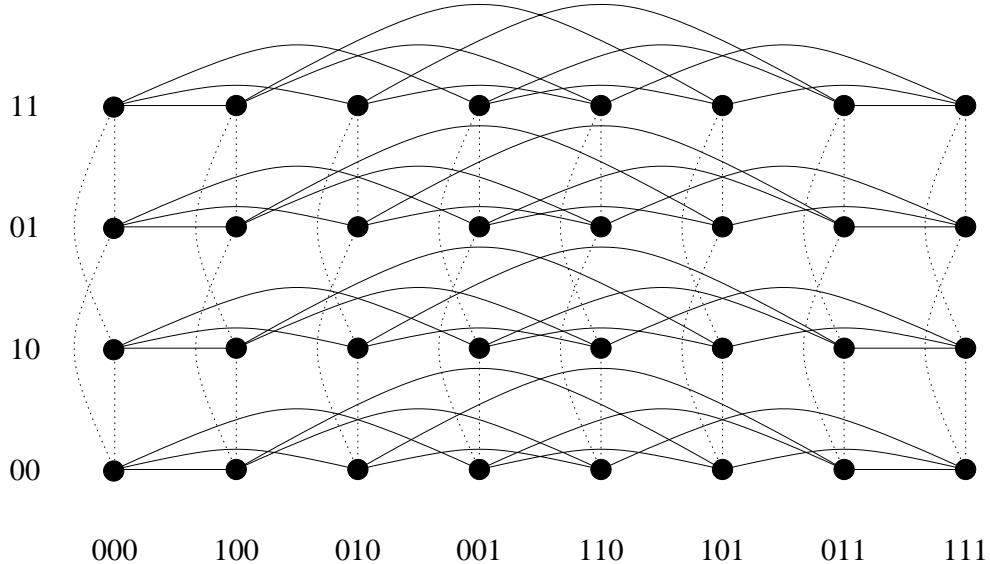


Abb. 4.8: Einbettung des $Q^5 = Q^2 \times Q^3$ in $G^2 = 4 \times 8$ mittels des Produkts der Bandweiteneinbettung.

Wir schätzen zunächst die untere Schranke ab. Dabei verwenden wir eine Ungleichung, die wir aus dem Beweis der Wallisschen Formel (siehe [135]) entnommen haben. Es gilt $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2^{2m}}{\sqrt{2m+1}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi}}. \quad (4.8)$$

Ferner gilt:

$$\binom{2m-1}{\lfloor \frac{2m-1}{2} \rfloor} = \frac{(2m-1)!}{(m-1)!m!} = \frac{2m}{2m} \cdot \frac{(2m-1)!}{(m-1)!m!} = \frac{(2m)!}{2 \cdot m!m!} = \frac{\binom{2m}{m}}{2}. \quad (4.9)$$

Wir erhalten damit für alle geraden $n \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m$ aus (4.8):

$$\frac{2^n}{\sqrt{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq \binom{n}{n/2} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

und für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m-1$ aus (4.8) und (4.9):

$$\frac{2^n}{\sqrt{n+2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Insgesamt ergibt sich somit die folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2^n}{\sqrt{n+2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (4.10)$$

Des weiteren beweisen wir durch Induktion, daß $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$2 \cdot \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}. \quad (4.11)$$

Für $n = 2$ ist die Aussage korrekt. Es folgt der Induktionsschluß von n nach $n + 1$. Es gilt:

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \stackrel{I.V.}{\geq} 2 \cdot \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq 2 \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

wobei sich der letzte Schritt direkt aus $2 \cdot \binom{n-1}{\lfloor n-1/2 \rfloor} \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ ergibt. Dies wiederum folgt direkt aus (4.9). Damit ist (4.11) bewiesen.

Insgesamt erhalten wir damit für die untere Schranke aus (4.7):

$$\left[\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}}{2^{\frac{n}{2}}} \right] \stackrel{(4.11)}{\geq} \left[\frac{2 \cdot \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}}{2^{\frac{n}{2}}} \right] \stackrel{(4.10)}{\geq} \left[\frac{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n-1}}{\sqrt{n+1}}}{2^{\frac{n}{2}}} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2^n}{n+1}}.$$

Wenden wir uns nun der Abschätzung der oberen Schranke aus (4.7) zu. Wir zeigen per Induktion, daß $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} \leq \frac{4}{3} \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}. \quad (4.12)$$

Für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ ist die Aussage offensichtlich korrekt. Es folgt der Induktionsschluß von n nach $n + 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \stackrel{I.V.}{\leq} \frac{4}{3} \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \frac{7}{3} \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \\ &\leq \frac{4}{3} \cdot \binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, \end{aligned}$$

wobei sich der letzte Schritt aus der folgenden Betrachtung ergibt.

Sei n ungerade:

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} &= \frac{7}{3} \cdot \frac{n!}{(\frac{n-1}{2})! \cdot (\frac{n+1}{2})!} = \frac{7}{3} \cdot \frac{(\frac{n+1}{2})}{(n+1)} \cdot \frac{n! \cdot (n+1)}{(\frac{n+1}{2}) \cdot (\frac{n-1}{2})! \cdot (\frac{n+1}{2})!} \\ &= \frac{7}{6} \cdot \frac{(n+1)!}{(\frac{n+1}{2})! \cdot (\frac{n+1}{2})!} = \frac{7}{6} \cdot \binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} < \frac{4}{3} \cdot \binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}. \end{aligned}$$

Sei n gerade:

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} &= \frac{7}{3} \cdot \frac{n!}{(\frac{n}{2})! \cdot (\frac{n}{2})!} = \frac{7}{3} \cdot \frac{(\frac{n}{2}+1)}{(n+1)} \cdot \frac{n! \cdot (n+1)}{(\frac{n}{2}+1) \cdot (\frac{n}{2})! \cdot (\frac{n}{2})!} \\ &= \frac{7}{3} \cdot \frac{(\frac{n}{2}+1)}{(n+1)} \cdot \binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \leq \frac{4}{3} \cdot \binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \text{ für } n > 4. \end{aligned}$$

Damit ist (4.12) bewiesen.

Insgesamt erhalten wir damit für die obere Schranke aus (4.7):

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} \stackrel{(4.12)}{\leq} \frac{4}{3} \cdot \binom{n/2}{\lfloor \frac{n/2}{2} \rfloor} \stackrel{(4.10)}{\leq} \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2^n}{n}}.$$

Zusammenfassend können wir das folgende Korollar formulieren.

Korollar 4.2 *Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n und $G^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ das zweidimensionale Gitter mit $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$. Es gilt:*

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2^n}{n+1}} \leq \text{dil}(Q^n, G^2) \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2^n}{n}}.$$

Wir diskutieren nun analog zu den Betrachtungen in dem Abschnitt 4.3.2 das Problem, daß die Einbettung des n -dimensionalen binären Hypercubes Q^n in das zweidimensionale Gitter G^2 lediglich injektiv sein muß. Einschränkend setzen wir erneut voraus, daß das Zielgitter nicht wesentlich mehr Knoten besitzt als der Hypercube. Wir formulieren für das zweidimensionale Gitter $G^2 = N_1 \times N_2$ (o. E. d. A. sei $N_1 \leq N_2$) die folgenden Bedingungen: $N_1 \cdot (N_2 - 1) < 2^n < N_1 \cdot N_2$ und $N_1, N_2 \neq 2^i$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Analog zu dem in Abschnitt 4.3.2 beschriebenen Ansatz zur Einbettung des n -dimensionalen binären Hypercubes Q^n in das zweidimensionale Gitter G^2 verwenden wir ein zweistufiges Verfahren. Zunächst berechnen wir mittels der im Beweis des Lemma 4.2 beschriebenen Methode eine bijektive Einbettung des Hypercubes Q^n in ein zweidimensionales Zwischengitter $ZG = 2^{n_1} \times 2^{n_2}$ mit $n_1 + n_2 = n$, $2^{n_1-1} < N_1 < 2^{n_1}$ und $2^{n_2} < N_2 < 2^{n_2+1}$. Für die Kantenstreckung dieser Einbettung erhalten wir: $\text{dil}(Q^n, ZG) \leq \text{bw}(Q^{\max\{n_1, n_2\}})$. Anschließend betten wir das Zwischengitter ZG in das Zielgitter G^2 mittels einer Methode ein, die wir in Kapitel 5 eingehend vorstellen und analysieren. Die Kantenstreckung dieser Einbettung wiederum ist maximal zwei, was sich aus Satz 5.4 mit den entsprechenden Parametern ergibt. Exakt formuliert, erhalten wir für die Kantenstreckung dieses Schrittes eine obere Schranke der Gestalt $\lceil 2^{n_1}/N_1 \rceil \leq \lceil 2^{n_1}/2^{n_1-1} \rceil = 2$.

Als Gesamtergebnis aus diesem zweistufigen Ansatz erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 4.3 *Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n , und $G^2 = N_1 \times N_2$ das zweidimensionale Gitter mit $N_1 \leq N_2$, $N_1 \cdot (N_2 - 1) < 2^n < N_1 \cdot N_2$. Des weiteren seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ definiert durch $n_1 + n_2 = n$, $2^{n_1-1} < N_1 < 2^{n_1}$ und $2^{n_2} < N_2 < 2^{n_2+1}$. Es gilt:*

$$\text{dil}(Q^n, G^2) \leq 2 \cdot \text{bw}(Q^{\max\{n_1, n_2\}}) \leq \frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{\max\{n_1, n_2\}}}{\sqrt{\max\{n_1, n_2\}}}.$$

4.4.2 Eine asymptotische obere Schranke für die Kantenstreckung

Für die obere Schranke verwenden wir die Verallgemeinerung der bereits vorgestellten Einbettung als Produkt der Bandweiteneinbettung. Wir nutzen also die Tatsache aus, daß Q^n isomorph

zu $Q^{n_1} \times \cdots \times Q^{n_d}$ ist, und betten mittels der Bandweiteneinbettung f_{ban} jeweils den Teilcube Q^{n_i} in die Linie der Länge 2^{n_i} ein, für $i = 1, \dots, d$. Da $G^d = 2^{n_1} \times \cdots \times 2^{n_d}$, ergibt sich durch das Kreuzprodukt der entsprechenden Linieneinbettungen eine Einbettung des Q^n in G^d .

Wir erhalten durch diese Technik die folgende obere Schranke

$$\text{dil}(Q^n, G^d) \leq \max_{i \in \{1, \dots, d\}} \text{bw}(Q^{n_i}) = \text{bw}(Q^{n_d}). \quad (4.13)$$

Anschließend beweisen wir nun eine Asymptote für die Summe aus (4.1).

Lemma 4.5 *Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n und $G^1 = (V_{G^1}, E_{G^1})$ das eindimensionale Gitter mit $|V_{G^1}| = 2^n$. Es gilt:*

$$\text{dil}(Q^n, G^1) \sim \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Beweis: Es gilt (vergleiche (4.1)):

$$\text{dil}(Q^n, G^1) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}. \quad (4.14)$$

Im folgenden gilt es diese Summe abzuschätzen. Dazu zeigen wir zunächst, daß für $k \rightarrow \infty$ gilt:

$$\sum_{i=0}^k \binom{2i}{i} \sim \frac{4}{3} \binom{2k}{k}, \quad (4.15)$$

$$\sum_{i=0}^k \binom{2i+1}{i} \sim \frac{4}{3} \binom{2k+1}{k}. \quad (4.16)$$

Da die Beweise für beide Gleichungen analog geführt werden können, geben wir nur den Beweis zu (4.15) an. Für die Summe aus (4.15) gilt:

$$\sum_{i=0}^k \binom{2i}{i} = \sum_{j=0}^k \binom{2(k-j)}{k-j}. \quad (4.17)$$

Des weiteren gilt

$$\binom{2(k-1)}{k-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2k-1} \cdot \binom{2k}{k},$$

und allgemein für $1 \leq j \leq k$

$$\binom{2(k-j)}{k-j} = \frac{1}{2^j} \cdot \frac{k}{2k-1} \cdot \frac{k-1}{2k-3} \cdots \frac{k-j+1}{2(k-j)+1} \cdot \binom{2k}{k}. \quad (4.18)$$

Aus (4.18) folgt für $1 \leq j \leq k$:

$$\binom{2(k-j)}{k-j} \leq \frac{1}{2^j} \binom{2k}{k}. \quad (4.19)$$

Aus Ungleichung (4.19) und der Summenformel für eine unendliche geometrische Reihe folgt nun wiederum für jedes $c \leq k$,

$$\sum_{j=c}^k \binom{2(k-j)}{k-j} \leq \binom{2k}{k} \sum_{j=c}^k \frac{1}{2^j} \leq \binom{2k}{k} \sum_{j=c}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{c-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{c-1}}. \quad (4.20)$$

Wenn wir nun $c = \sqrt{k} + 1$ in Formel (4.20) einsetzen erhalten wir

$$\sum_{j=\sqrt{k}+1}^k \binom{2(k-j)}{k-j} = o\left(\binom{2k}{k}\right). \quad (4.21)$$

Des weiteren beweisen wir durch Induktion über j :

$$\binom{2(k-j)}{k-j} \sim \frac{1}{4^j} \binom{2k}{k} \quad \text{für } j = 0, \dots, \sqrt{k}. \quad (4.22)$$

Für $j = 0$ ist die Aussage (4.22) offensichtlich korrekt, da wir in diesem Fall die Identität erhalten. Es folgt der Induktionsschluß von j nach $j + 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \binom{2(k-j)}{k-j} &= \frac{2(k-j) \cdot (2(k-j)-1)}{(k-j)^2} \cdot \binom{2(k-(j+1))}{k-(j+1)} \\ &= \frac{4(k-j)-2}{k-j} \cdot \binom{2(k-(j+1))}{k-(j+1)}, \end{aligned}$$

und somit für $j < \sqrt{k}$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\binom{2(k-(j+1))}{k-(j+1)}}{\frac{1}{4^{j+1}} \cdot \binom{2k}{k}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\binom{2(k-j)}{k-j}}{\frac{4(k-j)-2}{k-j} \cdot \frac{1}{4^{j+1}} \cdot \binom{2k}{k}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{4(k-j)-2}{4(k-j)} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\binom{2(k-j)}{k-j}}{\frac{1}{4^j} \cdot \binom{2k}{k}}} \\ &\stackrel{I.V.}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4(k-j)}{4(k-j)-2} \cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist (4.22) bewiesen.

Insgesamt ergibt sich nun,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^k \binom{2i}{i} &= \sum_{j=0}^{\sqrt{k}} \binom{2(k-j)}{k-j} + \sum_{j=\sqrt{k}+1}^k \binom{2(k-j)}{k-j} \\
 &\stackrel{(4.21)}{=} \sum_{j=0}^{\sqrt{k}} \binom{2(k-j)}{k-j} + o\left(\binom{2k}{k}\right) \\
 &\sim \sum_{j=0}^{\sqrt{k}} \binom{2(k-j)}{k-j} \\
 &\stackrel{(4.22)}{\sim} \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^{\sqrt{k}} \frac{1}{4^j} \\
 &< \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j} \\
 &\sim \frac{4}{3} \binom{2k}{k}.
 \end{aligned}$$

Damit ist (4.15) bewiesen.

Zur Abschätzung von (4.14) unterscheiden wir zwei Fälle:

Sei $n = 2k + 1$. Mit (4.15) und (4.16) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} &= \sum_{i=0}^k \binom{2i}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2i+1}{i} \sim \frac{4}{3} \left(\binom{2k}{k} + \binom{2k-1}{k-1} \right) \\
 &\stackrel{(4.9)}{=} 2 \binom{2k}{k} = 2 \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.
 \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für $n = 2k$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2i}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2i+1}{i} \sim \frac{4}{3} \left(\binom{2k-2}{k-1} + \binom{2k-1}{k-1} \right) \\
 &\sim 2 \binom{2k-1}{k-1} = 2 \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \sim \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.
 \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Beweis der oberen Schranke aus Satz 4.6: Wir wenden die Ungleichung (4.13) mit $n_d = \frac{n}{d}$ an und erhalten somit:

$$\text{dil}(Q^n, G^d) \leq \text{bw}(Q^{n_d}) = \text{dil}(Q^{n_d}, G^1) \stackrel{\text{Lemma 4.5}}{\sim} \binom{n_d}{\lfloor n_d/2 \rfloor} \stackrel{(4.10)}{\leq} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n_d}}{\sqrt{n_d}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{\frac{n}{d}}}{\sqrt{\frac{n}{d}}} \cdot \sqrt{\frac{n}{d}}.$$
■

4.4.3 Eine asymptotische untere Schranken für die Kantenstreckung

Wir werden zunächst mit Hilfe der Methode aus Abschnitt 3.2 die asymptotische untere Schranke aus Lemma 4.3 beweisen. Anschließend zeigen wir, wie diese Methode modifiziert werden kann, und werden damit sowohl Lemma 4.4 als auch die asymptotische untere Schranke aus Satz 4.6 beweisen.

Beweis der unteren Schranke aus Lemma 4.3: Wir wenden die Methode aus Abschnitt 3.2 an. Um eine möglichst scharfe untere Schranke für die Kantenstreckung zu erhalten, wählen wir die Menge $D \subset V_{G^2}$ als die Menge aller Knoten (i, j) des zweidimensionalen Gitters $G^2 = 2^{\frac{n}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}$, für die gilt: $(i, j) \in D$ genau dann, wenn $i + j \leq k$ für ein festes $k \leq 2^{\frac{n}{2}}$ (siehe Abbildung 4.9). Auf Grund der Lösung des knotenisoperimetrischen Problems für Gitter (vergleiche Abschnitt 3.1 beziehungsweise [22]) ist bekannt, daß die so konstruierte Menge D unter allen Mengen mit gleicher Kardinalität wie D eine minimale Anzahl von Knoten u besitzt mit $1 \leq \text{dist}_{G^2}(u, D) \leq l$ für jedes feste l .

Sei A die Menge der Knoten von Q^n , die mittels einer beliebigen aber festen Einbettung $f = (\phi, R_\phi)$ auf D abgebildet werden mit $|A| = m$. Wir schätzen die Streckung der Kanten aus E_{Q^n} ab, für die gilt: $u \in A$ und $v \in \Gamma_{Q^n}(A)$.

Sei nun F die Menge der Knoten des Gitters, die die Bilder der Knoten von $\Gamma_{Q^n}(A)$ bezüglich der Funktion ϕ sind. Ferner sei $(r, q) \in F$ der Knoten unter allen Knoten aus F mit $r + q$ ist maximal (siehe Abbildung 4.9). Da die Urbilder bezüglich ϕ von (r, q) und eines bestimmten Knotens $(i, j) \in D$ im Hypercube Q^n adjazent sind, ergibt sich

$$\text{dil}_f(Q^n, G^2) \geq (r + q) - (i + j).$$

Für $\text{dil}(Q^n, G^2)$ erhalten wir somit eine untere Schranke, indem wir die Breite des schmalsten an D angrenzenden Streifens bestimmen, der groß genug ist, $\Gamma_{Q^n}(m)$ Knoten aufzunehmen. Wenn

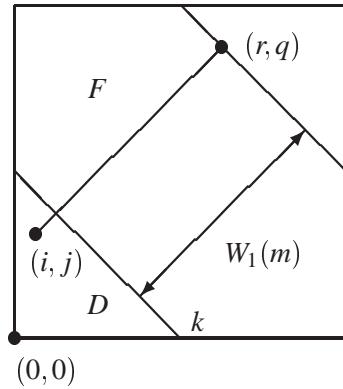


Abb. 4.9: Illustration zum Beweis der unteren Schranke aus Lemma 4.3.

wir diese Breite mit $W_1(m)$ bezeichnen (siehe Abbildung 4.9), erhalten wir durch unseren Ansatz:

$$\text{dil}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^2) \geq \max_{1 \leq m < 2^n} W_1(m). \quad (4.23)$$

Da $i + j \leq k$ und $m = |D|$ gilt $m \geq k^2/2$. Somit ergibt sich

$$\text{dil}_f(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^2) \geq (r+q) - (i+j) \geq (r+q) - k \geq (r+q) - \sqrt{2m}.$$

Es gilt nun $(r+q+1)(r+q+2)/2 - m \geq |\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(A)| \geq \Gamma_{\mathbf{Q}^n}(m)$. Damit erhalten wir die quadratische Ungleichung für $r+q$:

$$(r+q)^2 + 3(r+q) + 2 - 2m - 2\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(m) \geq 0. \quad (4.24)$$

Da aus dem Zusammenhang klar ist, daß $r+q$ positiv ist, und die linke Seite der Ungleichung (4.24) eine nach oben geöffnete Parabelfunktion mit zwei reellen Nullstellen ist (da $m \geq 1$), können wir festhalten, daß (4.24) genau dann erfüllt ist, wenn

$$\begin{aligned} r+q &\geq -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2 + 2m + 2\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(m)} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{1 + 8m + 8\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(m)}}{2} \\ &> -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{4(2m + 2\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(m))}}{2} \\ &> \sqrt{2m + 2\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(m)} - 2. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für $\text{dil}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^2)$ die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \text{dil}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^2) &\geq \sqrt{2m + 2\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(m)} - 2 - \sqrt{2m} \\ &= \sqrt{2m \cdot \left(1 + \frac{\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(m)}{m}\right)} - 2 - \sqrt{2m} \\ &= \sqrt{2m} \cdot \sqrt{1 + \frac{\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(m)}{m}} - 2 - \sqrt{2m}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt für alle $m \in \{1, \dots, 2^n\}$. Wir wählen nun $m = 2^{n-1}$ fest, da wir aus [80] und (4.10) wissen, daß $\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(m) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}}$ gilt. Darüber hinaus gilt $\frac{\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(2^{n-1})}{2^{n-1}} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Das heißt, wir können die Asymptote für $\sqrt{1+x}$, die sich auf Grund der Taylorreihenentwicklung ergibt, anwenden. Das heißt, es gilt: $\sqrt{1+x} \sim 1 + x/2$ für $x = o(1)$. Wir können demnach folgern:

$$\begin{aligned} \text{dil}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^2) &\geq \sqrt{2^n} \cdot \sqrt{1 + \frac{\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(2^{n-1})}{2^{n-1}}} - 2 - \sqrt{2^n} \sim \sqrt{2^n} \left(1 + \frac{\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(2^{n-1})}{2^n}\right) - \sqrt{2^n} \\ &= \frac{\Gamma_{\mathbf{Q}^n}(2^{n-1})}{\sqrt{2^n}} \sim \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2^n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2^n}{n}}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Beweis des Lemma 4.4: Wir erweitern den Ansatz (4.23). Dazu definieren wir für $u, v \in V_{Q^n}$ und $S \subseteq V_{Q^n}$,

$$\Lambda_t(S) = \bigcup_{i=1}^t \delta_{Q^n}^i(S) \quad \text{und} \quad \Lambda_t(m) = \min_{\substack{S \subseteq V_{Q^n} \\ |S|=m}} |\Lambda_t(S)|. \quad (4.25)$$

Sei die Menge $D \subseteq V_{G^2}$ mit $|D| = m$ wie in dem Beweis zur unteren Schranke aus Lemma 4.3 definiert. Das heißt, $(i, j) \in D$ genau dann, wenn $i + j \leq k$ für ein festes $k \leq 2^{n/2}$. Des weiteren sei A mit $|A| = m$ wiederum die Menge der Knoten von Q^n , die mittels einer beliebigen aber festen Einbettung $f = (\phi, R_\phi)$ auf D abgebildet werden. Für $t \geq 1$ beliebig aber fest bezeichnen wir mit $W_t(m)$ die Breite des schmalsten an D angrenzenden Streifens, der groß genug ist, $\Lambda_t(m)$ Knoten aufzunehmen.

Betrachten wir nun einen beliebigen aber festen Weg P der Länge t , der einen Knoten von A mit einem Knoten aus $\delta_{Q^n}^t(A)$ verbindet. Es sei durch $E^i \subset E_{Q^n}$, $i = 1, \dots, t$, die Menge der Kanten definiert, die die Knoten der Menge $\delta_{Q^n}^{i-1}(A)$ mit den Knoten der Menge $\delta_{Q^n}^i(A)$ verbinden. (Es gilt: $\delta_{Q^n}^0(A) = A$.) Wir schätzen die Summe der Streckungen der Kanten von P bezüglich der beliebigen aber festen Einbettung $f = (\phi, R_\phi)$ ab. Sei hierbei ℓ_i die Kantenstreckung bezüglich f der eindeutigen Kante aus $P \cap E^i$. Es gilt: $\sum_{i=1}^t \ell_i \geq W_t(m)$. Dies bedeutet aber, daß es mindestens eine Kante in P geben muß, die auf $\sum_{i=1}^t \ell_i / t$ gestreckt wird. Damit erhalten wir anstatt (4.23), den Ansatz

$$\text{dil}(Q^n, G^2) \geq \max_{1 \leq m < 2^n} \max_{1 \leq t \leq n} \frac{W_t(m)}{t}. \quad (4.26)$$

Um die rechte Seite der Ungleichung (4.26) möglichst gut nach unten abzuschätzen, müssen wir die Parameter m und t geschickt wählen. Dazu verwenden wir die schichtenweise Darstellung des Hypercubes (siehe Abbildung 3.1). Wir bezeichnen mit Q_i^n die Knoten der *i-ten Schicht des Hypercubes*. Das heißt, Q_i^n ist die Menge der Knoten des Hypercubes Q^n , für die die Quersumme ihrer binären Adresse gleich i ist. Die Funktion, die die Kardinalität der Schichten des Hypercubes angibt, ist extrem nicht-linear. Das heißt, bei einer schichtenweisen Darstellung des Hypercubes Q^n , wie sie in Abbildung 4.10 schematisch dargestellt ist, liegen nahezu alle Knoten in einer relativ schmalen Umgebung (ungefähr $\pm \sqrt{n}$) um die mittlere Schicht $Q_{n/2}^n$.

Wenn wir die entsprechende Definition der *i-ten Schicht des zweidimensionalen Gitters* betrachten (siehe Abschnitt 3.1), so ist die Funktion, die die Kardinalität der Schichten des Gitters angibt, nahezu linear. Das heißt, jede Menge von $c 2^n$ Knoten des Gitters G^2 mit $0 \leq c \leq 1$ hat einen nicht leeren Schnitt mit einem konstanten Teil der Schichten des Gitters.

Für den Hypercube wird die Menge der Knoten, die aus den ersten $i+1$ Schichten besteht, als der *Hamming-Ball mit Radius i* bezeichnet.

Wir wählen nun m und t in der folgenden Form

$$m = \sum_{i=0}^{(n-s\sqrt{n})/2} \binom{n}{i} \quad (4.27)$$

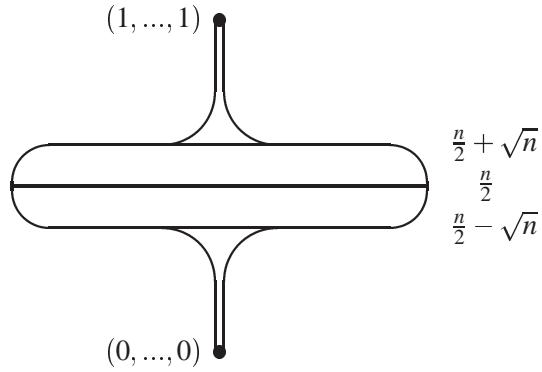


Abb. 4.10: Die schematische Darstellung der Schichtenstruktur des Hypercubes Q^n .

$$t = s\sqrt{n}, \quad (4.28)$$

wobei s eine gewisse positive Konstante mit $0 \leq s \leq 2$ ist, die im weiteren als Optimierungsparameter genutzt wird.

Sei H nun der Hamming-Ball mit Radius $(n - s\sqrt{n})/2$. Das heißt, $|H| = m$. Auf Grund der Lösung des knotenisoperimetrischen Problems für den Hypercube wissen wir (siehe [80]), daß

$$\Lambda_t(m) = |\Lambda_t(H)| = \sum_{i=(n-s\sqrt{n})/2}^{(n+s\sqrt{n})/2} \binom{n}{i}. \quad (4.29)$$

Wir berechnen nun für die Summe aus (4.29) eine asymptotische Abschätzung. Dazu verwenden wir einige Tatsachen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie (siehe Kapitel 2). Insbesondere wenden wir Satz 2.2 auf die unabhängigen diskreten Zufallsvariablen ξ_1, \dots, ξ_n an, die die Werte 0, 1 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 annehmen können. Somit ist nach Satz 2.2 die Zufallsvariable $\zeta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ asymptotisch normalverteilt mit dem Erwartungswert und der Varianz

$$\mu_n = n \frac{1}{2}, \quad \sigma_n^2 = n \frac{1}{4}. \quad (4.30)$$

Sei nun mit L_j , $j = 0, \dots, n$, die Kardinalität der j -ten Schicht des Hypercubes Q^n bezeichnet. Das heißt, L_j entspricht der Anzahl der Knoten des Hypercubes Q^n , die die Hamming-Distanz j zu dem Knoten $(0, \dots, 0)$ haben. Es gilt:

$$L_j = \binom{n}{j}. \quad (4.31)$$

ζ_n kann die Werte $x_n^j = j$, $j = 0, \dots, n$, jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_n^j = L_j/2^n$ annehmen. Somit ist die Verteilungsfunktion $F_n(x)$ von ζ_n durch $F_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j \leq x} L_j$ gegeben.

Wir erhalten daraus zusammen mit Definition 2.21, daß für jedes $x \in (-\infty, \infty)$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_n^j \leq \mu_n + x \sigma_n} p_n^j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\mu_n + x \sigma_n} L_j = \Phi(x). \quad (4.32)$$

Gleichung (4.32) impliziert zusammen mit Definition 2.20 und der abkürzenden Schreibweise $\varphi(x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-z^2/2} dz$ die folgende Asymptote:

$$\sum_{j=\mu_n - x \sigma_n}^{\mu_n + x \sigma_n} L_j \sim \varphi(x) 2^n. \quad (4.33)$$

Mit $\mu_n = n/2$, $\sigma_n = \sqrt{n}/2$ (siehe (4.30)) und $x = s$ können wir nun für die Summe aus Gleichung (4.29) eine asymptotische Abschätzung angeben. Es gilt:

$$\Lambda_t(m) \stackrel{(4.29)}{=} \sum_{i=(n-s\sqrt{n})/2}^{(n+s\sqrt{n})/2} \binom{n}{i} = \sum_{j=\mu_n - x \sigma_n}^{\mu_n + x \sigma_n} \binom{n}{j} \stackrel{(4.31)}{=} \sum_{j=\mu_n - x \sigma_n}^{\mu_n + x \sigma_n} L_j \stackrel{(4.33)}{\sim} \varphi(s) 2^n = \varphi(s) 2^n. \quad (4.34)$$

Mit dieser Abschätzung können wir nun folgern

$$\frac{k^2}{2} \sim m = |D| \sim \frac{1}{2} (2^n - \varphi(s) 2^n) = \frac{1}{2} 2^n (1 - \varphi(s)).$$

Um diesen Zusammenhang zu verdeutlichen, betrachten wir nochmals die schichtenweise Darstellung des Hypercubes Q^n in Abbildung 4.10. Unseren Annahmen entsprechend wird der Hamming-Ball H mit Radius $(n - s\sqrt{n})/2$ auf die Menge D abgebildet, und $\Lambda_t(H)$ besteht aus den nächsten $s\sqrt{n}$ Schichten des Hypercubes. Die Summe der Kardinalitäten der restlichen Schichten des Hypercubes, entspricht gerade der Größe des Hamming-Balls H . Daraus ergibt sich nun unmittelbar die obige Abschätzung. Insgesamt erhalten wir in Abhängigkeit von m, n, t die Abschätzung für k :

$$k \sim \sqrt{2^n} \sqrt{1 - \varphi(s)}.$$

Da das Gitter G^2 exakt $2\sqrt{2^n} - 1$ Schichten hat, und sowohl D wie auch der Bildbereich für die Knoten der letzten $(n - s\sqrt{n})/2$ Schichten des Hypercubes jeweils $k + 1$ Schichten belegen (vergleiche Abbildung 4.9), ergibt sich somit die folgende Abschätzung

$$W_t(m) \geq 2\sqrt{2^n} - 1 - 2(k + 1) \sim 2\sqrt{2^n} \left(1 - \sqrt{1 - \varphi(s)}\right).$$

Setzen wir diese Abschätzung nun in (4.26) ein, so gilt:

$$\text{dil}(Q^n, G^2) \geq \frac{W_t(m)}{t} \geq \frac{2(\sqrt{2^n} - k) - 3}{s\sqrt{n}} \sim \sqrt{\frac{2^n}{n}} \left(\frac{2 - 2\sqrt{1 - \varphi(s)}}{s} \right).$$

Mit $h(s) = \frac{2-2\sqrt{1-\Phi(s)}}{s}$ erhalten wir somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{dil}(n, 2)}{\sqrt{\frac{2^n}{n}}} \geq \max_{0 \leq s \leq 2} h(s).$$

Die Berechnung der Funktion $h(s)$ für $0 \leq s \leq 2$ liefert das Maximum an der Stelle $s \approx 0.92$ und $h(0.92) \approx 0.8739$. ■

Beweis der unteren Schranke aus Satz 4.6: Wir verwenden analog zu dem Beweis des Lemma 4.4 eine modifizierte Version des Ansatzes aus Abschnitt 3.2. Sei $D \subseteq V_{G^d}$ mit $|D| = m$ die Menge der Knoten (i_1, \dots, i_d) des Gitters $G^d = 2^{n/d} \times \dots \times 2^{n/d}$ mit $i_1 + \dots + i_d \leq k$ für ein festes $k \leq 2^{n/d}$. Die Menge D besteht also aus den ersten $k+1$ Schichten des Gitters G^d . Des weiteren sei A mit $|A| = m$ wiederum die Menge der Knoten von Q^n , die mittels einer beliebigen aber festen Einbettung $f = (\phi, R_\phi)$ auf D abgebildet werden. Sei F die Menge der Knoten des Gitters, deren Urbilder gerade die Knoten aus $\Lambda_t(A)$ sind (siehe (4.25) für die Definition von Λ_t). Ferner sei $v = (v_1, \dots, v_d) \in F$ der Gitterknoten unter allen Knoten aus F mit $\sum_{i=1}^d v_i$ ist maximal. Das heißt, die Quersumme der Einträge der Adresse von v ist maximal unter allen Knoten aus F . Wir setzen $q = \sum_{i=1}^d v_i$. Der Wert $q - k$ ist nun die Breite des an D angrenzenden Bandes, das bezüglich der Einbettung f benötigt wird, um die Knoten der Menge $\Lambda_t(A)$ aufzunehmen. Somit gilt: $\text{dil}_f(Q^n, G^d) \geq \frac{q-k}{t}$. Für $t \geq 1$ beliebig aber fest bezeichnen wir mit $W_t(m)$ die Breite des schmalsten an D angrenzenden Bandes von G^d , das groß genug ist, $\Lambda_t(m)$ Knoten aufzunehmen (siehe (4.25) für die Definition von $\Lambda_t(m)$). Mit diesen Festlegungen erhalten wir mit der gleichen Argumentation wie im Beweis des Lemma 4.4 den Ansatz

$$\text{dil}(Q^n, G^d) \geq \max_{1 \leq m < 2^n} \max_{1 \leq t \leq n} \frac{W_t(m)}{t}. \quad (4.35)$$

Um nun die rechte Seite dieser Ungleichung möglichst gut nach unten abzuschätzen, wählen wir die Parameter m und t wie in (4.27) und (4.28) angegeben. Das heißt, wir wählen

$$m = \sum_{i=0}^{(n-s\sqrt{n})/2} \binom{n}{i} \quad \text{und} \quad t = s\sqrt{n},$$

wobei s eine Konstante ist mit $0 \leq s \leq 2$, die als Optimierungsparameter verwendet werden kann.

Sei H nun wiederum der Hamming-Ball mit Radius $(n - s\sqrt{n})/2$. Das heißt, $|H| = m$. Wir wissen (vergleiche (4.29)), daß

$$\Lambda_t(m) = |\Lambda_t(H)| = \sum_{i=(n-s\sqrt{n})/2}^{(n+s\sqrt{n})/2} \binom{n}{i}. \quad (4.36)$$

Daraus und mit dem Hinweis auf die symmetrische Struktur der Schichtendarstellung des Hypercubes Q^n erhalten wir $|V_{Q^n} \setminus (A \cup \Lambda_t(A))| \leq m$, woraus unmittelbar $|V_{G^d} \setminus (D \cup F)| \leq m$ folgt.

Da das Gitter G^d gerade $d(2^{n/d} - 1) + 1$ Schichten hat, erhalten wir als Abschätzung für $W_t(m)$:

$$W_t(m) \geq d(2^{n/d} - 1) + 1 - 2(k+1) = d(2^{n/d} - 1) - 1 - 2k.$$

Wir verwenden im folgenden als abkürzende Schreibweise $z := d(2^{n/d} - 1) - 1 - 2k$. Sei nun S_i , $i = 0, \dots, d(2^{n/d} - 1)$, die Kardinalität der i -ten Schicht des Gitters G^d . Auf Grund der Definitionen der Mengen D und H ist klar, daß die Summe der z größten Werte aus der Menge $\{S_i \mid 0 \leq i \leq d(2^{n/d} - 1)\}$ asymptotisch gerade $\Lambda_t(m)$ sein muß. Da die (bezüglich der Kardinalitäten) größten Schichten des Gitters G^d symmetrisch um die mittlere Schicht (das heißt, der $(d(2^{n/d} - 1)/2)$ -ten Schicht) liegen, können wir folgern, daß $z = 2r$ gilt. Dabei ist r durch die folgende Formel bestimmt:

$$\Lambda_t(m) \sim \sum_{j=d(2^{n/d}-1)/2-r}^{d(2^{n/d}-1)/2+r} S_j. \quad (4.37)$$

Um nun die Summen aus (4.36) und (4.37) asymptotisch abzuschätzen, nutzen wir wiederum einige Tatsachen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie (siehe Kapitel 2). Insbesondere wenden wir den Satz 2.2 auf die unabhängigen diskreten Zufallsvariablen ξ_1, \dots, ξ_n an, die die Werte $0, \dots, l-1$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/l$ annehmen können. Somit ist nach Satz 2.2 die Zufallsvariable $\zeta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ asymptotisch normalverteilt mit dem Erwartungswert und der Varianz

$$\mu_{n,l} = n \frac{l-1}{2}, \quad \sigma_{n,l}^2 = n \frac{l^2-1}{12}. \quad (4.38)$$

Sei nun mit L_j , $j = 0, \dots, n(l-1)$, die Kardinalität der j -ten Schicht des Gitters $G^n = l \times \dots \times l$ bezeichnet. Das heißt, L_j entspricht der Anzahl der Knoten des Gitters G^n , die die Distanz j zu dem Knoten $(0, \dots, 0)$ haben. ζ_n kann die Werte $x_n^j = j$, $j = 0, \dots, n(l-1)$, jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_n^j = L_j/l^n$ annehmen. Somit ist die Verteilungsfunktion $F_n(x)$ von ζ_n durch $F_n(x) = \frac{1}{l^n} \sum_{j \leq x} L_j$ gegeben. Wir erhalten daraus zusammen mit Definition 2.21, daß für jedes $x \in (-\infty, \infty)$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_n^j \leq \mu_{n,l} + x \sigma_{n,l}} p_n^j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{l^n} \sum_{j=0}^{\mu_{n,l} + x \sigma_{n,l}} L_j = \Phi(x). \quad (4.39)$$

Gleichung (4.39) impliziert zusammen mit Definition 2.20 und der abkürzenden Schreibweise $\varphi(x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-z^2/2} dz$ die folgende Asymptote:

$$\sum_{j=\mu_{n,l} - x \sigma_{n,l}}^{\mu_{n,l} + x \sigma_{n,l}} L_j \sim \varphi(x) l^n. \quad (4.40)$$

Mit $n = d$, $l = 2^{n/d}$, $\mu_{n,l} = \mu_{d,l} = d(2^{n/d} - 1)/2$, $\sigma_{n,l} = \sigma_{d,l}$ und $x = y\sigma_{d,l}$ können wir nun für die Summe aus Gleichung (4.37) eine asymptotische Abschätzung angeben. Es gilt:

$$\Lambda_t(m) \stackrel{(4.37)}{\sim} \sum_{j=d(2^{n/d}-1)/2-x}^{d(2^{n/d}-1)/2+x} S_j = \sum_{j=d(2^{n/d}-1)/2-y\sigma_{d,l}}^{d(2^{n/d}-1)/2+y\sigma_{d,l}} L_j \stackrel{(4.40)}{\sim} \varphi(y) 2^n. \quad (4.41)$$

Analog können wir mit $l = 2$, $\mu_{n,2} = n/2$, $\sigma_{n,2} = \sqrt{n}/2$ und $x = s$ für die Summe aus Gleichung (4.36) eine asymptotische Abschätzung angeben. Dabei ist zu beachten, daß das Gitter $G^n = 2 \times \dots \times 2$ isomorph zum Hypercube Q^n ist. Es gilt:

$$\Lambda_t(m) \stackrel{(4.36)}{=} \sum_{j=(n-s\sqrt{n})/2}^{(n+s\sqrt{n})/2} \binom{n}{j} = \sum_{j=\mu_{n,2}-s\sigma_{n,2}}^{\mu_{n,2}+s\sigma_{n,2}} \binom{n}{j} \stackrel{(4.31)}{=} \sum_{j=\mu_{n,2}-s\sigma_{n,2}}^{\mu_{n,2}+s\sigma_{n,2}} L_j \stackrel{(4.40)}{\sim} \varphi(s) 2^n. \quad (4.42)$$

Mit (4.41) und (4.42) folgt $y \sim s$. Somit gilt $W_t(m) \geq z = 2r \sim 2s\sigma_{d,l}$. Schließlich erhalten wir mit $t = 2s\sigma_{n,2} = s\sqrt{n}$ und $\sigma_{d,l} \sim 2^{n/d} \sqrt{d/12}$:

$$\text{dil}(Q^n, G^d) \geq \frac{W_t(m)}{t} \geq \frac{2s\sigma_{d,l}}{2s\sigma_{n,2}} \sim \frac{2 \cdot 2^{n/d} \sqrt{d/12}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{d}{3}} \frac{2^{n/d}}{\sqrt{n}}.$$

■

4.5 Betrachtung der Leitungslänge

Wir betrachten in diesem Abschnitt das Leitungslängenproblem für die bijektive Einbettung des binären Hypercubes Q^n in das d -dimensionale Gitter $G^d = 2^{n_1} \times \dots \times 2^{n_d}$ mit $n_1 = \dots = n_d = \frac{n}{d}$. Die folgende Beobachtung ist dabei eine triviale Eigenschaft des Kostenmaßes Leitungslänge.

Proposition 4.1 Für jede Einbettung $f \in F$ eines Graphen $G = (V_G, E_G)$ in einen Graphen $H = (V_H, E_H)$ gilt:

$$\text{wl}_f(G, H) = \sum_{e \in E_G} \text{dil}_f(e) = \sum_{e' \in E_H} \text{conf}_f(e').$$

Um diese Tatsache zu verdeutlichen, betrachten wir eine Kante $e \in E_G$ mit $\text{dil}_f(e) = s$ bezüglich einer beliebigen aber festen Einbettung f . Das heißt, das Bild der Kante e bezüglich der Einbettung f ist ein Weg in H mit s Kanten. Dieser Routingweg erhöht somit die Kantenauslastung von genau s Kanten in H genau um den Wert eins. Bilden wir die entsprechenden Summen, so erhalten wir die Aussage der Proposition.

Beweis des Satzes 4.7: Sei $f = (\phi, R_\phi)$ eine beliebige aber feste bijektive Einbettung von $Q^n = (V_{Q^n}, E_{Q^n})$ in das d -dimensionale Gitter $G^d = (V_{G^d}, E_{G^d})$. Auf Grund von Proposition 4.1 bauen wir unseren Beweis so auf, daß wir zunächst eine untere Schranke für $\sum_{e' \in E_{G^d}} \text{conf}_f(e')$ berechnen

und anschließend für eine konkrete Einbettung eine obere Schranke beweisen, die identisch mit der unteren Schranke ist.

Sei $A \subseteq V_{Q^n}$ und $D \subseteq V_{G^d}$ die Menge der Bildknoten von A bezüglich der Einbettung f . Das heißt, $\phi(A) = D$. Ferner sei ∇D die Menge der Kanten in G^d zwischen Knoten aus D und D^c mit $D^c = V_{G^d} \setminus D$. Das heißt, ∇D ist die Menge der Schnittkanten, die D von seinem Komplement in G^d separiert. Es gilt:

$$\sum_{e \in \nabla D} \text{conf}_f(e) \geq |\theta_{Q^n}(A)|. \quad (4.43)$$

Um dies zu verdeutlichen, führen wir folgende Überlegungen an. Das Bild bezüglich des Routing-Schemas R_ϕ einer jeden Kanten aus der Menge $\theta_{Q^n}(A)$ ist ein Weg in G^d , der mindestens eine Kante aus ∇D enthält. Gegebenenfalls sind durch das Routing-Schema R_ϕ weitere Wege definiert, die zwei Knoten aus der Menge D (oder zwei Knoten aus der Menge D^c) miteinander verbinden und ebenfalls eine Kante aus ∇D enthalten. Wir erhalten so die Ungleichung (4.43).

Sei nun D_m die Menge der ersten m Knoten von V_{G^d} bezüglich der lexikographischen Ordnung L auf dem d -dimensionalen Gitter G^d . Ferner sei $A_m \subseteq V_{Q^n}$ die Menge der Hypercubeknoten, die bezüglich der Einbettung f auf die Knoten von D_m abgebildet werden. Es gilt $|A_m| = m$. Aus (4.43) folgt

$$\sum_{m=1}^{2^n} \sum_{e \in \nabla D_m} \text{conf}_f(e) \geq \sum_{m=1}^{2^n} |\theta_{Q^n}(A_m)|. \quad (4.44)$$

Harper bewies in seiner Arbeit [64] die folgende Ungleichung

$$\sum_{m=1}^{2^n} |\theta_{Q^n}(A_m)| \geq 2^{n-1}(2^n - 1). \quad (4.45)$$

Dabei ist die Gleichheit in (4.45) genau dann gegeben, wenn jede Menge A_m aus den ersten m Knoten von V_{Q^n} bezüglich der lexikographischen Ordnung L für den Hypercube Q^n besteht. Im weiteren werden wir nun die Doppelsumme aus der Ungleichung (4.44) abschätzen.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir im folgenden die Seitenlängen des d -dimensionalen Gitters G^d kurz mit $p = 2^{\frac{n}{d}}$. Des weiteren bezeichnen wir eine Kante des Gitters $e = \{u, v\} \in E_{G^d}$ als eine Kante der i -ten Dimension, $i = 1, \dots, d$, wenn sich die zwei zu der Kante inzidenten Knoten von G^d nur in der i -ten Koordinate unterscheiden und der Absolutwert der Differenz in dieser Koordinate eins ist. E^i sei dann die Menge aller Kanten von G^d der i -ten Dimension. Es gilt nun, daß für jede Kante $e \in E^i$ der Summand $\text{conf}_f(e)$ in der Doppelsumme (4.44) auf Grund der gewählten lexikographischen Ordnung höchstens p^{i-1} mal auftritt. Sei $c_i = \sum_{e \in E^i} \text{conf}_f(e)$, dann gilt

$$\sum_{e' \in E_{G^d}} \text{conf}_f(e') = \sum_{i=1}^d c_i,$$

und unter Ausnutzung von (4.44) und (4.45)

$$\sum_{i=1}^d c_i p^{i-1} \geq \sum_{m=1}^{2^n} \sum_{e \in \nabla D_m} \text{conf}_f(e) \geq 2^{n-1}(2^n - 1). \quad (4.46)$$

Damit haben wir zwar eine Abschätzung für die Summe $\sum_{i=1}^d c_i p^{i-1}$, um aber eine untere Schranke für $\sum_{e' \in E_{G^d}} \text{conf}_f(e')$ zu erhalten, müssen wir die Summe $\sum_{i=1}^d c_i$ abschätzen. Dazu definieren wir zunächst eine Permutation der lexikographischen Ordnung, die wir mit L_j bezeichnen.

Sei $\pi_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & d \\ d-j+2 & \cdots & d & 1 & 2 & \cdots & d-j+1 \end{pmatrix}$ eine Permutation, die sich aus einem zyklischen Rechtsshift um $j-1$ Positionen ergibt. Seien $x, y \in V_{G^d}$ mit $x = (x_1, \dots, x_d)$ und $y = (y_1, \dots, y_d)$. Wir sagen, x ist größer y bezüglich der Ordnung L_j genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^d x_i \cdot p^{\pi_j(i)-1} \geq \sum_{i=1}^d y_i \cdot p^{\pi_j(i)-1}.$$

Da das d -dimensionale Gitter G^d in allen Dimensionen die gleiche Seitenlänge p besitzt, ist die Ordnung L_j bezüglich einer Rotation des Gitters isomorph zu der lexikographischen Ordnung auf G^d . Betrachten wir nun anstatt der Menge D_m die ersten m Knoten von V_{G^d} bezüglich der Ordnung L_j auf dem d -dimensionalen Gitter G^d , so erhalten wir mit der gleichen Argumentation wie zuvor für jedes $j \in \{1, \dots, d\}$

$$\sum_{i=1}^d c_i p^{\pi_j(i)-1} \geq 2^{n-1}(2^n - 1). \quad (4.47)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d c_i p^{\pi_j(i)-1} &= \sum_{i=1}^d c_i \sum_{j=1}^d p^{\pi_j(i)-1} = \sum_{i=1}^d c_i \sum_{j=1}^d p^{j-1} = \sum_{i=1}^d c_i \frac{p^d - 1}{p - 1} \\ &\stackrel{(4.47)}{\geq} \sum_{j=1}^d 2^{n-1}(2^n - 1) = d 2^{n-1}(2^n - 1). \end{aligned}$$

Also

$$\sum_{e' \in E_{G^d}} \text{conf}_f(e') = \sum_{i=1}^d c_i \geq \frac{d 2^{n-1}(2^n - 1)(p - 1)}{p^d - 1}.$$

Mit $p = 2^{n/d}$ erhalten wir somit

$$\sum_{e' \in E_{G^d}} \text{conf}_f(e') \geq \frac{d 2^{n-1}(2^n - 1)(2^{n/d} - 1)}{2^n - 1} = \frac{d}{2} (2^{n(d+1)/d} - 2^n). \quad (4.48)$$

Zur Berechnung einer oberen Schranke für $\min_{f \in F} \sum_{e' \in E_{G^d}} \text{con}_f(e')$ betrachten wir nun erneut die Einbettung, die sich durch das Kreuzprodukt der entsprechenden Linieneinbettung f_{lex} des Hypercubes $Q^{n/d}$ in das Gitter G^1 der Länge $2^{n/d}$ ergibt. Wir bezeichnen diese Einbettung mit f_{lex}^\times . Des weiteren bezeichnen wir eine Knotenmenge von V_{G^d} als *Spalte des Gitters*, wenn die Kardinalität dieser Menge gerade $p = 2^{n/d}$ ist und die Knoten dieser Menge in den gleichen $d - 1$ Koordinaten übereinstimmen. C_d sei die Anzahl Spalten in dem d -dimensionalen Gitter G^d . Ferner sei A_m die Menge der ersten m Knoten des Hypercubes $Q^{n/d}$ bezüglich der lexikographischen Ordnung. Da nun jede Kante des Hypercubes Q^n auf Grund der Konstruktion der Einbettung f_{lex}^\times nur über Kanten einer bestimmten Spalte des Gitters geroutet wird, erhalten wir

$$\sum_{e' \in E_{G^d}} \text{con}_{f_{\text{lex}}^\times}(e') = C_d \cdot \sum_{e \in E_{G^1}} \text{con}_{f_{\text{lex}}}(e) = C_d \cdot \sum_{m=1}^{2^{n/d}} |\theta_{Q^{n/d}}(A_m)| \stackrel{(4.45)}{=} C_d \cdot 2^{n/d-1} \cdot (2^{n/d} - 1).$$

C_d lässt sich leicht bestimmen. Es gilt $C_d = d p^{d-1}$, und mit $p = 2^{n/d}$ erhalten wir

$$\sum_{e' \in E_{G^d}} \text{con}_{f_{\text{lex}}^\times}(e') = d \cdot 2^{n/d(d-1)} \cdot 2^{n/d-1} \cdot (2^{n/d} - 1) = \frac{d}{2} (2^{n(d+1)/d} - 2^n). \quad (4.49)$$

Aus (4.48) und (4.49) folgt unter Berücksichtigung von Proposition 4.1

$$\text{wl}(Q^n, G^d) = \min_{f \in F} \sum_{e' \in E_{G^d}} \text{con}_f(e') = \sum_{e' \in E_{G^d}} \text{con}_{f_{\text{lex}}^\times}(e') = \frac{d}{2} (2^{n(d+1)/d} - 2^n).$$

■

4.6 Betrachtung uniaxialer Algorithmen

Bis hierher haben wir Einbettungen des binären Hypercubes in das d -dimensionale Gitter untersucht, die bezüglich der Standardmaße zur Evaluierung der Qualität einer Einbettung, also der Kantenstreckung, der Kantenauslastung und der Leitungslänge, optimal sind. Diese Kostenmaße sind zur Abschätzung der Verzögerung einer Ausführung eines Algorithmus mit hyperkubischer Kommunikationsstruktur auf einem Parallelrechner mit der Topologie des d -dimensionalen Gitters nur dann „passend“, wenn zu jedem Zeitpunkt über jede Kante des Hypercubes Q^n mit der gleichen Wahrscheinlichkeit kommuniziert wird. Für eine große Klasse von Hypercubealgorithmen, den sogenannten *uniaxialen Algorithmen* [86], ist es allerdings signifikant, daß zu jedem Zeitschritt nur die Hypercubekanten derselben Dimension an der Kommunikation beteiligt sind. Wir sagen, eine Kante von Q^n ist eine Kante der i -ten Dimension, $i = 1, \dots, n$, wenn sich die zwei zu der Kante inzidenten Knoten von Q^n nur im i -ten Bit ihrer binären Adressen unterscheiden.

```

Sort n-dimensional Cube:
  Sort first (n-1)-dimensional subcube ascending
  Sort second (n-1)-dimensional subcube descending
  Merge presorted subcubes

```

Abb. 4.11: Batchers Bitonic-Sort Algorithmus.

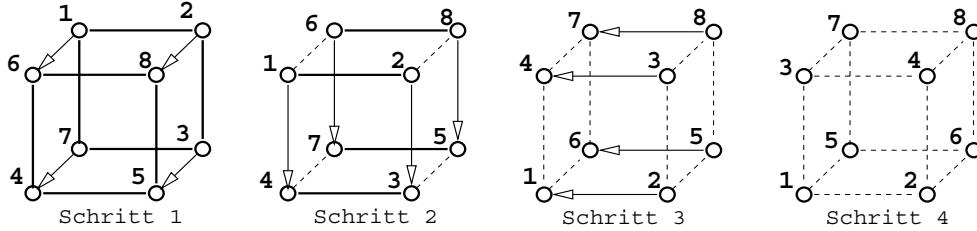


Abb. 4.12: Mischen einer bitonen Zahlenfolge mittels eines *descend Laufes*.

Dementsprechend bezeichnen wir mit $E_i \subset E_{Q^n}$, die Menge aller Kanten von Q^n der i -ten Dimension. Wir wollen unsere Aussage, daß eine optimale Einbettung des Hypercubes bezüglich der Standardkostenmaße für uniaxiale Algorithmen gegebenenfalls zu keiner effizienten Simulation führt, anhand eines Beispiels näher erläutern. Dazu betrachten wir den bekannten *Batchers Bitonic-Sort* Algorithmus auf einem Hypercube Q^n . In Abbildung 4.11 haben wir den Kern dieses rekursiven Algorithmus skizziert. Im wesentlichen ist der Algorithmus durch das Mischen zweier sortierter Listen bestimmt. Hierbei liegt die eine Liste aufsteigend sortiert auf dem Teilcube, der alle Knoten enthält bei denen das höchstwertigste Bit eine Null ist. Die andere Liste liegt absteigend sortiert auf dem Teilcube, der alle Knoten enthält bei denen das höchstwertigste Bit eine Eins ist. Die gesamte Liste ist somit *biton*.¹ Das Mischen einer bitonen Liste wird durch einen sogenannten *descend Lauf* durchgeführt. Dieser Prozeß besteht aus n Runden. In der ersten Runde kommunizieren alle Prozessoren parallel über eine Kante der n -ten Dimension mit ihrem jeweiligen benachbarten Prozessor. In der nächsten Runde kommuniziert jeder Prozessor über eine Kante der $(n - 1)$ -ten Dimension usw. bis schließlich in der n -ten Runde eine entsprechende Kommunikation über alle Kanten der ersten Dimension erfolgt. In Abbildung 4.12 haben wir dieses Vorgehen für eine bitone Zahlenfolge auf einem dreidimensionalen Hypercube mit jeweils einem Sortierschlüssel pro Prozessor illustriert. Auf Grund der Struktur des Algorithmus ist klar, daß sich die Verzögerung bei der Simulation auf einem Gitternetzwerk von einer Runde des *descend Laufes*, bei der die Kanten aus E_i verwandt werden, durch die Kantenstreckung und die Kantenauslastung abschätzen läßt, die sich allein durch die Kanten aus E_i ergeben. Des weiteren sei angemerkt, daß je niedriger die Dimension einer Hypercubekante ist, desto häufiger

¹Eine Liste oder Zahlenfolge (a_0, \dots, a_{n-1}) heißt *biton*, falls es einen Index j , $0 \leq j < n$, gibt, so daß (a_0, \dots, a_j) monoton steigt und (a_j, \dots, a_{n-1}) monoton fällt, oder es gibt einen Index i , $0 \leq i < n$, so daß $(a_i, \dots, a_{n-1}, a_0, \dots, a_{i-1})$ die vormals genannte Bedingung erfüllt.

wird sie als Kommunikationslink genutzt. Dies liegt an der rekursiven Struktur des Bitonic-Sort Algorithmus.

In Abbildung 4.13 haben wir in dem linken Bild die Einbettung des Hypercubes Q^4 in das zweidimensionale 4×4 Gitter dargestellt, die bezüglich des Kostenmaßes Kantenauslastung optimal ist (vergleiche Abschnitt 4.3). Die Zahlen an den Knoten des Gitters stellen dabei die dezimale Darstellung der Adressen der Hypercubeknoten dar, die auf die jeweiligen Knoten abgebildet werden. Die Routingwege für die Hypercubekanten der gleichen Dimension $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ haben wir dabei einerseits durch gepunktete beziehungsweise durchgezogene Linien und andererseits durch entsprechende Graustufen gekennzeichnet. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß die Kantenauslastung, die nur durch die Kanten aus E_1 oder aus E_3 entsteht eins, für Kanten aus E_2 oder E_4 jedoch zwei beträgt. Wenn wir die Häufigkeit berücksichtigen, mit der der Bitonic-Sort Algorithmus die Kanten aus E_i verwendet, ist zu vermuten, daß diese Einbettung zu keiner optimalen Simulation führt!

Durch eine isomorphe Transformation dieser Einbettung, wie wir sie im rechten Bild der Abbildung 4.13 dargestellt haben, ist die Kantenauslastung, die nur durch die Kanten aus E_1 oder aus E_2 entsteht eins, und für Kanten aus E_3 oder E_4 entsprechend zwei. Das heißt, bei dieser Einbettung sind die Kantenauslastungen, die allein durch die Routingwege der niederdimensionalen Hypercubekanten entstehen, geringer als bei der vormals beschriebenen Einbettung. Daß die Verallgemeinerung der im rechten Bild der Abbildung 4.13 dargestellten Einbettung für Batchers Bitonic-Sort Algorithmus zu einer besseren Simulation führt, ist aus der Arbeit von Thompson und Kung [137] ableitbar und in praktischen Tests von Gehring und Nübel [56] intensiv untersucht worden. Für andere uniaxiale Hypercubealgorithmen (zum Beispiel Matrizenmultiplikation und FFT) hat Freise [52] die praktischen Auswirkungen verschiedener Einbettungen des Hypercubes in ein zweidimensionales Gitter untersucht. Auch hier zeigte sich, daß eine optimale Einbettung des Hypercubes bezüglich der Standardkostenmaße, für uniaxiale Algorithmen zumeist zu keiner effizienten Simulation führt.

Als Konsequenz aus unseren Beobachtungen zum Bitonic-Sort Algorithmus und den zitierten Arbeiten werden wir hier kurz die Frage nach einer effizienten Simulation von uniaxialen Hypercubealgorithmen auf d -dimensionalen Gittern theoretisch untersuchen. Einer effizienten Simulation eines uniaxialen Hypercubealgoritmus auf einem Gitternetzwerk entspricht dabei die Minimierung der Summe von $i = 1$ bis n über den Kantenstreckungen oder Kantenauslastungen, die sich nur durch die Kanten aus E_i ergeben. Seien durch w_1, \dots, w_n mit $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$ gewisse nicht negative Gewichte gegeben, die beschreiben, wie oft die Kanten aus E_i während der Laufzeit eines uniaxialen Hypercubealgoritmus zur Kommunikation verwandt werden. Wir definieren die folgenden Qualitätsmaße für die Simulation eines uniaxialen Hypercubealgoritmus auf einem d -dimensionalen Gitter mittels einer injektiven Einbettung $f = (\phi, R_\phi)$:

$$\text{Sdil}(Q^n, G^d) = \min_{f \in F} \sum_{i=1}^n w_i \cdot \max_{e \in E_i} \text{dil}_f(e),$$

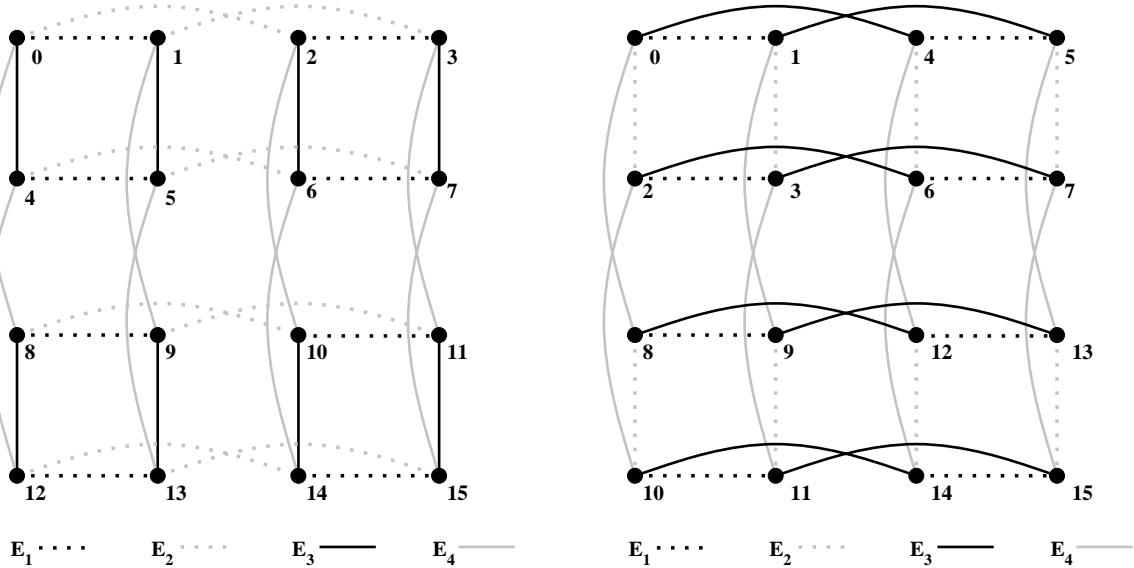


Abb. 4.13: Eine bezüglich der Kantenauslastung optimale Einbettung des Q^4 in das zweidimensionale 4×4 Gitter (linkes Bild), und eine für Batchers Bitonic-Sort Algorithmus optimale Einbettung (rechtes Bild).

$$Scon(Q^n, G^d) = \min_{f \in F} \sum_{i=1}^n w_i \cdot \max_{e' \in E_{G^d}} \{ \text{con}_f(e') \mid e' \in R_\phi(e), e \in E_i \}.$$

Wir können den Wert für $Sdil(Q^n, G^d)$ nur für $d = 1$ exakt berechnen, da für größere Werte von d ohne besonderes Wissen über die Parameter w_i keine geschlossene Formel zu bestimmen ist. Diese Aussage bezieht sich insbesondere auf die oberen Schranken. Im Falle $w_1 = \dots = w_n = 1$ bestimmen wir allerdings im folgenden auch den exakten Wert für $Sdil(Q^n, G^d)$ mit $d > 1$.

Satz 4.10 Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n und $G^d = (V_{G^d}, E_{G^d})$ das d -dimensionale Gitter $G^d = 2^{n_1} \times \dots \times 2^{n_d}$ mit $|V_{G^d}| = 2^n$ und $n_1 = \dots = n_d$. Seien $w_i \in \mathbb{N}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt:

$$Sdil(Q^n, G^d) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot 2^{i-1} \quad \text{für } d = 1,$$

$$Sdil(Q^n, G^d) = d(2^{\frac{n}{d}} - 1) \quad \text{für } d > 1 \quad \text{mit } w_1 = \dots = w_n = 1.$$

Beweis: Seien für eine beliebige aber feste Einbettung f des Hypercubes $Q^n = (V_{Q^n}, E_{Q^n})$ in ein d -dimensionales Gitter $G^d = (V_{G^d}, E_{G^d})$ die Parameter d_i für $i = 1, \dots, n$ wie folgt definiert:

$$d_i = \frac{1}{|E_i|} \sum_{e \in E_i} \text{dil}_f(e).$$

Einerseits gilt

$$\max_{e \in E_i} \text{dil}_f(e) \geq d_i \tag{4.50}$$

und andererseits

$$\sum_{i=1}^n d_i \geq d \cdot (2^{n/d} - 1). \quad (4.51)$$

Die Ungleichung (4.51) ergibt sich dabei wie folgt, wobei wir beachten, daß $|E_i| = 2^{n-1}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_i &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{|E_i|} \cdot \sum_{e \in E_i} \text{dil}_f(e) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E_i} \text{dil}_f(e) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \sum_{e \in E_{Q^n}} \text{dil}_f(e) \\ &\stackrel{\text{Prop. 4.1}}{=} \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \sum_{e' \in E_{G^d}} \text{con}_f(e') \\ &\stackrel{(4.48)}{\geq} \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{d}{2} \cdot (2^{n(d+1)/d} - 2^n) = d \cdot (2^{n/d} - 1). \end{aligned}$$

Wir beweisen nun zunächst die Aussage des Satzes für den Fall $d = 1$ durch Induktion über n . Für $n = 1$ gilt trivialerweise $\text{Sdil}(Q^1, G^1) = w_1$. Es folgt der Induktionsschluß von $n - 1$ nach n . Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$ gilt, setzen $w'_i = w_i - w_n$ für $i = 1, \dots, n - 1$ und wenden hierauf die Induktionsvoraussetzung an. Damit gilt

$$\begin{aligned} \text{Sdil}(Q^n, G^1) &\stackrel{(4.50)}{\geq} \min_{f \in F} \sum_{i=1}^n w_i \cdot d_i = \min_{f \in F} \sum_{i=1}^{n-1} w'_i \cdot d_i + w_n \cdot \min_{f \in F} \sum_{i=1}^n d_i \\ &\stackrel{I.V.}{=} \sum_{i=1}^{n-1} w'_i \cdot 2^{i-1} + w_n \cdot \min_{f \in F} \sum_{i=1}^n d_i \\ &\stackrel{(4.51)}{\geq} \sum_{i=1}^{n-1} w'_i \cdot 2^{i-1} + w_n(2^n - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_n) \cdot 2^{i-1} + w_n \cdot 2^n - w_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} w_i \cdot 2^{i-1} - w_n \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} + w_n \cdot 2^n - w_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} w_i \cdot 2^{i-1} - w_n \cdot 2^{n-1} + w_n \cdot 2^n \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \cdot 2^{i-1}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Für die Einbettung f_{lex} des Hypercubes Q^n in das eindimensionale Gitter G^1 mit 2^n Knoten gilt $\max_{e \in E_i} \text{dil}_{f_{\text{lex}}}(e) = \min_{e \in E_i} \text{dil}_{f_{\text{lex}}}(e) = 2^{i-1}$ für $i = 1, \dots, n$. Somit erhalten wir

$$\text{Sdil}(Q^n, G^1) \leq \sum_{i=1}^n w_i \cdot 2^{i-1}.$$

Da diese obere Schranke die untere Schranke (4.52) trifft, ist die Aussage des Satzes für $d = 1$ bewiesen, und wir wenden uns dem Beweis der Aussage des Satzes für $d > 1$ mit $w_1 = \dots = w_n = 1$ zu. Es gilt

$$\text{Sdil}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^d) \stackrel{(4.50)}{\geq} \min_{f \in F} \sum_{i=1}^n d_i \stackrel{(4.51)}{\geq} d \cdot (2^{\frac{n}{d}} - 1). \quad (4.53)$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Fall $d = 1$ erhalten wir durch die Einbettung f_{lex} für $w_1 = \dots = w_n = 1$

$$\text{Sdil}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^d) \leq d \cdot \text{Sdil}(\mathbf{Q}^{n/d}, \mathbf{G}^1) = d \cdot \sum_{i=1}^{n/d} 2^{i-1} = d \cdot (2^{\frac{n}{d}} - 1). \quad (4.54)$$

Aus (4.53) und (4.54) erhalten wir damit die Aussage des Satzes für $d > 1$. ■

In [16] führte Bezrukov unsere Betrachtungen zur Simulation uniaxialer Hypercubealgorithmen auf d -dimensionalen Gittern fort und konnte für das Kostenmaß $\text{Sdil}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^d)$ mit einem ähnlichen Ansatz, wie wir ihn im Beweis des Lemma 4.8 benutzen, die folgende untere Schranke beweisen.

Lemma 4.6 (Bezrukov [16])

Sei \mathbf{Q}^n der binäre Hypercube der Dimension n , und $\mathbf{G}^d = 2^{n_1} \times \dots \times 2^{n_d}$ das d -dimensionale Gitter $\mathbf{G}^d = (V_{\mathbf{G}^d}, E_{\mathbf{G}^d})$ mit $d > 1$, $|V_{\mathbf{G}^d}| = 2^n$ und $n_1 = \dots = n_d$. Seien $w_i \in \mathbb{N}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt:

$$\text{Sdil}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^d) \geq 2^{\frac{1-d}{d}n} \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot 2^{i-1} \cdot (1 - o(1)).$$

Betrachten wir nun das Kostenmaß $\text{Scon}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^d)$. Im Falle $w_1 = \dots = w_n = 1$ und d beliebig können wir leider (noch) nicht den exakten Wert für $\text{Scon}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^d)$ bestimmen. Als Ergebnis unserer Untersuchungen erhalten wir das nachfolgende Lemma. Dabei ergibt sich die untere Schranke wiederum aus der Arbeit [16] und die obere Schranke aus den folgenden Überlegungen: Mit $w_1 = \dots = w_n = 1$ gilt:

$$\text{Scon}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^d) \leq d \cdot \text{Scon}(\mathbf{Q}^{n/d}, \mathbf{G}^1) \leq d \cdot \sum_{i=1}^{n/d} \max_{e' \in E_{\mathbf{G}^1}} \{\text{con}_{f_{\text{lex}}}(e') \mid e' \in R_{\phi}(e), e \in E_i\}.$$

Für f_{lex} gilt aber $\max_{e' \in E_{\mathbf{G}^1}} \{\text{con}_{f_{\text{lex}}}(e') \mid e' \in R_{\phi}(e), e \in E_i\} = 2^{i-1}$ und damit

$$\text{Scon}(\mathbf{Q}^n, \mathbf{G}^d) \leq d \cdot \sum_{i=1}^{n/d} 2^{i-1} = d \cdot (2^{\frac{n}{d}} - 1).$$

Lemma 4.7 (Bezrukov [16])

Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n , und $G^d = 2^{n_1} \times \cdots \times 2^{n_d}$ das d -dimensionale Gitter $G^d = (V_{G^d}, E_{G^d})$ mit $|V_{G^d}| = 2^n$ und $n_1 = \dots = n_d$. Seien $w_1 = \dots = w_n = 1$. Es gilt:

$$\frac{1}{3} \cdot 2^{\frac{n}{d}} \leq \text{Scon}(Q^n, G^d) \leq d(2^{\frac{n}{d}} - 1).$$

Abschließend beweisen wir eine untere Schranke für $\text{Scon}(Q^n, G^d)$ im Falle von beliebigen Werten für w_i . Erneut gilt, daß für größere Werte von d ohne besonderes Wissen über die Parameter w_i keine geschlossene Formel für die entsprechende obere Schranke zu bestimmen ist.

Lemma 4.8 Sei Q^n der binäre Hypercube der Dimension n , und $G^d = 2^{n_1} \times \cdots \times 2^{n_d}$ das d -dimensionale Gitter $G^d = (V_{G^d}, E_{G^d})$ mit $|V_{G^d}| = 2^n$ und $n_1 = \dots = n_d$. Seien $w_i \in \mathbb{N}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt:

$$\text{Scon}(Q^n, G^d) \geq 2^{\frac{1-d}{d}n} \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot 2^{i-1} \cdot (1 - o(1)).$$

Beweis: Sei $F_m \subseteq V_{G^d}$ die Menge der ersten m Knoten des d -dimensionalen Gitters bezüglich der lexikographischen Ordnung L und sei $C(F_m)$ der Kantenschnitt, der die Knotenmenge F_m von der Knotenmenge $V_{G^d} \setminus F_m$ separiert. Es gilt

$$|C(F_m)| = O\left(2^{\frac{d-1}{d}n}\right) \quad (4.55)$$

für jedes m mit $1 \leq m \leq 2^n$.

Sei $m = m_0$ ein Wert für den $\theta_{Q^n}(m)$ maximal wird (vergleiche Abschnitt 4.3.1). Wir betrachten F_{m_0} und bezeichnen mit $G^d(i)$ das Teilgitter von G^d , welches durch die Knotenmenge $\{(x_1, \dots, x_d) \in V_{G^d} \mid x_1 = i\}$ definiert ist. Es gilt

$$\bigcup_{i=0}^q G^d(i) \subseteq F_{m_0} \subset \bigcup_{i=0}^{q+1} G^d(i)$$

für ein q mit $0 \leq q < 2^{n/d} - 1$. Folglich gilt

$$|C(F_{m_0})| = 2^{\frac{d-1}{d}n} + |C'(F_{m_0} \cap G^d(q+1))|, \quad (4.56)$$

wobei der Kantenschnitt C' in dem Teilgitter $G^d(q+1)$ liegt. Wenden wir (4.55) auf das Teilgitter $G^d(q+1)$ an, so folgt aus (4.56)

$$|C(F_{m_0})| = 2^{\frac{d-1}{d}n} + O\left(2^{\frac{d-2}{d}n}\right). \quad (4.57)$$

Sei nun N eine beliebige aber feste Knotennumerierung von $Q^n = (V_{Q^n}, E_{Q^n})$ und $A_m \subseteq V_{Q^n}$ die Menge der ersten m Knoten bezüglich dieser Numerierung. Wir betrachten den Kantenschnitt

$\theta_{Q^n}(A_m)$ und bezeichnen mit $\delta_i(A_m)$ die Anzahl der Kanten der Dimension i in $\theta_{Q^n}(A_m)$. Das heißt, $\delta_i(A_m) = |E_i \cap \theta_{Q^n}(A_m)|$. Des weiteren definieren wir

$$\begin{aligned}\delta_i(N, n, m) &= \max_{1 \leq j \leq m} \delta_i(A_j), \\ \Delta(N, n, m) &= \sum_{i=1}^n w_i \cdot \delta_i(N, n, m).\end{aligned}$$

Mit dieser Notation können wir nun einen Ansatz beschreiben, um eine untere Schranke für $Scon(Q^n, G^d)$ zu erhalten. Es gilt:

$$|C(F_{m_0})| \cdot Scon(Q^n, G^d) \geq \min_N \Delta(N, n, 2^n). \quad (4.58)$$

Es verbleibt die Aufgabe, die rechte Seite der Ungleichung (4.58) abzuschätzen. Für $\tau \in \{0, 1\}$ und $A \subseteq V_{Q^n}$ mit $|A| = m$ definieren wir

$$\begin{aligned}Q^{n,\tau} &= \{(x_1, \dots, x_n) \in V_{Q^n} \mid x_n = \tau\}, \\ A^\tau &= A \cap Q^{n,\tau}, \quad m^\tau = |A^\tau|.\end{aligned}$$

Die Numerierung N induziert zwei Numerierungen von $Q^{n,0}$ und $Q^{n,1}$, die wir kurz mit N^0 und N^1 bezeichnen. Wir erhalten damit

$$\Delta(N, n, m) \geq \Delta(N^0, n-1, m^0) + \Delta(N^1, n-1, m^1) + w_n. \quad (4.59)$$

Dabei setzen wir bei der Berechnung von $\Delta(N^\tau, n-1, m^\tau)$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_{n-1}$ voraus. Zur Verdeutlichung der Ungleichung (4.59) betrachten wir die Knotenmenge $A_m \subseteq V_{Q^n}$. Wenn wir die Kanten der ersten $n-1$ Dimensionen betrachten, so besteht $\theta_{Q^n}(A_m)$ gerade aus den Teilmengen $\theta_{Q^n}(A_m^0)$ und $\theta_{Q^n}(A_m^1)$ in den jeweiligen Teilcubes $Q^{n,0}$ und $Q^{n,1}$ von Q^n . Darüber hinaus gilt $\delta_n(A_m) \geq 1$ und $\theta_{Q^n}(A_m^0) \cap \theta_{Q^n}(A_m^1) = \emptyset$.

Wir bezeichnen das Minimum in (4.58) mit $l(n)$. Damit impliziert (4.59) die Rekursion $l(n) \geq 2 \cdot l(n-1) + w_n$. Mit $l(1) = w_1$ ergibt sich somit

$$l(n) \geq \sum_{i=1}^n w_i 2^{i-1}. \quad (4.60)$$

Insgesamt erhalten wir aus (4.57), (4.58) und (4.60):

$$\begin{aligned}Scon(Q^n, G^d) &\geq \frac{l(n)}{|C(F_{m_0})|} \geq \frac{1}{|C(F_{m_0})|} \cdot \sum_{i=1}^n w_i 2^{i-1} \\ &\geq \frac{1}{2^{\frac{d-1}{d}n} + O\left(2^{\frac{d-2}{d}n}\right)} \cdot \sum_{i=1}^n w_i 2^{i-1} \\ &= 2^{\frac{1-d}{d}n} \cdot \sum_{i=1}^n w_i 2^{i-1} \cdot (1 - o(1)).\end{aligned}$$

■

4.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir Einbettungen des binären Hypercubes Q^n in ein d -dimensionales Gitter untersucht. Dabei konnten wir sowohl die lange Zeit offene Frage (siehe [35, 85]) nach einer bijektiven Einbettung mit minimaler Kantenauslastung beantworten als auch das Problem der Bestimmung einer bezüglich der Leitungslänge optimalen bijektiven Einbettung lösen (siehe [35]).

Für die entsprechende Fragestellung bezüglich der Kantenstreckung haben wir im Falle $d = 2$ verbesserte untere und obere Schranken bestimmt und für den allgemeinen Fall eine Asymptote berechnet. Dabei vermuten wir, daß die zur Bestimmung der jeweiligen oberen Schranke verwandte Methode optimal ist. Ein Nachweis dieser Hypothese verlangt gegebenenfalls nach komplexeren mathematischen Methoden, so daß wir hier noch weiteren Forschungsbedarf sehen.

Unsere Ergebnisse zur Simulation von uniaxialen Hypercubealgorithmen durch spezielle Einbettungen bilden sicherlich einen Startpunkt, lassen jedoch Raum für weitere Forschungsarbeiten.

Des weiteren haben wir das Kantenstreckungsproblem und das Kantenauslastungsproblem für den Spezialfall einer injektiven Einbettung des n -dimensionalen binären Hypercubes Q^n in ein zweidimensionales Gitter G^2 untersucht. Zur Konstruktion solcher Einbettungen haben wir jeweils ein zweistufiges Verfahren gewählt. Zunächst benutzen wir die oben erwähnten optimalen Verfahren zur Berechnung einer bijektiven Einbettung des Hypercubes Q^n in ein zweidimensionales Zwischengitter. Anschließend berechnen wir eine wiederum optimale Einbettung des Zwischengitters in das Zielgitter. Die hierzu verwandten Methoden werden wir in dem nachfolgenden Kapitel 5 eingehend analysieren. Obwohl wir beide Schritte optimal durchführen garantiert unser Vorgehen kein optimales Gesamtergebnis, jedoch ist zur Zeit kein Verfahren bekannt, das bessere Ergebnisse liefert.

Kapitel 5

Einbettungen zweidimensionaler Gitter in zweidimensionale Gitter

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit injektiven Einbettungen von zweidimensionalen Gittern in andere zweidimensionale Gitter. Um eine unmissverständliche Schreibweise zu garantieren, bezeichnen wir im folgenden das einzubettende zweidimensionale Gitter mit $G = h \times w$ und das Gastgebergitter mit $H = h' \times w'$. Da wir uns hier nur mit injektiven Einbettungen von G in H beschäftigen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $h \leq w$, $h' \leq w'$ und $hw \leq h'w'$ gilt.

Um die Menge der möglichen Instanzen der genannten Problemstellung zu kategorisieren, führen wir den Begriff eines *idealen* Gitters ein. Wir bezeichnen das $h' \times w'$ Gitter H als ein *ideales* Gitter für das $h \times w$ Gitter G , falls $h'(w' - 1) < hw \leq h'w'$ gilt. Zur Veranschaulichung sei angemerkt, daß wir durch diese Definition quasi die „härtesten“ Instanzen des injektiven Einbettungsproblems von G in H herausfiltern können. H ist nämlich auf der einen Seite bezüglich der Knotenzahl gerade groß genug, um die Existenz einer injektiven Einbettung zu garantieren. Auf der anderen Seite läßt sich jedes Einbettungsproblem von G in ein zweidimensionales Gitter H' mit H ist Teilgraph von H' auf das Problem „bette G in H ein“ zurückführen. Es sei hier noch angemerkt, daß für ein Gitter G im allgemeinen verschiedene ideale Gitter H existieren, und dies durch unsere Definition auch erfaßt wird. Des weiteren verwenden wir im folgenden den Begriff des *Aspekt-Ratio* eines $h \times w$ Gitters G , welcher durch den Quotienten $\min\{h, w\} / \max\{h, w\}$ definiert ist.

Alle möglichen Instanzen des injektiven Einbettungsproblems von G in H lassen sich nun in zwei Kategorien einteilen (siehe auch Abbildung 5.1):

- (i) H ist ein ideales Gitter für G , und H besitzt einen kleineren Aspekt-Ratio als G , das heißt $h/w > h'/w'$.
- (ii) H ist ein ideales Gitter für G , und H besitzt einen größeren Aspekt-Ratio als G , das heißt $h/w < h'/w'$.

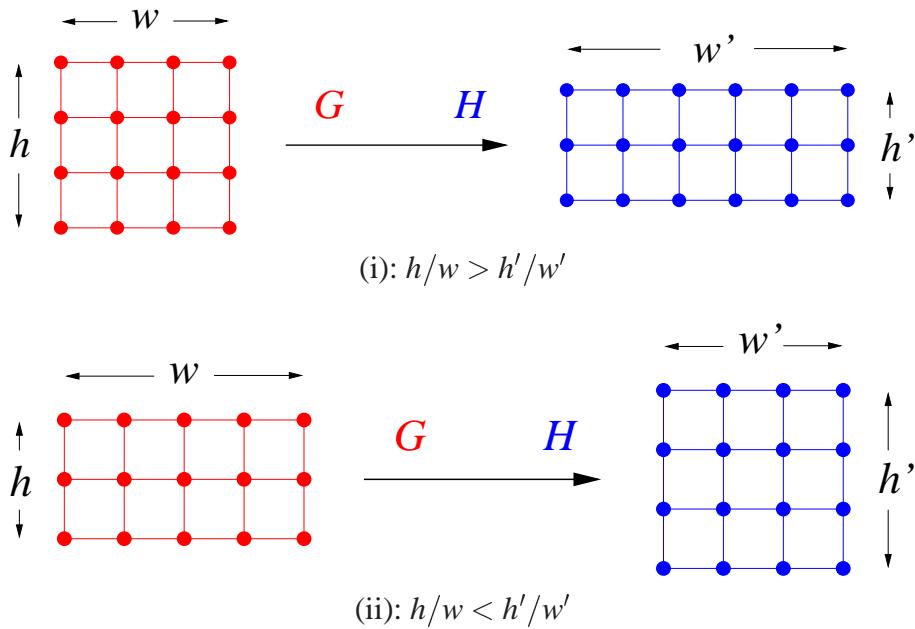


Abb. 5.1: Illustration der von uns betrachteten Instanzen des Einbettungsproblems eines zweidimensionalen Gitters G in ein anderes zweidimensionales Gitter H . (i): H ist ein ideales Gitter für G , und H besitzt einen kleineren Aspekt-Ratio als G . (ii): H ist ein ideales Gitter für G , und H besitzt einen größeren Aspekt-Ratio als G .

Bei dieser Kategorisierung haben wir den Fall, daß $h/w = h'/w'$ gilt, ausgeschlossen, da in diesem Fall das Einbettungsproblem trivial ist. Falls H ein ideales Gitter für G ist, folgt aus $h/w = h'/w'$, daß G und H isomorph sind, anderenfalls ist G ein Teilgraph von H .

Wir behandeln in diesem Kapitel nur die Problemstellung (i). Dafür beschreiben wir Einbettungen, deren Kantenauslastungen höchstens um den Wert eins von der von uns ebenfalls in diesem Kapitel gezeigten unteren Schranke entfernt sind. Die untere Schranke beweisen wir durch die Anwendung unserer Methode aus Abschnitt 3.3. Des weiteren beschreiben wir Einbettungen, die bezüglich der Kantenstreckung optimal sind. Den Beweis der Optimalität der entsprechenden Einbettungen führen wir mit Hilfe der Methode aus Abschnitt 3.2.

Die Problemstellung (ii) haben wir ebenfalls intensiv untersucht [155, 156]. Da die von uns erzielten Ergebnisse aber einen wesentlichen Teil der Dissertation von Markus Röttger [125] ausmachen, verzichten wir hier auf deren Darstellung und verweisen auf die oben genannte Arbeit.

Dieses Kapitel ist wie folgt gegliedert: In Abschnitt 5.1 beschreiben wir den Stand der Forschung für die mit (i) bezeichnete Problemstellung und geben einen Überblick über die von uns dazu erzielten Ergebnisse. In Abschnitt 5.2 analysieren wir die Problemstellung (i) in Bezug auf die Kantenauslastung und in Abschnitt 5.3 in Bezug auf die Kantenstreckung. Abschließend fassen wir in Abschnitt 5.4 unsere Resultate zusammen.

5.1 Stand der Forschung und Überblick über die erzielten Ergebnisse

Eine ganze Reihe praxisrelevanter Probleme lassen sich durch das von uns hier betrachtete Einbettungsproblem modellieren. Als Beispiele seien neben der Prozessorzuteilung und dem VLSI-Design die Verwaltung eines Parallelrechners mit Gitter-Topologie im Mehrbenutzer-Betrieb genannt [68]. Dabei werden die Prozessoren des Parallelrechners auf die verschiedenen Benutzer aufgeteilt. Fordert ein Benutzer aber beispielsweise eine Gitter-Topologie an, die als zusammenhängender Teilgraph auf den verfügbaren Knoten des Rechners nicht mehr vorhanden ist, so wird durch eine entsprechende Einbettung dem Benutzer „virtuell“ das angeforderte Gitter zur Verfügung gestellt. Je effizienter die verwandte Einbettung ist, um so geringer ist der Zeitverlust, der durch die Simulation des einen Gitters auf dem anderen entsteht. In Kapitel 4 haben wir bei einem pragmatischen Ansatz zur Einbettung eines Hypercubes in ein zweidimensionales Gitter dessen Seitenlängen keine Zweierpotenzen entsprechen, das hier betrachtete Einbettungsproblem als Unterproblem erhalten. Eine analoge Vorgehensweise für andere Einbettungsprobleme ist aus pragmatischen Gründen in der Praxis durchaus üblich.

Im weiteren stellen wir zunächst den Stand der Forschung dar und zitieren einige wichtige Ergebnisse. Wie oben erwähnt, betrachten wir dabei nur injektive Einbettungen eines zweidimensionalen Gitters $G = h \times w$ in ein ideales zweidimensionales Gitter $H = h' \times w'$ mit kleinerem Aspekt-Ratio als G . Das heißt, $h/w > h'/w'$.

Der Spezialfall, daß G unter Minimierung der Kantenstreckung in eine Linie eingebettet wird, das heißt, H entspricht dem $1 \times (hw)$ Gitter, ist als Bandweitenproblem für zweidimensionale Gitter bekannt. Chvátalová löste in [38] dieses Problem und bewies, daß h die Bandweite für das $h \times w$ Gitter ist. Das entsprechende Problem unter Minimierung der Kantenauslastung entspricht dem Schnittweitenproblem für zweidimensionale Gitter. Aus dem Ergebnis, welches Ahlswede und Bezrukov in [1] bewiesen, kann abgeleitet werden, daß die Schnittweite des $h \times w$ Gitters, falls $h \neq 2$ und $w \neq 2$ gilt, $h + 1$ ist. Kosaraju und Atallah zeigten in [84], daß $\Theta(h/h')$ eine Schranke für die Kantenstreckung jeder Einbettung eines $h \times w$ Gitters G in ein $h' \times w'$ Gitter H ist. Römke, Röttger, Schroeder und Simon zeigten in [152], daß G mit einer Kantenstreckung von höchstens $\lceil h/h' \rceil + 1$ in H eingebettet werden kann. Huang et al. verbesserten in [76] dieses Ergebnis bezüglich der Kantenstreckung. Sie konstruierten Einbettungen mit Kantenstreckung $\lceil h/h' \rceil$. Shen et al. betrachteten in [133] den Spezialfall, daß der Gast und der Gastgeber die gleiche Größe besitzen, Das heißt, es gilt $hw = h'w'$ und die Einbettung ist bijektiv. Sie zeigten, daß in diesem Fall $\lceil h/h' \rceil$ sowohl eine untere Schranke für die Kantenstreckung als auch eine untere Schranke für die Kantenauslastung ist. Des weiteren entwickelten sie für diesen Spezialfall Einbettungen mit Kantenstreckung $\lceil h/h' \rceil + 1$ und Kantenauslastung $\lceil h/h' \rceil + 3$. In [156] konnten wiederum Röttger und Schroeder bezüglich der Kantenauslastung einer Einbettung eines $h \times w$ Gitters G in ein ideales zweidimensionales $h' \times w'$ Gitter H mit kleinerem Aspekt-Ratio als G

den folgenden Satz zeigen:

Satz 5.1 Sei $G = (V, E)$ ein zweidimensionales $h \times w$ Gitter und $H = (V', E')$ ein beliebiges seiner idealen $h' \times w'$ Gitter mit $2 \leq h' < h \leq w < w'$. Es gilt:

$$\lceil (h+1)/h' \rceil \leq \text{con}(G, H) \leq \lceil h/h' \rceil + 1.$$

Des weiteren bewiesen Röttger und Schroeder ebenfalls in [156], daß $\lceil h/h' \rceil$ die optimale Kantenstreckung für eine Einbettung eines $h \times w$ Gitters in jedes seiner idealen $h' \times w'$ Gitter von kleinerem Aspekt-Ratio ist. Das heißt, wir erhalten den folgenden Satz:

Satz 5.2 Sei $G = (V, E)$ ein zweidimensionales $h \times w$ Gitter und $H = (V', E')$ ein beliebiges seiner idealen $h' \times w'$ Gitter mit $2 \leq h' < h \leq w < w'$. Es gilt:

$$\text{dil}(G, H) = \lceil h/h' \rceil.$$

5.2 Betrachtung der Kantenauslastung

Wir beweisen zunächst mittels des Korollar 3.2 aus Abschnitt 3.3 die untere Schranke aus Satz 5.1. Anschließend beschreiben wir eine Technik zur Einbettung von $h \times w$ Gittern G in $h' \times w'$ Gitter H , so daß die aus dieser Einbettung resultierende Kantenauslastung höchstens um den Wert eins von der von uns gezeigten unteren Schranke entfernt ist. Die erwähnte Einbettungstechnik basiert im wesentlichen auf der Konstruktion einer Matrix. Mit Hilfe dieser Matrix lassen sich die Einbettungen einfach beschreiben und analysieren.

Beweis der unteren Schranke aus Satz 5.1: Sei $G = (V, E)$ ein zweidimensionales $h \times w$ Gitter und $H = (V', E')$ ein ideales $h' \times w'$ Gitter von G mit $2 \leq h' < h \leq w < w'$.

Mit unserer Methode aus Abschnitt 3.3 erhalten wir den Ansatz (siehe Korollar 3.2)

$$\text{con}(G, H) \geq \max_{\substack{1 \leq l < |V'| \\ l - |V'| + |V| \leq m \leq l}} \frac{\theta_G(m)}{\theta_H(l)}.$$

Da H ein ideales Gitter für G ist, gilt $|V'| - |V| < h'$. Somit folgt

$$\text{con}(G, H) \geq \max_{\substack{1 \leq l < |V'| \\ l - h' < m \leq l}} \frac{\theta_G(m)}{\theta_H(l)}. \quad (5.1)$$

Auf Grund der in Abschnitt 3.1 dargestellten Ergebnisse wissen wir, daß es zwar keine optimale Ordnung für das kantenisoperimetrische Problem auf zweidimensionalen Gittern gibt, aber

die lexikographische Ordnung L für bestimmte Kardinalitäten eine Lösung liefert. Exakt formuliert, können wir festhalten, daß für ein beliebiges zweidimensionales $\bar{h} \times \bar{w}$ Gitter $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ mit $\bar{h} \leq \bar{w}$ für alle Kardinalitäten l mit $\lfloor (\bar{h}/2)^2 \rfloor < l \leq \bar{h}\bar{w} - \lfloor (\bar{h}/2)^2 \rfloor$ gilt

$$\theta_{\bar{G}}(l) = \begin{cases} \bar{h} & \text{falls } \bar{h} \mid l, \\ \bar{h} + 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Um eine untere Abschätzung für den rechten Term in der Ungleichung (5.1) zu erhalten, betrachten wir diesen Term nur für die Parameter l , für die gilt $\lfloor (h'/2)^2 \rfloor < l \leq h'w' - \lfloor (h'/2)^2 \rfloor$. Aus (5.2) können wir folgern, daß in diesem Fall $\theta_G(m)/\theta_H(l)$ höchstens gleich $(h+1)/h'$ ist. Im folgenden zeigen wir, daß es stets ein Paar l, m aus dem oben definierten Wertebereich gibt, so daß $\theta_G(m)/\theta_H(l)$ gleich $(h+1)/h'$ ist. Es existiert also (mindestens) ein l , mit $\lfloor (h'/2)^2 \rfloor < l \leq h'w' - \lfloor (h'/2)^2 \rfloor$, und ein entsprechendes m , mit $l - h' < m \leq l$, so daß $\theta_H(l) = h'$ und $\theta_G(m) = h+1$ gilt.

Für den Beweis dieser Aussage setzen wir $l = \lceil w'/2 \rceil h'$. Es gilt nun, daß für dieses l die lexikographische Ordnung L eine Lösung des kantenisoperimetrischen Problems auf H liefert, falls

$$\left\lfloor \left(\frac{h'}{2}\right)^2 \right\rfloor < l \leq h'w' - \left\lfloor \left(\frac{h'}{2}\right)^2 \right\rfloor.$$

Daß diese Ungleichungen gelten, können wir leicht überprüfen, indem wir die Voraussetzungen an die Parameter h, w, h' und w' , also $2 \leq h' < h \leq w < w'$ und $hw \leq h'w'$, ausnutzen. Es gilt

$$\left\lfloor \left(\frac{h'}{2}\right)^2 \right\rfloor \leq \frac{h'^2}{2} < \frac{h'w'}{2} \leq \left\lceil \frac{w'}{2} \right\rceil h' = l,$$

und

$$\begin{aligned} l &= \left\lceil \frac{w'}{2} \right\rceil h' \leq h' \left(\frac{w'}{2} + \frac{1}{2} \right) = h'w' \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2w'} \right) \leq \frac{5}{8}h'w' \\ &= h'w' - \frac{3}{8}h'w' < h'w' - \frac{3}{8}h'^2 < h'w' - \frac{1}{4}h'^2 \leq h'w' - \left\lfloor \left(\frac{h'}{2}\right)^2 \right\rfloor. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß L für $l = \lceil w'/2 \rceil h'$ das kantenisoperimetrische Problem auf H löst. Da der Wert von h' offensichtlich den Wert von l teilt, können wir aus Gleichung 5.2 folgern, daß $\theta_H(l) = h'$ gilt.

Betrachten wir nun das zu l gehörende m , $l - h' < m \leq l$. Wir zeigen zunächst, daß für m die lexikographische Ordnung L das entsprechende kantenisoperimetrische Problem auf G löst. Dies ist gerade dann der Fall, wenn für dieses m gilt

$$\left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor < m \leq hw - \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor.$$

Diese Ungleichungen gelten offensichtlich für $w = 3$ (den kleinsten Wert für w), da in diesem Fall $w = h = 3$, $h' = 2$ und $w' = 5$ ist. Wir können im folgenden also von $w \geq 4$ ausgehen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} m &\leq l = \left\lceil \frac{w'}{2} \right\rceil h' \leq h' \left(\frac{w'}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{h' w'}{2} + \frac{h'}{2} < \frac{h w + h'}{2} + \frac{h'}{2} \\ &= \frac{h w}{2} + h' < \frac{h w}{2} + h = h w \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{w} \right) \leq \frac{3}{4} h w = h w - \frac{h w}{4} \\ &\leq h w - \frac{h^2}{4} = h w - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \leq h w - \left\lfloor \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right\rfloor. \end{aligned}$$

Des weiteren gilt

$$\begin{aligned} m &> \left\lceil \frac{w'}{2} \right\rceil h' - h' \geq \frac{h' w'}{2} - h' = \frac{h' w'}{2} \left(1 - \frac{2}{w'} \right) \\ &\geq \frac{h' w'}{2} \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{h w}{4} \geq \frac{h^2}{4} \geq \left\lfloor \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right\rfloor. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß L für alle m mit $l - h' < m \leq l$ das kantenisoperimetrische Problem auf G löst.

Aus Gleichung 5.2 können wir nun folgern, daß, falls $m \not\equiv 0 \pmod{h}$, $\theta_G(m) = h+1$ gilt. Damit erhalten wir in diesem Fall $\text{con}(G, H) \geq (h+1)/h'$ beziehungsweise

$$\text{con}(G, H) \geq \lceil (h+1)/h' \rceil,$$

da $\text{con}(G, H)$ ein ganzzahliger Wert ist.

Falls $m \equiv 0 \pmod{h}$, das heißt, $h \mid m$, unterscheiden wir die beiden Fälle $m \leq h' + \lfloor (h/2)^2 \rfloor$ und $m > h' + \lfloor (h/2)^2 \rfloor$. Abhängig von dem jeweiligen Fall definieren wir ein „anderes“ l und ein „anderes“ m , die wir mit \tilde{l} beziehungsweise mit \tilde{m} bezeichnen. Im folgenden zeigen wir, daß $\theta_H(\tilde{l}) = h'$ und $\theta_G(\tilde{m}) = h+1$ gilt.

Im Fall, daß $m \leq h' + \lfloor (h/2)^2 \rfloor$ gilt, setzen wir $\tilde{l} = \lceil w'/2 \rceil h' + h'$. Wir zeigen wiederum, daß die Ordnung L für \tilde{l} eine Lösung des kantenisoperimetrischen Problems auf H liefert. Dies gilt, da

$$\begin{aligned} \tilde{l} &= \left\lceil \frac{w'}{2} \right\rceil h' + h' \leq h' \left(\frac{w'}{2} + \frac{1}{2} \right) + h' = \frac{h' w'}{2} + \frac{3h'}{2} = h' w' - \frac{h' w'}{2} + \frac{3h'}{2} \\ &\leq h' w' - \frac{h'(h'+2)}{2} + \frac{3h'}{2} = h' w' - \frac{h'^2}{2} + \frac{h'}{2} = h' w' - \frac{h'^2}{4} \left(2 - \frac{2}{h'} \right) \\ &\leq h' w' - \left(\frac{h'}{2} \right)^2 \leq h' w' - \left\lfloor \left(\frac{h'}{2} \right)^2 \right\rfloor. \end{aligned}$$

Damit gilt $\theta_H(\tilde{l}) = h'$. Des weiteren zeigen wir, daß die Ordnung L auch für \tilde{m} eine Lösung des kantenisoperimetrischen Problems auf G liefert. Dies gilt wiederum, da

$$\begin{aligned}\tilde{m} &\leq m + h' \leq 2h' + \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor = hw - \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor - hw + 2h' + 2 \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor \\ &\leq hw - \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor - h^2 + 2h' + \frac{h^2}{2} = hw - \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor - \frac{h^2}{2} + 2h' \\ &\leq hw - \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor - \frac{(h'+1)^2}{2} + 2h' = hw - \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor - \frac{(h'-1)^2}{2} \\ &< hw - \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor.\end{aligned}$$

Es gilt $\tilde{m} \not\equiv 0 \pmod{h}$, da $h \mid m$ und $m < \tilde{m} < m + h$. Damit können wir $\theta_G(\tilde{m}) = h + 1$ folgern.

Falls $m > h' + \lfloor (h/2)^2 \rfloor$ gilt, setzen wir $\tilde{l} = \lceil w'/2 \rceil h' - h'$. Die Ordnung L löst auch für dieses \tilde{l} das kantenisoperimetrische Problem auf H , denn

$$\begin{aligned}\tilde{l} &= \left\lceil \frac{w'}{2} \right\rceil h' - h' \geq \frac{h' w'}{2} - h' = \left(\frac{h'}{2}\right)^2 \left(\frac{2w'}{h'} - \frac{4}{h'} \right) \\ &\geq \left(\frac{h'}{2}\right)^2 \left(\frac{2(h'+2)}{h'} - \frac{4}{h'} \right) = 2 \left(\frac{h'}{2}\right)^2 > \left(\frac{h'}{2}\right)^2 \geq \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor.\end{aligned}$$

Damit ist $\theta_H(\tilde{l}) = h'$. Schließlich gilt noch, daß L auch für \tilde{m} das kantenisoperimetrische Problem auf G löst, denn

$$\tilde{m} \geq m - h' > h' + \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor - h' = \left\lfloor \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\rfloor.$$

Wir können davon ausgehen, daß $\tilde{m} \not\equiv 0 \pmod{h}$ gilt, da $h \mid m$ und $m - h < \tilde{m} < m$. Somit ist $\theta_G(\tilde{m}) = h + 1$.

Insgesamt erhalten wir auch in diesem Fall $\text{con}(G, H) \geq (h+1)/h'$ beziehungsweise

$$\text{con}(G, H) \geq \lceil (h+1)/h' \rceil,$$

da $\text{con}(G, H)$ ein ganzzahliger Wert ist. ■

Zum Beweis der oberen Schranke aus Satz 5.1:

Im weiteren beschreiben wir zunächst eine Technik, um eine injektive Einbettung eines zweidimensionalen Gitters $G = h \times w$ in ein anderes zweidimensionales Gitter $H = h' \times w'$ zu bestimmen. Das heißt, wir setzen dabei lediglich voraus, daß $hw \leq h'w'$ gilt. Diese Technik ist

demnach unabhängig von dem Verhältnis der jeweiligen Aspekt-Ratio der beiden Gitter G und H zueinander anwendbar! In Satz 5.3 fassen wir die Konsequenzen für die Kantenauslastung und die Kantenstreckung bei Anwendung dieser Technik zusammen. Nach dem Beweis dieses Satzes zeigen wir dann die obere Schranke aus Satz 5.1.

Eine Technik zur injektiven Einbettung von G in H : Wir gehen im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, daß $w > w'$ gilt. Dazu sei angemerkt, daß wir hier nicht annehmen, daß $h \leq w$ und $h' \leq w'$ gilt. Es ist also immer möglich, die Seitenlängen eines der Gitter so zu vertauschen, daß $w > w'$ zutrifft. Den trivialen Fall, daß $w = w'$ gilt, betrachten wir hier nicht weiter. Um das $h \times w$ Gitter G in das $h' \times w'$ Gitter H einzubetten, verwenden wir eine sogenannte *Einbettungsmatrix* $M_{h \times w'}$. Die Einträge m_{ij} , $0 \leq i < h$, $0 \leq j < w'$, dieser Matrix sind nicht negative ganze Zahlen und werden wie folgt berechnet:

$$m_{ij} = \left\lceil w \frac{j-i+1}{w'} \right\rceil - \left\lceil w \frac{j-i}{w'} \right\rceil. \quad (5.3)$$

Der Zusammenhang zwischen der Matrix $M_{h \times w'}$ und einer entsprechenden injektiven Knotenabbildung von G nach H ergibt sich nun wie folgt. Wir legen den Gast G in den Gastgeber H aus, indem wir jede der h Zeilen des Gastes von der Länge w auf die Länge w' „zusammenpressen“. Wie das Zusammenpressen der i -ten Zeile des Gastes ($0 \leq i < h$), die wir im weiteren auch als *Kette* bezeichnen, geschieht, ist dabei durch den entsprechenden i -ten Zeilenvektor der Matrix beschrieben. Das j -te Element ($0 \leq j < w'$) des i -ten Zeilenvektors, also m_{ij} , legt dabei fest, wie viele Knoten der i -ten Kette des Gastes auf die j -te Spalte des Gastgebers abgebildet werden. Dieser Konvention folgend muß für jeden der Zeilenvektoren gelten, daß die Summe seiner Einträge gleich w ist. Indem wir für jede der h Ketten einen entsprechenden Zeilenvektor definieren, erhalten wir eine $h \times w'$ Matrix. Dabei entspricht die oberste Zeile der Matrix dem Vektor für die oberste Kette (Kette 0), die nächste Zeile der Matrix dem Vektor für die Kette 1, usw. Damit man aus dieser Matrix eine injektive Knotenabbildung von G nach H erhalten kann, muß für jeden Spaltenvektor gelten, daß die Summe seiner Einträge höchstens h' ist. Das die durch die Formel (5.3) definierte Matrix $M_{h \times w'}$ diese Eigenschaften erfüllt, zeigen wir im Beweis zu Satz 5.3. Zur Veranschaulichung der gerade beschriebenen Konstruktion haben wir in Abbildung 5.2 die Einbettungsmatrix für ein Beispiel angegeben.

Durch die Matrix $M_{h \times w'}$ haben wir bisher nur definiert, wie viele Knoten jeder Kette auf eine bestimmte Spalte des Gastgebers abgebildet werden. Dabei gehen wir immer davon aus, daß die Knoten, die in die gleiche Spalte des Gastgebers H plaziert werden, von „oben“ nach „unten“ ohne zwischendurch irgendwelche Knoten ungenutzt zu lassen bündig plaziert werden. Falls einige Knoten des Gastgebers H kein Urbild im Gast G besitzen, liegen diese Knoten somit auf jeden Fall in den untersten Zeilen von H . Um eine eindeutige Knotenabbildung von G nach H zu gewährleisten, müssen wir noch festlegen, in welcher Reihenfolge die Knoten einer einzelnen Kette, die auf die gleiche Spalte abgebildet werden, zu plazieren sind. Dazu genügt es festzulegen, wie die Knoten einer einzelnen Kette miteinander verbunden werden. Wir vereinbaren:

Die Knoten jeder Kette, die in geraden Spalten ($0, 2, \dots$) des Gastgebers liegen, werden von oben nach unten verbunden. Knoten, die in ungeraden Spalten liegen, von unten nach oben. Pro Kette wird der unterste Knoten einer geraden Spalte mit dem untersten Knoten der nächsten (das heißt, ungeraden) Spalte verbunden. Außerdem wird pro Kette der oberste Knoten einer ungeraden Spalte mit dem obersten Knoten der nächsten (das heißt, geraden) Spalte verbunden.

Wir bilden also einen Knoten (a, b) des $h \times w$ Gitters G auf den Knoten (a', b') des $h' \times w'$ Gitters H ab, mit

$$b' = \min\{l \in \{0, \dots, w' - 1\} : \sum_{j=0}^l m_{aj} \geq b + 1\} \quad (5.4)$$

und

$$a' = \sum_{i=0}^{a-1} m_{ib'} + \begin{cases} b - \sum_{j=0}^{b'-1} m_{aj} & \text{falls } b' \text{ gerade,} \\ \left(\sum_{j=0}^{b'} m_{aj} \right) - b - 1 & \text{falls } b' \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (5.5)$$

In Abbildung 5.2 haben wir als Beispiel für die gerade beschriebene Einbettungstechnik die Einbettung des 5×31 Gitters G in das 12×13 Gitter H dargestellt. G wird in H ausgelegt, indem jede der fünf Zeilen von G von der Länge 31 auf die Länge 13 zusammengepreßt wird.

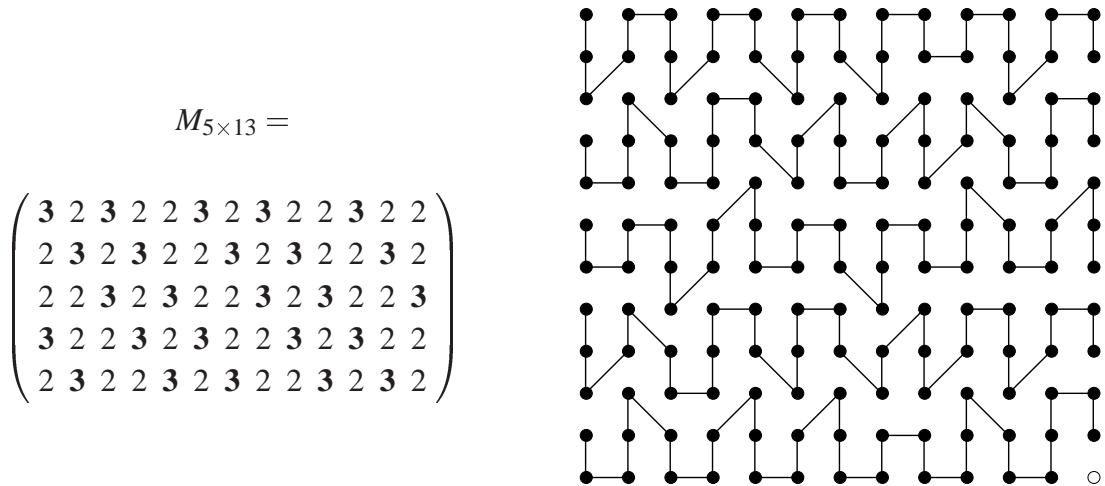


Abb. 5.2: Beispiel für die Berechnung einer Einbettung des 5×31 Gitters G in das 12×13 Gitter H . Im linken Bild haben wir die entsprechend der Formel (5.3) berechnete Einbettungsmatrix $M_{5 \times 13}$ dargestellt. Im rechten Bild ist die Auslegung von G in H dargestellt, die sich auf Grund der Formeln (5.4) und (5.5), und der obigen Vereinbarung ergibt. Das Punkteraster repräsentiert dabei die Knoten von H . Der Knoten mit den Koordinaten $(0, 0)$ des Gastgebers H befindet sich links oben und auf ihn wird der Knoten $(0, 0)$ des Gastes G abgebildet. Der weiße Punkt bezeichnet den Knoten von H , der kein Urbild in G besitzt.

Um eine Einbettung von G in H vollständig zu beschreiben, müssen wir noch das Routing-Schema angeben. Wir wählen ein *kürzeste-Wege-Routing*, wobei wir aus Gründen der besseren Lesbarkeit hier auf die explizite Beschreibung der Routingwege verzichten und dies auf den Beweis des nachfolgenden Satzes verschieben.

Satz 5.3 Seien $h, w, h', w' \in \mathbb{N}$ mit $hw \leq h'w'$ und $w > w'$. Des weiteren sei $M_{h \times w'}$ eine Einbettungsmatrix, die gemäß der Formel (5.3) gebildet wird. Dann liefert die durch die Formeln (5.4) und (5.5) definierte Abbildung der Knoten des $h \times w$ Gitters G auf die Knoten des $h' \times w'$ Gitters H zusammen mit einem geeigneten kürzeste-Wege-Routing eine Einbettung von G in H mit:

$$\text{dil}(G, H) \leq \lceil w/w' \rceil + 1,$$

$$\text{con}(G, H) \leq \lceil w/w' \rceil + 1.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die durch die Formel (5.3) definierte Matrix die folgenden Eigenschaften aufweist:

$$(C1) \quad m_{ij} \in \{\lfloor w/w' \rfloor, \lceil w/w' \rceil\}, \text{ für } 0 \leq i < h, 0 \leq j < w',$$

$$(C2) \quad m_{ij} = m_{i+1,j+1}, \text{ für } 0 \leq i < h-1, 0 \leq j < w'-1,$$

$$(C3) \quad \sum_{i=0}^{h-1} m_{ij} \leq h', \text{ für } 0 \leq j < w',$$

$$(C4) \quad \sum_{j=0}^{w'-1} m_{ij} \geq w, \text{ für } 0 \leq i < h.$$

Bevor wir diese Eigenschaften der Matrix $M_{h \times w'}$ beweisen, erläutern wir sie in angemessener Kürze. Eigenschaft (C1) besagt, daß in der Matrix nur zwei verschiedene Einträge existieren, nämlich $\lfloor w/w' \rfloor$ und $\lceil w/w' \rceil$. Falls Eigenschaft (C2) zutrifft, können wir folgern

$$\sum_{i=0}^l m_{i,j+1} = m_{0,j+1} + \sum_{i=0}^{l-1} m_{ij}, \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, w'-2\}, l \in \{0, \dots, h-1\}, \quad (5.6)$$

und

$$\sum_{j=0}^l m_{i+1,j} = m_{i+1,0} + \sum_{j=0}^{l-1} m_{ij}, \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, h-2\}, l \in \{0, \dots, w'-1\}. \quad (5.7)$$

Somit unterscheiden sich jeweils die Summen gleich langer, benachbarter Teilspalten (beziehungsweise Teilzeilen) der Matrix um höchstens eins. Laut Eigenschaft (C3) dürfen auf jede Spalte des Gastgebers höchstens h' Knoten des Gastes abgebildet werden. Eigenschaft (C4) besagt, daß jede Kette mindestens die Länge w besitzt. Somit ist sichergestellt, daß die Ketten

mindestens der Länge der Zeilen des Gastes entsprechen. Insgesamt können wir also aus diesen Tatsachen und unter Verwendung der Formeln (5.4) und (5.5) schließen, daß die Funktion, die die Knoten des $h \times w$ Gitters G auf die Knoten des $h' \times w'$ Gitters H abbildet, injektiv ist und jedem Knoten aus G ein Bild in H zuordnet.

Für den Beweis der Eigenschaften **(C1)** - **(C4)** zeigen wir zunächst die folgenden Hilfsgleichungen:

$$\sum_{i=k}^l m_{ij} = \left\lceil \frac{w}{w'}(j-k+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-l) \right\rceil \quad \text{mit } 0 \leq k \leq l < h, 0 \leq j < w' \quad (5.8)$$

und

$$\sum_{j=k}^l m_{ij} = \left\lceil \frac{w}{w'}(l-i+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(k-i) \right\rceil \quad \text{mit } 0 \leq i < h, 0 \leq k \leq l < w' \quad (5.9)$$

und

$$\left\lceil \frac{a+b}{c} \right\rceil - \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil \in \left\{ \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor, \left\lceil \frac{a}{c} \right\rceil \right\} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}. \quad (5.10)$$

Beweis der Gleichung (5.8): Für $0 \leq k \leq l < h, 0 \leq j < w'$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^l m_{ij} &= \overbrace{\left\lceil \frac{w}{w'}(j-k+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-k) \right\rceil}^{m_{kj}} + \overbrace{\left\lceil \frac{w}{w'}(j-k) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-k-1) \right\rceil}^{m_{k+1,j}} + \dots + \\ &\quad \overbrace{\left\lceil \frac{w}{w'}(j-l+2) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-l+1) \right\rceil}^{m_{l-1,j}} + \overbrace{\left\lceil \frac{w}{w'}(j-l+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-l) \right\rceil}^{m_{lj}} \\ &= \left\lceil \frac{w}{w'}(j-k+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-l) \right\rceil + \\ &\quad \underbrace{\left(\left\lceil \frac{w}{w'}(j-k) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-k) \right\rceil \right)}_{=0} + \dots + \underbrace{\left(\left\lceil \frac{w}{w'}(j-l+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-l+1) \right\rceil \right)}_{=0} \\ &= \left\lceil \frac{w}{w'}(j-k+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-l) \right\rceil. \end{aligned}$$

Beweis der Gleichung (5.9): Für $0 \leq i < h, 0 \leq k \leq l < w'$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^l m_{ij} &= \overbrace{\left\lceil \frac{w}{w'}(k-i+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(k-i) \right\rceil}^{m_{ik}} + \overbrace{\left\lceil \frac{w}{w'}(k-i+2) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(k-i+1) \right\rceil}^{m_{i,k+1}} + \dots + \\ &\quad \overbrace{\left\lceil \frac{w}{w'}(l-i) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(l-i-1) \right\rceil}^{m_{i,l-1}} + \overbrace{\left\lceil \frac{w}{w'}(l-i+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(l-i) \right\rceil}^{m_{i,l}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\lceil \frac{w}{w'}(l-i+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(k-i) \right\rceil + \\
&\quad \overbrace{\left(\left\lceil \frac{w}{w'}(k-i+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(k-i+1) \right\rceil \right)}^{=0} + \dots + \overbrace{\left(\left\lceil \frac{w}{w'}(l-i) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(l-i) \right\rceil \right)}^{=0} \\
&= \left\lceil \frac{w}{w'}(l-i+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(k-i) \right\rceil.
\end{aligned}$$

Beweis der Gleichung (5.10):

$$\left\lceil \frac{a+b}{c} \right\rceil - \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil \geq \left\lceil \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor + \frac{b}{c} \right\rceil - \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor + \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil - \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor$$

und

$$\left\lceil \frac{a+b}{c} \right\rceil - \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil \leq \left\lceil \left\lceil \frac{a}{c} \right\rceil + \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil \right\rceil - \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil = \left\lceil \frac{a}{c} \right\rceil + \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil - \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil = \left\lceil \frac{a}{c} \right\rceil.$$

Ad (C1): Für $0 \leq i < h, 0 \leq j < w'$ ist

$$\begin{aligned}
m_{ij} &= \left\lceil \frac{w}{w'}(j-i+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-i) \right\rceil = \left\lceil \frac{w+w(j-i)}{w'} \right\rceil - \left\lceil \frac{w(j-i)}{w'} \right\rceil \\
&\stackrel{(5.10)}{\in} \left\{ \left\lfloor \frac{w}{w'} \right\rfloor, \left\lceil \frac{w}{w'} \right\rceil \right\}.
\end{aligned}$$

Ad (C2): Für $0 \leq i < h-1, 0 \leq j < w'-1$ gilt

$$\begin{aligned}
m_{i+1,j+1} &= \left\lceil \frac{w}{w'}((j+1)-(i+1)+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}((j+1)-(i+1)) \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{w}{w'}(j-i+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-i) \right\rceil = m_{ij}.
\end{aligned}$$

Ad (C3): Für $0 \leq j < w'$ ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{h-1} m_{ij} &\stackrel{(5.8)}{=} \left\lceil \frac{w}{w'}(j+1) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(j-h+1) \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{hw+w(j-h+1)}{w'} \right\rceil - \left\lceil \frac{w(j-h+1)}{w'} \right\rceil \stackrel{(5.10)}{\leq} \left\lceil \frac{hw}{w'} \right\rceil \leq h'.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, da laut Voraussetzung $h' \geq \frac{hw}{w'}$ ist und $h' \in \mathbb{N}$.

Ad (C4): Für $0 \leq i < h$ gilt

$$\sum_{j=0}^{w'-1} m_{ij} \stackrel{(5.9)}{=} \left\lceil \frac{w}{w'}(w'-i) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(-i) \right\rceil = w + \left\lceil \frac{w}{w'}(-i) \right\rceil - \left\lceil \frac{w}{w'}(-i) \right\rceil = w.$$

Im folgenden beweisen wir nun, daß für die auf der Matrix $M_{h \times w'}$ basierende Einbettung, die im Satz angegebenen oberen Schranken für die Kantenauslastung und die Kantenstreckung gelten. Dazu betrachten wir zwei Knoten (a_1, b_1) und (a_2, b_2) , die im $h \times w$ Gitter G adjazent sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $a_1 \leq a_2$ und $b_1 \leq b_2$ gilt. Außerdem definieren wir (a'_1, b'_1) als Bild von (a_1, b_1) und (a'_2, b'_2) als Bild von (a_2, b_2) bezüglich der durch die Formeln (5.4) und (5.5) definierten Abbildung. Das heißt, (a'_1, b'_1) und (a'_2, b'_2) sind Knoten des $h' \times w'$ Gitters H . Um sicherzustellen, daß zwischen (a'_1, b'_1) und (a'_2, b'_2) ein kürzester Weg der Länge kleiner gleich $\lceil w/w' \rceil + 1$ existiert, zeigen wir, daß für alle in G adjazenten Knoten (a_1, b_1) und (a_2, b_2) gilt: $\delta \leq \lceil w/w' \rceil + 1$, mit $\delta = |b'_1 - b'_2| + |a'_1 - a'_2|$. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle, abhängig davon ob (a_1, b_1) und (a_2, b_2) durch eine horizontale oder durch eine vertikale Kante in G miteinander verbunden sind. Für alle durch die Bilder der Knoten (a_1, b_1) und (a_2, b_2) auftretenden Unterfälle geben wir dann das zu verwendende kürzeste-Wege-Routing-Schema an.

1. $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2 - 1$. Das heißt, (a_1, b_1) und (a_2, b_2) liegen in derselben Zeile von G .

Auf Grund von Definition (5.4) gilt

$$\sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1j} < b_1 + 1 \leq \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1j} \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{b'_2-1} m_{a_1j} < b_1 + 2 \leq \sum_{j=0}^{b'_2} m_{a_1j}. \quad (5.11)$$

Somit folgt

$$\sum_{j=0}^{b'_2} m_{a_1j} > \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1j} \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1j} > \sum_{j=0}^{b'_2-1} m_{a_1j} - 1.$$

Da $w > w'$ ist, können wir mit **(C1)** folgern, daß $m_{ij} \geq 1$ gilt. Somit ist entweder $b'_1 = b'_2$ oder $b'_1 = b'_2 - 1$. Wir unterscheiden die folgenden zwei Unterfälle:

(a) $b'_1 = b'_2$. Das heißt, (a'_1, b'_1) und (a'_2, b'_2) liegen in derselben Spalte von H .

i. b'_1 ist gerade.

$$\begin{aligned} a'_1 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + b_1 - \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1j}, \\ a'_2 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + b_1 + 1 - \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1j}. \end{aligned}$$

Wir erhalten $a'_1 = a'_2 - 1$ und somit ist $\delta = 1$.

Routing: $(a'_1, b'_1) \rightarrow (a'_1 + 1, b'_1) = (a'_2, b'_2)$.

ii. b'_1 ist ungerade.

$$\begin{aligned} a'_1 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1 j} - b_1 - 1, \\ a'_2 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1 j} - (b_1 + 1) - 1. \end{aligned}$$

Wir erhalten $a'_1 = a'_2 + 1$ und damit ist $\delta = 1$.

Routing: $(a'_1, b'_1) \rightarrow (a'_1 - 1, b'_1) = (a'_2, b'_2)$.

- (b) $b'_1 = b'_2 - 1$. Das heißt, (a'_1, b'_1) und (a'_2, b'_2) liegen in verschiedenen Spalten von H .
Setzen wir $b'_1 = b'_2 - 1$ in (5.11) ein, erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1 j} - 1 < b_1 + 1 \leq \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1 j}.$$

Somit gilt $b_1 = \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1 j} - 1$, da laut **(C1)** $m_{ij} \in \{\lfloor w/w' \rfloor, \lceil w/w' \rceil\}$.

i. b'_1 ist gerade (b'_2 ist ungerade).

$$\begin{aligned} a'_1 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + b_1 - \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1 j} = \sum_{i=0}^{a_1} m_{ib'_1} - 1, \\ a'_2 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{i,b'_1+1} + \sum_{j=0}^{b'_1+1} m_{a_1 j} - b_2 - 1 = \sum_{i=0}^{a_1} m_{ib'_1+1} - 1 \\ &\stackrel{(5.6)}{=} m_{0,b'_1+1} + \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} - 1. \end{aligned}$$

Somit ist $|a'_1 - a'_2| = |m_{a_1 b'_1} - m_{0, b'_1+1}| \leq 1$ und $\delta \leq 2$.

Routing:

$$(a'_1, b'_1) \rightarrow (a'_1, b'_1 + 1) = (a'_2, b'_2) \quad \text{falls } a'_1 = a'_2,$$

$$(a'_1, b'_1) \rightarrow (a'_1 + 1, b'_1) \rightarrow (a'_1 + 1, b'_1 + 1) = (a'_2, b'_2) \quad \text{falls } a'_1 + 1 = a'_2,$$

$$(a'_1, b'_1) \rightarrow (a'_1, b'_1 + 1) \rightarrow (a'_1 - 1, b'_1 + 1) = (a'_2, b'_2) \quad \text{falls } a'_1 - 1 = a'_2.$$

ii. b'_1 ist ungerade (b'_2 ist gerade).

$$a'_1 \stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1 j} - b_1 - 1 = \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1},$$

$$\begin{aligned} a'_2 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1+1} + b_2 - \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1 j} = \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1+1} \\ &\stackrel{(5.6)}{=} m_{0,b'_1+1} + \sum_{i=0}^{a_1-2} m_{ib'_1}. \end{aligned}$$

Darum gilt $|a'_1 - a'_2| = |m_{a_1-1,b'_1} - m_{0,b'_1+1}| \leq 1$ und $\delta \leq 2$.

Routing:

$$(a'_1, b'_1) \rightarrow (a'_1, b'_1 + 1) = (a'_2, b'_2) \quad \text{falls } a'_1 = a'_2,$$

$$(a'_1, b'_1) \rightarrow (a'_1, b'_1 + 1) \rightarrow (a'_1 + 1, b'_1 + 1) = (a'_2, b'_2) \quad \text{falls } a'_1 + 1 = a'_2,$$

$$(a'_1, b'_1) \rightarrow (a'_1 - 1, b'_1) \rightarrow (a'_1 - 1, b'_1 + 1) = (a'_2, b'_2) \quad \text{falls } a'_1 - 1 = a'_2.$$

2. $a_1 = a_2 - 1$ und $b_1 = b_2$. Das heißt, (a_1, b_1) und (a_2, b_2) liegen in verschiedenen Zeilen von G .

Auf Grund von Definition (5.4) gilt

$$\sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1 j} < b_1 + 1 \leq \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1 j} \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{b'_2-1} m_{a_1+1, j} < b_1 + 1 \leq \sum_{j=0}^{b'_2} m_{a_1+1, j}. \quad (5.12)$$

Gemäß Gleichung (5.7) gilt

$$\sum_{j=0}^{b'_2-1} m_{a_1+1, j} = m_{a_1+1, 0} + \sum_{j=0}^{b'_2-2} m_{a_1 j} \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{b'_2} m_{a_1+1, j} = m_{a_1+1, 0} + \sum_{j=0}^{b'_2-1} m_{a_1 j}.$$

Somit folgt

$$\sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1 j} < m_{a_1+1, 0} + \sum_{j=0}^{b'_2-1} m_{a_1 j} \quad \text{und} \quad m_{a_1+1, 0} + \sum_{j=0}^{b'_2-2} m_{a_1 j} < \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1 j}.$$

Da sich laut **(C1)** die Einträge m_{ij} der Matrix nur um höchstens den Betrag eins unterscheiden, folgt $b'_2 \geq b'_1 - 1$ und $b'_1 \geq b'_2 - 1$. Somit gilt $|b'_1 - b'_2| \leq 1$. Wir unterscheiden die folgenden drei Unterfälle:

- (a) $b'_1 = b'_2$. Das heißt, (a'_1, b'_1) und (a'_2, b'_2) liegen in derselben Spalte von H .

i. b'_1 ist gerade.

$$\begin{aligned} a'_1 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + b_1 - \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1 j}, \\ a'_2 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1} m_{ib'_1} + b_1 - \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1+1, j} \end{aligned}$$

$$\stackrel{(5.7)}{=} \sum_{i=0}^{a_1} m_{ib'_1} + b_1 - m_{a_1+1,0} - \sum_{j=0}^{b'_1-2} m_{a_1j}.$$

Damit ist $a'_2 - a'_1 = m_{a_1b'_1} - m_{a_1+1,0} + m_{a_1,b'_1-1} \leq \lceil w/w' \rceil + 1$ und wir erhalten $\delta \leq \lceil w/w' \rceil + 1$.

ii. b'_1 ist ungerade.

$$\begin{aligned} a'_1 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1j} - b_1 - 1, \\ a'_2 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1} m_{ib'_1} + \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1+1,j} - b_1 - 1 \\ &\stackrel{(5.7)}{=} \sum_{i=0}^{a_1} m_{ib'_1} + m_{a_1+1,0} + \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1j} - b_1 - 1. \end{aligned}$$

Damit ist $a'_2 - a'_1 = m_{a_1b'_1} + m_{a_1+1,0} - m_{a_1b'_1} = m_{a_1+1,0} \leq \lceil w/w' \rceil$. Wir erhalten $\delta \leq \lceil w/w' \rceil$.

In beiden Fällen (i. und ii.) routen wir wie folgt:

Routing:

$$(a'_1, b'_1) \rightarrow (a'_1 + 1, b'_1) \rightarrow (a'_1 + 2, b'_1) \rightarrow \cdots \rightarrow (a'_1 + \delta, b'_1) = (a'_2, b'_2).$$

(b) $b'_1 = b'_2 - 1$. Das heißt, (a'_1, b'_1) liegt in H eine Spalte links von (a'_2, b'_2) .

Setzen wir $b'_1 = b'_2 - 1$ in (5.12) ein, erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1+1,j} \stackrel{(5.7)}{=} m_{a_1+1,0} + \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1j} < b_1 + 1 \leq \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1j}.$$

Somit gilt $b_1 = \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1j} - 1 = \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1+1,j}$, da laut (**C1**) $m_{ij} \in \{\lfloor w/w' \rfloor, \lceil w/w' \rceil\}$.

i. b'_1 ist gerade (b'_2 ist ungerade).

$$\begin{aligned} a'_1 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + b_1 - \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1j} = \sum_{i=0}^{a_1} m_{ib'_1} - 1, \\ a'_2 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1} m_{i,b'_1+1} + \sum_{j=0}^{b'_1+1} m_{a_1+1,j} - b_1 - 1 = \sum_{i=0}^{a_1+1} m_{i,b'_1+1} - 1 \\ &\stackrel{(5.6)}{=} m_{0,b'_1+1} + \sum_{i=0}^{a_1} m_{ib'_1} - 1. \end{aligned}$$

Damit ist $a'_2 - a'_1 = m_{0,b'_1+1} \leq \lceil w/w' \rceil$. Wir erhalten $\delta \leq \lceil w/w' \rceil + 1$.

ii. b'_1 ist ungerade (b'_2 ist gerade).

$$\begin{aligned} a'_1 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1 j} - b_1 - 1 = \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1}, \\ a'_2 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1} m_{i,b'_1+1} + b_1 - \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1+1,j} = \sum_{i=0}^{a_1} m_{i,b'_1+1} \\ &\stackrel{(5.6)}{=} m_{0,b'_1+1} + \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1}. \end{aligned}$$

Damit ist $a'_2 - a'_1 = m_{0,b'_1+1} \leq \lceil w/w' \rceil$. Wir erhalten $\delta \leq \lceil w/w' \rceil + 1$.

In beiden Fällen (i. und ii.) routen wir wie folgt:

Routing:

$$\begin{aligned} (a'_1, b'_1) &\rightarrow (a'_1, b'_1 + 1) \rightarrow (a'_1 + 1, b'_1 + 1) \rightarrow (a'_1 + 2, b'_1 + 1) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow (a'_1 + \delta - 1, b'_1 + 1) = (a'_2, b'_2). \end{aligned}$$

- (c) $b'_1 = b'_2 + 1$. Das heißt, (a'_1, b'_1) liegt in H eine Spalte rechts von (a'_2, b'_2) .
Wir setzen $b'_1 = b'_2 + 1$ in (5.12) ein und erhalten

$$\sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1 j} < b_1 + 1 \leq \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1+1,j} \stackrel{(5.7)}{=} m_{a_1+1,0} + \sum_{j=0}^{b'_1-2} m_{a_1 j}.$$

Somit gilt $b_1 = \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1 j} = \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1+1,j} - 1$ und $m_{a_1, b'_1-1} = \lfloor w/w' \rfloor$, da laut **(C1)** $m_{ij} \in \{\lfloor w/w' \rfloor, \lceil w/w' \rceil\}$.

i. b'_1 ist gerade (b'_2 ist ungerade).

$$\begin{aligned} a'_1 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + b_1 - \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1 j} = \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} \\ &\stackrel{(5.6)}{=} m_{0b'_1} + \sum_{i=0}^{a_1-2} m_{i,b'_1-1}, \\ a'_2 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1} m_{i,b'_1-1} + \sum_{j=0}^{b'_1-1} m_{a_1+1,j} - b_1 - 1 = \sum_{i=0}^{a_1} m_{i,b'_1-1}. \end{aligned}$$

Damit ist $a'_2 - a'_1 = m_{a_1, b'_1-1} + m_{a_1-1, b'_1-1} - m_{0b'_1} = \lfloor w/w' \rfloor + m_{a_1-1, b'_1-1} - m_{0b'_1} \leq \lceil w/w' \rceil$. Wir erhalten $\delta \leq \lceil w/w' \rceil + 1$.

ii. b'_1 ist ungerade (b'_2 ist gerade).

$$a'_1 \stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{ib'_1} + \sum_{j=0}^{b'_1} m_{a_1 j} - b_1 - 1 = \sum_{i=0}^{a_1} m_{ib'_1} - 1$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{(5.6)}{=} m_{0b'_1} + \sum_{i=0}^{a_1-1} m_{i,b'_1-1} - 1, \\
 a'_2 &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{i=0}^{a_1} m_{i,b'_1-1} + b_1 - \sum_{j=0}^{b'_1-2} m_{a_1+1,j} = \sum_{i=0}^{a_1+1} m_{i,b'_1-1} - 1.
 \end{aligned}$$

Damit ist $a'_2 - a'_1 = m_{a_1+1,b'_1-1} + m_{a_1,b'_1-1} - m_{0b'_1} = m_{a_1+1,b'_1-1} + \lfloor w/w' \rfloor - m_{0b'_1} \leq \lceil w/w' \rceil$. Wir erhalten $\delta \leq \lceil w/w' \rceil + 1$.

In beiden Fällen (i. und ii.) routen wir wie folgt:

Routing:

$$\begin{aligned}
 (a'_1, b'_1) &\rightarrow (a'_1, b'_1 - 1) \rightarrow (a'_1 + 1, b'_1 - 1) \rightarrow (a'_1 + 2, b'_1 - 1) \rightarrow \dots \\
 &\dots \rightarrow (a'_1 + \delta - 1, b'_1 - 1) = (a'_2, b'_2).
 \end{aligned}$$

In der obigen Fallunterscheidung haben wir gezeigt, daß zwischen den Bildern von in G adjazenten Knoten immer ein kürzester Weg der Länge kleiner gleich $\lceil w/w' \rceil + 1$ existiert. Zur Festlegung des Routing-Schemas haben wir dann jeweils einen dieser kürzesten Wege ausgewählt. Im folgenden untersuchen wir die Kantenauslastung unseres Routing-Schemas.

Betrachten wir zunächst das Routing horizontaler Kanten des Gitters G . Wie in der obigen Fallunterscheidung gezeigt (siehe Fall 1.) werden horizontale Kanten von G in H höchstens auf die Länge zwei gestreckt. Das von uns gewählte Routing-Schema besitzt darüber hinaus die Eigenschaft, daß jede Kante des Gastgebers zu höchstens einem Weg gehört, der zum Routen horizontaler Kanten des Gastes verwandt wird. Das heißt, allein aus dem Routing der horizontalen Kanten des Gastes ergibt sich eine Kantenauslastung von eins. In Abbildung 5.3 haben wir, wiederum am Beispiel der Einbettung des 5×31 Gitters in das 12×13 Gitter, das Routing der horizontalen Kanten des Gastes dargestellt (siehe auch Abbildung 5.2).

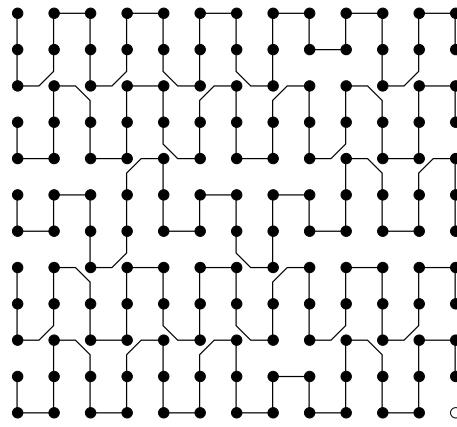


Abb. 5.3: Beispiel für das Routing der horizontalen Kanten des 5×31 Gitters G bei einer Einbettung von G in das 12×13 Gitter H . Das Punkteraster repräsentiert wiederum die Knoten von H .

Betrachten wir nun das Routing vertikaler Kanten des Gitters G . Im folgenden zeigen wir, daß beim Routen der vertikalen Kanten von G jede vertikale Kante des Gitters H höchstens $\lceil w/w' \rceil$ -mal und jede horizontale Kante von H höchstens einmal verwandt wird.

Sei $e = \{(a', b'), (a' + 1, b')\}$ eine beliebige vertikale Kante von H . Auf Grund der Eigenschaft **(C1)** existieren in der Einbettungsmatrix höchstens zwei verschiedene Einträge, nämlich $\lfloor w/w' \rfloor$ und $\lceil w/w' \rceil$. (Wenn w durch w' teilbar ist, sind alle Einträge der Matrix gleich.)

Zunächst betrachten wir den Fall, daß das Urbild von e zu einer Kette gehört, wobei $\lceil w/w' \rceil$ Knoten dieser Kette auf die Spalte b' von H abgebildet werden. Nehmen wir nun an, daß von diesen $\lceil w/w' \rceil$ Knoten μ Knoten, $0 \leq \mu \leq \lceil w/w' \rceil$, oberhalb des Knotens (a', b') liegen (inklusiv (a', b')). Somit liegen $\lceil w/w' \rceil - \mu$ Knoten dieser $\lceil w/w' \rceil$ Knoten unterhalb von Knoten $(a' + 1, b')$. Abbildung 5.4 illustriert diesen Fall.

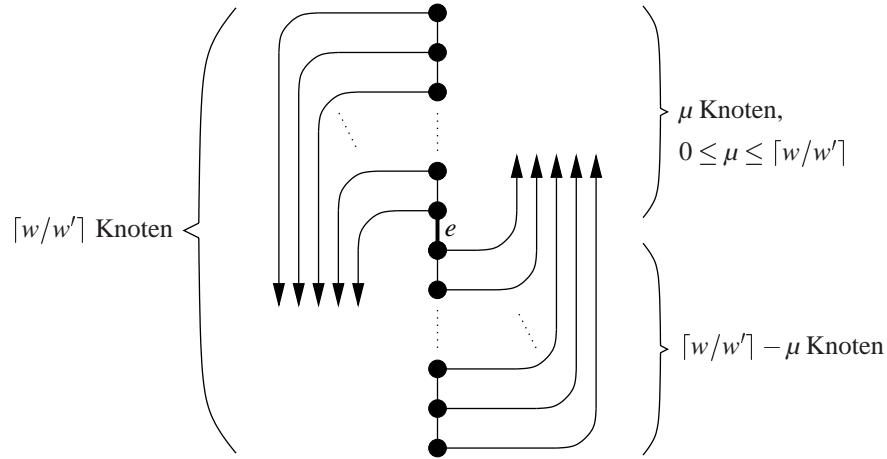


Abb. 5.4: Illustration der Kantenauslastung einer vertikalen Kante von H , wenn nur vertikale Kanten von G geroutet werden (1. Fall).

Im *Worst-Case* werden beim Routen der vertikalen Kanten von G die Urbilder aller μ „oberen“ Knoten über die Kante e mit ihren entsprechenden Nachbarn, die auf die darunter liegende Kette abgebildet werden, verbunden. Außerdem werden dabei die Urbilder der $\lceil w/w' \rceil - \mu$ „unteren“ Knoten über die Kante e mit ihren entsprechenden Nachbarn, die auf die darüber liegende Kette abgebildet werden, verbunden. Dieser *Worst-Case* wird in Abbildung 5.4 durch die Pfeile verdeutlicht. Damit werden insgesamt höchstens $\lceil w/w' \rceil$ vertikale Kanten von G über die Kante e geroutet.

Betrachten wir nun den Fall, daß das Urbild von e zu einer Kette gehört, wobei $\lceil w/w' \rceil - 1$ Knoten dieser Kette auf die Spalte b' von H abgebildet werden. Es gilt: w' teilt nicht w . Nehmen wir nun analog zum ersten Fall an, daß von diesen $\lceil w/w' \rceil - 1$ Knoten μ Knoten, $0 \leq \mu \leq \lceil w/w' \rceil - 1$, oberhalb des Knotens (a', b') liegen (inklusiv (a', b')). Somit liegen $\lceil w/w' \rceil - 1 - \mu$ Knoten dieser $\lceil w/w' \rceil - 1$ Knoten unterhalb von Knoten $(a' + 1, b')$. Abbildung 5.5 illustriert

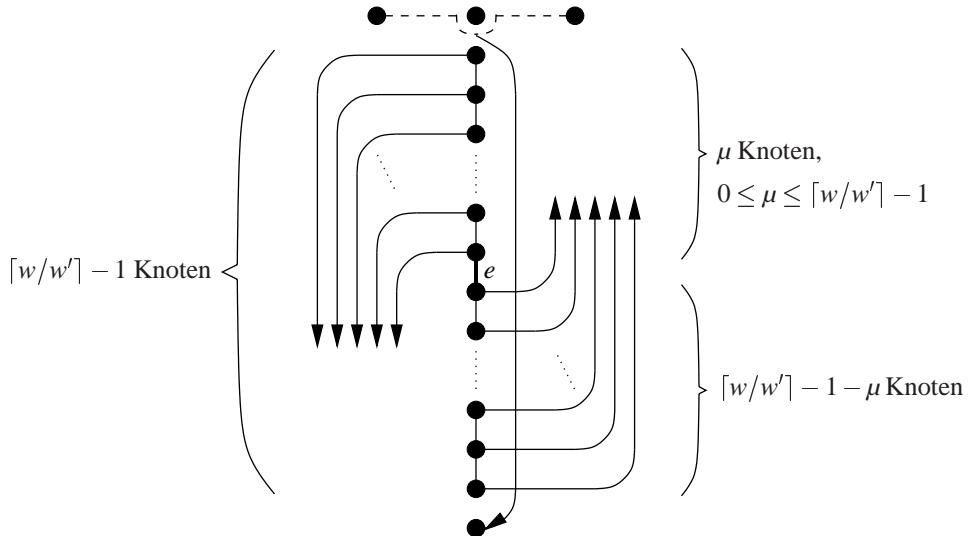


Abb. 5.5: Illustration der Kantenauslastung einer vertikalen Kante von H , wenn nur vertikale Kanten von G geroutet werden (2. Fall).

diesen Fall. Im *Worst-Case* werden beim Routen der vertikalen Kanten von G analog zum ersten Fall insgesamt höchstens $[w/w'] - 1$ vertikale Kanten von G über die Kante e geroutet. Dieser *Worst-Case* wird in Abbildung 5.5 durch die Pfeile verdeutlicht, die von den insgesamt $[w/w'] - 1$ Knoten ausgehen. Des weiteren kann eventuell noch eine weitere Kante von G über die Kante e geroutet werden (siehe Fall 2(b) beziehungsweise Fall 2(c) der obigen Fallunterscheidung). Der zu routende Weg geht von einem Knoten derselben Kette aus, der auf Spalte $b' - 1$ oder Spalte $b' + 1$ direkt über den $[w/w'] - 1$ Knoten abgebildet wurde. Außerdem wird in diesem Fall auch eine horizontale Kante von H zum Routen genutzt. In Abbildung 5.5 wird dieser Weg durch einen zusätzlichen Pfeil verdeutlicht. Insgesamt werden also höchstens $[w/w']$ vertikale Kanten von G über die Kante e geroutet.

Es verbleibt nun noch den Fall zu untersuchen, wenn das Urbild von e zu keiner Kette gehört. Dieser Fall kann analog zu den ersten beiden Fällen behandelt werden. Es ergibt sich dabei, daß höchstens $[w/w']$ vertikale Kanten von G über die Kante e geroutet werden.

Fassen wir unsere Betrachtungen zusammen. Unter Verwendung des oben definierten Schemas wird beim Routen der horizontalen Kanten von G jede Kante von H höchstens einmal genutzt. Routen wir vertikale Kanten von G , wird jede horizontalen Kante von H höchstens einmal und jede vertikale Kante von H höchstens $[w/w']$ -mal verwandt. Die Kantenauslastung horizontaler Kanten von H beträgt demnach höchstens zwei, die der vertikalen Kanten höchstens $[w/w'] + 1$. ■

Beweis der oberen Schranke aus Satz 5.1: Betrachten wir nun also wieder den Gast $G = h \times w$ und den Gastgeber $H = h' \times w'$, wobei wir $h' < h \leq w < w'$ voraussetzen (das heißt, H besitzt einen kleineren Aspekt-Ratio als G). Vertauschen wir bei G den Parameter h mit w und bei H den Parameter h' mit w' , können wir direkt Satz 5.3 anwenden. Damit folgt, daß G mit einer Kantenauslastung von höchstens $\lceil h/h' \rceil + 1$ in H eingebettet werden kann. ■

5.3 Betrachtung der Kantenstreckung

Wir beweisen den Satz 5.2, indem wir zunächst mittels des Korollar 3.1 aus Abschnitt 3.2 zeigen, daß $\lceil h/h' \rceil$ eine untere Schranke für die Kantenstreckung ist. Anschließend beschreiben wir eine Technik zur Einbettung von $h \times w$ Gittern G in $h' \times w'$ Gitter H , deren Kantenstreckung diese untere Schranke erreicht. Diese Technik basiert wiederum auf der Konstruktion einer Matrix.

Beweis der unteren Schranke aus Satz 5.2: Sei $G = (V, E)$ ein zweidimensionales $h \times w$ Gitter und $H = (V', E')$ ein beliebiges seiner idealen $h' \times w'$ Gitter mit $2 \leq h' < h \leq w < w'$.

Mit unserer Methode aus Abschnitt 3.2 erhalten wir den Ansatz (siehe Korollar 3.1)

$$\text{dil}(G, H) \geq \max_{1 \leq l < |V'|} \max_{\substack{D \subset V' \\ |D|=l}} \min_{l - |V'| + |V| \leq m \leq l} \min\{d : |\bigcup_{i=1}^d \delta_H^i(D)| \geq \Gamma_G(m)\}.$$

Da H ein ideales Gitter für G ist gilt $|V'| - |V| < h'$. Somit folgt

$$\text{dil}(G, H) \geq \max_{1 \leq l < |V'|} \max_{\substack{D \subset V' \\ |D|=l}} \min_{l - h' < m \leq l} \min\{d : |\bigcup_{i=1}^d \delta_H^i(D)| \geq \Gamma_G(m)\}. \quad (5.13)$$

Auf Grund der in Abschnitt 3.1 dargestellten Ergebnisse wissen wir, daß die Ordnung F eine optimale Ordnung für das knotenisoperimetrische Problem auf zweidimensionalen Gittern ist. Somit können wir folgern, daß für ein beliebiges zweidimensionales $\bar{h} \times \bar{w}$ Gitter $\tilde{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ mit $\bar{h} \leq \bar{w}$ für alle Kardinalitäten l gilt: $\Gamma_{\tilde{G}}(l) \leq \bar{h}$. Insbesondere gilt

$$\Gamma_{\tilde{G}}(l) = \bar{h}, \quad \text{für alle } l \text{ mit } \frac{(\bar{h}-1)(\bar{h}-2)}{2} < l < \bar{h}\bar{w} - \frac{\bar{h}(\bar{h}-1)}{2}. \quad (5.14)$$

Um eine möglichst scharfe untere Abschätzung der Ungleichung (5.13) zu erhalten, wählen wir die Menge $D \subset V'$ mit $|D|=l$ für alle $l \in \{1, \dots, |V'| - 1\}$ gerade so, daß sie dem initialen Segment der Ordnung F entspricht. Mit dieser Festlegung gilt dann

$$\min\{d : |\bigcup_{i=1}^d \delta_H^i(D)| \geq \Gamma_G(m)\} = \left\lceil \frac{\Gamma_G(m)}{h'} \right\rceil. \quad (5.15)$$

Zur Veranschaulichung dieser Gleichung betrachten wir wiederum die Abbildung 4.9 aus Abschnitt 4.4.3. Sowohl in dem durch diese Abbildung illustrierten Beweis, als auch in unserem hier verfolgten Ansatz, bestimmen wir nach der Festlegung der Menge D entsprechend der Ordnung F die Breite des schmalsten Streifens $W_1(m)$ in H , der groß genug ist, $\Gamma_G(m)$ Knoten aufzunehmen. Da in einem entsprechenden Streifen der Breite eins nach (5.14) höchstens h' Knoten plaziert werden können, gilt die obige Gleichung.

Insgesamt erhalten wir also nun aus (5.13) - (5.15)

$$\text{dil}(G, H) \geq \max_{1 \leq l < h'w'} \min_{l-h' < m \leq l} \left\lceil \frac{\Gamma_G(m)}{h'} \right\rceil. \quad (5.16)$$

Wir wählen nun ein festes l . Das heißt, wir setzen $l = \lceil h'w'/2 \rceil$. Im folgenden zeigen wir, daß für dieses feste l der Wert $\Gamma_G(m)$ für alle m mit $l-h' < m \leq l$ maximal wird (das heißt, es gilt $\Gamma_G(m) = h$). Um dies zu beweisen, setzen wir die entsprechenden Werte in (5.14) ein. Somit ist $\Gamma_G(m) = h$, falls

$$\frac{(h-1)(h-2)}{2} < m < hw - \frac{h(h-1)}{2}. \quad (5.17)$$

Die Tatsache, daß diese Ungleichungen gelten, können wir überprüfen, indem wir die Voraussetzungen an die Parameter h, w, h' und w' , also $2 \leq h' < h \leq w < w'$ und $hw \leq h'w'$, ausnutzen. Befassen wir uns zunächst mit der linken Ungleichung in (5.17). Es gilt

$$\begin{aligned} m &> l-h' = \left\lceil \frac{h'w'}{2} \right\rceil - h' \geq \frac{h'w'}{2} - h' \geq \frac{hw}{2} - h' \\ &> \frac{hw}{2} - h \geq \frac{h^2}{2} - h = \frac{h(h-2)}{2} > \frac{(h-1)(h-2)}{2}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die rechte Ungleichung in (5.17). Es gilt

$$\begin{aligned} m &\leq l = \left\lceil \frac{h'w'}{2} \right\rceil < \frac{h'w'+2}{2} \leq \frac{hw+h'+1}{2} \leq \frac{hw+h}{2} \\ &= hw - \frac{hw-h}{2} \leq hw - \frac{h^2-h}{2} = hw - \frac{h(h-1)}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist $\Gamma_G(m) = h$ für alle m mit $l-h' < m \leq l$ und $l = \lceil h'w'/2 \rceil$. Wir können somit folgern

$$\max_{1 \leq l < h'w'} \min_{l-h' < m \leq l} \left\lceil \frac{\Gamma_G(m)}{h'} \right\rceil \stackrel{l=\lceil h'w'/2 \rceil}{\geq} \min_{l-h' < m \leq l} \left\lceil \frac{\Gamma_G(m)}{h'} \right\rceil = \left\lceil \frac{h}{h'} \right\rceil. \quad (5.18)$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\text{dil}(G, H) \stackrel{(5.16)}{\geq} \max_{1 \leq l < h'w'} \min_{l-h' < m \leq l} \left\lceil \frac{\Gamma_G(m)}{h'} \right\rceil \stackrel{(5.18)}{\geq} \left\lceil \frac{h}{h'} \right\rceil.$$

■

Beweis der oberen Schranke aus Satz 5.2: Wir verwenden sogenannte elliptische Einbettungsmatrizen, die auf eine Idee von Huang, Liu und Verma [76] basieren. Der Zusammenhang zwischen diesen Matrizen und einer Einbettung eines $h \times w$ Gitters in das $w \times h$ Gitter ist analog zu dem den wir in Abschnitt 5.2 vorgestellt haben. Wenn wir im folgenden von der Kantenstreckung sprechen, so beziehen wir uns dabei immer auf ein Routing über kürzeste Wege.

Betrachten wir zunächst die Konstruktion einer Matrix $M_{h \times h}$, die eine Einbettung des $h \times w$ Gitters in das $w \times h$ Gitter beschreibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $h \leq w$. Sei $k = w \bmod h$. Wir setzen außerdem voraus, daß $\text{gg}(h, k) = 1$ gilt.¹ Die zu konstruierende Matrix soll die Bedingungen **(C1)**, **(C3)** und **(C4)** aus dem Beweis des Satzes 5.3 erfüllen, im allgemeinen aber nicht die Bedingung **(C2)**. Dazu definieren wir die oberste Zeile der Matrix, die genau k Einträge mit dem Wert $\lceil w/h \rceil$ und $h - k$ Einträge mit dem Wert $\lfloor w/h \rfloor$ besitzen muß. Diese Einträge verteilen wir so auf die oberste Zeile der Matrix, daß jede maximale Teilkette von aufeinanderfolgenden $\lceil w/h \rceil$ -beziehungsweise $\lfloor w/h \rfloor$ -Werten von gerader Länge ist (wobei wir die Einträge am Rand nicht beachten). Erfüllt eine Zeile diese Eigenschaft, so nennen wir sie *even-gapped*. Betrachten wir hierzu ein Beispiel mit $h = 13$ und $w = 31$. Die erste der folgenden Zeilen ist even-gapped, die zweite nicht:

$$(3, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2), \quad (3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2).$$

Aus einer even-gapped Zeile konstruieren wir nun die weiteren Zeilen der Einbettungsmatrix, wobei wir jeweils zwei benachbarte $\lceil w/h \rceil$ -Werte zu einem Paar zusammenfassen. Der linke Wert jedes Paares wird in der darunter liegenden Zeile um eine Position nach links verschoben, bis der Wert den linken Rand erreicht. Danach wird der Wert einmal nach unten und dann nach rechts verschoben, bis die unterste Zeile erreicht wird. Der rechte Wert jedes Paares wird analog zunächst nach rechts und dann nach links verschoben. Ist k ungerade, so verbleibt ein einzelner $\lceil w/h \rceil$ -Wert, den wir links in der even-gapped Zeile plazieren. Dieser Wert wird von der linken Position der obersten Zeile diagonal zur rechten Position der untersten Zeile weitergereicht. In Abbildung 5.6 ist die Konstruktion der Matrix für $h = 13$ und $w = 31$ dargestellt. Der Weg, den ein $\lceil w/h \rceil$ -Wert beschreibt, ist dabei hervorgehoben. Von diesem Weg ist auch der Name „elliptische Matrix“ abgeleitet, da jeder der zu Paaren zusammengefaßten Werte eine Art Ellipse in der Matrix beschreibt. Huang et al. [76] zeigten, daß die Einbettung, die sich aus einer elliptischen Matrix $M_{h \times h}$ ergibt, das $h \times w$ Gitter in das $w \times h$ Gitter mit Kantenstreckung kleiner gleich $\lceil w/h \rceil$ einbettet.

Durch eine bestimmte (hier allerdings nicht näher beschriebene) Konstruktion einer entsprechenden *even-gapped* Zeile, ist es möglich, daß einerseits die oberste Zeile der elliptischen Matrix *even-gapped* ist, und sich andererseits die Summen beliebiger, gleich langer Teilspalten der elliptischen Matrix höchstens um den Wert eins unterscheiden. Das heißt, es gilt für die Matrix

¹Mit $\text{gg}(h, k)$ sei der größte gemeinsame Teiler von h und k bezeichnet.

3	2	2	2	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2
2	3	2	2	2	3	2	2	3	3	2	2	3	2
2	2	3	3	2	2	2	3	3	2	2	2	3	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	3	2	2	3
2	3	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	2	2
3	2	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	2	2
3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2
2	3	3	2	2	2	2	3	3	2	2	2	3	2
2	3	3	2	2	2	2	3	3	2	2	2	3	2
3	2	2	2	3	2	2	2	3	3	2	2	2	2
3	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	2	2	2
2	3	2	2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	3	2	2	2	3	2

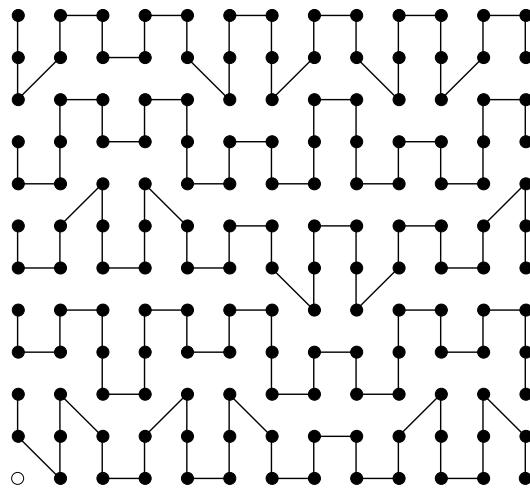


Abb. 5.6: Die elliptische Einbettungsmatrix $M_{13 \times 13}$, die nach dem Algorithmus aus [76] konstruiert wurde (linkes Bild). Mit ihrer Hilfe kann das 13×31 Gitter in das 31×13 Gitter mit Kantenstreckung $\lceil 31/13 \rceil = 3$ eingebettet werden. Mit derselben Kantenstreckung kann aber auch das 5×31 Gitter in das 12×13 Gitter eingebettet werden, wobei nur die oberen 5 Zeilen von $M_{13 \times 13}$ benutzt werden (rechtes Bild).

$M_{h \times h}$ mit den Einträgen m_{ij} , $0 \leq i, j < h$:

$$\left| \sum_{i=0}^l m_{ij} - \sum_{i=0}^l m_{ij'} \right| \leq 1 \quad \text{für alle } j, j', l \in \{0, \dots, h-1\}. \quad (5.19)$$

Huang et al. präsentierte in [76] einen Algorithmus, der, falls $\text{gg}(h, k) = 1$ gilt, elliptische Matrizen berechnet, die der Bedingung (5.19) genügen. Die Matrix aus Abbildung 5.6 wurde beispielsweise mit Hilfe dieses Algorithmus konstruiert. Durch „Abschneiden“ und „Spiegeln“ einer solchen elliptischen Matrix ist es möglich, eine Einbettungsmatrix für jede beliebige Instanz von Gast und Gastgeber zu entwerfen. Zum Beispiel erhalten wir, falls wir nur die obersten l Zeilen der Matrix verwenden, eine Einbettung des $l \times w$ Gitters in das $\lceil lw/h \rceil \times h$ Gitter, die eine maximale Kantenstreckung von $\lceil w/h \rceil$ aufweist. Das rechte Bild in Abbildung 5.6 zeigt dazu ein Beispiel. Die Bedingung (5.19) stellt dabei sicher, daß die der Einbettung zugrunde liegende Knotenabbildung injektiv ist und jedem Knoten des Gastes einen Knoten des Gastgebers zuweist. Des weiteren ist es möglich, die Matrix $M_{h \times h}$ an der Vertikalen oder an der Horizontalen gegebenenfalls mehrfach zu spiegeln. Somit umgehen wir die Bedingung $\text{gg}(h, k) = 1$, die wir zu Beginn forderten. Das heißt, indem wir durch die gerade beschriebene Prozedur „kleinere“ Matrizen zu „größeren“ zusammensetzen, können wir Matrizen zur Einbettung von $h \times w$ Gittern in $w \times h$ Gitter beschreiben, für die $\text{gg}(h, k) > 1$ und die Bedingung (5.19) gilt. Betrachten wir dann wiederum nur die obersten l Zeilen der so konstruierten Matrix, ergeben sich Einbettungen des $l \times w$ Gitters in das $\lceil lw/h \rceil \times h$ Gitter, wobei l, h und w beliebige natürliche Zahlen sind.

Durch Vertauschen der Parameter erhalten wir also Einbettungen jedes $h \times w$ Gitters in jedes seiner idealen $h' \times w'$ Gitter, sofern $w > w'$ gilt. Wir fassen das Ergebnis in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 5.4 (*Huang, Liu, Verma [76]*)

Sei $G = (V, E)$ ein zweidimensionales $h \times w$ Gitter und $H = (V', E')$ ein $h' \times w'$ Gitter mit $hw \leq h'w'$ und $w > w'$. Es gilt:

$$\text{dil}(G, H) \leq \lceil w/w' \rceil.$$

Betrachten wir nun also wieder den Gast $G = h \times w$ und den Gastgeber $H = h' \times w'$, wobei wir $h' < h \leq w < w'$ voraussetzen (das heißt, H besitzt einen kleineren Aspekt-Ratio als G). Vertauschen wir bei G den Parameter h mit w und bei H den Parameter h' mit w' , können wir direkt Satz 5.4 anwenden. Damit folgt, daß G mit einer Kantenstreckung von höchstens $\lceil h/h' \rceil$ in H eingebettet werden kann. ■

5.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir injektive Einbettungen beliebiger zweidimensionaler Gitter in andere zweidimensionale Gitter mit kleinerem Aspekt-Ratio untersucht. Wir konnten untere und obere Schranken für die Kantenauslastung einer entsprechenden Einbettung bestimmen, die maximal um den Wert eins differieren. Die untere Schranke erhielten wir durch die exemplarische Anwendung der von uns in Abschnitt 3.3 entwickelten Methode. Wir vermuten, daß unsere zur Bestimmung der oberen Schranke verwandte Methode für alle denkbaren Fälle optimal ist. Ein Nachweis dieser Hypothese verlangt gegebenenfalls nach einer weiteren Differenzierung der auftretenden Fälle. Des weiteren konnten wir die offene Frage beantworten, ob die in [76] entwickelte Methode bezüglich der Kantenstreckung eine optimale Einbettung für unsere Problemstellung liefert. Diesen Beweis führten wir mit Hilfe der von uns entwickelten Methode aus Abschnitt 3.2.

Die erzielten Ergebnisse runden neben ihrer eigenständigen Bedeutung auch die Betrachtungen in Kapitel 4 ab. Dort verwenden wir unsere Methoden im Rahmen eines zweistufigen Verfahrens zur injektiven Einbettung des n -dimensionalen binären Hypercubes in ein beliebiges zweidimensionales Gitter.

Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, daß die Problemstellung der injektiven Einbettungen beliebiger zweidimensionaler Gitter in andere zweidimensionale Gitter mit großem Aspekt-Ratio von uns ebenfalls untersucht wurde [155, 156] und in der Dissertation von Röttger [125] ausführlich dargestellt ist.

Kapitel 6

Linie versus Ring

In diesem Kapitel erörtern wir die Frage, ob und wie sich die Simulationseigenschaften eines Ringes im Vergleich zu einer Linie (eindimensionales Gitter) für beliebige Bäume ändern. Ein praktischer Hintergrund dieses Problems ist zum Beispiel die Frage, ob sich bei der Wahl einer Architektur für einen Parallelrechner die relativ geringen Mehrkosten eines Ringnetzwerkes im Verhältnis zu einer Linie durch einen signifikanten Gewinn an Kommunikationsgeschwindigkeit auszahlen. In unserem Modell „messen“ wir dies anhand der Kostenmaße zur Beurteilung einer Einbettung eines Graphen G (der dem Kommunikationsmuster eines parallelen Programms entspricht) in einen Ring beziehungsweise in eine Linie. Für die Linie G^1 sind diese Kostenmaße die Bandweite $\text{bw}(G) = \text{dil}(G, G^1)$, die Schnittweite $\text{cw}(G) = \text{con}(G, G^1)$ und die Leitungslänge $\text{wl}(G) = \text{wl}(G, G^1)$ (siehe Kapitel 2). Für den Ring T^1 bezeichnen wir im folgenden die entsprechenden Kostenmaße als *zyklische Bandweite* $\text{cbw}(G) = \text{dil}(G, T^1)$, *zyklische Schnittweite* $\text{ccw}(G) = \text{con}(G, T^1)$ und *zyklische Leitungslänge* $\text{cwl}(G) = \text{wl}(G, T^1)$.

Dieses Kapitel ist wie folgt gegliedert: In Abschnitt 6.1 beschreiben wir bereits bekanntes zu den Themen Bandweite, Schnittweite und Leitungslänge. In Abschnitt 6.2 zeigen wir dann, daß es bei der Einbettung eines beliebigen Baumes bezüglich der Schnittweite keinen Unterschied macht, ob ein Ring oder eine Linie als Gastgebergraph vorliegt. Der Kern dieses Beweises beruht auf einem Algorithmus von Chavez und Trapp [33], der aus einer beliebigen Einbettung eines Baumes in einen Ring, eine Einbettung in die Linie produziert, ohne dabei die Schnittweite zu erhöhen. In Abschnitt 6.3 erweitern wir dieses Ergebnis und zeigen, daß bei der Simulation eines beliebigen Baumes auch für die Leitungslänge der Ring keinen Gewinn gegenüber der Linie bringt.

6.1 Stand der Forschung

Die Bestimmung der Bandweite eines Graphen G , also die Berechnung von $\text{bw}(G)$, fand in der Vergangenheit unter allen Graph-Numerierungsproblemen die größte Aufmerksamkeit. Die ursprüngliche Motivation lag in den sechziger Jahren in der Entwicklung von Codes zur Kodierung von Bildern, die den maximalen absoluten Fehler minimieren [64]. Weitere Anwendungen finden sich beispielsweise beim VLSI-Design [19, 86]. Papadimitriou [116] zeigte, daß das Bandweitenproblem für allgemeine Graphen NP -vollständig ist. Garey et al. [53] bewiesen, daß das Bandweitenproblem für Bäume mit maximalem Knotengrad drei NP -vollständig bleibt und Monien [107] zeigte, daß diese Aussage sogar für *Raupengraphen* mit Haarlänge drei zutrifft. In der Folgezeit gab es eine ganze Reihe von Arbeiten zum Bandweitenproblem, insbesondere zur Entwicklung von Approximationsalgorithmen (siehe [34, 35, 139]). In den letzten Jahren richtete sich das Forschungsinteresse vermehrt auf die zyklische Bandweite [74, 75, 92]. Dabei ist insbesondere zu erwähnen, daß Hromkovič et al. [75] eine hinreichende Bedingung an einen Graphen G formulieren konnten, so daß $\text{bw}(G) = \text{cbw}(G)$ gilt. Diese Bedingung erfüllen beispielsweise der binäre Hypercube, das d -dimensionale Gitter, die X -trees und beliebige Bäume. Damit verspricht also der Ring bei der Simulation all dieser Graphen keinen Gewinn gegenüber der Linie, wenn wir nur das Kostenmaß Bandweite betrachten.

Die Motivation zur Bestimmung der Schnittweite eines Graphen G , also der Berechnung von $\text{cw}(G)$, hat seinen Ursprung im VLSI-Design (siehe [86]). Stockmeyer [55] wies für allgemeine Graphen die NP -Vollständigkeit des Schnittweitenproblems nach. Für einige Graphen sind allerdings die exakten Schnittweiten bekannt. Lengauer [90] bestimmte die exakte Schnittweite für vollständige t -äre Bäume. Yannakakis [142] präsentierte einen $O(n \log n)$ -Algorithmus zur Bestimmung der Schnittweite von beliebigen Bäumen. Weitere Resultate für verschiedene Graphen sind in [114, 126] zu finden. Die Betrachtung der zyklischen Schnittweite für verschiedene Graphen fand erst in den letzten Jahren vermehrt Beachtung. Makinen [100] zeigte, daß das zyklische Schnittweitenproblem NP -vollständig ist. Rolim et al. [126] bestimmten die zyklische Schnittweite für den zweidimensionalen Torus, Vrto et al. [130] entsprechend für zweidimensionale Gitter. Unabhängig voneinander bewiesen Lin et al. [93] und Chavez et al. [33], daß für beliebige Bäume die Schnittweite und die zyklische Schnittweite gleich sind (siehe Abschnitt 6.2).

Das Leitungslängenproblem wird in der Literatur häufig als das *Minimum Sum Problem* referenziert. Garey et al. [55] wiesen hierfür die NP -Vollständigkeit nach. Harper [64] löste das Problem für den Hypercube und zeigte $\text{wl}(\text{Q}^n) = 2^{n-1}(2^n - 1)$. Weitere Arbeiten gab es zur Bestimmung von Schranken für die Leitungslänge beliebiger Bäume (siehe [35]) und d -dimensionaler Gitter mit gleicher Seitenlänge [41, 114]. In [62] wurde gezeigt, daß für den Hypercube $\text{cwl}(\text{Q}^n) = \frac{3}{4}\text{wl}(\text{Q}^n)$ gilt. Somit ist der Ring für den Hypercube bezüglich des Kostenmaßes Leitungslänge ein besserer Gastgebergraph als die Linie. In [149] konnten wir zeigen, daß der Ring für einen beliebigen Baum bezüglich des Kostenmaßes Leitungslänge kein besserer Gastgebergraph als die Linie ist (siehe auch Abschnitt 6.3).

6.2 Die zyklische Schnittweite beliebiger Bäume

Die folgende Beobachtung stellt eine triviale Beziehung zwischen der Schnittweite und der zyklischen Schnittweite dar.

Proposition 6.1 *Sei $G = (V_G, E_G)$ ein Graph. Es gilt:*

$$\text{ccw}(G) \leq \text{cw}(G).$$

Es gilt $\text{ccw}(G) \leq \text{cw}(G)$, da jede Einbettung eines Graphen in eine Linie direkt eine Einbettung in den Ring liefert. Wir zeigen in diesem Abschnitt den folgenden Satz.

Satz 6.1 *(Lin et al. [93], Chavez et al. [33])*

Sei $B = (V_B, E_B)$ ein Baum. Es gilt:

$$\text{ccw}(B) = \text{cw}(B).$$

Auf Grund von Proposition 6.1 ist klar, daß wir lediglich $\text{cw}(B) \leq \text{ccw}(B)$ zu zeigen haben. Die Strategie besteht nun darin, einen Algorithmus zu beschreiben, der aus einer Einbettung eines beliebigen Baumes in den Ring eine Einbettung in die Linie produziert (Abschnitt 6.2.1) ohne das die Schnittweite erhöht wird (Abschnitt 6.2.2).

6.2.1 Ein Einbettungsalgorithmus

Sei B ein beliebiger Baum mit n Knoten, $L = G^1$ eine Linie mit n Knoten und $C = T^1$ der Ring mit n Knoten. Wir benennen im weiteren die Knoten des Ringes entgegen dem Uhrzeigersinn angefangen bei einem beliebigen aber festen Knoten mit $1, \dots, n$. Des weiteren bezeichnen wir die Kanten von C mit e_1, \dots, e_n , wobei e_i für $i \neq 1$ inzident zu den Knoten $i - 1$ und i sei, und e_1 die Knoten 1 und n verbindet.

Als Voraussetzung an den Algorithmus sei eine beliebige aber feste Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) des Baumes B in den Ring C gegeben. Der Algorithmus berechnet nun zunächst einmal für jeden Knoten des Baumes ein geordnetes Integer-Tupel in Abhängigkeit von der Einbettung. Danach wird die Einbettung (ϕ_L, R_{ϕ_L}) des Baumes B in die Linie L dadurch bestimmt, daß der Algorithmus eine Numerierung der Knoten von B entsprechend der lexikographischen Sortierung der Integer-Tupel berechnet.

Im folgenden beschreiben wir, wie für einen Knoten v des Baumes B die beiden Koordinaten des Integer-Tupels gebildet werden. Zunächst einmal bilden wir eine Numerierung ϕ der Knoten von B durch die Komposition von ϕ_C und der Bezeichnung der Knoten von C . Damit gibt $\phi(v)$ die Nummer des Knotens $\phi_C(v)$ in C an. Für alle Knoten v des Baumes B ist die zweite Koordinate des Integer-Tupels, welches v zugewiesen wird, gerade $\phi(v)$. Mit anderen Worten

entspricht die zweite Koordinate des Tupels, welches v zugewiesen wird, der Position des Bildes von v bezüglich ϕ_C in der entgegen dem Uhrzeigersinn gebildeten Ordnung des Ringes C . Für den Knoten r des Baumes für den $\phi(r) = 1$ gilt, nehmen wir im weiteren an, daß er die Wurzel des Baumes B ist.

Zur Beschreibung, wie wir die erste Koordinate des Tupels bilden, benötigen wir noch ein paar zusätzliche Festlegungen. Zunächst einmal definieren wir für einen Weg in B sein Bild in C . Das Routing-Schema der gegebenen Einbettung, R_{ϕ_C} , legt für jede Kante e von B einen Weg p_e in C fest. Folgerichtig bildet man für einen Weg p_B in B sein Bild in C durch die Konkatenation der Wege p_e für jede Kante e in p_B . Für jeden Knoten v des Baumes B sei \vec{p}_v der eindeutige Weg in B von der Wurzel r nach v . Wir berechnen nun die erste Koordinate des Integer-Tupels, welches v zugewiesen wird, bezüglich des Bildes von \vec{p}_v in C . Genauer gesagt, zählen wir, wie oft das Bild von \vec{p}_v die Kante e_1 entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft, minus der Anzahl an Durchläufen im Uhrzeigersinn. Zur Veranschaulichung dieser Berechnung sei gesagt, das im Prinzip nur die Nettoanzahl an Durchläufen der Kante e_1 bezogen auf das Bild des Weges \vec{p}_v in C bestimmt wird. Aus diesem Grund bezeichnen wir die erste Koordinate auch als *Wickelanzahl*, da sie im Prinzip angibt, wie oft das Bild von \vec{p}_v um den Ring C gewickelt wird.

Haben wir für alle Knoten v von B das entsprechende Integer-Tupel bestimmt, so bilden wir eine Numerierung der Knoten und damit eine Einbettung in die Linie durch eine lexikographische Sortierung aller Tupel.

Wir wollen diesen Algorithmus anhand eines Beispiels veranschaulichen. Hierzu betrachten wir den Baum B , wie er in Abbildung 6.1 gegeben ist, und den Ring C mit der entsprechenden Numerierung der Knoten und Kanten (siehe Abbildung 6.2).

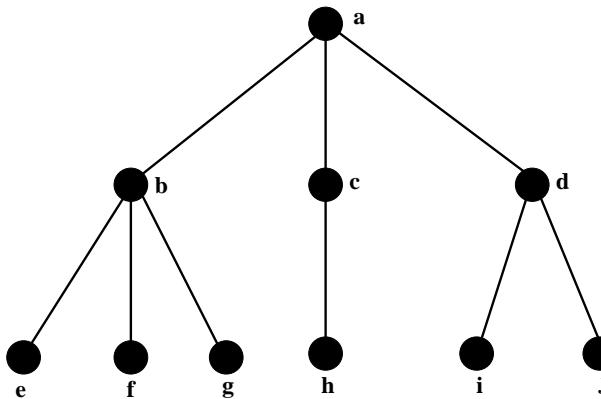


Abb. 6.1: Der einzubettende Baum B .

Sei nun ferner eine Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) des Baumes in den Ring C wie in Abbildung 6.3 dargestellt gegeben.

Man beachte, daß durch ϕ_C der Baumknoten c auf den Ringknoten mit der Nummer 1 abgebildet wird, so daß wir laut dem Algorithmus den Knoten c als Wurzel r des Baumes B annehmen.

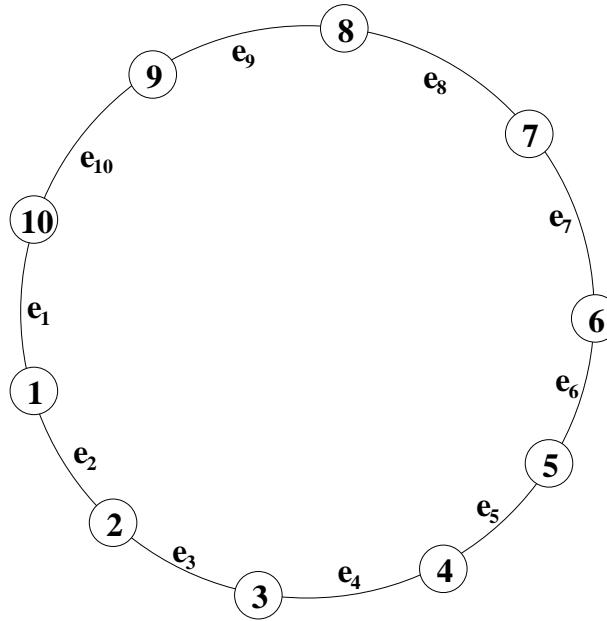


Abb. 6.2: Ring C mit entsprechender Knoten und Kantenbezeichnung.

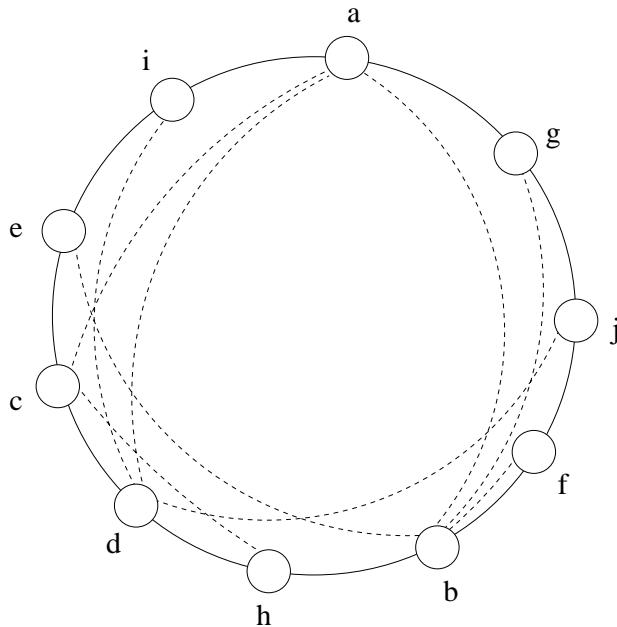


Abb. 6.3: Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) des Baumes B in den Ring C .

Des weiteren verbindet die Kante e_1 die Knoten c und e in C . Zur Berechnung der ersten Koordinate für den Knoten e beispielsweise betrachten wir den Weg \vec{p}_e im Baum B von c nach e . Dieser eindeutige Weg ist definiert durch die Knotenfolge $c \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow e$. Das Bild dieses Weges \vec{p}_e in C durchläuft die Kante e_1 genau zweimal und beides mal im Uhrzeigersinn. Demnach ist

die erste Koordinate des Integer-Tupels für den Knoten e also -2 . Die zweite Koordinate des Integer-Tupels für den Knoten e ergibt sich direkt aus der Nummer des Ringknotens auf den e durch ϕ_C abgebildet wurde, also 10 . Durch analoge Berechnungen für alle anderen Knoten des Baumes B erhalten wir die in Abbildung 6.4 dargestellten Integer-Tupel.

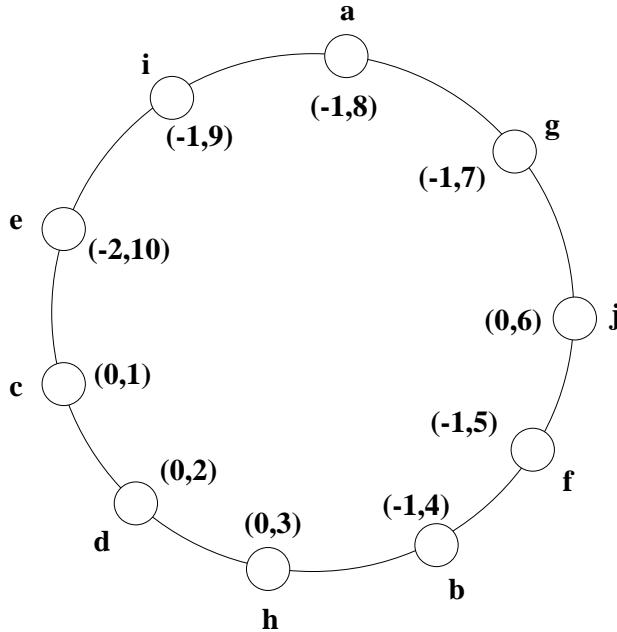


Abb. 6.4: Die bezüglich der Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) berechneten Integer-Tupel.

Ordnen wir nun die Integer-Tupel in lexikographischer Reihenfolge, so erhalten wir daraus direkt die Einbettung (ϕ_L, R_{ϕ_L}) des Baumes B in die Linie L , wie sie in Abbildung 6.5 dargestellt ist. In diesem Beispiel ist also die Schnittweite der Einbettung (ϕ_L, R_{ϕ_L}) echt kleiner als die zyklische Schnittweite der Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) des Baumes B in den Ring C .

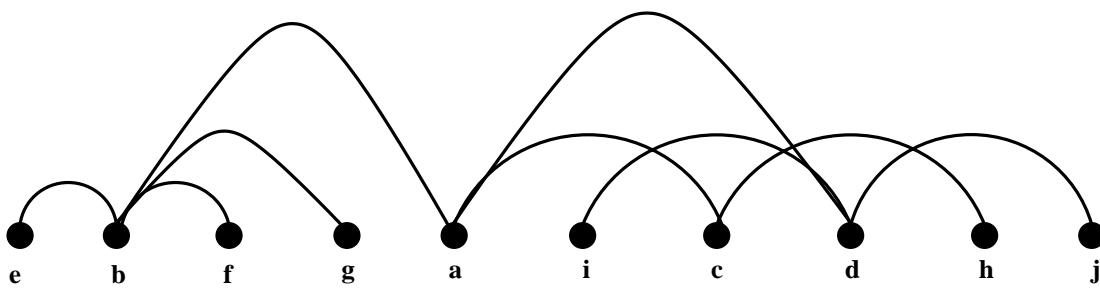


Abb. 6.5: Die von dem Algorithmus berechnete Einbettung (ϕ_L, R_{ϕ_L}) des Baumes B in die Linie L .

6.2.2 Analyse des Einbettungsalgorithmus

Wir werden nun beweisen, daß die zyklische Schnittweite einer beliebigen aber festen Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) des Baumes B in den Ring C größer oder gleich der Schnittweite der von dem Algorithmus berechneten Einbettung (ϕ_L, R_{ϕ_L}) des Baumes B in die Linie L ist. Hierzu beweisen wir zunächst das folgende Hilfslemma.

Lemma 6.1 *Sei $B = (V_B, E_B)$ ein beliebiger Baum und $v, w \in V_B$ zwei adjazente Knoten mit $e = (v, w) \in E_B$. Des weiteren sei (ϕ_C, R_{ϕ_C}) eine beliebige aber feste Einbettung von B in den Ring C und $(a, b), (c, d)$ die den beiden Knoten v und w durch den Algorithmus zugeordneten Integer-Tupel. Es gilt:*

- i) Falls $a < c$, dann enthält das Bild von e bezüglich R_{ϕ_C} die Kante e_1 ,
- ii) Falls $a = c$, dann ist e_1 nicht in dem Bild von e bezüglich R_{ϕ_C} enthalten.

Beweis: Betrachten wir die Bilder der Knoten v und w bezüglich ϕ_C . Es gibt zwei Möglichkeiten für die Auswahl eines einfachen Weges als Bild der Kante e . Der eine Weg enthält die Kante e_1 , der andere nicht. Demnach ist klar, daß sich die Wickelungszahlen von zwei adjazenten Knoten des Baumes höchstens um eins unterscheiden können, da die Kante e_1 bezüglich des Routing-Schemas R_{ϕ_C} höchstens einmal durchlaufen wird.

Nehmen wir nun $a < c$ an. Das heißt, die Wickelungszahlen für die Knoten v und w sind unterschiedlich. Es gilt $c = a + 1$. Bezogen auf die Konstruktion dieser Zahlen ist klar, daß das Bild der Kante e bezüglich R_{ϕ_C} die Kante e_1 enthält.

Falls $a = c$ gilt, das heißt, die Wickelungszahlen sind identisch, so kann nach Konstruktion dieser Zahlen das Bild der Kante e bezüglich R_{ϕ_C} die Kante e_1 nicht enthalten. ■

Satz 6.2 *Sei $B = (V_B, E_B)$ ein Baum. Es gilt:*

$$\text{ccw}(B) \geq \text{cw}(B).$$

Beweis: Der Ansatz besteht nun darin, nachzuweisen, daß die zyklische Schnittweite einer beliebigen aber festen Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) des Baumes B in den Ring C größer oder gleich der Schnittweite der von dem Algorithmus induzierten Einbettung (ϕ_L, R_{ϕ_L}) des Baumes B in die Linie L ist.

Sei e_L eine Kante der Linie, deren Auslastung bezüglich der Einbettung (ϕ_L, R_{ϕ_L}) maximal ist. Ferner seien s und t die beiden Knoten des Baumes B deren Bilder $\phi_L(s)$ und $\phi_L(t)$ die beiden zu der Kante e_L inzidenten Knoten darstellen.

Die Bilder von s und t bezüglich der Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) also $\phi_C(s)$ und $\phi_C(t)$ zerlegen den Ring in zwei disjunkte Wege. Genau einer dieser Wege enthält die Kante e_1 . Wir bezeichnen den Weg, der die Kante e_1 enthält, mit p_1 und den anderen mit p_2 .

Es ist unser Ziel, zu beweisen, daß die Bilder aller Kanten e des Baumes B , die bezüglich der Einbettung (ϕ_L, R_{ϕ_L}) die Kante e_L benutzen, bezogen auf die Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) alle entweder p_1 oder aber p_2 enthalten. Die Frage, welchen dieser Wege sie enthalten, ist allein abhängig von den beiden Integer-Tupel (f, g) und (h, k) , die den beiden Knoten s und t durch den Algorithmus zugeordnet werden. Haben wir dies bewiesen, so gilt, daß die Auslastung der Kanten des Ringes, die zu dem Weg p_1 respektive zu dem Weg p_2 gehören, mindestens so groß ist, wie die Auslastung der Kante e_L in der Linie. Daraus folgt dann direkt die Aussage des Satzes.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß gilt: $(f, g) < (h, k)$ bezüglich der lexikographischen Sortierung der Integer-Tupel, oder aber $\phi_L(s)$ entspricht dem linken und $\phi_L(t)$ dem rechten Endpunkt der Kante e_L .

Sei nun e eine beliebige aber feste Kante von B , deren Bild bezüglich der Einbettung (ϕ_L, R_{ϕ_L}) die Kante e_L enthält. Ferner seien v und w die zu der Kante e inzidenten Knoten von B , und schließlich seien (a, b) und (c, d) die den Knoten v und w durch den Algorithmus zugeordneten Integer-Tupel. Auch hier nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $(a, b) < (c, d)$ bezüglich der lexikographischen Sortierung der Integer-Tupel gilt.

Insgesamt gilt nun $(a, b) \leq (f, g) < (h, k) \leq (c, d)$ und zum Beweis der obigen Aussage haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $f < h$.

Wir zeigen, daß das Bild der Kante e bezüglich der Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) den Weg p_1 enthält.

Da sich die Wickelungszahlen zweier adjazenter Knoten im Baum höchstens um den Betrag eins unterscheiden (siehe Beweis zu Lemma 6.1), und wir angenommen haben, daß $f < h$ und $(a, b) \leq (f, g) < (h, k) \leq (c, d)$ gilt, erhalten wir $a = f$, $b \leq g$, $h = c$ und $k \leq d$ (siehe Abbildung 6.6).

Wenn wir nun der Einfachheit halber die Kante e als gerichtete Kante von v nach w ansehen, so erhalten wir für das Bild von e bezüglich (ϕ_C, R_{ϕ_C}) den folgenden Weg in C : Beginnend bei $\phi_C(v)$ verläuft er entgegen dem Uhrzeigersinn durch den Knoten $\phi_C(s)$ (da $b \leq g$) und entlang der Kante e_1 (da $f < h$), dann durch den Knoten $\phi_C(t)$ (da $k \leq d$) zum Knoten $\phi_C(w)$. Folglich enthält dieser Weg den gesamten Weg p_1 , also den Weg zwischen $\phi_C(s)$ und $\phi_C(t)$, der wiederum die Kante e_1 enthält (siehe Abbildung 6.6).

Abschließend können wir also für den Fall $f < h$ folgern, daß für jede Baumkante e , deren Bild in L bezüglich (ϕ_L, R_{ϕ_L}) die Kante e_L enthält, gilt: Das Bild von e in C bezüglich (ϕ_C, R_{ϕ_C}) enthält den gesamten Weg p_1 . Damit ist die Auslastung der Kanten in C , die zum Weg p_1 gehören, mindestens so groß wie die Auslastung der Kante e_L in der Linie. Da wir e_L als eine Kante angenommen haben, deren Auslastung bezüglich (ϕ_L, R_{ϕ_L}) maximal ist haben wir für den 1. Fall die Aussage des Satzes bewiesen.

2. Fall: $f = h$.

Wir zeigen, daß das Bild der Kante e bezüglich der Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) den Weg p_2 enthält.

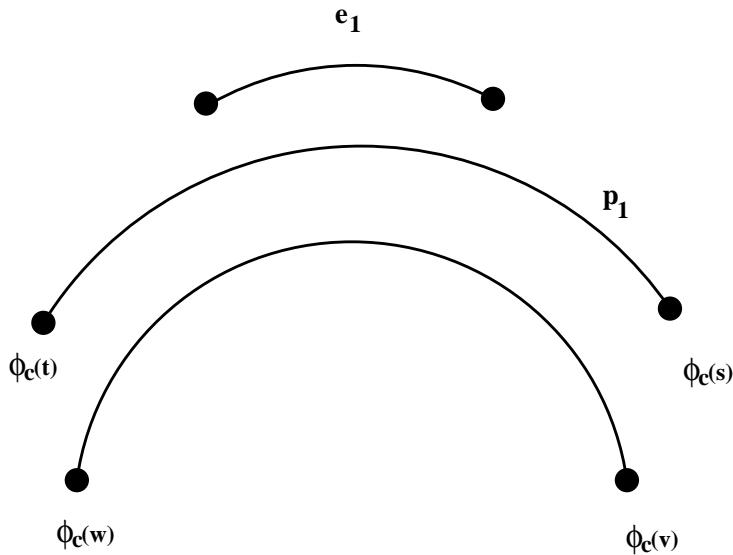


Abb. 6.6: $a = f, b \leq g, h = c$ und $k \leq d$.

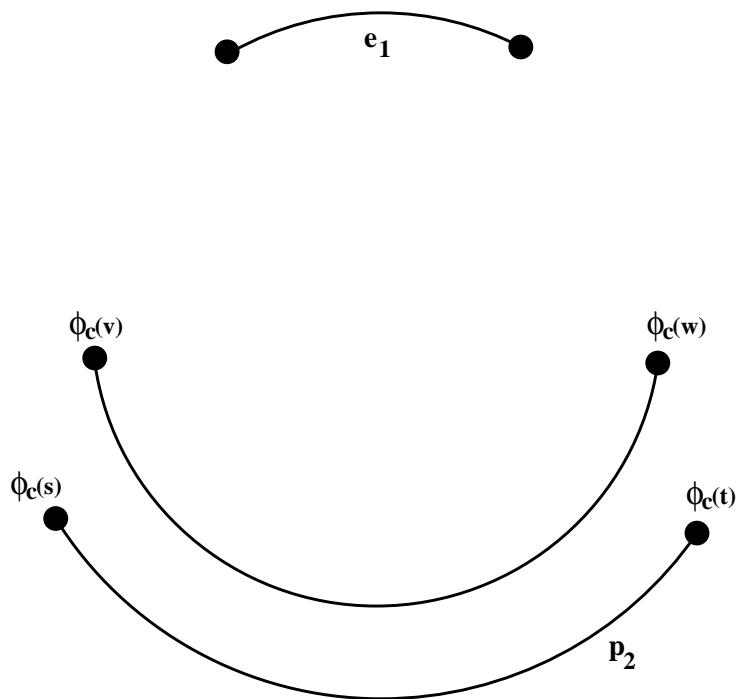
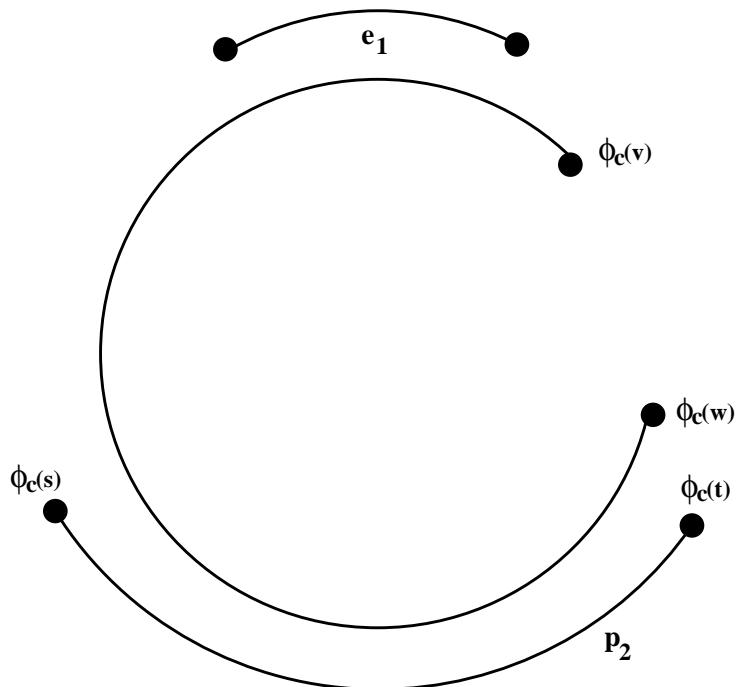
Da sich die Wickelungszahlen zweier adjazenter Knoten im Baum höchstens um den Betrag eins unterscheiden (siehe Beweis zu Lemma 6.1), und wir angenommen haben, daß $f = h$ und $(a, b) \leq (f, g) < (h, k) \leq (c, d)$ gilt, haben wir $a = c$ oder $a = c - 1$.

Falls $a = c$ gilt, sind alle Wickelungszahlen gleich. Falls $a = c - 1$ gilt, sind die Fälle $a < f$ oder $a = f$ möglich. Insgesamt erhalten wir also drei Unterfälle: $a = f = h = c$, $a = f - 1 < f = h = c$ und $a = f = h < h + 1 = c$ (siehe Abbildungen 6.7, 6.8 und 6.9).

Betrachten wir zunächst den Unterfall $a = f = h = c$. Lemma 6.1 impliziert, daß das Bild von e bezüglich (ϕ_C, R_{ϕ_C}) , also der Weg der $\phi_C(v)$ und $\phi_C(w)$ verbindet, die Kante e_1 nicht enthält. Da die zweite Koordinate der Integer-Tupel der Numerierung der Knoten des Ringes entspricht, erhalten wir somit $b \leq g < k \leq d$, und damit enthält das Bild von e bezüglich (ϕ_C, R_{ϕ_C}) natürlich den gesamten Weg p_2 (siehe Abbildung 6.7).

Betrachten wir nun den Unterfall $a < f = h = c$. Wir können $g < k \leq d$ folgern. Wenn wir nun wiederum der Einfachheit halber die Kante e als gerichtete Kante von v nach w ansehen, so erhalten wir für das Bild von e bezüglich (ϕ_C, R_{ϕ_C}) den folgenden Weg in C : Beginnend bei $\phi_C(v)$ verläuft er entgegen dem Uhrzeigersinn entlang der Kante e_1 (da $a < f$), durch die Knoten $\phi_C(s)$ (da $g < k$) und $\phi_C(t)$ (da $k \leq d$) bis zum Knoten $\phi_C(w)$. Folglich enthält dieser Weg den gesamten Weg p_2 , also den Weg zwischen $\phi_C(s)$ und $\phi_C(t)$, der nicht die Kante e_1 enthält (siehe Abbildung 6.8).

Es verbleibt der Unterfall $a = f = h < c$. In diesem Fall können wir $b \leq g < k$ folgern. Erneut nehmen wir der Einfachheit halber die Kante e als gerichtete Kante von v nach w an und erhalten so für das Bild von e bezüglich (ϕ_C, R_{ϕ_C}) den folgenden Weg in C : Beginnend bei $\phi_C(v)$ verläuft er entgegen dem Uhrzeigersinn durch die Knoten $\phi_C(s)$ (da $b \leq g$) und $\phi_C(t)$ (da $g < k$), entlang

Abb. 6.7: $a = f = h = c$.Abb. 6.8: $a = f - 1 < f = h = c$.

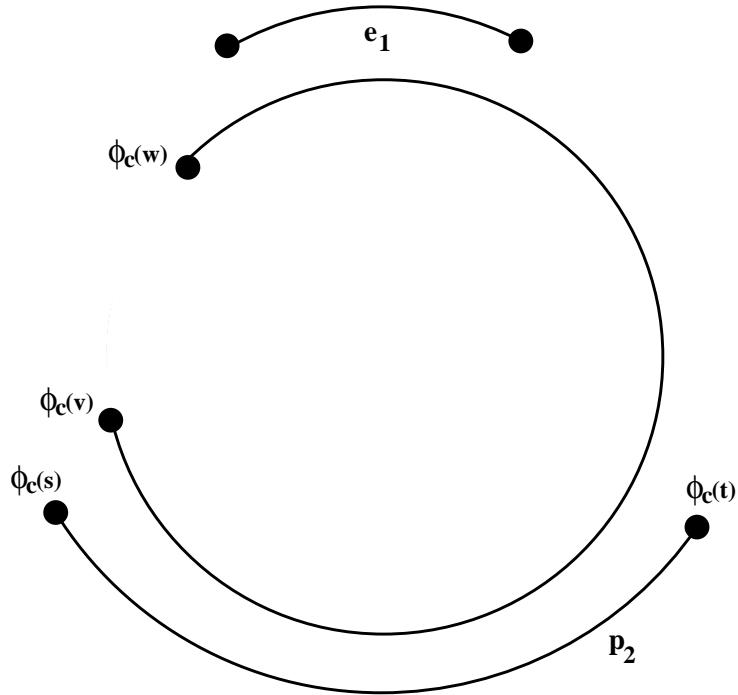


Abb. 6.9: $a = f = h < h + 1 = c$.

der Kante e_1 (da $h < c$) bis zum Knoten $\phi_C(w)$. Auch hier enthält dieser Weg den gesamten Weg p_2 , also den Weg zwischen $\phi_C(s)$ und $\phi_C(t)$, der nicht die Kante e_1 enthält (siehe Abbildung 6.9).

Abschließend können wir also aus den drei Unterfällen für den Fall $f = h$ folgern, daß für jede Baumkante e , deren Bild in L bezüglich (ϕ_L, R_{ϕ_L}) die Kante e_L enthält, gilt: Das Bild von e in C bezüglich (ϕ_C, R_{ϕ_C}) enthält den gesamten Weg p_2 . Damit ist die Auslastung der Kanten in C , die zum Weg p_2 gehören, mindestens so groß wie die Auslastung der Kante e_L in der Linie. Da wir e_L als eine Kante angenommen haben, deren Auslastung bezüglich (ϕ_L, R_{ϕ_L}) maximal ist haben wir die Aussage des Satzes bewiesen. ■

Beweis des Satzes 6.1: Aus Satz 6.2 folgt direkt $\text{ccw}(B) \geq \text{cw}(B)$ und aus Proposition 6.1 folgt $\text{ccw}(B) \leq \text{cw}(B)$. ■

6.3 Die zyklische Leitungslänge beliebiger Bäume

Die folgende Beobachtung stellt analog zu der Proposition 6.1 aus Abschnitt 6.2 eine triviale Beziehung zwischen der Leitungslänge und der zyklischen Leitungslänge dar.

Proposition 6.2 Sei $G = (V_G, E_G)$ ein Graph. Es gilt:

$$\text{cwl}(G) \leq \text{wl}(G).$$

Es gilt $cwl(G) \leq wl(G)$, da jede Einbettung eines Graphen in eine Linie direkt eine Einbettung in den Ring liefert. Wir zeigen in diesem Abschnitt den folgenden Satz.

Satz 6.3 *Sei $B = (V_B, E_B)$ ein Baum. Es gilt:*

$$cwl(B) = wl(B).$$

Beweis: Auf Grund von Proposition 6.2 ist klar, daß wir lediglich $wl(B) \leq cwl(B)$ zu zeigen haben. Sei nun $B = (V_B, E_B)$ ein beliebiger Baum mit n Knoten, $L = (V_L, E_L)$ die Linie mit n Knoten und $C = (V_C, E_C)$ der Ring mit n Knoten. Unsere Strategie für diesen Beweis besteht darin, zu beweisen, daß die zyklische Leitungslänge einer beliebigen aber festen Einbettung $f = (\phi_C, R_{\phi_C})$ des Baumes B in den Ring C größer oder gleich der Leitungslänge der von dem Algorithmus aus Abschnitt 6.2.1 berechneten Einbettung $g = (\phi_L, R_{\phi_L})$ des Baumes B in die Linie L ist.

Sei e eine beliebige aber feste Kante des Baumes, das heißt, $e \in E_B$. Ferner bezeichnen wir die Knoten der Linie also die Knoten aus V_L von einem Endpunkt zum anderen mit l_1, l_2, \dots, l_n und die Kanten aus E_L durch $\{l_i, l_{i+1}\}$ für $i = 1, \dots, n-1$.

Wir definieren nun für $i = 1, \dots, n-1$ die Mengen

$$R_i = \{R_{\phi_C}(e) \mid e \in E_B, \{l_i, l_{i+1}\} \in R_{\phi_L}(e)\}.$$

R_i ist also eine Menge von Routingwegen im Ring C . Mit anderen Worten besteht R_i aus den Bildern bezüglich der Einbettung f aller Kanten e des Baumes B , deren Bilder bezüglich der Einbettung g die Linienkante $\{l_i, l_{i+1}\}$ benutzen. Für die Kardinalität dieser Menge gilt demnach

$$\text{con}_g(\{l_i, l_{i+1}\}) = |R_i|. \quad (6.1)$$

Für eine Kante $\{l_i, l_{i+1}\} \in E_L$ seien s und t die beiden Knoten des Baumes B für die gilt $\phi_L(s) = l_i$ und $\phi_L(t) = l_{i+1}$. Die Bilder von s und t bezüglich der Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) also $\phi_C(s)$ und $\phi_C(t)$ zerlegen den Ring in zwei disjunkte Wege. Genau einer dieser Wege enthält die durch den Algorithmus aus Abschnitt 6.2.1 ausgezeichnete Kante e_1 . Wir bezeichnen den Weg, der die Kante e_1 enthält, mit $p_{i,1}$ und den anderen mit $p_{i,2}$. Aus dem Beweis zu Satz 6.2 können wir folgern, daß für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt:

$$\text{Entweder ist } p_{i,1} \text{ ein Teilweg von allen Wegen in } R_i \text{ oder aber } p_{i,2}. \quad (6.2)$$

Wir weisen jeder Kante $\{l_i, l_{i+1}\} \in E_L$ eine Menge von Ringkanten zu, die entweder dem Weg $p_{i,1}$ oder dem Weg $p_{i,2}$ entsprechen, je nachdem ob $p_{i,1}$ oder $p_{i,2}$ in allen Wegen von R_i enthalten ist. Wir bezeichnen die Menge von Ringkanten, die der Kante $\{l_i, l_{i+1}\}$ zugewiesen wird mit E_i . Aus (6.1) und (6.2) folgt nun

$$\text{con}_f(e') \geq \text{con}_g(\{l_i, l_{i+1}\}), \quad \forall e' \in E_i. \quad (6.3)$$

Vorausgesetzt wir können zeigen, daß wir aus jeder Menge E_i mit $i = 1, \dots, n-1$ eine Kante e'_i als Repräsentant auswählen können, so daß alle e'_1, \dots, e'_{n-1} verschieden sind, dann gilt:

$$\sum_{e' \in E_C} \text{con}_f(e') \geq \sum_{i=1}^{n-1} \text{con}_f(e'_i) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \text{con}_g(\{l_i, l_{i+1}\}) = \sum_{\tilde{e} \in E_L} \text{con}_g(\tilde{e}). \quad (6.4)$$

Daraus folgt, daß für jede beliebige Einbettung $f = (\phi_C, R_{\phi_C})$ des Baumes B in den Ring C , eine Einbettung $g = (\phi_L, R_{\phi_L})$ des Baumes B in die Linie L existiert, so daß

$$\text{wl}_f(B, C) \geq \text{wl}_g(B, L),$$

und damit

$$\text{cwl}(B) \geq \text{wl}(B).$$

Es verbleibt die Aufgabe die Existenz einer Menge von paarweise unterschiedlichen Repräsentanten für das Mengensystem $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$ zu zeigen. Für diesen Existenzbeweis können wir *Halls Matching-Theorem* anwenden (siehe Satz 2.3 aus Abschnitt 2). Dazu bilden wir einen bipartiten Graphen $H = (U, V, E)$ mit den beiden Knotenmengen $U = E_C = \{e_1, \dots, e_n\}$ und $V = \{E_1, \dots, E_{n-1}\}$, sowie der Kantenmenge $E = \{\{e_i, E_j\} \mid e_i \in U, E_j \in V \wedge e_i \in E_j\}$. Existiert ein perfektes Matching für den Graphen H , so erhalten wir durch die Matchingkanten für jede Menge E_i die Zuordnung einer Kante e'_i als Repräsentant. (Bemerkung: Um der Bedingung $|U| = |V|$ zu genügen, bilden wir die bipartiten Graphen H_i mit $i = 1, \dots, n$, indem wir jeweils den Knoten e_i und alle zu diesem Knoten inzidenten Kanten aus dem Graphen H löschen. Es gilt nun: Es existiert eine Menge von paarweise unterschiedlichen Repräsentanten für das Mengensystem $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$, wenn in mindestens einem der Graphen H_i ein perfektes Matching existiert.) Zur Veranschaulichung dieser Konstruktion siehe Abbildung 6.10.

Formulieren wir Halls Matching-Theorem entsprechend unserer Problemstellung, so gilt: Für eine Menge von Teilmengen $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$ einer Menge E_C existiert genau dann eine Menge von paarweise verschiedenen Repräsentanten, wenn für jede Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ gilt:

$$\left| \bigcup_{i \in I} E_i \right| \geq |I|. \quad (6.5)$$

Es gilt also zu beweisen, daß die Bedingung (6.5) zutrifft. Betrachten wir dazu eine beliebige aber feste Teilmenge der Menge $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$ und bezeichnen diese mit $\{E'_1, \dots, E'_k\}$, wobei $|I| = k < n$. Jedes E_i mit $i = 1, \dots, n-1$ und damit auch jedes E'_j mit $j = 1, \dots, k$ entspricht einem gewissen wohldefinierten Kreissegment des Ringes C . Wir definieren nun einen Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, k\}$, wobei der Knoten j implizit der Menge E'_j entspricht für $j = 1, \dots, k$, und $E = \{\{i, j\} \mid i, j \in V \wedge i \neq j \wedge E'_i \cap E'_j \neq \emptyset\}$. Das heißt, zwei Knoten des Graphen G sind adjazent, wenn die den Knoten entsprechenden Kreissegmente in C mindestens einen gemeinsamen Knoten haben. Für den Graphen G berechnen wir alle Zusammenhangskomponenten und bezeichnen diese mit A_1, \dots, A_t mit jeweils k_1, \dots, k_t Knoten. Es gilt: $k_1 + \dots + k_t = k$.

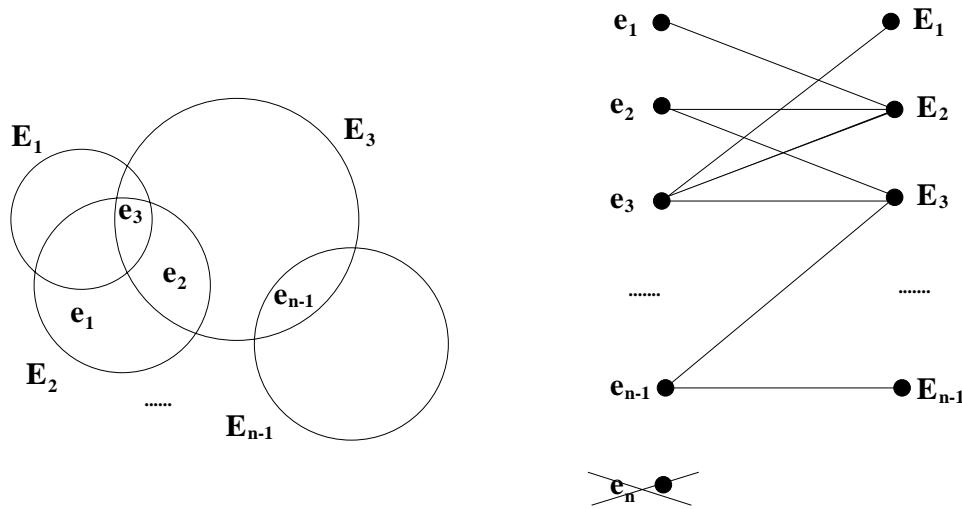
**Das Mengensystem $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$** **Der bipartite Graph H_n**

Abb. 6.10: Skizze zur Anwendbarkeit von Halls Matching-Theorem. Die Existenz einer Menge von paarweise unterschiedlichen Repräsentanten für das Mengensystem $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$ ist äquivalent zu der Existenz eines perfekten Matchings in einem der bipartiten Graphen H_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

Wir betrachten nun eine beliebige aber feste Zusammenhangskomponente A_i . Diese Komponente hat k_i Knoten. Nach der Definition des Graphen G entspricht jeder dieser Knoten einem Kreissegment in C . Sei T_i das Kreissegment in C , das durch die disjunkte Vereinigung der k_i Kreissegmente entsteht, die wiederum durch die Knoten der Zusammenhangskomponente A_i eindeutig festgelegt sind. T_i ist entweder identisch mit C oder aber ein Weg in C .

1. Fall: T_i ist identisch mit C .

Dann ist die Anzahl der Kanten in T_i gleich n . Auf Grund der Zusammenhangskomponenteneigenschaft gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$. Das heißt, daß $T_i \cap T_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gilt, oder in anderen Worten, die Kreissegmente von verschiedenen Zusammenhangskomponenten besitzen keinen gemeinsamen Knoten. Also ist G zusammenhängend und A_i die einzige Zusammenhangskomponente von G . Es gilt:

$$|I| = k < n = |T_i| = \left| \bigcup_{i \in I} E'_i \right|,$$

und damit ist Bedingung (6.5) erfüllt.

2. Fall: T_i ist ein Weg in C .

T_i ist ein Kreissegment von C , das durch die disjunkte Vereinigung von k_i Kreissegmenten entstanden ist. Jedes dieser Kreissegmente ist einer bestimmten Kante von L zugeordnet. Diese Zuordnung ist disjunkt. Also bilden die Endpunkte dieser Linienkanten eine Knotenmenge mit einer Kardinalität von mindestens $k_i + 1$. Da sowohl C als auch L gerade n Knoten besitzen

und die Abbildung der Knoten des Ringes auf die Knoten der Linie bezüglich der Einbettung $g = (\phi_L, R_{\phi_L})$ eine bijektive Abbildung ist, müssen die Endpunkte der Kreissegmente, deren disjunkte Vereinigung T_i ergibt, ebenfalls eine Knotenmenge mit einer Kardinalität von mindestens $k_i + 1$ bilden. Das heißt, T_i besteht aus mindestens $k_i + 1$ Knoten und enthält demnach mindestens k_i Kanten. Diese Überlegung gilt für alle $i = 1, \dots, t$. Mit der gleichen Begründung wie im ersten Fall gilt $T_i \cap T_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$. Mit anderen Worten besitzen die Kreissegmente von verschiedenen Zusammenhangskomponenten keinen gemeinsamen Knoten. Insgesamt gilt also:

$$\left| \bigcup_{i \in I} E'_i \right| = \left| \bigcup_{i \in \{1, \dots, t\}} T_i \right| \geq k_1 + \dots + k_t = k = |I|,$$

und damit ist Bedingung (6.5) erfüllt. ■

6.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir die Simulationseigenschaften eines Ringes im Vergleich zu einer Linie (eindimensionales Gitter) für beliebige Bäume untersucht. Wir konnten zeigen, daß es bei der Einbettung eines beliebigen Baumes weder bezüglich der Schnittweite noch bezüglich der Leitungslänge einen Unterschied macht, ob ein Ring oder eine Linie als Gastgebergraph vorliegt. Ein entsprechendes Ergebnis für das Kostenmaß Bandweite ist aus der Literatur bekannt [75].

Es stellt sich die Frage, ob außer den beliebigen Bäumen weitere Klassen von Graphen charakterisiert werden können, für die dieselben Aussagen bezüglich der Kostenmaße Bandweite, Schnittweite und/oder Leitungslänge zutreffen. Dazu sind zunächst einmal für weitere Graphen die exakten (zyklischen) Kostenmaße zu bestimmen. Insbesondere ist ein nach wie vor offenes Problem, was die exakte zyklische Schnittweite des Hypercubes ist.

Kapitel 7

Balancierte k -Partitionierungen von Hamming Graphen

In diesem Kapitel entwickeln und analysieren wir Schranken für den minimalen Kantenschnitt einer balancierten k -Partitionierung von Hamming Graphen H_a^n . Dabei motivieren wir in Abschnitt 7.1 zunächst die Betrachtung des k -Partitionierungsproblems und geben einen Überblick über die in diesem Zusammenhang interessantesten Ergebnisse. In Abschnitt 7.2 bestimmen wir dann für spezielle Werte von k exakte Ergebnisse für $\nabla_{H_a^n}(k)$ und für beliebige Werte von k sowohl untere wie obere Schranken. Die untere Schranke berechnen wir dabei mit Hilfe unserer Methode aus Abschnitt 3.4 und vergleichen sie mit den Schranken, die wir mittels den aus der Literatur bekannten Methoden erhalten [46, 86]. In Abschnitt 7.3 bestimmen wir dann Asymptoten für den minimalen Kantenschnitt unseres Problems für spezielle Werte von k . Abschließend gehen wir in Abschnitt 7.4 einerseits kurz darauf ein, welche Aussagen wir bezüglich der k -Partitionierung des Hypercubes aus unseren Ergebnissen ableiten können, und wie andererseits unsere Ergebnisse erweitert werden können und was sie bezüglich des minimalen Kantenschnitts von anderen Graph-Klassen mit regulärem Grad aussagen.

7.1 Stand der Forschung

Graph-Partitionierungsprobleme treten in einer ganzen Reihe von Anwendungen auf. Besondere Bedeutung hat diese Fragestellung allerdings bei der Lösung von großen, graphstrukturierten Berechnungen auf einem Parallelrechner. Als Beispiel für solch eine Berechnung sei hier die numerische Simulation von Differentialgleichungssystemen mit Hilfe der *Finiten Elemente Methode* (kurz FEM) genannt. Dabei wird zunächst eine Diskretisierung des Gebiets auf dem eine Lösung berechnet werden soll vorgenommen. Dies geschieht durch die Zerlegung des Gebiets in einfache, geometrische Formen (üblicherweise Dreiecke oder Vierecke), wobei jedes dieser Elemente durch eine eindeutige Anzahl an Koordinaten in dem Gebiet definiert ist (zum Bei-

spiel durch die Eckpunkte eines Dreiecks). Mittels FEM kann auf dem so entstandenen Graphen (häufig auch Netz genannt) die Lösung des Differentialgleichungssystems für jedes Element einzeln durch die Lösung eines linearen Gleichungssystems approximiert werden. Da im allgemeinen die Anzahl der Elemente sehr groß ist, drängt sich der Einsatz von Parallelrechnern zur Beschleunigung der Berechnung auf. Um eine effiziente parallele Berechnung zu gewährleisten ist somit prinzipiell ein *many-to-one* Einbettungsproblem des Diskretisierungsgraphen in den der Topologie des Parallelrechners zugrunde liegenden Graphen zu lösen. Dieses Problem kann dadurch relaxiert werden, daß der entstandene Graph in so viele Teile zerlegt wird, wie Prozessoren auf dem verwandten Rechner zur Verfügung stehen. Graphentheoretisch bedeutet dies, daß eine k -Partitionierung des Diskretisierungsgraphen zu berechnen ist, wenn k Prozessoren allokiert wurden. Bei der FEM-Simulation führen alle Prozessoren das gleiche Programm allerdings auf unterschiedlichen Daten aus. Somit ist eine natürliche Anforderung an die Partitionierung, daß sie balanciert ist, da dies einer ausgeglichenen Lastsituation entspricht. Da die Kanten des Graphen Datenabhängigkeiten repräsentieren, soll, um den Datenaustausch zwischen den Prozessoren möglichst gering zu halten, die Partitionierung darüber hinaus so wenig Kanten wie möglich zerschneiden. Insgesamt wird also nach einer balancierten Partitionierung des Graphen mit minimalem Kantenschnitt gesucht.

Es ist bekannt, daß das entsprechende Entscheidungsproblem zu dem obigen k -Partitionierungsproblem NP -vollständig ist [54]. Darüber hinaus bleibt das Problem NP -vollständig für $k = 2$ und in [25] wurde gezeigt, daß diese Aussage auch für reguläre Graphen zutrifft.

Die meisten in den Anwendungen auftretenden Graphen sind unstrukturiert und nicht regulär, was eine Evaluierung der Qualität einer berechneten Partitionierung schwierig macht. Jedoch gibt es auch eine ganze Reihe von Anwendungen, bei denen der unterliegende Graph regulär oder aber zumindestens der Grad eines jeden Knotens beschränkt ist. Als Beispiel seien auch hier typische FEM-Graphen genannt. Insofern ist es zur Beurteilung von Partitionierungsalgorithmen oder entsprechenden Tools von besonderem Interesse, exakte Ergebnisse oder aber zumindestens gute untere Schranken für die Partitionierung von gewissen Graph-Klassen zu bestimmen.

Ergebnisse sind in der Literatur insbesondere für die Bisektionierung bestimmter Graph-Klassen beschrieben [23, 95, 101, 126]. Des weiteren gibt es eine ganze Reihe von Arbeiten, die sich mit der Bestimmung von unteren und/oder oberen Schranken für die Bisektionsweite von d -regulären Graphen beschäftigen [4, 21, 108]. (Die Bisektionsweite eines Graphen ist hierbei definiert als die Kardinalität eines minimalen Kantenschnitts, der den Graphen in zwei gleichgroße Teile zerlegt.) Spezielle Beachtung fand dabei die Untersuchung der Bisektionsweite von 3- oder 4-regulären Graphen [21, 73, 112]. Zu der Bestimmung des minimalen Kantenschnitts bei einer k -Partitionierung sind in der Literatur nur Ergebnisse für sehr spezielle Graphen beschrieben [13, 40, 131].

Im weiteren werden wir die k -Partitionierung von Hamming Graphen untersuchen. Dabei ist unsere Arbeit hauptsächlich durch die Frage nach exakten Ergebnissen für die k -Partitionierung

des Hypercubes motiviert. Wie vormals bereits erwähnt, ist der Hypercube enthalten in der Graph-Klasse der Hamming Graphen. Die exakte Bisektionsweite des Hypercubes Q^n ist seit längerem als 2^{n-1} bekannt. Für die k -Partitionierung des Hypercubes Q^n , mit k beliebig, zeigte Cypher [40], daß für den minimalen Kantenschnitt $\Theta(2^n \log(k))$ gilt. Durch unsere Ergebnisse für die Hamming Graphen können wir diese Asymptote genauer fassen. Des weiteren können unsere Ergebnisse auf andere Graph-Klassen erweitert werden und somit erhalten wir Aussagen über alle regulären Graphen mit einem bestimmten Grad.

Zur Motivation der Betrachtung von Hamming Graphen sei hier noch angemerkt, daß einige Wissenschaftler davon ausgehen, daß auf Grund der gestiegenen technischen Möglichkeiten das kartesische Produkt von Graphen mit „guten“ Eigenschaften in der Zukunft für die Architektur von Rechnern eine größere Rolle spielen wird. Dabei bezieht sich der Begriff „gut“ beispielsweise auf Eigenschaften wie geringer Durchmesser, Fehlertoleranz, einfaches Routing usw. Der bezüglich dieser Eigenschaften beste Graph ist dabei natürlich der vollständige Graph.

7.2 Schranken für den minimal erreichbaren Kantenschnitt

Zur Wiederholung geben wir hier nochmals die wichtigsten von uns benutzten Bezeichnungen an (vgl. Kapitel 2). Wir bezeichnen mit $A_G = \{A_1, \dots, A_k\}$ eine gültige k -Partitionierung eines Graphen $G = (V_G, E_G)$ und falls $||A_i| - |A_j|| \leq 1$ für $i, j \in \{1, \dots, k\}$ gilt, so sprechen wir von einer *balancierten k -Partitionierung*. Der *Kantenschnitt* einer k -Partitionierung $A_G = \{A_1, \dots, A_k\}$ ist durch die Menge

$$\nabla A_G = \{\{u, v\} \in E_G \mid u \in A_i, v \in A_j, i \neq j\}$$

definiert. Für die Klasse P aller balancierten k -Partitionierungen von $G = (V_G, E_G)$ definieren wir

$$\nabla_G(k) = \min_{A_G \in P} |\nabla A_G|$$

als den minimal erreichbaren Kantenschnitt. Eine Partitionierung A_G , die diesen Wert für ein gegebenes k erreicht, bezeichnen wir als *minimal*. Mit diesen Festlegungen erhalten wir sofort das folgende Korollar.

Korollar 7.1 *Sei $A_G = \{A_1, \dots, A_k\}$ eine balancierte k -Partitionierung eines gegebenen Graphen $G = (V_G, E_G)$. Falls jede Menge A_i eine optimale Menge bezüglich des kantenisoperimetrischen Problems für G ist, so ist die Partitionierung A_G minimal.*

Als Erklärung sei angemerkt, daß wir in dem Lemma 3.3 (siehe Abschnitt 3.4) gerade die Gleichheit erhalten, falls alle Mengen A_i , $i = 1, \dots, k$, optimale Mengen in G sind. Innerhalb dieses Kapitels bezieht sich dabei der Begriff optimale Menge immer auf das kantenisoperimetrische Problem. Wenn wir also eine balancierte Aufteilung der Knotenmenge eines Graphen G

in k optimale Mengen finden, so ist der exakte Wert für $\nabla_G(k)$ direkt aus dem Wert für $\theta_G(|A_i|)$ bestimmbar.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wollen wir nun Schranken für $\nabla_{H_a^n}(k)$ bestimmen. Das heißt, wir betrachten den Graphen $H_a^n = (V_{H_a^n}, E_{H_a^n})$. Wie in Abschnitt 3.1 bereits erwähnt, ist die lexikographische Ordnung L für die Hamming Graphen eine optimale Ordnung. Jedes initiale Segment von L liefert demnach eine optimale Menge für die entsprechende Kardinalität. Sei nun durch $\ell(u) = \sum_{i=1}^n x_i a^{n-i}$ für jeden Knoten $u = (x_1, \dots, x_n) \in V_{H_a^n}$ seine lexikographische Ordnungszahl definiert und durch

$$L_m^n = \{u \in V_{H_a^n} \mid 0 \leq \ell(u) < m\}$$

die Knotenmenge bezeichnet, die das initiale Segment von L der Kardinalität m bildet. Wir bezeichnen zwei Knotenmengen $A, B \subseteq V_{H_a^n}$ als *kongruent* ($A \cong B$), wenn B das Bild von A bezüglich eines Automorphismus auf H_a^n ist. Des weiteren definieren wir noch für $0 \leq p \leq n$ ein *face von H_a^n der Dimension p* als eine Teilmenge von $V_{H_a^n}$, die kongruent zu L_{ap}^n ist.

Da die Hamming Graphen knoten- und kantensymmetrische Graphen sind, ist jedes *face von H_a^n* eine optimale Menge. Des weiteren können wir die folgenden trivialen Beziehungen zwischen optimalen Mengen in H_a^n und einigen *faces von H_a^n* formulieren.

Proposition 7.1 *Sei $V_{H_a^n}$ in die faces F_1, \dots, F_a der Dimension $n-1$ zerlegt. Ferner seien $A_i \subseteq F_i$, $i = 1, \dots, a$, definiert durch $A_i \cong L_m^{n-1}$ für ein festes m mit $1 \leq m \leq |F_i|$. Des weiteren nehmen wir an, daß es eine isomorphe Abbildung zwischen allen Mengen A_i gibt. Dann gilt:*

- (a) $A_i \cong L_m^n \quad \text{für } i = 1, \dots, a$
- (b) $A_1 \cup \dots \cup A_a \cong L_{am}^n$
- (c) $F_i \cup A_j \cong L_{a^{n-1}+m}^n \quad \text{für } i \neq j.$

Aus dieser Tatsache erhalten wir nun relativ leicht das folgende Korollar.

Korollar 7.2 *Falls $k|a$, so gilt:*

$$\nabla_{H_a^n}(k) = \frac{a^{n+1}}{2} \cdot \frac{k-1}{k}.$$

Beweis: Die Idee ist den vollständigen Graphen K_a in k gleichgroße, optimale Mengen zu zerlegen (denn es gilt: $k|a$) und diese Partitionierung dann auf alle anderen Dimensionen zu übertragen. Durch die Vereinigung der entsprechenden Partitionen für alle K_a erhalten wir dann eine k -Partitionierung von H_a^n , wobei alle so entstandenen Partitionen auf Grund von Proposition 7.1

wiederum optimale Mengen sind. Es gilt: $|E_{K_a}| = \sum_{i=1}^{a-1} i = \frac{a \cdot (a-1)}{2}$ also $|E_{K_{a/k}}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{k} \cdot (\frac{a}{k} - 1)$. Somit ist

$$\nabla_{K_a}(k) = \frac{a \cdot (a-1)}{2} - k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{k} \cdot (\frac{a}{k} - 1) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{k-1}{k}.$$

Bei unserer Konstruktion „wiederholen“ wir den Schnitt für K_a in allen anderen Dimensionen.

$$\nabla_{H_a^n}(k) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot a^{n-1} = \frac{a^{n+1}}{2} \cdot \frac{k-1}{k}.$$

■

Korollar 7.3 Falls $k = a^p$ mit $p \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq n$, so gilt:

$$\nabla_{H_a^n}(k) = \frac{p}{2} \cdot (a-1) \cdot a^n.$$

Beweis: Die Idee ist H_a^n einfach in a^p faces der Dimension $n-p$ zu zerlegen. Diese faces bilden dann optimale Mengen in $V_{H_a^n}$. Es gilt nun: $|E_{H_a^n}| = \frac{a(a-1)}{2} \cdot a^{n-1} \cdot n$ und demzufolge $|E_{H_a^{n-p}}| = \frac{a(a-1)}{2} \cdot a^{n-p-1} \cdot (n-p)$. Also erhalten wir

$$\nabla_{H_a^n}(a^p) = \frac{a(a-1)}{2} \cdot a^{n-1} \cdot n - a^p \cdot \frac{a(a-1)}{2} \cdot a^{n-p-1} \cdot (n-p) = \frac{p}{2} \cdot (a-1) \cdot a^n.$$

■

Nachdem wir also für gewisse k exakte Resultate bestimmt haben, wollen wir nun eine allgemeine untere und eine allgemeine obere Schranke für $\nabla_{H_a^n}(k)$ bestimmen. Dazu beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 7.1 Sei $n > 2$, $a^{p-1} < k < a^p$ und $n > 2(p-1)$. Es gilt

$$\frac{(a-1)(p-1)}{2} \leq \frac{\nabla_{H_a^n}(k)}{a^n} \leq (a-1) \cdot (p + \frac{1}{2}) + \frac{3}{2}.$$

Beweis: Wir beweisen zunächst die untere Schranke. Hierzu verwenden wir unseren Ansatz aus Lemma 3.3 und schätzen

$$\min \left\{ \Theta_{H_a^n} \left(\left\lfloor \frac{a^n}{k} \right\rfloor \right), \Theta_{H_a^n} \left(\left\lceil \frac{a^n}{k} \right\rceil \right) \right\} \quad (7.1)$$

ab. Wir setzen $m = \lfloor a^n/k \rfloor$ und zerlegen $V_{H_a^n}$ in $p-1$ faces der Dimension $n-p+1$. Die optimalen Mengen L_m^n und L_{m+1}^n sind demnach Teilmengen von einem dieser faces. Bezeichnen wir nun dieses face mit F und die Kantenmenge von F mit $E_F = \{\{u,v\} \in F \times F \mid H(u,v) = 1\}$. Die Kantenmenge $\Theta_{H_a^n}(L_m^n)$ setzt sich zusammen aus der Menge der Kanten, die einen Knoten aus L_m^n mit einem Knoten aus F verbinden, und aus der Menge der Kanten, die einen Knoten aus L_m^n mit

einem Knoten aus einem von F verschiedenen *face* verbinden. Die Kardinalität dieser zweiten Menge können wir leicht bestimmen, denn jeder Knoten in L_m^n hat genau $(a-1)(p-1)$ Kanten in die von F verschiedenen *faces*. Also hat diese Menge eine Kardinalität von $m \cdot (a-1)(p-1)$. Die Kardinalität der ersten Menge lässt sich nur abschätzen. Da aber mindestens ein Knoten aus F nicht in L_m^n liegt und dieser in F allein $(n-p+1)(a-1)$ Kanten besitzt, ist die Kardinalität der ersten Menge größer oder gleich $(n-p+1)(a-1)$. Mit entsprechenden Überlegungen für L_{m+1}^n erhalten wir somit als untere Schranke für das Minimum in (7.1)

$$\begin{aligned} \min \{ \Theta_{H_a^n}(m), \Theta_{H_a^n}(m+1) \} &\geq m(a-1)(p-1) + \min \{ |\Theta_{H_a^n}(L_m^n) \cap E_F|, |\Theta_{H_a^n}(L_{m+1}^n) \cap E_F| \} \\ &\geq m(a-1)(p-1) + (n-p+1)(a-1) \\ &\geq (m(p-1) + n - p + 1)(a-1). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Insgesamt erhalten wir demnach aus unserem Ansatz

$$\begin{aligned} \nabla_{H_a^n}(k) &\stackrel{\text{Lemma 3.3}}{\geq} \frac{k}{2} \min \{ \Theta_{H_a^n}(m), \Theta_{H_a^n}(m+1) \} \\ &\stackrel{(7.2)}{\geq} \frac{k}{2} (m(p-1) + n - p + 1)(a-1) \\ &\stackrel{m \geq a^n/k-1}{\geq} \frac{k}{2} \cdot \frac{a^n}{k} (p-1)(a-1) + \frac{k}{2} (a-1)(n-2(p-1)) \\ &\geq \frac{(a-1)(p-1)}{2} \cdot a^n. \end{aligned}$$

Kommen wir nun zum Beweis der oberen Schranke für $\nabla_{H_a^n}(k)$. Hierzu zerlegen wir zunächst einmal $V_{H_a^n}$ in die *faces* F_1, \dots, F_a der Dimension $n-1$. Nun partitionieren wir jede dieser Mengen F_i in k Teile $\{A_1^i, \dots, A_k^i\}$, $i = 1, \dots, a$, und erhalten daraus eine k -Partitionierung $A_{H_a^n} = \{A_1, \dots, A_k\}$ von H_a^n , indem wir $A_j = \cup_{i=1}^a A_j^i$ für $j = 1, \dots, k$ bilden. Da aber laut Voraussetzung k keiner Potenz von a entspricht, gilt $|A_j^i| \in \{m, m+1\}$ mit $m = \lfloor \frac{a^{n-1}}{k} \rfloor$ und somit $A_j \in \{am, am+a\}$. Das heißt, unsere k -Partitionierung ist noch nicht balanciert.

Um dies zu erreichen müssen wir einige Knoten von den größeren Partitionen in die kleineren Partitionen verschieben. Wir behaupten, daß wir höchstens $ak/2$ Knoten der ursprünglichen k -Partitionierung $A_{H_a^n}$ verschieben brauchen, um eine balancierte Partitionierung zu erhalten. Zum Beweis der Korrektheit dieser Behauptung seien folgende Überlegungen angeführt.

Sei m_1 die Anzahl der Partitionen in $A_{H_a^n}$, die $m \cdot a$ Knoten enthalten, und m_2 die Anzahl der Partitionen in $A_{H_a^n}$, die $m \cdot a + a$ Knoten enthalten. Es gilt $m_1 + m_2 = k$.

Falls nun $m_2 \geq m_1$ gilt, so müssen wir höchstens $\lfloor a/2 \rfloor$ Knoten von jeder der größeren Partitionen umplazieren. Das heißt, wir bewegen insgesamt höchstens $\frac{a}{2} \cdot m_2$ Knoten und dies ist kleiner als $ak/2$.

Falls nun $m_2 < m_1$ gilt, so müssen wir höchstens a Knoten von jeder der größeren Partitionen umplazieren. Das heißt, wir bewegen insgesamt höchstens $a \cdot m_2$ Knoten. Aus $m_2 < m_1$ und

$m_1 + m_2 = k$ folgt $m_2 < \frac{k}{2}$. Somit ist die Gesamtanzahl an Knoten, die bewegt werden müssen, auch in diesem Fall wiederum kleiner als $ak/2$.

Insgesamt erhöht dieser Balancierungsschritt damit die Kardinalität des Kantenschnitts $\nabla A_{H_a^n}$, um höchstens $\frac{ak}{2}(a-1)n$.

Durch diese Konstruktion gewinnen wir also für den minimal erreichbaren Kantenschnitt einer balancierten k -Partitionierung von H_a^n die folgende Rekursion

$$\nabla_{H_a^n}(k) \leq a \cdot \nabla_{H_a^{n-1}}(k) + (a(a-1)kn)/2. \quad (7.3)$$

Für $t \geq p$ folgt somit

$$\begin{aligned} \nabla_{H_a^n}(k) &\leq a^{n-t} \cdot \nabla_{H_a^t}(k) + \frac{a(a-1)k}{2} (n + (n-1)a + \dots + (t+1)a^{n-t-1}) \\ &= a^{n-t} \cdot \nabla_{H_a^t}(k) + \frac{a(a-1)k}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-t-1} (n-i)a^i. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Mit

$$\sum_{i=1}^r ia^i = \frac{ra^{r+2} - (r+1)a^{r+1} + a}{(a-1)^2}$$

können wir für (7.4) schreiben

$$\begin{aligned} \nabla_{H_a^n}(k) &\leq a^{n-t} \cdot \nabla_{H_a^t}(k) + \frac{a(a-1)k}{2} \cdot \frac{a^{n-t+1}(t+1) - ta^{n-t} - na + n - a}{(a-1)^2} \\ &< a^{n-t} \cdot \nabla_{H_a^t}(k) + \frac{a(a-1)k}{2} \cdot \frac{a^{n-t+1}(t+1) - ta^{n-t}}{(a-1)^2} \\ &= a^{n-t} \cdot \nabla_{H_a^t}(k) + \frac{ak(at+a-t)}{2a^t(a-1)} a^n. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Wir wenden nun (7.5) für $t = p$ an. Bei der Berechnung von $\nabla_{H_a^p}(k)$ ist zu beachten, daß für $a^p/2 < k < a^p$ jede minimale balancierte k -Partitionierung von $V_{H_a^p}$ genau $2k - a^p$ Partitionen mit genau einem Knoten besitzt und die verbleibenden $a^p - k$ Partitionen aus genau zwei Knoten bestehen. Das heißt, daß in diesem Fall die Kardinalität des Kantenschnitts größer ist als in dem Fall $a^{p-1} < k \leq \frac{a^p}{2}$. Zur Verdeutlichung dieser Aussage sei noch angemerkt, daß in dem Fall $a^{p-1} < k \leq \frac{a^p}{2}$ jede Partition aus mindestens zwei Knoten besteht und damit mindestens eine „innere“ Kante besitzt. Wir können somit für $\nabla_{H_a^p}(k)$ folgern

$$\nabla_{H_a^p}(k) \leq \frac{a(a-1)p}{2} \cdot a^{p-1} - (a^p - k) = \frac{ap-p}{2} \cdot a^p - a^p + k. \quad (7.6)$$

Setzen wir nun (7.6) in (7.5) ein und berücksichtigen $\frac{k}{a^p} < 1$ und $\frac{a^2}{a-1} \leq a+2$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_{H_a^n}(k)}{a^n} &\leq \frac{ap-p}{2} - 1 + \frac{k}{a^p} + \frac{k}{a^p} \cdot \frac{a(ap+a-p)}{2(a-1)} \\ &\leq (a-1)(p+1/2) + 3/2. \end{aligned}$$

■

7.2.1 Diskussion der verschiedenen unteren Schranken für $\nabla_{H_a^n}(k)$

Wir wollen unsere untere Schranke aus Satz 7.1 mit den unteren Schranken vergleichen, die wir aus den Ansätzen [46] und [86] erhalten (siehe auch Abschnitt 3.4: Lemma 3.4 und Lemma 3.5).

Betrachten wir zunächst die Schranke, die auf der Berechnung des Spektrums der zu H_a^n gehörigen Laplace Matrix $L_{H_a^n}$ beruht. Zur Bestimmung des Spektrums von $L_{H_a^n}$ nutzen wir aus, daß sich H_a^n als kartesisches Produkt von n vollständigen Graphen K_a darstellen läßt und wir somit Satz 2.1 anwenden können. Es gilt also: $H_a^n = \underbrace{K_a \times \cdots \times K_a}_n$.

Die Eigenwerte von L_{K_a} sind

$$0, \underbrace{(a-1), \dots, (a-1)}_{(a-1)}.$$

Mit Satz 2.1 erhalten wir als die Eigenwerte von $L_{H_a^n}$

$$0, \underbrace{(a-1), \dots, (a-1)}_{n(a-1)}, \underbrace{(2a-2), \dots, (2a-2)}_{\frac{1}{2}(n-1)n \cdot (a-1)^2}, \dots$$

wobei wir hier die Eigenwerte aufsteigend sortiert haben.

Wir diskutieren nun exemplarisch zwei Fälle:

- (1) $k \leq n(a-1)$ und
- (2) $n(a-1) < k \leq n(a-1) + \frac{1}{2}(n-1)n \cdot (a-1)^2$.

Zu (1): Für $k \leq n(a-1)$ erhalten wir mittels Lemma 3.4

$$\nabla_{H_a^n}(k) \geq \frac{a-1}{2} \cdot a^n \cdot \frac{k-1}{k},$$

während die untere Schranke aus Satz 7.1 mit $p > \log_a(k)$

$$\nabla_{H_a^n}(k) \geq \frac{a-1}{2} \cdot a^n \cdot (\log_a(k) - 1)$$

liefert. Also ist unsere untere Schranke aus Satz 7.1 schärfer, wenn

$$\frac{k-1}{k} < \log_a(k) - 1 \tag{7.7}$$

gilt. Für (7.7) können wir auch schreiben

$$2 - \frac{1}{k} < \log_a(k).$$

Fordern wir nun sogar $2 < \log_a(k)$, so ergibt sich, daß unsere Schranke stets schärfer ist, wenn

$$k > a^2. \quad (7.8)$$

Zu (2): Für $n(a-1) < k \leq n(a-1) + \frac{1}{2}(n-1)n \cdot (a-1)^2$ erhalten wir mittels Lemma 3.4

$$\nabla_{H_a^n}(k) \geq \frac{a^n}{2} \cdot \frac{1}{k} (((k-1) - n(a-1)) \cdot 2(a-1) + n(a-1)) = \frac{a-1}{2} \cdot a^n \cdot \frac{2(k-1) - 2n(a-1) + n}{k},$$

während die untere Schranke aus Satz 7.1 mit $p > \log_a(k)$ wiederum

$$\nabla_{H_a^n}(k) \geq \frac{a-1}{2} \cdot a^n \cdot (\log_a(k) - 1)$$

liefert. Also ist unsere untere Schranke aus Satz 7.1 schärfer, wenn

$$\frac{2(k-1) - 2n(a-1) + n}{k} < \log_a(k) - 1 \quad (7.9)$$

gilt. Für (7.9) können wir auch schreiben

$$3 - \frac{2}{k} + \frac{n}{k}(1 - 2(a-1)) < \log_a(k)$$

beziehungsweise, da wir $a \geq 2$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können

$$3 - \frac{2}{k} - \frac{x n}{k} < \log_a(k)$$

mit x ist eine ungerade, natürliche Zahl.

Fordern wir nun sogar $3 < \log_a(k)$, so ergibt sich, daß unsere Schranke stets schärfer ist, wenn

$$k > a^3. \quad (7.10)$$

Im wesentlichen interessieren uns natürlich nur die Hamming Graphen, bei denen a relativ klein ist (zum Beispiel für den Hypercube gilt $a = 2$) und n demgegenüber relativ groß ist. Allein aus den Betrachtungen zu den Fällen (1) und (2) können wir somit sagen, daß für alle interessanten Fragestellungen unsere untere Schranke schärfer ist als die spektrale untere Schranke.

Kommen wir nun zu der Diskussion der unteren Schranke, die wir aus dem Einbettungsansatz aus Lemma 3.5 aus Abschnitt 3.4 erhalten können. Es gilt demnach

$$\nabla_{H_a^n}(k) \geq \frac{a^{n^2} \cdot (k-1)}{2k \cdot \text{con}(K_{a^n}, H_a^n)}.$$

Um nun einen möglichst exakten numerischen Vergleich wie bei der spektralen Schranke machen zu können, müßten wir die minimal mögliche Kantenauslastung einer Einbettung des Graphen

K_{an} in den Hamming Graphen H_a^n bestimmen. Dies ist aber ein ungelöstes Problem. Wir vermuten, daß die theoretische Schranke aus dem Einbettungsansatz ähnlich gut, aber nicht besser, als unsere Schranke aus Satz 7.1 ist. Der Grund für uns dies zu vermuten, liegt darin, daß sich die beiden Ansätze, die zu den unteren Schranken führen, in gewisser Weise „ähneln“. Beide Ansätze liefern für den minimalen Kantenschnitt einer k -Partitionierung gerade dann scharfe untere Schranken, wenn wir eine Aufteilung in k optimale Mengen finden können. In diesem Fall ist nämlich auf der einen Seite die maximale Kantenauslastung der entsprechenden Einbettung in Lemma 3.5 minimal und auf der anderen Seite liefert unser Ansatz dann ein exaktes Ergebnis (siehe Korollar 7.1). Bei der Berechnung der Schranken aus Satz 7.1 haben wir eine Aufteilung in k nahezu optimale Mengen vorgenommen und den entsprechenden Kantenschnitt abgeschätzt. Somit können wir zwar nicht erwarten, daß unsere Schranken optimal sind, aber doch nahe am Optimum liegen.

7.3 Asymptoten für $\nabla_{H_a^n}(k)$

Wir wollen in diesem Abschnitt Asymptoten für den minimal erreichbaren Kantenschnitt bei einer k -Partitionierung eines Hamming Graphen H_a^n bestimmen. Das heißt, wir betrachten den Fall, daß a und k Konstanten sind und $n \rightarrow \infty$. Dazu erweitern wir unseren Ansatz aus dem Abschnitt 7.2, der im wesentlichen auf dem Korollar 7.1 aufbaut. Diese Erweiterung basiert auf der Beobachtung, daß es zur Bestimmung einer Asymptote für $\nabla_{H_a^n}(k)$ ausreicht, eine Partitionierung in k „nahezu“ optimale Mengen anstatt in k optimale Mengen zu betrachten. Dabei bezieht sich der Begriff optimale Menge wiederum, wie im gesamten Kapitel 7, auf das kantenisoperimetrische Problem für H_a^n . Im folgenden formalisieren wir unseren Ansatz.

Wir bezeichnen eine Menge $A \subseteq V_{H_a^n}$ der Kardinalität m als *quasioptimale Menge* bezüglich einer Konstanten c , wenn eine optimale Menge $B \cong L_m^n$ existiert, so daß $|A \Delta B| \leq c$ gilt. Das heißt, die symmetrische Differenz der Mengen A und B ist kleiner als c .¹

Die Idee ist es nun, eine balancierte k -Partitionierung $A_{H_a^n} = \{A_1, \dots, A_k\}$ von $V_{H_a^n}$ in k quasioptimale Mengen A_i zu bestimmen, so daß für jede Menge A_i gilt $|A_i \Delta B| \leq c'$ mit B ist eine geeignete Menge für die gilt $B \cong L_{|A_i|}^n$ und die Konstante c' hängt nur von c und k nicht aber von n ab. (Wir werden in unseren Konstruktionen c und c' nicht explizit bestimmen, sondern nur sicherstellen, daß solche Konstanten existieren.) Für jede dieser quasioptimalen Mengen A_i gilt nun

$$|\Theta_{H_a^n}(A_i)| - \Theta_{H_a^n}(|A_i|) \leq c' an. \quad (7.11)$$

Des weiteren bezeichnen wir eine k -Partitionierung $A_{H_a^n} = \{A_1, \dots, A_k\}$ als *quasiminimal*, wenn $|\nabla A_{H_a^n}| - \frac{k}{2} \Theta_{H_a^n}(\lfloor |V_{H_a^n}|/k \rfloor) \leq c'' n$ gilt, wobei die Konstante c'' nur von k, c' und a nicht

¹ $A \Delta B \stackrel{\text{Def.}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

aber von n abhängt. Mit diesen Festlegungen erhalten wir analog zu Korollar 7.1 das folgende Korollar.

Korollar 7.4 Sei $A_{H_a^n} = \{A_1, \dots, A_k\}$ eine balancierte k -Partitionierung des Graphen H_a^n . Falls jede Menge A_i eine quasioptimale Menge bezüglich des kantenisoperimetrischen Problems für H_a^n ist, so ist die Partitionierung $A_{H_a^n}$ quasiminimal.

Beweis: Analog zu der Argumentation in dem Beweis zu Lemma 3.3 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 |\nabla A_{H_a^n}| &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k |\Theta_{H_a^n}(A_i)| \\
 &\stackrel{(7.11)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k (\Theta_{H_a^n}(|A_i|) + c' a n) \\
 &\leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k ((\Theta_{H_a^n}(\lfloor |V_{H_a^n}|/k \rfloor) + a n) + c' a n) \\
 &= \frac{k}{2} \cdot (\Theta_{H_a^n}(\lfloor |V_{H_a^n}|/k \rfloor) + (c' + 1) a \cdot n) \\
 &= \frac{k}{2} \cdot \Theta_{H_a^n}(\lfloor |V_{H_a^n}|/k \rfloor) + \frac{k(c' + 1)a}{2} \cdot n. \tag{7.12}
 \end{aligned}$$

■

Wir erhalten nun direkt einen Ansatz zur Bestimmung von Asymptoten für $\nabla_{H_a^n}(k)$. Denn, falls a und k Konstanten sind, hängt $\Theta_{H_a^n}(\lfloor |V_{H_a^n}|/k \rfloor)$ offensichtlich exponentiell von n ab. Somit erhalten wir aus (7.12) zusammen mit Lemma 3.3, daß, wenn eine Partitionierung von H_a^n in k quasioptimale Mengen existiert und $n \rightarrow \infty$, gilt

$$\nabla_{H_a^n}(k) \sim \frac{k}{2} \Theta_{H_a^n}(\lfloor |V_{H_a^n}|/k \rfloor). \tag{7.13}$$

Wir formulieren nun noch analog zu Proposition 7.1 folgende Beziehungen zwischen quasioptimalen Mengen in H_a^n und einigen faces von H_a^n .

Proposition 7.2 Sei $V_{H_a^n}$ in die faces F_1, \dots, F_a der Dimension $n-1$ zerlegt. Ferner seien $A_i \subseteq F_i$, $i = 1, \dots, a$, quasioptimale Mengen einer festen Kardinalität m mit $1 \leq m \leq |F_i|$. Des weiteren nehmen wir an, daß es eine isomorphe Abbildung zwischen allen Mengen A_i gibt. Dann gilt:

- (a') Jede Menge A_i , $i = 1, \dots, a$, ist quasioptimal in H_a^n .
- (b') Die Menge $A_1 \cup \dots \cup A_a$ ist quasioptimal.
- (c') Die Mengen $F_i \cup A_j$ für $i \neq j$ sind quasioptimal.

Nach diesen Präliminarien kommen wir nun zur Berechnung von Asymptoten für einige Werte für k . Dazu zunächst das folgende Lemma.

Lemma 7.1 *Sei H_a^n in k quasioptimale Mengen partitionierbar, dann gilt für jede Konstante $q \in \mathbb{N}$ und für $n \rightarrow \infty$*

$$\nabla_{H_a^{n+q}}(a^q \cdot k) \sim \frac{q(a-1)}{2} \cdot a^{n+q} + a^q \cdot \nabla_{H_a^n}(k). \quad (7.14)$$

Beweis: Wir zerlegen zunächst $V_{H_a^{n+q}}$ in a^q faces der Dimension n . Auf Grund von Korollar 7.3 ist klar, daß dieser Kantenschnitt die Kardinalität $\frac{q(a-1)}{2} \cdot a^{n+q}$ hat. Jedes der faces der Dimension n können wir nun laut Voraussetzung in k quasioptimale Mengen zerlegen, wobei wir annehmen können, daß die entsprechenden Partitionen in allen faces isomorph zueinander sind. Auf Grund von Proposition 7.2 ist klar, daß eine quasioptimale Menge in H_a^n auch eine quasioptimale Menge in H_a^{n+q} ist. Also erhalten wir die Aussage des Lemma. ■

Satz 7.2 *Es gibt eine balancierte Partitionierung von H_a^n in $k = a^p + 1$ quasioptimale Mengen.*

Beweis: Wir zerlegen zunächst $V_{H_a^n}$ in $k - 1 = a^p$ faces F_1, \dots, F_{k-1} der Dimension $n - p$ und definieren hierüber die Mengen $A'_i \subseteq F_i$, $i = 1, \dots, k - 1$, mit $A'_i \cong L_m^{n-p}$ für $m = \left\lfloor \frac{a^{n-p}}{k} \right\rfloor$. Für H_a^n konstruieren wir nun hieraus eine k -Partitionierung $\{A_1, \dots, A_k\}$, indem wir $A_i = F_i \setminus A'_i$ für $i = 1, \dots, k - 1$ und $A_k = A'_1 \cup \dots \cup A'_{k-1}$ bilden.

Auf Grund von Proposition 7.1 sind alle Mengen A_i optimale Mengen, jedoch ist die entstehende Partitionierung gegebenenfalls nicht balanciert. Um die Partitionierung zu balancieren, brauchen wir allerdings nur eine konstante Anzahl an Knoten von der Partition A_k nach den Partitionen A_i mit $i < k$ verschieben. Die Anzahl der Knoten, die ausgetauscht werden müssen, hängt auf Grund unserer Konstruktion nur von a und p ab. Dies sind aber nach Voraussetzung Konstanten, so daß die Anzahl der Knoten, die verschoben werden müssen, ebenfalls konstant ist. Da die Mengen A_i optimale Mengen sind und wir höchstens eine konstante Anzahl an Knoten verschieben müssen, sind die neu entstandenen Mengen, nennen wir sie \tilde{A}_i , $i = 1, \dots, k$, natürlich quasioptimal. Auf Grund von Korollar 7.4 ist somit die entsprechende k -Partitionierung $\{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k\}$ von H_a^n quasiminimal. ■

Wir berechnen nun explizit die Asymptote für $\nabla_{H_a^n}(k)$ mit $k = a^p + 1$, die aus dem Beweis zu Satz 7.2 folgt. Dazu berechnen wir zunächst den Wert für $\theta_{H_a^n}(m)$ mit $m = \lfloor a^n/k \rfloor$. Betrachten wir also erneut die Zerlegung von $V_{H_a^n}$ in $k - 1 = a^p$ faces F_1, \dots, F_{k-1} der Dimension $n - p$. Die Knotenzahl in all diesen faces F_i , $i = 1, \dots, k - 1$, ist größer als m , denn $m = \lfloor a^n/k \rfloor = \lfloor \frac{a^n}{a^p+1} \rfloor < \lfloor \frac{a^n}{a^p} \rfloor = a^{n-p} = |F_i|$. Da alle faces F_i optimale Mengen sind, muß somit die Menge L_m^n eine Teilmenge von genau einem dieser faces sein. Wenn wir die Menge L_m^n aus diesem face herausschneiden, so hat der entsprechende Kantenschnitt eine Kardinalität von $\theta_{H_a^{n-p}}(m)$. Jeder

Knoten aus L_m^n hat in H_a^n noch $(a-1) \cdot p$ Kanten zu Knoten in die anderen *faces*. Somit können wir für den Kantenschnitt, um L_m^n aus H_a^n herauszuschneiden, die folgende Rekursion aufstellen

$$\theta_{H_a^n}(m) = \theta_{H_a^{n-p}}(m) + \frac{p(a-1)}{k} a^n + O(n),$$

wobei $O(n)$ den Fehlerterm darstellt, den wir dadurch bekommen, das wir auf die Integer-Rundungen verzichtet haben. Aus dieser Rekursion erhalten wir für $n \rightarrow \infty$

$$\theta_{H_a^n}(m) \sim \frac{(a-1)(k-1)p}{k(k-2)} a^n. \quad (7.15)$$

Setzen wir nun (7.15) in (7.13) ein, so erhalten wir mit $k = a^p + 1$

$$\nabla_{H_a^n}(a^p + 1) \sim \frac{(a-1)p a^p}{2(a^p - 1)} a^n. \quad (7.16)$$

Wenden wir nun für $k = a^p + a^q = a^q(a^{p-q} + 1)$ Satz 7.2 und Lemma 7.1 unter Berücksichtigung von (7.16) an, so erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 7.5 Sei $p > q \geq 0$. Für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$\nabla_{H_a^n}(a^p + a^q) \sim \frac{pa^p - qa^q}{a^p - a^q} \cdot \frac{a-1}{2} \cdot a^n.$$

Wir berechnen nun ein zu Korollar 7.5 analoges Ergebnis für den Fall $k = a^p - a^q$ mit $p > q \geq 0$. Neben Lemma 7.1 benötigen wir dazu eine zu Satz 7.2 analoge Aussage zur Partitionierung von H_a^n in $k = a^p - 1$ quasioptimale Mengen. Satz 7.3 liefert uns diese Aussage. In dem Beweis zu diesem Satz benutzen wir als Schreibweise, um spezielle *faces* von H_a^n zu identifizieren, n -dimensionale charakteristische Vektoren über dem Alphabet $\{0, 1, \dots, a-1, *\}$. Hierbei bedeutet ein “*” als Eintrag für eine Komponente eines Vektors, daß das entsprechende *face* alle Knoten von $V_{H_a^n}$ enthält, deren Adresse an der entsprechenden Komponente einen beliebigen Eintrag aus $\{0, 1, \dots, a-1\}$ enthält.

Satz 7.3 Es existiert für $n \geq 2p - 1$ eine balancierte Partitionierung von H_a^n in $k = a^p - 1$ quasioptimale Mengen.

Beweis: Wir zeigen, daß sich $V_{H_a^n}$ in bestimmte Mengen A_1, \dots, A_k zerlegen läßt für die gilt: $|A_i| - a^n/k \leq const$, $i = 1, \dots, k$, wobei die Konstante $const$ nur von a und k abhängig ist. Wir konstruieren eine solche balancierte Partitionierung in k quasioptimale Mengen in drei Schritten, wobei wir annehmen $n \geq 2p - 1$.

Im ersten Schritt zerlegen wir $V_{H_a^{2p-1}}$ in p Mengen von *faces* der Dimension $p - 1$. Wir bezeichnen diese Mengen mit Y_0, \dots, Y_{p-1} und definieren sie über die charakteristische Vektoren

der zugehörigen *faces*.

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= \{(t_1, \dots, t_p, *, \dots, *) \mid t_1, \dots, t_{p-1} \in \{0, \dots, a-1\}, t_p \neq 0\}, \\
 Y_1 &= \{(t_1, \dots, t_{p-2}, *, 0, t_{p+1}, *, \dots, *) \mid t_1, \dots, t_{p-2}, t_{p+1} \in \{0, \dots, a-1\}, t_{p+1} \neq 0\}, \\
 &\vdots \\
 Y_i &= \{(t_1, \dots, t_{p-i-1}, \underbrace{*, \dots, *}_{i}, \underbrace{0, \dots, 0}_{i}, t_{p+i}, \underbrace{*, \dots, *}_{p-i-1}) \mid \\
 &\quad t_1, \dots, t_{p-i-1}, t_{p+i} \in \{0, \dots, a-1\}, t_{p+i} \neq 0\}, \\
 &\vdots \\
 Y_{p-2} &= \{(t_1, \underbrace{*, \dots, *}_{p-2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-2}, t_{2p-2}, *) \mid t_1, t_{2p-2} \in \{0, \dots, a-1\}, t_{2p-2} \neq 0\}, \\
 Y_{p-1} &= \{(\underbrace{*, \dots, *}_{p-1}, 0, \dots, 0, t_{2p-1}) \mid t_{2p-1} \in \{0, \dots, a-1\}\}.
 \end{aligned}$$

Es gibt insgesamt a^p faces S_1, \dots, S_{a^p} der Dimension $p-1$. Sei $S_{a^p} \in Y_{p-1}$ das face mit dem charakteristischen Vektor $(*, \dots, *, 0, \dots, 0)$. Wir konstruieren einen bipartiten Graphen $N = (X, Y, E)$ mit $X = S_{a^p}$ und $Y = (\bigcup_{i=0}^{p-1} Y_i) \setminus S_{a^p}$. In diesem Graphen existiert genau dann eine Kante $\{x, y\} \in E$, wenn $x \in X$, $y \in Y$ und das face y enthält mindestens einen Knoten von $V_{H_a^{2p-1}}$ mit einer Hamming-Distanz von eins zu x . Der Knotengrad eines jeden Knotens $y \in Y$ entspricht einer Potenz von a . Das heißt, $\exists i \in \{0, \dots, p-1\} : \deg(y) = a^i$. Jeder Knoten $x \in X$ ist genau zu $a-1$ Knoten aus Y mit Knotengrad a^i , $i = 0, \dots, p-1$, adjazent. Also gilt $\deg(x) = (a-1)p$ für jeden Knoten $x \in X$.

In Abbildung 7.1 haben wir als Beispiel den entsprechenden bipartiten Graphen $N = (X, Y, E)$ für H_3^5 und $p = 3$ dargestellt. Die Knoten am linken Rand der Abbildung stellen dabei die Knoten des face S_{3^3} also die Knoten der Menge X dar und sind durch ihren charakteristischen Vektor bezeichnet. Die Knoten am rechten Rand der Abbildung stellen die Knoten der Menge Y dar. Das heißt, sie repräsentieren ein gesamtes face S_i , welches wiederum durch den charakteristischen Vektor eindeutig bezeichnet ist.

Für einen Knoten z des Graphen N bezeichnen wir durch $N(z)$ die Menge der Knoten, die zu z adjazent sind. Ferner sei für einen Knoten $x \in X$ die Menge $N_r(x) = N(x) \cap Y_r$ mit $r \in \{0, \dots, p-1\}$ definiert. Schließlich definieren wir noch für jedes face $y \in Y_r$ mit $r \in \{0, \dots, p-1\}$ eine Indexnummer $\text{ind}(y)$ wie folgt.

Betrachten wir zunächst den Fall $r \in \{0, p-1\}$. Sei $x', x'' \in X$. Es gilt $N_0(x') \cap N_0(x'') = \emptyset$ und $N_{p-1}(x') = N_{p-1}(x'')$. Somit können wir annehmen, daß für jedes $x \in X$ und $r \in \{0, p-1\}$ eine bijektive Abbildung $f_r^x : N_r(x) \longrightarrow \{1, \dots, a-1\}$ existiert, und im Falle $r = p-1$ alle Funktionen f_r^x isomorph sind. Wir definieren nun für $y \in N_r(x)$ die Indexnummer $\text{ind}(y) = f_r^x(y)$.

Kommen wir nun zu dem Fall $0 < r < p-1$. Wir bezeichnen mit F_{t_1, \dots, t_r} die Knotenteilmenge des face S_{a^p} mit dem charakteristischen Vektor $(t_1, \dots, t_r, *, \dots, *, 0, \dots, 0)$ wobei $t_1, \dots, t_r \in$

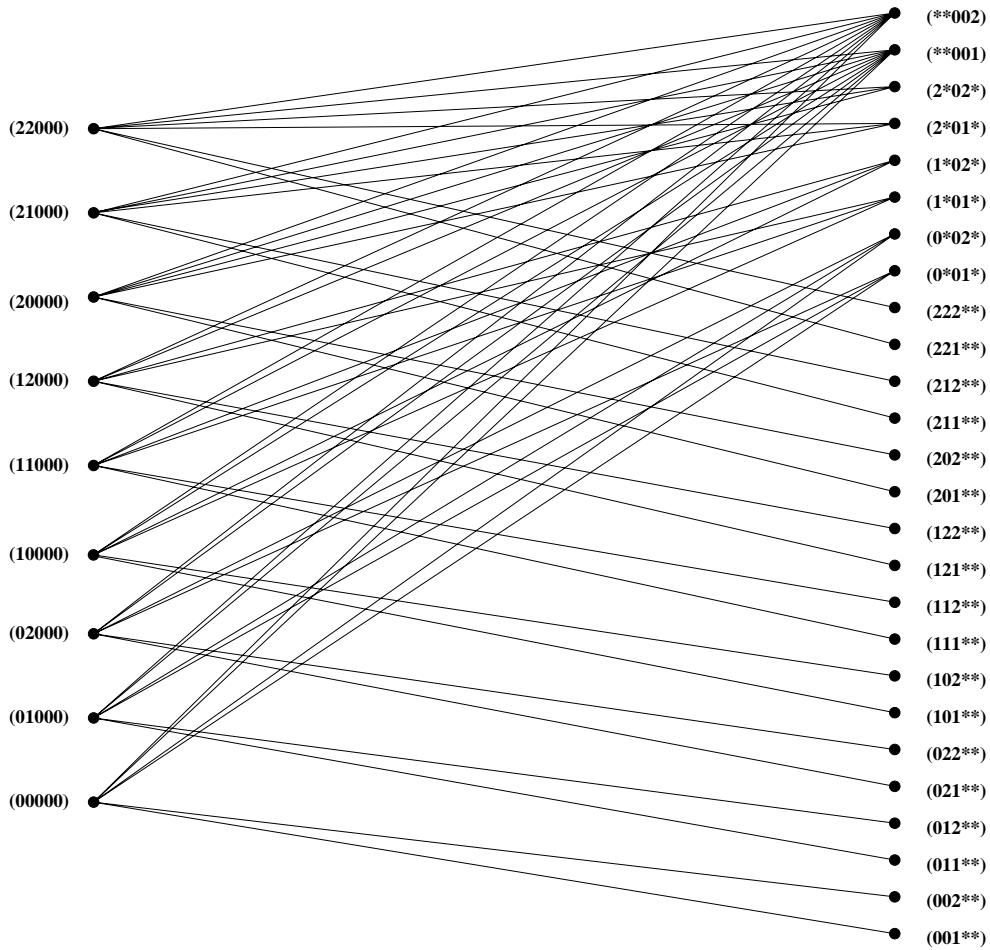


Abb. 7.1: Der bipartite Graph $N = (X, Y, E)$ für H_3^5 und $p = 3$.

$\{0, \dots, a-1\}$. Bilden wir nun für ein festes r alle möglichen Knotenteilmengen F_{t_1, \dots, t_r} , so erhalten wir eine Zerlegung der Knotenmenge X . Seien $x' \in F_{t'_1, \dots, t'_r}$ und $x'' \in F_{t''_1, \dots, t''_r}$. Falls $(t'_1, \dots, t'_r) \neq (t''_1, \dots, t''_r)$, dann gilt $N_r(x') \cap N_r(x'') = \emptyset$, und falls $(t'_1, \dots, t'_r) = (t''_1, \dots, t''_r)$, dann gilt $N_r(x') = N_r(x'')$. Somit können wir auch hier wiederum annehmen, daß für jedes $x = (t_1, \dots, t_r, 0, \dots, 0) \in X$ eine bijektive Abbildung $f_r^x : N_r(x) \longrightarrow \{1, \dots, a-1\}$ existiert. Folglich definieren wir für $y \in N_r(x)$ die Indexnummer erneut durch $\text{ind}(y) = f_r^x(y)$.

Insgesamt ist damit die Indexnummer für jeden Knoten $y \in Y$ wohldefiniert und für $x \in X$, $r \in \{0, \dots, p-1\}$ und $j \in \{1, \dots, a-1\}$ enthält die Menge $N_r(x)$ genau einen Knoten y mit $\text{ind}(y) = j$.

Im zweiten Schritt benutzen wir die Zerlegung aus dem ersten Schritt, um eine Partitionierung von H_a^n in die Mengen A_1, \dots, A_{a^p-1} zu erhalten. Dazu sei angemerkt, daß sich H_a^n durch $H_a^{2p-1} \times H_a^{n-2p+1}$ darstellen läßt. Für $u \in V_{H_a^{2p-1}}$ bezeichnen wir mit $H(u)$ das face der Dimension $n-2p+1$ in der obigen Darstellung von H_a^n , welches den Knoten u enthält. Für $i = 1, \dots, a^p$ bilden wir

$H_i = \bigcup_{u \in S_i} H(u)$. Jede Menge H_i ist ein *face* von $V_{H_a^n}$ der Dimension $n - p$ und damit eine optimale Menge in H_a^n . Wenn wir nun die Menge H_{a^p} in $a^p - 1$ nahezu gleichgroße Mengen zerlegen und jeweils eine dieser Mengen je einer der Mengen H_1, \dots, H_{a^p-1} zuordnen, so erhalten wir insgesamt eine Partitionierung A_1, \dots, A_{a^p-1} mit $\left| |A_i| - \frac{a^n}{a^p-1} \right| \leq const$, $i = 1, \dots, a^p - 1$, wobei die Konstante $const$ nicht von n abhängt.

Um dies zu erreichen, betrachten wir ein *face* $H(u)$ mit $u \in S_{a^p}$ und nehmen an, wir könnten dieses *face* in $p(a-1)$ optimale Mengen $P_{p-1}^l(u), \dots, P_0^l(u)$, $l = 1, \dots, a-1$, zerlegen, so daß für $j = 0, \dots, p-1$ gilt $\left| |P_j^l(u)| - \left\lfloor \frac{a^j}{a^p-1} a^{n-2p+1} \right\rfloor \right| \leq const$, wobei die Konstante $const$ nicht von n abhängt. Wir nehmen ferner an, daß die Partitionierungen von $H(u)$ für alle u isomorph sind. Betrachten wir nun ein *face* S_i mit $i \neq a^p$ und S_i entspricht einem Knoten $y \in Y_r$ in dem bipartiten Graphen N . Wir bilden die Mengen

$$A_i = H_i \cup \bigcup_{x \in N(y)} P_{p-1-r}^{\text{ind}(y)}(x), \quad i = 1, \dots, a^p - 1.$$

Wenn wir nun die erwähnte Eigenschaft des bipartiten Graphen N ausnutzen, daß der Grad der Knoten von Y_r gerade a^r ist, so erhalten wir unmittelbar

$$|A_i| = a^{n-p} + a^r \left(\frac{a^{p-1-r}}{a^p-1} a^{n-2p+1} + c \right) = \frac{a^n}{a^p-1} + c',$$

wobei c und c' Konstanten sind, die nicht von n abhängen. Insgesamt bedeutet dies, daß alle Mengen A_i die entsprechenden Kardinalitäten haben und quasioptimal sind.

Im dritten Schritt bleibt zu zeigen (siehe Annahme im zweiten Schritt), daß wir ein *face* H_a^t mit $t = n - 2p + 1$ in $p(a-1)$ optimale Mengen P_{p-1}^l, \dots, P_0^l so zerlegen können, daß gilt $\left| |P_j^l| - \left\lfloor \frac{a^j}{a^p-1} a^t \right\rfloor \right| \leq const$, $l = 1, \dots, a-1$.

Wir konstruieren eine solche Partitionierung durch Induktion über t . Falls $t \leq p$ verwenden wir eine trivial Partitionierung, indem eine Partition a^t Knoten enthält und alle anderen Partitionen leer sind.

Sei nun $t > p$. Wir stellen H_a^t dar als $H_a^p \times H_a^{t-p}$ und bezeichnen für $u \in V_{H_a^p}$ mit $H^{t-p}(u)$ das *face* der Dimension $t-p$ in der obigen Darstellung von H_a^t , welches den Knoten u enthält. Betrachten wir nun das *face*, das aus den Knoten der Menge $V_{H_a^p}$ gebildet wird, und zerteilen es in die *faces* $Q_{p-1}^l, Q_{p-2}^l, \dots, Q_0^l$, $l = 1, \dots, a-1$, welche durch die charakteristischen Vektoren $(l, *, \dots, *)$, $(0, l, *, \dots, *)$, \dots , $(0, \dots, 0, l)$ eindeutig festgelegt sind. Für $l = 1, \dots, a-1$ und $r = 0, \dots, p-1$ bilden wir $R_r^l = \bigcup_{u \in Q_r^l} H^{t-p}(u)$. Es gilt $|R_r^l| = a^r \cdot a^{t-p}$.

Durch Induktion partitionieren wir nun das *face* $H^{t-p}(0, \dots, 0)$ in die Mengen $\tilde{R}_{p-1}^l, \dots, \tilde{R}_0^l$ mit $\left| |\tilde{R}_r^l| - \left\lfloor \frac{a^r}{a^p-1} a^{t-p} \right\rfloor \right| \leq const$ und bilden anschließend $P_r^l = R_r^l \cup \tilde{R}_r^l$, $l = 1, \dots, a-1$, $r = 0, \dots, p-1$. Damit hat jede Menge P_r^l die entsprechende Kardinalität und ist auf Grund von Proposition 7.1 eine optimale Menge. ■

Wir berechnen nun explizit die Asymptote für $\nabla_{H_a^n}(k)$ mit $k = a^p - 1$, die aus dem Beweis zu Satz 7.3 folgt. Dazu berechnen wir zunächst den Wert für $\theta_{H_a^n}(m)$ mit $m = \lfloor a^n/k \rfloor$. Betrachten wir also erneut die Zerlegung von $V_{H_a^n}$ in a^{p-1} faces der Dimension $n-p+1$ und den charakteristischen Vektoren $(x_1, \dots, x_{p-1}, *, \dots, *), x_1, \dots, x_{p-1} \in \{0, \dots, a-1\}$. Die Menge $A = L_m^n$ mit $m = \lfloor a^n/k \rfloor$ ist eine Teilmenge des face mit dem charakteristischen Vektor $(\underbrace{0, \dots, 0}_{p-1}, *, \dots, *)$.

Wir bezeichnen dieses face mit F .

Es gilt $|A| = a^{n-p} + \lfloor \frac{1}{k} a^{n-p} \rfloor$. Wenn wir nun das face F in die faces F_i der Dimension $n-p$ und den charakteristischen Vektoren $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-p}, i, *, \dots, *)$, $i \in \{0, \dots, a-1\}$, zerlegen, so hat

die Menge A einen nicht-leeren Schnitt mit genau zwei solchen faces F_0 und F_1 . Diese faces zerteilen die Menge A in zwei Teilmengen A_0 und A_1 , wobei gilt $A_0 = F_0$ und $A_1 \subseteq F_1$ mit $|A_1| = \lfloor \frac{a^{n-p}}{k} \rfloor$. Somit besteht die Menge der Schnittkanten $\theta_{H_a^n}(A)$ aus vier Untermengen: $\theta_{H_a^{n-p}}(A_1)$, $\{\{u, v\} \in E_{H_a^n} \mid u \in F_0, v \in F_1 \setminus A_1\}$, $\{\{u, v\} \in E_{H_a^n} \mid u \in A, v \in F_i \text{ mit } i \geq 2\}$ und $\{\{u, v\} \in E_{H_a^n} \mid u \in A, v \notin F\}$. Durch die Berechnung der Kardinalitäten dieser vier Kantenmengen und unter Berücksichtigung, daß $A = L_m^n$ gilt, erhalten wir die folgende Rekursion

$$\begin{aligned} \theta_{H_a^n}(m) &= \theta_{H_a^{n-p}}\left(\frac{a^{n-p}}{k}\right) + \frac{k-1}{k} \cdot a^{n-p} + (a-2) \cdot a^{n-p} + \frac{a-2}{k} \cdot a^{n-p} \\ &\quad + \frac{(a-1)(p-1)}{k} \cdot a^n + O(n). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Der Term $O(n)$ in (7.17) entspricht dem Fehlerterm, den wir dadurch bekommen, daß wir auf die Integer-Rundungen verzichtet haben. Aus der Rekursion (7.17) erhalten wir für $n \rightarrow \infty$

$$\theta_{H_a^n}(m) \sim \frac{p(a-1)(k+1)-2}{k^2} \cdot a^n. \quad (7.18)$$

Setzen wir nun (7.18) in (7.13) ein, so erhalten wir mit $k = a^p - 1$

$$\nabla_{H_a^n}(a^p - 1) \sim \frac{p(a-1)a^p - 2}{2(a^p - 1)} \cdot a^n. \quad (7.19)$$

Wenden wir nun für $k = a^p - a^q = a^q(a^{p-q} - 1)$ Satz 7.3 und Lemma 7.1 unter Berücksichtigung von (7.19) an, so erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 7.6 Sei $p > q \geq 0$. Für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$\nabla_{H_a^n}(a^p - a^q) \sim \frac{p(a-1)a^p - q(a-1)a^q - 2a^q}{2(a^p - a^q)} \cdot a^n.$$

7.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir Schranken für die Kardinalität eines minimalen Kantenschnitts einer balancierten k -Partitionierung von Hamming Graphen H_a^n entwickelt. Für spezielle Werte von

k konnten wir dabei exakte Ergebnisse für $\nabla_{H_a^n}(k)$ bestimmen und für beliebige Werte von k sowohl untere wie obere Schranken angeben. Darüber hinaus haben wir für spezielle Werte von k Asymptoten für den minimalen Kantenschnitt unseres Problems bestimmt.

Wir wollen nun unsere Ergebnisse bezüglich des Problems der k -Partitionierung des Hypercubes interpretieren. Für $a = 2$ entspricht der Graph H_a^n dem n -dimensionalen Hypercube Q^n . Somit erhalten wir aus dem Korollar 7.3 und dem Satz 7.1 die folgenden Ergebnisse für den minimalen Kantenschnitt einer balancierten k -Partitionierung des Hypercubes Q^n .

Für $k = 2^p$ mit $p \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq n$ gilt:

$$\nabla_{Q^n}(k) = \frac{p}{2} \cdot 2^n = \log_2(k) \cdot 2^{n-1}.$$

Für $2^{p-1} < k < 2^p$ mit $p \in \mathbb{N}$ und $n > 2(p-1)$ gilt:

$$\frac{\log_2(k) - 1}{2} \cdot 2^n \leq \frac{p-1}{2} \cdot 2^n \leq \nabla_{Q^n}(k) \leq (p+2) \cdot 2^n \leq (\log_2(k) + 3) \cdot 2^n.$$

Wenn wir unsere Betrachtungen aus Abschnitt 7.3 auf die balancierte k -Partitionierung des Hypercubes Q^n beschränken, so können wir für einige Werte von k die Asymptoten explizit bestimmen. Dazu definieren wir $c(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla_{Q^n}(k)/2^n$. Unsere Konstruktionen aus den Beweisen zu den Sätzen 7.2 und 7.3 stellen sicher, daß für entsprechende Werte von k dieser Grenzwert existiert. In der Tabelle 7.1 haben wir die Funktionswerte $c(k)$ bis zu dem Wert $k = 20$ dargestellt. Nur für $k \in \{11, 13, 19\}$ sind unsere Ergebnisse aus Abschnitt 7.3 nicht anwendbar und somit die entsprechenden Werte in der Tabelle als unbekannt offen gelassen. Die Funktionswerte für $k \in \{2, 4, 8, 16\}$ folgen direkt aus Korollar 7.3. Für $k \in \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18\}$ erhalten wir die entsprechenden Funktionswerte durch die Anwendung des Korollar 7.5 und die Werte für $c(7), c(14)$ und $c(15)$ analog durch die Anwendung des Korollar 7.6. Etwas überraschend bilden die Werte keine monotone Folge, jedoch können wir diese Beobachtung nicht schlüssig erklären.

Tab. 7.1: Einige asymptotische Ergebnisse

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$c(k)$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{11}{6}$	-	2	-	$\frac{29}{14}$	$\frac{31}{15}$	2	$\frac{32}{15}$	$\frac{31}{14}$	-	$\frac{7}{3}$

Die in diesem Kapitel vorgestellten Methoden und Beweise für die Hamming Graphen lassen sich auf andere Graph-Klassen übertragen. Betrachten wir beispielsweise die Graphen B_a^n , die sich als n -faches kartesisches Produkt des vollständig bipartiten Graphen mit $2a$ Knoten darstellen lassen. Exakt definiert ist B_a^n der Graph mit der Knotenmenge

$$\tilde{V}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = (\mu_{x_i}, \sigma_{x_i}), \mu_{x_i} \in \{0, \dots, a-1\}, \sigma_{x_i} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n\},$$

und zwei Knoten (x_1, \dots, x_n) und (y_1, \dots, y_n) sind genau dann adjazent, wenn ein Index $j \in \{1, \dots, n\}$ existiert, so daß $x_i = y_i$ für alle $i \neq j$ gilt, und $\{x_j, y_j\}$ eine Kante des vollständig

bipartiten Graphen B_a^1 ist. (In B_a^1 sind die Knoten $x = (\mu_x, \sigma_x)$ und $y = (\mu_y, \sigma_y)$ genau dann adjazent, wenn $\sigma_x \neq \sigma_y$.) Für $v = (x_1, \dots, x_n) \in \tilde{V}^n$ mit $x_i = (\mu_{x_i}, \sigma_{x_i})$ definieren wir analog zu den Hamming Graphen die lexikographische Ordnungszahl $\tilde{\ell}(v) = \sum_{i=1}^n (2 \cdot \mu_{x_i} + \sigma_{x_i}) \cdot (2a)^{n-i}$ und durch

$$\tilde{L}_m^n = \{v \in \tilde{V}^n \mid 0 \leq \tilde{\ell}(v) < m\}$$

die Knotenmenge, die das initiale Segment von \tilde{L} der Kardinalität m bildet. Ahlswede und Cai [2] bewiesen, daß \tilde{L}_m^n eine optimale Menge in B_a^n für alle Kardinalitäten $m = 1, \dots, (2a)^n$ ist. Somit sind alle Argumente der Abschnitte 7.2 und 7.3 direkt auf die Graph-Klasse B_a^n übertragbar und wir erhalten entsprechende Ergebnisse für die balancierte k -Partitionierung der Graphen B_a^n .

Die vormals definierten Graphen H_a^n und B_a^n sind sehr dichte Graphen. Wir können diese Graphen allerdings bis zu einem gewissen Grad so „ausdünnen“, daß trotzdem unsere Argumente der Abschnitte 7.2 und 7.3 gültig sind und wir darüber hinaus Aussagen über den minimal erforderlichen Kantenschnitt einer balancierten k -Partitionierung von anderen Graph-Klassen mit regulären Grad erhalten. Als Beispiel zu dieser Anwendung unserer Ergebnisse definieren wir die Graphen $H_{a,l} = (V_{H_{a,l}}, E_{H_{a,l}})$ mit

$$\begin{aligned} V_{H_{a,l}} &= V' \cup V'', \quad V' = \{0, 1, \dots, a-1\}, \quad V'' = \{a, a+1, \dots, 2a-1\}, \\ E_{H_{a,l}} &= \{\{u, v\} \mid u, v \in V' \vee u, v \in V''\} \cup \\ &\quad \{\{u, v\} \mid u \in V', v \in V'', u+v \neq (2a-j) \bmod 2a, j = 1, \dots, l\}. \end{aligned}$$

Der Graph $H_{a,l}$ entspricht dem vollständigen Graphen mit $2a$ Knoten bei dem wir genau l perfekte Matchings zwischen den Knotenmengen V' und V'' entfernen. In Abbildung 7.2 ist als Beispiel der Graph $H_{3,1}$ dargestellt. Die jeweils durch die Mengen V' und V'' induzierten Teilgraphen haben wir in Fettdruck gezeichnet. Von den Verbindungskanten zwischen den Mengen V' und V'' , die in der Abbildung als dünne Linien eingezeichnet sind, haben wir die Kanten von genau einem perfekten Matching entfernt.

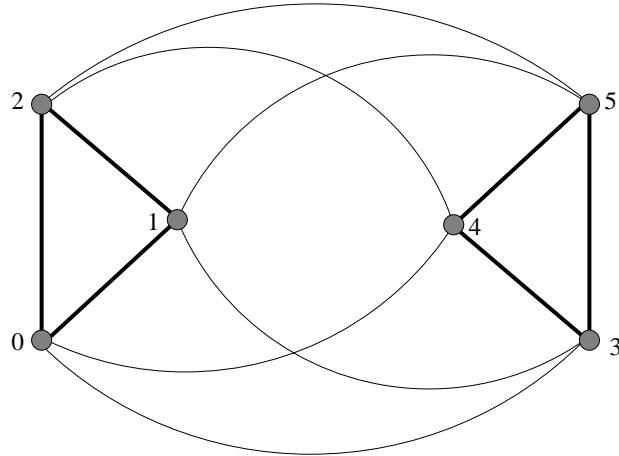
Analog zu den Hamming Graphen definieren wir $H_{a,l}^n$ als den Graphen, der sich als n -faches kartesisches Produkt des Graphen $H_{a,l}$ darstellen läßt. Dabei hat der Graph $H_{a,l}^n$ einen Knotengrad von $2a - l - 1$. Bezuglich der kantenisoperimetrischen Probleme besitzt der Graph $H_{a,l}^n$ die folgenden Eigenschaften.

Lemma 7.2 (Bezrukov, Elsässer [17])

Sei G ein beliebiger regulärer Graph mit $|V_G| = 2a$ und einem Knotengrad von $2a - l - 1$, wobei $l \leq \lfloor \frac{a}{2} \rfloor$. Es gilt für jedes $n \geq 1$ und $1 \leq m \leq |V_G|$:

$$\Theta_{H_{a,l}^n}(m) \leq \Theta_{G^n}(m) \quad \text{und} \quad I_{H_{a,l}^n}(m) \geq I_{G^n}(m).$$

Somit erhalten wir durch die Bestimmung eines entsprechenden numerischen Wertes als untere Schranke für den minimalen Kantenschnitt einer k -Partitionierung von $H_{a,l}^n$, gleichzeitig

Abb. 7.2: Der Graph $H_{3,1}$.

eine entsprechende untere Schranke für alle regulären Graphen G mit den in Lemma 7.2 genannten Eigenschaften. Der Beweis des Lemma 7.2 basiert auf der Beobachtung, daß jedes initiale Segment der lexikographischen Ordnung auf $H_{a,l}^n$ eine optimale Menge für die kantenisoperimetrischen Probleme ist. Damit sind wiederum unsere Argumente aus dem Abschnitt 7.2 direkt auf die Graph-Klasse $H_{a,l}^n$ übertragbar und wir erhalten die folgenden Ergebnisse für die balancierte k -Partitionierung dieser Graphen.

Korollar 7.7 Falls $k|2a$ und $l \leq \lfloor \frac{a}{2} \rfloor$, so gilt:

$$\nabla_{H_{a,l}^n}(k) = \frac{(k-1)2a - lk}{2k} \cdot (2a)^n$$

Korollar 7.8 Falls $k = (2a)^p$ mit $p \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq n$ und $l \leq \lfloor \frac{a}{2} \rfloor$, so gilt:

$$\nabla_{H_{a,l}^n}(k) = \frac{(2a-l-1)p}{2} \cdot (2a)^n$$

Satz 7.4 Sei $n > 2$, $(2a)^{p-1} < k < (2a)^p$, $l \leq \lfloor \frac{a}{2} \rfloor$ und $n > 2(p-1)$. Es gilt:

$$\frac{(2a-l-1)(p-1)}{2} \leq \frac{\nabla_{H_{a,l}^n}(k)}{(2a)^n} \leq \frac{6ap - 2p - 2lp + 4a}{4}$$

Abschließend sei noch angemerkt, daß unsere Resultate aus Abschnitt 7.3 auch auf das sogenannte *Pin-Limitation-Problem* [40] für Hamming Graphen angewandt werden können. Bei diesem Problem wird nach einer balancierten Partitionierung $A_G = \{A_1, \dots, A_k\}$ gesucht, so daß $\max_i |\theta(A_i)|$ minimiert wird. Da bei unseren Konstruktionen jede Teilmenge A_i eine quasioptimale Menge ist, sind die Werte für $|\theta(A_i)|$ alle asymptotisch gleich und können direkt aus den Korollarien 7.5 und 7.6 ermittelt werden.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

In Abschnitt 8.1 fassen wir nochmals die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit zusammen. Danach beschreiben wir in Abschnitt 8.2 kurz die Umsetzung bekannter und in dieser Arbeit erzielter Einbettungsergebnisse in den von uns implementierten Einbettungs-Bibliotheken *Virtuelle-Topologien* und *Virtuelle-Prozessoren*. Abschließend gehen wir in Abschnitt 8.3 dann auf mögliche und wünschenswerte Erweiterungen sowohl unserer theoretischen als auch unserer praktischen Arbeiten ein.

8.1 Ergebnisse

Der Schwerpunkt der vorgelegten Arbeit liegt in der Analyse von Einbettungen hypercubischer und gitterähnlicher Strukturen in d -dimensionale Gitter. Dabei unterscheiden wir zwischen beweisbar optimalen injektiven Einbettungen (Kapitel 4 bis 6) und der Untersuchung des entsprechenden k -Partitionierungsproblems (Kapitel 7). Besonderer Beachtung haben wir der Entwicklung und exemplarischen Anwendung von Methoden zur Bestimmung von unteren Schranken für die entsprechenden Kostenmaße gewidmet (Kapitel 3). Diese Methoden basieren auf der Lösung gewisser Extremalmengenprobleme aus der Diskreten Mathematik und bilden die Grundlage für nahezu alle unteren Schranken Beweise dieser Arbeit.

In Kapitel 4 beschäftigten wir uns mit der Bestimmung beweisbar optimaler Einbettungen von binären hypercubischen Graphen in mehrdimensionale Gitter. Wir konnten eine exakte Lösung für das entsprechende Problem einer bijektiven Einbettung mit minimaler Kantenauslastung bestimmen und ferner eine exakte Lösung für das Problem einer bezüglich der Leitungslänge optimalen bijektiven Einbettung unter der Annahme angeben, daß alle Seitenlängen des mehrdimensionalen Gitters gleich sind. Somit haben wir zwei offene Forschungsprobleme [35, 85] gelöst. Darüber hinaus präsentierten wir wiederum unter der Annahme, daß alle Seitenlängen des mehrdimensionalen Gitters gleich sind, asymptotisch optimale Lösungen für das

Kantenstreckungsproblem. Abgerundet wurde dies Kapitel durch die Untersuchung einiger Spezialfälle, wie der einer injektiven Einbettung des binären Hypercubes in ein zweidimensionales Gitter und der Simulation eines uniaxialen Hypercube-Algorithmus auf einem Gitternetzwerk. Insbesondere für das erstgenannte Problem konnten wir verbesserte untere und obere Schranken bestimmen.

In Kapitel 5 haben wir uns mit injektiven Einbettungen beliebiger zweidimensionaler Gitter in andere zweidimensionale Gitter mit kleinerem Aspekt-Ratio beschäftigt. Wir konnten untere und obere Schranken für die Kantenauslastung einer entsprechenden Einbettung bestimmen, die maximal um den Wert eins differieren. Des weiteren konnten wir beweisen, daß die in [76] entwickelte Methode bezüglich der Kantenstreckung eine optimale Einbettung für die genannte Problemstellung liefert. Diesen Beweis führten wir, in dem wir eine scharfe untere Schranke für die genannte Problemstellung nachgewiesen haben.

In Kapitel 6 haben wir die Simulationseigenschaften eines Ringes im Vergleich zu einer Linie (eindimensionales Gitter) für beliebige Bäume untersucht. Wir konnten zeigen, daß es bei der Einbettung eines beliebigen Baumes weder bezüglich der Schnittweite noch bezüglich der Leitungslänge einen Unterschied macht, ob ein Ring oder eine Linie als Gastgebergraph vorliegt. Ein entsprechendes Ergebnis für das Kostenmaß Bandweite ist aus der Literatur bekannt [75].

In Kapitel 7 bestimmten wir ausgehend vom Hypercube untere und obere Schranken für den minimalen Kantenschnitt einer balancierten k -Partitionierung von Hamming Graphen. Wenden wir unsere Ergebnisse auf die k -Partitionierung des Hypercubes an, so können wir die Asymptote aus [40] für den minimalen Kantenschnitt genauer fassen. Da das Graph-Partitionierungsproblem als eine Relaxation des *many-to-one* Einbettungsproblems angesehen werden kann, runden die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse gleichzeitig die Betrachtungen des Kapitels 4 ab.

8.2 Anwendungen

Die in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen zu Einbettungsproblemen mit dem d -dimensionalen Gitter als Gastgebergraphen wurden maßgeblich motiviert durch unsere praktischen Arbeiten zur Implementierung eines *Einbettungs-Kernels* für die kommerzielle Laufzeitumgebung für Parallelrechner PARIX¹ der Parsytec GmbH. Ein Ziel bei dem Design der Laufzeitumgebung PARIX bestand darin, die Programmierung der Parallelrechner der Parsytec GmbH, die nahezu alle auf einer zweidimensionalen Gittertopologie basieren, weitestgehend unabhängig von der verwandten Hardware zu machen. Dabei ist ein entscheidender Aspekt, die Fähigkeit der Laufzeitumgebung ein Netzwerk, welches verschieden von der Hardware-Topologie ist, effizient simulieren zu können. Dieses Simulationsproblem entspricht graphentheoretisch dem in dieser Arbeit untersuchten Einbettungsproblem.

¹PARIX (PARallel extensions to UnIX)

Viele der auch heute noch existierenden Parallelrechner besitzen keine speziellen Routing-chips, das heißt Kommunikation ist nur durch direkte Nachbarschaftskommunikation möglich und damit verbraucht die Routingsoftware Prozessorleistung. In diesem Fall ist eine effiziente Simulation eines Netzwerkes beziehungsweise eine gute Prozessorzuteilung für die kommunizierenden Prozesse gleichzusetzen mit einer möglichst geringen Distanz zwischen den Prozessoren, auf die diese Prozesse plaziert werden. Als graphentheoretisches Maß für diese Lokalität bietet sich also eine Einbettung des Netzwerkes oder des Prozeßgraphen in den Prozessographen mit minimaler Kantenstreckung an.

In PARIX 1.x (siehe [158]) haben wir das Konzept der *virtuellen Topologien* integriert. Eine virtuelle Topologie besteht aus einer Menge von Prozessen und einer Menge von festen Kommunikationsverbindungen zwischen diesen Prozessen, so daß sich insgesamt eine spezifische Topologie ergibt. In einer Software-Bibliothek haben wir als virtuelle Topologien mehrdimensionale Gitter, Tori, Hypercubes, vollständige Bäume, de Bruijn Graphen und vollständige Graphen inklusive deren Realisation auf einem zweidimensionalen Gitter zusammengefaßt. Als Grundlage für die Implementierungen haben wir injektive Einbettungen mit minimaler Kantenstreckung von den eben genannten Graphen in zweidimensionale Gitter verwandt. Neben der Funktionalität konnten wir für kommunikationsintensive parallele Applikationen auch einen erheblichen Laufzeitgewinn im Vergleich zu einer „straightforward“ Simulation nachweisen [157, 158]. Ähnliche Ansätze sind in der Literatur beschrieben [7, 69, 97, 117, 118].

In den nachfolgenden PARIX Versionen ist die von uns implementierte *Virtuelle-Prozessoren-Bibliothek* [152, 153] integriert worden, deren Funktionalitäten weit über die der virtuellen Topologien hinausgeht. Die zur Verfügung stehenden Topologien sind als C++ Deskriptorenklassen implementiert. Zu diesen Topologien zählen d -dimensionale Gitter und Tori, Linien und Ringe, Star-Graphen, Hypercubes, de Bruijn Graphen, vollständige Graphen und vollständige Bäume. Neben den Funktionalitäten der virtuellen Topologien stehen in der Virtuellen-Prozessoren-Bibliothek sowohl injektive wie auch *many-to-one* Einbettungen von jeder Topologie in jede andere zur Verfügung. Der umfangreichste Teil der Implementierungen bezog sich auf die Berechnung entsprechender Einbettungen. Dabei haben wir sowohl verschiedene aus der Literatur bekannte Techniken umgesetzt, als auch die von uns neu entwickelten Verfahren implementiert. Zu den bekannten Verfahren gehören die Methoden zur Einbettung von Gittern in Hypercubes [28, 30, 72, 105, 159], Bäume in Linien und Gitter [67], de Bruijn Graphen in Hypercubes [8]. Die von uns neu entwickelten Verfahren, insbesondere zur Einbettung der oben genannten Topologien in d -dimensionale Gitter und Tori, basieren auf den Ideen und Analysen, die wir in den Kapiteln 4, 5 und 6 dieser Arbeit, sowie in der Dissertation von Röttger [125] ausführlich beschrieben haben. Für einige spezielle Instanzen der obigen Einbettungsprobleme haben wir pragmatische zweistufige Ansätze gewählt. Zum Beispiel für die Einbettung eines Baumes in den de Bruijn Graphen, berechnen wir zunächst eine Einbettung des Baumes in einen Hypercube und dann eine Einbettung des Hypercubes in den de Bruijn Graphen.

Wir haben die von uns implementierten Einbettungsfunktionen neben den Kriterien *balancierte Last* und *geringe Kantentreckung* auch nach den beiden folgenden Kriterien ausgewählt: *schnelle, verteilte Berechnung* und *universelle Anwendbarkeit*. Der erste Aspekt bezieht sich dabei auf eine *verteilte* beziehungsweise *parallele* Berechnung der Einbettung. Darunter verstehen wir, daß jeder beteiligte Prozessor, ohne die gesamte Einbettung berechnen zu müssen, feststellen kann, welchen Gastknoten er simuliert. Dazu muß der Prozessor eine Funktion auswerten, die der „Umkehrung der Einbettung“ entspricht. Außerdem muß jeder Prozessor anhand der Einbettung feststellen, mit welchen anderen Knoten der von ihm zu simulierende Gastknoten eine Kommunikationsverbindung besitzt. Im Gegensatz dazu kann die Einbettung natürlich auch *zentral* auf einem Prozessor berechnet werden. Das Ergebnis der Berechnung wird anschließend an die entsprechenden Prozessoren verteilt, so daß jedem Prozessor alle notwendigen Informationen zur Verfügung stehen. Jeder Prozessor kennt nach dieser Informationsverteilung sowohl den zu simulierenden Knoten als auch die Knoten, mit denen sein Gastknoten durch eine direkte Verbindung kommunizieren kann.

Der zweite oben genannte Aspekt bezieht sich auf die Anwendbarkeit der Einbettungsfunktionen. Es gibt eine Vielzahl von effizienten Algorithmen, die nur für spezielle Instanzen eines Einbettungsproblems anwendbar sind (beispielsweise quadratische Gitter als Gastgebergraphen [3, 48, 103]). Wenn uns das Kosten-Nutzen Verhältnis angemessen erschien, haben wir diese in die Bibliothek mit aufgenommen, ansonsten jedoch eher den Algorithmen den Vorzug gegeben, die auf alle Instanzen eines Einbettungsproblems anwendbar sind.

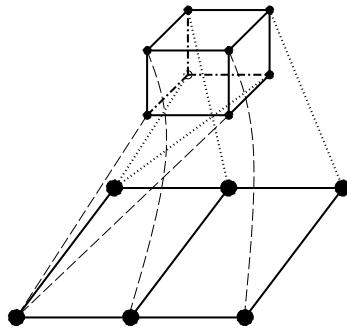
Bei der Entwicklung der Virtuellen-Prozessoren-Bibliothek haben wir besonderen Wert auf einfach zu erlernende und einfach zu benutzende Schnittstellen gelegt. In Abbildung 8.1 haben wir dargestellt, wie man einen Hypercube der Dimension drei auf einem virtuellen 3×2 Gitter instanziert, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, daß die tatsächlich benutzte Hardware-Topologie für die Errichtung des Hypercubes nicht bekannt ist.

Der erste Schritt ist die eindeutige Identifizierung des aktuellen Rechenknotens. Diese Identifikation wird durch eine Bibliotheksfunction durchgeführt und ist für die Kommunikation und als Parameter für einige der Topologie-Konstruktoren erforderlich.

Als zweites werden Deskriptoren für das Gitter und den Hypercube generiert. Der Hypercube Deskriptor (HypercubeDesc) wird durch die Angabe der Dimension, also in diesem Fall drei, generiert. Der Deskriptor für das Gitter (GridDesc) hingegen verlangt die Übergabe eines *Coord* Arguments, was einem Vektor von Zahlen entspricht. Durch die Länge des Vektors ist dabei die Dimension des Gitters festgelegt und die einzelnen Einträge stehen dabei für die Seitenlängen der jeweiligen Gitterdimensionen.

Bis hierhin wurde noch keine neue Topologie wirklich aufgebaut, aber alle benötigten Informationen sind verfügbar. Durch den Aufruf des Gitter Konstruktors (grid) wird nun ein 3×2 Gitter auf der aktuellen virtuellen Topologie, falls vorhanden, oder eben der Hardware-Topologie, falls zuvor keine anderen virtuellen Topologien generiert wurden, aufgebaut. Dies geschieht

durch die Berechnung und Umsetzung einer entsprechenden Einbettung, wobei wir diese Einbettung in der Abbildung 8.1 der Übersichtlichkeit halber nicht dargestellt haben. Der Aufruf des Hypercube Konstruktors (hc) etabliert nun einen durch den entsprechenden Deskriptor beschriebenen Hypercube, also einen aus acht Knoten bestehenden Hypercube der Dimension drei. Dies geschieht durch eine Einbettung des Hypercubes in die aktuelle virtuelle Topologie, das heißt in das 3×2 Gitter. Neben der in der Abbildung 8.1 durch die gestrichelten Linien angedeuteten Knotenabbildung werden dabei auch Kommunikationsverbindungen zwischen den virtuellen Hypercubeknoten und den Knoten auf die diese abgebildet werden eingerichtet. All dieses geschieht, verborgen vor dem Benutzer, automatisch durch die Bibliotheksfunktionen, und es ist der einzige Zeitpunkt, zu dem die Einbettungsfunktionen aufgerufen werden.



```
// get identification
Node &my = Node::My();
...
// get Grid and Hypercube
// descriptors
GridDesc griddesc(Coord(3,2));
HypercubeDesc hcdesc(3)
...
// build topologies
Grid grid(my,griddesc);
Hypercube hc(my,hc);
```

Abb. 8.1: Instanziierung eines Hypercubes der Dimension drei auf einem virtuellen 3×2 Gitter.

8.3 Erweiterungen

Bezüglich der in dieser Arbeit erzielten theoretischen Ergebnisse sehen wir verschiedene Anknüpfungspunkte für weitere Forschungsarbeiten. Eine der interessantesten Fragen in diesem Zusammenhang ist die nach der weiteren Verwendbarkeit unserer unteren Schranken Methoden aus Kapitel 3. Auf den ersten Blick erscheinen diese Möglichkeiten auf Grund der Komplexität der zu lösenden (isoperimetrischen) Unterprobleme recht eingeschränkt. Jedoch lassen sich mit Hilfe algebraischer Methoden verschiedene isoperimetrische Ungleichungen angeben, die wiederum als Abschätzungen bei unseren Methoden Anwendung finden können. Als Beispiel für eine spektrale untere Schranke für das kantenisoperimetrische Problem auf einem Graphen $G = (V, E)$ sei hier ein Ergebnis von Alon [4] zitiert:

$$\Theta_G(m) \geq \lambda_2(L_G) \frac{m(|V| - m)}{|V|},$$

wobei L_G wiederum die Laplace Matrix von G und $\lambda_2(L_G)$ den zweitkleinsten Eigenwert dieser Matrix bezeichnet. Für eine Übersicht zu bekannten Ergebnissen im Zusammenhang mit isope-

rimetrischen Ungleichungen verweisen wir hier auf die Arbeiten [14, 15, 22] und die Monographie [36]. Für konkrete Einbettungsprobleme können wir also durch die Kombination unserer Methoden und entsprechender algebraischer Resultate relativ einfach untere Schranken für die von uns betrachteten Kostenmaße zur Bewertung von Einbettungen erhalten. Inwieweit diese Schranken scharf sind oder zumindestens schärfer als bekannte Schranken sind, ist dann im Einzelfall zu prüfen.

Eine weitere offene Frage ist, inwieweit sich die Techniken aus den Kapitel 4 und 5 auf andere Einbettungsprobleme mit dem Gitter beziehungsweise dem Torus als Gastgebergraphen oder aber mit dem Hypercube als Gastgraphen ausweiten lassen. Speziell für Einbettungen des Hypercubes in den de Bruijn Graphen sehen wir erfolgversprechende Ansätze. Die Simulation von uniaxialen Hypercubealgorithmen durch spezielle Einbettungen ist zweifelsfrei noch nicht erschöpfend untersucht. Darüber hinaus erscheint es uns interessant diese Problemstellung auch für uniaxiale Gitteralgorithmen zu betrachten.

An unsere Betrachtungen in Kapitel 6 schließt sich die Frage an, ob außer den beliebigen Bäumen weitere Klassen von Graphen charakterisiert werden können, für die dieselben Aussagen bezüglich der Kostenmaße Bandweite, Schnittweite und/oder Leitungslänge zutreffen. Dazu sind zunächst einmal für weitere Graphen die exakten (zyklischen) Kostenmaße zu bestimmen. Insbesondere ist ein nach wie vor offenes Problem, was die exakte zyklische Schnittweite des Hypercubes ist. Darüber hinaus stellen sich die gleichen Fragen in Bezug auf (zweidimensionale) Gitter und Tori als Gastgebergraphen.

In Bezug auf unsere Untersuchungen in Kapitel 7 schließen sich ebenfalls einige interessante Fragen an. Hamming Graphen entsprechen dem kartesischen Produkt von vollständigen Graphen. Erweitern wir nun diese Graph-Klasse auf alle Graphen, die als kartesisches Produkt von beliebigen Graphen darstellbar sind, so stellt sich die Frage nach Schranken für den minimalen Kantenschnitt einer balancierten k -Partitionierung von diesen Graphen. Des weiteren gilt es die Frage zu untersuchen, für welche Graph-Klassen die spektrale untere Schranke aus Lemma 3.4 eine scharfe untere Schranke liefert und ob sich weitere Graph-Klassen spezifizieren lassen, für die unsere auf der Lösung des kantenisoperimetrischen Problems basierende Methode eine schärfere untere Schranke liefert.

Bezüglich der von uns implementierten Einbettungs-Bibliotheken sind verschiedene Erweiterungen denkbar und wünschenswert. Einerseits besitzen immer mehr Parallelrechner ein separates Routingnetzwerk. Das bedeutet, daß die Prozessoren nicht mehr durch Routingaufgaben belastet werden. In diesem Fall ist für eine gute Plazierung der kommunizierenden Prozesse die Distanz zwischen den Prozessoren, auf die die Prozesse plaziert werden, nicht so entscheidend. Vielmehr entscheidet die Belastung des Routingnetzwerkes über den Kommunikationsoverhead. Graphentheoretisch sind somit Einbettungen des Prozeßgraphen in das Routingnetzwerk mit minimaler Kantenauslastung von gesteigerter Bedeutung.

Ein weiterer Punkt bezieht sich darauf, daß ein Anwender gegebenenfalls Topologien verwenden will, die die Bibliotheken bis dato nicht unterstützen. Um eine angemessene Simulation dieser Topologien auf der Hardware oder auf anderen virtuellen Topologien zu gewährleisten drängt sich der Wunsch nach einem auf Heuristiken basierenden universellen Einbettungsalgorithmus auf. Dieser könnte auf Meta-Heuristiken wie beispielsweise Simulated Annealing basieren oder aber auf einer dualen Partitionierung des Prozeß- und des Prozessorgraphen aufbauen.

Der letzte Punkt, den wir hier kurz diskutieren wollen, bezieht sich darauf, daß in FEM Anwendungen sehr häufig Diskretisierungsgraphen auftreten, die aus einem anfänglich (strukturierten oder regulären) zwei- oder dreidimensionalen Gitter durch eine Reihe von Verfeinerungsschritten hervorgehen. Solche Graphen werden als *Quasigitter* bezeichnet und lassen sich als gitterähnliche Strukturen im zwei- oder dreidimensionalen euklidischen Raum modellieren. In Abbildung 8.2 haben wir einen solchen Graphen dargestellt.

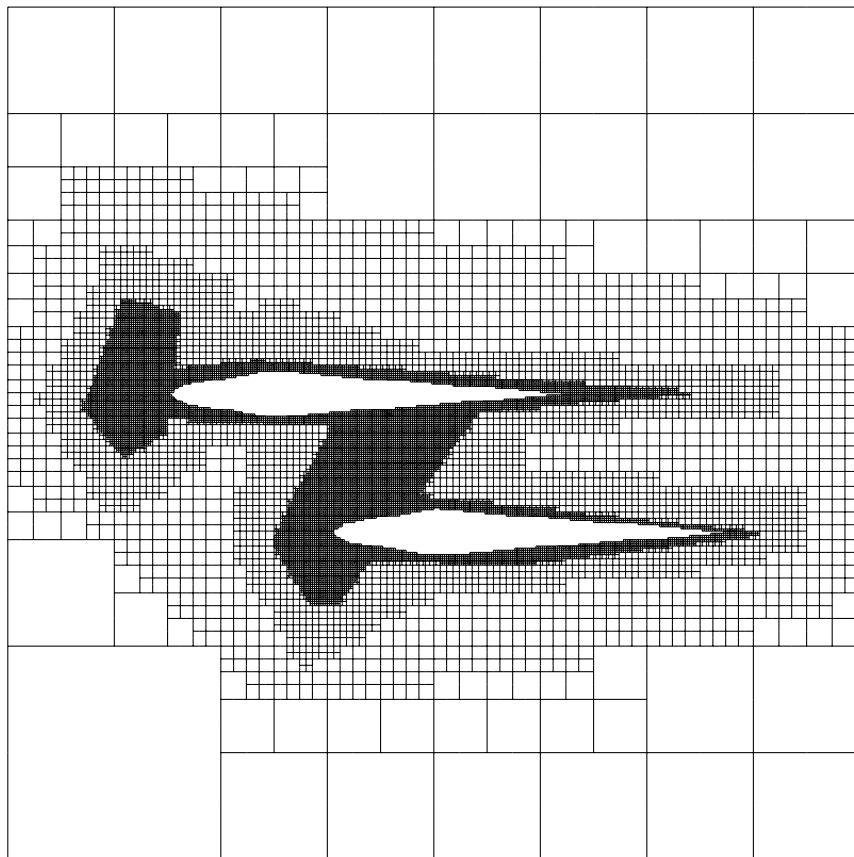


Abb. 8.2: Ein zweidimensionales Quasigitter als FEM Graph zur numerischen Berechnung der Luftströmung um zwei Flugzeugtragflächen. Der Graph hat 21701 Knoten und 42038 Kanten. Die schwarzen Flächen stellen extrem stark verfeinerte Gebiete dar. (Zur Darstellung dieser Verfeinerungen reicht die Auflösung der Abbildung nicht aus.)

Bei dem Einsatz von Parallelrechnern in entsprechenden FEM Anwendungen stellt sich das Problem, eine effiziente *many-to-one* Einbettung beliebiger Quasigitter in die Topologie des Parallelrechners zu berechnen. Dies kann einerseits durch einen zweistufigen Ansatz, wie wir ihn in Abschnitt 1.2 beschrieben haben, geschehen. Das heißt, es wird zunächst eine k -Partitionierung des Quasigitters vorgenommen und anschließend eine Einbettung des entstehenden Clustergraphen in die Topologie des Parallelrechners berechnet. Als direktes Verfahren zur Einbettung beliebiger Quasigitter in zwei- oder dreidimensionale Gittertopologien haben wir in [129, 144] die Anwendbarkeit des *selbstorganisierenden Merkmalsmappings von Kohonen* [83] untersucht.

Dieses aus der Neuroinformatik stammende und allgemein als Kohonen-Prozeß bezeichnete Verfahren bildet Punkte eines euklidischen Raumes auf sogenannte adaptive Neuronen ab, deren Anordnung einer gewissen Topologie entspricht. Die Adaption erfolgt dabei durch einen Iterationsprozeß mit dem Ziel, Punkte des Raumes, die nahe beieinander liegen, auf nahe beieinanderliegende Neuronen zu plazieren. Um diesen Prozeß für das oben beschriebene Graph-Einbettungsproblem zu verwenden, weisen wir jedem Prozessor einen Merkmalsvektor zu, dessen Dimension der Dimension des euklidischen Raumes in dem das Quasigitter ausgelegt ist entspricht. Diese Merkmalsvektoren übernehmen die Funktion eines adaptiven Neurons. Es wird nun wiederholt und zufällig ein Punkt x des Quasigitters ausgewählt, danach der Merkmalsvektor c bestimmt, der die minimale euklidische Distanz zu dem gewählten Punkt x aufweist, und abschließend werden alle Merkmalsvektoren der Prozessoren in Richtung des Punktes x verschoben. Die Stärke dieser Verschiebungen ist dabei umgekehrt proportional zu der bezüglich der Topologie des Rechners entsprechenden Nähe der Prozessoren zu dem Prozessor, dem der Merkmalsvektor c zugeordnet ist. Die Stärke der Verschiebungen nimmt zusätzlich mit der Zeit ab, so daß das Verfahren konvergiert. In Abbildung 8.3 haben wir einen solchen Adaptionsschritt illustriert.

Das Verfahren terminiert nach einer vorher festgelegten Anzahl an Adaptionsschritten. Die Einbettung erhalten wir dann durch die Zerlegung des euklidischen Raumes mittels des durch die Merkmalsvektoren induzierten Voronoi-Diagramms.

Der gerade skizzierte Algorithmus hat sich in Tests [129] als brauchbares Verfahren zur Einbettung von Quasigittern in zwei- oder dreidimensionale Gitter erwiesen. Weitere Untersuchungen sind allerdings nötig, um optimale Parameter bei der Anwendung des Kohonen-Prozesses in Bezug auf Güte und Laufzeit zu ermitteln. Des weiteren könnte die Eignung des Verfahrens zur dynamischen Einbettung sich adaptiv verändernder Quasigitter eine interessante Fragestellung darstellen.

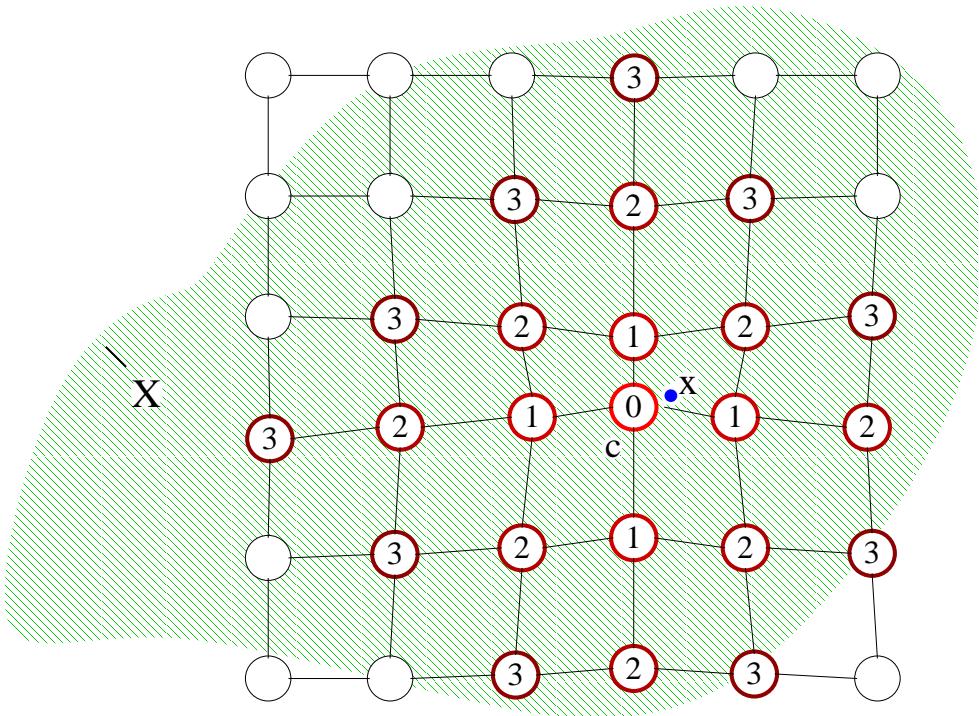


Abb. 8.3: Die Adaption der Merkmalsvektoren bezüglich eines gewählten Punktes x . Die schraffierte Fläche stellt den zweidimensionalen euklidischen Raum dar in dem ein Quasigitter als Diskretisierungsgraph ausgelegt sein soll. Zur besseren Übersicht haben wir auf die Darstellung eines solchen Quasigitters verzichtet. Die eingezeichneten Knoten repräsentieren die Merkmalsvektoren der Prozessoren eines 6×6 Gitters. Der Merkmalsvektor, der die minimale euklidische Distanz zu dem gewählten Punkt x aufweist, ist mit c bezeichnet. In einigen Knoten haben wir durch die entsprechenden Zahlenwerte die Entfernung (bzgl. der Gittertopologie) der Prozessoren zu dem Prozessor, dem der Merkmalsvektor c zugeordnet ist, angedeutet. Die Adaptionsstärke der Merkmalsvektoren ist umgekehrt proportional zu diesen Zahlenwerten und erfolgt in Richtung des gewählten Punktes x .

Literaturverzeichnis

- [1] R. Ahlswede, S. L. Bezrukov, Edge Isoperimetric Theorems for Integer Point Arrays, *Appl. Math. Lett.*, **8**(2), 75–80, 1995.
- [2] R. Ahlswede, N. Cai, General Edge Isoperimetric Inequalities, *Eur. J. Comb.*, **18**(4), 355–372, 1997.
- [3] R. Aleliunas, A. Rosenberg, On Embedding Rectangular Grids in Square Grids, *IEEE Transactions on Computers*, **C-31**(9), 907–913, 1982.
- [4] N. Alon, On the edge-expansion of graphs, *Combinatorics, Probability and Computing*, **6**, 145–152, 1997.
- [5] B. Alspach, J.-C. Bermond, D. Sotteau, Decomposition into Cycles. I: Hamilton Decompositions, in *Cycles and Rays: Basic Structures in Finite and Infinite Graphs*, Proc. NATO Adv. Res. Workshop, Montreal, Can., 1987, NATO ASI Ser., Ser. C 301, 1990, S. 9–18.
- [6] F. S. Annexstein, Embedding Hypercubes and Related Networks into Mesh-Connected Processor Arrays, *J. Parallel Distrib. Comput.*, **23**(1), 72–79, 1994.
- [7] F. S. Annexstein, Parallel Implementations of Graph Embeddings, *Parallel Architectures and Their Efficient Use*, Lecture Notes in Computer Science 678, Springer-Verlag, Heidelberg, 1993, S. 207–217.
- [8] M. Baumslag, M. C. Heydemann, J. Opatrny, D. Sotteau, Embeddings of Shuffle-like Graphs in Hypercubes, *Parallel Architectures and Languages Europe, PARLE'91*, Lecture Notes in Computer Science 505, Springer-Verlag, Heidelberg, 1991, S. 179–190.
- [9] A. Bel Hala, Congestion optimale du plongement de l'hypercube $H(n)$ dans la chaîne $P(2^n)$, *J. Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications*, **27**(5), 465–481, 1993.
- [10] S. Bettayeb, Z. Miller, T. Peng, I. H. Sudborough, Embedding k -D Meshes into Optimum Hypercubes with Dilation $2k - 1$, in *Parallel and Distributed Computing, Theory and*

- Practice, Proc. of the 1st Canada-France Conference on Parallel Computing*, Lecture Notes in Computer Science 805, Springer-Verlag, Heidelberg, 1994, S. 73–80.
- [11] S. Bettayeb, Z. Miller, I. H. Sudborough, Embedding Grids into Hypercubes, in *Proc. of Aegean Workshop on Computing*, Lecture Notes in Computer Science 319, Springer-Verlag, Heidelberg, 1988, S. 200–211.
- [12] S. L. Bezrukov, An Isoperimetric Problem for Manhattan Lattices, in *Proc. of the International Conference on Sets, Graphs and Numbers*, Budapest, 1991, S. 2–3.
- [13] S. L. Bezrukov, On k -Partitioning the n-Cube, in *Proc. of the 22st Internat. Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, WG'96, Lecture Notes in Computer Science 1197, Springer-Verlag, Heidelberg, 1997, S. 44–55.
- [14] S. L. Bezrukov, Isoperimetric Problems in Discrete Spaces, in *Extremal Problems for Finite Set*, Bolyai Society Mathematical Studies 3, ed.: P. Frankl, Z. Füredi, G. Katona, D. Miklos, János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1994, S. 59–91.
- [15] S. L. Bezrukov, Edge Isoperimetric Problems on Graphs, in *Graph Theory and Combinatorial Biology*, Bolyai Society Mathematical Studies 7, János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1999, S. 157–197.
- [16] S. L. Bezrukov, On the simulation of uniaxial hypercube algorithms, Manuscript.
- [17] S. L. Bezrukov, R. Elsässer, Edge Isoperimetric Inequalities for Regular Graphs, Manuscript.
- [18] S. L. Bezrukov, B. Rovan, B. Monien, R. Preis, J. P. Tillich, New spectral lower bounds on the bisection width of graphs, in *Proc. of the 26th Internat. Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, WG'00, Lecture Notes in Computer Science 1928, Springer-Verlag, Heidelberg, 2000, S. 23–34.
- [19] S. N. Bhatt, F. T. Leighton, A framework for solving VLSI graph layout problems. *J. Comput. System Sci.*, **28**, 300–343, 1984.
- [20] J. E. Boillat, P. G. Kropf, A Fast Distributed Mapping Algorithm, in *Proc. of CONPAR 90–VAPP IV: Joint International Conference on Vector and Parallel Processing*, Lecture Notes in Computer Science 457, Springer-Verlag, Heidelberg, 1990, S. 405–416.
- [21] B. Bollobás, The isoperimetric number of random regular graphs, *European J. Combinatorics*, **9**, 241–244, 1988.
- [22] B. Bollobás, I. Leader, Compressions and Isoperimetric Inequalities, *J. Combinatorial Theory, A*-**56**, 47–62, 1991.

- [23] C. F. Bornstein, A. Litman, B. M. Maggs, R. K. Sitaraman, T. Yatzkar, On the bisection width and expansion of butterfly networks, in *Proc. of the 12th Int. Parallel Processing Symposium, IPPS'98*, 1998, S. 144–150.
- [24] J. Brandenburg, D. S. Scott, Embeddings of Communication Trees and Grids into Hypercubes, *Technischer Bericht Nr. 280182-001*, Intel Scientif. Comput., 1985.
- [25] T. N. Bui, S. Chaudhuri, F. T. Leighton, M. Sisper, Graph bisection algorithms with good average case behaviour, *Combinatorica*, **7**(2), 171–191, 1987.
- [26] Y. Cai, S.-H. S. Huang, C.-C. Lin, Embedding Two-Dimensional Grids into Hypercubes with Dilation 2 and Congestion 5, in *Internat. Conference on Parallel Processing, ICPP'95*, Oconomowoc, WI, III, 1995, S. 105–112.
- [27] M. Y. Chan, Dilation 2-Embedding of Grids into Hypercubes, in *Internat. Conference on Parallel Processing, ICPP'88*, St. Charles, IL, 1988, S. 295–298.
- [28] M. Y. Chan, Embedding of Grids into Optimal Hypercubes, *SIAM J. Computing*, **20**(5), 834–864, 1991.
- [29] M. Y. Chan, F. Y. L. Chin, On Embedding Rectangular Grids in Hypercubes, *IEEE Trans. on Computers*, **37**(10), 1285–1288, 1988.
- [30] M. Y. Chan, F. Y. L. Chin, A Parallel Algorithm for an Efficient Mapping of Grids in Hypercubes, *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, **4**(8), 933–946, 1993.
- [31] M. Y. Chan, F. Chin, C. N. Chu, W. K. Mak, Dilation-5 Embedding of 3-Dimensional Grids into Hypercubes, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **33**, 98–106, 1996.
- [32] J. D. Chavez, L. H. Harper, Global Methods of Combinatorial Optimization, erscheint in *The Encyclopedia of Mathematics*, Cambridge University Press.
- [33] J. D. Chavez, R. Trapp, The Cyclic Cutwidth of Trees, *Disc. Appl. Mathematics*, **87**, 25–32, 1998.
- [34] P. Z. Chinn, J. Chvátalová, A. K. Dewedney, N. E. Gibbs, The Bandwidth Problem for Graphs and Matrices - a Survey, *Journal of Graph Theory*, **6**, 223–254, 1982.
- [35] F. R. K. Chung, Labelings of Graphs, *Selected Topics in Graph Theory*, **3**, Academic Press, 151–168, 1988.
- [36] F. R. K. Chung, Spectral Graph Theory, *Conference Board of the Mathematical Sciences – Regional Conference Series in Mathematics*, **92**, American Mathematical Society, 1997.

- [37] F. R. K. Chung, S.-T. Yao, A Near Optimal Algorithm for Edge Separators, in *Proc. of the 26th ACM Symposium on Theory of Computing*, 1994, S. 1–8.
- [38] J. Chvátalová, Optimal Labelling of a Product of two Paths, *Disc. Mathematics*, **11**, 249–253, 1975.
- [39] D. E. Culler, R. M. Karp, D. A. Patterson, A. Sahay, K. E. Schauser, E. Santos, R. Subramonian, T. van Eicken, LogP: Towards a Realistic Model of Parallel Computation, in *Proc. of the 4th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Pract. of Parallel Programming, PPOPP'93*, 1993, S. 1–12.
- [40] R. Cypher, Theoretical Aspects of VLSI Pin Limitations, *SIAM J. Computing*, **22**, 356–378, 1993.
- [41] R. A. DeMillo, S. C. Eisenstat, R. J. Lipton, Preserving Average Proximity in Arrays, *Communications of the ACM*, **21**, 228–231, 1978.
- [42] R. Diekmann, Load balancing strategies for data parallel applications, *Dissertation*, Universität Paderborn, Logos Verlag, 1998.
- [43] R. Diekmann, R. Lüling, J. Simon, Problem Independent Distributed Simulated Annealing and its Applications, in *Applied Simulated Annealing*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 396, Springer-Verlag, Heidelberg, 1993, S. 17–44.
- [44] R. Diekmann, R. Lüling, B. Monien, C. Spräner, Combining Helpful Sets and Parallel Simulated Annealing for the Graph-Partitioning Problem, *Int. J. Parallel Algorithms and Applications*, **8**, 1–84, 1996.
- [45] R. Diekmann, B. Monien, R. Preis, Using Helpful Sets to Improve Graph Bisections, in *Interconnection Networks and Mapping and Scheduling Parallel Computations*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **21**, AMS, 57–73, 1995.
- [46] W. E. Donath, A. J. Hoffman, Lower Bounds for the Partitioning of Graphs, *IBM J. Research Developments*, **17**, 420–425, 1973.
- [47] J. Dongarra, H.-W. Meuer, The TOP 500-Project, <http://www.TOP500.org>.
- [48] J. A. Ellis, Embedding Rectangular Grids into Square Grids, *IEEE Transactions on Computers*, **40**(1), 46–52, 1991.
- [49] R. Elsässer, A. Frommer, B. Monien, R. Preis, Optimal and Alternating-Direction Load-balancing Schemes, *Proc. EURO-PAR'99 Parallel Processing*, ed.: P. Amestoy et al., Lecture Notes in Computer Science 1685, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999, S. 280–290.

- [50] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 1, Wiley, New York, 1968.
- [51] M. J. Flynn, A Simple Model for Parallel Processing, *IEEE Transactions on Computers*, **C-21**(9), 948–960, 1972.
- [52] U. Freise, Simulation von Hypercubealgorithmen auf 2-dimensionalen Gittern, *Diplomarbeit*, Universität Paderborn, 1996.
- [53] M. R. Garey, R. L. Graham, D. S. Johnson, D. E. Knuth, Complexity results for bandwidth minimization, *SIAM J. Appl. Math.*, **34**, 477–495, 1978.
- [54] M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.
- [55] M. R. Garey, D. S. Johnson, R. L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete graph problems, *Theoretical Computer Science*, **1**, 237–267, 1976.
- [56] J. Gehring, M. Nübel, Sortieren großer Datenmengen auf einem massiv parallelen System, *Diplomarbeit*, Universität Paderborn, 1994.
- [57] A. George, J. R. Gilbert, J. W. H. Liu, Graph Theory and Sparse Matrix Computations, *The IMA Volumes in Math. and its Appl.*, **56**, Springer-Verlag, 1993.
- [58] N. E. Gibbs, W. G. Poole, P. K. Stockmeyer, A comparison of several bandwidth and profile reduction algorithms, *ACM Trans. Math. Soft.*, **2**, 322–330, 1976.
- [59] J. R. Gilbert, G. L. Miller, S.-H. Teng, Geometric Mesh Partitioning: Implementation and Experiments, in *Proc. of the International Parallel Processing Symposium, IPPS'95*, 1995, S. 418–427.
- [60] A. Gonzalez, M. Valero-Garcia, L. Diaz de Cerio, Executing Algorithms with Hypercube Topology on Torus Multicomputers, *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **6**(8), 803–814, 1995.
- [61] F. Gray, Pulse Code Communications, *U.S. Patent 2 632 058*, 17. März 1953.
- [62] C.-J. Guu, The Circular Wirelength Problem for Hypercubes, *Dissertation*, University of California, Riverside, 1997.
- [63] S. W. Hammond, Mapping Unstructured Grid Computations to Massively Parallel Computers, *Tech. Rep. 92.14*, RIACS, NASA Ames Research Center, 1992.
- [64] L. H. Harper, Optimal Assignments of Numbers to Vertices, *J. Society Industrial Applied Mathematics*, **12**, 131–135, 1964.

- [65] L. H. Harper, Optimal Numberings and Isoperimetric Problems on Graphs, *J. Comb. Theory*, **1**(3), 385–393, 1966.
- [66] I. Havel, J. Móraevk, B-valuations of Graphs, *Czech. Math. J.*, **22**, 1972, 338–351, 1972.
- [67] R. Heckmann, R. Klasing, B. Monien, W. Unger, Optimal Embedding of Complete Binary Trees into Lines and Grids, in *Proc. of the 17th Internat. Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG'91*, Lecture Notes in Computer Science 570, Springer-Verlag, Heidelberg, 1991, S. 25–35.
- [68] H.-U. Heiss, *Prozessorzuteilung in Parallelrechnern*, BI-Wissenschaftsverlag (Reihe Informatik: Bd. 98), Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1994.
- [69] B. Hendrickson, R. Leland, The Chaco User's Guide: Version 2.0, *Tech. Rep. SAND94-2692*, Sandia National Lab., 1994.
- [70] B. Hendrickson, R. Leland, An Improved Spectral Graph Partitioning Algorithm for Mapping Parallel Computations, *SIAM J. on Scientific Computing*, **16**(2), 452–469, 1995.
- [71] C. T. Ho, S. L. Johnsson, On the Embedding of Arbitrary Meshes in Boolean Cubes with Expansion Two Dilation Two, in *Internat. Conference on Parallel Processing, ICPP'87*, Penn State, 1987, S. 188–191.
- [72] C. T. Ho, S. L. Johnsson, Embedding Meshes in Boolean Cubes by Graph Decomposition, *Journal of Parallel an Distributed Computing*, **8**, 325–339, 1990.
- [73] J. Hromkovič, B. Monien, The bisection problem for graphs of degree 4 (configuring transputer systems), *Festschrift zum 60. Geburtstag von G. Hotz*, ed.: J. Buchmann, H. Ganzinger, W.J. Paul, Teubner-Texte zur Informatik, 1, 1992, S. 215–233.
- [74] J. Hromkovič, V. Müller, O. Sýkora, I. Vrťo, On Embedding Interconnection Networks into Rings of Processors, in *Proc. of PARLE'92*, Lecture Notes in Computer Science 605, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992, S. 53–62.
- [75] J. Hromkovič, V. Müller, O. Sýkora, I. Vrťo, On embeddings in cycles, *Information and Computation*, **118**, 302–305, 1995.
- [76] S.-H. S. Huang, H. L. Liu, R. M. Verma, A New Combinatorial Approach to Optimal Embeddings of Rectangles, *Algorithmica*, **16**, 161–180, 1996.
- [77] S.-H. S. Huang, H. L. Liu, R. M. Verma, On Embedding Rectangular Meshes into Rectangular Meshes of Smaller Aspect Ratio, *Information Processing Letters*, **63**, 123–129, 1997.

- [78] G. Karypis, V. Kumar, A Fast and High Quality Multilevel Scheme for Partitioning Irregular Graphs, *Techn. Rep. 95-035*, Dept. of Comp. Science, University of Minnesota, 1995.
- [79] G. Karypis, V. Kumar, A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs, *SIAM J. on Scientific Computing*, **20**(1), 359–392, 1999.
- [80] G. O. H. Katona, A Theorem on Finite Sets, *Theory of Graphs*, Akademia Kiado, Budapest, 187–207, 1968.
- [81] B. W. Kernighan, S. Lin, An effective heuristic procedure for partitioning graphs, *The Bell Systems Technical J.*, 291–307, 1970.
- [82] Y. M. Kim, T.-H. Lai, The Complexity of Congestion-1 Embedding in a Hypercube, *Journal of Algorithms*, **12**, 246–280, 1991.
- [83] T. Kohonen, *Self-Organization Maps*, Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [84] S. R. Kosaraju, M. J. Atallah, Optimal Simulations Between Mesh-Connected Arrays of Processors, *J. Assoc. for Computing Machinery*, **35**(3), 635–650, 1988.
- [85] T.-H. Lai, A. P. Sprague, Placement of the Processors of a Hypercube, *IEEE Transactions on Computers*, **40**(6), 714–722, 1991.
- [86] F. T. Leighton, *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Mateo, CA, 1992.
- [87] F. T. Leighton, B. Maggs, S. B. Rao, Packet Routing and Job-Shop Scheduling in $O(\text{Congestion} + \text{Dilation})$, *Combinatorica*, **14**(2), 167–186, 1994.
- [88] F. T. Leighton, B. Maggs, A. W. Richa, Fast Algorithms for Finding $O(\text{Congestion} + \text{Dilation})$ Packet Routing Schedules, *Combinatorica*, **19**(3), 375–401, 1999.
- [89] C. L. Leiserson, Area-Efficient Graph Layouts (for VLSI), in *Proc. 21st IEEE Symp. on Foundations on Computer Science*, 1980, S. 270–281.
- [90] T. Lengauer, Upper and Lower Bounds on the Complexity of the Min-Cut Linear Arrangement Problem on Trees, *SIAM J. Alg. Discrete Methods*, **3**, 99–113, 1982.
- [91] T. Lengauer, *Combinatorial Algorithms for Integrated Circuit Layout*, B.G. Teubner, 1990.
- [92] Y. X. Lin, The cyclic bandwidth problem, *Systems Sci. Math. Sci.*, **7**(3), 282–288, 1994.
- [93] Y. X. Lin, O. Sýkora, I. Vrťo, On cyclic cutwidth, Manuscript.

- [94] J. H. Lindsey II, Assignment of Numbers to Vertices, *Amer. Math. Monthly*, **7**, 508–516, 1964.
- [95] R. J. Lipton, R. E. Tarjan, A Separator Theorem for Planar Graphs, *SIAM J. Appl. Math.*, **36**, 177–189, 1979.
- [96] H. L. Liu, S.-H. S. Huang, Dilation-6 Embeddings of 3-Dimensional Grids into Optimal Hypercubes, in *Internat. Conference on Parallel Computing*, 3, 1991, S. 250–254, 1991.
- [97] E. Ma, D. G. Shea, The Embedding Kernel on the IBM Victor Multiprocessor for Program Mapping and Network Reconfiguration, in *Proc. of the Second IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing, SPDP'90*, 1990, S. 874–879.
- [98] Y. E. Ma, L. Tao, Embeddings among toruses and meshes, in *Proc. of the Internat. Conference on Parallel Processing, ICPP'87*, 1987, S. 178–187.
- [99] B. M. Maggs, L. R. Matheson, R. E. Tarjan, Models of Parallel Computation: A Survey and Synthesis, in *Proc. of the 28th Hawaii Int. Conference on System Sciences (HICSS-28)*, 2, 1995, S. 61–70.
- [100] E. Makinen, On circular layouts, *Intern. Computer Math.*, **24**, 29–37, 1988.
- [101] Y. Manabe, K. Hagihara, N. Tokura, The minimum bisection widths of the cube-connected cycles graph and cube graph, *Transactions of the IEICE*, **J67-D(6)**, 647–654, 1994.
- [102] S. Matic, Emulation of hypercube architecture on nearest-neighbor mesh-connected processing elements, *IEEE Transactions on Computers*, **39**(5), 698–700, 1990.
- [103] R. G. Melhem, G.-Y. Hwang, Embedding Rectangular Grids into Square Grids with Dilation Two, *IEEE Transactions on Computers*, **39**(12), 1446–1455, 1990.
- [104] F. Meyer auf der Heide, B. Vöcking, Shortest Paths Routing in Arbitrary Networks, *Journal of Algorithms*, **31**(1), 105–131, 1999.
- [105] Z. Miller, I. H. Sudborough, Compressing Grids into Small Hypercubes, *Networks*, **24**, 327–358, 1994.
- [106] G. Mirsky, Transversal Theory, *Mathematics Sci. and Ing.*, **75**, ed.: R. Bellman, Academic Press, New York, 1971.
- [107] B. Monien, The Bandwidth-Minimization Problem for Caterpillars with Hair Length 3 is NP-Complete, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods*, **7**(4), 505–512, 1986.

- [108] B. Monien, R. Diekmann, A local graph partitioning heuristic meeting bisection bounds, in *Proc. of the 8th SIAM Conf. on Parallel Processing for Scientific Computing, PP'97*, 1997, CD-ROM.
- [109] B. Monien, R. Diekmann, R. Lüling, Communication Throughput of Interconnection Networks, in *Proc. of the 19th Int. Symp. on Mathematical Foundations of Computer Science, MFCS'94*, Lecture Notes in Computer Science 841, Springer-Verlag, Heidelberg, 1994, S. 72–86.
- [110] B. Monien, R. Feldmann, R. Klasing, R. Lüling, Parallel Architectures: Design and Efficient Use, in *Proc. of the 10th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS'93*, Lecture Notes in Computer Science 665, Springer-Verlag, Heidelberg, 1993, S. 247–269.
- [111] B. Monien, R. Lüling, F. Langhammer, A Realizable Efficient Parallel Architecture, in *Parallel Architectures and their Efficient Use, First Heinz Nixdorf Symposium*, Lecture Notes in Computer Science 678, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992, S. 93–109.
- [112] B. Monien, R. Preis, Bisection width of 3- and 4-regular graphs, Manuscript.
- [113] B. Monien, I. H. Sudborough, Embedding one Interconnection Network in Another, *Computing Suppl.*, **7**, 257–282, 1990.
- [114] K. Nakano, Linear Layout of Generalized Hypercubes, in *Proc. of the 19st Internat. Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG'93*, Lecture Notes in Computer Science 790, Springer-Verlag, Heidelberg, 1994, S. 364–375.
- [115] R. Ostrovsky, Y. Rabani, Universal $O(\text{Congestion} + \text{Dilation} + \log^{1+\epsilon} N)$ Local Control Switching Algorithms, in *Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ACM Press, New York, 1997, S. 644–653.
- [116] C. H. Papadimitriou, The *NP*-completeness of the bandwidth minimization problem, *Computing*, **16**, 263–270, 1976.
- [117] F. Pellegrini, J. Roman, SCOTCH: A software package for static mapping by dual recursive bipartitioning of process and architecture graphs, in *Proc. of the Internat. Conference and Exhibition on High-Performance Computing and Networking, HPCN'96*, Lecture Notes in Computer Science 1067, Springer-Verlag, Heidelberg, 1996, S. 493–498.
- [118] J. F. Philbin, S. Jagannathan, R. Mirani, Virtual Topologies: A New Concurrency Abstraction for High-Level Parallel Languages, in *Proc. of the 8th Internat. Workshop on Languages and Compilers for Parallel Computing, LCPC'95*, Lecture Notes in Computer Science 1033, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995, S. 450–464.

- [119] G. Pólya, G. Szegö, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton University Press, 1966.
- [120] R. Preis, Analyses and Design of Efficient Graph Partitioning Methods, *Dissertation*, Universität Paderborn, 2000.
- [121] R. Preis, R. Diekmann, The PARTY partitioning-library, User Guide - Version 1.1, *Tech-nischer Bericht tr-rsfb-96-024*, Universität Paderborn, 1996.
- [122] R. Preis, R. Diekmann, PARTY - a software library for graph partitioning, in *Advances in Computational Mechanics with Parallel and Distributed Processing*, 63–71, 1997.
- [123] Y. Rabani, É. Tardos, Distributed Packet Switching in Arbitrary Networks, in *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ACM Press, New York, 1996, S. 366–375.
- [124] E. M. Reingold, J. Nievergelt, N. Deo, *Combinatorial Algorithms*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.
- [125] M. Röttger, Effiziente Einbettungen von Gittern in Gitter und Hypercubes, *Dissertation*, Universität Paderborn, Logos Verlag, 1998.
- [126] J. Rolim, O. Sýkora, I. Vrťo, Optimal Cutwidths and Bisection Widths of 2- and 3-Dimensional Meshes, in *Proc. of the 21st Internat. Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG'95*, Lecture Notes in Computer Science 1017, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995, S. 252–264.
- [127] F. C. Sang, I. H. Sudborough, Embedding Large Meshes into Small Ones, in *Proc. of the IEEE Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 1, 1990, S. 323–326.
- [128] C. Scheideler, *Universal Routing Strategies for Interconnection Networks*, Lecture Notes in Computer Science 1390, Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.
- [129] M. Schneider, Einbettungen in gitterbasierte Rechnernetze mit selbstorganisierenden Karten nach Kohonen, *Diplomarbeit*, Universität Paderborn, 1999.
- [130] H. Schröder, O. Sýkora, I. Vrťo, Cyclic cutwidths of the two-dimensional ordinary and cylindrical meshes, erscheint in *Discrete Applied Mathematics*.
- [131] E. J. Schwabe, Optimality of a VLSI Decomposition Scheme for the De-Bruijn Graph, *Parallel Processing Letters*, **3**, 261–265, 1993.
- [132] D. S. Scott, J. Brandenburg, Minimal mesh embeddings in binary hypercubes, *IEEE Transaction on Computers*, **37**(10), 1284–1285, 1988.

- [133] X. Shen, W. Liang, Q. Hu, On Embedding Between 2D Meshes of the Same Size, *IEEE Transactions on Computers*, **46**(8), 880–889, 1997.
- [134] L. Smarr, C. E. Catlett, Metacomputing, *Communication of the ACM*, **35**(6), 45–52, 1992.
- [135] W. I. Smirnow, Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil III(2), *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften*, 1955.
- [136] C. Thomassen, Embeddings of graphs, *Discrete Mathematics*, **124**, 217–228, 1994.
- [137] C. D. Thompson, H. T. Kung, Sorting on a Mesh-Connected Parallel Computer, *Communications of the ACM*, **20**(4), 263–271, 1977.
- [138] L. G. Valiant, A Bridging Model for Parallel Computations, *Communications of the ACM*, **33**(8), 103–111, 1990.
- [139] W. Unger, The Complexity of the Approximation of the Bandwidth Problem, in *Proceedings of the 39th IEEE Symposium on Foundation of Computer Science (FOCS '98)*, IEEE Press, 1998, S. 82–91.
- [140] C. Walshaw, M. Cross, M. G. Everett, A localised algorithm for optimising unstructured mesh partitions, *Int. J. Supercomputer Appl.*, **9**(4), 280–295, 1995.
- [141] C. Walshaw, M. Cross, M. G. Everett, Parallel dynamic graph partitioning for adaptive unstructured meshes, *J. Parallel and Distributed Computation*, **47**(2), 102–108, 1997.
- [142] M. Yannakakis, A Polynomial Algorithm for the Min-Cut Linear Arrangement of Trees, in *Proceedings of the 24th IEEE Symposium on Foundation of Computer Science (FOCS '83)*, IEEE Press, 1983, S. 274–281.
- [143] P. Zienicke, Embedding Hypercubes in 2-Dimensional Meshes, Humboldt-Universität Berlin, Manuskript.

Eigenes Literaturverzeichnis

- [144] F. d'Amore, L. Becchetti, S. L. Bezrukov, A. Marchetti-Spaccamela, M. Ottaviani, R. Preis, M. Röttger, U.-P. Schroeder, On the Embedding of Refinements of 2-dimensional Grids, in *Proc. EURO-PAR'97 Parallel Processing*, ed.: C. Lengauer, M. Griebl, S. Gorlatch, Lecture Notes in Computer Science 1200, Springer-Verlag, Heidelberg, 1997, S. 950–957.

- [145] S. L. Bezrukov, J. D. Chavez, L. H. Harper, M. Röttger, U.-P. Schroeder, Embedding of Hypercubes into Grids, in *Proceedings Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS '98)*, ed.: L. Brim, J. Gruska, J. Zlatuska, Lecture Notes in Computer Science 1450, Springer-Verlag, Heidelberg, 1998, S. 693–701.
- [146] S. L. Bezrukov, J. D. Chavez, L. H. Harper, M. Röttger, U.-P. Schroeder, The Congestion of n -Cube Layout on a Rectangular Grid, *Discrete Mathematics*, **213**, 13–19, 2000.
- [147] S. L. Bezrukov, R. Elsässer, U.-P. Schroeder, On k-partitioning of Hamming Graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **95**, 127–140, 1999.
- [148] S. L. Bezrukov, R. Elsässer, U.-P. Schroeder, On Bounds for the k-Partitioning of Graphs, in *Proc. of the 5th Annual International Conference on Computing and Combinatorics (COCOON '99)*, Lecture Notes in Computer Science 1627, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999, S. 154–163.
- [149] S. L. Bezrukov, U.-P. Schroeder, The Cyclic Wirelength of Trees, *Discrete Applied Mathematics*, **87**, 275–277, 1998.
- [150] F. T. Leighton, *Einführung in Parallele Algorithmen und Architekturen: Gitter; Bäume und Hypercubes*, Deutsche Übersetzung und Bearbeitung von B. Monien, M. Röttger und U.-P. Schroeder, International Thomson Publishing, Bonn, 1997.
- [151] B. Monien, R. Diekmann, R. Feldmann, R. Klasing, R. Lüling, K. Menzel, T. Römke, U.-P. Schroeder, Efficient Use of Parallel & Distributed Systems: From Theory to Practice, *Computer Science Today, Recent Trends and Developments*, ed.: J. van Leeuwen, Lecture Notes in Computer Science 1000, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995, S. 62–77.
- [152] T. Römke, M. Röttger, U.-P. Schroeder, J. Simon, On Efficient Embeddings of Grids into Grids in PARIX, in *Proc. EURO-PAR'95 Parallel Processing*, Stockholm, Lecture Notes in Computer Science 966, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995, S. 181–204.
- [153] T. Römke, M. Röttger, U.-P. Schroeder, J. Simon, Efficient Mapping Library for PARIX, in *Proceedings Workshop on Parallel Programming and Computation (ZEUS '95)*, IOS Press, Amsterdam, 1995, S. 275–284.
- [154] M. Röttger, U.-P. Schroeder, Embedding 2-dimensional Grids into Optimal Hypercubes with Edge-Congestion 1 or 2, *Parallel Processing Letters*, **8**(2), 231–242, 1998.
- [155] M. Röttger, U.-P. Schroeder, Efficient Embeddings of Grids into Grids, in *Proceedings of the 24th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG '98)*, Lecture Notes in Computer Science 1517, Springer-Verlag, Heidelberg, 1998, S. 257–271.

- [156] M. Röttger, U.-P. Schroeder, Efficient Embeddings of Grids into Grids, *Discrete Applied Mathematics*, **108**(1-2), 143–173, 2001.
- [157] M. Röttger, U.-P. Schroeder, J. Simon, Virtual Topology Library for PARIX, *Technischer Bericht tr-ri-94-148*, Universität Paderborn, 1994.
- [158] M. Röttger, U.-P. Schroeder, J. Simon, Implementation of a Parallel and Distributed Mapping Kernel for PARIX, in *Proc. of the Internat. Conference and Exhibition on High-Performance Computing and Networking (HPCN Europe'95)*, Lecture Notes in Computer Science 919, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995, S. 781–786.
- [159] M. Röttger, U.-P. Schroeder, W. Unger, Embedding 3-dimensional Grids into optimal Hypercubes, in *Parallel and Distributed Computing, Theory and Practice, Proc. of the 1st Canada-France Conference on Parallel Computing*, Lecture Notes in Computer Science 805, Springer-Verlag, Heidelberg, 1994, S. 81–94.

Abbildungsverzeichnis

1.1 Eine Einbettung $f = (\phi, R_\phi)$ eines Graphen G in einen Graphen H	4
1.2 Simulation zwischen einem gitterbasierten Parallelrechner und einem hypercubebasierten Parallelrechner durch die Berechnung einer Einbettung	6
1.3 Ein zweidimensionaler FEM Graph zur numerischen Berechnung der Luftströmung um eine Flugzeugtragfläche und der in 64 gleichgroße Partitionen aufgeteilte Graph	7
2.1 Der Hypercube Q^4	14
2.2 Das dreidimensionale $3 \times 4 \times 2$ Gitter	15
2.3 Der vollständige Graph K_5	15
2.4 Der Hamming Graph H_3^2	16
3.1 In (a) ist die schichtenweise Darstellung des Hypercubes Q^4 gegeben. In (b) ist in analoger Darstellung jedem Knoten des Q^4 seine Ordnungszahl bezüglich der lexikographischen Ordnung zugewiesen und in (c) entsprechendes für die Bandweitenordnung.	23
3.2 Die Ordnung F auf dem 5×8 Gitter	24
3.3 Die Ordnung L auf einem 5×8 Gitter	25
3.4 Die Ordnung S auf einem 5×8 Gitter	25
3.5 Untere-Schranken-Methode für die Kantenstreckung	27
4.1 Die Einbettung f_{ban} des Hypercubes Q^3 in die Linie der Länge acht	35
4.2 Die Einbettung f_{lex} des Hypercubes Q^3 in die Linie der Länge acht	35
4.3 Illustration zur Korrektheit der Rekursionsgleichung 4.6	40
4.4 Illustration zur Korrektheit der Rekursionsgleichung 4.6	41
4.5 Optimale Einbettung bezüglich der Kantenauslastung des $Q^5 = Q^2 \times Q^3$ in $G^2 = 4 \times 8$	45
4.6 Das kartesische Produkt der Graphen K_4 und K_2	47
4.7 Einbettung des $K_4 \times K_2$ in das 2×4 Gitter.	47

4.8 Einbettung des $Q^5 = Q^2 \times Q^3$ in $G^2 = 4 \times 8$ mittels des Produkts der Bandweiteinbettung	49
4.9 Illustration zum Beweis der unteren Schranke aus Lemma 4.3.	55
4.10 Die schematische Darstellung der Schichtenstruktur des Hypercubes Q^n	58
4.11 Batchers Bitonic-Sort Algorithmus	66
4.12 Mischen einer bitonen Zahlenfolge mittels eines <i>descend Laufes</i>	66
4.13 Einbettungen für Batchers Bitonic-Sort	68
5.1 Illustration der von uns betrachteten Instanzen des Einbettungsproblems	76
5.2 Beispiel für die Berechnung einer Einbettung des 5×31 Gitters in das 12×13 Gitter	83
5.3 Beispiel für das Routing der horizontalen Kanten des 5×31 Gitters bei einer Einbettung in das 12×13 Gitter	92
5.4 Illustration der Kantenauslastung einer vertikalen Kante (1. Fall)	93
5.5 Illustration der Kantenauslastung einer vertikalen Kante (2. Fall)	94
5.6 Die elliptische Einbettungsmatrix $M_{13 \times 13}$	98
6.1 Der einzubettende Baum B	104
6.2 Ring C mit entsprechender Knoten und Kantenbezeichnung	105
6.3 Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) des Baumes B in den Ring C	105
6.4 Die bezüglich der Einbettung (ϕ_C, R_{ϕ_C}) berechneten Integer-Tupel	106
6.5 Die von dem Algorithmus berechnete Einbettung (ϕ_L, R_{ϕ_L}) des Baumes B in die Linie L	106
6.6 $a = f, b \leq g, h = c$ und $k \leq d$	109
6.7 $a = f = h = c$	110
6.8 $a = f - 1 < f = h = c$	110
6.9 $a = f = h < h + 1 = c$	111
6.10 Skizze zur Anwendbarkeit von Halls Matching-Theorem	114
7.1 Der bipartite Graph $N = (X, Y, E)$ für H_3^5 und $p = 3$	131
7.2 Der Graph $H_{3,1}$	136
8.1 Instanziierung eines Hypercubes der Dimension drei auf einem virtuellen 3×2 Gitter	141
8.2 Ein zweidimensionales Quasigitter als FEM Graph zur numerischen Berechnung der Luftströmung um zwei Flugzeugtragflächen	143
8.3 Die Adaption der Merkmalsvektoren bezüglich eines gewählten Punktes x	145