

# Zusammenfassung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Analyse von Einbettungen hypercubischer und gitterähnlicher Strukturen in  $d$ -dimensionale Gitter. Dabei unterscheiden wir zwischen beweisbar optimalen injektiven Einbettungen und der Untersuchung des entsprechenden  $k$ -Partitionierungsproblems. Besonderer Beachtung haben wir der Entwicklung und exemplarischen Anwendung von Methoden zur Bestimmung von unteren Schranken für die entsprechenden Kostenmaße gewidmet. Diese Methoden basieren auf der Lösung gewisser Extremalmengenprobleme aus der Diskreten Mathematik und bilden die Grundlage für nahezu alle unteren Schranken Beweise dieser Arbeit. Darüber hinaus beschreiben wir in dieser Arbeit unsere Ergebnisse für einige weitere theoretische Fragestellungen, die sich im Zusammenhang mit der Untersuchung von Einbettungen in Gitternetzwerke ergeben haben. Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden auf mehreren internationalen Konferenzen vorgestellt beziehungsweise in verschiedenen Fachzeitschriften veröffentlicht.

In Kapitel 1 wird eine allgemeine Einleitung zu den in dieser Arbeit behandelten Problemstellungen gegeben und es werden verschiedene Anwendungen, die diese motivieren, skizziert.

Kapitel 2 besteht aus einer Zusammenfassung der für das Verständnis dieser Arbeit benötigten formalen Definitionen der hier betrachteten Graph-Klassen, Einbettungen und deren wesentlichen Kostenmaße, sowie bestimmten fundamentalen mathematischen Aussagen.

In Kapitel 3 beschreiben wir die von uns entwickelten und verwandten Methoden zur Bestimmung unterer Schranken für die Kostenmaße einer injektiven Einbettung, Kantenstreckung und Kantenauslastung. Darüber hinaus gehen wir auf Methoden zur Bestimmung unterer Schranken für den minimalen Schnitt einer  $k$ -Partitionierung ein.

In Kapitel 4 beschäftigen wir uns mit der Bestimmung beweisbar optimaler Einbettungen von binären hypercubischen Graphen in mehrdimensionale Gitter. Wir geben eine exakte Lösung für das entsprechende Problem einer bijektiven Einbettung mit minimaler Kantenauslastung an und bestimmen ferner eine exakte Lösung für das Problem einer bezüglich der Leitungslänge optimalen bijektiven Einbettung unter der Annahme, daß alle Seitenlängen des mehrdimensionalen Gitters gleich sind. Somit lösen wir zwei seit langem offene Forschungsprobleme. Darüber hinaus präsentieren wir in diesem Kapitel wiederum unter der Annahme, daß alle Seitenlängen des mehrdimensionalen Gitters gleich sind, asymptotisch optimale Lösungen für das Kantenstreckungsproblem. Abgerundet wird dies Kapitel durch die Untersuchung einiger Spezialfälle,

wie der einer injektiven Einbettung des binären Hypercubes in ein zweidimensionales Gitter und der Simulation eines uniaxialen Hypercube-Algorithmus auf einem Gitternetzwerk. Insbesondere für das erstgenannte Problem geben wir verbesserte untere und obere Schranken an. Die in diesem Zusammenhang erzielten Ergebnisse bilden die Basis für die Veröffentlichungen in dem Tagungsband der Konferenz *Mathematical Foundations of Computer Science '98* und in dem Journal *Discrete Mathematics, Band 213*.

In Kapitel 5 beschäftigen wir uns mit injektiven Einbettungen beliebiger zweidimensionaler Gitter in andere zweidimensionale Gitter mit kleinerem Aspekt-Ratio. Wir bestimmen untere und obere Schranken für die Kantenauslastung einer entsprechenden Einbettung, die maximal um den Wert eins differieren. Des weiteren beweisen wir, daß eine zuvor veröffentlichte Methode bezüglich der Kantenstreckung eine optimale Einbettung für die genannte Problemstellung liefert. Diesen Beweis führen wir, in dem wir eine scharfe untere Schranke für die genannte Problemstellung nachweisen. Auszüge der dargestellten Ergebnisse bilden die Grundlage für die Veröffentlichungen in dem Tagungsband des internationalen *Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science '98* sowie in dem Journal *Discrete Applied Mathematics, Band 108*.

In Kapitel 6 untersuchen wir die Simulationseigenschaften eines Ringes im Vergleich zu einer Linie (eindimensionales Gitter) für beliebige Bäume. Wir zeigen, daß es bei der Einbettung eines beliebigen Baumes weder bezüglich der Schnittweite noch bezüglich der Leitungslänge einen Unterschied macht, ob ein Ring oder eine Linie als Gastgebergraph vorliegt. Ein entsprechendes Ergebnis für das Kostenmaß Bandweite ist aus der Literatur bekannt. Unsere Ergebnisse können als Erweiterungen der entsprechenden Arbeiten angesehen werden und sind in dem Journal *Discrete Applied Mathematics, Band 87*, veröffentlicht.

In Kapitel 7 bestimmen wir ausgehend vom Hypercube untere und obere Schranken für den minimalen Kantenschnitt einer balancierten  $k$ -Partitionierung von Hamming Graphen. Wenden wir unsere Ergebnisse auf die  $k$ -Partitionierung des Hypercubes an, so können wir die Asymptote für den minimalen Kantenschnitt aus einer früheren Veröffentlichung genauer fassen. Da das Graph-Partitionierungsproblem als eine Relaxation des *many-to-one* Einbettungsproblems angesehen werden kann, runden die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse gleichzeitig die Betrachtungen des Kapitels 4 ab. Veröffentlicht sind die Ergebnisse dieses Kapitels in dem Tagungsband der internationalen *Conference on Computing and Combinatorics '99* sowie in dem Journal *Discrete Applied Mathematics, Band 95*.

Im abschließenden Kapitel 8 fassen wir zunächst die wichtigsten in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse zusammen und gehen danach kurz auf die von uns implementierten Einbettungs-Bibliotheken für die parallele Laufzeitumgebung PARIX (**PAR**allel extensions to **Un****I**X) ein. Die Arbeiten, die zu diesen Bibliotheken geführt haben, sind veröffentlicht in den Tagungsbändern der Konferenz *EURO-PAR Parallel Processing '95*, des *Workshop on Parallel Programming and Computation '95* sowie der internationalen *Conference and Exhibition on High-Performance Computing and Networking '95*.