

Zur Berechenbarkeit reeller geometrischer Probleme

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Mathematik/Informatik
der Universität Paderborn vorgelegt von

Dipl.-Math. Dipl.-Phys. Martin Ziegler

Eingereicht : 1.7.2002

Erster Gutachter : Prof. Dr. math. Friedhelm Meyer auf der Heide
(Universität Paderborn)

Zweiter Gutachter : Prof. Dr. Peter Bürgisser
(Universität Paderborn)

Externer Gutachter : Prof. Dr. Klaus Weihrauch
(FernUniversität Hagen)

Verteidigung : 11.11.2002

”Ein Narr stellt mehr Fragen, als zehn Weise beantworten können.”

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	4
1.1 und Überblick	6
2 Typ-2 Theorie der Effektivität	9
2.1 Darstellungen	9
2.2 Berechenbarkeit	11
2.3 ... und Topologie	13
2.4 Vergleich von Berechenbarkeitsbegriffen	14
2.5 Konstruktion weiterer Darstellungen	15
2.6 Einige berechenbare Funktionen	16
2.7 Funktionenräume	17
2.8 Beweistechniken	19
3 Verwandte Gebiete und Modelle	20
3.1 Rekursionstheorie	20
3.2 Klassische und Rekursive Analysis	22
3.3 Konstruktivismus und Intuitionismus	22
3.4 Numerik	24
3.5 Domain-Theorie und Intervall-Arithmetik	26
3.6 Die realRAM	27
3.7 BCSS-Theorie	28
3.8 Analytische Maschinen	29
3.9 Algorithmische Geometrie	31
3.10 Computeralgebra	32
3.11 Algebraische Modelle	32
4 LP als Beispiel für Rekursive Geometrie	33
5 Turing-Location	37
5.1 und ihre Äquivalente	43
6 Berechenbarkeit der konvexen Hülle	45
6.1 und der Menge der Extrempunkte	48
6.2 Beweise	50
7 Lineare Gleichungssysteme	51
7.1 Funktionen auf Matrizen	52
7.2 Homogene Unterräume	53
7.3 Der affine Fall	54
7.4 Spektralzerlegung	55
7.5 LGSe und LPe	58
7.6 Beweise	59

8 Zwischenbilanz	62
8.1 und Überleitung	66
9 Reguläre Mengen	67
9.1 Gebräuchliche Darstellungen	69
9.2 Elementare Darstellungen	71
9.3 Vergleich der Darstellungen	74
9.4 Berechenbare Operatoren	76
9.5 Nichtlineare Optimierung	78
9.6 Übrige Beweise	79
9.7 Beweis von Theorem 9.19	87
10 Konvexe Mengen	91
10.1 Beweis von Theorem 10.2	93
11 Ausblick	98
A Eine Komplexitätsuntersuchung	101
A.1 Point Location	101
A.2 Ein berechenbar-algebraisches Modell	102
A.3 Entweder schnell oder stabil	105
A.4 Beweise	106
B Grundbegriffe und Bezeichnungsweisen	110
B.1 Typ-2 Maschinen	110
B.2 Lineare Algebra	111
B.3 Geometrie	113
B.4 Topologie	113
Literatur	116

Verzeichnis der Darstellungen

ν	Beispiel 2.2	10
τ	Beispiel 2.3	10
γ	Beispiel 2.4	10
ρ	Beispiel 2.5	11
$\rho_<$	Beispiel 2.12	13
$\rho_>$	Beispiel 2.12	13
$\alpha \sqcap \beta$	Definition 2.17	15
ρ^d	Beispiel 2.18	16
$\prod_{i \in I} \alpha_i$	Definition 2.19	16
$[\rho^d \rightarrow \rho]$	Definition 2.21	17
$[\rho^d \rightarrow \rho]^1$	Beispiel 3.10	26
\hbar	Definition 3.12	30
ψ^d	Definition 5.2	38
$\psi^d_<$	Definition 5.2	38
$\psi^d_>$	Definition 5.2	38
τ	Definition 9.5	69
ω	Definition 9.6	70
μ	Definition 9.7	70
χ	Definition 9.8	70
δ	Definition 9.9	70
ξ	Definition 9.10	71
π	Definition 9.11	71
$\theta^d_<$	Definition 9.12	71
$\theta^d_>$	Definition 9.12	71
$\overset{\circ}{\theta}^d_<$	Definition 9.13	72
$\overset{\circ}{\theta}^d_>$	Definition 9.13	72
$\overline{\theta}^d_<$	Definition 9.14	72
$\overline{\theta}^d_>$	Definition 9.14	72
$\overline{\psi}^d_<$	Definition 9.15	72
$\overline{\psi}^d_>$	Definition 9.15	72
$\vartheta^{\eta}_<$	Definition 9.16	72
$\vartheta^{\eta}_>$	Definition 9.16	72
η'	Definition 9.16	72
$\vartheta^{\eta}_<$	Definition 9.17	73
$\vartheta^{\eta}_>$	Definition 9.17	73
η	Definition 9.17	73
$\overline{\vartheta}^{\eta}_<$	Definition 9.18	73
$\overline{\vartheta}^{\eta}_>$	Definition 9.18	73
$\overline{\vartheta}^{\eta\eta}_<$	Definition 9.18	73

1 Einleitung

Die *Algorithmische Geometrie* entstand in den späten 70er Jahren aus der Verbindung zweier Gebiete zu einer eigenständigen Forschungsrichtung. Mit einer Vielzahl neuer Anwendungen wie zum Beispiel Computer Aided Design (CAD), Computergrafik oder Geo-Informationssysteme (GIS) erweckte sie das Interesse zahlreicher Wissenschaftler. Als vielleicht wichtigstes Problem sei bereits hier auch das **Lineare Programmieren** erwähnt. Als A und O der *Operations Research* wird es zum Beispiel mit dem berühmten **Simplex Algorithmus** behandelt. Ebenfalls neue Technologien wie **Global Positioning System (GPS)** oder **Augmented/Virtual Reality** beruhen wesentlich auf schnellen Algorithmen zur Lösung geometrischer Probleme.

Auf der anderen Seite stellte sich bei zahlreichen der entwickelten Algorithmen heraus, daß sie auf realen Digitalcomputern schwere numerische Instabilitäten aufwiesen, die im schlimmsten Fall zu inkonsistenten Ergebnissen führten. Beispielsweise kann es passieren, daß ein Programm zur Berechnung der konvexen Hülle einer ebenen Konfiguration aus n Punkten als Ausgabe einen Polygonzug generiert, welcher sich am Ende nicht zum Anfang zurück schließt. Hier nützt es auch nichts, daß diese Ausgabe nach einer garantierten worst-case Laufzeit von nur $\mathcal{O}(n \log n)$ Schritten erfolgt.

Liegt solches Verhalten an einer schlechten Implementation oder ist das Problem an sich nicht berechenbar? Die Antwort ist insofern wichtig, als sie die Grenze vorgibt für Verfahrensverbesserungen. Nicht ganz überraschend hängt sie ab von der gewählten Formalisierung: Besteht die Eingabe (Punktkoordinaten) aus rationalen oder aus reellen Zahlen? Können reelle Zahlen exakt verarbeitet werden? Sind Tests auf Gleichheit möglich?

Die vorliegende Arbeit untersucht die Berechenbarkeit einiger geometrischer Probleme im Euclidischen Raum (d.h. über Tupeln von reellen Zahlen) und ihre Abhängigkeit vom verwendeten Rechenmodell. Bei letzterem betrachten wir mehrere Varianten, die einer Hierarchie von sogenannten *Analytischen Maschinen* [21] entstammen. Äquivalent können sie im Rahmen der sogenannten *Typ-2 Theorie der Effektivität* [87] aufgefaßt werden als one-way Turing-Maschinen (TM) mit einer speziellen Semantik. Obwohl heutzutage in erster Linie für diskrete Probleme bekannt, hatte ihr Erfinder Alan M. Turing ‘seine’ Maschine nämlich ursprünglich für die reellen Zahlen vorgeschlagen [85].

Wie jedes Rechenmodell weisen auch die Analytischen bzw. Typ-2 Maschinen Idealisierungen auf, die manchen Eigenschaften realer Computer Rechnung tragen und andere außen vor lassen. Grob gesagt berechnet eine TM M die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wenn sie bei Eingabe einer Folge rationaler Approximationen $q_n \in \mathbb{Q}$ für $x \in \mathbb{R}$ eine Folge entsprechender Approximationen $p_n \in \mathbb{Q}$ für $y = f(x)$ ausgibt. Unterschiedliche Berechenbarkeitsbegriffe ergeben sich je nachdem, ob die Approximationen von Fehlerschranken begleitet werden und ob diese strikt einzuhalten sind oder endlich oft verletzt werden dürfen.

Das Gewicht der vorliegenden Dissertation liegt auf dem für die Praxis besonders wichtigen und auch natürlichen Fall von strikten Fehlerschranken für Ein- und Ausgabe, entsprechend den *robust stark δ - \mathbb{Q} -analytischen Maschinen* bzw. der Intervall-Arithmetik und der Domain-Theorie der reellen Zahlen [74]. Äquivalente Berechenbarkeitsbegriffe für reelle Zahlen und Funktionen wurden (mehr oder weniger unabhängig) von unter anderem Grzegorczyk [41], Aberth [1], Deil [24], Pour-El/Richards [65], Ko [48] und natürlich Weihrauch [87] betrachtet. Wie die Über-

einstimmung zwischen zahlreichen diskreten Modellen (TM, Registermaschine, Kellerautomat, μ -rekursive Funktionen, λ -Kalkül) zur heute wohlbekannten Berechenbarkeitstheorie führte, so bildet die Äquivalenz der o.g. Berechenbarkeitsbegriffe reeller Zahlen die Grundlage der *Rekursiven Analysis*. Indem diese Arbeit diese auf geometrische Probleme anwendet, kann man sie der *Rekursiven Geometrie* zurechnen.

Im Sinne reiner Berechenbarkeit werden Komplexitätsfragen in der vorliegenden Dissertation hintenangestellt, siehe Anhang A. Kurz gesagt: Bevor man sich um *Effizienz* kümmert, muß erstmal die *Effektivität* (synonym für 'Berechenbarkeit', also die automatisierte, maschinelle Lösbarkeit) sichergestellt sein beziehungsweise die behandelte Problemklasse auf ihre Berechenbarkeit hin abgeklärt und gegebenenfalls entsprechend eingeschränkt werden: genau dies ist das hier verfolgte Ziel!

Beispielsweise zeigte Khachiyan [49], daß die Optimierung linearer Zielfunktionen über einen beschränkten, volldimensionalen konvexen Definitionsbereich K in *polynomieller* Zeit möglich ist, siehe auch [38]. Einfache Gegenbeispiele zeigen in Kapitel 4, daß, wenn $K = \{x : A \cdot x \leq b\}$ als Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems in A und b gegeben ist, das Problem *ohne* die Voraussetzungen 'Volldimensionalität', 'Beschränktheit' und 'Nullzeilenfreiheit von A ' im allgemeinen gar nicht berechenbar ist. *Mit* diesen Voraussetzungen hingegen erweisen sich, wenn man die Laufzeitbeschränkung fallen läßt, auch beliebige *nichtlineare* berechenbare reelle Funktionen als über K effektiv optimierbar; und auch die Konvexitätsbedingung läßt sich weiter abschwächen; grob gesagt: solange die Randbedingungen g_i berechenbare *offene* Funktionen sind und der durch sie gegebene Zulässigkeitsbereich $K := \{x : g_i(x) \geq 0, i = 1..m\}$ beschränkt ist sowie in einem verallgemeinerten Sinne volldimensional ('*regulär*'), ist auch hier das Maximum berechenbarer stetiger Zielfunktionen berechenbar:

Ergebnis 1.1 *Sei $f : [-1, +1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine berechenbare Zielfunktion. Seien die Randbedingungen $g_1, \dots, g_m : [-1, +1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils offen und berechenbar. Sei weiterhin der durch letztere induzierte Zulässigkeitsbereich $K := \{x | g_i(x) \geq 0 \forall i\}$ beschränkt und regulär. Dann ist auch die reelle Zahl $\max f[K]$ berechenbar.*

Vom praktischen Gesichtspunkt gehört dies vielleicht zu den wichtigsten Resultaten der vorliegenden Dissertation. Was unter diesem Blickwinkel bloß wie ein technischer Baustein im Beweis von Ergebnis 1.1 aussieht hat m.E. aber strukturell mindestens ebenbürtige Relevanz: der systematische Vergleich gängiger Berechenbarkeitsbegriffe für reguläre Mengen. Hier entsteht aus einer großen Zahl von Einzelaussagen der Form

"Der Berechenbarkeitsbegriff α ist stärker als/unvergleichbar zu/schwächer als β ."

zum ersten Mal ein vollständiges Bild von den Zusammenhängen zwischen verschiedenen in der Literatur jeweils ad-hoc eingeführten solchen Begriffen. Der 'beste', bezüglich dessen nämlich Vereinigung und Durchschnitt berechenbar sind, geht dann, wie gesagt, wesentlich ein in den Beweis von Ergebnis 1.1.

Weiterhin untersucht diese Arbeit die Berechenbarkeit einiger verwandter klassischer Probleme der Algorithmischen Geometrie wie der Numerischen Mathematik: konvexe Hülle, Extrempunkte, lineare Gleichungssysteme (Finden eines Lösungsvektors oder des gesamten Lösungs-

raumes) und Matrixdiagonalisierung. Auch hier ermöglicht die Rekursive Analysis eine genaue Beantwortung der Frage, ob und welche zusätzlichen Voraussetzungen für deren Effektivität benötigt werden. Beispielsweise stellt sich heraus, daß die Berechnung einer vollständigen (Orthonormal-)Basis aus Eigenvektoren zu einer allgemeinen symmetrischen $n \times n$ -Matrix A genau dann möglich ist, wenn man die Kardinalität ihres Spektrums $\#\sigma(A)$ vorher kennt; dies beinhaltet den Spezialfall $\#\sigma(A) = n$ der in der Numerik oft und aus gutem Grund vorausgesetzten *Nichtdegeneriertheit* aller Eigenwerte.

1.1 und Überblick

Das nächste Kapitel gibt eine kurze Einführung in die bereits erwähnte *Typ-2 Theorie der Effektivität* als gemeinsamem formalem Rahmen für Berechenbarkeitsfragen über diskreten und kontinuierlichen Grundbereichen. Es stellt im wesentlichen diejenigen Bezeichnungsweisen aus [87] bereit, die für die vorliegende Dissertation vonnöten sind, motiviert sie und illustriert sie durch Beispiele und Gegenbeispiele. Wesentlich sind hier die in der Rekursiven Analysis üblichen Kodierungen reeller Zahlen, Vektoren und stetiger Funktionen.

Kapitel 3 enthält ebenfalls noch nichts wissenschaftlich Neues, sondern erläutert die Beziehungen zwischen Rekursiver Analysis und zahlreichen verwandten Gebieten und Rechenmodellen. Beachte, daß Rekursive Analysis beides ist, Forschungsgebiet (wie Analysis) *und* Rechenmodell (Approximation durch rationale Zahlen mit Fehlerschranken), so daß Verwandschaften in beide Richtungen möglich sind. Zwei der Modelle — die **realRAM** und die *robust quasi-stark δ - \mathbb{Q} -analytischen Maschinen* — werden später in der Zwischenbilanz nochmal eine Rolle spielen, ebenso die rationale Approximation ohne Fehlerschranken.

Vorerst geht es in Kapitel 4 aber hauptsächlich um die Berechenbarkeit im Sinne rationale Approximation mit Fehlerschranken, angewandt auf das Problem **Lineares Programmieren**: Eine Übersetzung des etwas sperrigen COROLLARY 4.3.12 aus [38] in die elegante Sprache der Rekursiven Analysis garantiert, daß es berechenbar ist, sofern die Matrix der linearen Randbedingungen nullzeilenfrei, der dadurch gegebene konvexe Optimierungsbereich volldimensional und konvex ist. Gleichzeitig zeigen die bereits erwähnten Gegenbeispiele, daß diese Voraussetzungen scharf sind: Läßt man auch nur eine von ihnen fallen, wird das Problem im allgemeinen unberechenbar!

Diese genaue Charakterisierung der Voraussetzungen zur Un-/Berechenbarkeit offenbart aber auch, daß in der Algorithmischen Geometrie häufig pauschal getroffene Nichtdegeneriertheitsannahmen (jeweils d Hyperebenen im \mathbb{R}^d schneiden sich, jeweils $d + 1$ viele haben leeren Schnitt) hier am Kern des Problems vorbeigehen.

Die zentrale Frage in Kapitel 5 ist die nach der Berechenbarkeit der Operation $(f, K) \mapsto \max f[K]$ für kompaktes K und stetiges f . Ziel ist eine Verallgemeinerung von Linearem Programmieren mit $K = \{x : A \cdot x \leq b\}$ und $f(x) = c^T \cdot x$ zur Optimierung *nichtlinearer* berechenbarer Funktionen f über einem *nichtkonvexen* K . Der Name "Turing-Location" stammt aus [37] und bezieht sich auf die in [87] hauptsächlich betrachtete Art, abgeschlossene Mengen A zu kodieren: Durch Weierstraß-Polynomapproximationen ihrer Distanzfunktionen d_A . Einige äquivalente Kodierungen diskutiere ich in Abschnitt 5.1.

Nach den erwähnten einfachen Gegenbeispielen von Kapitel 4 enthält dieses Kapitel den zweiten wissenschaftlich neuen Beitrag der vorliegenden Dissertation: für *zusammenhängendes* Kompaktum $K \neq \emptyset$ ist $(f, K) \mapsto \max f[K]$ berechenbar. Die Steigerung eigener Ergebnisse nach Originalität, Schwierigkeit und Dichte nimmt hier also quasi Anlauf, um später in Kapiteln 9 und 10 zu gipfeln.

Zuvor werden aber in Kapitel 6 noch schnell ein paar weitere Standardprobleme der Algorithmischen Geometrie auf ihre Berechenbarkeit abgeklopft: fast alle kombinatorischen (d.h. mit diskretem Bildbereich und insbesondere Entscheidungs-) Probleme sind auf Grund eines einfachen topologischen Argumentes im allgemeinen *nicht* berechenbar. Dies beinhaltet die in der Informatik als **Konvexe Hülle** bezeichnete Aufgabe, die Eckpunkte eines aufgespannten Polyeders zu identifizieren. Die mathematische **Konvexe Hülle** hingegen ist der aufgespannte Polyeder selbst, und diese Operation beweise ich als sehr wohl berechenbar!

Das Kapitel wird abgerundet von einer Übersetzung des zentralen Ergebnisses aus [37] in die elegante Sprache von TTE, betreffend die *nichtuniforme* Berechenbarkeit der Menge der Extrempunkte eines berechenbaren konvexen Kompaktums.

Weitere Berechenbarkeitsuntersuchungen in Kapitel 7 betreffen Probleme aus der Linearen Algebra. Lineare Gleichungssysteme $A \cdot x = b$ besitzen über ihre Lösungsräume L einerseits Bezug zur Geometrie, andererseits sind sie Spezialfall der beim **Linearen Programmieren** betrachteten linearen *Ungleichungssysteme*. Da Nulltests (Pivotsuche) im Rahmen der Rekursiven Analysis nicht entscheidbar sind, kommt Gauß-Elimination hierfür nicht in Frage. Dennoch können wir durch (implizite) Angabe entsprechender Algorithmen zeigen, daß bei *bekannter* Dimension des Lösungsraums $L \neq \emptyset$ lineare Gleichungssysteme effektiv lösbar — genauer: zahlreiche natürliche Arten der Kodierung von L paarweise in einander umrechenbar sind; beispielsweise

- i) implizit durch Angabe der Koeffizienten eines definierenden linearen Gleichungssystems;
- ii) explizit durch Angabe einer speziellen Lösung $c \in L$
und einer Basis des Vektorraums $-c + L$;
- iii) im Sinne von *Turing-Location* durch Kodierung der Distanzfunktion d_L .

Ohne Wissen über $\dim(L)$ ist i) jedoch echt schwächer: die in der Kardinalität einer Basis gemäß ii) implizit enthaltene Dimension von L ist diskret, läßt sich daher nicht effektiv aus den kontinuierlichen Koeffizienten A und b deduzieren, aus der Distanzfunktion d_L gemäß iii) überraschenderweise aber doch!

Weil mit diesen Ergebnissen die Werkzeuge bereits bereitliegen zur Berechenbarkeit der wichtigen **Spektralzerlegung** symmetrischer Matrizen, untersche ich diese auch noch. Dabei konnte die aus der Numerik stammende Nichtdegeneriertheitsannahme — alle Eigenwerte sind paarweise verschieden — leicht abgeschwächt werden: solange die (diskrete) *Zahl* der verschiedenen Eigenwerte bekannt ist, lassen sich Eigenwerte wie Eigenvektoren alle berechnen; andernfalls im allgemeinen nicht.

Wie bereits angekündigt, zieht Kapitel 8 eine Zwischenbilanz der bisherigen Ergebnisse. Diese betrafen das in der Rekursiven Analysis gebräuchliche Rechenmodell der

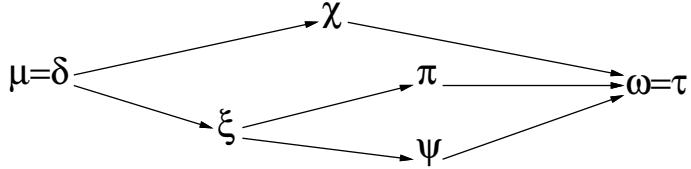
- a) rationalen Approximation mit Fehlerschranken.

Hier untersuche ich nun die gleichen Probleme nochmals auf ihre Berechenbarkeit, aber in den anderen drei erwähnten Modellen:

- b) rationale Approximation mit Fehlerschranken, die jedoch endlich oft verletzt werden dürfen;
- c) rationale Approximation ganz ohne Fehlerschranken;
- d) exakte reelle Arithmetik und Tests (**realRAM**).

Alle behandelten Probleme sind, auch ohne Nichtdegeneriertheitsannahmen, berechenbar im Sinne von d) *und* b); im Sinne von c) sind sie es unter den *gleichen* Einschränkungen wie bei a); und *ohne* diese Einschränkungen sind sie es im allgemeinen ebensowenig. Beachte, daß b) keineswegs schwächer ist als a), denn die Verletzung der Fehlerschranken betrifft Ausgabe wie Eingabe!

Kapitel 9 ist nicht nur das längste sondern m.E. auch wichtigste Kapitel der vorliegenden Arbeit. Hier wird systematisch die Berechenbarkeit sogenannter *regulärer* Mengen untersucht und verglichen, d.h. solcher, die in einem verallgemeinerten Sinne volldimensional sind ohne konvex sein zu müssen. Verschiedene Autoren (Ge und Nerode, Grötschel et. al, Kummer und Schäfer, Edalat und Lieutier, Hertling, Brattka und Ziegler) haben dafür jeweils mehr oder weniger *ad-hoc* Berechenbarkeitsbegriffe (ψ , μ und τ und χ , ω , π , δ , ξ) eingeführt. Der Vergleich ergibt die rechts skizzierten Beziehungen zwischen ihnen:



Ein Pfeil bedeutet, daß die Konvertierung berechenbar ist; Abwesenheit eines gerichteten Wegs bedeutet keine Konvertierbarkeit; Gleichheitszeichen steht für Äquivalenz, d.h. wechselseitige Konvertierbarkeit.

Nach einer Vorauswahl untersuche ich die Berechenbarkeit folgender Operationen auf regulären Mengen: binäre Vereinigung \cup , binärer Durchschnitt \cap und Urbild $g^{-1}[\cdot]$ unter stetigen offenen Funktionen. Nur bezüglich ξ sind alle drei berechenbar. Dies führt unmittelbar auf ein Hauptergebnis dieser Dissertation: die Berechenbarkeit regulärer monotoner Boole'scher Kombinationen (\cup und \cap) von stetigen offenen Randbedingungen $K_i = \{x : g_i(x) \geq 0\}$.

Die Beweistechniken dieses Kapitels sind überwiegend topologischer Natur (siehe Anhang B.4); ganz anders als diejenigen der Kapitel 6 und 7, welche hauptsächlich auf geometrischen Argumenten beruhen beziehungsweise auf Linearer Algebra.

Zu geometrischen Beweistechniken zurück kehrt Kapitel 10: Mit ihnen kann ich zeigen, daß die im allgemeinen Fall so unterschiedlichen Berechenbarkeitsbegriffe für reguläre Mengen eingeschränkt auf *konvexe* Mengen plötzlich uniform äquivalent werden.

In Anhang A kommen zu den erwähnten Beweistechniken noch kombinatorische Argumente hinzu: Hier geht es (erstmalig in der vorliegenden Arbeit) nicht nur um Berechenbarkeit sondern

auch um *Komplexitätsfragen*. In einem Rechenmodell, das den Linearen Entscheidungsbaum einschränkt auf *berechenbare* Tests im Sinne der Rekursiven Analysis, wird das Point Location Problem untersucht. Dabei stellt sich heraus, daß optimale Laufzeit *nur* erreichbar ist unter Einschränkung der möglichen Eingabepunkte x : man muß eine nirgends dichte Teilmenge des \mathbb{R}^d ausnehmen. Basierend auf zwei tiefen kombinatorisch-geometrischen Ergebnissen von Edelsbrunner und Co. [22, 30] kann ich sogar obere und untere Schranken beweisen für den *trade-off* in der Ebene (2D) zwischen Laufzeit und Anzahl auszunehmender Geraden.

2 Typ-2 Theorie der Effektivität

Die unter anderem von Weihrauch [87] eingeführte *Typ-2 Theorie der Effektivität* (TTE) beschreibt die Berechenbarkeit gewisser Objekte durch diejenige von *Namen* dieser Objekte, das sind Zeichenketten (Strings) über $\{0, 1\}$. Dies geschieht in völliger Analogie zur klassischen (*Typ-1*) Berechenbarkeitstheorie welcheselbige ja auch nicht (z.B. *k-Clique*) auf beispielsweise Graphen sondern auf deren Kodierungen, also gewissen Bitstrings $\bar{\sigma} \in \{0, 1\}^*$, arbeitet. Als einziger Unterschied genügen zur Beschreibung von Objekten u aus einem Universum U mit kontinuierlicher Kardinalität $|U| = \mathfrak{c}$ endliche Strings nicht mehr. In diesem Fall betrachtet TTE Zeichenketten abzählbarer Länge: $\bar{\sigma} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Die Abschnitte dieses Kapitels geben eine kurze Einführung in TTE. In enger Anlehnung an [87] werden grundlegende Begriffe motiviert und definiert, die für die späteren Untersuchungen an reellen geometrischen Problemen von Bedeutung sind. Die Definitionen dieses Abschnitts stammen aus [87] oder sind, unter Verwendung von Ergebnissen daraus selbst, äquivalent zu ihnen. Der Schwerpunkt liegt hier auf einem intuitiven Verständnis, für formale Details siehe Anhang B und dort insbesondere Abschnitt B.1.

2.1 Darstellungen

Zentral in TTE ist der Begriff der *Darstellung*, die nämlich die bereits angekündigte Identifikation zwischen Objekten u eines Universums U und Bitstrings $\bar{\sigma} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ oder $\bar{\sigma} \in \{0, 1\}^*$ festlegt:

Definition 2.1 Eine Darstellung für eine abzählbare Menge U ist eine surjektive partielle Abbildung $\alpha : \subseteq \{0, 1\}^* \rightarrow U$. Eine Darstellung für eine kontinuierliche Menge U ist eine surjektive partielle Abbildung $\alpha : \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow U$. Ist α fixiert, so heißt jedes $\bar{\sigma}$ mit $\alpha(\bar{\sigma}) = u$ ein Name von $u \in U$.

Daß eine Darstellung nur *partiell* (siehe Anhang B) zu sein braucht, spiegelt wider, daß nicht jeder Bitstring den syntaktischen Bedingungen der Kodierung (z.B. eines Graphen) genügt. Die Surjektivität stellt sicher, daß jedes Objekt einen Namen hat. Mangels Injektivität braucht dieser jedoch nicht eindeutig zu sein.

Es sei betont, daß TTE *per se* keineswegs neue Rechenmodelle oder Berechenbarkeitsbegriffe einführt. Vielmehr bietet sie mit den Darstellungen einen gemeinsamen formalen Rahmen, in dem die zahlreichen bisherigen Begriffe subsumiert und verglichen werden können.



Beispiel 2.2 Rationale Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ stellt man gewöhnlich in der Form "Zähler/Nenner" dar, beide binär kodiert. In TTE führt dies auf die wie folgt definierte Darstellung $v : \subseteq \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{Q}$: Ein v-Name für $q = +Z/N$ mit $Z, N \in \mathbb{N}$ hat die Form $\bar{\sigma} = (0a_0b_0a_1b_1 \dots a_nb_n)$ wobei $Z = \sum_{i=0}^n a_i 2^i$ und $N = \sum_{i=0}^n b_i 2^i \neq 0$. Ein v-Name für $-Z/N$ ist dann $\bar{\sigma} = (1a_0b_0 \dots a_nb_n)$.

Der Definitionsbereich von v besteht aus allen Zeichenketten dieser Form.

Insbesondere ist $v(0, 1, 1, 0, 1) = 1/3$, $v(0, 0, 1) = v(1, 0, 1) = 0$ und $v(0, 0, 0)$ undefiniert.

Auch für reelle Zahlen betrachtete Turing eine Kodierung durch ihre Binär-Entwicklung, die dann natürlich unendlich lang ist.

Beispiel 2.3 Der Definitionsbereich von $\tau : \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ besteht aus allen $\bar{\sigma} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, die an den geraden Positionen σ_{2i} genau eine 1 (und sonst nur 0en) enthalten. Sei $\sigma_{2m} = 1$, $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bar{\sigma}$ ein τ -Name der reellen Zahl

$$\tau(\bar{\sigma}) := r = \begin{cases} + \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{2i+3} 2^{m-i} & : \bar{\sigma}_1 = 0 \\ - \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{2i+3} 2^{m-i} & : \bar{\sigma}_1 = 1 \end{cases}$$

Des weiteren bietet sich für \mathbb{R} die folgende Darstellung an. Sie basiert auf obigem v und kodiert $r \in \mathbb{R}$ als unendlich-abzählbare konvergente Folge rationaler Zahlen $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ mit Grenzwert r . Hierfür seien *endliche* Zeichenketten derart in die *unendlichen* eingebettet, daß ein geeignetes Trennsymbol das Stringende erkennen läßt, also beispielsweise mittels

$$\{0, 1\}^* \ni (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto (a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots, a_n, 1, 0, 0, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Man sieht bereits hier, daß es sehr mühsam werden kann, die Idee einer Kodierung bis ins letzte durchzuformalisieren. Dies entspricht der gewöhnlichen Turing-Theorie, wo man sich um die konkrete Verifikation der syntaktischen Korrektheit einer kodierten Eingabe (z.B. eines Graphen) durch explizite Angabe der Übergangsfunktion kaum kümmert. Glücklicherweise stellt sich auch in TTE heraus, daß es auf die genauen Kodierungsdetails in der Regel nicht ankommt, siehe Lemma 2.24. Dem vorgegriffen können wir nun also etwas lockerer formulieren und eine Einbettung wie oben im folgenden implizit voraussetzen.

Beispiel 2.4 Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv und rekursiv mit rekursiver Inverser (bi-rekursiv) im klassischen Sinn, d.h. eine Paarungsfunktion¹. Die unendliche Zeichenkette $\bar{\sigma}$ ist ein γ -Name für $r \in \mathbb{R}$, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Substring $\bar{\sigma}^n = (\sigma_{\langle n, k \rangle})_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ein v -Name ist und die Folge $q_n := v(\bar{\sigma}^n)$ gegen r konvergiert.

Die γ -Darstellung kodiert also wohlgerne *keine* Fehlerschranken, so daß die rationale Folge

$$3, \quad 3.1, \quad 3.14, \quad 3.141, \quad 3.1415, \quad 3.14159, \quad 3.141592, \quad 3.1415926, \quad \dots$$

durchaus für die reelle Zahl $e = \exp(1) = 2.71828\dots$ stehen könnte: jedes endliche Anfangsstück eines γ -Namens läßt keinerlei Schluß auf die kodierte reelle Zahl zu! Dem hilft die folgende Darstellung ab, die sich in einem gewissen Sinn als ‘natürliche’ und von zentraler Bedeutung herausstellt:

¹wie sie z.B. als Buchungssystem in *Hilberts Hotel* benötigt wird...

Beispiel 2.5 Ein ρ -Name für $r \in \mathbb{R}$ ist eine (Kodierung einer) Folge rationaler Zahlen $(q_0, \varepsilon_0, q_1, \varepsilon_1, \dots)$, so daß $|r - q_n| \leq \varepsilon_n \rightarrow 0$.

In der Tat entspricht ρ in uniformer Weise denjenigen Berechenbarkeitsbegriffen für reelle Zahlen von beispielsweise Grzegorczyk [41], Pour-El/Richards [65], Ko [48], der Domain-Theorie [74] und der Intervall-Arithmetik; siehe [24] für einen Überblick. Diese Vereinheitlichung verschiedener vormals ad-hoc eingeführter Begriffe verdeutlicht die Vorteile der TTE. Definition 3.12 in Abschnitt 3.8 führt noch \hbar als weitere Darstellung reeller Zahlen ein; bezüglich ihr sind Typ-2 Maschinen äquivalent zu den Hotz'schen robust quasi-stark $\delta\text{-}\mathbb{Q}$ -analytischen Maschinen.

2.2 Berechenbarkeit...

Wie bereits erwähnt, definiert TTE die Berechenbarkeit von Objekten über diejenige ihrer Namen unter einer fixierten Darstellung:

Definition 2.6 Sei U ein mit der Darstellung α versehenes Universum. Ein einzelnes Objekt $u \in U$ heißt α -berechenbar, falls es eine Turing-Maschine (TM) gibt, welche (unabhängig von einer möglichen Eingabe) einen α -Namen für u ausgibt.

Sei V ein weiteres Universum mit der Darstellung β . Eine (nicht notwendig totale) Funktion $f : \subseteq U \rightarrow V$ mit Definitionsbereich $D_f \subseteq U$ heißt $(\alpha \rightarrow \beta)$ -berechenbar, falls es eine TM M gibt, welche bei Eingabe beliebiger α -Namen von $u \in D_f \subseteq U$ als Ausgabe einen β -Namen von $v = f(u)$ generiert.

Mit anderen Worten: M soll eine partielle Stringfunktion $F : \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ realisieren, die das Diagramm rechts kommutativ macht.

$$\begin{array}{ccc} \bar{\sigma} & \xrightarrow[F]{} & F(\bar{\sigma}) = \bar{\tau} \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow \\ u & \xrightarrow[f]{} & f(u) = v \end{array}$$

Diese Definition sichert die Transitivität der Berechenbarkeit:

Lemma 2.7 Seien U, V, X versehen mit Darstellungen α, β, ξ ; seien $f : \subseteq U \rightarrow V$ $(\alpha \rightarrow \beta)$ -berechenbar und $g : \subseteq V \rightarrow X$ $(\beta \rightarrow \xi)$ -berechenbar.

Dann ist $g \circ f : \subseteq U \rightarrow X$ $(\alpha \rightarrow \xi)$ -berechenbar auf $D_{g \circ f} = \{u \in D_f : f(u) \in D_g\} \subseteq U$.

Die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt also $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar, falls es eine TM gibt, welche bei Eingabe rationaler Approximationen (q_n) mit Fehlerschranken ε_n für $x \in \mathbb{R}$ ebensolche p_n und δ_n für $y = f(x)$ ausgibt. Hier muß man beachten, daß die Ausgabe eines unendlichen Strings nie endet sondern immer nur vorläufig ist. Damit sie dennoch Sinn macht, vereinbaren wir, daß einmal geschriebene Symbole nicht mehr verändert werden dürfen:

Definition 2.8 Die Ausgabe einer TM ist die auf ein separates one-way Ausgabeband geschriebene endliche oder unendliche Symbolfolge.

Da Typ-2 Programme andererseits eine unendliche Eingabe nicht bis zum Ende abwarten können, bevor sie mit der Ausgabe beginnen; sind sie inhärent eine Art von *Online-Algorithmen*.

Bereits mit den wenigen bis hierhin bereitgestellten Begriffen ergeben sich im Rahmen von TTE einige interessante Konsequenzen:



Folgerung 2.9 a) Fast alle reellen Zahlen sind nicht berechenbar; einfach deshalb, weil \mathbb{R} überabzählbar ist, es jedoch nur abzählbar viele TMen gibt.

b) Die τ -berechenbaren Zahlen lassen sich sogar in Termen klassischer Rekursionstheorie charakterisieren. Bereits Specker bewies [79]:

Für $N \subseteq \mathbb{N}$ ist $r = \sum_{n \in N} 2^{-n}$ τ -berechenbar genau dann, wenn N rekursiv ist.

c) Jede rationale Zahl ist ν -berechenbar: speichere den (endlichen!) Namen in den Zuständen einer TM.

d) Es gibt eine TM, welche ν -Namen rationaler Zahlen in ihre (unendlichen!) τ -Name konvertiert: Aus dem Bruch Zähler/Nenner lässt sich ziffernweise die (notwendig periodische) Binärentwicklung bestimmen.

e) Es gibt eine TM, welche τ -Namen reeller Zahlen in ihre ρ -Namen konvertiert: Jedes Anfangsstück bis zur n -ten Nachkommastelle der Binärentwicklung von $r = \tau(\bar{\sigma})$

$$q_n := \pm \sum_{i=0}^{n+m} \sigma_{2i+3} 2^{m-i}$$

ist gleichzeitig eine rationale Approximation von r bis auf $|r - q_n| \leq \varepsilon_n := 2^{-n}$.

f) Es gibt eine TM, welche ρ -Namen reeller Zahlen r in ihre γ -Namen konvertiert:

Nach syntaktischer Entfernung der Fehlerinformationen aus $(q_0, \varepsilon_0, q_1, \varepsilon_1, \dots)$ verbleibt die Folge q_n rationaler Approximationen, welche gegen r konvertiert.

g) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $r \mapsto 3 \cdot r$, ist $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar und $(\gamma \rightarrow \gamma)$ -berechenbar: Ist $(q_0, \varepsilon_0, q_1, \varepsilon_1, \dots)$ ein ρ -Name für r , so ist $(3 \cdot q_0, 3 \cdot \varepsilon_0, 3 \cdot q_1, 3 \cdot \varepsilon_1, \dots)$ offensichtlich ein ρ -Name für $3 \cdot r$; und konvergiert (q_n) gegen r , so konvergiert $(3 \cdot q_n)$ gegen $3 \cdot r$.

An letzterer Funktion offenbart sich nun ein großer Nachteil der Darstellung τ , siehe EXERCISE 4.1.9A in [87]:

Beispiel 2.10 Die Funktion $f(r) = 3r$ ist nicht $(\tau \rightarrow \tau)$ -berechenbar!

Beweis: Nehmen wir im Gegenteil an, eine TM berechne diese Funktion. Bei Eingabe von

$$r = 1/3 = \text{bin}(0.0101010101\dots)$$

gibt sie also " $f(r) = 1$ ", d.h. entweder $\text{bin}(1.000\dots)$ oder $\text{bin}(0.1111\dots)$ aus.

In letzterem Fall erscheint nach endlicher Zeit t auf dem Ausgabeband (bis auf Kodierungsdetails) die Zeichenkette "0 . "; bis dahin konnte die TM nur ein endliches Anfangsstück $w \in \{0, 1\}^*$ der Eingabe "0 . 01010101 . . ." lesen.

Starten wir nun die TM neu mit der abgeänderten Eingabe $r' = \text{bin}(w11111111) > 1/3$. Deterministisch arbeitet sie bis zur Zeit t wieder genau gleich wie vorhin, da die gelesenen Symbole sich vorerst nicht unterscheiden. Insbesondere gibt sie "0 . " aus.

Da $3 \cdot r' > 1$ kann dies jedoch nicht das Anfangsstück der Binärkodierung von $f(r')$ sein. Andererseits ist es der TM auf dem *one-way* Ausgabeband nicht möglich, einmal geschriebene Symbole nachträglich abzuändern: ein Widerspruch zur Annahme, sie berechne $f(r)$ für alle r . Der Fall, daß die TM ” $f(r) = 1$ ” in Form von $\text{bin}(1.000\dots)$ ausgibt, führt analog zu einem Widerspruch. \square

Grob gesagt ist es das unbeschränkte Durchreichen von Überträgen in der Binärdarstellung, das hier die Berechenbarkeit verhindert: Änderungen des Eingabestrings $\bar{\sigma} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, selbst beliebig weit hinten, beeinflussen die vorderen Teile der Ausgabe.

2.3 Topologie

Genau betrachtet ist der letzte Satz eine Unstetigkeitsaussage: Die von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Darstellung $\tau : \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ induzierte String-Funktion $F : \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, welche die τ -Namen aller $r \in \mathbb{R}$ auf τ -Namen von $f(r)$ abbildet, ist unstetig! Hierbei wird $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ aufgefaßt als *Cantor-Raum*, d.h. versehen mit der kompakten Topologie, die von folgender Metrik induziert wird [67]:

$$d(\bar{\sigma}, \bar{\vartheta}) = 0, \quad d(\bar{\sigma}, \bar{\vartheta}) = 2^{-\min_{i \geq 0} \sigma_i \neq \vartheta_i} \quad \text{für } \bar{\sigma} \neq \bar{\vartheta}.$$

Bezüglich dieser Metrik haben zwei Strings also kleine Distanz, wenn sie sich nur weit hinten unterscheiden; vergleiche dies mit dem letzten Satz des obigen Absatzes. In der Tat erscheint in diesem Licht das im Beispiel verwendete Argument als Spezialfall des folgenden

Lemma 2.11 a) Eine berechenbare Stringfunktion $F : \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist notwendigerweise (Cantor-) stetig.

b) Eine $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbare reelle Funktion ist notwendigerweise stetig bezüglich der üblichen Topologie auf \mathbb{R} .

Hierbei wiederum handelt es sich um einen Spezialfall des weitaus allgemeineren MAIN THEOREM 3.2.11 in [87].

Stetigkeit ist also notwendig jedoch nicht hinreichend: Gemäß Speckers Beispiel ist für jedes nicht-rekursive $N \subseteq \mathbb{N}$ die konstante Funktion $f(r) = \sum_{n \in N} 2^{-n}$ zwar beliebig gutartig aber eben keineswegs berechenbar.

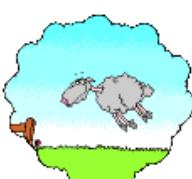
Zwei weitere Darstellungen reeller Zahlen werden sich als sehr nützlich erweisen, wenn es um die Kodierung abgeschlossener Teilmengen geht. Sie enthalten zwar keine Informationen $\varepsilon_n \geq |r - q_n|$ über den Fehler, mit welchem q_n approximiert, aber doch zumindest untere ($\rho_<$) bzw. obere ($\rho_>$) Schranken an den wahren Wert r .

Beispiel 2.12 Die (Kodierung der) Folge (q_n) ist ein $\rho_<$ -Name für $r \in \mathbb{R}$, falls sie r von unten approximiert im Sinne von: $r = \sup_n q_n$. Analog ist sie ein $\rho_>$ -Name für r , falls $r = \inf_n q_n$.

Lemma 2.11 (Fortsetzung)

c) Eine $(\rho \rightarrow \rho_<)$ -berechenbare reelle Funktion ist unterhalbstetig², eine $(\rho \rightarrow \rho_>)$ -berechenbare oberhalbstetig².

²Siehe ÜBUNG 40.3 in [46].



2.4 Vergleich von Berechenbarkeitsbegriffen

Aus dem obigen Beispiel ergibt sich in Zusammenhang mit der Folgerung 2.9e) und g), daß die Konvertierung von ρ -Namen in τ -Namen nicht berechenbar sein kann. Etwas überraschen mag daher auf den ersten Blick die folgende Aussage aus [87], THEOREM 4.1.13.2:

Lemma 2.13 *Eine reelle Zahl ist τ -berechenbar genau dann, wenn sie ρ -berechenbar ist.*

Sind ρ und τ also *doch äquivalent*? Der scheinbare Widerspruch löst sich, wenn man sich die genaue Behauptung vor Augen hält: Zu jeder TM $M_{\rho,r}$, die einen ρ -Namen von $r \in \mathbb{R}$ ausgibt, existiert eine TM $M_{\tau,r}$, die einen τ -Namen des gleichen r ausgibt. Es wird keine Aussage darüber gemacht, wie man aus $M_{\rho,r}$ das $M_{\tau,r}$ erhält: Der Zusammenhang zwischen beiden ist nämlich nicht berechenbar.

Lemma 2.13 exemplifiziert eine Art des Vergleichs zweier Darstellungen: Turings Kodierungs τ reeller Zahlen ist *nichtuniform äquivalent* zu ρ . Einer anderen Art des Vergleichs ist bereits unter Beispiel 2.5 vorgegriffen worden: Die Darstellung ρ ist *uniform äquivalent* zu den Berechenbarkeitsbegriffen von Grzegorczyk [41], Pour-El und Richards [65], Ko [48] und vielen anderen.

Definition 2.14 *Seien α und β Darstellungen des Universums U . Man schreibt " $\alpha \preceq \beta$ " (α ist uniform stärker als β), falls eine TM jeden α -Namen jedes $u \in U$ in einen β -Namen des gleichen u konvertieren kann.*

Man schreibt " $\alpha \Rightarrow \beta$ " (α ist nichtuniform stärker als β), falls es zu jeder TM, die einen α -Namen eines $u \in U$ ausgibt, eine TM gibt, die einen β -Namen des gleichen u ausgibt.

Gilt " $\alpha \preceq \beta$ " und " $\beta \preceq \alpha$ ", so schreibt man " $\alpha \equiv \beta$ " (α und β sind uniform äquivalent). Gilt " $\alpha \Rightarrow \beta$ " und " $\beta \Rightarrow \alpha$ ", so schreibt man " $\alpha \Leftrightarrow \beta$ " (α und β sind nichtuniform äquivalent).

Lemma 2.13 lautet in dieser Schreibweise also: $\tau \Leftrightarrow \rho$. Insbesondere erhält die obige Funktion $f(r) = 3r$ die τ -Berechenbarkeit reeller Zahlen:

$$r \in \mathbb{R} \quad \tau\text{-berechenbar} \quad \Rightarrow \quad f(r) \quad \tau\text{-berechenbar} .$$

Auch diese nichtuniforme Berechenbarkeitsaussage verdeutlicht den Unterschied zur uniformen *Nichtberechenbarkeit* von $r \mapsto f(r)$.

Bezüglich der anderen bisher bekannten Darstellungen reeller Zahlen fassen wir zusammen:

Folgerung 2.15 a) $\rho \preceq \rho_<$, $\rho \preceq \rho_>$

 b) $\rho_< \preceq \gamma$, $\rho_> \preceq \gamma$

 c) $r \in \mathbb{R}$ ist $\rho_<$ -berechenbar genau dann, wenn $\neg r$ $\rho_>$ -berechenbar ist.

 d) $\sum_{n \in N} 2^{-n}$ ist $\rho_<$ -berechenbar genau dann, wenn $N \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar (r.e.) im klassischen Sinn ist.

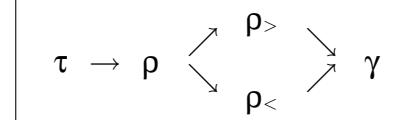
 e) $\sum_{n \in N} 2^{-n}$ ist $\rho_>$ -berechenbar genau dann, wenn $N \subseteq \mathbb{N}$ co-r.e. ist.

f) Insbesondere sind $\rho_<$ und $\rho_>$ nichtuniform (und damit erst recht uniform) unabhängig:

$$\rho_< \neq \rho_>, \quad \rho_> \neq \rho_<$$

$$g) \gamma \neq \rho_<, \quad \gamma \neq \rho_>; \quad \rho_< \neq \rho, \quad \rho_> \neq \rho.$$

Der letzte Punkt besagt, daß die induzierten Berechenbarkeitsbegriffe *nicht-uniform* (und damit erst *rechtfälgig*) *strikt* zwischen denen von γ und ρ liegen, siehe rechts:



Punkte f) und g) ergeben sich durch Betrachtung von $r := \sum_{n \notin N} 2^{-n}$ mit rekursiv aufzählbarem aber nichtrekursivem $N \subseteq \mathbb{N}$: Gemäß e) ist r $\rho_>$ - (und damit auch γ -) berechenbar, gemäß d) jedoch nicht $\rho_<$ -berechenbar und wegen a) auch nicht ρ -berechenbar.

2.5 Konstruktion weiterer Darstellungen

Die Darstellungen $\rho_<$ und $\rho_>$ kodieren also eine reelle Zahl r durch Approximation von unten bzw. von oben. Wie sieht nun eine Darstellung aus, die *beides* tut?

Beispiel 2.16 Die (Kodierung der) Folge rationaler Zahlen $(q_0, p_0, q_1, p_1, \dots)$ ist ein $\rho_< \sqcap \rho_>$ -Name für r , falls $r = \sup q_n = \inf p_n$.

Diese Darstellung ist uniform äquivalent zu ρ : $\rho_< \sqcap \rho_> \equiv \rho$.

Daß man eine Darstellung sozusagen 'aufspalten' kann in zwei Teile, welche jeweils die negative bzw. die positive Information tragen, wird uns in Beispiel 5.4 und viel später im ganzen Kapitel 9 wieder begegnen.

Obiges Beispiel 2.16 verdeutlicht ein generelles Konstruktionsprinzip: Aus zwei Darstellungen erhält man durch reißverschlußartige Verschachtelung der jeweiligen Namen eine neue Darstellung, die alle Informationen der ursprünglichen in sich vereint:

Definition 2.17 Seien α und β Darstellung des gleichen Universums U . Dann bezeichne $\alpha \sqcap \beta$ die folgende Darstellung für U :

$\bar{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist ein $\alpha \sqcap \beta$ -Name für $u \in U$, falls der Substring $(\sigma_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ derjenigen Symbole mit geradem Index ein α -Name für u ist und der Substring $(\sigma_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ derjenigen Symbole mit ungeradem Index ein β -Name für das gleiche u ist.

Die Bezeichnungsweise " " \sqcap " (sprich: *meet*) wurde der Logik entlehnt: Bezüglich der Halbordnung " " \preccurlyeq " im Verband aller Darstellungen des Universums U ist $\alpha \sqcap \beta$ gerade das Infimum (d.h. die größte untere Schranke) von α und β :

$$\alpha \sqcap \beta \preccurlyeq \alpha, \quad \alpha \sqcap \beta \preccurlyeq \beta, \quad (\delta \preccurlyeq \alpha \wedge \delta \preccurlyeq \beta \implies \delta \preccurlyeq \alpha \sqcap \beta)$$

Das obige Konstruktionsprinzip liefert auch in natürlicher Weise eine Darstellung für Tupel reeller Zahlen:



Beispiel 2.18 Die Zeichenkette $\bar{\sigma} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist ein ρ^d -Name von $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, falls für jedes $i = 0, 1, \dots, d-1$ der Substring $(\sigma_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ ein ρ -Name von x_{i+1} ist.

Der Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ ist also kodiert durch *komponentenweise* Approximationen mit rationalen Zahlen und entsprechenden Fehlerschranken. Insbesondere $\rho^1 \equiv \rho$.

Hier wieder die Verallgemeinerung auf kartesische Produkte beliebiger Darstellungen:

Definition 2.19 Sei I eine höchstens abzählbare Indexmenge und $\langle \cdot, \cdot \rangle : I \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bi-rekursiv. Ist α_i für jedes $i \in I$ eine Darstellung des Universums U_i , so bezeichne $\prod_{i \in I} \alpha_i$ die folgende Darstellung für das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} U_i$:

$\bar{\sigma} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist ein $\prod_{i \in I} \alpha_i$ -Name für $(u_i)_{i \in I}$, falls für alle $i \in I$ der Substring $(\sigma_{\langle i, n \rangle})_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ein α_i -Name für u_i ist.

Für endliches $I = \{1, \dots, d\}$ schreiben wir auch vereinfachend $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_d$ anstelle von $\prod_{i=1}^d \alpha_i$.

2.6 Einige berechenbare Funktionen

Wie bereits erwähnt, ist ρ die bevorzugte Darstellung reeller Zahlen. Zum einen, weil (im Gegensatz zu z.B. τ) bezüglich ihr fast alle üblichen Funktionen aus Schulmathematik und Grundstudium berechenbar sind:

- Beispiel 2.20**
- a) Die konstanten Funktionen $x \mapsto 0$ und $x \mapsto 1$ sind $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar.
 - b) Addition $(x, y) \mapsto x + y$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $(\rho \times \rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar.
 - c) Negation $x \mapsto -x$ ist $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar; außerdem $(\rho_{<} \rightarrow \rho_{>})$ - und $(\rho_{>} \rightarrow \rho_{<})$ -berechenbar.
 - d) Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $(\rho \times \rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar.
 - e) Inverse $x \mapsto 1/x$, $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar.
 - f) Jede Polynomfunktion $x \mapsto p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit ρ -berechenbaren Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ist $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar.
 - g) Minimum $(x, y) \mapsto \min\{x, y\}$ und Maximum $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$ sind $(\rho \times \rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar; Absolutbetrag $x \mapsto |x|$ ist $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar.
 - h) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\prod_{n \in \mathbb{N}} \rho$ -berechenbare Folge reeller Zahlen und $R := 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann ist die Potenzreihe $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ effektiv konvergent, d.h. auf jedem abgeschlossenen Intervall $[-r, +r] \subseteq (-R, +R)$ $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar.
 - i) Wurzel $\sqrt{\cdot}$ und die transzententen und trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos, \tan, \exp, \log, \text{asin}, \text{acos}, \text{atan}$ sind auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar.

- j) Die Menge \mathbb{R}_c der ρ -berechenbaren reellen Zahlen bildet (im Gegensatz zu beispielsweise den Gleitkommazahlen der Numerik) einen Körper, welcher zudem algebraisch abgeschlossen ist. Berechenbar sind auch manche nicht-algebraischen Zahlen wie z.B. π und $e = \exp(1)$.

Zum anderen ist ρ (bis auf uniforme Äquivalenz) die einzige Darstellung, welche die kategoriel- len Eigenschaften von \mathbb{R} (vollständiger Archimedisch-geordneter Körper) respektiert, d.h. neben a)-e) oben auch die Ordnungsrelation " $<$ " und den Folgengrenzwertoperator " $\lim_{n \rightarrow \infty}$ " in einem gewissen Sinn berechenbar macht; für Details siehe [42]. An zwei kleinen Nachteilen lässt sich grundsätzlich nichts drehen: Jede zu ρ uniform äquivalente Darstellung ist notwendig partiell und nicht injektiv; siehe THEOREM 4.1.15 in [87].

2.7 Funktionenräume

Als letztes werden in dieser Arbeit noch einige Darstellungen für berechenbare Funktionen benutzt: in Kapitel 5 zur Kodierung von unendlichen (topologisch abgeschlossenen) Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$ über ihre *Distanzfunktionen* $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|a - x\|_2$.

Etwas allgemeiner bezeichne $C(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Gemäß des Weierstraß'schen Approximationssatz kann jede solche Funktion auf jedem Kompaktum gleichmäßig durch multivariate rationale Polynome approximiert werden, siehe SATZ 115.6 in [46]. Machen wir dies zur Grundlage von Darstellungen:

Definition 2.21 Ein $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Name für $f \in C(\mathbb{R}^d)$ ist eine (Kodierung der Koeffizienten einer) Folge rationaler Polynome $p_n(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d]$ und zugehöriger Fehlerschranken $\epsilon_n \in \mathbb{Q}$ so daß

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x_1, \dots, x_d \in [-n, +n] \quad : \quad |p_n(x_1, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_d)| \leq \epsilon_n \rightarrow 0 .$$

Analog zu Beispiel 2.12 ist ein $[\rho^d \rightarrow \rho_<]$ -Name für $f \in C(\mathbb{R}^d)$ eine Folge rationaler Polynome p_n , welche f auf Kompakta punktweise von unten approximieren:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [-n, +n]^d \quad : \quad f(x) = \sup_{m \geq n} p_m(x) ;$$

entsprechend sei $[\rho^d \rightarrow \rho_>]$ durch punktweise Approximation von oben definiert.

Stetige vektorwertige Funktionen $f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$ fassen wir auf als k -Tupel $f = (f_1, \dots, f_k)$ von Funktionen $f_i \in C(\mathbb{R}^d)$: $[\rho^d \rightarrow \rho^k] := (\prod_{i=1}^k [\rho^d \rightarrow \rho])$.

DEFINITION 3.3.13 in [87] erklärt, wie man generell aus Darstellungen α für U und β für V , die in einem gewissen Sinne mit den jeweiligen Topologien verträglich sind, in kanonischer Weise eine Darstellung für den Raum der stetigen Funktionen $f : U \rightarrow V$ konstruiert. Für den Fall $\alpha = \rho^d$ und $\beta = \rho^k$ ist diese allgemeine Konstruktion uniform äquivalent zu Definition 2.21.



Theorem 2.22 (Effektiver Weierstraß-Satz) Die Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann $(\rho^d \rightarrow \rho)$ -berechenbar, wenn sie einen berechenbaren $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Namen besitzt. Entsprechendes gilt für $(\rho^d \rightarrow \rho_<)$ und $[\rho^d \rightarrow \rho_<]$; sowie für $(\rho^d \rightarrow \rho_>)$ und $[\rho^d \rightarrow \rho_>]$. Weiterhin

$$[\rho^d \rightarrow \rho_<] \sqcap [\rho^d \rightarrow \rho_>] \equiv [\rho^d \rightarrow \rho] .$$

Machen wir uns zum Verständnis der letzten Aussage noch einmal den Unterschied klar: *Jede* stetige Funktion $f \in C(\mathbb{R}^d)$ besitzt einen $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Namen. Da es deren überabzählbar viele gibt, kann aber nicht jede solche Funktion $(\rho^d \rightarrow \rho)$ -berechenbar sein. Für die $(\rho^d \rightarrow \rho)$ -Berechenbarkeit von f muß eine TM bei Eingabe jedes ρ^d -Namens von $x \in \mathbb{R}^d$ einen ρ -Namen des einzelnen Funktionswerts $f(x)$ ausgeben. Für die $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Berechenbarkeit muß sie nach dem Start *ohne* Eingabe einen $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Namen von ganz f ausgeben, d.h. die Koeffizienten einer Folge rationaler Weierstraßpolynome im obigen Sinn.

Daß beide Bedingungen äquivalent sind, verdeutlicht die Natürlichkeit der Funktionsdarstellungen. Weiterhin gelten für sie die folgenden Generalisierung der klassischen SMN- und UTM-Theoreme:

Theorem 2.23 Die Punktauswertung stetiger Funktionen

$$C(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f, x) \mapsto f(x)$$

ist $([\rho^d \rightarrow \rho] \times \rho^d \rightarrow \rho)$ -berechenbar. Die partielle Auswertung

$$C(\mathbb{R}^{k+d}) \times \mathbb{R}^k \rightarrow C(\mathbb{R}^d), \quad (f, y) \mapsto f(y, \cdot)$$

ist $([\rho^{k+d} \rightarrow \rho] \times \rho^k \rightarrow [\rho^d \rightarrow \rho])$ -berechenbar. Zu jedem $(\rho^{k+d} \rightarrow \rho)$ -berechenbaren $f : \mathbb{R}^{k+d} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine $(\rho^k \rightarrow [\rho^d \rightarrow \rho])$ -berechenbare Funktion

$$F : \mathbb{R}^k \rightarrow C(\mathbb{R}^d) : \quad \forall y \in \mathbb{R}^k \forall x \in \mathbb{R}^d : \quad f(y, x) = F(y)(x) .$$

Analoges gilt jeweils für $[\rho^d \rightarrow \rho_<]$ und $[\rho^d \rightarrow \rho_>]$.

Ein $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Name für f kann also quasi als "Programm" einer Typ-2 Maschine angesehen werden: wie ein Orakel erlaubt es uniform die approximative Auswertung von f an beliebigen Stellen x .

Damit ist dieser Kurzabriß der TTE fast beendet. Es sei noch angemerkt, daß die obigen Darstellungen γ , τ , ρ , $\rho_<$ und $\rho_>$ sich leicht dahingegend erweitern lassen, auch die speziellen 'Zahlen' $\pm\infty$ zu kodieren. Entsprechend gibt es $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Namen, $[\rho^d \rightarrow \rho_<]$ -Namen und $[\rho^d \rightarrow \rho_>]$ -Namen für die beiden Funktionen $f(x) = \pm\infty$.

Zum Abschluß noch die Formalisierung einer bereits angekündigten Eigenschaft der hier betrachteten Darstellungen: sie sind *robust* gegenüber kleineren Modifikationen der verwendeten Kodierung:

Lemma 2.24 Sei v' eine zu v uniform äquivalente Darstellung der rationalen Zahlen: $v \equiv v'$. Bezeichnen γ' , p' , $p'_<$ und $p'_>$ Darstellungen der reellen Zahlen, welche analog zu Beispielen 2.4, 2.5, 2.12 gebildet seien aber basierend auf v' statt auf v . Dann sind auch diese uniform äquivalent:

$$\gamma \equiv \gamma', \quad p \equiv p', \quad p_< \equiv p'_<, \quad p_> \equiv p'_>;$$

und ebenso für das in Definition 3.12 eingeführte \hbar .

Sei nun p' eine Darstellung reeller Zahlen, welche diesmal vorausgesetzt wird als uniform äquivalent zu p . Dann sind auch die entsprechenden obigen Produkt- und Funktionsdarstellungen jeweils uniform äquivalent, egal ob mit p oder mit p' gebildet.

Robustheit entspricht in der TTE-Berechenbarkeit dem, was in der klassischen Komplexitätstheorie die Invarianz von \mathcal{P} unter kleinen Modifikationen des Modells (1-Band- oder k -Band-TM, ein Kopf oder mehrere, einseitig- oder zweiseitig unbeschränktes Band, beliebiges endliches Alphabet oder $\{0, 1\}$) ist.

2.8 Beweistechniken

Uniforme Nichtberechenbarkeitsaussagen werden in TTE üblicherweise durch Reduktion auf das Lemma 2.11, d.h. durch Widerspruch zur Stetigkeit berechenbarer String-Funktionen bewiesen; vergleiche Beispiel 2.10. Entsprechendes gilt für den Spezialfall der Nichtkonvertierbarkeitsaussagen " $\alpha \not\prec \beta$ ". Hier führt TTE, zusätzlich zu den in Definition 2.14 angegebenen Arten, Darstellungen zu vergleichen, noch eine weitere ein:

Definition 2.25 Seien α und β Darstellungen von U . Man schreibt " $\alpha \preccurlyeq_t \beta$ " (α ist stetig reduzierbar auf β), falls es eine stetige Funktion $F : \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ gibt, welche jeden α -Namen $\bar{\sigma}$ eines $u \in U$ abbildet auf einen β -Namen $F(\bar{\sigma})$ des gleichen u .

Wegen Lemma 2.11 gilt

$$\alpha \preccurlyeq \beta \implies \alpha \preccurlyeq_t \beta$$

denn jede berechenbare Konvertierung ist notwendig eine stetige. Nahezu alle in dieser Arbeit vorkommenden negativen Aussagen " $\alpha \not\prec \beta$ " sind tatsächlich von dieser stärkeren Form " $\alpha \not\prec_t \beta$ "; alleine in Theorem 9.22 taucht als Ausnahme ein Fall

$$\alpha \preccurlyeq_t \beta \wedge \alpha \not\prec \beta$$

auf. Er zeigt sehr schön, daß in Rekursiver Analysis *beide* Aspekte gleichermaßen wesentlich sind: Analysis (repräsentiert durch Stetigkeit) wie klassische Rekursionstheorie (es gibt nur abzählbar viele Algorithmen).

Nichtuniforme Unberechenbarkeitsbeweise basieren in der Regel auf klassischen Diagonalisierungsargumenten wie der Existenz einer rekursiv aufzählbaren, nichtrekursiven Menge $N \subseteq \mathbb{N}$.

Beispiel 2.26 Die Abbildung $r \mapsto -r$ ist bzgl. $p_<$ nicht berechenbar, selbst nichtuniform.



Beweis: Sei N wie oben und $r := \sum_{n \in N} 2^{-i}$. Wegen Folgerung 2.15c+e) ist r $\rho_<$ -berechenbar, $f(r) = -r$ jedoch nicht. \square

Die Berechenbarkeit einer Funktion (und insbesondere positive Konvertierbarkeitsaussagen " $\alpha \preccurlyeq \beta$ ") zeigt man natürlich kanonisch durch Angabe eines Algorithmus', welcher die gewünschte Ausgabe erzeugt. Folgerung 2.9g) illustriert dies an einem (trivialen) Beispiel. Laufzeitfragen sind im vorliegenden Rahmen zweitrangig, und so kann nach Belieben (und oftmals ohne explizite Erwähnung) auf exakte rationale Arithmetik, \mathcal{NP} -Orakel oder vollständige Suche in endlichen Räumen zurückgegriffen werden.

Noch genereller sind Unterprogrammaufrufe an beliebige terminierende Algorithmen zulässig. Beispielsweise wird in Proposition 6.5 die Berechenbarkeit der konvexen Hülle $\text{chull}(A)$ dadurch bewiesen, daß man sie als kompaktes Bild $\text{chull}(A) = f[A \times \Lambda]$ einer berechenbaren Funktion f unter dem kartesischen Produkt mit einer berechenbaren Menge Λ schreibt. Da "kartesisches Produkt" und "kompaktes Bild" berechenbare Operationen sind, es also entsprechende Algorithmen gibt, führt der Aufruf derselben mit passenden Argumenten zu einem Algorithmus für die konvexe Hülle. Abstrakt gesprochen ist dies die Transitivität der Berechenbarkeit (Lemma 2.7) bzw. das **SMN-Theorem 2.23**.

Als Erweiterung sind unter Umständen sogar Aufrufe an *nicht*terminierende Unterprogramme möglich. Diese "*dovetailing*" genannte Technik kennen wir aus der klassischen Rekursionstheorie rekursiv aufzählbarer Mengen. Grob gesprochen basiert sie auf der parallelen Simulation mehrerer Turingmaschinen. Z.B. sichert Proposition 7.4 die uniforme $\rho_<$ -Berechenbarkeit des Rangs $\text{rank}(A)$ einer Matrix A wie folgt zu: Es gibt einen Algorithmus, welcher bei Eingabe von A und $k \in \mathbb{N}$ hält dann und nur dann, wenn " $\text{rank}(A) \geq k$ " gilt. Obwohl dieser also im allgemeinen *nicht* terminiert, kann man ihn benutzen zur uniformen Approximation des Rangs von unten: Einmal gestartet, zeitgleich und parallel für jedes mögliche $k \in \mathbb{N}$, liefert jede beendete Instanz eine untere Schranke.

3 Verwandte Gebiete und Modelle

TTE dient in dieser Arbeit als formaler Rahmen für Berechenbarkeitsuntersuchungen über den reellen Zahlen und insbesondere für Rekursive Analysis. Sie steht in Verbindung zu zahlreichen anderen Forschungsrichtungen: klassischer Analysis wie diskreter Rekursionstheorie, Numerische Mathematik bis hin zur Intervall-Arithmetik; weiterhin zu Rechenmodellen wie der **real-RAM**, analytischen Maschinen, der **BCSS**-Theorie und so weiter.

Verschiedenste dieser Gebiete haben sich in der Vergangenheit mit interessanten Ideen gegenseitig befriedet und werden es sicher auch weiterhin tun. Andererseits gelten jeweils wichtige Ergebnisse des einen im anderen nicht und *vice versa*. Das vorliegende Kapitel soll entsprechende Unterschiede aber auch Gemeinsamkeiten erläutern.

3.1 Rekursionstheorie

Dies ist die klassische Berechenbarkeitslehre, wie man sie im Grundstudium trifft:

- Sprachen $L \subseteq \{0,1\}^*$, d.h. Familien endlicher Zeichenketten, und diskrete Zahlenfunktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$;
- entschieden bzw. berechnet durch (Typ-1) Turing-Maschinen.
- Chomsky Hierarchie: reguläre und kontextfreie Sprachen;
- Unentscheidbarkeit (nichtrekursiv) und Semi-Entscheidbarkeit (rekursiv aufzählbar/r.e.).

Ein Blick auf die auch heute noch beeindruckende Arbeit [85] von 1936 offenbart, daß die Turing-Maschine ihrem Erfinder ursprünglich dazu diente, Berechenbarkeit *reeller* Zahlen zu untersuchen:

Indeed, in this paper Turing introduced the notion of computable real number before, and as a means to, define computations over the integers. This fact does not seem well known, so it is of considerable [...] interest to examine the very first paragraph of Turing's paper.

So schreiben Blum, Cucker, Shub und Smale in ABSCHNITT 1.8 ihres Buches [7]. In der Sprache von TTE untersucht Turing nichtuniforme τ -Berechenbarkeit, die ja äquivalent ist zu ρ . Darauf aufbauend betrachtet Rekursive Analysis

- stetige Zahlenfunktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; unendliche Zeichenketten $\bar{\sigma} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und Operationen auf selbigen,
- berechnet durch Typ-2 Turing-Maschinen;
- reguläre und kontextfreie ω -Sprachen [84];
- Semi-entscheidbar und unentscheidbar ist z.B. die kontinuierliche Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Den letzten Punkt erläutert das folgende

Beispiel 3.1 Es gibt eine TM M , welche bei ρ -Eingabe einer reellen Zahl r genau im Fall $r \neq 0$ hält. Es gibt aber keine TM, welche genau im Fall $r = 0$ hält.

Beweis: Lese schrittweise für $n = 0, 1, \dots$ die rationalen Approximationen q_n und Fehlerschranken ε_n , die sie als ρ -Eingabe von r erhält. Sobald $0 \notin [q_n - \varepsilon_n, q_n + \varepsilon_n]$, halte!

Wegen $|q_n - r| \leq \varepsilon_n$ ist dann in der Tat $r \neq 0$. Ist umgekehrt $r \neq 0$, so gibt es wegen $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon < |r|/2$; für dieses n gilt dann $0 \notin [q_n - \varepsilon_n, q_n + \varepsilon_n]$ auf Grund von $|q_n - r| \leq \varepsilon_n$, so daß die angegebene TM tatsächlich hält.

Nehmen wir nun an, ein M halte genau für $r = 0$, also insbesondere bei Eingabe der Folge $q_n = 0$, $\varepsilon_n = 1/n$ für $n = 1, 2, \dots, \infty$. Folgendes Unstetigkeitsargument führt die Annahme zu einem Widerspruch: Bis zum Halten hat M höchstens endlich viele Folgenglieder gelesen; seien diese q_1, \dots, q_N und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$. Betrachte nun die Eingabe q'_n und ε'_n mit $\varepsilon'_n = 1/n$ für $n = 1, \dots, \infty$ und $q'_n = 0$ für $n = 1, \dots, N$ sowie $q'_n = 1/(2N)$ für $n > N$: diese bildet einen zulässigen ρ -Namen für $r' = 1/(2N)$. Wegen $r' \neq 0$ dürfte M also nicht halten. Tatsächlich arbeitet M aber deterministisch auf dieser Eingabe genau so wie vorhin, denn sie liest exakt die gleichen Symbole wie eben — bis zu ihrem Halt; Widerspruch. □



Grob gesagt: Aus Näherungen mit absoluten Fehlerschranken läßt sich zwar in endlicher Zeit verifizieren, daß die approximierte Zahl ungleich Null ist; man kann jedoch nie sicher sein, ob sie *gleich* Null ist.

Die Unmöglichkeit von Tests auf Gleichheit unterscheidet dieses Rechenmodell wesentlich von beispielsweise der weiter unten beschriebenen **realRAM**, die in der Algorithmischen Geometrie zur Algorithmenentwicklung üblich ist, dort jedoch bei der Implementierung zu den bekannten numerischen Schwierigkeiten führt.

Nichtsdestotrotz wird die Unmöglichkeit solcher Tests in diesem Rechenmodell oftmals als Kritikpunkt vorgebracht. Demgegenüber steht, daß zahlreiche kluge Köpfe wie Turing [85] intensiv dieses Modell und seinen induzierten Berechenbarkeitsbegriff untersucht haben. Auch László Lovász gehört zu ihnen [57, S.35]:

.... This leads us to the discovery that the equality of two real numbers cannot be determined from the black box description above. At first sight, this seems to be a serious handicap of this model, but it in fact reflects a real requirement in numerical analysis: stability.

In beispielsweise dem Buch [38] verwendet er, zusammen mit seinen Koautoren Grötschel und Schrijver, eben genau dieses Rechenmodell. Wir werden darauf in Kapitel 4 näher eingehen.

3.2 Klassische und Rekursive Analysis

Analysis ist die grundlegende Theorie reeller Zahlen, Konvergenz und Funktionen ebensolcher [46]. Rekursive Analysis befaßt sich mit sogenannten *Effektivierungen* klassischer Theoreme, d.h. der Verstärkung von Existenzaussagen zu Berechenbarkeitsaussagen.

Beispiel 3.2 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(0) < 0$, $f(1) > 0$. Dann existiert eine Nullstelle $x \in [0, 1]$ von f .*

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ berechenbar, $f(0) < 0$, $f(1) > 0$. Dann besitzt f eine berechenbare Nullstelle $x \in [0, 1]$.

Andererseits geht die klassische Analysis wesentlich ein in die Rekursive Analysis, beispielsweise der *Satz von Weierstraß* in Theorem 2.22.

Als Rechenmodell wird üblicherweise die Approximierbarkeit durch rationale Zahlen mit zugehörigen Fehlerschranken auf einer geeigneten Turing Maschine zugrundegelegt, d.h. der von der Darstellung ρ induzierte Berechenbarkeitsbegriff. Ergebnisse der Rekursiven Analysis lassen sich also im Rahmen von **TTE** formulieren — aber eben auch noch viele andere wie beispielsweise Analytische Maschinen (Abschnitt 3.8) und Domain-Theorie (Abschnitt 3.5).

3.3 Konstruktivismus und Intuitionismus

Innerhalb der Konstruktiven Mathematik wurde in den späten 40er Jahren die sogenannte *Russische Schule* um A.A. Markov begründet [55]. Sie untersucht Existenzaussagen der klassischen

Analysis auf ihre *Konstruierbarkeit* hin und ist daher eng verwandt mit (wenn auch nicht identisch zur) Rekursiven Analysis; vgl. ABSCHNITT 9.6 in [87] sowie [45]. Tatsächlich befürchten sie sich gegenseitig, wie z.B. [80] zeigt.

Der Beweis, daß eine gewisse Konstruktion/ein gewisser Algorithmus korrekt ist, d.h. das gewünschte mathematische Objekt tatsächlich liefert, erfolgt bei beiden stets konventionell. Er darf also z.B. durchaus nichtkonstruktiv (indirekt) argumentieren, d.h. mit den Worten beginnen:

Angenommen, $\lim_n x_n = x$ aber die ausgegebene/konstruierte Folge y_n konvergiere nicht gegen den Wert $y = f(x)$. Dann ...

Noch weiter geht der Intuitionismus, der außer auf nichtkonstruktive Existenzbeweise auch noch auf gewisse Axiome der Logik verzichtet. Die Kompaktheit des Cantor-Raums (Abschnitt 2.3, siehe LEMMA 2.2.5 in [87]) beruht z.B. auf Königs Lemma [76] (einer Abschwächung des Auswahlaxioms), das in der Intuitionistischen Mathematik nicht beweisbar ist. Luitzen Egbertus Jan Brouwer wurde (außer für seinen Fixpunktsatz) berühmt dafür, zusätzlich auf das *tertium non datur*³ zu verzichten. Er glaubte z.B. nicht an die Korrektheit folgendes Algorithmus' zur γ -Berechnung der Zahl 0:

Beispiel 3.3 (Brouwer/Heyting) Berechne iterativ die Ziffernfolge $d_0 = 3, d_1 = 1, d_2 = 4, d_3 = 1, d_4 = 5, \dots, d_n, \dots$ der Dezimalbruchentwicklung der Kreiszahl $\pi = \sum_{n=0}^{\infty} d_n 10^{-n}$. Zu jedem gefundenen d_n gebe 2^{-n} aus solange, bis zum ersten Mal $(d_{n-9}, d_{n-8}, \dots, d_n) = (0, 1, \dots, 9)$ erscheint. In diesem Moment gebe einmalig 1 aus und fortan ad infinitum 0.

Klassisch ist klar: So oder so stellt die Ausgabe einen zulässigen γ -Namen für 0 dar.

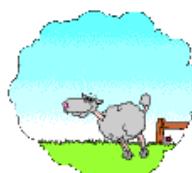
- Entweder die Ziffernfolge kommt nicht in π vor;
dann gibt der Algorithmus *immer* $2^{-n} \rightarrow 0$ aus;
- oder sie kommt vor;
dann gibt der Algorithmus nach endlicher Zeit nur noch 0en aus.

Intuitionistisch ist das obige *entweder–oder* jedoch unzulässig, siehe [16]. Damit, so David Hilbert, würde Brouwer "mit Mathematikern verfahren, wie wenn man den Astronomen ihre Fernrohre [...] raubte".

Beachte, daß sein Gegenbeispiel wesentlich darauf beruhte, nicht zu wissen, ob oben der erste oder der zweite Fall zutrifft — oder eben ein eventuelles *tertium datur est*. Doch das war vor der Zeit heutiger Höchstleistungscomputer. Diese haben inzwischen (mittels FFT und schneller Multiplikation, siehe z.B. [17]) π bis auf ca. 500 Mrd. Stellen berechnen können und dabei die Ziffernfolge 0123456789 ab beispielsweise der 17 387 594 880-sten Position gefunden⁴, vergleiche [9].

³Tatsächlich konnte Gödel zeigen, daß manche Aussagen weder beweisbar noch (durch ein Gegenbeispiel) widerlegbar sind, sondern sich gewissermaßen in einem dritten logischen Zustand befinden.

⁴Weitere Beispiele, wo Probleme der reinen Mathematik mittels Computer gelöst wurden, anstatt wie üblich umgekehrt, finden sich in [69, 77, 31].



3.4 Numerik

Die Numerik weist ebenfalls viele Ähnlichkeiten zur Rekursiven Analysis auf: approximative Berechnungen mit endlicher Genauigkeit. Sie legt jedoch ihr Hauptaugenmerk auf Komplexität und insbesondere obere Schranken, d.h. Algorithmenentwicklung. *Unberechenbarkeit* kommt in der Numerik nicht vor, ein Problem ist im schlimmsten Fall "schlecht konditioniert". Das mag damit zusammenhängen, daß es kein einheitliches Rechenmodell gibt. Zwar beginnt fast jedes Numerikbuch mit einem Kapitel über Gleitkommaarithmetik und Rundungsfehler. Weiter hinten liest man dann aber über das Newton-Verfahren *sine qua non*:

Beispiel 3.4 Sei x die eindeutige Nullstelle der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein Startwert. Unter gewissen Bedingungen⁵ konvergiert dann die Newton-Iteration

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \quad (3.1)$$

quadratisch schnell gegen x , d.h. es gilt $|x_n - x| \leq 2^{-\Omega(2^n)}$.

Eine mögliche *Auslöschung* beim Berechnen der Differenz zwischen x_n und $f(x_n)/f'(x_n)$ wird hier nicht mehr betrachtet; vielmehr gilt die Analyse für den Fall eines algebraischen Rechenmodells, d.h. der (durchaus sinnvollen) approximativen Zurückführung der nicht-arithmetischen Operation "Nullstellensuche" auf die arithmetischen Operationen $+, -, *, /$ sowie Funktionsauswertungen und Tests/Verzweigungen.

Eine andere Besonderheit der Numerik betrifft ihren uneinheitlichen Approximationsbegriff: Die obige Analyse der Newton-Methode macht Aussagen über die erreichte *absolute* Genauigkeit des Ergebnisses $|x_n - x|$ unter der Annahme *exakter* Eingabedaten $f(x_n)$ und $f'(x_n)$. Mit Konditionszahlen hingegen wird im Sinne *relativer* Fehler der Einfluß *gestörter* Eingabedaten auf das Ergebnis untersucht:

Beispiel 3.5 Sei $\|\cdot\|$ eine submultiplikative Norm, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertierbar und $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ ihre Konditionszahl. Bezeichne $x = A^{-1} \cdot b$ die Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS) $A \cdot x = b$ bei gegebener rechter Seite $b \in \mathbb{R}^d$.

Wird nun statt dessen das gleiche LGS mit perturbierter rechter Seite $b + \Delta b$ betrachtet, so erfüllt dessen Lösung $x + \Delta x = A^{-1} \cdot (b + \Delta b)$:

$$\|\Delta x\|/\|x\| \leq \text{cond}(A) \cdot \|\Delta b\|/\|b\|$$

und diese Abschätzung ist scharf.

Die bekannten Hilbert-Matrizen $H_n = (\frac{1}{i+j-1})_{1 \leq i,j \leq n}$ haben exponentiell große Konditionszahlen.

Strukturellen Defiziten stehen jedoch unzweifelhafte Erfolge beim Design neuer hochgradig praxisrelevanter Algorithmen und numerischer Software-Bibliotheken gegenüber, so daß Blum, Cucker, Shub und Smale in ABSCHNITT 1.4 ihres Buchs [7] schreiben:

⁵Die Literatur nennt verschiedene praktische-verifizierbare hinreichende Konvergenzkriterien; sie können jedoch nicht gleichzeitig notwendig sein, da die Menge der 'guten' Startwerte beweisbar unentscheidbar ist; siehe Kapitel 3.7...

The developments described in the previous section (and the next) have given a firm foundation to computer science as a subject in its own right. Use of the Turing machines yields a unifying concept of the algorithm well formalized. [...] The situation in numerical analysis is quite the opposite. Algorithms are primarily a means to solve practical problems. There is not even a formal definition of algorithm in the subject. [...] Thus we view numerical analysis as an eclectic subject with weak foundations; this certainly in no way denies its great achievements through the centuries.

Einen möglichen Weg, diese fehlenden Grundlagen zu legen, gehen sie im erwähnten Buch. Die Rekursive Analysis bietet eine anderen Weg dazu, siehe Abschnitt 3.7 über die Unterschiede zwischen BCSS-Theorie und Rekursiver Analysis. Im Vergleich zur Numerik sei hier betont, daß Rekursive Analysis

- auf dem Turing'schen Rechenmodell beruht,
- semantisch erweitert auf reelle Zahlen
- in Form von Approximation durch rationale
- bezüglich *absoluter* Fehlerschranken
- bei Ausgabe *und* Eingabe.

Zwei Beispiele sollen die Konsequenzen verdeutlichen: Integration und Differenziation.

Beispiel 3.6 Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Die Trapezregel zur numerischen Integration

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}f(0) + f(1/n) + f(2/n) + \dots + f(\frac{n-1}{n}) + \frac{1}{2}f(1) \right) + E(f, n)$$

führt zu einer Approximation bis auf $|E(f, n)| \leq \|f''\|_\infty / (12n^2)$.

Ist $\|f''\|_\infty$ also bekannt, so kann man die Anzahl n der Stützstellen groß genug machen, um den Absolutfehler unter jede gegebene Schranke ε zu drücken; ist $\|f''\|_\infty$ unbekannt, dann bleibt nur die asymptotische Aussage $|E(f, n)| \leq \mathcal{O}(1/n^2)$ mit einer unbekannten Konstanten. In der Rekursiven Analysis hingegen gilt ohne solche Voraussetzungen:

Beispiel 3.7 Das Integrations-Funktional

$$I : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad I : f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

ist $([\rho \rightarrow \rho] \rightarrow \rho)$ -berechenbar.



Der Grund für diesen Unterschied liegt in der Art der Funktionsauswertung: zwar liefert eine Orakelanfrage " $f(q) = ?$ " für $q \in \mathbb{Q}$ in der Rekursiven Analysis nur eine approximative Antwort " $f(q) = p \pm \delta$ " für $p \in \mathbb{Q}$. Da aber auch die Eingabe q an das Orakel selbst nur approximativ ist " $x = q \pm \varepsilon$ ", gilt diese Antwort für alle $q \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$: mit einer einzigen Anfrage erhält man hier Information über einen ganzen *Bereich* von Funktionswerten.

Beispiel 3.8 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar, $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Dann liefert die *dividierte Differenz*

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + E(f, h)$$

eine Approximation von $f'(x)$ bis auf Absolutfehler $|E(f, h)| \leq \|f'''\|_\infty \cdot h^2/6$.

Bei der numerischen Differenziation ist die Situation also so ähnlich wie bei der Integration. Ganz anders sieht es aus in der Rekursiven Analysis:

Beispiel 3.9 (Pour-El/Richards) Es gibt eine $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbare, unendlich oft stetig differenzierbare Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, für die f' nicht $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar ist.

Insbesondere ist Differenziation keine berechenbare Operation, selbst nichtuniform und erst recht uniform; zumindest nicht bezüglich des von der Darstellung $[\rho \rightarrow \rho]$ induzierten Berechenbarkeitsbegriffs. Andererseits kann man diese Darstellung ganz leicht so erweitern, daß Differenziation sehr wohl berechenbar wird:

Beispiel 3.10 Bezeichne $C^1(\mathbb{R}) \subseteq C(\mathbb{R})$ die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Auf ihr betrachte die folgende Darstellung $[\rho \rightarrow \rho]^1$:

Die Zeichenkette $\bar{\sigma} \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ ist $[\rho \rightarrow \rho]^1$ -Name von $f \in C^1(\mathbb{R})$, falls der Substring $(\sigma_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ein $[\rho \rightarrow \rho]$ -Name von f und der Substring $(\sigma_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ein $[\rho \rightarrow \rho]$ -Name von f' ist.

Hiermit wird die Operation $f \mapsto f'$, $C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ trivialerweise $([\rho \rightarrow \rho]^1 \rightarrow [\rho \rightarrow \rho])$ -berechenbar: entferne aus der Eingabezeichenkette alle Symbole mit geradem Index, fertig. Es ist eben alles eine Frage der Kodierung...

3.5 Domain-Theorie und Intervall-Arithmetik

Bei der Domain-Theorie handelt es sich um ein eigenes mathematisches Modell [2] zur abstrakten Beschreibung von Approximationen. Sie wird in letzter Zeit verstärkt als ein Rechenmodell für Algorithmische Geometrie eingesetzt von einer Gruppe um Abbas Edalat, siehe [74, 27, 26, 50].

Zugrunde liegt ein Universum \mathcal{D} mit einer partiellen Ordnung \sqsubseteq . Dahinter steht die Idee, daß " $a \sqsubseteq b$ " bedeutet: b enthält genauere Information als a . Eine Teilmenge $A \subseteq \mathcal{D}$ heißt *gerichtet*, wenn es zu je zwei $a, b \in A$ ein $c \in A$ gibt mit $a \sqsubseteq c$ und $b \sqsubseteq c$. \mathcal{D} ist ein *Domain*, falls jede gerichtete Teilmenge $A \subseteq \mathcal{D}$ eine kleinste obere Schranke (Supremum) besitzt.

Im reellen Fall besteht \mathcal{D} aus allen abgeschlossenen Intervallen $I = [x, y]$ und die Ordnung ist die umgedrehte Inklusion:

$$[x, y] \sqsubseteq [u, v] \iff [x, y] \supseteq [u, v].$$

Bezüglich dieser Relation sind die reellen Zahlen $r \in \mathbb{R}$, aufgefaßt als einelementige Intervalle $[r, r]$, gerade die maximalen Elemente des Domains. Und nicht-maximale Elemente $[x, y] \sqsubseteq [u, v] \sqsubseteq [r, r]$ approximieren dieses $[r, r]$ mit zunehmender Genauigkeit (Information) gemäß eben der Ordnung \sqsubseteq . Eine abzählbare *Basis* für diesen Domain besteht aus allen abgeschlossenen Intervallen $[x, y]$ mit rationalen Endpunkten $x, y \in \mathbb{Q}$.

Man sieht: Das beschreibt genau das Rechnen in Intervall-Arithmetik

$$\begin{aligned} [x, y] + [u, v] &= [x+u, y+v], & 1/[x, y] &= [1/y, 1/x] \quad \text{für } 0 \notin [x, y] \\ -[x, y] &= [-y, -x], & [x, y] \cdot [u, v] &= [\min(xu, xv, yu, yv), \max(xu, xv, yu, yv)] \end{aligned}$$

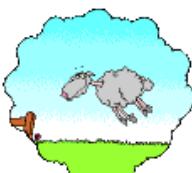
und ist weiterhin uniform äquivalent zur **TTE**-Darstellung ρ : Aus der Approximation q_n von r mit Fehlerschranke $\epsilon_n \geq |r - q_n|$ gewinne das r enthaltende Intervall $I_n := [q_n - \epsilon_n, q_n + \epsilon_n] \sqsubseteq [r, r]$, welches für $\epsilon_n \rightarrow 0$ gegen das informationstheoretische $\sup_n I_n = [r, r]$, d.h. gegen das maximale Element r konvergiert. Umgekehrt führt ein rationales Intervall $I_n = [x_n, y_n] \sqsubseteq [r, r]$ zur rationalen Approximation $q_n = (x_n + y_n)/2$ mit der Fehlerschranke $\epsilon_n = (x_n - y_n)/2 \rightarrow 0$.

3.6 Die realRAM

Hierbei handelt es sich um eine Erweiterung der bekannten Random Access Machine (RAM) mit speziellen Registern für reelle Zahlen. Auf diesen kann exakt und mit Einheitskostenmaß addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden; manchmal kommen auch Wurzeln, elementare transzendente und Rundungsfunktionen wie $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ hinzu. Weiterhin gibt es Verzweigungen (Fallunterscheidungen) basierend auf Tests (`if`-Abfragen) für Gleichheit “`==`”, kleiner “`<`”, etc.

Die **realRAM** besticht durch ihre Eleganz und konzeptionelle Einfachheit. Tatsächlich wurden (und werden) Hochsprachen wie die *FORmula TRANslation Language* FORTRAN entwickelt als syntaktischer Rahmen für die Programmierung mathematischer Formeln über $+, -, \cdot, /, \sqrt{\cdot}$, sin, cos, exp und log auf eben solchen Maschinen. Andererseits spiegelt sie, wie jedes Modell, nur *gewisse* Aspekte realer Digitalcomputer wieder:

- Bei der Verwendung von Gleitkommaarithmetik brauchen heutige Mikroprozessoren tatsächlich ungefähr gleich lange für jede der obigen Operationen, unabhängig vom Wert des jeweiligen Arguments. Die **realRAM** führt in diesem Kontext also auf einen realistischen Komplexitätsbegriff.
- Auf Grund von Rundungsfehlern führen Gleitkomma-Operationen zu etwas abweichen- den Ergebnissen von ihren Idealisierungen in der **realRAM**. Dadurch können Vergleiche anders ausfallen, die wiederum den Programmablauf beeinflussen und im Extremfall zu inkonsistenten Ergebnissen führen.



Um letzteren Nachteil zu kurieren, haben Brattka und Hertling eine realistischere Variante, die *feasible realRAM* vorgeschlagen [11]. In ihr bleiben die arithmetischen Operationen primitiv, doch wird die Semantik von Vergleichen so modifiziert, daß ein zur Typ-2 Maschine äquivalenter Berechenbarkeitsbegriff entsteht.

Es gibt sogar eine praktische C++-Implementierung solcher Maschinen in Form der iRRAM von N. Müller [64] bis hin zu den effektiven Limites aus Beispiel 2.20g). Diese startet das Benutzerprogramm `main()` und führt durch objektorientierte Überladung alle darin vorkommenden Rechenoperationen mit einer gewissen Genauigkeit $\varepsilon_0 > 0$ aus. Bei jedem Vergleichsausdruck wird unter Berücksichtigung von Fehlerfortpflanzung geprüft, ob das so weit angenäherte Ergebnis die verlangte Entscheidung gestattet. Tut es das nicht, startet das Hauptprogramm `main()` von neuem, diesmal aber mit verbesserter Genauigkeit $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$.

Auf der iRRAM können dadurch Algorithmen über den reellen Zahlen (wie zum Beispiel die Gauß-Elimination) *straight-forward* implementiert werden, ohne Rücksicht auf numerische Stabilität nehmen zu müssen.

In praktischen Experimenten kommen die oben erwähnten Neustarts dabei nicht sehr oft vor; [64] belegt dies u.A. durch Zeitmessungen für die Invertierung der bekanntermaßen schlecht konditionierten Hilbert-Matrizen H_n . Hier offenbart sich darüberhinaus die automatische Adaptivität, die bei den gut konditionierten $H_n + 1$ zu entsprechend geringeren Laufzeiten führt.

3.7 BCSS-Theorie

Blum, Cucker, Shub und Smale [7] beschreiben Rechnungen über einem kommutativen Ring R mit arithmetischen Operationen $+, -, \cdot$ (ggf. auch $/$) und Tests auf Gleichheit " $=$ " sowie ggf. " $<$ " im Fall einer Totalordnung auf $(R, <)$.

Für $R = \mathbb{R}$ ist ihr Modell äquivalent zur **realRAM**; für $R = \mathbb{Z}$ erhält man die gewöhnliche RAM, für $R = \mathbb{Z}_2$ die Turing-Maschine. Die über letzterer definierten Komplexitätsklassen \mathcal{P} und \mathcal{NP} verallgemeinern sie entsprechend zur "Polynomialzeit-Berechenbarkeit" bzw. zur "Polynomialzeit-Verifizierbarkeit" über Ring R . Indem *eine* BCSS-Maschine beliebig lange Eingaben und Ausgaben aus R^* (anstatt nur R^n) verarbeitet, berücksichtigt dies Uniformitätsaspekte, wohingegen Valiants algebraische Komplexitätsklassen \mathcal{VP} und \mathcal{VNP} inhärent nichtuniform sind [17, 18]. Einige wichtige Ergebnisse für das BCSS-Modell lauten:

- Über $R = (\mathbb{R}, <)$ ist die Zugehörigkeit von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zur Mandelbrotmenge

$$\mathcal{M} = \{(x, y) : |p_{x+iy}^{(n)}(0)|^2 \leq 4 \forall n\}, \quad p_c(z) := c + z^2, \quad |x + iy|^2 = x^2 + y^2 \quad (3.2)$$

unentscheidbar: ihr Rand hat Hausdorff-Dimension > 1 , daher ist \mathcal{M} keine abzählbare Vereinigung semi-algebraischer Mengen.

- Die Menge aller Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$, für die die Newton-Iteration (3.1) zu einer Nullstelle von $f(x) = x^3 - 2x + 2$ konvergiert, ist unentscheidbar.
- **Hilbert Nullstellensatz:** Gegeben m Polynome in n Variablen über R , besitzen diese eine gemeinsame Nullstelle?

- Für $R = \mathbb{C}$ ist dies entscheidbar und \mathcal{NP} -vollständig;
 - für $R = \mathbb{Z}_2$ ist es \mathcal{NP} -vollständig;
 - für $R = (\mathbb{Z}, <)$ ist es unentscheidbar [58];
 - für $R = \mathbb{R}$ und Polynome bis Grad 4 ist es entscheidbar [83] und \mathcal{NP} -vollständig.
- Lineares Programmieren:
 - Für $R = (\mathbb{Z}, <)$ ist es bezüglich Bit-Kosten \mathcal{NP} -vollständig;
 - für $R = (\mathbb{Q}, <)$ ist es bezüglich Bit-Kosten in \mathcal{P} ;
 - für $R = (\mathbb{R}, <)$ ist es in $\mathcal{NP} \cap co\mathcal{NP}$ aber vermutlich weder in \mathcal{P} noch \mathcal{NP} -vollständig.

In ABSCHNITT 1.8 von [7] geben die Autoren selbst einen sehr verständlichen Überblick über das Verhältnis ihres Rechenmodells zu anderen. Im für uns besonders wichtigen Fall $R = \mathbb{R}$ ist es, wie bereits erwähnt, äquivalent zur **realRAM**, teilt also alle ihre Stärken und Schwächen. Insbesondere exakte Tests " $=$ " auf Gleichheit reeller Zahlen spiegeln die Eigenschaften von Digitalcomputern nicht korrekt wieder: sie sind auf **BCSS**-Maschinen entscheidbar, auf Typ-2 Maschinen hingegen nur semi-entscheidbar, siehe Beispiel 3.1.

Andererseits sind viele $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbare Funktionen nicht auf einer **realRAM** (äquivalent: einer **BCSS**-Maschine mit Vergleichen über \mathbb{R}) berechenbar: Weil letztere nach endlich vielen Schritten das exakte Ergebnis liefern muß, wohingegen die Typ-2 Maschine es in unendlich vielen Schritten approximieren darf: Alleine mit $+, -, *, /$ und Verzweigungen lassen sich so nur stückweise rationale Funktionen berechnen, \exp oder Wurzeln jedoch beispielsweise nicht. Selbst wenn man endlich viele $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbare Funktionen zum Befehlsumfang der **realRAM** hinzunimmt, bleiben $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbare Funktionen, die die so erweiterte **realRAM** nicht berechnen kann; siehe EXERCISE 9.7.4 in [87].

3.8 Analytische Maschinen

Hierbei handelt es sich um eine ganze Hierarchie von Rechenmodellen, die von Chadzelek und Hotz untersucht werden [21]. Ihr Vorteil ist, daß sie eine ganze Reihe der obigen erwähnten Modelle umfaßt. Ganz grob wird unterschieden,

- ob die Maschine ihre exakten arithmetischen Operationen und Vergleiche über \mathbb{Q} oder \mathbb{R} ausführt.
- ob das Ergebnis y nach endlich vielen Schritten gefunden ist ('*berechenbar*') oder sich in einem unendlichen Prozeß als Grenzwert entwickelt ('*analytisch*');
- in letzterem Fall: Ob die Eingaben $x \in \mathbb{R}$ exakt sind oder durch eine Rundungsfunktion

$$\tilde{p} : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad |x - \tilde{p}(x, n)| \leq 2^{-n}$$

mit beliebiger aber endlicher Genauigkeit gelesen werden (' δ - \mathbb{Q} -Maschine').



- Ist für alle Eingaben x das Ergebnis y unabhängig von der speziellen Wahl der Rundungsfunktion, so trägt die Maschine den Zusatz ‘robust’.
- Sind die (nicht notwendig rationalen) ausgegebenen Approximationen q_n von Fehlerschranken $|y - q_n| \leq \varepsilon_n \rightarrow 0$ begleitet? Dann ‘stark analytisch’.
- Sind Fehlerschranken vorhanden, werden aber endlich oft überschritten, so spricht man von ‘quasi-stark analytisch’.

Abbildung 1 illustriert einige Inklusionsbeziehungen in der entstehenden Hierarchie gemäß [21].

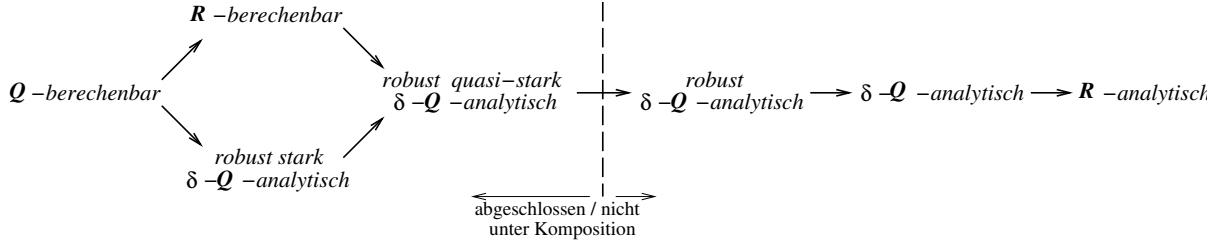


Abbildung 1: BEZIEHUNGEN ZWISCHEN EINIGEN ANALYTISCHEN MASCHINEN.

‘ \mathbb{R} -berechenbar’ sind also genau diejenigen Funktionen, welche durch eine gewöhnliche **realRAM** berechenbar sind; ‘ \mathbb{Q} -berechenbar’ entspricht der klassischen (Typ-1) Berechenbarkeit. Die $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbaren Funktionen heißen hier *robust stark δ - \mathbb{Q} -analytisch* und sind also insbesondere stetig.

‘Robust δ - \mathbb{Q} -analytisch’ ist äquivalent zur $(\rho \rightarrow \gamma)$ -Berechenbarkeit. Diese Klasse enthält auch unstetige Funktionen, ist dafür aber nicht abgeschlossen unter Komposition.

Sehr interessant ist eine Teilklasse davon, nämlich die *robust quasi-stark δ - \mathbb{Q} -analytischen*. Sie ist einerseits groß genug, auch unstetige Funktionen zu enthalten; andererseits aber abgeschlossen gegenüber Komposition; und sie umschließt alles, was eine **realRAM** in endlicher Zeit tun kann. Der entsprechende Simulationsbeweis von THEOREM 3 in [21] ist wirklich lesenswert; hier nur das Ergebnis:

Lemma 3.11 *Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ robust quasi-stark δ - \mathbb{Q} -analytisch; dann ist auch $g \circ f$ robust quasi-stark δ - \mathbb{Q} -analytisch.*

Jede \mathbb{R} -berechenbare Funktion ist robust quasi-stark δ - \mathbb{Q} -analytisch.

Die fraktale von Koch-Kurve ist robust quasi-stark δ - \mathbb{Q} -analytisch aber nicht \mathbb{R} -berechenbar.

Um nochmals die Vorteile von TTE zu demonstrieren: Auch die robust quasi-stark δ - \mathbb{Q} -analytische Klasse lässt sich hierin formulieren als genau die $(\rho \rightarrow \hbar)$ -berechenbaren Funktionen. Dazu führe ich mit \hbar eine aus ρ abgeleitete Darstellung ein, bei der Fehlerschranken endlich oft verletzt werden dürfen:

Definition 3.12 *Ein \hbar -Name von $r \in \mathbb{R}$ ist eine Folge rationaler Zahlen $(q_0, \varepsilon_0, q_1, \varepsilon_1, \dots)$ so daß*

$$\lim_n \varepsilon_n = 0 \quad \wedge \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad : \quad |r - q_n| \leq \varepsilon_n .$$

Umgekehrt hat die unter Komposition abgeschlossene Klasse der $(\gamma \rightarrow \gamma)$ -berechenbaren Funktionen leider kein Pendant in der Hotz'schen Hierarchie.

3.9 Algorithmische Geometrie

Die **realRAM** ist *das* Standard-Rechenmodell in der Algorithmischen Geometrie [66, 6]. Ihre Verwendung scheint dermaßen selbstverständlich, daß manche Lehrbücher gar nicht darauf eingehen, was sie mit "Algorithmus" eigentlich meinen [28]; vergleiche die oben beschriebenen Situation in der Numerik. Die Konsequenzen sind klar: Viele solche "Algorithmen" verhalten sich in der Praxis anders als theoretisch erwartet, insbesondere bei (fast-) *degenerierten* Eingaben.

Im zweiten Teil seiner Dissertation [35] demonstriert S. Funke dies an einem bekannten Beispiel aus der Geometrie: dem **Sideness**- oder auch **Orientation**-Test, der unter anderem bei der Berechnung der konvexen Hülle⁶ eingesetzt wird. Im zweidimensionalen Fall besteht er darin, bei Eingabe von $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ zu entscheiden, ob der Punkt (x, y) oberhalb der durch $y = a \cdot x + b$ definierten Geraden liegt. Wenn **Sideness** ein falsches Resultat liefert, kann dies zu inkonsistenten Ergebnissen, Abstürzen oder Endlosschleifen führen. Ein anderes zentrales Prädikat, der **inCircle**-Test, spielt bei der Delaunay-Triangulierung eine wesentliche Rolle und führt zu ähnlichen Schwierigkeiten [75].

Fortgeschrittenere Algorithmen in der Geometrie abstrahieren daher von elementaren Vergleichen wie " $x < 0$ ", sondern bauen direkt auf 'höheren' Prädikaten wie den oben genannten auf [8], welche dann natürlich besonders sorgfältig implementiert sein müssen. Man unterscheidet in diesem Zusammenhang *robuste*, *stabile*, *quasi-robuste* und *fragile* (zerbrechliche) Algorithmen. Tatsächlich findet sich die eine oder andere Form von "allgemeiner Lage" (*general position*) als Standardvoraussetzung in nahezu jeder Publikation über Algorithmische Geometrie. Andererseits gibt es in letzter Zeit einige vielversprechende Techniken, mit degenerierten Fällen umzugehen:

Durch infinitesimale Perturbation mit einem $\epsilon > 0$ werden sie auf den Fall allgemeiner Lage zurückgeführt und dort gelöst [29]; daraus das 'wahre' Ergebnis für $\epsilon = 0$ zu extrahieren, kann jedoch im Einzelfall schwierig sein. Manche Softwarebibliotheken rechnen daher in exakter Arithmetik und/oder symbolisch, was jedoch typischerweise 10 bis 100x langsamer ist.

Als Ausweg schiebt *Lazy Arithmetic* [62] die Auswertung von Ausdrücken so lange auf, bis ihre Auswertung (z.B. als Grundlage von Verzweigungen) unvermeidbar wird. Mittels *Filterung* [34] wird dann der Wert in schneller Fließkommaarithmetik approximiert und mögliche Fehlerschranken abgeschätzt: meistens genügt die erzielte Genauigkeit, um den Vergleich zu entscheiden; nur wenn dies nicht der Fall ist, wird die langsame aber sichere exakte Arithmetik angeworfen. Das Ziel: exakte Arithmetik zum Preis der Fließkommaoperationen zumindest für *durchschnittliche* Eingaben. Ein Beispiel für den praktischen Erfolg dieser Strategie stellen die *Library of Efficient Data types and Algorithms* (LEDA) und die darauf aufbauende Bibliothek *Computational Geometry Algorithms* (CGAL) dar [19].

⁶Eine Zusammenstellung elementarer geometrischer Begriffe findet sich im Anhang B...



Andererseits widerspricht exakte Arithmetik zumindest im theoretischen *worst-case* dem Komplexitätsmaß der Einheitskosten, bei dem die Zeitdauer arithmetischer Operationen als unabhängig vom Wert des Arguments angenommen werden. Zudem lassen sich selbst mit exakter Arithmetik nicht alle realRAM-berechenbaren Funktionen behandeln, siehe EXAMPLE 9.7.2 in [87]. Schließlich sind für die Eingabe keine Fehlerschranken vorgesehen, sie wird als exakt angenommen:

A geometric algorithm is exact if it is guaranteed to produce a correct result when given an exact input. Of course, the input to a geometric algorithm may only be an approximation of some real-world configuration, but this difficulty is ignored [75]...

Demgegenüber basiert die Typ-2 Maschine auf rationalen Approximationen bei Zwischenrechnungen und Ein- wie Ausgabe, was sie zu einem Modell über ganz \mathbb{R} macht. Tatsächlich sind ja viele transzendente Zahlen und Funktionen auf ihr berechenbar, siehe Beispiel 2.20h) und i); in LEDA sind es höchstens rationale Operationen und Quadratwurzeln.

3.10 Computeralgebra

Computeralgebra systeme hingegen scheinen wirkliche reelle Zahlen verarbeiten zu können: Über exakte rationale Arithmetik hinaus beherrschen sie Wurzeln und sogar transzendente Zahlen wie π und $e = \exp(1)$. Mit ‘beherrschen’ ist gemeint, daß der Ausdruck $\cos(\text{Pi}) - 1$ tatsächlich exakt den Wert 0 liefert [78], mithin Tests auf Gleichheit korrekt arbeiten. Wenn also z.B. MuPAD Rechnungen über \mathbb{R} exakt realisiert, welchen Sinn hat dann ein Unberechenbarkeiten vorhersagendes theoretisches Modell?

Der Sinn ergibt sich dadurch, daß natürlich selbst in MuPAD nicht jede reelle Funktion oder Zahl berechenbar ist. Das verbieten schon Kardinalitätsgründe: mit endlichen Systemen kann man, selbst in abzählbar vielen Schritten, keine überabzählbar vielen verschiedenen Objekte ausgeben. Beispielsweise ist MuPAD die eindeutige reelle Nullstelle von $f(x) = \ln(x) \cdot \exp(x) - 1$ unbekannt: Man erhält zwar ein Ergebnis, aber dieses erfüllt nicht die definierende Gleichung.

```
y:=solve(ln(x)*exp(x)=1,x):      simplify(ln(y)*exp(y));
```

Natürlich läßt sich dies schnell beheben: Ein paar Zeilen Programm-Code in der MuPAD-eigenen Sprache, und auch $f(x) = 0$ wird computeralgebraisch lösbar.

Kodierungstheoretisch entspricht dem, daß man ‘wichtigen’ Funktionen (wie \cos , \sin , \exp , \ln , $\sqrt{\cdot}$) und ebensolchen Zahlen (wie π , e) spezielle, z.B. besonders kurze [$\rho \rightarrow \rho$]- bzw. ρ -Namen gibt. Bei einer Rechnung überprüft der Computer dann, ob die Eingabe solch ein spezielles Symbol ist, und bearbeitet dieses entsprechend einer Sonderregel. Diese Spezialbehandlung ist aber stets nur für höchstens abzählbar viele reelle Zahlen und Funktionen möglich, überabzählbar viele bleiben notwendig außen vor.

3.11 Algebraische Modelle

Zu ihnen zählen beispielsweise Straight-Line-Programme, lineare Entscheidungsbäume [17] oder allgemeiner algebraische Berechnungsbäume [5, 59]. Wie auch Fredmans arithmetisches Modell

[33] benutzt man sie in erster Linie zum Beweis von Komplexitätsschranken. Als nichtuniforme Modelle sind sie in der Regel stärker als beispielsweise die **realRAM** [59].

Andererseits beherrscht bereits die (ganzzahlige) RAM als nicht-algebraische Operation auch *indirekte Adressierung*, mit der sich beispielsweise **Distinctness** (entscheide, ob n gegebene ganze Zahlen paarweise verschieden sind) in Linearzeit lösen lässt. Weiterhin führt die Rundungsfunktion $\lfloor \cdot \rfloor$ — in Verbindung mit Einheitskosten für Multiplikation und Division — dazu, daß eine polynomiell zeitbeschränkten RAM [72] ganz PSPACE entscheiden kann.

Einige Arbeiten beschäftigen sich mit der Abhängigkeit von den über + und – hinaus verfügbaren Operationen: Rundungsfunktion " $\lfloor \cdot \rfloor$ " [4], binäre ganzzahlige Division " div " und unäre, d.h. eingeschränkte ganzzahlige Division durch Konstanten " div_c " sowie Multiplikation " $*$ " [47]. All dies bezieht sich jedoch auf ganze bzw. rationale, nicht auf reelle Zahlen.

Entscheidungsbäume und Typ-2 Maschine spiegeln — wie jedes Rechenmodell — verschiedene Eigenschaften realer Computer verschieden gut wieder. So brauchen die vier Grundrechenarten auf einem heutigen Mikroprozessor in Fließkommaarithmetik tatsächlich eine feste Zyklenzahl, d.h. konstante Zeit. Andererseits sind exakte Vergleiche (deren Anzahl das Komplexitätsmaß bei linearen Entscheidungsbäumen darstellt) in kritischen Fällen gar nicht entscheidbar, siehe Beispiel 3.1. Anhang A versucht, die Vorteile beider Modelle zu vereinen und betrachtet hierzu Entscheidungsbäume mit Typ-2 berechenbaren Threshold-Funktionen in den Knoten.

4 LP als Beispiel für Rekursive Geometrie

Dieses Kapitel verdeutlicht den Nutzen von Rekursiver Geometrie an einem wichtigen Beispiel aus der Praxis der *Operations Research*: **Lineares Programmieren** (LP). Es stellt sich nämlich heraus, daß die oftmals bei degenerierten Eingaben auftretenden numerischen Schwierigkeiten in einem gewissen Sinn unvermeidbar sind: das Problem ist auf der (unrealistischen) **realRAM** berechenbar, im Sinne der rekursiven Analysis jedoch im allgemeinen nicht. Genauer gelingt in diesem Kapitel eine vollständige Charakterisierung, welche Arten von Degeneriertheit zur Sicherstellung der Berechenbarkeit auszuschließen sind; parallele Hyperebenen beispielsweise bieten *per se* keine Entschuldigung für numerische Instabilität!

Definition 4.1 Das Lineare Programmieren besteht darin, die Funktion

$$\text{LP} : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad (A, b, c) \mapsto \sup\{c^T \cdot x : x \in \mathbb{R}^n, A \cdot x \leq b\}$$

zu berechnen. $L(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x \leq b\}$ heißt **Zulässigkeitsbereich** des linearen Ungleichungssystems $A \cdot x \leq b$; für jede Zeile $a_i = (a_{ij})_{j=1 \dots n}$ der Matrix $A = (a_{ij})$ ist der Halbraum $H_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T \cdot x \leq b_i\}$ eine **lineare Randbedingung** (engl.: linear constraint). Die Abbildung $x \mapsto c^T \cdot x$ wird **Zielfunktion** genannt.

$L(A, b)$ ist als Schnitt endlich vieler Halbräume H_i^+ offenbar ein konvexes Polytop; daher zählt **Lineares Programmieren** definitiv zu den geometrischen Problemen. Erfahrungsgemäß haben praktische Implementationen Schwierigkeiten bei Eingaben in degenerierter Lage. Mittels Rekursiver Analysis läßt sich solches Verhalten formal erklären mit einem auf Lemma 2.11 basierenden Nichtberechenbarkeitsbeweis:



Theorem 4.2 In folgenden Fällen hängt LP im allgemeinen unstetig von (A, b, c) ab, ist somit nicht $(\mathbb{P}^{m \times n} \times \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P})$ -berechenbar:

- a) Falls A Null-Zeilen enthält;
- b) falls $L(A, b)$ unbeschränkt ist;
- c) falls $L(A, b)$ nicht voll-dimensional ist.

Genauer: Die drei Restriktionen von LP auf

- alle (A, b, c) mit nullzeilenfreiem A und beschränktem $L(A, b)$
- alle (A, b, c) mit nullzeilenfreiem A und voll-dimensionalen $L(A, b)$
- alle (A, b, c) mit beschränktem und voll-dimensionalen $L(A, b)$

sind jeweils unberechenbar; die Einschränkung auf

- alle (A, b, c) mit nullzeilenfreien A , beschränktem und voll-dimensionalen $L(A, b)$

hingegen ist $(\mathbb{P}^{m \times n} \times \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P})$ -berechenbar.

Da wir nach der reinen Berechenbarkeit fragen ohne Schranken an die Laufzeit zu stellen, könnte man versucht sein, folgenden trivialen Algorithmus anzuwenden:

Berechne alle (endlich doch potentiell exponentiell vielen) Knoten des Polytops $L(A, b)$; werte für jeden von ihnen die Zielfunktion aus; bestimme deren Maximum.

Doch unter den schwachen Voraussetzungen von Theorem 4.2 hängen die Knoten von $L(A, b)$ im allgemeinen unstetig von (A, b) ab (siehe Abbildung 2c) und sind daher nicht berechenbar; Definition 4.1 fragt ja auch nicht nach einem/dem maximierenden Punkt selbst sondern nach seinem Funktionswert!

Mit Theorem 4.2 ist genau charakterisiert, welche Arten von Degeneriertheit zur Nichtberechenbarkeit führen und welche nicht.

Treten beispielsweise in den linearen Randbedingungen *Gleichungen* auf, versteckt durch zwei Ungleichungen " $a_i^T \cdot x \leq b_i$ " und " $-a_i^T \cdot x \leq -b_i$ ", so liegt der Zulässigkeitsbereich $L(A, b)$ innerhalb der Hyperebene $H_i = \{x : a_i^T \cdot x = b_i\}$, ist mithin nicht volldimensional: Schlägt ein Programm hier fehl, so ist dies nicht der Implementierung anzulasten sondern liegt am Problem selbst.

Treffen sich aber beispielsweise mehr als n der durch die linearen Randbedingungen gegebenen Hyperebenen $H_i = \{x : a_i^T \cdot x = b_i\} \subseteq \mathbb{R}^n$ in einem gemeinsamen Punkt, so zählt dies in der Algorithmischen Geometrie ebenfalls als Degeneriertheit; ein LP-solver sollte mit solchen Eingaben jedoch umgehen können, denn gemäß obigem Theorem sind sie kein Grund für Nichtberechenbarkeit. Ebensowenig Anlaß gibt es, beispielsweise *parallele* Hyperebenen zu verbieten.

Rekursive Analysis steckt also gewissermaßen einen Machbarkeits-Rahmen ab, an dem sich Implementierungen orientieren können. Vergleiche dies mit dem Nutzen von Cooks Theorem: Braucht ein Programm sehr lange zum Lösen eines *ganzzahligen* linearen Optimierungsproblems, so ist dies ($\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$) nicht der Implementierung anzulasten; mit einem *rationalen* linearen Optimierungsproblem sollte es jedoch in polynomieller Zeit umgehen können.

Definition 4.3 Ganzzahliges Lineare Programmieren (ILP) ist das Problem, die Funktion

$$\mathbb{Z}\text{-LP} : \mathbb{Z}^{m \times n} \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}, \quad (A, b, c) \mapsto \sup\{c^T \cdot x : x \in \mathbb{Z}^n, A \cdot x \leq b\}$$

zu berechnen. Rationales Lineares Programmieren ist das Problem, die Funktion

$$\mathbb{Q}\text{-LP} : \mathbb{Q}^{m \times n} \times \mathbb{Q}^m \times \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}, \quad (A, b, c) \mapsto \sup\{c^T \cdot x : x \in \mathbb{Q}^n, A \cdot x \leq b\}$$

zu berechnen.

Auf einer **realRAM** ist \mathbb{R} -LP natürlich berechenbar, beispielsweise durch Dantzigs Simplex-Algorithmus. Dessen Laufzeit ist im Durchschnitt sehr gut [81], kann im worst-case aber exponentiell von $n+m$, d.h. der Dimension oder der Anzahl linearer Randbedingungen abhängen [52]. Und \mathbb{Z} -LP ist sogar \mathcal{NP} -vollständig. Um so überraschender kam Khachiyans Ergebnis [49], demzufolge \mathbb{Q} -LP in polynomieller Zeit gelöst werden kann. Eine schöne Darstellung der *Ellipsoid-Methode* und ihrer Konsequenzen geben Grötschel, Lovász und Schrijver in ihrem Buch [38]. Interessant ist deren Beschreibung auch deswegen, weil sie gar nicht \mathbb{Q} -LP betrachten sondern das reelle \mathbb{R} -LP im Sinne rationaler Approximationen mit Fehlerschranken: siehe Seiten 34,35 von [38]. Ohne dies explizit zu erwähnen, betreiben die Autoren also Rekursive Analysis vom Feinsten. In der Sprache von TTE ergibt sich beispielsweise aus ihrem COROLLARY 4.3.12:

Lemma 4.4 Aus $\rho^{m \times n} \times \rho^m \times \rho^n$ -Eingabe von $(A, b, c) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ derart, daß

a) A keine Null-Zeilen enthält

b) $L(A, b)$ beschränkt

c) und voll-dimensional ist,

läßt sich \mathbb{R} -LP(A, b, c) ρ -berechnen.

Beweisskizze: Voraussetzung a) stellt sicher, daß das *weak membership oracle* (WMEM) entscheidbar ist. Voraussetzungen b) bzw. c) entsprechen dem *well-bounded* bzw. *centered convex body*. Wir sparen uns hier die Details, da Ergebnis 8.6 später eine wesentlich stärkere Aussage erschließt. \square

Das beweist die letzte Behauptung von Theorem 4.2, nun zu den drei ersten Punkten: Wir geben einparametrische Familien $A(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ und $c(\varepsilon)$ an, welche stetig von $\varepsilon \geq 0$ abhängen, für die aber $\text{LP}(A(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon))$ von $\varepsilon > 0$ zu $\varepsilon = 0$ springt. Diese Unstetigkeit impliziert wegen Lemma 2.11 die Nichtberechenbarkeit.

$$\text{a) } A(\varepsilon) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c := (1, 0).$$

Dann gilt für jedes $\varepsilon \geq 0$: $L(A, b)$ ist beschränkt und voll-dimensional. Dennoch ist $\text{LP}(A, b, c) = 0$ für $\varepsilon > 0$ und $\text{LP}(A, b, c) = 1$ für $\varepsilon = 0$: das liegt an der 0-Zeile ganz unten in $A(0)$.



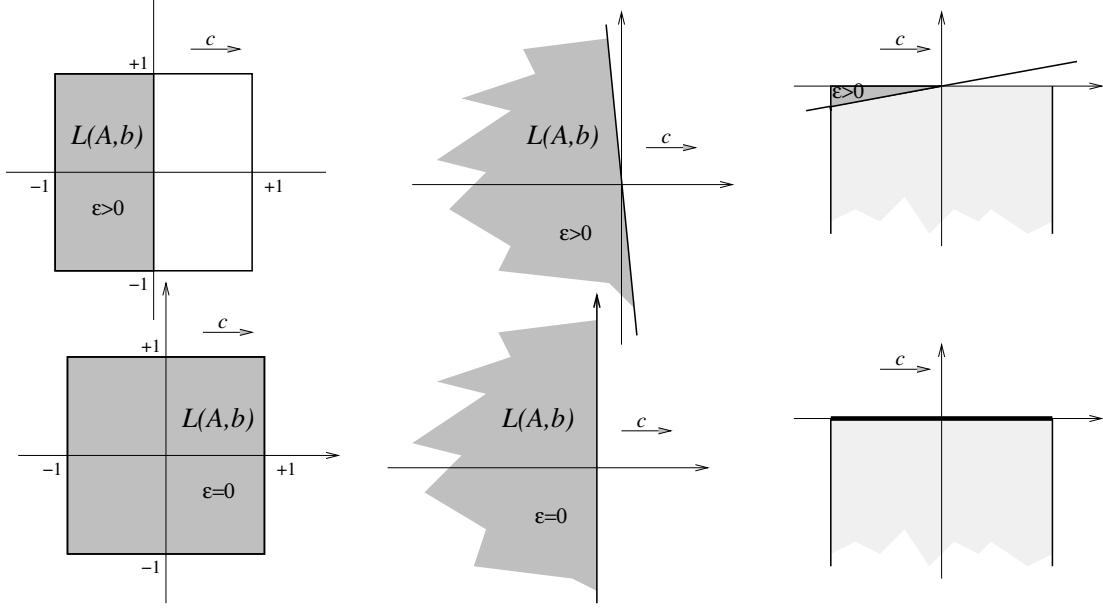


Abbildung 2: DIE DREI URSACHEN VON NICHTBERECHENBARKEIT LINEAREN PROGRAMMIERENS: A), B) UND C).

b) $A(\varepsilon) := (1 - \varepsilon), \quad b = (0), \quad c = (1, 0)$.

Dann enthält A keine 0-Zeile, $L(A, b)$ ist voll-dimensional; dennoch springt $\text{LP}(A, b, c)$ von ∞ für $\varepsilon > 0$ auf $\text{LP}(A, b, c) = 0$ für $\varepsilon = 0$: weil $L(A, b, c)$ unbeschränkt ist.

c) $A(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = (1, 0)$.

Dann enthält A keine 0-Zeilen, ist $L(A, b)$ beschränkt; doch springt $\text{LP}(A, b, c)$ von 0 für $\varepsilon > 0$ auf 1 für $\varepsilon = 0$: weil $L(A, b, c)$ nur linienförmig statt voll-dimensional ist für $\varepsilon = 0$.

Damit ist die Frage nach der Berechenbarkeit des Linearen Programmierens geklärt. Als Erweiterung sichert THEOREM 4.3.13 in [38] auch die Maximierung nicht-linearer *konvexer* Funktionen über $L(A, b)$ zu. Im Rest der vorliegenden Arbeit wird Theorem 4.2 nun dahingehend erweitert (Ergebnis 8.6), daß unter den gleichen Voraussetzungen sogar *beliebige* stetige Funktionen effektiv maximiert werden können, vergleiche [90]. Genauer untersuche ich in zwei getrennten Schritten erst die Berechenbarkeit des Zulässigkeitsbereichs $(A, b) \mapsto L(A, b)$ und dann unabhängig davon die Maximierung von Funktionen über einem kompakten, nicht notwendig konvexen Grundbereich $(f, K) \mapsto \max f(K)$.

Zu diesem Zweck benötigt man einen geeigneten Berechenbarkeitsbegriff für überabzählbare Mengen reeller Zahlen wie z.B. $K = L(A, b)$. Er muß schwach genug sein, damit $L(A, b)$ aus

(A, b) berechenbar ist; aber auch stark genug, um aus $L(A, b) = K$ das Maximum von f über K erhalten zu können. Kapitel 9 beschäftigt sich eingehend mit dieser Fragestellung.

Neben [38] gibt es zahlreiche andere Veröffentlichungen, die sich der Rekursiven Geometrie zurechnen lassen. Einige werden in dieser Dissertation noch genauer diskutiert; an dieser Stelle deshalb nur ein knapper Überblick:

- Kam-Chau Wong effektiviert ein klassisches Ergebnis der Konvexen Geometrie, demzufolge sich zwei disjunkte konvexe Mengen stets durch eine Hyperebene trennen lassen [88]. Dies steht in Verbindung zu dem *Weak Separation Problem* (WSEP) in [38]!
- Ge und Nerode untersuchen in [37] die Berechenbarkeit des in Kapitel 3.9 erwähnten *konvexe Hülle-Problems*; allerdings im viel allgemeineren Rahmen einer Effektivierung des *Krein-Milman-Theorems*, siehe Kapitel 6
- Das in gewissem Sinn umgekehrte Problem dazu betrachten Edalat, Lieutier und Kashefi in [27].
- Kummer und Schäfer vergleichen verschiedene Berechenbarkeitsbegriffe für Mengen [54]. Sie beschränken sich auf den kompakt-konvexen Fall in der Ebene, wo sie die nichtuniforme Äquivalenz der betrachteten Zugänge beweisen. Kapitel 10 dieser Arbeit lässt diese Einschränkungen fallen.
- Brattka und Weihrauch untersuchen ebenfalls Berechenbarkeitsbegriffe, nämlich auf der viel größeren Klasse aller kompakten Mengen [14, 87]: hier sind nur noch wenige äquivalent. Ähnliches gilt für offene Mengen, wie Hertling sie in [43] betrachtet.
- Kapitel 9 wird mit den *Regulären Mengen* eine praktisch relevante Klasse betrachten, die zwischen denen von Kummer/Schäfer und Brattka/Weihrauch liegt. Ein Vergleich dort möglicher Berechenbarkeitsbegriffe führt zu interessanten Ergebnissen, siehe [92].

5 Turing-Location

Wann also soll eine Menge reeller Zahlen ‘*berechenbar*’ heißen?

Für einzelne reelle Zahlen und für endliche (oder auch abzählbare) Tupel hat sich die rationale Approximation mit Fehlerschranken als geeigneter Begriff etabliert: er ist äquivalent zu den meisten in der Literatur untersuchten. Aber wie sieht es aus für *überabzählbares* $M \subseteq \mathbb{R}^d$? Eine erste Antwort, angelehnt an [7]:

Beispiel 5.1 Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *entscheidbar*, falls ihre charakteristische Funktion

$$\mathbf{1}_M : x \mapsto 0 \quad \text{falls } x \in M, \quad x \mapsto 1 \quad \text{falls } x \notin M$$

berechenbar ist.



Jedoch sind, mit Ausnahme von $M = \emptyset$ und $M = \mathbb{R}^d$, alle charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_M$ unstetig und damit nicht $(\rho^d \rightarrow \rho)$ -berechenbar, vgl. Lemma 2.11.

Ein stetiges Pendant zur charakteristischen Funktion $\mathbf{1}_M$ ist die *Distanzfunktion*

$$d_M : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty] \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad x \mapsto \inf \{ \|m - x\| : m \in M \} \quad (5.1)$$

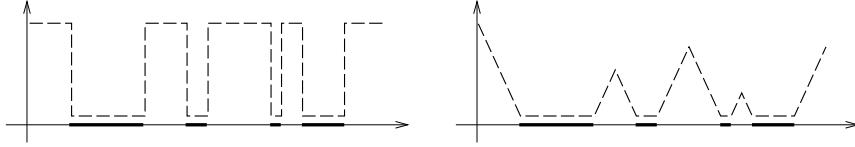


Abbildung 3: DIE CHARAKTERISTISCHE UND DIE DISTANZ-FUNKTION EINER MENGE.

Und genau sie wurde betrachtet von Ge/Nerode in ihrer Effektivierung des Satzes von Krein und Milman [37] sowie von Brattka/Weihrauch als Darstellung abgeschlossener Mengen [14, 87]:

Definition 5.2 Die abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *Turing-located*, wenn ihre Distanzfunktion d_A $(\rho^d \rightarrow \rho)$ -berechenbar ist.

Bezeichne \mathfrak{A}^d die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^d . Die Darstellung ψ^d von \mathfrak{A}^d ist definiert wie folgt: Ein ψ^d -Name für A ist ein $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Name für d_A . Analog seien $\psi_<^d$ und $\psi_>^d$ definiert durch $[\rho^d \rightarrow \rho_>]$ und $[\rho^d \rightarrow \rho_<]$.

Ein paar Anmerkungen:

- Anders als bei der charakteristischen Funktion mit $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus A} = 1 - \mathbf{1}_A$ erfüllen die Distanzfunktionen von Menge und Komplement keinen einfachen Zusammenhang.
- ψ^d ist tatsächlich eine Darstellung: verschiedene Mengen $A \neq B$ haben auch verschiedene Distanzfunktionen $d_A \neq d_B$, vorausgesetzt A und B sind beide abgeschlossen; siehe den Beweis von Proposition 9.3d).
- Die Einschränkung auf abgeschlossene Mengen aber ist sowieso unumgänglich: Eine Darstellung für alle Teilmengen kann es aus Kardinalitätsgründen nicht geben!
- Man beachte die vertauschten Indices: $\psi_<^d \equiv [\rho^d \rightarrow \rho_>]$ und $\psi_>^d \equiv [\rho^d \rightarrow \rho_<]$.

Das folgende Ergebnis aus EXERCISE 6.1.8 von [87] belegt die Natürlichkeit dieses Berechenbarkeitsbegriffs abgeschlossener Mengen:

Lemma 5.3 Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig genau dann, wenn ihr Graph $G(f)$ eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^{d+1} ist. Ein $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Name von f gemäß Definition 2.21 ist uniform äquivalent zu einem ψ^{d+1} -Namen von $G(f)$.

Weitere Argumente, warum ψ^d der "richtige" Berechenbarkeitsbegriff für abgeschlossene Mengen ist, referiert Abschnitt 5.1.

Beispiel 5.4 a) Ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^1$ ist $\psi_<^1$ -berechenbar genau dann, wenn a $\rho_>$ -berechenbar und b $\rho_<$ -berechenbar ist; $[a, b]$ ist $\psi_>^1$ -berechenbar genau dann, wenn a $\rho_<$ -berechenbar und b $\rho_>$ -berechenbar ist.

- b) Insbesondere sind $\psi_<^d$ und $\psi_>^d$ weder uniform noch nichtuniform vergleichbar sondern induzieren unabhängige Berechenbarkeitsbegriffe: $\psi_<^d \neq \psi_>^d$, $\psi_>^d \neq \psi_<^d$. Es gilt jedoch wegen Theorem 2.22: $\psi_<^d \sqcap \psi_>^d \equiv \psi^d$; $[a, b]$ ist ψ^d -berechenbar genau dann, wenn a und b beide ρ -berechenbar sind.
- c) Jede endliche Menge ρ^d -berechenbarer reeller Vektoren ist ψ^d -berechenbar. Genauer ist die folgende Abbildung uniform ($\rho^{d \times n} \rightarrow \psi^d$)-berechenbar:

$$\mathbb{R}^d \ni x_1, \dots, x_n \mapsto \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathfrak{A}^d$$

Für paarweise verschiedene⁷ x_i ist auch die Umkehrabbildung ($\psi_<^d \rightarrow \rho^{d \times n}$)-berechenbar.

- d) Ein $\psi_<^d$ -Name für nichtleeres $A \in \mathfrak{A}^d$ kodiert positive Information über A : er ermöglicht es, einen Punkt $x \in A$ zu finden. Genauer ist die Funktion

$$F : \subseteq \mathfrak{A}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d, \quad \mathfrak{A}^d \setminus \{\emptyset\} \ni A \mapsto x \in A$$

$(\psi_<^d \rightarrow \rho^d)$ -berechenbar. Sie liefert keinen bestimmten sondern irgendein $x \in A$ und ist damit sozusagen nichtdeterministisch; formal spricht man von einer **mehrwertigen Funktion**.

- e) Analog kodiert ein $\psi_>^d$ -Name negative Information: man kann mit ihm effektiv einen Punkt $x \notin A \neq \mathbb{R}^d$ finden.
- f) Die abgeschlossene Euklidische Einheitskugel $\overline{B}(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^d$ ist ψ^d -berechenbar:

$$d_{\overline{B}(0,1)}(x) = \max \left\{ 0, \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2} - 1 \right\}$$

Auch der abgeschlossene Epigraph der reellen Exponentialfunktion $\{(x, y) : y \geq \exp(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ψ^2 -berechenbar. Damit sind zwei wesentliche Kriterien erfüllt, die Penrose auf der Suche nach einem sinnvollen Berechenbarkeitsbegriff für Mengen aufgestellt hatte [10].

- g) Die **Mandelbrotmenge** $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$ aus Gleichung (3.2) ist abgeschlossen und $\psi_>^2$ -berechenbar; ihre ψ^2 -Berechenbarkeit hingegen ist ein offenes Problem. Vergleiche dies mit dem BCSS-Modell, wo sie als unentscheidbar nachgewiesen wurde.

Die Darstellung ψ^d erfüllt nun bereits den zweiten am Anfang dieses Kapitels geäußerten Wunsch:

Lemma 5.5 Auf abgeschlossenen Teilmengen $K \subseteq [-1, +1]^d$ und stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Abbildung⁸ $(f, K) \mapsto \max f[K]$ $([\rho^d \rightarrow \rho] \times \psi^d \rightarrow \rho)$ -berechenbar.

⁷Proposition 7.14 in Kapitel 7 schwächt diese Voraussetzung noch etwas ab...

⁸Per Konvention sei $\max \emptyset := -\infty$; nun benutze Proposition 5.7...



Der Beweis dieser schönen Aussage findet sich z.B. als COROLLARY 6.2.5 in [87]. Dabei beinhaltet die Voraussetzung $K \subseteq [-1, +1]^d$ eine Subtilität: Einerseits ist jede kompakte Menge beschränkt und damit enthalten in $[-N, +N]^d$ für ein $N \in \mathbb{N}$; man kann also skalieren und erhält

$$\max f[K] = \max \tilde{f}[\tilde{K}] \quad \text{für } \tilde{f}(x) := f(N \cdot x), \quad \tilde{K} := \frac{1}{N} \cdot K, \quad d_{\tilde{K}}(x) = \frac{1}{N} \cdot d_K(N \cdot x).$$

Andererseits bleibt die Frage: Wie so ein $N \in \mathbb{N}$ finden? Nun, nichtuniform ist das trivial, uniform im allgemeinen gänzlich unmöglich⁹; für *nichtleeres zusammenhängendes* kompaktes $K \subseteq \mathbb{R}^d$ aber — und das ist neu [90] — geht es!

Proposition 5.6 Eine (mehrwertige) Funktion, die zu jedem Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq [-N, +N]^d$ findet, ist nicht $(\psi^d \rightarrow v)$ -berechenbar.

Eingeschränkt auf *nichtleere zusammenhängende* Kompakta jedoch wird sie $(\psi^d \rightarrow v)$ -berechenbar. Für solche Eingaben lassen sich also beliebig nichtlineare stetige Funktionen effektiv maximieren:

$$C(\mathbb{R}^d) \times \{K \subseteq \mathbb{R}^d : K \neq \emptyset \text{ kompakt und zusammenhängend}\} \ni (f, K) \mapsto \max f[K] \in \mathbb{R}$$

ist $([\rho^d \rightarrow \rho] \times \psi^d \rightarrow \rho)$ -berechenbar.

Beispiel 3.1 zeigte, daß die Eigenschaft " $r \neq 0$ " semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar ist bei ρ -Eingabe von $r \in \mathbb{R}$. Entsprechendes gilt für die Eigenschaft "Leere Menge":

Proposition 5.7 a) Es gibt eine Typ-2 Maschine, welche bei $\psi_<^d$ -Eingabe von abgeschlossenem $A \subseteq \mathbb{R}^d$ genau dann hält, wenn $A \neq \emptyset$.

b) Es gibt eine Typ-2 Maschine, welche bei $\psi_>^d$ -Eingabe von abgeschlossenem $A \subseteq [-1, +1]^d$ genau dann hält, wenn $A = \emptyset$.

c) Bei ψ^d -Eingabe von abgeschlossenem $A \subseteq [-1, +1]^d$ ist die Eigenschaft " $A = \emptyset$ " daher entscheidbar!

Um dieses Ergebnis zu verstehen, erinnere ich an die Kodierung der leeren Menge: Am Ende von Abschnitt 2.7 wurde (beispielsweise) die Darstellung v für \mathbb{Q} um einen Namen für die spezielle 'rationale' Zahl ∞ erweitert. Dementsprechend können Fehlerschranken $\varepsilon_n \rightarrow 0$ bei ρ - oder $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Namen auch (endlich oft) diesen Wert ∞ annehmen.

Ein ψ^d -Name von $\emptyset \in \mathfrak{A}^d$ ist nun ein $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Name der Funktion $f(x) \equiv \infty$, d.h. eine Folge rationaler Polynome p_n mit absolutem Glied ∞ und Fehlerschranken $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Beweis von Proposition 5.7: a) Benutze den gegebenen $[\rho^d \rightarrow \rho_>]$ -Namen von d_A , um diese Funktion an der Stelle 0 auszuwerten. $A \neq \emptyset$ gilt genau dann, wenn $d_A(0) < \infty$. Letzteres ist anhand der $\rho_>$ -Approximation des Wertes $d_A(0)$ offenbar semi-entscheidbar.

⁹ TTE kennt eine eigene Darstellung κ^d für Kompakta $K \subseteq \mathbb{R}^d$, bei der ein ψ^d -Name mit einer Schranke $N \in \mathbb{N}$ kombiniert wird so daß $K \subseteq [-N, +N]^d$.

- b) Wegen $A \subseteq [-1, +1]^d$ hat jeder potentielle Punkt $a \in A$ höchstens Euklid-Abstand \sqrt{d} zum Ursprung:

$$A = \emptyset \iff d_A(0) > \sqrt{d}$$

Letzteres ist anhand der $\rho_<$ -Approximation des Wertes $d_A(0)$ offenbar semi-entscheidbar.

- c) folgt aus a) und b). □

Beweis von Proposition 5.6: Das Finden eines $N \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq [-N, +N]^d$ hängt tatsächlich unstetig ab von ψ^d -Namens des Kompakts $K \subseteq \mathbb{R}^d$: Angenommen eine Typ-2 Maschine M erledige diese Berechnung. Wir füttern sie mit dem ψ^1 -Namen von $K := [-1, 1]$, d.h. einer Folge von

Fehlerschranken ε_n und Polynomen $p_n \in \mathbb{Q}[X]$, welche $d_K(x) = \begin{cases} -x-1 & : x \leq -1 \\ 0 & : -1 \leq x \leq +1 \\ x-1 & : x \geq +1 \end{cases}$

für alle $x \in [-n, +n]$ bis auf ε_n approximiert. Nach endlicher Zeit gibt M so ein gesuchtes N aus; bis dahin hat sie es nur endlich viele dieser Polynome gelesen, sagen wir: p_1, \dots, p_n . Nun betrachte $K' := [-1, 1] \cup [\max\{2n, N\} - 1, \max\{2n, N\} + 1]$. Dann unterscheidet sich d_K von $d_{K'}$ nicht für Argumente $x \in [-n, +n]$; siehe Abbildung 4. Man kann die bisher gelesenen p_i also auch zu einem ψ^1 -Namen von K' ergänzen statt von K . Wenn M mit diesem Namen gefüttert wird, so gibt sie deterministisch also an der gleichen Stelle den gleichen Wert N aus; dieser erfüllt jedoch nicht $K' \subseteq [-N, +N]$ im Widerspruch zur Annahme.

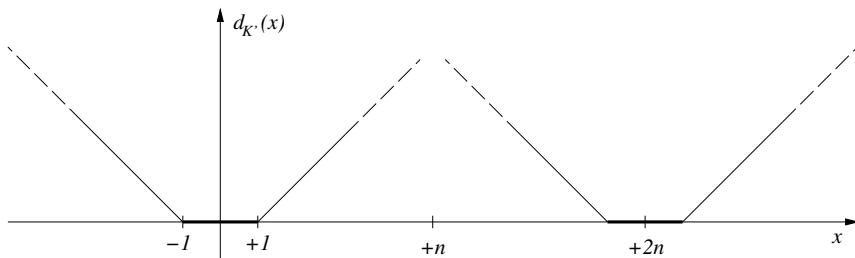
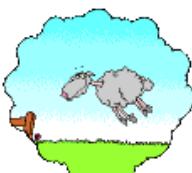


Abbildung 4: DIE KOMPAKTS MENGEN K UND K' ZEIGEN,
DASS N MIT $K \subseteq [-N, +N]^d$ UNSTETIG VOM ψ^d -NAMEN VON K ABHÄNGT.

Der folgende Algorithmus findet, bei ψ^d -Eingabe eines nichtleeren zusammenhängenden Kompakts $K \subseteq \mathbb{R}^d$, eine natürliche Zahl N mit $K \subseteq [-N, +N]^d$:

Zuerst bestimmt er mittels Beispiel 5.4d) einen Punkt $p \in K$. Sodann benutzt er *dovetailing*, um für jedes $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft (-p + K)/\tilde{N} \cap \partial B(0, 1) = \emptyset zu testen. Diese ist semi-entscheidbar, denn: $(-p + K)/\tilde{N}$ ist ψ^d -berechenbar, der Rand $\partial B(0, 1)$ der d -dimensionalen Einheitskugel ebenfalls und damit auch beider Durchschnitt; nun benutze Proposition 5.7b).

Da K beschränkt ist, existiert ein N mit $K \subseteq [-N, +N]^d$ und damit auch $(-p + K)/\tilde{N} \subseteq [-(N + \|p\|)/\tilde{N}, +(N + \|p\|)/\tilde{N}]^d \subsetneq \overline{B}(0, 1)$ für $\tilde{N} > (N + \|p\|) \cdot \sqrt{d}$: das dovetailing terminiert also für (‘es findet’) ein \tilde{N} .



Umgekehrt implizieren $(-p + K)/\tilde{N} \cap \partial B(0, 1) = \emptyset$ und $0 \in (-p + K)/\tilde{N}$, daß $(-p + K)/\tilde{N} \subsetneq \overline{B}(0, 1)$: hier geht die Zusammenhangsvoraussetzung ein! Damit ist $K \subseteq [-N, +N]^d$ für $N \geq \tilde{N} + \|p\|$. \square

Über die Berechenbarkeit von *Vereinigung* und *Durchschnitt* gibt beispielsweise THEOREM 5.1.13 in [87] Auskunft; für weitere Operatoren auf abgeschlossenen Mengen siehe Abschnitt 6.2.

Lemma 5.8 a) *Die Vereinigung abgeschlossener Mengen*

$$\cup : \mathfrak{A}^d \times \mathfrak{A}^d \ni (A, B) \mapsto A \cup B \in \mathfrak{A}^d, \quad d_{A \cup B}(x) = \min \{d_A(x), d_B(x)\}$$

ist $(\psi^d \times \psi^d \rightarrow \psi^d)$ -berechenbar, $(\psi_<^d \times \psi_<^d \rightarrow \psi_<^d)$ -berechenbar und $(\psi_>^d \times \psi_>^d \rightarrow \psi_>^d)$ -berechenbar.

b) *Durchschnitt abgeschlossener Mengen*

$$\cap : \mathfrak{A}^d \times \mathfrak{A}^d \ni (A, B) \mapsto A \cap B \in \mathfrak{A}^d \tag{5.2}$$

ist $(\psi_>^d \times \psi_>^d \rightarrow \psi_>^d)$ -berechenbar

c) aber nicht $(\psi^d \times \psi^d \rightarrow \psi_<^d)$ -berechenbar; es gibt sogar nichtuniform zwei abgeschlossene ψ -berechenbare Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ für die $A \cap B$ nicht $\psi_<^d$ -berechenbar ist.

Der Durchschnitt zwischen zwei Intervallen auf der reellen Achse exemplifiziert die Unstetigkeit der Operation \cap :

Beispiel 5.9 Sei $A(\varepsilon) = [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ und $B = [1, 2]$. Mittels Beispiel 2.20g) sieht man leicht, daß die Funktion

$$(\varepsilon, x) \mapsto d_{A(\varepsilon)}(x) = \max(0, |x| - 1 + \varepsilon)$$

$(\rho \times \rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar ist. Wegen Theorem 2.23 hängt also ein ψ -Name von $A(\varepsilon)$ stetig ab von ε ; andererseits ‘springen’ ψ -Namen von $A(\varepsilon) \cap B$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ zwischen $d_{\{0\}} : x \mapsto |x - 1|$ und $d_0 \equiv \infty$. Daher kann eine String-Funktion, welche ψ^d -Namen von A und B auf solche von $A \cap B$ abbildet, nicht berechenbar sein.

Das Gegenbeispiel zeigt außerdem, daß hier — anders als bei Proposition 5.6 — selbst die Beschränkung auf kompakte zusammenhängende Mengen nichts hilft. Jedoch möchte ich bereits an dieser Stelle darauf aufmerksam machen, daß der Schnitt $A(\varepsilon) \cap B$ für $\varepsilon = 0$ nicht mehr voll-dimensional sondern ‘Punkt-artig’ ist. Tatsächlich wurde in [90] gezeigt, daß der Durchschnitt (5.2) zur berechenbaren Operation wird, wenn man die möglichen Argumente einschränkt auf solche (A, B) , für die das Ergebnis $A \cap B$ voll-dimensional ist. Kapitel 9 geht hierauf näher ein. Die Kapitel 6 und 7 behandeln die ψ^d -Berechenbarkeit zweier weiterer geometrischer Probleme: Lösen linearer Gleichungssysteme und konvexe Hülle. Doch vorher noch einige Bemerkungen über die Darstellung ψ^d

5.1 und ihre Äquivalente

In der klassischen Berechenbarkeitstheorie gibt es zahlreiche Zugänge (Turing-Maschine, Regi-stermaschine, μ -Rekursion, Keller-Automat, λ -Kalkül etc.), deren Äquivalenz die Natürlichkeit dieses diskreten Berechenbarkeitsbegriffs belegt. Entsprechend setzte sich für reelle Zahlen ρ als der geeignete Berechenbarkeitsbegriff durch, weil er sich als äquivalent zu vielen anderen jeweils ad-hoc eingeführten erwies.

Etwas ähnliches gilt nun auch für ψ^d bzw. $\psi_<^d$ und $\psi_>^d$: sozusagen die ‘untere’ bzw. ‘obere Hälfte’ von ψ^d . Dies untersucht die Arbeit [14]: Sie gibt einige weitere Darstellungen für abgeschlossene Mengen $A \in \mathfrak{A}^d$ an. Manche dieser Alternativen eignen sich besonders für (Nicht-) Berechenbarkeitsbeweise; andere tauchen bei Publikationen über Rekursive Geometrie wieder auf; und alle sind sie jeweils uniform äquivalent zu einer von $\psi_<^d$ oder $\psi_>^d$ oder ψ^d .

Definition 5.10 Eine offene Menge der Form

$$Q = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}^d \quad \text{mit} \quad a_i, b_i \in \mathbb{Q} \quad (5.3)$$

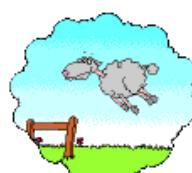
heißt *offener rationaler Quader*.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen.

- a) Gemäß Urysohns Lemma [67] besitzt jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ die Form $A = f^{-1}\{0\}$ für eine Funktion $f \in C(\mathbb{R}^d)$. Kodiert man A durch den $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Namen solch eines f , so ergibt dies die zu $\psi_>^d$ uniform äquivalente *Urysohn-Darstellung*.
- b) Sei $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots \in \mathbb{R}^d$ eine abzählbare Folge reeller Vektoren, welche genau in $A \in \mathfrak{A}^d$ dicht liegen: $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\} = A$. Dann kann ein $\prod_{n \in \mathbb{N}} \rho^d$ -Name dieses abzählbaren Tupels als Name für A dienen. Die induzierte Darstellung ist uniform äquivalent zu $\psi_<^d$.
- c) Eine (offenbar höchstens abzählbare) Aufzählung von offenen rationalen Quadern gemäß Definition 5.10 (kodiert durch ihre Eckpunkte), deren Vereinigung die offene Menge $\mathbb{R}^d \setminus A$ ergibt, existiert stets und charakterisiert A eindeutig. Diese Darstellung ist uniform äquivalent zu $\psi_>^d$.
- d) Weiterhin liegt hier *Robustheit* vor (vgl. Lemma 2.24): Anstelle offener rationaler Quadern kann man uniform äquivalent auch beispielsweise offene rationale Würfel, offene Euklidische Kugeln $B(x, r)$ mit $x \in \mathbb{Q}^d$ und $0 < r \in \mathbb{Q}$ oder offene Simplices mit rationalen Ecken auflisten.
- e) Wie oben, aber zähle diesmal *alle* offenen rationalen Quadern/Würfel/Bälle/Simplices auf, die die Menge A ‘treffen’ im Sinne nichtleeren Durchschnitts:

$$\left\{ Q = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in \mathbb{Q}, \quad Q \cap A \neq \emptyset \right\} .$$

Auch dies ist eine robuste Darstellung und uniform äquivalent zu $\psi_<^d$.



- f) Zähle alle *abgeschlossenen* rationalen Quader/Würfel/Bälle/Simplices auf, die A nicht treffen:

Diese Darstellung ist wieder uniform äquivalent zu $\psi_>^d$.

Wegen $\psi^d \equiv \psi_<^d \sqcap \psi_>^d$ ist der **Meet** (Definition 2.17) von e) und f) uniform äquivalent zur **Turing Location**. Dieser Blickwinkel erschließt den Zusammenhang zur Computergraphik:

Seite 127 von [87] präsentiert ein *Rasterisierung*-Verfahren, welches den ψ^2 -Namen einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq [0, 1]^2$ erhält und daraus eine schwarz/weiß-Approximation auf einem Bildschirm beliebiger Auflösung berechnet. Hierzu wird dem Pixel mit Koordinaten $(i, j) \in [k]^2$ im $k \times k$ -Gitter der rationale Würfel $K_{ij} = [\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}] \times [\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}]$ zugeordnet. Grob gesagt: Je nachdem, in welcher der Listen e) bzw. f) dieser Würfel¹⁰ auftaucht, wird der Pixel (i, j) dann schwarz oder weiß eingefärbt.

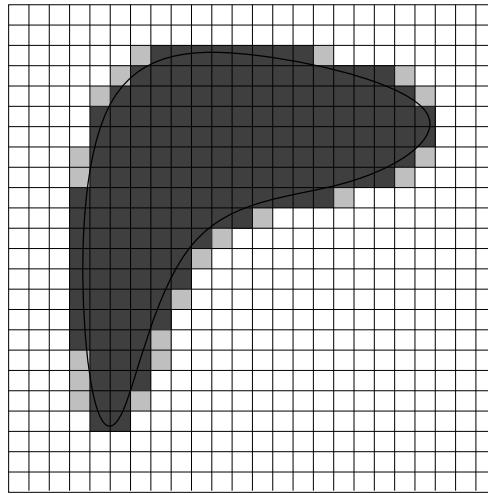


Abbildung 5: 24×24 -PLOT EINER ABGESCHLOSSENEN MENGE $A \subseteq [0, 1]^2$.

Nur in der Nähe des Randes ∂A von A lässt sich so keine eindeutige Entscheidung treffen; diese Pixel sind in Abbildung 5 grau gezeichnet (*Anti-Aliasing*).

Für *kompakte* Mengen (wie das obige $A \subseteq [0, 1]^2$) gibt es noch einige weitere interessante uniforme Äquivalente zu $\psi_<^d$ bzw. $\psi_>^d$. Ab jetzt sei $A \subseteq [-1, +1]^d$ abgeschlossen.

- g) Ein *Hausdorff-Name* von $A \neq \emptyset$ ist eine Folge nichtleerer endlicher Teilmengen von \mathbb{Q}^d (jeweils aufgefaßt als Vektoren im \mathbb{Q}^* mit entsprechender v-Kodierung), welche in der *Hausdorff-Metrik*

$$(X, Y) \mapsto \inf \left\{ r > 0 \mid X \subseteq \bigcup_{y \in Y} B(y, r) \wedge Y \subseteq \bigcup_{x \in X} B(x, r) \right\}$$

mit 2^{-n} gegen A konvergieren.

Diese Darstellung für nichtleere Kompakta $A \subseteq [-1, +1]^d$ ist uniform äquivalent zu ψ^d .

¹⁰bzw. eine infinitesimal vergrößerte, offene Variante L_{ij}

- h) Gemäß Heine-Borel (THEOREM 8.14+DEFINITION 8.1 in [67] bzw. SATZ 36.7 in [46]) haben genau die abgeschlossenen beschränkten Teilmengen des \mathbb{R}^d die Eigenschaft, daß jede offene Überdeckung (o.B.d.A. mit rationalen Quadern/Würfeln/Bällen/Simplices) eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Eine solche endliche rationale Überdeckung läßt sich offenbar wieder als Vektor im \mathbb{Q}^* auffassen und v-kodieren. Ein Name von A sei daher eine Aufzählung aller (höchstens abzählbar vielen) endlichen rationalen Überdeckungen von A :

Diese Darstellung ist uniform äquivalent zu $\psi_>^d$.

- i) Die Aufzählung aller (endlichen rationalen) Überdeckungen von A enthält auch überflüssige Teile; beispielsweise ist $\bigcup_{i=1}^n B\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right)$ eine solche von $A = \emptyset$, obwohl doch kein einziger Term $B(i/n, 1/n)$ dafür nötig wäre.

Betrachtet man als Namen von A die Aufzählung aller *minimaler* endlicher rationaler Überdeckungen von A , so gibt dies eine zu ψ^d uniform äquivalente¹¹ Darstellung.

Für Details siehe ABSCHNITT 5.2 in [87].

6 Berechenbarkeit der konvexen Hülle

Kompakte konvexe Mengen sind die Grundbereiche, über die man beim Linearen Programmieren optimiert. Dort handelt es sich speziell um Polyeder, d.h. beschränkte Lösungsmengen $L(A, b) \subseteq \mathbb{R}^d$ linearer Ungleichungen " $A \cdot x \leq b$ ". Es ist bekannt, daß jede lineare Funktion auf einem Polyeder P ihr Maximum auf einem Extrempunkt von P annimmt. In diesem Kapitel untersuche ich den Zusammenhang zwischen P und seinen Extrempunkten auf Berechenbarkeit. In der Algorithmischen Geometrie firmiert dieses Problem unter dem Namen "Konvexe Hülle". Allerdings verstehen Informatiker und Mathematiker hierunter leicht unterschiedliche Operationen.

- Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge. Dann ist seine *konvexe Hülle* die kleinste M enthaltende konvexe Menge: $\text{chull}(M) := \bigcap_{\substack{M \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^d \\ C \text{ konvex}}} C$
- Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Dann ist ihre *konvexe Hülle* die Menge $\text{ext}(P)$ der Knoten des Polyeders $P = \text{chull}\{x_1, \dots, x_n\}$;

Nennen wir das zweite zwecks Unterscheidung: "kombinatorische konvexe Hülle"¹². Sie zu bestimmen kennt die Literatur zahlreiche Methoden [66]. Andererseits weisen sie die in Abschnitt 3.9 beschriebenen numerischen Schwierigkeiten auf.

¹¹Die leere Überdeckung ist hier der *einige* Name von $A = \emptyset$; Äquivalenz zu ψ^d impliziert also Proposition 5.7c).

¹²Manchmal wird damit auch der gesamte sogenannte "face lattice" [40] oder auch "incidence graph" [28] bezeichnet, d.h. der kombinatorische Verband, welchen P , seine Seitenflächen und Sub-Seitenflächen dimensionsmäßig hinunter bis zu den Knoten bilden [40]...



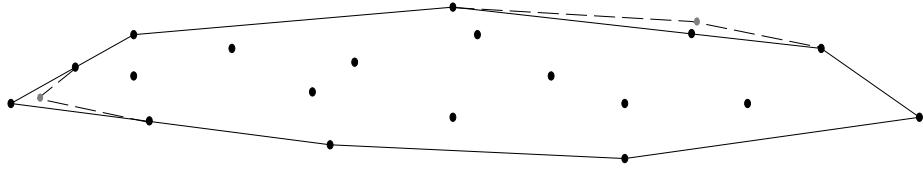


Abbildung 6: DIE KONVEXE HÜLLE IN DER EBENE.

Eine Erklärung dafür bietet die Rekursive Geometrie: kombinatorische konvexe Hülle ist dort trivialerweise nicht berechenbar; sogar dann, wenn man statt der Knoten von $\text{ext}(P)$ selbst ('reporting') nur deren *Anzahl* ('counting') ausgeben soll.

Lemma 6.1 *Die Funktion*

$$\mathbb{R}^{d \times n} \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \#\text{ext}(\text{chull}\{x_1, \dots, x_n\}) \in \mathbb{N}$$

ist unstetig; siehe Abbildung 6.

Tatsächlich sind die meisten kombinatorischen Probleme über kontinuierlichen Argumenten nicht berechenbar. In recht großer Allgemeinheit¹³ verhindern dies die SÄTZE 4.4B und 4.9 in [67]:

Lemma 6.2 *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine nicht-konstante Abbildung von dem zusammenhängenden topologischen Raum X in den diskreten topologischen Raum Y . Dann ist f unstetig.*

Andererseits ist, ebenso trivial, die kombinatorische konvexe Hülle *nichtuniform* sehr wohl berechenbar:

Beispiel 6.3 *Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ jeweils p^d -berechenbar und $\{y_1, \dots, y_m\} = \text{ext}(\text{chull}\{x_1, \dots, x_n\})$ ihre kombinatorische konvexe Hülle. Dann sind $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^d$ ebenfalls p^d -berechenbar.*

Beweis: Es gilt $y_1, \dots, y_m \in \{x_1, \dots, x_n\}$. □

Die kombinatorischen geometrischen Probleme sind also vom Berechenbarkeitsstandpunkt aus gesehen weniger interessant; ganz anders das der *mathematischen* konvexen Hülle. Beispieleweise zeigten Edalat, Lieutier und Kashefi [27]:

Lemma 6.4 *Die konvexe Hülle endlich vieler Punkte*

$$\mathbb{R}^d \ni x_1, \dots, x_n \mapsto \text{chull}\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathfrak{A}^d$$

ist $(\mathsf{p}^{d \times n} \rightarrow \Psi^d)$ -berechenbar.

¹³Eine überraschende Ausnahme macht Theorem 7.7 in Abschnitt 7.2...

Dies wird nun verallgemeinert von endlichem $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ auf abgeschlossene Mengen:

Proposition 6.5 *Die Mengenabbildung*

$$\mathfrak{A}^d \ni A \mapsto \text{chull}(A) \in \mathfrak{A}^d$$

ist $(\Psi_{<}^d \rightarrow \Psi_{<}^d)$ -berechenbar. Sie ist im allgemeinen weder $(\Psi_{>}^d \rightarrow \Psi_{>}^d)$ - noch $(\Psi^d \rightarrow \Psi^d)$ -berechenbar; für kompaktes $A \subseteq [-1, +1]^d$ aber doch.

Wegen Beispiel 5.4c) und mit der Skalierungsmethode unter Lemma 5.5 beinhaltet diese Proposition das obige Lemma.

Beweisskizze: Dem grundlegenden *Satz von Carathéodory* zufolge (siehe z.B. ABSCHNITT 2.3.4 von [40]) ist

$$\text{chull}(M) = \left\{ \sum_{i=0}^d \lambda_i x_i : x_0, \dots, x_d \in M, \lambda_0, \dots, \lambda_d \geq 0, \sum \lambda_i = 1 \right\},$$

also das Bild der berechenbaren Menge $A^{d+1} \times \Lambda^{(d+1)}$ unter der berechenbaren Funktion

$$f : \mathbb{R}^{d(d+1)} \times \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (x_0, \dots, x_d, \lambda_0, \dots, \lambda_d) \mapsto \sum_{i=0}^d \lambda_i x_i$$

wobei

$$\Lambda^{(d+1)} := \{(\lambda_0, \dots, \lambda_d) : \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\} \subseteq [0, 1]^{d+1}$$

kompakt ist. Für die Details siehe Abschnitt 6.2.

Die Nicht- $(\Psi^d \rightarrow \Psi_{>}^d)$ -Berechenbarkeit basiert wieder auf einem Unstetigkeitsargument. Wir betrachten den 1D-Fall mit $A = \{-2, -1\}$, kodiert durch Approximationen seiner Distanzfunktion

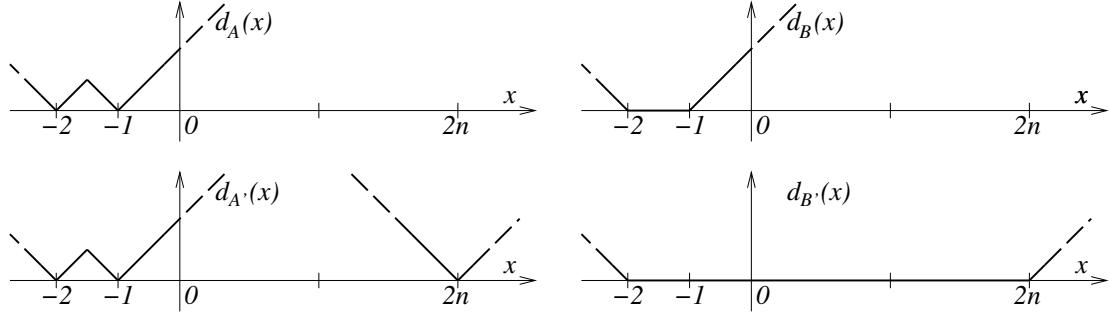
$$d_A(x) = -2 - x \text{ für } x \leq -2, \quad d_A(x) = 0 \text{ für } -2 \leq x \leq -1, \quad d_A(x) = 1 + x \text{ für } x \geq -1$$

mittels rationaler Polynome p_n auf $[-n, +n]$ bis auf $\varepsilon_n > 0$: Abbildung 7, Definitionen 5.2 und 2.21.

Wäre chull (ohne Beschränkung an die Ausdehnung der Eingabemenge) eine stetige Operation, so wäre nach endlicher Zeit eine Approximation von unten der Distanzfunktion d_B des Ergebnisses $B = \text{chull}(A) = [-2, -1]$ an der Stelle 0 möglich: Es würde also irgendwann die Information " $d_B(0) \geq \frac{1}{2}$ " ausgegeben. Bis dahin wäre d_A nur auf einem endlichen Intervall $[-n, +n]$ und auch nur näherungsweise bis auf $\varepsilon > 0$ bekannt.

Nun betrachte eine andere Eingabe, auf die diese partiellen Informationen ebenfalls zutreffen: $A' := \{-2, -1, 2n\}$. In der Tat unterscheiden sich die Distanzfunktionen d_A und $d_{A'}$ auf $[-n, +n]$ überhaupt nicht, diejenige der Ausgabe $B' = \text{chull}(A') = [-2, 2n]$ jedoch sehr. Insbesondere trifft die deterministisch ausgegebene Information " $d_{B'}(0) \geq \frac{1}{2}$ " wegen $d_{B'}(0) = 0$ alles andere als zu: ein Widerspruch zur Annahme. \square



Abbildung 7: KONVEXE HÜLLE IST BEREITS IM 1D ψ -UNSTETIG.

6.1 Berechenbarkeit der Menge der Extrempunkte

Die zur mathematischen konvexen Hülle in gewissem Sinn umgekehrte Operation ist das Finden der Extrempunkte.

Definition 6.6 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und konvex. Ein Punkt $p \in K$ heißt **extrem**, wenn er nicht innerhalb eines in K verlaufenden Liniensegments liegt:

$$x, y \in K, \quad 0 < \lambda < 1, \quad \lambda x + (1 - \lambda)y = p \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Er heißt **exponiert**, wenn es eine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt, die genau p aus K herausschneidet: $H \cap K = \{p\}$. Bezeichne $\text{exp}(K)$ die Menge der exponierten, $\text{ext}(K)$ die der Extrempunkte von K .

Diese Definition orientiert sich an [40]; [37] hingegen nennt einen Punkt "extrem", wenn er der zweiten Bedingung genügt. Für Polytope P spielen solche Feinheiten keine Rolle: hier sind "extrem" und "exponiert" dieselben Punkte, nämlich genau alle Knoten von P . Im allgemeinen

Abbildung 8: IST p EXTREM ODER NICHT?

jedoch muß man wohl unterscheiden, wie Abbildung 8 illustriert. Die Bedeutung dieser Mengen wird ersichtlich aus den folgenden Eigenschaften, entnommen ABSCHNITT 2.4 von [40]:

Lemma 6.7 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und konvex.

$$a) \quad K = \text{chull}(\text{ext}(K))$$

$$b) K = \text{chull}(A) \implies A \supseteq \text{ext}(K)$$

$$c) K = \overline{\text{chull}(\exp(K))} = \text{chull}(\overline{\exp(K)})$$

$$d) \exp(K) \subseteq \text{ext}(K) \subseteq \overline{\exp(K)}$$

und ab Dimension 3 sind diese Inklusionen im allgemeinen strikt.

Wegen a) und b) ist also $\text{ext}(K)$ die *kleinste* Menge, deren konvexe Hülle K ergibt. b) bzw. c) findet sich bisweilen unter der Bezeichnung **Krein-Milman Theorem**, obwohl sich dieses in erster Linie in der Form " $K = \overline{\text{chull}(\text{ext}(K))}$ " an den viel komplizierteren *unendlich-dimensionalen* Fall richtet [70].

Wie sieht nun seine Effektivierung aus? Wegen d) sind im allgemeinen weder $\text{ext}(K)$ noch $\exp(K)$ abgeschlossen, *können* also gar nicht berechenbar sein selbst wenn K es ist. Sinn macht viel eher die Frage nach der Berechenbarkeit der kleinsten *abgeschlossenen* Menge, deren konvexe Hülle K ergibt: dies ist $\overline{\text{ext}(K)} = \exp(K)$. Und tatsächlich haben 1994 Ge und Nerode genau für sie gezeigt:

Lemma 6.8 (Effektiver Satz von Krein-Milman) *Die kompakte konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist dann und nur dann ψ^d -berechenbar, wenn $\overline{\text{ext}(K)}$ $\psi^d_<$ -berechenbar ist.*

Die Kürze der hier verwendeten Formulierung verdeutlicht erneut die Würze von TTE: Die Originalarbeit [37] tut sich erheblich schwerer damit zu erklären, in welchem Sinne sie die Berechenbarkeit von $\text{ext}(K)$ betrachtet. Erst ein genauer Blick offenbart, daß dort mit "approximating extreme points" eine abzählbare Folge reeller Vektoren gemeint ist, welche in $\exp(K)$ dicht liegt. Wie in Abschnitt 5.1b) der vorliegenden Arbeit erläutert, ist diese aber uniform äquivalent zur Darstellung $\psi^d_<$.

Bei Lemma 6.8 handelt es sich um ein *nichtuniformes* Ergebnis. Es verallgemeinert Beispiel 6.3, denn für den Spezialfall eines Polyeders erhält man:

Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ alle ρ^d -berechenbar.

$$\xrightarrow{\text{Bsp.5.4c)} \quad \{x_1, \dots, x_n\} \quad \psi^d\text{-berechenbar}$$

$$\xrightarrow{\text{Prop.6.5}} \quad K := \text{chull}\{x_1, \dots, x_n\} \quad \psi^d\text{-berechenbar}$$

$$\xrightarrow{\text{Lem.6.8}} \quad \overline{\text{ext}(K)} = \{y_1, \dots, y_m\} \quad \psi^d_<\text{-berechenbar}$$

$$\xrightarrow{\text{Bsp.5.4c)} \quad y_1, \dots, y_m \quad \rho^d\text{-berechenbar}$$

Andererseits ist nichtuniforme Berechenbarkeit das beste, was man kriegen kann; denn selbst für **effektiv beschränkte** (d.h. in $[-1, +1]^d$ enthaltenen) volldimensionale konvexe Mengen ist $K \mapsto \overline{\text{ext}(K)}$ ab Dimension $d \geq 2$ ebensowenig $(\psi^d \rightarrow \psi^d_<)$ - wie $(\psi^d \rightarrow \psi^d_>)$ -stetig; siehe Abbildung 7. Nur die nichtuniforme Frage " $\psi^d \Rightarrow \psi^d_>$ " scheint noch offen.



6.2 Beweise

Dieser Abschnitt enthält den formalen Beweis von Proposition 6.5, der dort den Lesefluß gestört hätte und deshalb hier nachgeholt wird. Zur Einstimmung einige grundlegende Berechenbarkeitsresultate aus [87]:

Lemma 6.9 a) *Urbild unter stetigen Funktionen*

$$C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathfrak{A}^m \ni (f, A) \mapsto f^{-1}[A] \in \mathfrak{A}^n$$

ist $([\rho^n \rightarrow \rho^m] \times \Psi_>^m \rightarrow \Psi_>^n)$ -berechenbar.

b) *Abgeschlossenes Bild unter stetigen Funktionen*

$$C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathfrak{A}^n \ni (f, A) \mapsto \overline{f[A]} \in \mathfrak{A}^m$$

ist $([\rho^n \rightarrow \rho^m] \times \Psi_<^n \rightarrow \Psi_<^m)$ -berechenbar.

c) *Kompaktes Bild: Für abgeschlossene Mengen $K \subseteq [-1, +1]^n$ und $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist*

$$(f, K) \mapsto f[K]$$

$([\rho^n \rightarrow \rho^m] \times \Psi_>^n \rightarrow \Psi_>^m)$ -berechenbar und $([\rho^n \rightarrow \rho^m] \times \Psi^n \rightarrow \Psi^m)$ -berechenbar.

d) *Das kartesische Produkt*

$$\mathfrak{A}^n \times \mathfrak{A}^m \ni (A, B) \mapsto A \times B \in \mathfrak{A}^{n+m}$$

ist $(\Psi_<^n \times \Psi_<^m \rightarrow \Psi_<^{n+m})$ -berechenbar, $(\Psi_>^n \times \Psi_>^m \rightarrow \Psi_>^{n+m})$ -berechenbar und $(\Psi^n \times \Psi^m \rightarrow \Psi^{n+m})$ -berechenbar.

e) Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathfrak{A}^d$, gegeben durch entsprechende ρ^d - und $\Psi_>^d$ -Namen, ist die Eigenschaft " $x \notin A$ " semi-entscheidbar.

Beweis: Siehe THEOREM 6.2.4, variiere EXERCISE 5.1.28 in [87], wende Beispiel 3.1 auf $d_A(x)$ an. \square

Beweis von Proposition 6.5: Wegen Lemma 6.9d) ist die Abbildung $A \mapsto A^{d+1}$ $(\Psi_<^d \rightarrow \Psi_<^{d(d+1)})$ -berechenbar, $(\Psi_>^d \rightarrow \Psi_>^{d(d+1)})$ -berechenbar und $(\Psi^d \rightarrow \Psi^{d(d+1)})$ -berechenbar. Aus Beispiel 2.20 ergibt sich, daß das f aus der Beweisskizze $(\rho^{d(d+1)} \times \rho^{d+1} \rightarrow \rho^d)$ -berechenbar ist. Und schließlich überprüft man leicht, daß auch die Menge $\Lambda^{(d+1)} \cap \Psi^{d+1}$ -berechenbar ist. Im kompakten Fall $K \subseteq [-1, +1]^d$ gilt $K^{d+1} \subseteq [-1, +1]^{d(d+1)}$; Lemma 6.9c) sichert dann uniform die $\Psi_>^d$ - und Ψ^d -Berechenbarkeit der Bildmenge $f[K^{d+1} \times \Lambda^{(d+1)}] \subseteq [-1, +1]^d$ zu.

Ansonsten sichert Lemma 6.9b) die $\Psi_<^d$ -Berechenbarkeit nur des topologischen Abschlusses $\overline{f[A^{d+1} \times \Lambda^{(d+1)}]}$ zu. Da $\text{chull}(A)$ aber bereits abgeschlossen ist, macht dies keinen Unterschied. \square

7 Lineare Gleichungssysteme

Das Lösen linearer Gleichungssysteme (LGS) ist ein ubiquitäres Problem. In der Geometrie taucht es beispielsweise auf bei der Bestimmung des Durchschnitts von d Hyperebenen im \mathbb{R}^d . Dieses wiederum stellt einen Elementarschritt dar in Dantzs Simplex-Verfahren. Eine andere Sichtweise ergibt sich durch Einführen sogenannter *Schlupf-Variablen*, durch die jedes Lineare Programm auf die Form

$$A \cdot x = b, \quad x \geq 0 \quad (7.1)$$

gebracht werden kann. Anstelle linearer *Ungleichungen* genügt es also zu überprüfen, ob der Schnitt nicht leer ist zwischen einem (Hyper-)Quadranten und der Lösungsmenge eines LGS.

Die Numerik kennt zahlreiche Algorithmen zur Lösung eines LGS; Methoden wie *LR-Zerlegung*, *Gauß-Elimination*, *Householder* oder *Cholesky* stehen in jedem Standard-Lehrbuch. Andererseits enthalten sie in der Regel Verzweigungen auf Grund von Tests (z.B. bei der *Pivotsuche*), die im Sinn der Rekursiven Analysis nicht entscheidbar sind: Beispiel 3.1.

Eine mögliche Idee, diese Schwierigkeit zu umgehen, bestünde eventuell darin, auf jede eingelesene rationale Approximation A_n von A beispielsweise Gauß-Elimination anzuwenden, welche dann LR-Zerlegung $A_n = L_n \cdot R_n$, Rang $\text{rank}(A_n)$ sowie eine Lösungsbasis $(x_n^1, \dots, x_n^{d-\text{rank}(A_n)})$ des LGS $A_n \cdot x = 0$ liefert. Allerdings enthält diese Ausgabe noch keine Fehlerschranken. Ja, es ist auch gar nicht klar, ob sie überhaupt konvergente Approximationen darstellt; ob also z.B. x_n^j gegen ein Element x^j der Lösungsbasis des LGS $A \cdot x = 0$ konvergiert.

Auch im Licht der in Abschnitt 3.4 beschriebenen Unterschiede mangelte es also bislang an einer systematischen Untersuchung der Berechenbarkeit von LGSen. Dies leisten die Arbeiten [89, 15]. Genauer untersuchen sie die Frage nach der Äquivalenz folgender Arten, einen affinen Unterraums $L \subseteq \mathbb{R}^n$ zu repräsentieren: durch

- a) ein LGS mit Lösungsmenge L ,
d.h. eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ mit $L = \{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b\}$;
- b) eine affine lineare Abbildung $x \mapsto B \cdot x + c$ mit Bildbereiche L ;
- c) eine affine Basis für L ,
d.h. linear unabhängige $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ so daß $L = \{x_0 + \sum \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$;
- d) die Distanzfunktion d_L der abgeschlossenen Menge L ,
approximiert durch Weierstraß-Polynome im Sinne von Definition 2.21.

Konvertierung von a) nach c) bedeutet gewissermaßen, die *allgemeine Lösung* zu finden; Konvertierung nach d) liefert (Beispiel 5.4d) *eine* Lösung x . Der in Numerik so intensiv betrachtete Fall *eindeutiger* Lösbarkeit ist im Rahmen der Rekursiven Analysis (reine Berechenbarkeit) nämlich trivial:

Beispiel 7.1 Die Determinantenfunktion

$$\mathbb{R}^{n \times n} \ni A \mapsto \det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)} \in \mathbb{R}$$

ist $(\mathbb{P}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{P})$ -berechenbar: das folgt aus Beispiel 2.20.



Bezeichne $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der regulären $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{R} . Für jedes berechenbare $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ ist auch seine Inverse $A^{-1} \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ berechenbar, sogar uniform: Das folgt aus der Cramer'schen Regel. Insbesondere ist, bei $\rho^{n \times n}$ -Eingabe von $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ und ρ^n -Eingabe von $b \in \mathbb{R}^n$, die eindeutige Lösung $x = A^{-1} \cdot b$ von $A \cdot x = b$ uniform ρ^n -berechenbar; und wegen Beispiel 5.4c) ist daraus auch die einelementige Lösungsmenge $L = \{x\}$ uniform ψ^n -berechenbar.

Hier galt $\dim L = 0$ wegen der Regularität von A . Im allgemeinen Fall hingegen gehört zum Lösen eines LGS das Bestimmen der Dimension seines Lösungsraumes. Beginnen wir mit dem Spezialfall $b = 0$. Dort ist L der Kern der Matrix A , genauer: des durch A gegebenen Homomorphismus von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m .

7.1 Funktionen auf Matrizen

Aus der Linearen Algebra ist bekannt (Anhang B.2), daß lineare Abbildungen und Matrizen sich (bezüglich einer festen Basis) entsprechen. Mittels Typ-2 SMN- und UTM-Theorem 2.23 sieht man schnell, daß diese Entsprechung berechenbar ist:

Lemma 7.2 *Der Homomorphismus*

$$\mathbb{R}^{m \times n} \ni A \mapsto \Phi_A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \text{mit} \quad \Phi_A : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto A \cdot x \in \mathbb{R}^m$$

ist $(\rho^{m \times n} \rightarrow [\rho^n \rightarrow \rho^m])$ -berechenbar; sein Inverses ist $([\rho^n \rightarrow \rho^m] \rightarrow \rho^{m \times n})$ -berechenbar.

Lemma 7.2 ist formuliert für die Standardorthonormalbasen von \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m . Es gilt aber genauso bezüglich jede anderen berechenbaren Basis: die Transformationsmatrix S besteht aus den neuen Basisvektoren und das neue $A' = S \cdot A \cdot S^{-1}$ ist wegen Beispiel 7.1 berechenbar.

Folgerung 7.3 *Die Abbildung $A \mapsto \text{kernel}(A)$ ist $(\rho^{m \times n} \rightarrow \psi^n)$ -berechenbar; $A \mapsto \text{image}(A)$ ist $(\rho^{m \times n} \rightarrow \psi^m)$ -berechenbar.*

Beweis: Es ist $\text{kernel}(A) = \Phi_A^{-1}[\{0\}]$ und $\text{image}(A) = \Phi_A[\mathbb{R}^n]$. Nun verbinde Lemma 7.2 mit Lemma 6.9a)+b) und beachte, daß $\text{image}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ als endlich-dimensionaler Vektorraum sowieso abgeschlossen ist. \square

Mit Hilfe des zentralen Theorems 7.5 weiter unten wird sich — bei Kenntnis von $\text{rank}(A)$ — auch die $(\rho^{m \times n} \rightarrow \psi^n)$ -Berechenbarkeit von $\text{kernel}(A)$ sowie die $(\rho^{m \times n} \rightarrow \psi^m)$ -Berechenbarkeit von $\text{image}(A)$ ergeben.

Kommen wir deshalb zum Rang einer Matrix. Als natürliche Zahl ist er *nichtuniform* trivialerweise berechenbar, uniform jedoch nicht: aus Gründen der Unstetigkeit, Lemma 6.2 plus Lemma 2.11. Andererseits ist $A \mapsto \text{rank}(A)$ zumindest *halbstetig*, und tatsächlich gilt in Verallgemeinerung von Beispiel 3.1:

Proposition 7.4 *Die Eigenschaft "Regularität" ist semi-entscheidbar: Es gibt eine Typ-2 Maschine, welche bei $\rho^{n \times n}$ -Eingabe von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau dann hält, wenn A^{-1} existiert¹⁴.*

¹⁴In TTE heißt das: " $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$ ist $\rho^{n \times n}$ -r.e. offen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ "...

Die Rang-Funktion $\mathbb{R}^{m \times n} \ni A \mapsto \text{rank}(A) \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{P}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{P}_<)$ -berechenbar.

Die Eigenschaft "Lineare Unabhängigkeit" ist semi-entscheidbar: Es gibt eine Typ-2 Maschine, welche bei $\mathbb{P}^{n \times m}$ -Eingabe von $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ genau dann hält, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind.

Beweis: A ist regulär genau dann, wenn $\det A \neq 0$. Determinante ist berechenbar (Beispiel 7.1), der Nulltest semi-entscheidbar (Beispiel 3.1).

Bekanntlich stimmt $\text{rank}(A)$ überein mit der maximalen Größe k einer regulären $k \times k$ -Submatrix von A . Starte mittels dovetailing den Regularitätstest für jede der endlich vielen Submatrizen von A : eine $k \times k$ -Instanz terminiert dann und nur dann, wenn $\text{rank}(A) \geq k$.

Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die Matrix $A = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ Rang m besitzt. \square

7.2 Homogene Unterräume

Mit den positiven Ergebnissen des vorigen Abschnitts lässt sich der Lösungsraum $L = \text{kernel}(A)$ eines homogenen LGS bestimmen — allerdings als $\psi^n_>$ -Name. Um zumindest *einen* nichttrivialen Lösungsvektor $x \in L \setminus \{0\}$ zu finden, wäre im Hinblick auf Beispiel 5.4d) hingegen die $\psi^n_<$ -Berechenbarkeit wünschenswert.

Das zentrale Resultat der Arbeiten [89, 15] erlaubt nun die effektive Konvertierung zwischen $\psi^n_>$ -Namen und $\psi^n_<$ -Namen für Vektorräume bekannter Dimension: eine große Überraschung für die Autoren, sind doch $\psi^n_>$ und $\psi^n_<$ für *allgemeine* abgeschlossene Mengen unabhängig gemäß Beispiel 5.4b).

Theorem 7.5 Für d -dimensionale homogene Unterräume $L \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Darstellungen uniform äquivalent:

- a) ψ^n
- b) $\psi^n_<$
- c) $\psi^n_>$
- d) der $\mathbb{P}^{m \times n}$ -Name einer Matrix A mit $L = \text{kernel}(A)$
- e) der $\mathbb{P}^{n \times k}$ -Name einer Matrix B mit $L = \text{image}(B)$
- f) der $\mathbb{P}^{n \times d}$ -Name einer Orthonormalbasis $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}^n$ von L
- a') – f') wie a) – f), aber für das orthogonale Komplement L^\perp statt für L .

Beweis: Siehe Abschnitt 7.6 und beachte die gegenüber [15] deutlich elegantere Argumentation. \square

Nochmal in Worten: Für homogene Unterräume $L \subseteq \mathbb{R}^n$ bekannter Dimension ist es berechenbarkeitsmäßig Wurst, ob man sie durch eine einseitig approximierte Distanzfunktion angibt oder durch eine Orthonormalbasis. Punkte a') – f') bilden zudem ein Pendant zur Eigenschaft der klassischen charakteristischen Funktion, daß ihre Berechenbarkeit äquivalent zu der des Komplements ist (siehe Kapitel 5).

Insbesondere sind homogene LGSe in jedem gewünschten Sinn effektiv lösbar, vorausgesetzt man kennt $\text{rank}(A)$ bzw. $\dim(L)$. Ohne Dimension hingegen lässt sich im allgemeinen nicht mal *ein* Lösungsvektor $x \neq 0$ bestimmen:



Beispiel 7.6 Sei $A(\varepsilon) = (\min\{0, \varepsilon\}, \max\{0, \varepsilon\})$. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ besitzt das LGS " $A \cdot x = 0$ " nichttriviale Lösungen. A hängt stetig ab von ε , es gibt jedoch keine stetige Schar $x(\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ mit $x(\varepsilon) \neq 0$ und $A(\varepsilon) \cdot x(\varepsilon) = 0$ für alle ε .

Auch ob und wie sich die Dimension eines Vektorraums berechnen lässt, wurde in [89] erklärt:

Theorem 7.7 Die Dimension $\dim(L)$ homogener Unterräume $L \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

- a) $(\psi^n_< \rightarrow \rho_<)$ -berechenbar aber nicht $(\psi^n_< \rightarrow \rho_>)$ -berechenbar;
- b) $(\psi^n_> \rightarrow \rho_>)$ -berechenbar aber nicht $(\psi^n_> \rightarrow \rho_<)$ -berechenbar;
- c) $(\psi^n \rightarrow v)$ -berechenbar.

Beweis: Siehe Abschnitt 7.6... □

Hier tritt also der seltene Fall ein einer berechenbaren Funktion mit diskretem Wertebereich. Er widerspricht keineswegs Lemma 6.2 sondern impliziert, daß der Hyperraum \mathcal{L}^n aller homogenen Unterräume $L \subseteq \mathbb{R}^n$, versehen mit der von $\psi^n : \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{L}^n$ induzierten Topologie, unzusammenhängend ist: (mindestens) eine Komponente für jede Dimension.

7.3 Der affine Fall

Bislang betrachteten wir LGSe mit verschwindender rechter Seite: $b = 0$. Diese Einschränkung soll nun aufgehoben werden. Ein wesentlicher Unterschied entsteht dadurch, daß " $A \cdot x = 0$ " stets zumindest die triviale Lösung $x = 0$ besitzt; hingegen existiert im allgemeinen *gar kein* x mit $A \cdot x = b$. Das affine LGS ist nämlich dann und nur dann lösbar, wenn sich der Rang von A durch Anfügen von b rechts nicht ändert: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.

Da sich bereits der homogene Fall nur dann effektiv lösen ließ, wenn $\text{rank}(A)$ bzw. $\dim(L)$ bekannt war, bleibt diese Voraussetzung auch hier in Kraft. Unter der Dimension eines *affinen* Unterraums versteht man hier die Vektorraum-Dimension des zugeordneten homogenen Unterraums: $\dim(\emptyset) := -1$, $\dim(\{0\}) := 0$ und allgemein $\dim(x_0 + \text{span}\{x_1, \dots, x_d\}) := d$ für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und linear unabhängige $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}^n$.

Theorem 7.8 Für einen nichtleeren affinen Unterraum $L \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Darstellungen uniform äquivalent:

- a) ψ^n ;
- b) $\psi^n_<$, "⊓"-verknüpft mit einem v -Namen von $\dim(L)$;
- c) $\psi^n_> + \dim(L) + \text{der } \rho^n\text{-Name irgendeines Vektors } y \in L$;
- d) ein $\rho^{m \times n} \times \rho^m$ -Name von (A, b) mit $L = \{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b\}$ und die Angabe von $\text{rank}(A)$;
- e) ein $\rho^{n \times k} \times \rho^n$ -Name von (B, c) mit $L = c + \text{image}(B)$ und die Angabe von $\text{rank}(B)$;

f) der $\rho^{n \times (1 + \dim L)}$ -Name einer affinen Basis $x_0, x_1, \dots, x_{\dim L}$ von L .

Beweis: Mit Ausnahme von d) beinhaltet jeder der Fälle a) – f), entweder explizit oder implizit via Beispiel 5.4d), den ρ^n -Namen eines Vektors $y \in L$. Durch lineare Transformation

$$L \mapsto -y + L =: \tilde{L}, \quad d_{\tilde{L}}(x) = d_L(x + y)$$

erhält man so jeweils effektiv einen *homogenen* Vektorraum \tilde{L} in einer der Darstellungen aus Theorem 7.5 und zudem seine Dimension:

Im Fall a) ist $\dim(\tilde{L})$ berechenbar wegen Theorem 7.7; bei b) und c) gehört sie zur Eingabe; in d) ist $\tilde{L} = \text{kernel}(A)$ also $\dim(\tilde{L}) = n - \text{rank}(A)$; in e) gilt $\dim(\tilde{L}) = \text{rank}(B)$; und in f) wird $\dim(\tilde{L})$ über die Kardinalität der Basis übermittelt.

Um auch im Fall d) den benötigten *einen* Lösungsvektor y zu finden, gehe wie folgt vor: Löse gemäß Theorem 7.5 die homogene Gleichung $(A|b) \cdot z = 0$ mit $(A|b) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ und $z = (y, \alpha)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wegen bekanntem $\text{rank}(A|b) = \text{rank}(A)$ lässt sich davon sogar eine Basis $z_1, z_2, \dots, z_{d+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bestimmen.

Nicht alle $z_i = (y_i, \alpha_i)^T$ können $\alpha_i = 0$ haben: Nach Voraussetzung ist das homogene LGS $A \cdot x = b$ lösbar und jede Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ liefert eine Lösung $z = (x, \beta)^T$ des ursprünglichen $(A|b) \cdot z = 0$ mit $\beta = -1$. Weil die Basis z_1, \dots, z_{d+1} auch dieses z aufspannt, muß es ein i mit $\alpha_i \neq 0$ geben. Da die Eigenschaft " $\alpha_i \neq 0$ " semi-entscheidbar ist (Beispiel 3.1), findet sich so ein i in endlicher Zeit. Dann ist $y := -y_i/\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $A \cdot x = b$. \square

Was Punkt c) angeht, sieht man leicht, daß die zusätzliche Angabe von $y \in L$ tatsächlich nötig ist: aus einem $\psi^n_<$ -Namen von L alleine lässt sich, selbst bei Kenntnis von $\dim(L)$, nicht stetig ein $y \in L$ finden.

Nichtuniform gilt:

Folgerung 7.9 Jeder nichtleere affine Unterraum $L \subseteq \mathbb{R}^n$, der

b) $\psi^n_<$ -berechenbar ist oder die Form hat

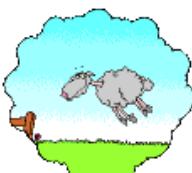
d) $L = \{x \in \mathbb{R}^d : A \cdot x = b\}$ mit $\rho^{m \times n}$ -berechenbarem A und ρ^m -berechenbarem b

enthält (mindestens) einen ρ^n -berechenbaren Punkt.

Beweis: *Nichtuniform* sind die natürlichen Zahlen $\dim(L)$ und $\text{rank}(A)$ beide konstant und trivialerweise v-berechenbar: der Name ist jeweils endlich und kann in den Zuständen einer TM gespeichert werden. Nun benutze Theorem 7.8b+d). \square

7.4 Spektralzerlegung

Bevor wir im nächsten Abschnitt zum Problem des Linearen Programmierens zurückkehren, bietet sich hier ein interessanter Einschub an. Mit den oben erarbeiteten Resultaten über Lineare Gleichungssysteme liegen nämlich die wesentlichen Werkzeuge bereit zu einer Effektivierung eines berühmten Satzes der klassischen linearen Algebra:



Theorem 7.10 (Spektralsatz) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische reelle Matrix, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$. Dann besitzt \mathbb{R}^n eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A .

Ein *Eigenvektor* der Matrix A ist ein von 0 verschiedener Vektor v mit $A \cdot v = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, welches dann *Eigenwert* genannt wird. Die Gesamtheit $\sigma(A)$ aller Eigenwerte λ heißt das *Spektrum* von A .

Eigenvektoren sind allseits beliebt, weil sie sich bei Anwendung von A so einfach verhalten: keine Drehung oder Scherung sondern nur eine Skalierung mit dem konstanten Faktor λ . Je mehr Eigenvektoren, desto besser; und am besten ist natürlich eine ganze Basis davon. Durch Übergang von der Standardorthonormalbasis des \mathbb{R}^n zu einer aus Eigenvektoren nimmt die durch A gemäß Lemma 7.2 induzierte lineare Abbildung Diagonalgestalt an:

Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Eigenvektoren zu den (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist $S = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basistransformationsmatrix und $S^{-1} \cdot A \cdot S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Die Anwendungen des Spektralsatzes sind mannigfaltig:

- Er liefert eine Normalform für symmetrische lineare Abbildungen;
- in der Theorie der Bilinearformen ermöglicht er die sogenannte *Hauptachsentransformation* von Ellipsoiden;
- diese spielt in der Mechanik eine wichtige Rolle: nur entlang der Eigenrichtungen (des Trägheitstensors) eines Körpers rotiert dieser ohne lagerzerstörende ‘Unwuchten’.
- Der Spektralsatz im unendlich-dimensionalen Hilbertraum ist Grundlage der Quantenmechanik: physikalische Meßwerte (z.B. *Energie*, *Ort* oder *Impuls*) sind dort Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren; den Eigenvektoren entsprechen sogenannte ‘reine Zustände’.
- Viele weitere Beispiele für seine Bedeutung können hier nur stichwortartig erwähnt werden, z.B. explizite Lösung gekoppelter linearer Differentialgleichungen, symbolischer Operatorkalkül in der Funktionalanalysis, algebraische Graphentheorie, etc.

In der Numerik kennt man zahlreiche Verfahren zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren. Abermals im Licht von Abschnitt 3.4 haben diese aber keinen direkten Zusammenhang zur Berechenbarkeit dieses Problems im Rahmen der Rekursiven Analysis. Dennoch fallen gewisse Gemeinsamkeiten auf, nämlich die Schwierigkeiten bei mehrfachen Eigenwerten. Ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A heißt *k-fach entartet*, wenn der zugehörige *Eigenraum* $\text{kernel}(\lambda - A)$ die Dimension k hat.

In [91] konnte nun gezeigt werden:

Theorem 7.11 Bei $\rho^{n(n+1)/2}$ -Eingabe der symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und bekannter Kardinalität von $\sigma(A)$ ist die Spektraldarstellung von A effektiv: man kann uniform paarweise orthonormale Eigenvektoren $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ und zugehörige Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ proberechnen. Ohne Kenntnis von $\#\sigma(A)$ hingegen lässt sich im allgemeinen nicht mal ein Eigenvektor von A bestimmen.

Die letzte Aussage folgt aus einem (Gegen-)Beispiel Rellichs [68]:

Beispiel 7.12 Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$A(\varepsilon) := \exp(-1/\varepsilon^2) \cdot \begin{pmatrix} \cos(2/\varepsilon) & \sin(2/\varepsilon) \\ \sin(2/\varepsilon) & -\cos(2/\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad A(0) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Einparameterschar reeller 2×2 -Matrizen ist offenbar symmetrisch und hängt stetig von ε ab. Es gibt aber keine stetige Schar von Eigenvektorpaaren: Letztere sind nämlich (bis auf Skalierung und Vertauschung) gegeben durch

$$u(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(1/\varepsilon) \\ \sin(1/\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad v(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \sin(1/\varepsilon) \\ -\cos(1/\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Beachte, daß ein Eigenvektor von 0 verschieden sein muß!

Die Berechenbarkeit des Spektrums folgt aus Speckers [80] effektivem Fundamentalsatz der Algebra, siehe auch EXERCISE 6.3.11 in [87]:

Lemma 7.13 Die Abbildung

$$\mathbb{C}^n \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \quad \text{mit} \quad \mathbb{C}[Z] \ni \prod_{i=1}^n (Z - \lambda_i) = Z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j Z^j$$

ist $(\rho^{2n} \rightarrow \rho^{2n})$ -berechenbar, surjektiv, und besitzt eine (mehrwertige) $(\rho^{2n} \rightarrow \rho^{2n})$ -berechenbare Inverse.

Hierbei wird \mathbb{C} , aufgefaßt als \mathbb{R}^2 , mit der Darstellung ρ^2 versehen. Nun ist aus der Linearen Algebra bekannt, daß Eigenwerte λ von A genau die Nullstellen des *Charakteristischen Polynoms* $CP(A, z) = \det(z - A)$ bilden. Mit dem obigen Lemma kann man also tun, wovon in der Numerik heftig abgeraten wird: Eigenwerte über den Weg des charakteristischen Polynoms bestimmen. Weil A als reell und symmetrisch vorausgesetzt ist, sind nämlich automatisch auch all seine Eigenwerte und damit die Nullstellen von $CP(A, \cdot)$ rein reell.

Im Fall $\#\sigma(A) = n$ sind wir damit fertig: alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind nichtentartet, es gibt n paarweise orthogonale Eigenräume $\text{kernel}(\lambda_i - A)$ jeweils der Dimension 1, für jeden kann man gemäß Theorem 7.5d+f eine (ein elementige) Orthonormalbasis berechnen, qed.

Im Fall $\#\sigma(A) < n$ gibt es mehrfache Eigenwerte, d.h. $\lambda_i = \lambda_j$ für gewisse $i \neq j$. Auch hier hilft der effektive Fundamentalsatz, indem er im n -Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Nullstellen von $CP(A, \cdot)$ mehrfach liefert entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit; diese stimmt (Lineare Algebra) mit der geometrischen Vielfachheit des jeweiligen Eigenwerts überein.

Allerdings, und das ist die Schwierigkeit, läßt sich diese Vielfachheit an sich nicht berechnen: Aus Stetigkeitsgründen, siehe Lemma 6.2; oder, anders gesehen, weil die Eigenschaft " $\lambda_i = \lambda_j$ " unentscheidbar ist. Ihre Negation " $\lambda_i \neq \lambda_j$ " jedoch ist semi-entscheidbar, und zusätzlich haben wir mit $\#\sigma(A)$ die *Gesamtanzahl* der paarweise verschiedenen Eigenwerte zur Verfügung. Daraus lassen sich die zur Anwendung von Theorem 7.5 so dringend benötigten Dimensionen der jeweiligen Eigenräume ermitteln:



Proposition 7.14 Seien $d, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq d \leq n$ fixiert. Betrachte die Funktion \mathfrak{N} , welche als Argument n reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ erhält, von denen genau d viele paarweise verschieden seien; der Wert von \mathfrak{N} sei gegeben durch das d -Tupel der verschiedenen λ_i und das d -Tupel ihrer jeweiligen Vielfachheiten. Formal:

$$\mathfrak{N} : \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \#\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = d\} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}^d, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto (\mu_1, \dots, \mu_d, n_1, \dots, n_d)$$

derart, daß $\{\mu_1, \dots, \mu_d\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ und $n_j = \#\{i = 1, \dots, n \mid \lambda_i = \mu_j\}$.

Diese (mehrwertige) Funktion ist $(\mathsf{p}^n \rightarrow \mathsf{p}^d \times \mathsf{v}^d)$ -berechenbar.

Beweis: Siehe Abschnitt 7.6... □

Damit ist der Beweis von Theorem 7.11 beendet. Für seine *nichtuniforme* Variante kann auf die Angabe von $\#\sigma(A)$ natürlich verzichtet werden:

Folgerung 7.15 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $\mathsf{p}^{n \times n}$ -berechenbar. Dann besitzt A eine berechenbare Spektraldarstellung, d.h. $\mathsf{p}^{n \times n}$ -berechenbares orthonormales $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und p -berechenbare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ so daß

$$O \cdot A \cdot O^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Abschließend sei noch bemerkt, daß man den Spektralsatz statt für reelle symmetrische meist allgemeiner für komplexe normale Matrizen formuliert findet. Alle hier vorgestellten Ergebnisse gelten auch in diesem Fall, indem man p für \mathbb{R} durch p^2 für \mathbb{C} ersetzt: sämtliche Beweise für reelle homogene Unterräume $L \subseteq \mathbb{R}^n$ lassen sich direkt auf solche des \mathbb{C}^n übertragen; alleine der Bezeichnungsaufwand nimmt dadurch zu.

7.5 LGSe und LPe

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit wurde bereits in Kapitel 4 angekündigt: die effektive Erweiterung der klassischen Linearen Programmierung à la Theorem 4.2 auf *nichtlineare* Zielfunktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. In Anbetracht von Lemma 5.5 genügt es hierzu, einen ψ^d -Name des (durch die linearen Randbedingungen nur implizit gegebenen) kompakten Zulässigkeitsbereichs $K \subseteq [-1, +1]^d$ zu finden.

Sei also K die Lösungsmenge der linearen Randbedingungen "A · x ≤ b". Durch Einführung von Schlupfvariablen kann man sogar o.B.d.A. die Form (7.1) annehmen. Für den ersten, durch *Gleichungen* beschriebenen Teil läßt sich bei Kenntnis von $\text{rank}(A)$ ein ψ^d -Name des Lösungsraums L , ja sogar eine affine Basis bestimmen: Das war mit Theorem 7.8 das zentrale Ergebnis dieses Kapitels. Auch sieht man einfach, daß der Hyperquadrant $Q = \{x \geq 0\}$ (als Konstante) ψ^d -berechenbar ist.

Aus diesem und L ist $K = L \cap Q$ jedoch im allgemeinen leider nur ψ^d -berechenbar: Lemma 5.8b), c). Und ein ψ^d -Name genügt in Lemma 5.5 eben *nicht* zur effektiven Maximierung von f .

Andererseits sahen wir bereits im linearen Fall $f(x) = c^T \cdot x$, daß drei Nichtdegeneriertheitsbedingungen unabdingbar sind. Jene Voraussetzungen haben hier bei der ψ^d -Berechnung von

$K = L \cap Q$ noch gar keine Rolle gespielt; ja, sie *könnten* es auch gar nicht, denn die wichtige Eigenschaft c) aus Theorem 4.2 der Volldimensionalität wurde durch Einführung der Schlupfvariablen sogar zerstört!

Wie man diese bewahrt, erfahren Sie ab Kapitel 8.1.

7.6 Beweise

Aber erst werden hier ein paar aufgeschobene Beweise und zugehörige technische Hilfsmittel nachgeholt:

Lemma 7.16 a) Die Eigenschaft "Lineare Unabhängigkeit" ist semi-entscheidbar: Es gibt eine Typ-2 Maschine, welche bei $\rho^{n \times d}$ -Eingabe von $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^n$ genau dann hält, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind.

- b) Seien $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^d$ linear unabhängig. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so daß auch jedes d -Tupel von Vektoren $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_d \in \mathbb{R}^d$ mit $|b_i - \tilde{b}_i| \leq \epsilon$ linear unabhängig ist.
- c) Seien $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots \in L$ dicht in dem d -dimensionalen homogenen Unterraum $L \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gibt es $i_1, \dots, i_d \in \mathbb{N}$ so daß $(v_{i_1}, \dots, v_{i_d})$ eine Basis von L bilden.
- d) Die Eigenschaft "Nullraum" ist semi-entscheidbar: Es gibt eine Typ-2 Maschine, welche bei Ψ^n -Eingabe des homogenen Unterraums $L \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann hält, wenn $L \subseteq \{0\}$.
- e) Der von linear unabhängigen Vektoren $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte homogene Unterraum

$$L = \text{span}(b_1, \dots, b_d) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_d : x = \sum_{i=1}^d \lambda_i b_i\}$$

ist uniform ($\rho^{n \times d} \rightarrow \Psi^n$)-berechenbar.

Beweis: a) Approximiere mittels Proposition 7.4 den Rang der Matrix $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ von unten: er erreicht den Wert d genau dann, wenn sie linear unabhängig sind.

- b) Die Matrix $B = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ hat aus dem obigen Grund Rang d . Daher gilt

$$\text{Det}(B) := \sum_{S \prec B} |\det(S)| \quad ! \quad > \quad 0 ,$$

wobei die Summe über alle $d \times d$ -Submatrizen S von B läuft. Weil Det stetig von b_1, \dots, b_d abhängt, gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß auch $\text{Det}(\tilde{B}) > 0$ für alle $\|B - \tilde{B}\| < \epsilon$. Insbesondere sind $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_d$ dann linear unabhängig.

- c) Seien $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von L . Da die v_i dicht liegen in L , gibt es $i_1, \dots, i_d \in \mathbb{N}$ so daß $\|v_{i_j} - b_j\| < \epsilon$ für jedes $j = 1, \dots, d$. Mit b) sind $\tilde{b}_j := v_{i_j}$ linear unabhängig. Da sie außerdem in L liegen, bilden sie eine Basis von L .



d) Man überlegt sich leicht, daß der Rand der (skalierten) Einheitskugel

$$\partial B(0, 1/2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum x_i^2 = 1/4\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$\psi_>^n$ -berechenbar ist. Wegen Lemma 5.8b) und Proposition 5.7 ist damit die Eigenschaft $L \cap \partial B(0, 1/2) = \emptyset$ semi-entscheidbar. Diese jedoch ist äquivalent zu $L = \{0\}$, denn L war als Vektorraum vorausgesetzt.

e) Wende die schon bekannte Funktion Det auf $(b_1, \dots, b_d, x) \in \mathbb{R}^{n \times (d+1)}$ an, wobei die Summe diesmal über alle $(d+1) \times (d+1)$ -Submatrizen laufe. Wegen der linearen Unabhängigkeit der b_i ist $f(x) := \text{Det}(b_1, \dots, b_d, x) = 0$ dann und nur dann, wenn $x \in L$. Da $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ offensichtlich ($\rho^n \rightarrow \rho$) berechenbar ist, kann man mittels Lemma 6.9a) $L = f^{-1}[\{0\}]$ $\psi_>^n$ -berechnen. Andererseits ist $L = \text{image}(B)$ mit $B = (b_1, \dots, b_d)$ wegen Folgerung 7.3 auch uniform $\psi_<^n$ -berechenbar.

□

Beweis von Theorem 7.7: a) Wie in Abschnitt 5.1 erläutert, ist ein $\psi_<^n$ -Name von L uniform äquivalent zu einer abzählbaren Folge von Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$, welche dicht liegen in L . Für jedes d -Tupel solcher Vektoren $(v_{i_1}, \dots, v_{i_d})$ überprüfe gemäß Lemma 7.16a), ob sie linear unabhängig sind: Mittels *dovetailing* geht dies zeitgleich für alle $d = 1, \dots, n$. Jedes linear unabhängige d -Tupel liefert eine untere Schranke $\dim(L) \geq L$; und umgekehrt gibt es wegen Lemma 7.16c) ein d -Tupel, welches diese Schranke annimmt.

b) Es ist $\dim(L) \leq d$ genau dann, wenn

$$\exists \text{ lin.unabh. } b'_1, \dots, b'_{d'} \in \mathbb{Q}^n : \quad d' \geq n - d \quad \wedge \quad L \cap L' = \{0\}, \quad L' := \text{span}(b'_1, \dots, b'_{d'}) \quad (7.2)$$

In der Tat liefert der klassische Ergänzungssatz zur Basis $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^d$ von L weitere linear unabhängige Vektoren $b'_1, \dots, b'_{d'} \in \mathbb{R}^n$, welche wegen Lemma 7.16c) überdies als rational angenommen werden können.

Benutze *dovetailing*, um das Zutreffen von (7.2) für alle $d' = 0, 1, \dots, n$ zu überprüfen: Es gibt nur abzählbar viele rationale b'_i ; ihre lineare Unabhängigkeit ist in exakter Arithmetik kein Problem; der aufgespannte Unterraum L' ist wegen Lemma 7.16e) $\psi_>^n$ -berechenbar; der Schnitt mit L ebenfalls: Lemma 5.8b); und der Test auf $\{0\}$ ist semi-entscheidbar: Lemma 7.16d).

c) folgt aus a) und b): Simuliere gleichzeitig die $(\psi_<^n \rightarrow \rho_<)$ - und $(\psi_>^n \rightarrow \rho_>)$ -Berechnungen solange, bis die jeweilige untere ($\rho_<$) bzw. obere ($\rho_>$) Schranke an $\dim(L)$ zur Deckung kommen: weil das Ergebnis eine natürliche Zahl ist, geschieht dies in endlicher Zeit. Dann gebe den (endlichen) v-Namen dieser Zahl aus.

□

Beweis von Theorem 7.5: a)⇒b), a)⇒c) siehe Beispiel 5.4b).

e)⇒b), d)⇒c) siehe Folgerung 7.3.

b)⇒f) Wie oben im Beweis von Theorem 7.7a) findet man effektiv und uniform den $\rho^{n \times d}$ -Namen eines d -Tupels $(v_{i_1}, \dots, v_{i_d})$ von linear unabhängigen Vektoren in L . Da $\dim(L) = d$ bekannt ist, bilden diese eine Basis. Mittels Gram-Schmidt lässt sie sich orthonormalisieren.

f)⇒e) Beachte $L = \text{span}(x_1, \dots, x_d) = \text{image}(X)$ mit $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{n \times d}$.

e)⇒d') $L^\perp = \text{kernel}(B^T)$ mit $L = \text{image}(B)$.

d)⇒e') $L^\perp = \text{image}(A^T)$ mit $L = \text{kernel}(A)$.

f)⇒a) Lemma 7.16e).

c)⇒b') Aus der linearen Algebra ist bekannt, daß der Euklidische Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ zu einem homogenen Unterraum $L \subseteq \mathbb{R}^n$ minimiert wird durch die Orthogonalprojektion $P_L(x)$ von x auf L :

$$d_L(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in L} \|x - y\|_2 \stackrel{!}{=} \|x - P_L(x)\| .$$

Weiterhin gilt für orthogonale Vektoren $u \perp v$: $\|u + v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$. Und schließlich spannen L und L^\perp stets den ganzen Raum \mathbb{R}^n auf. Damit ergibt sich die einfache doch wesentliche Formel:

$$\|x\|_2^2 = (d_L(x))^2 + (d_{L^\perp}(x))^2 .$$

Sie erlaubt für den Unterraum L eine effektive Konvertierung seines $\psi^n_>$ -Namens in $\psi^n_<$ -Namen. Denn ersterer ist nichts anderes als ein $[\rho^n \rightarrow \rho_<]$ -Name für d_L : Definition 5.2. Wegen der Monotonie von $t \mapsto t^2$ auf \mathbb{R}_+ ist damit auch $(d_L(x))^2$ uniform $\rho_<$ -berechenbar. Weiterhin ist $\|x\|_2^2$ offensichtlich ρ -berechenbar, woraus die $\rho_>$ -Berechenbarkeit von $(d_{L^\perp}(x))^2$ folgt. Abermals auf Grund der Monotonie, diesmal der $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbaren (Beispiel 2.20i) Funktion $t \mapsto \sqrt{t}$ auf \mathbb{R}_+ , ist also $d_{L^\perp}(x)$ uniform $\rho_>$ -berechenbar.

Obige Überlegungen führen uniform zu einem $[\rho^n \rightarrow \rho_>]$ -Namen von d_{L^\perp} . (Formal geht hier Theorem 2.23 ein...) Dieser ist ein $\psi^n_<$ -Name von L^\perp , was zu beweisen war.

b)⇒c') analog.

Der Rest ergibt sich durch Transitivität und mittels $L^{\perp\perp} = L$, z.B.

$$\text{b)} \Rightarrow \text{f)} \Rightarrow \text{a)} \Rightarrow \text{c)} \Rightarrow \text{b')} \Rightarrow \text{f')} \Rightarrow \text{a')} \Rightarrow \text{c')} \Rightarrow \text{b'')} = \text{b})$$

□

Beweis von Proposition 7.14: Mittels dovetailing rate nichtdeterministisch ein d -Tupel (i_1, i_2, \dots, i_d) solcher Indizes $i_j \in \{1, \dots, n\}$, die zu den verschiedenen λ_i gehören. Ob ein geratenes Tupel diese Eigenschaft besitzt, lässt sich anhand folgender Bedingung überprüfen:

$$\forall 1 \leq j < k \leq d : \lambda_{i_j} \neq \lambda_{i_k} .$$

Da sie semi-entscheidbar ist (Beispiel 3.1) und ein gewünschtes Tupel nach Voraussetzung existiert, wird es so auch in endlicher Zeit gefunden.



Damit können wir die $\mu_j := \lambda_{i_j}$ berechnen, bleiben ihre Vielfachheiten. Mittels folgender Bedingung lässt sich entscheiden, ob ein geratenes d -Tupel $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ die gesuchten Vielfachheiten beschreibt:

$$n_1 + \dots + n_d = n \quad \wedge \quad \forall j = 1, \dots, d : \quad \exists i_1 < \dots < i_{n-n_j} : \quad \lambda_{i_k} \neq \mu_j \quad \forall k = 1, \dots, n - n_j \quad (7.3)$$

Daß das wahre Vielfachheitstupel sie erfüllt, verifiziert man leicht. Weil sie semi-entscheidbar ist, terminiert das *dovetailing* auch. Bleibt zu zeigen, daß sie *nur* durch das gewünschte Tupel erfüllt wird:

Beachte, daß es wegen $n_j = \#\{i = 1, \dots, n \mid \lambda_i = \mu_j\}$ genau $n - n_j$ viele von μ_j verschiedene λ_i s gibt. Angenommen, ein ‘falsches’ Tupel $(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_d)$ erfülle (7.3). Dieses hat also $\tilde{n}_j \neq n_j$ für ein j . O.B.d.A. $\tilde{n}_j > n_j$, denn wegen $\sum_j n_j = d = \sum_j \tilde{n}_j$ wäre sonst $\tilde{n}_{j'} > n_{j'}$ für ein anderes j' . Dies jedoch widerspricht dem zweiten Teil von (7.3), demzufolge dann echt mehr als $n - n_j$ viele von μ_j verschiedene λ_i s existieren. \square

8 Zwischenbilanz

An dieser Stelle wollen wir einmal die bisherigen Ergebnisse rekapitulieren:

Viele wichtige Funktionen, die auf der **realRAM** *nicht* berechenbar sind (und ggf. explizit zum Befehlsumfang hinzugenommen werden müssen), sind es im Sinne der Rekursiven Analysis sehr wohl: Wurzel und e^x zum Beispiel. Andererseits sind, gerade im Bereich der Geometrie, viele Operationen zwar **realRAM**- aber nicht $(\rho^d \rightarrow \rho)$ -berechenbar:

- Lineares Programmieren über einen degenerierten Zulässigkeitsbereich;
- Bestimmung der Extrempunkte eines Polyeders;
- lineare Gleichungssysteme unbekannten Rangs;
- Eigenvektoren zu mehrfachen Eigenwerten.

Obwohl es keinen formalen Zusammenhang zwischen Numerik und Rekursiver Analysis gibt (Abschnitt 3.4), fällt doch auf, daß die erwähnten, aus dem theoretischen Rechenmodell der Typ-2 Maschine deduzierten Nichtberechenbarkeiten in der Praxis wohlbekannt sind!

Mit diesen negativen Ergebnissen allein ist man natürlich nicht zufrieden. Vielmehr wurde hier nach sinnvollen Einschränkungen gefragt, unter welchen die betrachteten geometrischen Probleme berechenbar *werden*. Dies führte zu neuen, teils überraschenden Erkenntnissen:

- Spektralzerlegung ist effektiv selbst im Fall mehrfacher Eigenwerte, *sofern* die Kardinalität des Spektrums bekannt ist. Diese Voraussetzung ist schwächer, als die jeweiligen Vielfachheiten zu kennen!
- Beim Linearen Programmieren läßt sich genau charakterisieren, für welche Art von Degeneriertheiten das Problem berechenbar ist und für welche nicht.

Unter "berechenbar" verstanden die bisherigen Kapitel den in der Regel den in der Rekursiven Analysis verwendeten Begriff, d.h. die $(\rho^d \rightarrow \rho)$ -Berechenbarkeit. Nun besteht eine der Stärken von TTE ja gerade darin, auch andere (z.T. fremde) Berechenbarkeitsbegriffe nahtlos in ihren formalen Rahmen aufnehmen zu können.

Interessant erscheinen hier besonders die Darstellungen \hbar und γ reeller Zahlen: In Abschwächung von ρ (rationale Approximationen mit Fehlerschranken) erlaubt es \hbar , die Fehlerschranken endlich oft zu verletzen; und γ lässt sie gleich ganz weg. Wie sieht es also mit der $(\hbar^d \rightarrow \hbar)$ - bzw. $(\gamma^d \rightarrow \gamma)$ -Berechenbarkeit der betrachteten geometrischen Probleme aus?

In Theorem 8.2c) werden wir sehen, daß jede $(\rho^d \rightarrow \rho)$ -berechenbare Funktion auch $(\gamma^d \rightarrow \gamma)$ -berechenbar ist. Dies ist weit weniger selbstverständlich als es auf den ersten Blick scheint, denn eine schwächere Darstellung reeller Zahlen führt nicht unbedingt zu einem schwächeren Berechenbarkeitsbegriff für reelle *Funktionen*:

Beispiel 8.1 $(\rho \rightarrow \rho) \not\Rightarrow (\rho_< \rightarrow \rho_<)$,

d.h. es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche $(\rho \rightarrow \rho)$ -berechenbar aber nicht $(\rho_< \rightarrow \rho_<)$ -berechenbar ist, nämlich $f(x) = -x$: das ergibt sich aus Folgerung 2.15c-e).

Der Grund ist, daß zwar die verlangte Ausgabeinformation von ρ auf $\rho_<$ abgeschwächt wird, gleichzeitig aber auch die Eingabe! Etwas anderes ist es natürlich, wenn man nur die Ausgabe abschwächt: jede $(\rho^d \rightarrow \rho)$ -berechenbare Funktion ist auch $(\rho^d \rightarrow \hbar)$ -berechenbar; und jede $(\hbar^d \rightarrow \hbar)$ -berechenbare Funktion ist auch $(\rho^d \rightarrow \hbar)$ -berechenbar: die Eingabe kann man immer verstärken. In Formeln:

$$(\rho^d \rightarrow \rho) \Rightarrow (\rho^d \rightarrow \hbar), \quad (\hbar^d \rightarrow \hbar) \Rightarrow (\rho^d \rightarrow \hbar) .$$

Überraschenderweise gilt in letzterem Fall auch die Umkehrung:

Theorem 8.2 a) $(\rho^d \rightarrow \rho) \Rightarrow (\rho^d \rightarrow \hbar) \Leftrightarrow (\hbar^d \rightarrow \hbar)$

b) Jede realRAM-berechenbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch $(\hbar^d \rightarrow \hbar)$ -berechenbar.

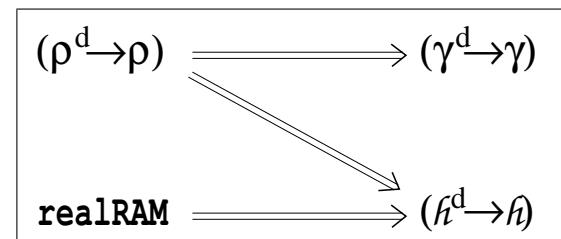
c) $(\rho^d \rightarrow \rho) \Rightarrow (\gamma^d \rightarrow \gamma) \not\Rightarrow (\hbar^d \rightarrow \hbar)$.

d) Genauer gesagt ist die Punktauswertung

$$C(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f, x) \mapsto f(x)$$

$([\rho^n \rightarrow \rho] \times \gamma^n \rightarrow \gamma)$ -berechenbar.

e) Jede $(\gamma^d \rightarrow \gamma)$ -berechenbare Funktion ist stetig.



Insbesondere enthält die obige Skizze alle nicht-uniformen Beziehungen zwischen den hier betrachteten Berechenbarkeitsbegriffen für reelle Funktionen. Denn e^x beispielsweise ist zwar $(\hbar^d \rightarrow \hbar)$ -, nicht jedoch realRAM-berechenbar. Tatsächlich kann man den Befehlsumfang der realRAM um e^x erweitern — ja, allgemeiner um jede endliche Menge $(\rho^d \rightarrow \rho)$ -berechenbarer Funktionen: EXERCISE 9.7.4 in [87] — und trotzdem gilt weiterhin

$$\text{realRAM} \Rightarrow (\hbar^d \rightarrow \hbar) \wedge (\hbar^d \rightarrow \hbar) \not\Rightarrow \text{realRAM} .$$



Beweis von Theorem 8.2: a) Sei M eine Typ-2 Maschine, welche aus ρ -Namen für $x \in \mathbb{R}$ \hbar -Namen für $y = f(x) \in \mathbb{R}$ macht. Folgende Maschine \tilde{M} erhält als Eingabe einen \hbar -Namen für x und berechnet daraus einen \hbar -Namen für $y = f(x)$:

Der \hbar -Name für x sei $(q_0, \varepsilon_0, q_1, \varepsilon_1, \dots, q_n, \varepsilon_n, \dots)$. \tilde{M} simuliert M auf eben dieser Eingabe in der Hoffnung, es sei bereits ein ρ -Name, d.h. es gebe keine Ausnahmen von den Fehlerschranken. Die jeweiligen Ausgaben p_n und δ_n von M reicht \tilde{M} direkt durch.

\tilde{M} überprüft jedoch immer, ob die Eingabe-Schranken tatsächlich zutreffen: Dies ist der Fall, solange die Fehlerintervalle $[q_n - \varepsilon_n, q_n + \varepsilon_n]$ nichtleeren Schnitt haben. Wird der Schnitt leer nach sagen wir N Gliedern der Eingabefolge, so startet \tilde{M} die Simulation von M neu mit der verbleibenden Restfolge $(q_N, \varepsilon_N, q_{N+1}, \varepsilon_{N+1}, \dots)$.

Da der \hbar -Name für x nur endlich oft die Fehlerschranken verletzt, beginnt \tilde{M} nach endlicher Zeit eine endgültige Simulation von M , die also nicht mehr abbricht. Bis dahin sind höchstens endlich viele Ausgaben erfolgt (die potentiell falsch sind), alle späteren bilden laut Annahme einen zulässigen \hbar -Namen für y : insgesamt wird also ein \hbar -Name für y ausgegeben, mithin die Funktion $(\hbar \rightarrow \hbar)$ -berechnet durch \tilde{M} .

- b) Das Simulations-THEOREM 3 in [21] besagt, daß alle **realRAM**-berechenbaren Funktionen robust quasi-stark δ - \mathbb{Q} -analytisch sind. Letztere sind, wie in Abschnitt 3.8 erläutert, gerade die **TTE**-berechenbaren Funktionen mit ρ -Eingabe und \hbar -Ausgabe. Nun benutze a).
- c) Der erste Teil folgt aus d) und Theorem 2.23; für den zweiten betrachte die konstante Funktion $f(x) \equiv \sum_{n \in N} 2^{-n}$ mit einem nicht-rekursiven $N \subseteq \mathbb{N}$.
- d) Sei M eine (mit unendlichem $[\rho \rightarrow \rho]$ -Orakelstring für f versehene) Typ-2 Maschine, welche $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ berechnet. \tilde{M} erhält als Eingabe eine rationale Folge $(q_0, q_1, \dots, q_n, \dots)$ mit Grenzwert x .

Nun simuliert sie M auf der Eingabe $(q_0, 1, q_0, 1/2, q_0, 1/4, \dots, q_0, 2^{-n}, \dots)$, die ja einen zulässigen ρ -Namen für die reelle Zahl q_0 bildet. M gibt daraufhin einen ρ -Namen für $f(q_0)$ aus: nach endlicher Zeit ein rationales Paar (p_{i_0}, δ_{i_0}) mit $\delta_{i_0} \leq 1$. Das zugehörige p_{i_0} gibt \tilde{M} gleich mal aus.

Als nächstes simuliert \tilde{M} die Maschine M erneut, diesmal auf der Eingabe

$$(q_1, 1, q_1, 1/2, q_1, 1/4, \dots, q_1, 2^{-n}, \dots) ,$$

worauf sie wiederum nach endlicher Zeit eine Approximation p_{i_1} für $f(q_1)$ bis auf $\delta_{i_1} \leq 1/2$ erhält.

So geht es weiter, und schrittweise gibt \tilde{M} zu jedem q_n ein p_{i_n} aus mit $|p_{i_n} - f(q_n)| \leq \delta_{i_n} \leq 2^{-n}$. Wegen $q_n \rightarrow x$ und der Stetigkeit von f konvergiert also die ausgegebene Folge $(p_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$, ist also ein γ -Name für $f(x)$.

- e) wurde in [12] bewiesen: siehe dort THEOREM 22 für $X = \mathbb{R}^d \dots$

□

Damit aber sind sämtliche Fragen nach der $(\mathbb{H}^d \rightarrow \mathbb{H})$ - bzw. $(\mathbb{V}^d \rightarrow \mathbb{V})$ -Berechenbarkeit der in dieser Arbeit betrachteten geometrischen Probleme sofort beantwortet:

- Folgerung 8.3**
- a) Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Theorem 4.2 ist Lineares Programmieren $(\mathbb{V}^{m \times n} \times \mathbb{V}^m \times \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V})$ -berechenbar.
 - b) In allen anderen Fällen hängt $\text{LP}(A, b, c) \in \mathbb{R}$ gemäß Theorem 4.2 unstetig von $(A, b, c) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ab und ist somit nicht $(\mathbb{V}^{m \times n} \times \mathbb{V}^m \times \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V})$ -berechenbar.
 - c) Für alle Eingaben (A, b, c) ist $\text{LP}(A, b, c)$ jedoch $(\mathbb{H}^{m \times n} \times \mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H})$ -berechenbar: das folgt aus der realRAM-Berechenbarkeit durch den Simplex-Algorithmus.
 - d) Analoges gilt für Extrempunkte konvexer Polyeder, lineare Gleichungssysteme und Spektralzerlegung: Unter den in Kapiteln 6 und 7 angegebenen Voraussetzungen sind sie jeweils $(\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m)$ -berechenbar (n, m je nach Problem) und damit auch $(\mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m)$ -berechenbar; ohne diese Voraussetzungen sind sie unstetig und damit nicht $(\mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m)$ -berechenbar. Und aus ihrer realRAM-Berechenbarkeit folgt die $(\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^m)$ -Berechenbarkeit; wie in c) gehen auch hier berühmte klassische Algorithmen ein, z.B. die Gauß-Elimination.

$(\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H})$ -berechenbare Funktionen können also unstetig sein. Wir erläutern dies am Beispiel der realRAM-berechenbaren Vorzeichen-Funktion

$$\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad 0 \mapsto 0, \quad x \mapsto +1 \quad \text{falls } x > 0, \quad x \mapsto -1 \quad \text{falls } x < 0 .$$

Hierbei wird auch das sogenannte *konservative Verzweigen* illustriert, eine zentrale Idee in dem überaus eleganten Simulations-THEOREM 3 aus [21]:

Beispiel 8.4 Folgende Typ-2 Maschine gibt bei Eingabe von ρ -Namen für $x \in \mathbb{R}$ einen \mathbb{H} -Namen für $\text{sgn}(x)$ aus:

Seien q_n eine eingegebene rationale Approximationen des unbekannten $x \in \mathbb{R}$ mit Fehlerschranke ε_n . Falls $0 \in [q_n - \varepsilon_n, q_n + \varepsilon_n]$, so gebe $p_n = 0$ als rationale Approximation von $y = \text{sgn}(x)$ aus mit Fehlerschranke $\delta_n = 2^{-n}$. Falls $q_n - \varepsilon_n > 0$, so gebe $p_n = 1$ und $\delta_n = 2^{-n}$ aus; falls $q_n + \varepsilon_n < 0$, so gebe $p_n = -1$ und $\delta_n = 2^{-n}$ aus.

Ist $x = 0$, so produziert der Algorithmus auf Grund der ersten Fallunterscheidung fortwährend 0en als approximierende Ausgabe von $\text{sgn}(x) = 0$, ist also korrekt. Ist $x > 0$, so gilt wegen $\varepsilon_n \rightarrow 0$, daß $0 \in [q_n - \varepsilon_n, q_n + \varepsilon_n]$ nur endlich oft vorkommt: ab da gibt der Algorithmus korrekt 1en als Approximation von $\text{sgn}(x) = 1$ aus; bis dahin hat er nur endlich viele falsche Fehlerschranken produziert. Der Fall $x < 0$ gilt analog.

Spaßeshalber analysiere ich noch zwei weitere Probleme aus dem geometrischen Umfeld: Rucksack und TSP. Man kennt sie im diskreten Fall als NP-vollständig; die reellen Erweiterungen¹⁵

¹⁵Anhang A betrachtet mit Point Location eine geometrische Verallgemeinerung von Rucksack und TSP.



Rucksack:

Gegeben: n Pakete mit reellen

Gewichten $a_1, \dots, a_n \geq 0$

Aufgabe: Fülle damit einen Rucksack möglichst voll ohne Gesamtgewicht 1 zu überschreiten!

TSP:

Gegeben: eine $n \times n$ -Matrix Δ mit

paarweisen Distanzen $\delta_{ij} \in \mathbb{R}_+$
zwischen Orten i und j

Aufgabe: Finde kürzeste Rundreise!

finden sich beispielsweise in [32]. Um es kurz zu machen: ihre *Entscheidungs*-Versionen

$$\text{"}\exists x \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 1\text{"?} \quad \text{bzw.} \quad \text{"}\exists \pi \in \mathcal{S}_n : \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{\pi(i+1), \pi(i)} + \delta_{\pi(1), \pi(n)} \leq 1\text{"?}$$

hängen unstetig von den Eingaben $a \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\Delta \in \mathbb{R}^{n^2}$ ab und sind damit weder $(\rho^n \rightarrow \rho)$ - bzw. $(\rho^{n^2} \rightarrow \rho)$ - noch $(\gamma^n \rightarrow \gamma)$ - bzw. $(\gamma^{n^2} \rightarrow \gamma)$ -berechenbar; eine **realRAM** ohne Zeitbeschränkung kann sie jedoch trivialerweise lösen, was die Probleme als $(\hbar^n \rightarrow \hbar)$ - bzw. $(\hbar^{n^2} \rightarrow \hbar)$ -berechenbar beweist.

Die zugehörigen *Optimierungs*-Versionen hingegen

$$a \mapsto \max \left\{ \beta \mid \beta = \sum a_i x_i, \beta \leq 1, x_i \in \{0,1\} \right\} \quad \Delta \mapsto \min \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{\pi(i+1), \pi(i)} + \delta_{\pi(1), \pi(n)} \mid \pi \in \mathcal{S}_n \right\}$$

sind ebenso trivial $(\rho^n \rightarrow \rho)$, $(\gamma^n \rightarrow \gamma)$ und $(\hbar^n \rightarrow \hbar)$ -berechenbar.

So weit, so langweilig, deshalb:

8.1 Überleitung

Zurück zur interessanteren Frage der effektiven Maximierung *beliebiger* stetiger Zielfunktionen über einem Kompaktum! Der noch fehlende Schritt dahin ist (Lemma 5.5) die ψ^n -Berechnung des Zulässigkeitsbereichs $K \subseteq [-1, +1]^n$ unter Verwendung der wesentlichen Voraussetzung, daß dieser volldimensional ist. Dank der Vorarbeiten in Kapitel 7 sieht man leicht, daß dann jede *einzelne* der endlich vielen linearen Randbedingungen H_i^+ aus Definition 4.1 berechnet werden kann:

Proposition 8.5 *Die Abbildung*

$$(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \ni (a, \beta) \mapsto H^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : a^T \cdot x \leq \beta\} \in \mathcal{A}^n$$

ist $(\rho^{n+1} \rightarrow \psi^n)$ -berechenbar.

Beweis: Analog zum Beweis von Proposition 6.5 läßt sich H^+ als Bild *und Urbild* einer berechenbaren Menge unter einer berechenbaren Funktion schreiben:

Bestimme gemäß Theorem 7.8 eine affine Basis $(x_0; x_1, \dots, x_{n-1})$ des LGS $a^T \cdot x = \beta$ mit $\text{rank}(a) = 1$. Dann ist $H^+ = \overline{f[[0, \infty)^{n-1}]} = g^{-1}[[0, \infty)]$ für $f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) := x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}$ und $g(x) := \beta - a^T \cdot x$. Nun benutze Lemma 6.9a und b). \square

Leider hilft dies vorerst auch nicht weiter, denn zwar gilt $L(A, b) = \bigcap_{i=1}^m H_i^+$, Durchschnitt ist aber keine ψ^n -berechenbare Operation.

Man wünscht sich daher einen Berechenbarkeitsbegriff

- für *volldimensionale* abgeschlossene Mengen,
- bei dem die Halbräume H^+ weiterhin effektiv von (A, b) abhängen,
- der stärker ist als ψ^n (um nämlich Lemma 5.5 anwenden zu können)
- und bezüglich dessen "Durchschnitt" berechenbar wird.

Obwohl wir uns am Linearen Programmieren orientieren, ist der erste Wunsch nicht auf Mengen der Form $L(A, b)$ — also Polytope — beschränkt. Interesse besteht vielmehr an einer Berechenbarkeitstheorie auch für nichtkonvexe und sogar unzusammenhängende Mengen. Das folgende Kapitel stellt hierzu eine passende Verallgemeinerung des Begriffs "volldimensional" vor: *reguläre* Mengen. Für sie werden systematisch die verschiedenen in der Literatur betrachteten Berechenbarkeitsbegriffe verglichen. Dann wählen wir daraus den 'besten' (ξ) aus und erhalten am Ende (Theorem 9.28) u.a. folgendes

Ergebnis 8.6 *Sei $f : [-1, +1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Zielfunktion. Seien die Randbedingungen $g_1, g_2, \dots, g_m : [-1, +1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils stetig und offen. Sei weiterhin der durch letztere induzierte Zulässigkeitsbereich $K := \{x \mid g_i(x) \geq 0 \forall i\} \subseteq [-1, +1]^n$ regulär.*

Bei $[\rho^n \rightarrow \rho^{m+1}]$ -Eingabe von (f, g_1, \dots, g_m) ist dann $\max f[K]$ uniform ρ -berechenbar.

Dies beinhaltet Lemma 4.4 über die gewöhnliche Lineare Programmierung, denn für 0-Zeilensfreie Matrix A ist jedes $g_i : x \mapsto b_i - \langle a_i, x \rangle$ eine offene Abbildung. Außerdem beweist es, zusammen mit Theorem 2.22 und der Skalierungsmethode aus Kapitel 5, das Anfangs erwähnte (nichtuniforme!) Ergebnis 1.1.

Ich möchte darauf hinweisen, daß die in Kapitel 7 eingesetzten Algorithmen zur Lösung dieses Optimierungsproblems auf Ergebnissen der Linearen Algebra (Anhang B.2) beruhen; im folgenden und zum Beweis des obigen Ergebnis' werden jedoch topologische Argumente deutlich überwiegen.

9 Reguläre Mengen

Dieses Kapitel entspricht weitgehend der Arbeit [92]. Es geht gleich *in medias res* mit der

Definition 9.1 *Eine Menge $R \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **regulär**, falls sie mit dem topologischen Abschluß ihres Inneren übereinstimmt: $\overline{R^\circ} = R$. Die Klasse aller solcher R sei mit \mathfrak{R}^d bezeichnet.*

Abbildung 9 erläutert die Bedingung " $\overline{R^\circ} = R$ ". Anschaulich bedeutet sie, daß R keine niedrigdimensionalen Teile (im \mathbb{R}^2 z.B. Punkte oder Linien) enthält. Dies generalisiert die Volldimensionalität konvexer Mengen:

Proposition 9.2 *Eine nichtleere konvexe abgeschlossene Menge $R \subseteq \mathbb{R}^d$ ist regulär dann und nur dann, wenn sie einen inneren Punkt besitzt: $\overline{R^\circ} = R \iff R^\circ \neq \emptyset$*



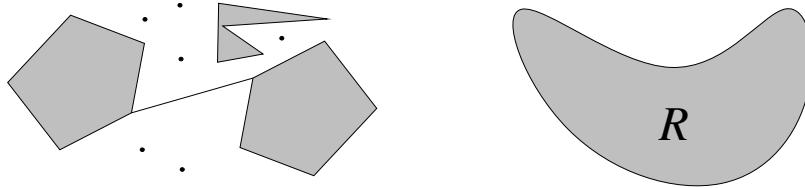


Abbildung 9: EINE NICHT-REGULÄRE UND EINE REGULÄRE MENGE.

Beweis: Siehe Abschnitt 9.6... □

Reguläre Mengen werden im *Computer Aided Engineering* (CAE) als mathematisches Modell eingesetzt [26]: im \mathbb{R}^3 repräsentieren sie so die Eigenschaft physikalischer Objekte (wie z.B. Schrauben oder Lager), keine Punkte, Linien oder Flächen sondern ‘Körper’ zu sein. Dafür gelten, wie sich herausstellen wird, die meisten negativen Resultate aus Kapitel 5 bei regulären Mengen *nicht* mehr, beispielsweise ist die Durchschnittsoperation berechenbar! Hier einige weitere Charakterisierungen regulärer Mengen, illustriert durch Abbildung 10:

Proposition 9.3 Für eine abgeschlossene Menge $R \subseteq \mathbb{R}^d$ sind äquivalent:

- a) R ist regulär, d.h. $R = \overline{R^\circ}$;
- b) $R = \overline{U}$ für irgendein offenes $U \subseteq \mathbb{R}^d$;
- c) $R = \overline{A^\circ}$ für irgendein abgeschlossenes $A \subseteq \mathbb{R}^d$;
- d) $d_R = d_{R^\circ}$ mit der Distanzfunktion aus Gleichung (5.1) von Seite 38;

Beweis: Siehe Abschnitt 9.6... □

Abbildung 10: OFFENES U MIT $R = \overline{U}$ UND ABGESCHLOSSENES A MIT $R = \overline{A^\circ}$.

Formal ist \mathfrak{R}^d eine echte Unterklasse von \mathfrak{A}^d ; es gibt natürlich, wie Abbildung 9 links zeigt, abgeschlossene Mengen welche nicht regulär sind. Andererseits ist der Unterschied zwischen $A \in \mathfrak{A}^d$ und seiner Regularisierung $R := \overline{A^\circ} \in \mathfrak{R}^d$ eine *nirgends dichte* Menge, ist also in Praxis durch Messung nicht unterscheidbar.

Einige Abgeschlossenheitseigenschaften der Klasse der regulären Mengen:

Proposition 9.4 a) Sind $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}^d$, so auch $R_1 \cup R_2 \in \mathfrak{R}^d$.

b) Ist $R_i \in \mathfrak{R}^d$ für jedes $i \in I$, so $\overline{\bigcup_{i \in I} R_i} \in \mathfrak{R}^d$.

c) Ist $R \in \mathfrak{R}^d$, so auch das abgeschlossene Komplement $\overline{\mathbb{R}^d \setminus R}$.

d) Sei $R \in \mathfrak{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und offen. Dann ist $g^{-1}[R] \in \mathfrak{R}^n$.

e) Sei $R \in \mathfrak{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, offen und abgeschlossen. Dann ist $f[R] \in \mathfrak{R}^m$.

f) Sei $R \in \mathfrak{R}^n$ beschränkt, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und offen. Dann ist auch $f[R] \in \mathfrak{R}^m$ und beschränkt.

Die Voraussetzungen an g bzw. f sind jeweils scharf.

Der Durchschnitt zweier regulärer Mengen ist im allgemeinen nicht regulär.

Man erkennt bereits hier die Bedeutung offener Abbildungen im Zusammenhang mit regulären Mengen. Dazu gehören beispielsweise alle surjektiven $f : x \mapsto A \cdot x + b$. Offen ist aber auch, wie man in der komplexen Analysis (Funktionentheorie) lernt, jedes nichtkonstante differenzierbare $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

9.1 Gebräuchliche Darstellungen

Das Ende von Kapitel 4 erwähnte mehrere Publikationen, die der Rekursiven Geometrie zuzurechnen sind. Jede führte jedoch ihre eigene Art der Kodierung von Mengen ein. Auch wenn die meisten Arbeiten nur den konvexen volldimensionalen Fall betrachten, funktionieren ihre Kodierungen ebenso für beliebige reguläre Mengen. In der Sprache von TTE: es sind *Darstellungen* von \mathfrak{R}^d . Die ersten kennen wir bereits:

Definition 5.2 (Ge/Nerode'1994) Die reguläre Menge $R \subseteq \mathbb{R}^d$ ist *Turing located*, falls ihre Distanzfunktion d_R gemäß Gleichung (5.1) ($\mathsf{P}^d \rightarrow \mathsf{P}$)-berechenbar ist. Jeder $[\mathsf{P}^d \rightarrow \mathsf{P}]$ -Name von $d_R : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ ist ein ψ^d -Name für R .

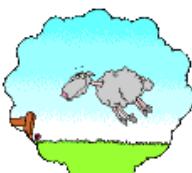
Bei den nächsten Darstellungen für \mathfrak{R}^d ist ein Name jeweils eine Funktionen über rationalen Zahlen, kodiert durch ihre abzählbare Wertetabelle.

Definition 9.5 (Kummer/Schäfer'1995) Ein *weak membership test* für die reguläre Menge $R \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine partielle Funktion $\tau^d : \subseteq \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+ \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$\overline{B}(x, r) \subseteq R^\circ \implies \tau^d(x, r) = 1, \quad \overline{B}(x, r) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus R \implies \tau^d(x, r) = 0$$

Anschaulich: Für rationale Punkte x , welche ‘tief’ (bis auf Abstand r) in R liegen, muß der Test ‘Ja’ antworten; für solche, welche mindestens r weit weg von R liegen, muß er ‘Nein’ antworten; dazwischen, d.h. auf einem Streifen der Breite r um den Rand von R , liegt sein Ermessensspielraum: ‘Ja’, ‘Nein’ oder ‘ \perp ’, d.h. Divergenz.

Man sieht leicht, daß es zu jedem $R \in \mathfrak{R}^d$ einen *weak membership test* gibt. Die Abbildung $\tau^d \mapsto R$ ist also surjektiv, das heißt, eine Darstellung. Aus Mangel an griechischen Buchstaben werden wir diese Darstellung von \mathfrak{R}^d ebenfalls mit τ^d bezeichnen. Gleicher gilt für die folgenden Definitionen.



Definition 9.6 (Grötschel/Lovász/Schrijver'1988) Die reguläre Menge $R \subseteq \mathbb{R}^d$ wird durch das weak membership (WMEM-) Orakel $\omega^d : \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+ \rightarrow \{0, 1\}$ repräsentiert genau dann, wenn

$$\forall x \in \mathbb{Q}^d \forall r \in \mathbb{Q}_+ : \begin{array}{ll} \omega^d(x, r) = 1 & \implies R \cap \overline{B}(x, r) \neq \emptyset \\ \omega^d(x, r) = 0 & \implies (\mathbb{R}^d \setminus R) \cap \overline{B}(x, r) \neq \emptyset \end{array} .$$

Hier ist die Situation gewissermaßen dual zu τ : Wenn das Orakel "Ja" antwortet, so liegt x in oder zumindest nahe bei R ; wenn es "Nein" antwortet, so außerhalb von oder zumindest nicht tief in R . Das WMEM muß dabei immer eines von beidem antworten, darf also nicht divergieren! Ganz anders bei der folgenden Version, die auf Seite 553 als (iii') von [54] eingeführt wird:

Definition 9.7 (Kummer/Schäfer'1995) Der modified membership test für die reguläre Menge $R \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die Funktion

$$\mu^d : \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+ \ni (x, r) \mapsto \begin{cases} 1 & \overline{B}(x, r) \subseteq R^\circ \\ 0 & \overline{B}(x, r) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus R \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Gegenüber τ hat μ also keinen Ermessensspielraum: bei $\overline{B}(x, r) \cap \partial R \neq \emptyset$ muß es divergieren!

Definition 9.8 (Kummer/Schäfer'1995) Die (partielle) weak characteristic function $\chi^d : \subseteq \mathbb{Q}^d \rightarrow \{0, 1\}$ von $R \in \Re^d$ ist gegeben durch

$$\chi^d(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in R^\circ \\ 1 & \text{falls } x \notin R \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

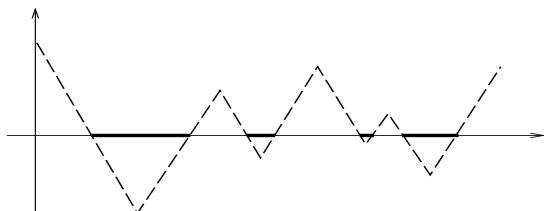
Dies entspricht der klassischen charakteristischen Funktion $\mathbf{1}_R$, jedoch eingeschränkt auf rationale Argumente $x \in \mathbb{Q}^d$; zudem ist χ partiell, muß nämlich für $x \in \mathbb{Q}^d \cap \partial R$ divergieren.

Im Zusammenhang mit dem Riemannschen Abbildungssatz (jede komplexe offene Menge ist konformes Bild der Einheitskreisscheibe) führt DEFINITION 3.13 von [43] fünf Darstellungen für offene Teilmengen des \mathbb{R}^d ein. Durch Anwendung auf das Innere R° der hier betrachteten regulären Mengen erhält man beispielsweise die folgende

Definition 9.9 (Hertling'1999) Kodiere $R \in \Re^d$ durch seine symmetrische Distanzfunktion

$$ds_R : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto \begin{cases} -d_{\partial R}(x) & \text{falls } x \in R \\ +d_{\partial R}(x) & \text{falls } x \notin R \end{cases}$$

Jeder $[\rho^d \rightarrow \rho]$ -Name von ds_R ist ein δ^d -Name für R .



Vergleiche dies mit Abbildung 3!

Definition 9.10 (Ziegler/Brattka'2001) Sei $R \subseteq \mathbb{R}^d$ regulär, $R = \overline{U}$ für beliebiges offenes U gemäß Proposition 9.3. Jeder $\psi_>^d \times \psi_>^d$ -Name für das Tupel $(R, \mathbb{R}^d \setminus U) \in \mathfrak{A}^d \times \mathfrak{A}^d$ ist ein ξ^d -Name für R .

Ein ξ -Name für R erlaubt also die effektive Approximation von unten der *beiden* Distanzfunktionen d_R und $d_{\mathbb{R}^d \setminus U}$, vergleiche Definition 5.2. Das mag auf den ersten Blick willkürlich erscheinen, wird sich aber später als die gesuchte ‘beste’ Darstellung erweisen...

Definition 9.11 (Edalat/Lieutier'2002) Zwei abzählbare rationale Folgen $((x_n, r_n), (y_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{Q}^d$, $r_n, t_n \in \mathbb{Q}_+$ sind ein π^d -Name der regulären Menge $R \subseteq \mathbb{R}^d$ genau dann, wenn

$$U \subseteq R \subseteq \mathbb{R}^d \setminus V \quad \wedge \quad \overline{U} \cup \overline{V} = \mathbb{R}^d \quad \text{für} \quad U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, r_n), \quad V := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(y_n, t_n).$$

Eine ähnliche Situation lag schon früher einmal vor in Bezug auf reelle Zahlen statt Mengen: [85, 41, 65, 48] und viele mehr hatten jeweils unabhängig von einander Berechenbarkeitsbegriffe eingeführt, die dann von [24] einem systematischen Vergleich unterzogen wurden.

Entsprechend vergleicht [92] in systematischer Weise die obigen acht Darstellungen von regulären Mengen und die von ihnen induzierten Berechenbarkeitsbegriffe. Davon handeln die nächsten beiden Unterkapitel. Zu diesem Zweck werden erst 14 ‘elementare’ Darstellungen eingeführt — jeweils sieben mit positiver und sieben mit negativer Information im Sinne von Beispiel 5.4d)+e) — aus denen die obigen acht zusammengesetzt sind. Aus dem Vergleich dieser elementaren Darstellungen untereinander ergeben sich dann unmittelbar alle Berechenbarkeitsbeziehungen zwischen den zusammengesetzten.

9.2 Elementare Darstellungen

Da reguläre Mengen per Definition abgeschlossen sind, bieten sich ganz natürlich die Darstellungen $\psi_<^d$ und $\psi_>^d$ aus Definition 5.2 an.

Andererseits ist $R \in \mathfrak{R}^d$ gemäß Definition 9.1 auch durch sein topologisches Inneres R° eindeutig bestimmt. Jede Darstellung offener Mengen $U \in \mathfrak{O}^d$ lässt sich also, ebenso wie oben $\psi_<^d$ und $\psi_>^d$ für abgeschlossene, durch Anwendung auf $U := R^\circ$ zur Darstellung regulärer Mengen verwenden.

Da offene Mengen per Definition die Komplemente abgeschlossener Mengen sind, kann man die Kodierung von $U \in \mathfrak{O}^d$ zurückführen auf die von $A = \mathbb{R}^d \setminus U$ mittels der bereits bekannten Darstellungen $\psi_<^d$ und $\psi_>^d$:

Definition 9.12 Jeder $\psi_<^d$ -Name für $\mathbb{R}^d \setminus U \in \mathfrak{A}^d$ ist ein $\theta_>^d$ -Name für $U \in \mathfrak{O}^d$; jeder $\psi_>^d$ -Name für $\mathbb{R}^d \setminus U$ ist ein $\theta_<^d$ -Name für U .

Ein $\theta_<^d$ -Name für U ermöglicht also die effektive Approximation von $d_{\mathbb{R}^d \setminus U}$ von unten, ein $\theta_>^d$ -Name die von oben. So hat die Indexvertauschung $< \leftrightarrow >$ auch ihren Grund: $\theta_<^d$ kodiert *positive*



Information über U , nämlich in Form negativer $\psi_>^d$ -Information über das Komplement $\mathbb{R}^d \setminus U$. Tatsächlich ist, analog zu Beispiel 5.4d) und e), die mengenwertige Funktion

$$F : \subseteq \mathfrak{O}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d, \quad \mathfrak{O}^d \setminus \{\emptyset\} \ni U \mapsto x \in U$$

$(\theta_<^d \rightarrow p^d)$ -berechenbar und ebenso kann man aus $\theta_>^d$ -Information über $U \neq \mathbb{R}^d$ effektiv einen Punkt $x \notin U$ finden.

Um einem Mißverständnis vorzubeugen: Im Gegensatz zur (unstetigen) charakteristischen Funktion mit $1_{\mathbb{R}^d \setminus U} = 1 - 1_U$ erfüllen die Distanzfunktionen d_U und $d_{\mathbb{R}^d \setminus U}$ keinen einfachen Zusammenhang. Insbesondere ist ein $\psi_>^d$ -Name von $\mathbb{R}^d \setminus U$ kein $\psi_<^d$ -Name von U !

Definition 9.13 Ein $\theta_<^d$ -Name für $R \in \mathfrak{R}^d$ ist ein $\theta_<^d$ -Name für $R^\circ \in \mathfrak{O}^d$;
ein $\theta_>^d$ -Name für R ist ein $\theta_>^d$ -Name für R° .

Bei der Anwendung der Darstellungen $\theta_<^d$ und $\theta_>^d$ auf reguläre Mengen wurde Proposition 9.3a) ausgenutzt, d.h. $R \in \mathfrak{R}^d$ über $R^\circ \in \mathfrak{O}^d$ kodiert. Gemäß Proposition 9.3b) könnte man R aber auch durch *irgendein* offenes U mit $\overline{U} = R$ darstellen. Tun wir das!

Definition 9.14 Ein $\bar{\theta}_<^d$ -Name für $R \in \mathfrak{R}^d$ ist ein $\theta_<^d$ -Name für ein beliebiges $U \in \mathfrak{O}^d$ mit $\overline{U} = R$;
ein $\bar{\theta}_>^d$ -Name für R ist ein $\theta_>^d$ -Name für U .

Und Proposition 9.3c) führt zu

Definition 9.15 Ein $\bar{\psi}_<^d$ -Name für $R \in \mathfrak{R}^d$ ist ein $\psi_<^d$ -Name für ein beliebiges $A \in \mathfrak{A}^d$ mit $\overline{A^\circ} = R$;
ein $\bar{\psi}_>^d$ -Name für R ist ein $\psi_>^d$ -Name für A .

Das wären schonmal je vier positive und negative elementare Darstellungen regulärer Mengen: Wir haben erst R selbst kodiert, dann R° , dann U mit $\overline{U} = R$ und schließlich A mit $\overline{A^\circ} = R$. Offenes U mit $\overline{U} = R$ zu betrachten, bringt nichts neues mehr: Es gilt stets $\overline{\overline{U}} = \overline{U}$, siehe Lemma B.1a). Bereits Definition 9.15 mag etwas weit hergeholt scheinen, ist aber tatsächlich notwendig, um die Arbeit [26] von Edalat und Lieutier in dieses Konzept einordnen zu können.

Um selbiges auch für Kummer und Schäfers weak characteristic function zu erreichen, brauchen wir jedoch noch Kodierungen offener Mengen durch Angabe einer fixierten dichten abzählbaren Teilmenge. Beispielsweise charakterisiert die Aufzählung aller rationalen $q \in U \cap \mathbb{Q}$ die offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ eindeutig.

Definition 9.16 Sei $\eta : \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^d$ eine partielle surjektive Funktion mit r.e. Definitionsbereich $\text{dom}(\eta) \subseteq \mathbb{N}$, welche im klassischen Sinn berechenbar sei; m.a.W.: zu $m \in \text{dom}(\eta)$ lassen sich effektiv $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ finden mit $\eta(m) = (p_i/q_i)_{i=1,\dots,d}$. Dann bezeichne $\vartheta_<^{\mathbb{Q}^d}$ die folgende Darstellung regulärer Mengen: ein $\vartheta_<^{\mathbb{Q}^d}$ -Name von $R \in \mathfrak{R}^d$ ist die vollständige Aufzählung aller $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m) \in R^\circ$; ein $\vartheta_>^{\mathbb{Q}^d}$ -Name von R ist ein $\vartheta_<^{\mathbb{Q}^d}$ -Name von $\overline{\mathbb{R}^d \setminus R}$, d.h. eine Aufzählung aller $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m) \notin R$.

Es ist klar, daß $\vartheta_{<}^{\mathbb{Q}^d}$ und $\vartheta_{>}^{\mathbb{Q}^d}$ tatsächlich Darstellungen sind deren uniforme Berechenbarkeiteigenschaften gar nicht von der speziellen Wahl von η' abhängen: dies rechtfertigt die von η' freie Bezeichnungsweise. Aber warum sollte man ausgerechnet \mathbb{Q}^d wählen und nicht etwa die dyadischen rationalen Zahlen $\mathbb{D}^d := \{p/2^k : p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}^d$ oder irgendeine andere abzählbare dichte Menge?

Eine solche Verallgemeinerung der Darstellungen $p_{<}$ und $p_{>}$ für reelle Zahlen findet sich übrigens in EXERCISE 4.1.11 von [87]: anstatt für $r \in \mathbb{R}$ alle $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in R^\circ$ (uniform äquivalent zu einem $p_{<}$ -Namen) bzw. $q \notin R$ (uniform äquivalent zu einem $p_{>}$ -Namen) aufzulisten mit $R := (-\infty, r] \in \mathfrak{R}$, wird dort die Aufzählung einer *beliebigen*, vorher fixierten abzählbaren dichten Menge untersucht. Dem stehen wir bei den regulären Mengen nicht nach¹⁶:

Definition 9.17 Sei $\eta : \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine $(v \rightarrow p^d)$ -berechenbare Funktion¹⁷ mit r.e. Definitionsbereich $\text{dom}(\eta) \subseteq \mathbb{N}$, dichtem Bild $\text{range}(v) = Q \subseteq \mathbb{R}^d$ und folgender Effektivitätseigenschaft für ihre Fasern: Die Menge

$$\equiv / \eta := \{(m, m') : m, m' \in \text{dom}(\eta), \eta(m) = \eta(m')\} \subseteq \mathbb{N}^2 \quad \text{sei r.e.} \quad (9.1)$$

Dann heiße η eine **dichte Aufzählung**. Ein $\vartheta_{<}^{\eta}$ -Name von $R \in \mathfrak{R}^d$ ist die vollständige Liste (der v -Namen) aller $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m) \in R^\circ$; ein $\vartheta_{>}^{\eta}$ -Name von R ist die entsprechende Liste aller $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m) \notin R$.

Für injektives η ist \equiv / η trivial: eine Diagonale. Die Bedingung (9.1) schwächt dies ab, erlaubt auch nicht-injektive dichte Aufzählungen.

Man sieht leicht, daß $\vartheta_{<}^{\eta}$ und $\vartheta_{>}^{\eta}$ die Darstellungen $\vartheta_{<}^{\mathbb{Q}^d}$ und $\vartheta_{>}^{\mathbb{Q}^d}$ verallgemeinern: Das obige $\eta' : \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^d$ ist in der Tat $(v \rightarrow p^d)$ -berechenbar und die Menge \equiv / η' rekursiv aufzählbar. Allerdings hängt $\vartheta_{<}^{\eta}$ jetzt tatsächlich effektiv von der gewählten Funktion η ab, siehe Theorem 9.22.

In Definition 9.17 fand wieder Proposition 9.3a) Verwendung. Und erneut drängen Proposition 9.3b) und c) zur Einführung weiterer Darstellungen

Definition 9.18 Sei $\eta : \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^d$ wie oben.

Ein $\overline{\vartheta}_{<}^{\eta}$ -Name von $R \in \mathfrak{R}^d$ ist eine Teilmenge $M \subseteq \text{dom}(\eta)$ mit $\overline{\eta[M]} = R$;
ein $\overline{\vartheta}_{>}^{\eta}$ -Name von R ist ein $\overline{\vartheta}_{<}^{\eta}$ -Name von $\mathbb{R}^d \setminus R$.

Ein $\overline{\vartheta}_{<}^{\eta}$ -Name von $R \in \mathfrak{R}^d$ ist eine Teilmenge $M \subseteq \text{dom}(\eta)$ mit $\overline{\overline{\eta[M]}} = R$;
ein $\overline{\vartheta}_{>}^{\eta}$ -Name von R ist ein $\overline{\vartheta}_{<}^{\eta}$ -Name von $\mathbb{R}^d \setminus R$.

Im Gegensatz zu $\vartheta_{<}^{\eta}$ und $\overline{\vartheta}_{<}^{\eta}$ stellt bei $\overline{\vartheta}_{<}^{\eta}$ also *jedes* $M \subseteq \text{dom}(\eta)$ die Kodierung einer regulären Menge dar. Auch intuitiv ist $\overline{\vartheta}_{<}^{\eta}$ eine sehr schwache Darstellung, denn ein diesbezüglicher Name darf unbeschränkt, ja sogar unendlich viele 'Fehler' machen: die Aufzählung *zusätzlicher* Punkte m' mit $\eta(m') \notin R$ 'stört' nicht, solange deren Bild $\eta[M']$ nirgends dicht bleibt. Wir werden in Theorem 9.20 sehen, daß ähnliches auch bei $\overline{\vartheta}_{<}^d$ gilt; analog für $\overline{\vartheta}_{>}^{\eta}$ bzw. $\overline{\theta}_{>}^d$.

¹⁶Ein wesentlicher Unterschied jedoch ist, daß ϑ_v diese Menge in fest vorgegebener Reihenfolge aufzählt.

¹⁷sozusagen eine Folge uniform-berechenbarer reeller Vektoren...



9.3 Vergleich der Darstellungen

Wie bereits erwähnt liegt das Ziel in einem Vergleich der acht Darstellungen (und ihrer induzierten Berechenbarkeiten) aus Abschnitt 9.1, die [37, 54, 38, 43, 90, 26] betrachtet hatten. Auf dem Weg dahin dienen die 14 in Abschnitt 9.2 eingeführten elementaren Darstellungen als Hilfsmittel: Ein erstes, zentrales Ergebnis des vorliegenden Abschnitts lautet, daß jede der acht gebräuchlichen Darstellungen uniform äquivalent ist zum **Meet** zweier elementarer Darstellungen; vergleiche Definition 2.17.

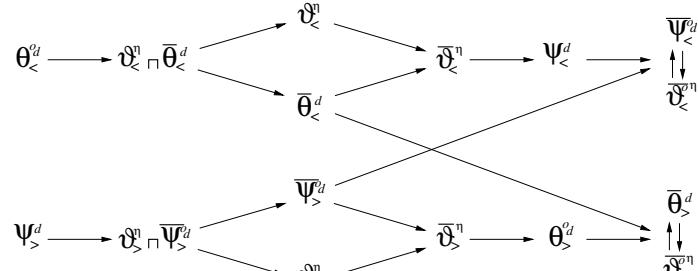
Theorem 9.19

- $$\begin{array}{ll} a) \omega^d \equiv \psi_<^d \sqcap \theta_>^{\circ d} & e) \pi^d \equiv \bar{\theta}_<^d \sqcap \bar{\psi}_>^d \\ b) \tau^d \equiv \psi_<^d \sqcap \theta_>^{\circ d} & f) \xi^d \equiv \bar{\theta}_<^d \sqcap \psi_>^d \\ c) \mu^d \equiv \theta_<^{\circ d} \sqcap \psi_>^d & g) \psi^d \equiv \psi_<^d \sqcap \psi_>^d \\ d) \chi^d \equiv \vartheta_<^{\circ d} \sqcap \vartheta_>^{\circ d} & h) \delta^d \equiv \theta_<^{\circ d} \sqcap \psi_>^d \end{array}$$

Wie bereits in Abschnitt 2.5 angekündigt, läßt sich jede der gebräuchlichen Darstellungen also aufspalten in einen Teil, der positive Information kodiert, und einen Teil mit negativer Information. Es genügt daher, die elementaren Darstellungen mit einander zu vergleichen, um daraus die Berechenbarkeitsbeziehungen zwischen den eigentlich gebräuchlichen Darstellungen deduzieren zu können. Dies leistet das folgende

Theorem 9.20 Sei $\eta : \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine dichte Aufzählung; bezeichne \mathfrak{BR}^d die Klasse aller in $[-1, +1]^d$ enthaltenen (effektiv beschränkten) regulären Mengen.

Dann gelten zwischen den elementaren Darstellungen aus Abschnitt 9.2 die rechts skizzierten Konvertierbarkeitsrelationen; ein Pfeil von α nach β (möglicherweise über Zwischenstationen) bedeutet $\alpha \preccurlyeq \beta$, die Abwesenheit eines gerichteten Weges von α nach β bedeutet $\alpha|_{\mathfrak{BR}^d} \not\preccurlyeq_t \beta|_{\mathfrak{BR}^d}$, d.h. eine Konvertierung ist nicht nur nicht berechenbar



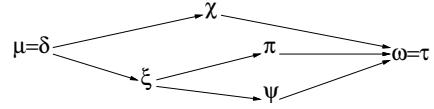
sondern auch unstetig, selbst wenn man nur effektiv beschränkte reguläre Mengen zuläßt. Haben zudem α und β beide Index " $<$ ", so gilt sogar die noch stärkere Aussage $\alpha \sqcap \psi_>^d|_{\mathfrak{BR}^d} \not\preccurlyeq_t \beta|_{\mathfrak{BR}^d}$; m.a.W.: selbst mit stärkster negativer Zusatzinformation ist die Konvertierung von α nach β noch immer nicht stetig. Analog gilt $\alpha \sqcap \theta_<^{\circ d}|_{\mathfrak{BR}^d} \not\preccurlyeq_t \beta|_{\mathfrak{BR}^d}$, falls kein gerichteter Weg von α zu β führt und α wie β beide Index " $>$ " tragen.

Beweis: Der Beweis setzt sich zusammen aus einer Vielzahl von positiven und negativen Reduzierbarkeitsresultaten (z.B. $\bar{\vartheta}_<^n \preccurlyeq \psi_<^d$ und $\psi_<^d \sqcap \psi_>^d \not\preccurlyeq_t \bar{\vartheta}_<^n$) und ist seiner Gesamtlänge und Komplexität wegen in einen eigenen Abschnitt 9.7 verbannt. \square

Etwas überraschend kam (nicht nur) für den Autor die Erkenntnis, daß positive und negative Information hier nicht immer von einander unabhängig sind: die starken Darstellungen $\theta_{<}^d$ und $\bar{\theta}_{<}^d$ lassen sich uniform in die schwachen $\vartheta_{>}^{\eta}$ bzw. $\bar{\theta}_{>}^d$ konvertieren; analog von $\psi_{>}^d$ und $\bar{\psi}_{>}^d$ nach $\vartheta_{<}^{\eta}$ bzw. $\bar{\psi}_{<}^d$. In der Tat sind letztere beide *überaus* schwach: Sie erlauben es nämlich im allgemeinen nicht, für nichtleeres $R \in \mathfrak{R}^d$ den ρ^d -Namen eines Punktes $x \in R$ zu deduzieren; für die anderen elementaren Darstellungen mit positivem Index $<$ geht dies, da sie mindestens so stark sind wie $\psi_{<}^d$ (Beispiel 5.4d). Analog kann man zwar mit $\theta_{>}^d$ -Information über $R \in \mathfrak{R}^d \setminus \{\mathbb{R}^d\}$ effektiv einen Punkt $x \notin R$ finden, nicht jedoch mit der überaus schwachen $\vartheta_{>}^{\eta}$ - bzw. $\bar{\theta}_{>}^d$ -Information.

Doch zurück zum eigentlichen Ziel: dem Vergleich der acht Darstellungen aus Abschnitt 9.1.

Folgerung 9.21 Für die Darstellungen aus Abschnitt 9.1 ergibt sich die rechts skizzierte Situation.



Beweis: Mittels Theorem 9.19 und Theorem 9.20 überprüft man leicht für jeden der Pfeile das Zutreffen der behaupteten uniformen Reduzierbarkeiten, z.B.

$$\theta_{<}^d \stackrel{9.20}{\preccurlyeq} \vartheta_{<}^{\eta'}, \quad \psi_{>}^d \stackrel{9.20}{\preccurlyeq} \vartheta_{>}^{\eta'} \quad \Rightarrow \quad \mu^d \stackrel{9.19}{\equiv} \theta_{<}^d \sqcap \psi_{>}^d \preccurlyeq \vartheta_{<}^{\eta'} \sqcap \vartheta_{>}^{\eta'} \stackrel{9.19}{\equiv} \chi^d .$$

Ebenso ergibt sich das *Fehlen* von Pfeilen aus den *verstärkten* Nichtreduzierbarkeitsaussagen von Theorem 9.20, z.B. $\bar{\theta}_{<}^d \sqcap \psi_{>}^d \not\stackrel{9.20}{\preccurlyeq}_t \theta_{<}^d \quad \Rightarrow \quad \xi^d \not\stackrel{9.20}{\preccurlyeq}_t \mu^d . \quad \square$

In Theorem 9.20 wurde eine beliebige aber fixierte dichte Aufzählung $\eta : \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^d$ betrachtet. Es stellte sich heraus, daß die Konvertierbarkeitsrelationen von $\vartheta_{<}^{\eta}$, $\vartheta_{>}^{\eta}$, $\bar{\vartheta}_{<}^{\eta}$, $\bar{\vartheta}_{>}^{\eta}$, $\bar{\vartheta}_{<}^{\eta}$ und $\bar{\vartheta}_{>}^{\eta}$ zu den anderen elementaren Darstellungen gar nicht von η abhängen. Das betrifft jedoch nicht die Beziehungen *untereinander* beispielsweise der $\vartheta_{<}^{\eta}$ für verschiedene solche η . Diese bilden nämlich eine komplette unendliche Hierarchie für sich:

Theorem 9.22 Seien η_1, η_2 dichte Aufzählungen mit $Q_i = \text{range}(\eta_i) \subseteq \mathbb{R}^d$.

- a) $\vartheta_{<}^{\eta_1} \preccurlyeq \vartheta_{<}^{\eta_2} \iff \eta_1 \succcurlyeq \eta_2$.
- b) $\vartheta_{<}^{\eta_1} \not\preccurlyeq_t \vartheta_{<}^{\eta_2} \iff Q_1 \supsetneq Q_2$.
- c) $\eta_1 \preccurlyeq \eta_2 \implies \bar{\vartheta}_{<}^{\eta_1} \preccurlyeq \bar{\vartheta}_{<}^{\eta_2}$.
- d) $\bar{\vartheta}_{<}^{\eta_1} \equiv \bar{\vartheta}_{<}^{\eta_2}$.

Analoges gilt für $\vartheta_{>}^{\eta}$, $\bar{\vartheta}_{>}^{\eta}$ und $\bar{\vartheta}_{>}^{\eta}$.

Beweis: Siehe Abschnitt 9.6 \square

Wir haben also eine analoge Situation zu Lemma 2.24: dort führten uniform-äquivalente Berechenbarkeitsbegriffe $v_1 \equiv v_2$ der rationalen Zahlen zu uniform-äquivalenten 'abgeleiteten' Darstellungen der reellen Zahlen $\rho_{<}$ und $\rho_{>}$. Hier impliziert uniforme Äquivalenz $\eta_1 \equiv \eta_2$ der dichten Aufzählungen ebensolche für die jeweils abgeleiteten Darstellungen regulärer Mengen $\vartheta_{<}$.



und $\vartheta_>$ sowie deren Varianten. Beachte, daß $\eta_1 \succcurlyeq \eta_2$ sowieso nur für $\text{range}(\eta_1) \supseteq \text{range}(\eta_2)$ möglich ist, die Voraussetzungen von $\vartheta_{<}^{\eta_1} \preccurlyeq \vartheta_{<}^{\eta_2}$ in a) also tatsächlich stärker sind als die in b) von $\vartheta_{<}^{\eta_1} \preccurlyeq_t \vartheta_{<}^{\eta_2}$. Dies illustriert auch sehr schön, wie Stetigkeit b) und klassische diskrete Berechenbarkeit beide eingehen in die Berechenbarkeitstheorie kontinuierlicher Objekte a). Die große Ausnahme bildet d), wo die überaus schwache Darstellung $\vartheta_{<}^{\eta}$ (bis auf berechenbare Äquivalenz) gar nicht von der jeweiligen dichten Aufzählung η abhängt.

9.4 Berechenbare Operatoren

Im Hinblick auf den Beweis von Ergebnis 8.6, dem diese ganzen Überlegungen ja dienen, suchen wir einen Berechenbarkeitsbegriff für reguläre Mengen mit den folgenden Eigenschaften:

- i) Er ist, wie die Klasse der regulären Mengen selbst (Proposition 9.4d), abgeschlossen unter Urbildern stetiger offener Funktionen, d.h. die Abbildung $(g, R) \mapsto g^{-1}[R]$ ist berechenbar.
- ii) Der endliche Durchschnitt $(R_1, \dots, R_m) \mapsto \bigcap_{i=1}^m R_i$ soll für solche Eingaben berechenbar sein, bei denen das Ergebnis selbst wieder regulär ist.
- iii) Er muß mindestens so stark sein wie ψ^d .

Mit i) kann man dann nämlich für jede Randbedingung g_i individuell die Menge $K_i = g_i^{-1}([0, \infty])$ bestimmen, mittels ii) den Zulässigkeitsbereich $K = \bigcap_{i=1}^m K_i$ berechnen, wegen iii) dessen ψ^d -Namen deduzieren, um schließlich Proposition 5.6 anzuwenden.

Folgerung 9.21 entnimmt man unmittelbar, daß nur drei Kandidaten iii) erfüllen: μ (bzw. δ), ξ und ψ selbst. Letzteres scheidet sofort aus:

Beispiel 9.23 *Der reguläre Durchschnitt zweier regulärer Mengen*

$$\{(R_1, R_2) \in \mathfrak{R}^d \times \mathfrak{R}^d : R_1 \cap R_2 \in \mathfrak{R}^d\} \ni (R_1, R_2) \mapsto R_1 \cap R_2 \in \mathfrak{R}^d \quad (9.2)$$

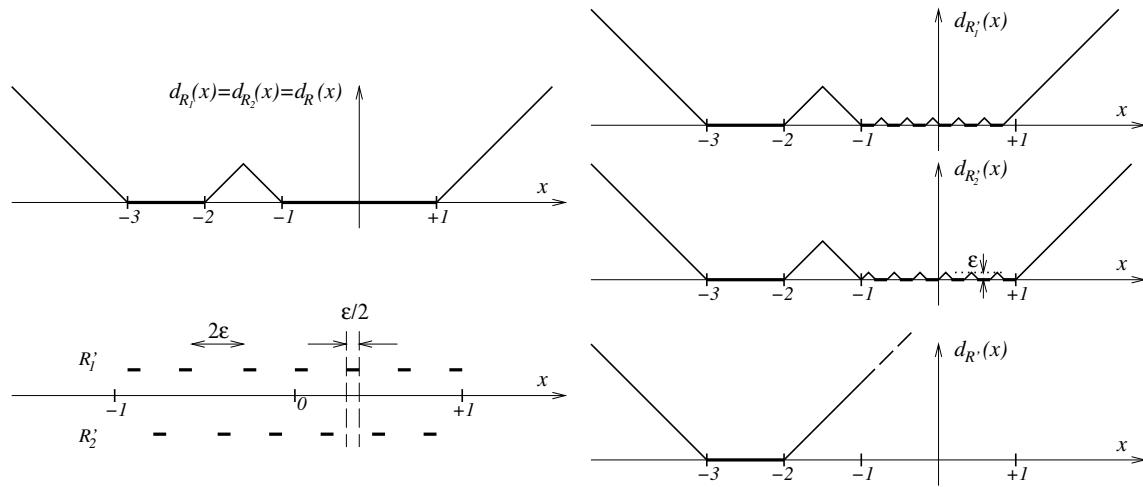
ist im allgemeinen nicht $(\psi^d \times \psi^d \rightarrow \psi^d)$ -stetig geschweige denn -berechenbar.

Beweis: Wir erinnern an Definitionen 5.2 und 2.21. Sei $d = 1$, $R_1 = [-3, -2] \cup [-1, 1] = R_2$. Eine angenommene ψ^d -Berechnung von $R = R_1 \cap R_2 = [-3, -2] \cup [-1, 1]$ würde, nachdem sie — für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ — Approximationen von $d_{R_1}|_{[-n, +n]}$ und $d_{R_2}|_{[-n, +n]}$ bis auf ε kennt, eine Approximation von $d_R|_{[-1, +1]} \equiv 0$ bis auf $\delta = \frac{1}{2}$ ausgeben.

Jetzt ändere die Eingabe wie folgt ab (Abbildung 11): Wähle $K = \lceil \frac{1}{2\varepsilon} \rceil$ und

$$R'_1 := [-3, -2] \cup \bigcup_{k=-K}^{+K} [4k \cdot \frac{\varepsilon}{2}, (4k+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2}], \quad R'_2 := [-3, -2] \cup \bigcup_{k=-K}^{+K} [(4k+2) \cdot \frac{\varepsilon}{2}, (4k+3) \cdot \frac{\varepsilon}{2}] .$$

Dann unterscheidet sich d_{R_1} von $d_{R'_1}$ höchstens um ε ; analog d_{R_2} von $d_{R'_2}$, die von der Typ-2 Maschine bisher gelesenen Approximationen treffen also für R_1, R_2 ebenso zu wie für R'_1, R'_2 . Für die reguläre Menge $R' = R'_1 \cap R'_2 = [-3, -2]$ hingegen weicht $d_{R'}|_{[-1, +1]}(x) = x + 2$ um mehr als $\delta = \frac{1}{2}$ ab von $d_R|_{[-1, +1]} \equiv 0$: Widerspruch. \square

Abbildung 11: DER REGULÄRE DURCHSCHNITT IST ψ^d -UNSTETIG.

Übrig bleiben also μ (bzw. δ) und ξ . Tatsächlich erfüllen beide die Bedingungen i) und ii):

Proposition 9.24 Der reguläre Durchschnitt gemäß Gleichung (9.2) zweier (bzw. allgemeiner: m vieler¹⁸) regulärer Mengen ist $(\mu^{d \times m} \rightarrow \mu)$ - und $(\xi^{d \times m} \rightarrow \xi)$ -berechenbar.
Urbild regulärer Mengen unter offenen stetigen Funktionen

$$\{g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : g \text{ offen}\} \times \mathfrak{R}^m \ni (g, R) \mapsto g^{-1}[R] \in \mathfrak{R}^n$$

ist $([\rho^n \rightarrow \rho^m] \times \mu^m \rightarrow \mu^n)$ - und $([\rho^n \rightarrow \rho^m] \times \xi^m \rightarrow \xi^n)$ -berechenbar.

Unter diesen beiden Kandidaten hat ξ einen leichten Vorteil, weil es die schwächere¹⁹ Darstellung ist, also 'mehr' reguläre Mengen die Voraussetzung der ξ -Berechenbarkeit erfüllen als die der μ -Berechenbarkeit. Den endgültigen Ausschlag geben jedoch die Effektivitätseigenschaften von Proposition 9.4a):

Proposition 9.25 Vereinigung

$$\mathfrak{R}^d \times \mathfrak{R}^d \ni (R_1, R_2) \mapsto R_1 \cup R_2 \in \mathfrak{R}^d$$

ist nicht $(\mu^d \times \mu^d \rightarrow \mu^d)$ -stetig geschweige denn -berechenbar.

Sie ist jedoch sehr wohl $(\xi^d \times \xi^d \rightarrow \xi^d)$ -berechenbar,

Ein Vorteil von μ^d gegenüber ξ^d sei andererseits nicht verschwiegen:

¹⁸Die Berechenbarkeit endlicher Durchschnitte folgt nicht induktiv aus der des binären, da Zwischenergebnisse in der Regel nicht regulär sind: $R_1 := [-1, 0] \cup [10, 11]$, $R_2 := [0, 1] \cup [10, 11]$, $R_3 := [-2, -1] \cup [1, 2] \cup [10, 11]$.

¹⁹Es sei nochmals betont, daß $\mu \preccurlyeq \xi$ und die $(\mu^m \rightarrow \mu^n)$ -Berechenbarkeit von $R \mapsto g^{-1}[R]$ nicht automatisch deren $(\xi^m \rightarrow \xi^n)$ -Berechenbarkeit impliziert: zwar braucht man bei letzterer nur schwächere Information auszugeben, hat aber als Eingabe auch blos schwache Daten zur Verfügung!



Proposition 9.26 *Abgeschlossenes Komplement*

$$\mathfrak{R}^d \ni R \mapsto \overline{\mathbb{R}^d \setminus R} \in \mathfrak{R}^d$$

gemäß Proposition 9.4c) ist $(\mu^d \rightarrow \mu^d)$ -berechenbar aber nicht $(\xi^d \rightarrow \xi^d)$ -stetig.

9.5 Nichtlineare Optimierung

Wir werden uns also im folgenden auf die Darstellung ξ^d regulärer Mengen konzentrieren und den davon induzierten Berechenbarkeitsbegriff. Wegen Proposition 9.24 und Proposition 9.25 sind dann nämlich beliebige endliche monotone Boolesche Kombinationen regulärer Mengen, sofern das Ergebnis wieder regulär ist, uniform berechenbar.

Definition 9.27 *Wir identifizieren die Zahlen 0 und 1 mit den Wahrheitswerten false und true. Eine monotone Boolesche Funktion ist eine Abbildung*

$$S : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\} \quad \text{mit} \quad \left((\forall i = 1 \dots n : x_i \leq x'_i) \implies S(x_1, \dots, x_n) \leq S(x'_1, \dots, x'_n) \right).$$

Jede Boolesche Funktion induziert kanonisch eine Mengenfunktion

$$S : (2^X)^n \rightarrow 2^X, \quad (A_1, \dots, A_n) \mapsto \{x \in X : S(x \in A_1, \dots, x \in A_n)\}.$$

Beispielweise gehört zu $S(x, y) = x \wedge y$ die Mengenfunktion $S(A, B) = A \cap B$; analog für \vee und \cup . Durch Induktion nach n und de Morgansche Regeln ('Ausmultiplizieren') sieht man einfach, daß jede monotone Boolesche Funktion eine *konjunktive Normalform*

$$S(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bigvee_{i \in I_j} x_i$$

besitzt mit endlichen Indexmengen $J \subseteq \mathbb{N}$ und $I_j \subseteq [n]$.

Theorem 9.28 *Sei S eine monotone Boolesche Funktion für m Argumente. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Zielfunktion. Seien $g_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{d_1}, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{d_m}$ jeweils stetig und offen; seien $R_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1}, \dots, R_m \subseteq \mathbb{R}^{d_m}$ jeweils regulär. Bezeichne $K_i := g_i^{-1}[R_i]$ und sei $K = S(K_1, \dots, K_m)$ im Sinne von Definition 9.27. Falls dieses K regulär ist und eine der folgenden Bedingungen erfüllt*

$$a) \quad K \subseteq [-1, +1]^n \quad \text{oder} \quad b) \quad K \neq \emptyset \quad \text{ist zusammenhängend,}$$

dann ist, bei

- ξ^{d_i} -Eingabe der R_i ,
- $[\rho^n \rightarrow \rho^{d_i}]$ -Eingabe der g_i ,
- $[\rho^n \rightarrow \rho]$ -Eingabe von f

die Menge K uniform ξ^b -berechenbar und die Zahl $\max f[K]$ uniform ρ -berechenbar. Formal:
Sei

$$\begin{aligned} \text{RB}_a &:= \left\{ (R_1, \dots, R_m, g_1, \dots, g_m) \mid R_i \in \mathfrak{R}^{d_i}, g_i \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_i}) \text{ offen,} \right. \\ &\quad \left. S(g_1^{-1}[R_1], \dots, g_m^{-1}[R_m]) \subseteq [-1, +1]^n \text{ regulär} \right\}, \\ \text{RB}_b &:= \left\{ (R_1, \dots, R_m, g_1, \dots, g_m) \mid R_i \in \mathfrak{R}^{d_i}, g_i \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_i}) \text{ offen,} \right. \\ &\quad \left. \emptyset \neq S(g_1^{-1}[R_1], \dots, g_m^{-1}[R_m]) \in \mathfrak{R}^n \text{ zusammenhängend} \right\}. \end{aligned}$$

Dann ist die Abbildung

$$(R_1, \dots, R_m, g_1, \dots, g_m, f) \mapsto \max f[S(g_1^{-1}[R_1], \dots, g_m^{-1}[R_m])] \in \mathbb{R}$$

auf $\text{RB}_a \times C(\mathbb{R}^n)$ und auf $\text{RB}_b \times C(\mathbb{R}^n)$ jeweils $(\xi^{d_1} \times \dots \times \xi^{d_m} \times [\rho^n \rightarrow \rho^{d_1}] \times \dots \times [\rho^n \rightarrow \rho^{d_m}] \times [\rho^n \rightarrow \rho] \rightarrow \rho)$ -berechenbar.

Beweis: Wegen Proposition 9.24 sind alle K_i uniform ξ^n -berechenbar; wegen Proposition 9.25 auch alle endlichen Vereinigungen $\bigcup_{i \in I} K_i$, $I \subseteq [m]$. Da das Ergebnis K als regulär vorausgesetzt wurde, ist auch der endliche Schnitt $K = \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} K_i$ berechenbar: Proposition 9.24. Aus dem ξ^n -Namen von K kann man (Folgerung 9.21) einen ψ^n -Namen ermitteln. Im Fall a) wende nun Lemma 5.5 an, im Fall b) Proposition 5.6. \square

Ergebnis 8.6 folgt nun trivial aus dem obigen Theorem, indem man $S(K_1, \dots, K_m) := \bigcup_{i=1}^m K_i$ und $R_i := [0, \infty)$ mit $d_i = 1$ betrachtet.

Interessanterweise kommen dort die Darstellungen ξ^d oder ψ^d gar nicht mehr vor: sie spielen sozusagen die Rolle von Katalysatoren, um die Berechenbarkeit des Zulässigkeitsbereichs K als Urbild und Durchschnitt regulärer Mengen bzw. von $\max f[K]$ sicherzustellen.

9.6 Übrige Beweise

Beweis von Proposition 9.2: Gelte $R^\circ \neq \emptyset$. Dann existiert ein $p \in R^\circ$ und $r > 0$ mit $B(p, r) \subseteq R$. Wir zeigen: $R \subseteq \overline{R^\circ}$. Die umgekehrte Inklusion gilt immer, siehe Lemma B.2b).

Sei $x \in R$ und (durch Translation $R \mapsto R' := -x + R$) o.B.d.A. $x = 0$. Weil R als konvex vorausgesetzt ist, ist $x_n := p/n \in R$; ja sogar $B(x_n, r/n) \subseteq R$. Daher gilt $x_n \in R^\circ$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit $x = \lim x_n \in \overline{R^\circ}$. \square

Beweis von Proposition 9.3:

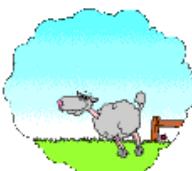
a) \Rightarrow b) $U := R^\circ$ \checkmark

b) \Rightarrow c) $A := \overline{U}$, dann $\overline{A^\circ} = R$ wegen Lemma B.2d);

c) \Rightarrow a) gilt wegen Lemma B.2d).

d) Allgemein gilt $d_X = d_Y \iff \overline{X} = \overline{Y}$.

\square



Beweis von Proposition 9.4:

- a) Gemäß Proposition 9.3 ist $R_1 = \overline{G}$ und $R_2 = \overline{H}$ für offene $G, H \subseteq \mathbb{R}^d$. Damit ist auch $G \cup H$ eine offene Menge, deren Abschluß (Lemma B.1g) $R_1 \cup R_2$ ergibt.
- b) Sei $R_i = \overline{U_i}$, $R = \overline{\bigcup U_i}$. Dann gilt $R = \overline{U}$, $U := \bigcup U_i$. Denn $\bigcup \overline{U_i} \supseteq \bigcup U_i$ impliziert $\overline{\bigcup \overline{U_i}} \supseteq \overline{\bigcup U_i}$; und aus $\bigcup \overline{U_i} \subseteq \overline{\bigcup U_i}$ gemäß Lemma B.1f) folgt $\overline{\bigcup \overline{U_i}} \subseteq \overline{\bigcup U_i}$.
- c) $\overline{\mathbb{R}^d \setminus R}$ ist der Abschluß der offenen Menge $\mathbb{R}^d \setminus R$; nun benutze Proposition 9.3b).
- d) Ist H offen mit $R = \overline{H}$, so wegen der Stetigkeit von g auch $g^{-1}[H]$; und aus Lemma B.5a+b) folgt, daß ihr Abschluß gerade $g^{-1}[R]$ ergibt.
- e) Ist G offen mit $R = \overline{G}$, so ist wegen der Offenheit von f auch $f[G]$ offen. Mit Lemma B.5a) und c) folgt weiterhin, daß der Abschluß von $f[G]$ gerade $f[R]$ ergibt.
- f) ergibt sich analog aus Lemma B.5a+d), da \mathbb{R}^m ein Hausdorff-Raum und jede abgeschlossene beschränkte Menge kompakt ist.

Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^2$ ist stetig, $R = [-1, 0]$ regulär, aber $g^{-1}[R] = \{0\}$ nicht. Die Funktion $f(t) \equiv 0$ ist stetig und abgeschlossen, jedoch ist $f[R]$ nicht regulär. Die Funktion $f(t) = e^{-t}$ ist stetig und offen, $R = [0, \infty)$ ist regulär aber $f[R] = (0, 1]$ nicht.

$R_1 = [-1, 0]$ und $R_2 = [0, 1]$ sind beide regulär (sogar kompakt konvex), doch ihr Durchschnitt $R_1 \cap R_2 = \{0\}$ ist es nicht. $R'_1 = [-1, 0] \cup [5, 6]$ und $R'_2 = [0, 1] \cup [5, 6]$ sind auch regulär und kompakt; ihr Durchschnitt hat sogar nichtleeres Inneres, doch ist auch er nicht regulär. \square

Proposition 9.29 Sei $R \subseteq \mathbb{R}^d$ regulär und $\tilde{R} := \overline{\mathbb{R}^d \setminus R}$. Dann ist

- a) jeder $\theta_{<}^d$ -Name für R auch ein $\psi_{>}^d$ -Name für \tilde{R} ;
umgekehrt ist jeder $\psi_{>}^d$ -Name für R auch ein $\theta_{<}^d$ -Name für \tilde{R} .
- b) Analog für $\vartheta_{<}^\eta$ und $\vartheta_{>}^\eta$; sowie umgekehrt.
- c) Analog für $\bar{\vartheta}_{<}^\eta$ und $\bar{\vartheta}_{>}^\eta$; und umgekehrt.
- d) Analog für $\bar{\vartheta}_{<}^\eta$ und $\bar{\vartheta}_{>}^\eta$; und umgekehrt.
- e) Analog für $\bar{\theta}_{<}^d$ und $\bar{\psi}_{>}^d$; und umgekehrt.
- f) Analog für $\psi_{<}^d$ und $\theta_{>}^d$; und umgekehrt.
- g) Analog für $\bar{\psi}_{<}^d$ und $\bar{\theta}_{>}^d$; und umgekehrt.

Beweis: Trivial. \square

Beweis von Theorem 9.19:

a) und b) Wir zeigen $\psi_<^d \sqcap \theta_>^d \preccurlyeq \omega^d \preccurlyeq \tau^d \preccurlyeq \psi_<^d \sqcap \theta_>^d$

$\omega^d \preccurlyeq \tau^d$: Genauer ist jedes WMEM-Orakel bereits ein weak membership test!

Für $\bar{B}(x, r) \subseteq R^\circ$ gilt $\omega^d(x, r) = 1$; denn andernfalls wäre $\omega^d(x, r) = 0$, da ω^d total ist und deshalb $\emptyset \neq (\mathbb{R}^d \setminus R) \cap \bar{B}(x, r) \subseteq (\mathbb{R}^d \setminus R^\circ) \cap \bar{B}(x, r)$ gälte: ein Widerspruch. Analog ist für $\bar{B}(x, r) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus R$, notwendigerweise $\omega^d(x, r) = 0$.

$\psi_<^d \sqcap \theta_>^d \preccurlyeq \omega^d$: Wie bereits in Abschnitt 5.1 erwähnt, ist ein $\psi_<^d$ -Name für abgeschlossenes $R \subseteq \mathbb{R}^d$ uniform äquivalent zu einer Liste (der Mittelpunkte und Radien) aller R schneidenden offenen rationalen Kugeln. Vereinfacht geschrieben:

$$\psi_<^d(R) \equiv \{(y, t) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+ : B(y, t) \cap R \neq \emptyset\}.$$

Entsprechend ist [43, 87] ein $\theta_<^d$ -Name von $U = R^\circ$ äquivalent zu einer Liste aller offenen rationalen, $\mathbb{R}^d \setminus U = \overline{\mathbb{R}^d \setminus R}$ schneidenden Kugeln; sozusagen $\theta_<^d(R^\circ)$. Mit Hilfe dieser Informationen kann der folgende Algorithmus ein WMEM-Orakel für R realisieren, d.h. Anfragen an selbiges beantworten:

Eingabe ist $(x, r) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+$. Nun durchsuche beide o.g. Listen, ob und in welcher (x, r) vorkommt. Weil $B(x, r)$ entweder R schneidet oder $\overline{\mathbb{R}^d \setminus R}$ oder beide, wird diese Suche nach endlicher Zeit Erfolg zeigen. Falls (x, r) zuerst in $\psi_<^d(R)$ gefunden wird, so antworte " $\omega^d(x, r) = 1$ ", andernfalls antworte " $\omega^d(x, r) = 0$ ".

Dieser Algorithmus realisiert tatsächlich ein WMEM-Orakel: Wie eben erläutert terminiert er für alle Eingaben, so daß ω^d total ist. Weiterhin gilt, wenn er " $\omega^d(x, r) = 1$ " geantwortet hat, daß $(x, r) \in \psi_<^d(R)$, d.h. es ist $\emptyset \neq B(x, r) \cap R \subseteq \bar{B}(x, r) \cap R$, die Antwort also korrekt. Analog gilt, wenn er " $\omega^d(x, r) = 0$ " geantwortet hat, $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^d \setminus R) \neq \emptyset$; hieraus folgt mittels Lemma B.3b), daß $\bar{B}(x, r) \cap (\mathbb{R}^d \setminus R) \supseteq B(x, r) \cap (\mathbb{R}^d \setminus R) \supsetneq \emptyset$, so daß auch diese Antwort korrekt ist.

$\tau^d \preccurlyeq \psi_<^d \sqcap \theta_>^d$: Sei τ^d ein weak membership test für R . Wir werden, durch Auswertung von $\tau^d(x, r)$ für alle möglichen $(x, r) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+$, die beiden o.g. Listen $\psi_<^d(R)$ und $\theta_<^d(R^\circ)$ generieren. Da jedoch τ^d nur partiell ist, für manche (x, r) also divergiert, ist dovetailing nötig:

Wann immer für ein (x, r) sich herausstellt, daß $\tau^d(x, r) = 1$, hänge alle rationalen Bälle $B(y, t) \supseteq \bar{B}(x, r)$ an die Ausgabeliste $\psi_<^d(R)$ an. Das ist aus folgendem Grunde zulässig: Wegen $\tau^d(x, r) = 1$ gilt $\bar{B}(x, r) \not\subseteq \mathbb{R}^d \setminus R$ und deshalb $\emptyset \neq \bar{B}(x, r) \cap R \subseteq B(y, t) \cap R$. Weiterhin ist die so erhaltene Liste $\psi_<^d(R)$ vollständig: Für $B(y, t) \cap R \neq \emptyset$ gilt wegen Lemma B.3: $B(y, t) \cap R^\circ \neq \emptyset$; daher gibt es einen vollständig in der nichtleeren offenen Menge $B(y, t) \cap R^\circ$ enthaltenen rationalen Ball $B(x, 2r)$. Für das Tupel (x, r) ist $\tau^d(x, r)$ definiert und = 1, so daß der obige Algorithmus $B(y, t) \supseteq B(x, 2r) \supseteq \bar{B}(x, r)$ tatsächlich ausgibt.

Ein entsprechendes Verfahren liefert $\theta_<^d(R^\circ)$: Für jedes (x, r) mit $\tau^d(x, r) = 0$ gebe alle rationalen $B(y, t) \supseteq \bar{B}(x, r)$ aus.



- c) Hier benutzen wir eine alternative Charakterisierung aus Abschnitt 5.1: Ein $\psi_>^d$ -Name von R ist uniform äquivalent zur Liste aller ganz in $\mathbb{R}^d \setminus R$ enthaltenen, abgeschlossenen Bälle. Entsprechend [43, 87] ist ein $\theta_<^d$ -Name für R° uniform äquivalent zur Liste aller abgeschlossenen ganz in R° enthaltenen rationalen Bälle.

Durch Suche in diesen beiden Listen nach der Eingabe $(x, r) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+$ kann man nun offensichtlich $\mu^d(x, r)$ partiell auswerten: falls $(x, r) \in \theta_<^d(R^\circ)$, dann antworte " $\mu^d(x, r) = 1$ "; falls $(x, r) \in \psi_>^d(R)$, so " $\mu^d(x, r) = 0$ ".

Umgekehrt liefert das Auswerten von $\mu^d(x, r)$ für alle $(x, r) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+$ mittels dovetailing solche Listen: wann immer $\mu^d(x, r) = 1$, hänge $\bar{B}(x, r)$ an $\theta_<^d(R^\circ)$ an; wann immer $\mu^d(x, r) = 0$, hänge $\bar{B}(x, r)$ an $\psi_>^d(R)$ an.

- d) Für die eine Richtung sei die weak characteristic function χ^d von R gegeben und $\eta' : \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^d$ eine ($v \rightarrow v^d$)-berechenbare surjektive Funktion mit r.e. $\text{dom}(\eta') \subseteq \mathbb{N}$. Mittels dovetailing ist es nun leicht, alle $m \in \text{dom}(\eta')$ zu durchlaufen, jeweils $x = \eta'(m)$ zu berechnen und $\chi^d(x)$ auszuwerten sofern definiert. So erhält man Aufzählungen der beiden Mengen

$$\left\{ m \in \text{dom}(\eta') : \chi^d(\eta'(m)) = 0 \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ m \in \text{dom}(\eta') : \chi^d(\eta'(m)) = 1 \right\}$$

welche je einen $\vartheta_<^{\mathbb{Q}^d}$ - und einen $\vartheta_>^{\mathbb{Q}^d}$ -Namen von R darstellen.

Bei der Umkehrung ist $x \in \mathbb{Q}^d$ die Eingabe. Durchsuche nun $\text{dom}(\eta')$ nach einem m mit $\eta'(m) = x$: das existiert wegen Surjektivität, und Gleichheit rationaler Zahlen ist leicht überprüfbar. Nun suche dieses m in den beiden Listen; taucht es in der ersten auf, so antworte " $\chi^d(x) = 0$ "; taucht es in der zweiten auf, so antworte " $\chi^d(x) = 1$ ". Auf diese Weise wird χ^d für $x \in \mathbb{Q}^d \setminus \partial R$ korrekt ausgewertet; für $x \in \partial R$ divergiert die Suche automatisch.

- e) Auch hier sind gemäß [43, 87] die beiden abzählbaren Folgen $(B(x_i, r_i))_{i \in \mathbb{N}}$ und $(B(y_i, t_i))_{i \in \mathbb{N}}$ offener rationaler Bälle uniform äquivalent zu einem $\theta_<^d$ -Namen für U und einem $\psi_>^d$ -Namen für $A := \mathbb{R}^d \setminus V$. Wegen $\bar{U} = R$ ist der $\theta_<^d$ -Name für U automatisch ein $\bar{\theta}_<^d$ -Name für R ; und wegen $\bar{A}^\circ = R$ gemäß Lemma B.3c) ist der $\psi_>^d$ -Name für A auch ein $\bar{\psi}_>^d$ -Name für R .

Umgekehrt sind wegen [43, 87] und Lemma B.3d) ein $\theta_<^d$ -Name für U mit \bar{U} bzw. ein $\psi_>^d$ -Name für A mit $\bar{A}^\circ = R$ uniform äquivalent zu zwei abzählbaren Folgen offener rationaler Bälle mit Vereinigung U bzw. $V = \mathbb{R}^d \setminus A$ gemäß Definition 9.11.

- f) gilt per definitionem; siehe auch [90].

- g) ebenso; siehe auch [14, 87].

- h) Gemäß THEOREM 3.14 in [43] ist ein δ^d -Name für R uniform äquivalent zum Meet von:

- i) einem $\theta_<^d$ -Name für R° ,
- ii) einem $\theta_>^d$ -Name für R° ,

- iii) einem $\theta_<^d$ -Name für $\mathbb{R}^d \setminus \overline{R^\circ} = \mathbb{R}^d \setminus R$,
- iv) einem $\theta_>^d$ -Name für $\mathbb{R}^d \setminus \overline{R^\circ} = \mathbb{R}^d \setminus R$.

Wegen Proposition 9.29 sind letztere beiden nichts weiter als ein $\psi_>^d$ - bzw. ein $\psi_<^d$ -Name von R . Indem man einfach Komponenten ii) und iv) aus dem **Meet** wegläßt, gibt dies den gewünschten $\theta_<^d \sqcap \psi_>^d$ -Namen für R .

Umgekehrt lassen sich diese Komponenten aus den übrigen i) und iii) rekonstruieren: die Abbildung $R^\circ \mapsto \overline{R^\circ} = R$ von offenen auf abgeschlossene Mengen ist $(\theta_<^d, \psi_<^d)$ -berechenbar, siehe LEMMA 3.9 in [43] oder EXERCISE 5.1.21 in [87]. Analog ist die Abbildung $R \mapsto R^\circ$ von abgeschlossenen auf offene Mengen $(\psi_>^d, \theta_>^d)$ -berechenbar. \square

Beweis von Proposition 9.24: Gemäß Theorem 9.19c) ist ein μ^d -Name von $R \in \mathfrak{R}^d$ uniform äquivalent zu $\psi_>^d$ -Information über R und $\psi_>^d$ -Information über $B = \overline{\mathbb{R}^d \setminus R}$: vergleiche Definitionen 9.13 und 9.12. Wie Lemma 5.8 sicherstellt, kann man daher aus den μ^d -Namen von R_1, \dots, R_m — also ihren $\psi_>^d$ -Namen und ebensolchen für $B_i := \overline{\mathbb{R}^d \setminus R_i}$ — uniform einen $\psi_>^d$ -Namen von $R = \bigcap_{i=1}^m R_i$ und einen $\psi_>^d$ -Namen von $B := \bigcup_{i=1}^m \overline{\mathbb{R}^d \setminus R_i}$ berechnen. Wegen Lemma B.1 gilt nun

$$\overline{\mathbb{R}^d \setminus R} \stackrel{B.1h}{=} \mathbb{R}^d \setminus (R^\circ) \stackrel{B.1c}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcap_{i=1}^m \overline{\mathbb{R}^d \setminus R_i} \right) = \bigcup_{i=1}^m (\mathbb{R}^d \setminus \overline{R_i}) \stackrel{B.1h}{=} \bigcup_{i=1}^m \overline{\mathbb{R}^d \setminus R_i} = B ,$$

so daß die beiden berechneten Namen wiederum uniform äquivalent zu einem μ^d -Namen von R sind.

Ebenso läßt sich aus $\psi_>^m$ -Namen von $R \in \mathfrak{R}^m$ und von $B := \overline{\mathbb{R}^m \setminus R}$ gemäß Lemma 6.9a) $\psi_>^n$ -Information über $R' = g^{-1}[R] \in \mathfrak{R}^n$ ermitteln und über

$$B' := g^{-1}[\overline{\mathbb{R}^m \setminus R}] \stackrel{B.5a+b}{=} \overline{g^{-1}[\mathbb{R}^m \setminus R]} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus g^{-1}[R]} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus R'} ,$$

d.h. einen μ^m -Namen von R' berechnen.

Analog ist (Theorem 9.19f, Definition 9.14) ein ξ^d -Name von $R \in \mathfrak{R}^d$ uniform äquivalent zu $\psi_>^d$ -Information über R plus $\psi_>^d$ -Information über *irgendein* abgeschlossenes B mit $R = \overline{\mathbb{R}^d \setminus B}$. Damit kann man (Lemma 5.8) $\psi_>^d$ -Namen von $R := \bigcap_{i=1}^m R_i$ und von $B := \bigcup_{i=1}^m B_i$ berechnen. Weil also R_i nach Voraussetzung R regulär, also $R = \overline{W}$ mit offenem $W := R^\circ$ ist, besagt Lemma B.4b) für $U_i := \mathbb{R}^d \setminus B_i$:

$$R = \overline{W} = \bigcap_{i=1}^m \overline{\mathbb{R}^d \setminus B_i} \stackrel{!}{=} \overline{\bigcap_{i=1}^m (\mathbb{R}^d \setminus B_i)} = \overline{\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i} = \overline{\mathbb{R}^d \setminus B} ,$$

so daß wir tatsächlich einen ξ^d -Namen von R ermittelt haben.

Ebenso läßt sich aus $\psi_>^m$ -Namen von $R \in \mathfrak{R}^m$ und von abgeschlossenem B mit $R = \overline{\mathbb{R}^m \setminus B}$ gemäß Lemma 6.9a) $\psi_>^n$ -Information über $R' = g^{-1}[R] \in \mathfrak{R}^n$ und abgeschlossenes $B' = g^{-1}[B]$ ermitteln. Nun gilt wieder

$$\overline{\mathbb{R}^n \setminus B'} \stackrel{B.1h}{=} \mathbb{R}^n \setminus (g^{-1}[B])^\circ \stackrel{B.5ab}{=} \mathbb{R}^n \setminus g^{-1}[B^\circ] \stackrel{B}{=} g^{-1}[\mathbb{R}^m \setminus B^\circ] \stackrel{B.1h}{=} g^{-1}[\overline{\mathbb{R}^m \setminus B}] = R' ,$$



so daß auch dies zusammen einen ξ^m -Namen von R' ergibt. \square

Beweis von Proposition 9.25: Sei $d = 1$, $R_1 = [-1, 0]$, $R_2 = [0, 1]$. Ihre μ -Namen sind (Theorem 9.19c, Definitionen 9.13, 9.12, 5.2, 2.21) $[\rho \rightarrow \rho_{<}]$ -Namen von

$$R_1 \text{ und } B_1 = \overline{\mathbb{R} \setminus R_1} = (-\infty, -1] \cup [0, \infty) \quad \text{bzw.} \quad R_2 \text{ und } B_2 = (-\infty, 0] \cup [1, \infty) .$$

Eine angenommene μ -Berechnung von $R = R_1 \cup R_2$ würde also, nachdem sie untere Approximationen von $d_{R_1}|_{[-n, +n]}$, $d_{B_1}|_{[-n, +n]}$, $d_{R_2}|_{[-n, +n]}$ und $d_{B_2}|_{[-n, +n]}$ kennt bis auf sagen wir $\varepsilon > 0$, eine untere Schranke $\delta \geq \frac{1}{2}$ an $d_B(0) = 1$ ausgeben, denn $B = \overline{\mathbb{R} \setminus R} = (-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$.

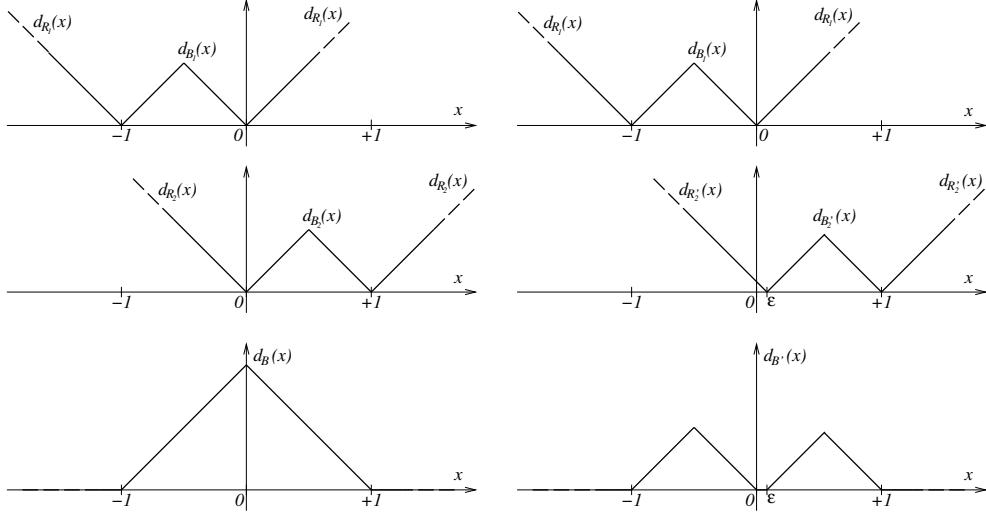


Abbildung 12: VEREINIGUNG REGULÄRER MENGEN IST μ -UNSTETIG.

Nun betrachte anstelle von R_2 die Menge $R'_2 = [\varepsilon, 1]$. Die Distanzfunktionen von R_2 und R'_2 bzw. B_2 und $B'_2 = \overline{\mathbb{R} \setminus R'_2}$ unterscheiden sich nur um ε . Für $R' = R_1 \cup R'_2$ und $B' = \overline{\mathbb{R} \setminus R'} = (-\infty, -1] \cup [0, \varepsilon] \cup [1, \infty)$ ist jedoch $d_{B'}(0) = 0$, die oben ausgegebene untere Schranke $\delta \geq \frac{1}{2}$ also unzutreffend: Widerspruch.

Die ξ^d -Namen von R_1 bzw. R_2 bestehen aus (Theorem 9.19f, Definitionen 9.13, 9.12) $\psi^d_{>}$ -Namen von R_1 und R_2 sowie $\psi^d_{>}$ -Namen *irgendwelcher* abgeschlossener Mengen B_1, B_2 mit $\overline{\mathbb{R}^d \setminus B_i} = R_i$. Gemäß Lemma 5.8 kann man daraus $\psi^d_{>}$ -Information berechnen über $R = R_1 \cup R_2$ und über $B = B_1 \cap B_2$. Damit gilt $\overline{\mathbb{R}^d \setminus B} \stackrel{B.1h}{=} \mathbb{R}^d \setminus (B_1 \cap B_2)^\circ \stackrel{B.1c}{=} \mathbb{R}^d \setminus (B_1^\circ \cap B_2^\circ) = (\mathbb{R}^d \setminus B_1^\circ) \cup (\mathbb{R}^d \setminus B_2^\circ) = R$, so daß diese Namen zusammen wieder einen ξ^d -Namen von R ergeben. \square

Beweis von Proposition 9.26: Ein μ^d -Name von R ist (Theorem 9.19c) zusammengesetzt aus einem $\psi^d_{>}$ -Namen von R und einem von $R' = \overline{\mathbb{R}^d \setminus R}$. Vertauschung dieser beiden Komponenten liefert wegen $\overline{\mathbb{R}^d \setminus R'} = R$ (Lemma B.1) einen μ^d -Namen von R' .

Angenommen, das abgeschlossene Komplement wäre $(\xi^d \rightarrow \xi^d)$ -stetig. Eingabe ist also (Theorem 9.19f) ein $\psi_>^d$ -Name von R und ein $\theta_<^d$ -Name eines U mit $R = \overline{U}$. Die stetig davon abhängende Ausgabe ist ein $\psi_>^d$ -Name von $\overline{\mathbb{R}^d \setminus R} = R'$ und ein $\theta_<^d$ -Name eines U' mit $R' = \overline{U'}$. Ignorieren wir letzteres und schleifen den $\psi_>^d$ -Namen der Eingabe R mit durch, so ist dieser gleichzeitig (Definition 9.12) ein $\theta_<^d$ -Name von $\mathbb{R}^d \setminus R \stackrel{B.1}{=} R'^\circ$. Zusammen ergibt dies also offenbar (Theorem 9.19c) einen μ^d -Namen von R' , d.h. unsere Annahme impliziert die $(\xi^d \rightarrow \mu^d)$ -Stetigkeit des abgeschlossenen Komplements. Weil letzteres bereits als sogar $(\mu^d \rightarrow \mu^d)$ -berechenbar (s.o.) bewiesen ist, wäre dann auch die zweimalige Anwendung

$$R \mapsto \overline{\mathbb{R}^d \setminus R} \mapsto \overline{\mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathbb{R}^d \setminus R}} \stackrel{B.1}{=} \overline{R^\circ} = R$$

$(\xi^d \rightarrow \mu^d)$ -stetig im Widerspruch zu $\xi^d \not\prec \mu^d$ gemäß Folgerung 9.21. \square

Beweis von Theorem 9.22:

$Q_1 \supseteq Q_2 \implies \vartheta_>^{\eta_1} \preccurlyeq_t \vartheta_>^{\eta_2}$: Nach Voraussetzung existiert zu jedem $m_2 \in \text{dom}(\eta_2)$ ein $m_1 \in \text{dom}(\eta_1)$ mit $\eta_1(m_1) = \eta_2(m_2)$. Diese partielle Abbildung $\text{dom}(\eta_2) \ni m_2 \mapsto m_1$ ist diskret und daher trivialerweise stetig, jedoch nicht notwendig $(v \rightarrow v)$ -berechenbar. Jetzt betrachte die folgende, darauf basierende Zuordnung von $\vartheta_>^{\eta_1}$ -Namen zu $\vartheta_>^{\eta_2}$ -Namen: Eingabe ist eine Liste von m_1 -Werten aus $\text{dom}(\eta_1)$. Für jedes $m_2 \in \text{dom}(\eta_2)$ suche, ob das entsprechende (im obigen Sinn) m_1 in dieser Liste vorkommt; falls ja, gebe m_2 aus. Benutze *dovetailing*.

Da die Eingabe alle m_1 mit $\eta_1(m_1) \notin R$ enthielt, erhält man so eine vollständige Liste aller m_2 mit $\eta_2(m_2) \notin R$. Wegen *dovetailing* hängt zudem jede Ausgabe nur von einem endlichen Teilstück der Eingabe ab, ist also stetig.

$\eta_1 \succ \eta_2 \implies \vartheta_>^{\eta_1} \preccurlyeq \vartheta_>^{\eta_2}$: Der Beweis geht analog zum eben betrachteten Fall unter Ausnutzung, daß $m_2 \mapsto m_1$ berechenbar ist.

$\vartheta_>^{\eta_1} \preccurlyeq_t \vartheta_>^{\eta_2} \implies Q_1 \supseteq Q_2$: Angenommen es gäbe ein $q_2 = \eta_2(m_2) \notin \text{range}(\eta_1)$. Betrachte eine stetige Abbildung von $\vartheta_>^{\eta_1}$ -Namen zu $\vartheta_>^{\eta_2}$ -Namen. Bei Eingabe der vollständigen Liste aller $m_1 \in \text{dom}(\eta_1)$ — einem Namen für $R = \emptyset$ — wird sie ganz $\text{dom}(\eta_2)$ aufzählen, also insbesondere m_2 . Aus Stetigkeitsgründen hängt dieses ausgegebene m_2 nur von endlich vielen gelesenen m_1 ab; diese bilden aber ebensogut das Anfangsstück eines $\vartheta_>^{\eta_1}$ -Namens für ein anderes reguläres $R' \ni q_2 = \eta_2(m_2)$, im Widerspruch zur Ausgabe von m_2 im $\vartheta_>^{\eta_2}$ -Namen. In der Tat:

Seien $m_{1,1}, \dots, m_{1,N}$ die endlich vielen gelesenen Werte, so setze

$$\delta := \min_{i=1}^N \|q_2 - \eta_1(m_{1,i})\|_2, \quad R' := \overline{B}(q_2, \delta/2).$$



$\vartheta_{>}^{\eta_1} \preccurlyeq \vartheta_{>}^{\eta_2} \implies \eta_1 \succ \eta_2$: Zuerst sei auf eine Verstärkung von " $\vartheta_{>}^{\eta_1} \preccurlyeq_t \vartheta_{>}^{\eta_2} \implies \text{range}(\eta_1) \supseteq \text{range}(\eta_2)$ "

hingewiesen: Betrachte eine stetige Abbildung, welche $\vartheta_{>}^{\eta_1}$ -Namen in $\vartheta_{>}^{\eta_2}$ -Namen konvertiert. Sei $m_{2,1}, \dots, m_{2,M_2}$ ein endliches Anfangsstück einer Ausgabe, welche (Stetigkeit!) nur von dem endlichen Anfangsstück $m_{1,1}, \dots, m_{1,M_1}$ der Eingabe abhängt. Dann gilt

$$\{\eta_1(m_{1,1}), \dots, \eta_1(m_{1,M_1})\} \supseteq \{\eta_2(m_{2,1}), \dots, \eta_2(m_{2,M_2})\}. \quad (9.3)$$

Basierend auf dieser Aussage zeigen wir nun die eigentliche Behauptung. Sei M eine Typ-2 Maschine, welche die angegebene Konvertierung " $\vartheta_{>}^{\eta_1} \preccurlyeq \vartheta_{>}^{\eta_2}$ " durchführt. Der folgende Algorithmus benutzt dieses M , um η_2 -Namen in η_1 -Namen zu konvertieren:

Eingabe ist ein $m_2^0 \in \text{dom}(\eta_2)$. Sei $x := \eta_2(m_2^0)$ und $R = \bar{B}(x + 2, 1)$. Mittels der $(v \rightarrow p^d)$ -Berechenbarkeit von η_i sowie der rekursiven Aufzählbarkeit von $\text{dom}(\eta_1)$ kann man daraus effektiv alle $m_1 \in \text{dom}(\eta_1)$ finden mit $\eta_1(m_1) \notin R$. Dies ist ein $\vartheta_{>}^{\eta_1}$ -Name von R . Gefüttert mit dieser Eingabe gibt M nach Voraussetzung einen $\vartheta_{>}^{\eta_2}$ -Namen von R aus, also alle $m_2 \in \text{dom}(\eta_2)$ mit $\eta_2(m_2) \notin R$ und insbesondere nach endlicher Zeit das m_2^0 , mit dem alles anfing. Wegen (9.3) muß unter den endlich vielen $m_{1,i}$, die M bis zu diesem Augenblick gelesen hat, ein m_1^0 sein mit $\eta_1(m_1^0) = \eta_2(m_2^0)$, und genau sowas suchen wir ja für die angestrebte Konvertierung " $\eta_2 \preccurlyeq \eta_1$ "; man muß es bloß noch identifizieren.

Hierzu geht ein, daß Gleichheit zwar unentscheidbar, Ungleichheit jedoch semi-entscheidbar ist (Beispiel 3.1). Sei η_1 erstmal injektiv, m_1^0 also eindeutig; für alle anderen der endlich vielen Kandidaten $m_{1,i}$ wird nach endlicher Zeit detektiert, daß $\eta_1(m_{1,i}) \neq \eta_2(m_2^0)$: so scheiden immer mehr aus, bis am Ende nur noch das gesuchte übrigbleibt. Ist η_1 nicht injektiv, so kann man nicht auf das Übrigbleiben *eines* $m_{1,i}$ bauen. Statt dessen benutzen wir Eigenschaft (9.1) in Definition 9.17, welche für $m_1, m'_1 \in \text{dom}(\eta_1)$ die Gleichheit $\eta_1(m_1) = \eta_1(m'_1)$ statt semi-offenbar sogar ganz entscheidbar macht. So lassen sich die endlich vielen $m_{1,i}$ in Äquivalenzklassen bezüglich η_1 einteilen und der obige Ausscheidungsprozeß auf diese 'Fasern' anstatt auf die Individuen $m_{1,i}$ anwenden.

Die dualen Aussagen mit " $<$ " statt " $>$ " ergeben sich nun aus Proposition 9.29.

$\eta_1 \preccurlyeq \eta_2 \implies \bar{\vartheta}_{<}^{\eta_1} \preccurlyeq \bar{\vartheta}_{<}^{\eta_2}$: Betrachte als Eingabe eine Liste $M_1 \subseteq \text{dom}(\eta_1)$ mit $\overline{\eta_1[M_1]} = R$. Für jedes $m_1 \in M_1$ kann man nach Voraussetzung ein $m_2 \in M_2$ berechnen mit $\eta_2(m_2) = \eta_1(m_1)$. Die so konvertierte Liste M_2 erfüllt also $\overline{\eta_2[M_2]} = \overline{\eta_1[M_1]} = R$. Der Unterschied zu a) besteht nämlich darin, daß ein $\bar{\vartheta}_{<}^{\eta_2}$ -Name M_2 — anders als bei $\vartheta_{>}^{\eta_2}$ — nicht *alle* m_2 mit $\eta_2(m_2) \in R^\circ$ zu enthalten braucht.

$\bar{\vartheta}_{<}^{\eta_1} \equiv \bar{\vartheta}_{<}^{\eta_2}$ folgt aus der Transitivität: $\bar{\vartheta}_{>}^{\eta_1} \equiv \bar{\theta}_>^d \equiv \bar{\vartheta}_{>}^{\eta_2}$ gemäß Theorem 9.20. \square

9.7 Beweis von Theorem 9.19

Zuerst die Berechenbarkeitsresultate der Form $\alpha \preccurlyeq \beta$:

$\theta_{<}^d \preccurlyeq \vartheta_{<}^n$: Ein $\theta_{<}^d$ -Name von R ist per Definition 9.13 ein $\psi_{>}^d$ -Name von $\mathbb{R}^d \setminus R^\circ$. Benutze nun die Aufzählbarkeit von $\text{dom}(\eta)$ und die p^d -Berechenbarkeit von $m \mapsto \eta(m)$ sowie (Lemma 6.9e), um alle $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m) \notin \mathbb{R}^d \setminus R^\circ$, d.h. mit $\eta(m) \in R^\circ$ zu finden: der gesuchte $\vartheta_{<}^n$ -Name von R (Definition 9.17).

$\theta_{<}^d \preccurlyeq \bar{\theta}_{<}^d$: Da jeder $\theta_{<}^d$ -Name von R (d.h. ein $\theta_{<}^d$ -Name von $U := R^\circ$ mit $\bar{U} = R$) auch ein $\bar{\theta}_{<}^d$ -Name von R (d.h. ein $\theta_{<}^d$ -Name *irgendeines* offenen U mit $\bar{U} = R$) ist, ist dies trivial.

$\vartheta_{<}^n \sqcap \bar{\theta}_{<}^d \preccurlyeq \vartheta_{<}^n$: Trivial.

$\vartheta_{<}^n \sqcap \bar{\theta}_{<}^d \preccurlyeq \bar{\theta}_{<}^d$: Trivial.

$\vartheta_{<}^n \preccurlyeq \bar{\vartheta}_{<}^n$: Trivial.

$\bar{\theta}_{<}^d \preccurlyeq \bar{\vartheta}_{<}^n$: Ebenso wie oben ein $\theta_{<}^d$ -Name von $U := R^\circ$ in einen $\vartheta_{<}^n$ -Namen von U konvertiert wurde, kann man hier einen $\theta_{<}^d$ -Namen *irgendeines* offenen U mit $R = \bar{U}$ in eine Aufzählung aller $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m) \in U$ umwandeln. Dies ist dann offenbar ein $\bar{\vartheta}_{<}^n$ -Name von R .

$\bar{\vartheta}_{<}^n \preccurlyeq \psi_{<}^d$: Nach Voraussetzung ist $m \mapsto \eta(m)$ eine $(v \rightarrow p^d)$ -berechenbare Abbildung. Durch Einschränkung auf alle im $\bar{\vartheta}_{<}^n$ -Namen von R gelisteten m erhält man eine abzählbare Folge reeller Vektoren, welche genau in R dicht liegen. Gemäß Punkt b) von Abschnitt 5.1 ist dies ein $\psi_{<}^d$ -Name von R .

$\psi_{<}^d \preccurlyeq \bar{\psi}_{<}^d$: Trivial.

$\bar{\vartheta}_{<}^n \preccurlyeq \bar{\psi}_{<}^d$: Ein $\bar{\vartheta}_{<}^n$ -Name von R ist (Definition 9.18) ein $\bar{\vartheta}_{<}^n$ -Name *irgendeiner* abgeschlossenen Menge A mit $R = \bar{A}^\circ$. Dieser läßt sich wie oben in einen $\psi_{<}^d$ -Namen von A umwandeln, welcher (Definition 9.15) einen $\bar{\psi}_{<}^d$ -Name von R darstellt.

$\bar{\psi}_{>}^d \preccurlyeq \bar{\vartheta}_{<}^n$: Die Eingabe besteht (Abschnitt 5.1 Punkt f) aus der vollständigen Liste aller abgeschlossenen rationalen Bälle $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_n, \dots$, welche disjunkt sind zur fixierten abgeschlossenen Menge A mit $R = \bar{A}^\circ$. Für jedes $m \in \text{dom}(\eta)$ kann man (Lemma 6.9e) es in endlicher Zeit feststellen, wenn $\eta(m) \notin \bar{B}_1 \cup \dots \cup \bar{B}_m$, und dieses m dann ausgeben. Dadurch erhält man ein $M \subseteq \text{dom}(\eta)$, welches zumindest alle $\eta(m) \in A^\circ$ enthält: $\overline{\eta[M]} \supseteq \bar{A}^\circ = R$.

Es können jedoch auch solche mit $\eta(m) \notin A$ vorkommen, wenn nämlich der diesen Bereich von $\mathbb{R}^d \setminus A$ abdeckende \bar{B}_n in der Eingabe erst für $n > m$ auftaucht. Wir zeigen aber, daß diese 'zustätzlichen' Punkte keine offene Menge dicht ausfüllen können:

$$\overline{\eta[M]} \subseteq A \implies \overline{\eta[M]} \subseteq A^\circ \implies \overline{\eta[M]} \subseteq \bar{A}^\circ = R .$$



Angenommen, $\overline{\eta[M]}^\circ \setminus A$ sei nichtleer; dann enthält diese offene Menge eine (hinreichend kleine) rationale abgeschlossene Kugel $\bar{B}_n \neq \emptyset$, welche (disjunkt zu A) irgendwo in der Eingabe auftaucht. Bis dahin hat der obige Algorithmus höchstens endlich viele m mit $\eta(m) \in \bar{B}_n$ ausgespuckt; und danach gibt er nach Konstruktion nur noch m mit $\eta(m) \notin \bar{B}_n$ aus. Insgesamt können endlich viele Punkte aber niemals dicht in \bar{B}_n sein; dies widerspricht der Annahme $\emptyset \neq \bar{B}_n \subseteq \overline{\eta[M]}$.

$\Psi_<$ ↳ $\mathfrak{V}_<$: Hier besteht die Eingabe (Abschnitt 5.1e) aus allen *offenen* rationalen Würfeln $W_<$, welche $A \in \mathfrak{A}^d$ schneiden mit $\overline{A}^\circ = R$. Beachte, daß im Würfel alle Seiten gleich lang sind!

Wir konstruierten die Reduktion erst für den Fall η' , d.h. (Definition 9.16) generieren die Aufzählung einer Menge Q rationaler Vektoren $q_i \in \mathbb{Q}^d$ mit $\overline{Q}^\circ = R$. Der Algorithmus überprüft für jedes gelesene $W_<$, ob irgendeiner der *bisher* ausgegebenen q_i in $\overline{W}_<$ liegt; falls nicht, suche ein neues $q_i \in W_<$ und gebe es aus.

Auf diese Weise enthält die Ausgabe Q zu jedem gelesenen $W_<$ (mindestens) einen rationalen Vektor $q_i \in \overline{W}_<$. Da die Eingabe *alle* A treffenden $W_<$ enthält, kommen insbesondere zu jedem $a \in A$ beliebig kleine $W_{<,i} \ni a$ vor, so daß die q_i dicht sind in A .

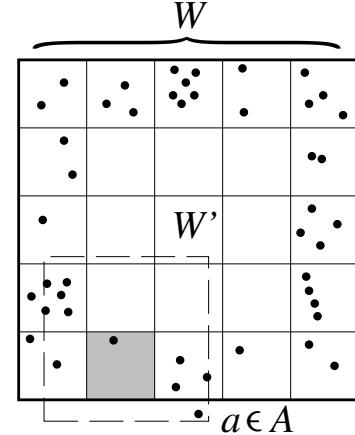
Allerdings können sie sich auch außerhalb A häufen, jedoch keine offene Menge dicht ausfüllen. Denn angenommen, $\overline{Q} \setminus A$ enthielte einen offenen Würfel $W = \prod_{j=1}^d (w_j - \varepsilon/2, w_j + \varepsilon/2)$ mit

Mittelpunkt $w \in \mathbb{R}^d$ und Seitenlänge $\varepsilon > 0$. Betrachte die Unterteilung von W in 5^d kleinere Würfel der Seitenlänge $\varepsilon/5$ rechts, insbesondere den in der Mitte (W') sowie die $5^d - 3^d$ vielen am Rand. Weil die Ausgabe Q laut Annahme dicht ist in W , enthält sie nach endlicher Zeit in jedem dieser Randwürfel mindestens einen Punkt q_i . Bis dahin hat der mittlere Würfel W' höchstens endlich viele $q \in Q$ abgekriegt; und *ab* da kriegt er nie wieder einen ab aus folgendem Grund: Jede Eingabe $W_<$, die ein $q \in W'$ enthält und A trifft, hat Seitenlänge mindestens $\frac{2}{5}\varepsilon$ und überdeckt mindestens einen der kleinen Randwürfel komplett einschließlich des darin bereits enthaltenen Punktes.

Q kann also gar nicht dicht sein in W' , Widerspruch.

Der obige Algorithmus benutzte an zwei Stellen, daß es sich um die Aufzählung *rationaler* Vektoren $q_i = \eta(m_i)$ handelte: Zur Überprüfung, ob

$$\forall i = 1, \dots, n : \eta(m_i) \notin \overline{W}_< \quad (9.4)$$



und, falls ja, zum Finden eines m_i mit $\eta(m_i) \in W_<$. Beide Operationen sind auf rationalen Würfeln und Vektoren leicht durchzuführen, auf den Approximationen reeller Vektoren jedoch im allgemeinen nicht rekursiv. Auf der anderen Seite ist (9.4) immerhin *semi-*

entscheidbar (Lemma 6.9e), so daß man *dovetailing* anwenden kann; ebensolches gilt für das Finden.

Mittels Proposition 9.29 ergeben sich daraus alle angegebenen Pfeile.

Kommen wir nun zu den *Nichtberechenbarkeitsergebnissen*:

$\vartheta^{\eta}|^{\mathfrak{BR}^d} \not\prec_t \bar{\psi}_{<}^d|^{\mathfrak{BR}^d}$ gilt sogar eingeschränkt auf konvexe Mengen, siehe Theorem 10.2;

$\psi_{>}^d|^{\mathfrak{BR}^d} \not\Rightarrow \psi_{<}^d|^{\mathfrak{BR}^d}$ ebenso und

$\bar{\vartheta}_{<}^{\eta} \sqcap \psi_{>}^d|^{\mathfrak{BR}^d} \not\prec_t \psi_{<}^d|^{\mathfrak{BR}^d}$ auch.

$\psi_{<}^d \sqcap \psi_{>}^d|^{\mathfrak{BR}^d} \not\prec_t \bar{\vartheta}_{<}^{\eta}|^{\mathfrak{BR}^d}$: Betrachte $R = \bar{B}(0, 1) \in \mathfrak{BR}^d$ und einen zugehörigen $\psi_{<}^d \sqcap \psi_{>}^d$ -Namens. Eine stetige Konvertierung in entsprechende $\bar{\vartheta}_{<}^{\eta}$ -Namen würde nach endlicher Zeit ein $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $x := \eta(m) \in R^\circ$ ausgeben und bis dahin nur ein endliches Anfangsstück des $\psi_{<}^d \sqcap \psi_{>}^d$ -Namens gelesen haben; gemäß Abschnitt 5.1e+f) besteht dieses aus R treffenden offenen rationalen Quadern Q_i sowie aus abgeschlossenen rationalen Quadern $\bar{Q}_i \subseteq \mathbb{R}^d \setminus R$, $i = 1, \dots, N$. Wähle nun in jedem Q_i einen von x verschiedenen Punkt $q_i \in [-1, +1]^d$ und $\varepsilon_i := \|q_i - x\|/2$; betrachte

$$R' := \bigcup_{i=1}^N \bar{B}(q_i, \varepsilon_i) \cap R \in \mathfrak{BR}^d.$$

Wegen $q_i \in R' \cap Q_i$ treffen alle bisher gelesenen Q_i nicht nur R sondern ebenso R' ; ebenso liegen alle bisher gelesenen \bar{Q}_i nicht nur in $\mathbb{R}^d \setminus R$ sondern auch in $\mathbb{R}^d \setminus R'$; das der stetigen Konvertierung bekannte Anfangsstück des $\psi_{<}^d \sqcap \psi_{>}^d$ -Namens von R könnte also ebensogut für R' verwendet werden und würde auch dort zur Ausgabe von obigem m führen. Doch diese wäre inkorrekt, denn $\eta(m) = x \notin R^\circ$ nach Wahl der ε_i : Widerspruch.

$\bar{\theta}_{<}^d \sqcap \psi_{>}^d|^{\mathfrak{BR}^d} \not\prec_t \bar{\vartheta}_{<}^{\eta}|^{\mathfrak{BR}^d}$: Sei $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $x = \eta(m) \in B(0, 1)$; betrachte $U := B(0, 1) \setminus \{x\}$ sowie einen $\theta_{<}^d$ -Namens für U und einen $\psi_{>}^d$ -Namens für $R := \bar{U} = \bar{B}(0, 1) \in \mathfrak{BR}^d$. Stetige Konvertierung in $\bar{\vartheta}_{<}^{\eta}$ -Namen würde nach endlicher Zeit obiges m ausgeben und bis dahin nur ein endliches Anfangsstück des $\bar{\theta}_{<}^d \sqcap \psi_{>}^d$ -Namens gelesen haben; gemäß Definition 9.12 und Abschnitt 5.1e+f) besteht dieses aus in U enthaltenen abgeschlossenen rationalen Quadern \bar{Q}_i sowie aus $\mathbb{R}^d \setminus R$ ausschöpfenden offenen rationalen Quadern Q_i , $i = 1, \dots, N$. Wegen $x \notin U \supseteq \bar{Q}_i$ ist $\varepsilon := \min_{i=1}^N d_{\bar{Q}_i}(x)$ positiv. Betrachte jetzt $U' := B(0, 1) \setminus B(x, \varepsilon)$: nach Wahl von ε liegen die \bar{Q}_i auch hierin; auch bilden die gelesenen Q_i den Anfang einer Ausschöpfung von $\mathbb{R}^d \setminus R'$, $R' := \bar{U}' \in \mathfrak{BR}^d$. Die Konvertierung würde also, bei Eingabe des gleichen Anfangsstücks eines $\bar{\theta}_{<}^d \sqcap \psi_{>}^d$ -Namens für R' statt für R , weiterhin obiges m ausgeben, obwohl jetzt $\eta(m) = x \notin R'$ gilt: Widerspruch.

$\vartheta_{<}^{\eta} \sqcap \psi_{>}^d|^{\mathfrak{BR}^d} \not\prec_t \bar{\theta}_{<}^d|^{\mathfrak{BR}^d}$: Sei $R = \bar{B}(0, 1) \in \mathfrak{BR}^d$. Stetige Konvertierung würde bei Eingabe eines $\vartheta_{<}^{\eta} \sqcap \psi_{>}^d$ -Namens für R den $\theta_{<}^d$ -Namens eines U mit $\bar{U} = R$ ausgeben. Im Sinne von



Definition 9.12 und Abschnitt 5.1c) müßte dieser einen nichtleeren offenen rationalen Quader $Q = \prod_{j=1}^d (a_i, b_i) \subseteq B(0, 1)$ beinhalten und würde erscheinen in Abhängigkeit von nur endlich vielen $m_i \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m_i) \in R^\circ$ sowie (Abschnitt 5.1f) in $\mathbb{R}^d \setminus R$ liegenden abgeschlossenen rationalen Quadern \bar{Q}_i . Sei $\varepsilon := \prod_{j=1}^d |b_j - a_j| > 0$ das Volumen von Q und betrachte

$$R' := \bigcup_{i=1}^N \bar{B}(\eta(m_i), \varepsilon') \cap R \in \mathfrak{BR}^d, \quad \varepsilon' := \sqrt[d]{\varepsilon/N}.$$

Offenbar liegen die $\eta(m_i)$ in R' , gehören also ebenso zum Anfangsstück eines ϑ_\prec^n -Namens von R wie von R' . Auch die \bar{Q}_i liegen ebenso in $\mathbb{R}^d \setminus R$ wie in $\mathbb{R}^d \setminus R'$: Insgesamt weiß die Konvertierung nicht, ob sie es mit R oder mit R' zu tun hat, gibt aber in jedem Fall obigen Quader Q aus. Dieser hat jedoch in einem $\bar{\theta}_\prec^d$ -Namen von R' nichts zu suchen, denn mit R' hat auch jedes offene U' mit $R' = \overline{U'}$ Volumen höchstens $N \cdot \varepsilon'^d < \varepsilon$, kann also Q gar nicht enthalten: Widerspruch.

$\vartheta_\prec^n \sqcap \psi_\succ^d \mid \mathfrak{BR}^d \not\preccurlyeq_t \bar{\theta}_\prec^d \mid \mathfrak{BR}^d$ folgt aus obigem durch Transitivität,

$\vartheta_\prec^n \sqcap \psi_\succ^d \mid \mathfrak{BR}^d \not\preccurlyeq_t \vartheta_\prec^n \mid \mathfrak{BR}^d$ ebenso.

$\vartheta_\prec^n \sqcap \bar{\theta}_\prec^d \mid \mathfrak{BR}^d \sqcap \psi_\succ^d \not\preccurlyeq_t \theta_\prec^d \mid \mathfrak{BR}^d$: Sei $x \in B(0, 1) \setminus \text{range}(\eta)$ und $U := B(0, 1) \setminus \{x\}$, $R := \overline{U} = \bar{B}(0, 1) \in \mathfrak{BR}^d$. Betrachte einen $\vartheta_\prec^n \sqcap \psi_\succ^d$ -Namen von R sowie einen θ_\prec^d -Namen von U , letzteren gemäß Abschnitt 5.1f) aufgefaßt als Aufzählung aller in U enthaltenen abgeschlossenen rationalen Quadern \bar{Q}_i . Stetige Konvertierung würde im $\bar{\theta}_\prec^d$ -Namen von R gemäß Abschnitt 5.1c) nach endlicher Zeit einen offenen in R° liegenden rationalen Quader $Q \ni x$ ausgeben und bis dahin höchstens endlich viele der \bar{Q}_i sowie der $m_i \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m_i) \in R^\circ$ gelesen haben; sagen wir N Stück. Wegen $x \notin U \supseteq \bar{Q}_i$ und da x verschieden ist von allen $\eta(m_i)$, gilt

$$\varepsilon := \min \left\{ \min_{i=1}^N d_{\bar{Q}_i}(a), \min_{i=1}^N \|x - \eta(m_i)\|_2 \right\} > 0.$$

Betrachte nun $U' := B(0, 1) \setminus B(x, \varepsilon)$ und $R' := \overline{U'} \in \mathfrak{BR}^d$. Nach Wahl von ε liegen die \bar{Q}_i alle in U' und die $\eta(m_i)$ in R'° ; ebenso ist auch das bisher gelesene Anfangsstück des ψ_\succ^d -Namens von R auch Anfangsstück eines solchen von R' . Die Konvertierung würde also, bei Eingabe des $\vartheta_\prec^n \sqcap \bar{\theta}_\prec^d \sqcap \psi_\succ^d$ -Namens von R' auch den rationalen Quader $Q \ni x$ ausgeben obwohl $x \notin R'^\circ$ gilt: Widerspruch.

Mittels Proposition 9.29 ergeben sich daraus die entsprechenden Nichtberechenbarkeiten zwischen den dualen Darstellungen; allerdings erstmal nur für unbeschränkte reguläre Mengen, denn für $R \in \mathfrak{BR}^d$ ist $\mathbb{R}^d \setminus R \in \mathfrak{R}^d \setminus \mathfrak{BR}^d$. Dieser Defekt läßt sich jedoch leicht heilen, denn analog zu Proposition 9.29 sieht man schnell ein:

Proposition 9.30 Die Abbildung $\mathfrak{BR}^d \ni R \mapsto [-1,+1]^d \setminus R^\circ \in \mathfrak{BR}^d$ ist

- a) $(\theta_<^d \rightarrow \psi_>^d)$ -berechenbar und $(\psi_>^d \rightarrow \theta_<^d)$ -berechenbar;
- b) $(\vartheta_<^n \rightarrow \vartheta_>^n)$ -berechenbar und $(\vartheta_>^n \rightarrow \vartheta_<^n)$ -berechenbar;
- c) $(\bar{\vartheta}_<^n \rightarrow \bar{\vartheta}_>^n)$ -berechenbar und $(\bar{\vartheta}_>^n \rightarrow \bar{\vartheta}_<^n)$ -berechenbar;
- d) $(\bar{\vartheta}_<^n \rightarrow \bar{\vartheta}_>^n)$ -berechenbar und $(\bar{\vartheta}_>^n \rightarrow \bar{\vartheta}_<^n)$ -berechenbar;
- e) $(\bar{\theta}_<^d \rightarrow \bar{\psi}_>^d)$ -berechenbar und $(\bar{\psi}_>^d \rightarrow \bar{\theta}_<^d)$ -berechenbar;
- f) $(\psi_<^d \rightarrow \theta_>^d)$ -berechenbar und $(\theta_>^d \rightarrow \psi_<^d)$ -berechenbar;
- g) $(\bar{\psi}_<^d \rightarrow \bar{\theta}_>^d)$ -berechenbar und $(\bar{\theta}_>^d \rightarrow \bar{\psi}_<^d)$ -berechenbar.

Beispielsweise würde die Annahme (*) $\bar{\vartheta}_>^n \sqcap \theta_<^d |^{\mathfrak{BR}^d} \preccurlyeq_t \vartheta_>^n |^{\mathfrak{BR}^d}$ wegen

$$\begin{array}{ccccccc} R & \mapsto & [-1,+1]^d \setminus R^\circ & = & [-1,+1]^d \setminus R^\circ & \mapsto & [-1,+1]^d \setminus (([-1,+1]^d \setminus R^\circ)^\circ = R \\ \bar{\vartheta}_<^n \sqcap \psi_>^d |^{\mathfrak{BR}^d} & \xrightarrow[a+c]{9.30} & \bar{\vartheta}_>^n \sqcap \theta_<^d |^{\mathfrak{BR}^d} & \xrightarrow{(*)} & \vartheta_>^n |^{\mathfrak{BR}^d} & \xrightarrow[b]{9.30} & \vartheta_<^n |^{\mathfrak{BR}^d} \end{array}$$

für $R \in \mathfrak{BR}^d$ dem zweitletzten Punkt oben „ $\bar{\vartheta}_<^n \sqcap \psi_>^d |^{\mathfrak{BR}^d} \not\preccurlyeq_t \vartheta_>^n |^{\mathfrak{BR}^d}$ “ widersprechen.

10 Konvexe Mengen

Im letzten Kapitel haben wir systematisch die Berechenbarkeitsbeziehungen verglichen (Theorem 9.19, Folgerung 9.21 und Theorem 9.22) zwischen verschiedenen Darstellungen regulärer Mengen. Einige davon stellten sich als äquivalent heraus,

$$\mu^d \equiv \delta^d, \quad \omega^d \equiv \tau^d, \quad \bar{\psi}_<^d \equiv \bar{\vartheta}_<^n, \quad \bar{\theta}_>^d \equiv \bar{\vartheta}_>^n$$

die meisten jedoch waren verschieden. Im vorliegenden Kapitel geht es um die Frage, wie diese Beziehungen bei *konvexen* regulären (d.h. volldimensionalen, Proposition 9.2) Mengen aussehen.

Definition 10.1 Es sei \mathfrak{C}^d die Klasse aller *konvexen* regulären Mengen $C \subseteq \mathbb{R}^d$, d.h.

$$\forall x, y \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad : \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in C .$$

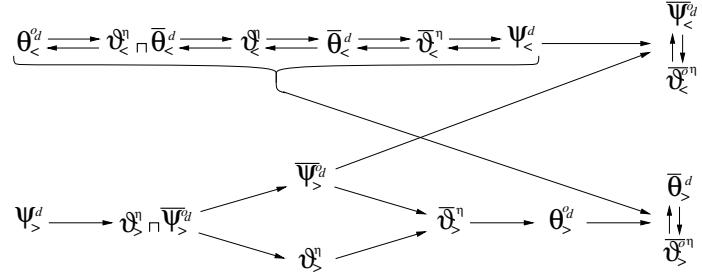
Wir betrachten die elementaren Darstellungen für \mathfrak{R}^d aus Theorem 9.19, jedoch eingeschränkt auf \mathfrak{C}^d ; also beispielsweise $\psi_<^d |^{\mathfrak{C}^d}$ oder $\bar{\theta}_>^d |^{\mathfrak{C}^d}$ statt $\psi_<^d$ oder $\bar{\theta}_>^d$. Der Einfachheit halber seien diese im aktuellen Kapitel aber ebenfalls kurz mit $\psi_<^d$, $\bar{\theta}_>^d$ etc. bezeichnet.

Alle bisherigen affirmativen Konvertierbarkeitsresultate gelten natürlich auch hier, doch kommen noch zusätzliche hinzu, und zwar werden (fast) alle positiven elementaren Darstellungen jetzt äquivalent:



Theorem 10.2 Sei $\eta : \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine dichte Aufzählung; bezeichne \mathfrak{BR}^d die Klasse aller in $[-1, +1]^d$ enthaltenen konvexen regulären Mengen²⁰.

Dann gelten zwischen den elementaren Darstellungen aus Abschnitt 9.2, eingeschränkt auf konvexe reguläre Mengen, die rechts skizzierten Konvertierbarkeitsrelationen. Das Fehlen gerichteter Wege von α nach β bedeutet wieder Unstetigkeit der Konvertierung, selbst auf effektiv beschränkten Mengen $\alpha|_{\mathfrak{BC}^d} \not\prec_t \beta|_{\mathfrak{BC}^d}$. Von der schwächsten



positiven Darstellung führen sogar dann keine Pfeile nach links zurück zu $\psi<^d$, wenn zusätzlich stärkste negative Information bereit steht: $\overline{\psi}<^d \sqcap \psi>^d|_{\mathfrak{BC}^d} \equiv \overline{\vartheta}<^n \sqcap \psi>^d|_{\mathfrak{BC}^d} \not\prec_t \psi<^d|_{\mathfrak{BC}^d}$. Analog führt schwache positive Information zu keinen weiteren Konvertierbarkeitsbeziehungen zwischen negativen elementaren Darstellungen: $\alpha> \not\prec \beta> \implies \alpha> \sqcap \overline{\psi}<^d|_{\mathfrak{BC}^d} \not\prec_t \beta>|_{\mathfrak{BC}^d}$. Anders jedoch bei zusätzlicher starker positiver $\psi<^d$ -Information: hier kollabiert auch die negative Hierarchie (fast) vollständig.



Die schwächste Darstellung bleibt also auch im negativen Fall separat.

Beweis: Siehe Abschnitt 10.1. □

Wie in Abschnitt 9.3 ergeben sich aus diesem systematischen Vergleich der elementaren Darstellungen die vollständigen Beziehungen zwischen den gebräuchlichen:

Folgerung 10.3 Eingeschränkt auf konvexe reguläre Mengen sind die Darstellungen aus Abschnitt 9.1, anders als in Folgerung 9.21, jetzt sämtlich uniform äquivalent:

$$\mu^d|_{\mathfrak{C}^d} \equiv \delta^d|_{\mathfrak{C}^d} \equiv \xi^d|_{\mathfrak{C}^d} \equiv \chi^d|_{\mathfrak{C}^d} \equiv \pi^d|_{\mathfrak{C}^d} \equiv \psi^d|_{\mathfrak{C}^d} \equiv \omega^d|_{\mathfrak{C}^d} \equiv \tau^d|_{\mathfrak{C}^d}$$

Beweis: Kombiniere Theoreme 9.19 und 10.2. □

Diese wichtige Erkenntnis verallgemeinert die Überlegungen von Kummer und Schäfer [54], welche

- nur nichtuniforme Äquivalenz
- ausschließlich in der Ebene ($d = 2$) betrachteten
- und δ^d, ξ^d, π^d nicht berücksichtigten.

Siehe auch EXERCISE 5.1.24 in [87]...

²⁰die sogenannten proper convex bodies [39]...

Offen bleibt die Frage, wo, beim Übergang von konvexen regulären zu allgemeinen regulären Mengen, die Äquivalenz der gebräuchlichen Darstellungen aufzubrechen beginnt. Mengen mit *beschränkter Unkonvexität* lassen sich zwischen diesen beiden Extremen parametrisieren. Hierzu sei an den Begriff der α -Hülle erinnert, siehe beispielsweise SEITEN 309-315 von [28] oder den rechten Teil von Abbildung 13.

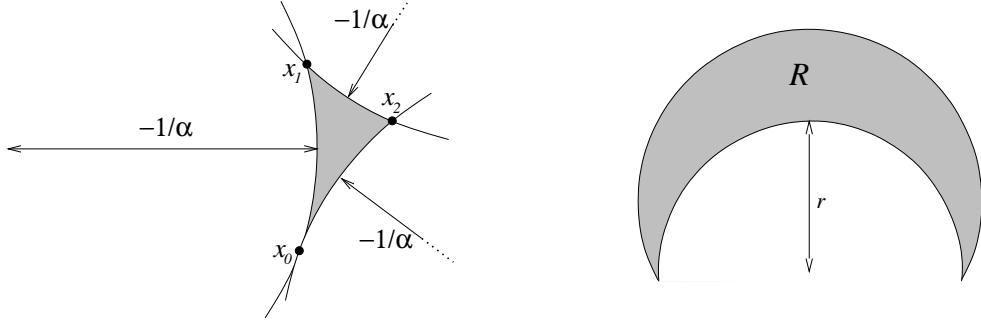


Abbildung 13: α -HÜLLE 3ER PUNKTE IN DER EBENE UND EINE $1/r$ -UNKONVEXE MENGE.

Definition 10.4 Sei $r > 0$. Eine $R \in \mathbb{R}^d$ heißt $1/r$ -unkonvex, wenn für jeweils $d + 1$ Punkte $x_0, \dots, x_d \in R$ auch ihre $(-1/r)$ -Hülle zu R gehört.

Da die 0-Hülle gerade die gewöhnliche konvexe Hülle liefert, ist eine Menge genau dann konvex, wenn ihre Unkonvexität 0 beträgt. Für $r < \infty$ hingegen sind auch konkave Einbuchtungen erlaubt, deren Krümmungsradius jedoch durch r beschränkt wird, siehe Abbildung 13 (linker Teil).

Die Beweise von $\psi_{<}^d |^{\mathbb{C}^d} \preccurlyeq \theta_{<}^d |^{\mathbb{C}^d}$ und $\theta_{\leq}^d \sqcap \theta_{<}^d |^{\mathbb{C}^d} \preccurlyeq \psi_{>}^d |^{\mathbb{C}^d}$ in Abschnitt 10.1, welche im konvexen Fall die Äquivalenz der gebräuchlichen Darstellungen garantieren, basieren wesentlich auf zwei geometrischen Konzepten: dem *Kernschatten* und der *kleinsten konvexen Hülle*. Die zentrale Frage lautet also, ob sich diese auch auf $1/r$ -unkonvexe Mengen bzw. α -Hüllen verallgemeinern lassen, zumindest für *konstantes* r bzw. $\alpha = -1/r$.

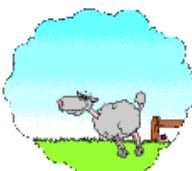
10.1 Beweis von Theorem 10.2

Die Anwesenheit der meisten Pfeile folgt aus Theorem 9.20. Wir zeigen

$\psi_{<}^d |^{\mathbb{C}^d} \preccurlyeq \theta_{<}^d |^{\mathbb{C}^d}$: Wegen Konvexität liegt mit $d + 1$ Punkten $x_0, \dots, x_d \in R^\circ$ auch der gesamte von ihnen aufgespannte Simplex in R° :

$$\text{chull}(x_0, \dots, x_d) := \left\{ \sum_{j=0}^d x_j \lambda_j \mid 0 \leq \lambda_j, \sum \lambda_j = 1 \right\} \subseteq R^\circ$$

Bei Eingabe der Liste aller R° schneidenden offenen rationalen Würfel Q (Punkt e von Abschnitt 5.1 und Lemma B.3b) wird unser Algorithmus daher alle $(d + 1)$ -Tupel (Q_0, \dots, Q_d) solcher Würfel betrachten. Jedes solche Q_j enthält einen Punkt x_j aus R° , und der gesamte offene Simplex $\text{chull}(x_0, \dots, x_d)^\circ$ gehört zu R° , kann also gemäß Abschnitt 5.1 Punkt d)

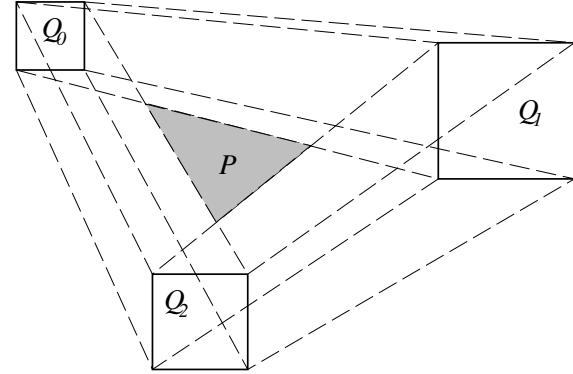


und Definition 9.12 zur Generierung eines $\theta_{<}^d$ -Namens von R° ausgegeben werden — bloß sind die x_j selbst leider gar nicht bekannt; nur, daß sie im jeweiligen Würfel Q_j liegen. Dies kann man umgehen durch Betrachtung der *kleinsten* konvexen Menge $P(Q_0, \dots, Q_d) := \bigcap_{x_j \in Q_j} \text{chull}(x_0, \dots, x_d)^\circ$, welche von allen möglichen Punktkombinationen $x_j \in Q_j$ aufgespannt wird. Tatsächlich wurde bereits in [27] bemerkt, daß zur Berechnung von P gar nicht alle (überabzählbar vielen) Positionierungen $x_j \in Q_j$ betrachtet werden müssen; es genügt, jedes x_j unabhängig die 2^d Ecken von Q_j durchlaufen zu lassen, siehe die Zeichnung rechts. P ist also ein offenes (möglicherweise leere) in R° enthaltenes konvexes Polytop. Aus den rationalen Ecken der Q_j lassen sich die Knoten von P mittels exakter Arithmetik in endlicher Zeit berechnen und daraus eine Triangulierung gewinnen. Letztere Simplizes geben wir aus. Indem man dies für *alle* aus den (abzählbar-unendlich vielen) Eingabe-Würfeln Q bildbaren $(d+1)$ -Tupel durchführt, ergibt sich schließlich gemäß Punkt d) von Abschnitt 5.1 ein $\theta_{<}^d$ -Name von R° . In der Tat überdecken die ausgegebenen Simplizes *ganz* R° , denn für jeden Punkt $p \in R^\circ$ gibt es einen offenen Ball $p \in B \subseteq R^\circ$ und einen offenen Simplex $p \in P = \text{chull}(x_0, \dots, x_d) \subseteq B$ mit rationalen Eckpunkten x_j , welche wiederum zu den Ecken geeigneter, hinreichend kleiner offener Würfel $Q_j \subseteq B$ gehören, die gerade P als kleinste konvexe Hülle im obigen Sinn haben.

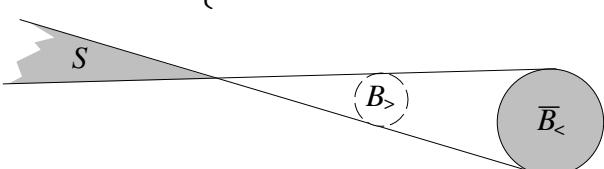
$\theta_{>}^d \sqcap \theta_{<}^d |^{\mathfrak{C}^d} \preccurlyeq \psi_{>}^d |^{\mathfrak{C}^d}$: Dieser Algorithmus basiert auf dem geometrischen Konzept des *Kernschattens*. Er erhält (Definition 9.12, Abschnitt 5.1 Punkte e+d) als Eingabe

- eine Liste aller *offener* rationaler Bälle $B_>$, welche $\mathbb{R}^d \setminus R^\circ$ treffen
- eine Liste aller ganz in R° liegenden *abgeschlossenen* rationalen Bälle $\overline{B}_<$.

Für so ein Paar besteht der **Kernschatten** $S(B_>, \overline{B}_<) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid B_> \subseteq \text{chull}(\{x\} \cup \overline{B}_<) \right\}$ aus genau denjenigen $x \in \mathbb{R}^d$, für die man — wissend daß $\overline{B}_<$ ganz in R° liegt und $B_>$ zumindest einen Punkt enthält, der *nicht* in R° liegt — sicher schließen kann, daß sie aus Konvexitätsgründen *nicht* zu R° gehören. Die Zeichnung rechts verdeutlicht dies ebenso wie die der Astronomie entnommene Namensgebung. Für Bälle $B_> = B(x, r)$ und $\overline{B}_< = \overline{B}(y, s)$ ist



DIE KLEINSTE VON DREI RATIONALEN QUADRATEN Q_0, Q_1, Q_2 AUFGESPANNTE KONVEXE HÜLLE P .

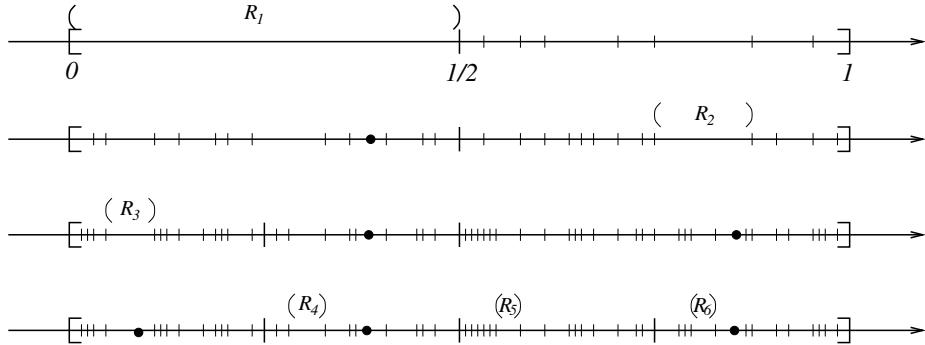


DER KERNSCHATTEN $S(B_>, \overline{B}_<)$, DEN ZWEI EUKLIDISCHE BÄLLE WERFEN.

der Kernschatten ein abgeschlossener (möglicherweise leerer, nämlich für $s \leq r$) Kegel. Basierend darauf kann man leicht, bei Eingabe rationaler x, y, s, t wie oben, offene rationale Bälle ausgeben, welche $S(B(x, r), \bar{B}(y, s))$ überdecken: diese bilden gemäß Abschnitt 5.1 Punkt d) Teil eines $\psi_>^d$ -Namens von R . Indem man diesen Prozeß auf die gesamte Eingabe — d.h. alle offenen bzw. abgeschlossenen Bälle $B_>$ bzw. $\bar{B}_<$, welche $\mathbb{R}^d \setminus R^\circ$ treffen bzw. in R° liegen — anwendet, erhält man den vollen $\psi_>^d$ -Namen, da die entsprechenden Kernschatten asymptotisch ganz $\mathbb{R}^d \setminus R$ überdecken.

Kommen wir nun zu den *Nichtberechenbarkeitsergebnissen*:

$\vartheta_>^n | \mathfrak{B}^{\mathfrak{C}^d} \not\leq_t \vartheta_<^n | \mathfrak{B}^{\mathfrak{C}^d}$ zeigte Peter Hertling in [44]. Nicht nur der Vollständigkeit halber skizziere ich hier seine Argumentation. Tatsächlich versagen die sonst in dieser Arbeit benutzten Beweistechniken hier: ein einzelnes unstetiges Gegenbeispiel führt noch zu keinem Widerspruch, da einem $\vartheta_<^n$ -Name gemäß Definition 9.18 unendlich viele 'Fehler' erlaubt sind. Statt dessen muß die angenommene von $\vartheta_>^n$ nach $\vartheta_<^n$ konvertierende TM M Schritt für Schritt quasi interaktiv immer weiter in die Irre geführt werden.



Wir betrachten den 1D-Fall und beginnen mit einem $\vartheta_>^n$ -Namen der konvexen Menge $R_1 = [0, \frac{1}{2}]$, also der Aufzählung aller $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m) \notin R_1$. Nach endlicher Zeit muß M ein m'_1 mit $\eta(m'_1) \in R_1^\circ = (0, \frac{1}{2})$ ausspucken.

Bis dahin wurden nur endlich viele $\eta(m_1), \dots, \eta(m_n) \in (\frac{1}{2}, 1)$ gelesen; wir können also unsere Meinung noch ändern, ein konvexas reguläres $R_2 \subseteq (\frac{1}{2}, 1) \setminus \{\eta(m_1), \dots, \eta(m_n)\}$ wählen und die bisher an M verfüllerten Daten zu einem $\vartheta_>^n$ -Namen von R_2 fortsetzen und insbesondere einige $\eta(m_i) \in (0, \frac{1}{2})$ eingeben. Erneut wird M nach endlicher Zeit ein m'_2 mit $\eta(m'_2) \in R_2^\circ \subseteq (\frac{1}{2}, 1)$ ausgeben.

Und auch diesmal existiert zwischen den bis dahin gelesenen endlich vielen $\eta(m_i)$ ein konvexas reguläres $R_3 \subseteq (0, \frac{1}{4})$, zu dessen $\vartheta_>^n$ -Namen sich die bisher eingegebenen Daten fortsetzen lassen, bis M ein $m'_3 \in R_3^\circ$ ausgibt. Sodann wählen wir nacheinander geeignete konvexe reguläre $R_4 \subseteq (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), R_5 \subseteq (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), R_6 \subseteq (\frac{3}{4}, 1), R_7 \subseteq (0, \frac{1}{8})$ und so weiter; jedesmal läßt sich der bisher eingelesene $\vartheta_>^n$ -Name entsprechend fortsetzen, bis M Punkte $\eta(m'_4), \eta(m'_5), \eta(m'_6), \eta(m'_7)$ ausgibt und so weiter.



Am 'Ende' dieses unendlichen Prozesses wird M eine in $[0, 1]$ dichte Folge von Punkten $\eta(m'_i)$ ausgegeben haben — d.h. einen $\bar{\mathcal{V}}_<^\eta$ -Namen von $[0, 1]$ — obwohl in der Eingabe sämtliche $m \in \text{dom}(\eta)$ irgendwann vorkommen, diese mithin einen $\mathcal{V}_>^\eta$ -Name nicht von $[0, 1]$ sondern der leeren Menge $\emptyset \in \mathfrak{BC}$ darstellte: Widerspruch.

$\psi_>^d |^{\mathfrak{BC}^d} \neq \psi_<^d |^{\mathfrak{BC}^d}$: Siehe Beispiel 5.4b).

$\bar{\mathcal{V}}_<^\eta \sqcap \psi_>^d |^{\mathfrak{BC}^d} \not\leq_t \psi_<^d |^{\mathfrak{BC}^d}$: Betrachte einen $\mathcal{V}_<^\eta \sqcap \psi_>^d$ -Namen von $R = \bar{B}(0, \frac{1}{2})$, d.h. eine Aufzählung aller $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m) \in R^\circ$ sowie (Abschnitt 5.1c) eine Überdeckung von $\mathbb{R}^d \setminus R$ mit offenen rationalen Quadern: dies ist erst recht ein $\bar{\mathcal{V}}_<^\eta \sqcap \psi_>^d$ -Name von $R \in \mathfrak{BC}^d$. Eine stetige Konvertierung in entsprechende $\psi_<^d$ -Namen würde nach endlicher Zeit einen R treffenden offenen rationalen Quader $Q \neq \emptyset$ (Abschnitt 5.1e) ausgeben und bis dahin höchstens endlich viele m_1, \dots, m_N gelesen haben. $M' := \{m_1, \dots, m_N\} \subseteq \text{dom}(\eta)$ hat offenbar $\overline{\eta[M]} = \emptyset$, so daß sich dieser Anfang auch zu einem $\bar{\mathcal{V}}_<^\eta$ -Namen von $R' := \emptyset \in \mathfrak{BC}^d$ fortsetzen läßt; ebenso der bisher gelesene Anfang des $\psi_>^d$ -Namens von R . Die stetige Konvertierung würde auch bei Eingabe dieses $\bar{\mathcal{V}}_<^\eta \sqcap \psi_>^d$ -Namens für R' den Quader Q ausgeben, obwohl dieser R' gar nicht trifft: Widerspruch.

$\bar{\mathcal{V}}_>^\eta \sqcap \theta_<^d |^{\mathfrak{BC}^d} \not\leq_t \theta_>^d |^{\mathfrak{BC}^d}$ beweist man analog.

$\theta_>^d \sqcap \bar{\mathcal{V}}_<^\eta |^{\mathfrak{BC}^d} \not\leq_t \bar{\mathcal{V}}_>^\eta |^{\mathfrak{BC}^d}$: Betrachte $R = B(0, \frac{1}{2}) \in \mathfrak{BC}^d$ und einen entsprechenden $\theta_>^d \sqcap \mathcal{V}_<^\eta$ -Namen, also (Definition 9.12, Abschnitt 5.1e) eine Aufzählung aller $\mathbb{R}^d \setminus R^\circ$ treffenden offenen rationalen Quadern Q sowie die Aufzählung aller $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m) \in R^\circ$. Eine stetige Konvertierung in entsprechende $\bar{\mathcal{V}}_>^\eta$ -Namen würde nach endlicher Zeit ein $m' \in \text{dom}(\eta)$ mit $x' := \eta(m') \in [-1, +1]^d \setminus R$ ausgeben (Definition 9.18) und bis dahin höchstens endlich viele m und Q gelesen haben; sagen wir: Wähle in jedem Q_i einen von x' verschiedenen Punkt q_i und betrachte $\epsilon' := \min_{i=1}^N \|q_i - x'\|_2$ sowie $R' := \bar{B}(x', \epsilon') \cap [-1, +1]^d \in \mathfrak{BC}^d$. Wegen $q_i \notin R'^\circ$ treffen die bisher gelesenen Q_i die Menge $\mathbb{R}^d \setminus R'^\circ$, so daß sich dieser Teil des $\theta_>^d$ -Namens von R auch auf R' beziehen läßt; ebenso besagen die endlich vielen gelesenen m im Rahmen eines $\bar{\mathcal{V}}_<^\eta$ -Namens über R gar nichts und lassen sich zu einem entsprechenden Namen für R' fortsetzen. Die stetige Konvertierung würde auch bei Eingabe dieses $\theta_>^d \sqcap \bar{\mathcal{V}}_<^\eta$ -Namens für R' das obige m' ausgeben und damit ($x' = \eta(m') \in R'^\circ$) ein $M' \subseteq \text{dom}(\eta)$ mit $x' \in \overline{\eta[M]} \neq \overline{\mathbb{R}^d \setminus R} \not\ni x'$: Widerspruch.

$\bar{\psi}_>^d \sqcap \bar{\mathcal{V}}_<^\eta |^{\mathfrak{BC}^d} \not\leq_t \psi_>^\eta |^{\mathfrak{BC}^d}$: Betrachte $R = B(0, \frac{1}{2}) \in \mathfrak{BC}^d$ und ein $m' \in \text{dom}(\eta)$ mit $x' := \eta(m') \in [-1, +1]^d \setminus R$. Wähle $\psi_>^d \sqcap \mathcal{V}_<^\eta$ -Namen von $A := R \cup \{x'\}$, also (Abschnitt 5.1f) eine Aufzählung aller in $\mathbb{R}^d \setminus A$ enthaltenen abgeschlossenen rationalen Quadern \bar{Q} sowie die Aufzählung aller $m \in \text{dom}(\eta)$ mit $\eta(m) \in A^\circ$: Dies ist ein $\bar{\psi}_>^d \sqcap \bar{\mathcal{V}}_<^\eta$ -Name von $R = \overline{A^\circ}$. Stetige Konvertierung in entsprechende $\psi_>^\eta$ -Namen würde wegen $x' \notin R$ nach endlicher Zeit das obige m' ausgeben und bis dahin höchstens endlich viele m und \bar{Q} gelesen haben; sagen

wir: $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_N$. Wegen $\bar{Q}_i \subseteq \mathbb{R}^d \setminus A$ enthalten diese das x' nicht, haben also positiven Abstand zu ihm: $\varepsilon' := \min_{i=1}^N d_{\bar{Q}_i}(x') > 0$. Betrachte jetzt $R' := \bar{B}(x', \varepsilon'/2) \cap [-1, +1]^d \in \mathfrak{BC}^d$: Nach Wahl von ε' liegen die $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_N$ in $\mathbb{R}^d \setminus R'$, sind also Anfangsstück eines $\psi_>^d$ -Namens von R' ; wie üblich haben auch die endlich vielen $m \in \text{dom}(\eta)$ nichts zu sagen, so daß sich alle bisher gelesene Information von R ebenso auf R' beziehen läßt. Die stetige Konvertierung würde auch bei Eingabe dieses $\bar{\vartheta}_>^n \sqcap \bar{\vartheta}_<^n$ -Namens für R' das obige $x' = \eta(m') \in R'^\circ$ ausgeben, obwohl ein $\vartheta_>^n$ -Name für R' doch nur solche m mit $\eta(m) \notin R$ enthalten darf: Widerspruch.

$\vartheta_>^n \sqcap \bar{\vartheta}_<^n |^{\mathfrak{BC}^d} \not\leq_t \bar{\psi}_>^d |^{\mathfrak{BC}^d}$: Betrachte $R := \emptyset \in \mathfrak{BC}^d$ und einen entsprechenden $\vartheta_>^n \sqcap \vartheta_<^n$ -Namen. Stetige Konvertierung nach $\bar{\psi}_>^d$ würde also den $\psi_>^d$ -Namen eines $A \in \mathfrak{A}^d$ mit $A^\circ = \emptyset$ ausgeben, d.h. (Abschnitt 5.1c) nach endlicher Zeit einen offenen rationalen Quader $\emptyset \neq Q \subseteq [-1, +1]^d$ melden und bis dahin vom $\vartheta_>^n$ -Namen höchstens endlich viele $m \in \text{dom}(\eta)$ gelesen haben; sagen wir: m_1, \dots, m_N . Wähle nun einen von diesen $\eta(m_i)$ verschiedenen Punkt $x' \in Q$ sowie $\varepsilon' := \min_{i=1}^N \|x' - \eta(m_i)\|_2 > 0$ und $R' := \bar{B}(x', \varepsilon'/2) \cap [-1, +1]^d \in \mathfrak{BC}^d$: Nach Wahl von ε' liegen die $\eta(m_i)$ nicht in R' , sind in einem $\vartheta_>^n$ -Namen für R' ebenso zulässig wie in dem für R . Wie üblich hat auch das bisher gelesene endliche Teilstück des $\bar{\vartheta}_<^n$ -Namens nichts zu sagen, so daß sich alle bisher gelesene Information von R ebenso auf R' beziehen läßt. Die stetige Konvertierung würde auch bei Eingabe dieses $\vartheta_>^n \sqcap \bar{\vartheta}_<^n$ -Namens für R' das obige Q ausgeben, obwohl doch für jedes $A' \in \mathfrak{A}^d$ mit $x' \in R' = \overline{A'^\circ} \subseteq A'$ gilt $x' \in Q \not\subseteq \mathbb{R}^d \setminus A' \not\ni x'$: Widerspruch.

$\bar{\vartheta}_>^n \sqcap \bar{\vartheta}_<^n |^{\mathfrak{BC}^d} \not\leq_t \bar{\psi}_>^d |^{\mathfrak{BC}^d}$ folgt aus obigem durch Transitivität,

$\vartheta_>^n \sqcap \bar{\vartheta}_<^n |^{\mathfrak{BC}^d} \not\leq_t \vartheta_>^n |^{\mathfrak{BC}^d}$ ebenso.

$\vartheta_>^n \sqcap \bar{\psi}_>^d \sqcap \bar{\vartheta}_<^n |^{\mathfrak{BC}^d} \not\leq_t \psi_>^d |^{\mathfrak{BC}^d}$: Sei $a \in B(0, 1) \setminus \text{range}(\eta)$, $A := \{a\}$ und betrachte einen $\vartheta_>^n \sqcap \psi_>^d \sqcap \vartheta_<^n$ -Namen von A , der damit auch ein $\vartheta_>^n \sqcap \bar{\psi}_>^d \sqcap \bar{\vartheta}_<^n$ -Name von $R := \overline{A^\circ} = \emptyset \in \mathfrak{BC}^d$ ist. Stetige Konvertierung in entsprechende $\psi_>^d$ -Namen würde (Abschnitt 5.1f) nach endlicher Zeit den abgeschlossenen rationalen Quader $\bar{Q} = [-1, +1]^d$ ausgeben und bis dahin höchstens endlich (sagen wir, N) viele $m_i \in \text{dom}(\eta)$ und abgeschlossene rationale Quader $\bar{Q}_i \subseteq \mathbb{R}^d \setminus A$ gelesen haben. Diese enthalten das a nicht, es hat also positiven Abstand zu ihnen ebenso wie zu den $\eta(m_i)$:

$$\varepsilon' := \min \left\{ \min_{i=1}^N d_{\bar{Q}_i}(a), \min_{i=1}^N \|a - \eta(m_i)\|_2 \right\} > 0 .$$

Betrachte jetzt $R' := \bar{B}(a, \varepsilon'/2) \cap [-1, +1]^d \in \mathfrak{BC}^d$: Nach Wahl von ε' liegen die $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_N$ in $\mathbb{R}^d \setminus R'$, sind also Anfangsstück eines $\psi_>^d$ -Namens von R' ; ebenso erfüllen die m_i des $\vartheta_>^n$ -Namens $\eta(m_i) \notin R'$; und wie üblich spielt das endliche Anfangsstück eines $\bar{\vartheta}_<^n$ -Namens sowieso keine Rolle. Insgesamt lassen sich alle bisher gelesenen Informationen von R ebenso auf R' beziehen. Die stetige Konvertierung würde also auch bei Eingabe dieses $\vartheta_>^n \sqcap \bar{\psi}_>^d \sqcap \bar{\vartheta}_<^n$ -Namens für R' den obigen Würfel $\bar{Q} = [-1, +1]^d$ ausgeben, obwohl selber definitiv nicht in $\mathbb{R}^d \setminus R'$ enthalten ist: Widerspruch.



Proposition 9.29 nützt hier übrigens wenig, da das abgeschlossene Komplement einer *konvexen* regulären Menge nicht mehr notwendig konvex ist.

11 Ausblick

Die vorliegende Dissertation untersuchte einige wichtige und interessante geometrische Probleme: Konvexe Hülle, Bestimmung der Extrempunkte, Lineare Algebra, Affine Gleichungssysteme, Hauptachsentransformation von Ellipsoiden, Lineares Programmieren. Erwartungsgemäß hängt ihre Berechenbarkeit vom verwendeten Rechenmodell ab: auf der in der Algorithmischen Geometrie üblichen

- a) **realRAM** mit exakter reeller Arithmetik und Tests

ist alles unproblematisch; realistischere Modelle approximieren reelle Zahlen als Folgengrenzwert rationaler, und zwar

- b) mit Fehlerschranken, die jedoch endlich oft verletzt werden dürfen;
- c) mit strikten Fehlerschranken;
- d) ganz ohne Fehlerschranken.

Letztere drei Modelle lassen sich im Rahmen der **TTE** als Typ-2 Maschinen bezüglich drei entsprechender Darstellungen reeller Zahlen betrachten. Modell b) erwies sich (Theorem 8.2b) als mindestens so stark wie die **realRAM**, sodaß alle betrachteten Probleme auch in diesem Sinn berechenbar sind.

Modell c) ist das in der Rekursiven Analysis gebräuchlichste und dürfte auch in der Praxis die größte Relevanz besitzen. Hier, so zeigte sich, sind die betrachteten Probleme im allgemeinen nur mit zusätzlichen, von Fall zu Fall variierenden Nichtdegeneriertheitsvoraussetzungen berechenbar. Dies entspricht der numerischen Erfahrung, wonach beispielsweise Matrixdiagonalisierung im Fall entarteter Eigenwerte zu Instabilitäten neigt. Für dies und einige weitere Probleme konnten sogar die *genauen* Einschränkungen identifiziert werden, an denen die Berechenbarkeit hängt. Im Fall der Linearen Programmierung waren dies

- Nullzeilenfreiheit der Matrix A der Randbedingungen,
- Beschränktheit und
- Volldimensionalität des Optimierungsbereichs $L(A, b)$.

Tatsächlich lassen sich mit den gleichen Voraussetzungen sogar beliebig nichtlineare stetige Funktionen über $L(A, b)$ optimieren. Auch diese Form des Optimierungsbereichs, ja sogar seine Konvexität konnte abgeschwächt werden: aus der Nullzeilenfreiheit von $A = (a_i)$ wird die Offenheit der Randbedingungen g_i , aus der Volldimensionalität die Regularität, siehe Ergebnis 8.6.

Bei dessen Beweis bestand ein wichtiger Schritt in der Suche nach einem geeigneten Berechenbarkeitsbegriff für reguläre Mengen, welcher insbesondere die Booleschen Operationen „ \cap “ und „ \cup “ unterstützen sollte. Dieser wurde gefunden auf Grund systematischer Untersuchung verschiedener jeweils ad-hoc eingeführter Darstellungen aus der Literatur. Die Beziehungen zwischen ihnen ergaben sich aus dem Vergleich sogenannter elementarer Darstellungen in Theorem 9.20. Letzteres, ursprünglich ein rein beweistechnisches Werkzeug, offenbarte die kleine Überraschung, daß (starke) positive und (schwache) negative Information im allgemeinen nicht unabhängig sind. Interessant waren auch analoge Betrachtungen für den Fall *konvexer* regulärer Mengen, die Vorarbeiten von Kummer und Schäfer verallgemeinerten (Folgerung 10.3).

So viel zu Modell c). Meine dafür gefundenen Aussagen treffen, solange es um Berechenbarkeit reeller Funktionen (und nicht Operatoren oder Mengen) geht, ebenso auch auf b) zu: positive Ergebnisse lassen sich mit Theorem 8.2c) übertragen; und die negativen Ergebnisse bezüglich c) basierten sämtlich auf Unstetigkeitsargumenten (Hauptsatz der Rekursiven Analysis), welche wegen Theorem 8.2e) auch die Berechenbarkeit bezüglich b) ausschließen.

Natürlich bin auch ich ein Narr (Seite 3), habe mit dieser Arbeit mehr offene Fragen aufgeworfen als Antworten gefunden:

- Welche Operationen auf regulären Mengen (Durchschnitt \cap , Vereinigung \cup , abgeschlossenes Komplement $R \mapsto \overline{\mathbb{R}^d \setminus R}$, Urbild $f^{-1}[\cdot], \dots$) werden unter welchen Darstellungen berechenbar? Abschnitt 9.4 untersuchte diese nur für ψ^d, μ^d, ξ^d .

Beispielsweise stellten wir fest, daß regulärer Durchschnitt $(R_1, R_2) \mapsto R_1 \cap R_2$ — selbst wo definiert und mit zusätzlicher stärkster negativer Information — nicht $(\psi_<^d \times \psi_<^d \rightarrow \psi_<^d)$ -stetig ist (Beispiel 9.23). Wohl aber ist er $(\psi_>^d \times \psi_>^d \rightarrow \psi_>^d)$ -berechenbar (Lemma 5.8b), ja sogar $(\theta_<^d \times \theta_<^d \rightarrow \theta_<^d)$ -berechenbar und $(\overline{\theta}_<^d \times \overline{\theta}_<^d \rightarrow \overline{\theta}_<^d)$ -berechenbar: Proposition 9.24. Darüberhinaus kann man sogar für *alle* positiven elementaren Darstellungen $\alpha_<$ seine $(\theta_<^d \times \alpha_< \rightarrow \alpha_<)$ -Berechenbarkeit zeigen! Dies generalisiert Proposition 9.30, wo nur nach dem Schnitt von $R_1 := \mathbb{R}^d \setminus R$ (Proposition 9.29) mit dem festen, $\theta_<^d \sqcap \psi_>^d$ -berechenbaren $R_2 := [-1, +1]^d$ gefragt wird.

- Das Bild einer regulären Menge unter stetigen offenen Funktionen $R \mapsto f[R]$ liefert zwar wieder eine reguläre Menge (Proposition 9.4e+f); es deutet jedoch einiges darauf hin, daß die entsprechende Operation nicht effektiv ist. Grob gesagt: die von einer $[\rho^n \rightarrow \rho^m]$ -Kodierung von f bereitgestellten Informationen respektieren nicht die Offenheit von f .

Gemäß LEMMA 6.1.7 in [87] kann man einen $[\rho^n \rightarrow \rho^m]$ -Namen von f auch auffassen als abzählbares Produkt (Definition 2.19) von $\theta_<^d$ -Namen, nämlich für offene rationale Würfel Q^m jeweils einen $\theta_<^n$ -Namen von $f^{-1}[Q^m] \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dies ist inhärent verknüpft mit der Eigenschaft, daß Urbilder offener Mengen auch wirklich offen sind, d.h. mit der Stetigkeit von f . Für offene Funktionen $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, bei denen also die *Bilder* offener Mengen wieder offen sind, bietet sich analog an, für offene rationale Würfel Q^n jeweils einen $\theta_<^m$ -Namen von $g[Q^n]$ zu kodieren. Bezuglich dieser neuen Darstellung wäre $\mathfrak{O}^n \ni V \mapsto f[V] \in \mathfrak{O}^m$ endlich $(\theta_<^n \rightarrow \theta_<^m)$ -berechenbar.



- Algebraische Geometrie befaßt sich mit Mengen, die als Lösungen von Systemen polynomieller Un- und Gleichungen gegeben sind, d.h. als Durchschnitte von Urbildern unter Polynomen. Die Effektivitätseigenschaften solcher Operationen zu untersuchen bietet eine interessante Fortsetzung von Proposition 9.24: Polynome sind von Natur aus stetig und über den komplexen Zahlen sogar effektiv offen im obigen Sinn; wegen Gleichungen sind die Ergebnismengen regulär jedoch nur noch auf geeigneten *Untermannigfaltigkeiten* des \mathbb{C}^d .
- Gemäß Definitionen 9.1 und 10.1 wird auch die leere Menge als regulär und konvex angesehen, d.h. $\emptyset \in \mathfrak{C}^d$. An einzelnen Stellen der vorliegenden Dissertation spielte sie jedoch eine Sonderrolle, z.B. in Proposition 5.6, in Theorem 9.28b) oder beim Beweis von $\vartheta_{>}^v|_{\mathfrak{C}^d} \not\prec_t \bar{\psi}_{<}^d|_{\mathfrak{C}^d}$ in Theorem 10.2. Tatsächlich wird letztere Aussage *falsch*, wenn man die leere Menge verbietet. Hier gilt, wie Hertling in [44] überraschend feststellt, sogar $\vartheta_{>}^d|_{\mathfrak{C}^d \setminus \{0\}} \preccurlyeq \bar{\vartheta}_{<}^v|_{\mathfrak{C}^d \setminus \{0\}}$. Eine vollständige Untersuchung, ob und wie die Hierarchien aus Theoremen 9.20 und 10.2 *ohne* leere Menge weiter zusammenfallen, fehlt jedoch bislang.
- Ebenso fehlt der *nichtuniforme* Vergleich von Berechenbarkeitsbegriffen. Die positiven Ergebnisse in dieser Dissertation betrafen den uniformen Fall und gelten nichtuniform daher erst recht. Die negativen Ergebnisse basierten i.d.R. auf Unstetigkeitsargumenten und beweisen daher nur uniforme Nichtberechenbarkeiten.
- Regularität ist eine rein topologische Eigenschaft. Anstelle entsprechender Teilmengen des \mathbb{R}^d kann man auch solche eines beliebigen fixierten metrischen Raumes betrachten. Tatsächlich wurden die Effektivitätseigenschaften abgeschlossener Mengen auch in solch allgemeinen Kategorien bereits betrachtet [13]; eine entsprechende Untersuchung für reguläre Mengen steht noch aus.
- Im Anschluß an Definition 2.21 hatten wir erwähnt, daß TTE auf topologischen Räumen solche Darstellungen bevorzugt, die mit der Topologie in einem gewissen Sinne verträglich ('*admissible*') sind [73]. Welche der hier betrachteten Darstellungen reglärer Mengen erfüllen diese Bedingung?
- Der nächste Schritt nach sichergestellter Berechenbarkeit (z.B. von nichtlinearer Optimierung) ist die Frage nach der Komplexität. TTE stellt auch hierzu einen formalen Rahmen bereit, doch nimmt die Sensitivität von (im Rahmen reiner Berechenbarkeit ignorierbarer) Details stark zu:
 - Sollen Fehlerschranken $|q_n - r| \leq \varepsilon_n$ mit 2^{-n} oder mit $1/n$ gegen Null gehen?
 - Können rationale Approximationen mit Einheitskosten (RAM) oder bitweise (TM) verknüpft werden?
 - Wie mißt man die Konvergenzgeschwindigkeit bei Funktionen auf einem Nichtkom-paktum wie \mathbb{R} ?

Anhang A schlägt deshalb einen anderen, halb-algebraischen Zugang zu Komplexitätsfragen unter Berücksichtigung von Berechenbarkeitsaspekten und TTE vor und illustriert diesen am Beispiel des ubiquitären geometrischen Problems Point Location.

A Eine Komplexitätsuntersuchung

Kapitel 4 bestimmte für das Lineare Programmieren, welche Arten von Degeneriertheit zu seiner Nicht-Berechenbarkeit führen. Zahlreiche Implementierungen jedoch weisen zusätzlich Instabilitäten auch für andere Arten von Degeneriertheit auf: wenn zwei Hyperebenen parallel liegen oder sich $> d$ viele in einem Punkt treffen zum Beispiel.

Vordergründig gibt es keinen Grund, warum ein Algorithmus mit dieser Art von Eingaben Schwierigkeiten haben sollte: Instabilität ist für sie nicht Problem-immanent sondern zusätzlich — ein ‘bug’, zumindest vom Standpunkt reiner Berechenbarkeit. Vom Geschwindigkeitsstandpunkt aus hingegen kann es durchaus sinnvoll sein, solche zusätzlichen Instabilitäten zuzulassen — sozusagen ein ‘feature’:

Der vorliegende Anhang erläutert dies an Hand eines Beispiels, welches sich, unter Inkaufnahme zusätzlicher Unstetigkeiten, beweisbar exponentiell schneller lösen lässt als ohne:

A.1 Point Location

Point Location:

Fixiert: n affine Hyperebenen H_i im \mathbb{R}^d

Gegeben: ein Punkt $x \in \mathbb{R}^d$

Aufgabe: Finde in der von den H_i induzierten Partition des Raumes diejenige Zelle Z_j , welche x enthält!

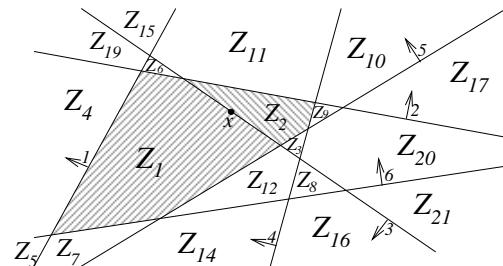


Abbildung 14: POINT LOCATION IST UNSTETIG:

INFINITESIMALE PERTURBATION SCHIEBT x IN DIE EINE ODER DIE ANDERE ZELLE.

Tatsächlich handelt es sich hierbei um eine Verallgemeinerung von Rucksack aus Kapitel 8: ” $\exists x \in \{0,1\}^d : \sum_{i=1}^d a_i x_i = 1$ ” ist äquivalent dazu, daß der Vektor $a \in \mathbb{R}^d$ nicht im Inneren einer Zelle des Hyperebenen-Arrangements

$$\mathcal{H} = \{H_x : 0 \neq x \in \{0,1\}^d\}, \quad H_x = \{a \in \mathbb{R}^d : \sum a_i x_i = 1\}$$

liegt sondern auf deren Rand; analog lässt sich TSP mit d Orten umformulieren als Instanz von Point Location mit $d!$ Hyperebenen im \mathbb{R}^{d^2} .

In der Algorithmischen Geometrie ist dieses Problem und seine Komplexität wohlbekannt: Für jedes feste Arrangement \mathcal{H} von n Hyperebenen im \mathbb{R}^d lässt es sich durch einen Linearen Entschei-



dungsbaum der Tiefe (d.h. Laufzeit) $\mathcal{O}(\text{poly}(d) \cdot \log n)$ lösen²¹ und das ist optimal; siehe z.B. **Theorem 3.26** und **Exercise 3.15** in [17]. So ein binärer Baum erhält als Eingabe den Punkt x , evaluiert in jedem inneren Knoten v ein affines Funktional $p_v(x)$ und verzweigt je nachdem, ob dieses negativ ist oder nicht; mit anderen Worten: in Abhängigkeit vom Wert der Threshold-Funktion

$$p_v : \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i + \lambda_{d+1} \geq 0 \\ 0 & \text{falls } \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i + \lambda_{d+1} < 0 \end{cases}. \quad (\text{A.1})$$

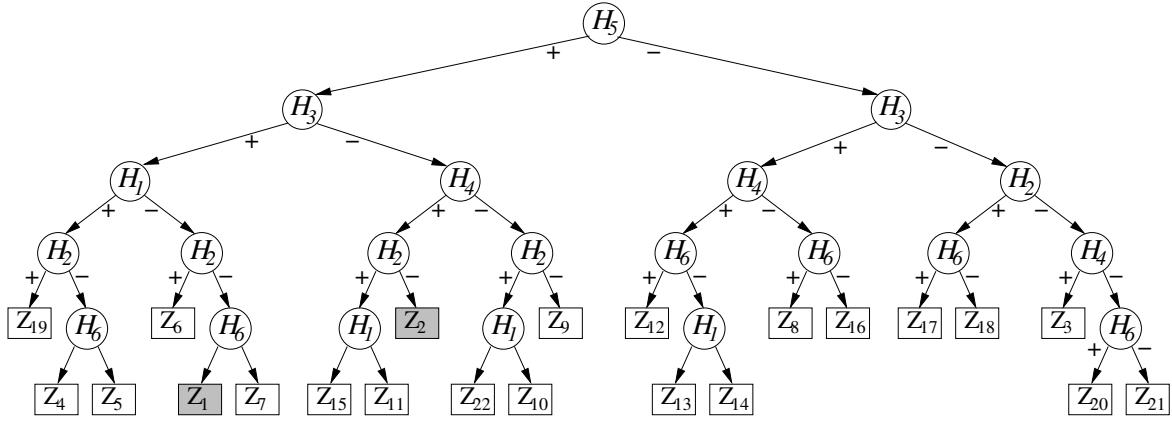


Abbildung 15: EIN LINEARER ENTSCHEIDUNGSBAUM FÜR DAS ARRANGEMENT IN ABB.14.

Beachte, daß der Wert von p_v 'springt' auf der Hyperebene $H_v = p_v^{-1}(0)$, d.h. dieses Prädikat, sozusagen der Kernpunkt des algebraischen Modells **Linear Decision Tree**, hängt *unstabil* von $x \in H_v$ ab; ja, das gesamte Problem

$$\text{PointLoc}_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto j \in \mathbb{N}, \quad x \in Z_j \quad (\text{A.2})$$

ist gar nicht berechenbar im Sinne der Rekursiven Analysis — egal wie man es in den 'Zweifelsfällen' $x \in \bigcup_{i=1}^n H_i = \bigcup \mathcal{H}$ definiert. Andererseits ist es *ohne* diese Stellen — d.h. eingeschränkt auf $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ — wohldefiniert und $(\rho^d \rightarrow v)$ -berechenbar, Überdies ist, da es sich um eine Funktion vom kontinuierlichem Argument $x = \rho^d(\bar{\sigma})$ mit $\bar{\sigma} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ in den diskreten Wertebereich aller $j = v(\bar{\tau})$ mit $\bar{\tau} \in \{0, 1\}^*$ handelt, für jedes solche x die Laufzeit endlich (siehe Anhang B.1) wenn auch unbeschränkt. Alles in allem machen die in der TTE üblichen Komplexitätsbegriffe — Asymptotik in Termen von $\log \frac{1}{\varepsilon}$, der Präzision der Ausgabe-Approximation, *nicht* in der Anzahl n der das Problem definierenden Hyperebenen — hier wenig Sinn.

A.2 Ein berechenbar-algebraisches Modell

Folgende Synthese pickt nun quasi die Rosinen aus beiden Sichtweisen. Grob gesagt wird, ähnlich der **feasible realRAM** [11], der Befehlsumfang der algebraischen Modelle — z.B.

²¹Damit kann man Rucksack in polynomieller Zeit entscheiden in diesem nicht-uniformen Rechenmodell!

des Computation Tree aus ABSCHNITT 4.4 von [17] — auf Typ-2 berechenbare (d.h. *stabile*) Primitive eingeschränkt. Die totalen Operationen $+, -, \cdot, *$ und das partielle $/$ sind berechenbar, stehen also weiterhin zur Verfügung; unberechenbare reelle Konstanten (z.B. die Zahl $c = \sum_{n \in N} 2^{-n}$ für nicht-rekursives $N \subseteq \mathbb{N}$) sind jedoch tabu; auch als Prädikate sind höchstens $(p \rightarrow v)$ -berechenbare partielle Funktionen $p : \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ erlaubt.

Wie bei TTE üblich, operieren wir wieder erstmal mit Namen (unendlichen Zeichenketten aus 0en und 1en), denen dann später eine Semantik (z.B. als reelle Zahlen) via Darstellungen zugeordnet wird.

Definition A.1 Sei Ω eine Menge Typ-2 berechenbarer partieller Funktionen

$$\omega : \subseteq (\{0, 1\}^{\mathbb{N}})^{\text{ar}(\omega)} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \quad \text{ar}(\omega) \in \mathbb{N}_0$$

zwischen Tupeln unendlichen Strings²² und P eine Menge Typ2-berechenbarer partieller Tests auf unendlichen Strings $p : \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}$.

Ein Typ-2 Berechnungsbaum über Ω und P ist ein endlicher Binärbaum T mit drei Arten von Knoten v verschiedenen Ausgangsgrads d :

- AUSGABEKNOTEN sind Blätter ($d = 0$);
- VERZWEIGUNGSKNOTEN ($d = 2$) sind mit einem $p \in P$ versehen;
- BERECHNUNGSKNOTEN ($d = 1$) sind mit einem $\omega \in \Omega$ sowie mit $\text{ar}(\omega)$ vielen Vorgängern $u_1, \dots, u_{\text{ar}(\omega)}$ von v in T versehen.

T induziert einen Algorithmus — ebenfalls mit T bezeichnet — welcher eine partielle Funktion $T : \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ realisiert, wie folgt: Die Eingabe $\bar{\sigma} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ wird der Wurzel r von T zugewiesen. Dann geht es rekursiv weiter, je nach Ausgangsgrad d von r

- gebe ($d = 0$) die dem Blatt r zugewiesene unendliche Zeichenkette aus und terminiere.
- werte ($d = 2$) das zu r gehörende Prädikat p auf der r zugewiesenen unendlichen Zeichenkette $\bar{\tau}$ aus; verzweige, je nach Wert von $p(\bar{\tau})$, nach links ($= 0$) oder nach rechts ($= 1$). Weise $\bar{\tau}$ dem entsprechenden Nachfolger zu. Falls $\bar{\tau} \notin \text{dom}(p)$, so divergiere, d.h. per Definition sei das anfangs eingegebene $\bar{\sigma} \notin \text{dom}(T)$.
- berechne ($d = 1$) $\bar{\tau} := \omega(\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_{\text{ar}(\omega)})$, wobei $\bar{\tau}_i$ die zum mit r versehenen Vorgänger u_i zugewiesene Zeichenkette bezeichnet; weise $\bar{\tau}$ dem eindeutigen Nachfolger von r zu. Ebenso wie oben sei $\bar{\sigma} \notin \text{dom}(T)$, falls $(\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_{\text{ar}(\omega)}) \notin \text{dom}(\omega)$.

Der zweite Punkt definiert (implizit) die Menge $\text{dom}(T)$; ist $\bar{\sigma} \in \text{dom}(T)$, so schreiben wir $T(\bar{\sigma})$ für die eindeutige Ausgabe ($d = 0$) des Algorithmus' T bei Eingabe von $\bar{\sigma}$.

²²Berechenbare (String-)Konstanten sind 'Funktionen' ω auf $\text{ar}(\omega) = 0$ vielen Argumenten.



Offenbar führt die obige Definition nicht aus der Klasse der berechenbaren Funktionen hinaus: Jeder Typ-2 Berechnungsbaum T induziert eine Typ-2 berechenbare Funktion. Umgekehrt kann man jede Typ-2 berechenbare Funktion $F : \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ durch einen Typ-2 Berechnungsbaum realisieren, indem man seine Wurzel mit F versieht.

Interessant wird Definition A.1 erst, wenn man die Klassen Ω und P der erlaubten Funktionen weiter einschränkt auf gewisse 'primitive' berechenbare Operationen und Prädikate und dann die minimale Tiefe untersucht, die so ein Typ-2 Baum dann benötigt, um damit eine kompliziertere Typ-2 berechenbare Funktion zu realisieren: dies führt auf einen (Zeit-)Komplexitätsbegriff, der atomare (algebraische) Operationen zählt *ohne* Unberechenbarkeiten zuzulassen. Man kann mit ihm gewisse andere, bekannte Komplexitätsbegriffe reproduzieren. Betrachte z.B. $P := \emptyset$ und (vergleiche Beispiel 2.20j) $\Omega := \{\mathbb{R}_c, +, -, *, /\}$ mit $\text{ar}|_{\mathbb{R}_c} = 0$, $\text{ar}(+) = \text{ar}(-) = \text{ar}(*) = \text{ar}(/) = 2$ und

$$+ : \text{dom}(\rho)^2 \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \rho(+(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)) = \rho(\bar{\sigma}_1) + \rho(\bar{\sigma}_2)$$

(die anderen analog, vergleiche das kommutative Diagramm unter Definition 2.6): Dann stimmt dieser Komplexitätsbegriff überein mit der **totalen (Straight-Line Programm-) Komplexität** (DEFINITION 4.7 in [17]) für Funktionen eines Arguments bei $A = \mathbb{R}$ und $k = \mathbb{F}_2$. Funktionen mehrerer Argumente lassen sich über ρ^n -Namen und $(\rho^n \rightarrow \rho)$ -berechenbare Projektionen $\pi_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ ebenfalls einbeziehen.

Doch zurück zur **Point Location**. Das hier üblicherweise betrachtete algebraische Modell [59, 60, 86, 23] ist der bereits oben erwähnte Lineare Entscheidungsbaum (Linear Decision Tree LDT, auch bekannt z.B. als *Linear Search Algorithm*). Er enthält in jedem Blatt u als Konstante eine Zahl $j \in \mathbb{N}$, d.h. u ist eine mit der 0-ären Abbildung

$$\hat{j} : (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^0 = \{()\} \rightarrow \text{dom}(\rho), \quad \rho(\hat{j}()) = j$$

(trivialerweise berechenbar, siehe Folgerung 2.9c-e) versehener Berechnungsknoten. Ansonsten, d.h. in seinem Inneren, besteht er ausschließlich aus Verzweigungsknoten v , welche mit Threshold-Funktionen p_v gemäß (A.1) versehen sind. Da diese nicht total berechenbar sind, schränken wir sie ein auf den 'stabilen' Bereich $\mathbb{R}^d \setminus p_v^{-1}[\{0\}]$:

Definition A.2 Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^{d+1}$ bezeichne $\langle x, \vec{\lambda} \rangle := \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i + \lambda_{d+1}$. Ein Typ-2 LDT T ist ein Typ-2 Berechnungsbaum mit $\Omega = \{\hat{j} : j \in \mathbb{N}\}$ und $P = \{p_{\vec{\lambda}} : \vec{\lambda} \in (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}\}$,

$$\text{dom}(p_{\vec{\lambda}}) = \{\bar{\sigma} \in \text{dom}(\rho^d) : \langle \rho^d(\bar{\sigma}), \vec{\lambda} \rangle \neq 0\}, \quad p_{\vec{\lambda}} : \bar{\sigma} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \langle \rho^d(\bar{\sigma}), \vec{\lambda} \rangle > 0 \\ 0 & \text{falls } \langle \rho^d(\bar{\sigma}), \vec{\lambda} \rangle < 0 \end{cases}$$

T löst das Point Location Problem zum Arrangement \mathcal{H} im \mathbb{R}^d , falls

$$\forall \bar{\sigma} \in \text{dom}(T) : \quad T(\bar{\sigma}) \in \text{dom}(\rho) \quad \wedge \quad \rho(T(\bar{\sigma})) \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad \rho^d(\bar{\sigma}) \in Z_{\rho}(T(\bar{\sigma})) ,$$

wobei Z_j die j -te Zelle von \mathcal{H} bezeichnet.

Der letzte Punkt besagt, daß T für jede zulässige Eingabe den ρ -Namen der Nummer derjenigen Zelle ausgibt, in der der (durch seinen ρ^d -Namen kodierte) Eingabepunkt $x \in \mathbb{R}^d$ liegt: eben Point Location.

Es wird übrigens nicht verlangt, daß T dies für *alle* Eingaben $\bar{\sigma}$ tut; ja, nicht einmal für alle solchen, die zulässiger ρ^d -Name eines Vektors x sind. In solcher 'fast-Totalität' wäre das Problem (A.2) schließlich gar nicht berechenbar. Eingaben $\bar{\sigma} \in \text{dom}(\rho^d) \setminus \text{dom}(T)$ werden **instabil** genannt, denn hier fragt T unterwegs ein Prädikat ab, welches an der Stelle $x := \rho^d(\bar{\sigma})$ springt. Wie oben erläutert gehören hierzu *notwendig* alle $x \in \bigcup \mathcal{H}$ auf den das Arrangement definierenden Hyperebenen. Alle *weiteren* instabilen Punkte sind zusätzlich.

A.3 Entweder schnell oder stabil

Daß solche *zusätzlichen* Instabilitäten manchmal durchaus sinnvoll sind oder sogar unvermeidbar, wenn es um einen schnellen Algorithmus geht, läßt sich im oben eingeführten Modell nun formalisieren. Eine Hyperebene heiße **berechenbar**, wenn sie sich durch berechenbare Koeffizienten beschrieben läßt, d.h. die Form $H = \{x \in \mathbb{R}^d : \sum \lambda_i x_i = \lambda_{d+1}\}$ hat mit ρ -berechenbaren $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Theorem A.3 *Es sei $d \in \mathbb{N}$ eine Konstante, d.h. Asymptotik bezieht sich ausschließlich auf n .*

- a) *Für jedes Arrangement von n berechenbaren Hyperebenen kann das zugehörige Point Location Problem durch einen Typ-2 LDT ohne zusätzliche Instabilitäten in Tiefe $\mathcal{O}(n)$ gelöst werden.*
- b) *Für jedes $n > d$ gibt es Arrangements von n berechenbaren Hyperebenen im \mathbb{R}^d , bei denen jeder Typ-2 LDT, der das zugehörige Point Location Problem ohne zusätzliche Instabilitäten löst, mindestens Tiefe $\Omega(n)$ hat.*
- c) *Für jedes Arrangement von n berechenbaren Hyperebenen im \mathbb{R}^d gibt es einen Typ-2 LDT mit zusätzlichen Instabilitäten, der das zugehörige Point Location Problem in Tiefe $O(\log n)$ löst.*
- d) *Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Arrangement von n berechenbaren Hyperebenen im \mathbb{R}^d , für das jeder Typ-2 LDT mindestens Tiefe $\Omega(\log n)$ benötigt.*

Hier werden also zwei Fälle unterschieden: ohne zusätzlichen Instabilitäten ist $\Theta(n)$ erreichbar und im allgemeinen auch das beste; mit zusätzlichen Instabilitäten ist $\Theta(\log n)$ erreichbar und im allgemeinen auch das beste.

Zwischen diesen beiden Grenzen liegt ein interessanter *Trade-Off*: Laufzeit gegen zusätzliche Instabilität. Zwar kommen Instabilitätpunkte entweder gar nicht oder in unendlicher Zahl vor, aber sie bildenzählbare Strukturen: Im 2D ist die Menge aller instabilen Punkte eines Typ-2 LDTs stets endliche Vereinigung von relativ offenen (potentiell ein- oder zweiseitig unbeschränkten) Liniensegmenten. Insbesondere ist die Menge der instabilen Punkte eines Typ-2 LDT stets nirgends dicht!



Die *kleinste* Zahl von Linien, deren Vereinigung alle zusätzlichen Instabilitätspunkte abdeckt²³, quantifiziert in sinnvoller Weise, wie viel zusätzliche Instabilität ein Typ-2 LDT induziert, um eine gewisse Laufzeit zu erreichen:

Theorem A.3 (Fortsetzung) Hier beschränken wir uns der Einfachheit halber auf ebene Geradenarrangements in *allgemeiner Lage*, d.h. Parallelen sind ausgeschlossen.

- e) Für jedes Arrangement von n berechenbaren Geraden in der Ebene gibt es einen Typ-2 LDT mit $\mathcal{O}(n^2)$ vielen zusätzlichen Instabilitätslinien, der das zugehörige Point Location Problem in Tiefe $O(\log n)$ löst.
- f) Für jedes Arrangement von n berechenbaren Geraden in der Ebene gibt es einen Typ-2 LDT mit $\mathcal{O}(n)$ zusätzlichen Instabilitätslinien, der das zugehörige Problem in Tiefe $\mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \log n)$ löst.
- g) In der Ebene gibt es Arrangements von n berechenbaren Geraden, die mit höchstens $\mathcal{O}(m)$ zusätzlichen Instabilitätslinien zu lösen jeder Typ-2 LDT mindestens Tiefe $\Omega\left(\frac{n}{m \cdot \alpha(m)}\right)$ benötigt, wobei $\alpha(m)$ die inverse Ackermannfunktion bezeichnet.

Es ist nicht bekannt, ob man mit linear vielen zusätzlichen Instabilitätslinien stets logarithmische Tiefe erreichen kann.

A.4 Beweise

Definition A.4 Sei u ein Knoten des Typ-2 Berechnungsbaums T . Bezeichne

$$P(u) := \{\bar{\sigma} \in \text{dom}(T) \mid \text{Der Algorithmus } T \text{ passiert bei Eingabe } \bar{\sigma} \text{ den Knoten } u\}$$

wobei mit 'Algorithmus' die Semantik gemäß Definition A.1 gemeint ist.

Für Typ-2 LDTs im \mathbb{R}^d sieht man leicht, daß sie invariant sind unter Austausch eines ρ^d -Namens für x gegen einen anderen für das gleiche x :

$$\rho^d(\bar{\sigma}) = \rho^d(\bar{\tau}), \quad \bar{\sigma} \in \text{dom}(T) \implies \bar{\tau} \in \text{dom}(T) \quad \wedge \quad T(\bar{\sigma}) = T(\bar{\tau}) .$$

Basierend darauf zeigt Induktion nach der Tiefe, daß jedes $P(u)$ eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ 'ist' (genauer: aus allen ρ^d -Namen aller $x \in U$ besteht), nämlich das Innere eines Polytops; vgl. Anhang B.3 und B.4:

Lemma A.5 Sei n ein Knoten im Typ-2 LDT T für \mathbb{R}^d . In u werde die orientierte Hyperebene H abgefragt, im positiven Fall zum Nachfolger v von u verzweigt. Dann gilt $P(v) = P(u) \cap H^+$. Ist u die Wurzel von T , so $P(u) = \mathbb{R}^d$.

Im Unterschied zu gewöhnlichen LDTs kommen hier also keine niedrig-dimensionalen Mengen vor!

²³Die Linien sind also o.B.d.A. Geraden.

Beweis von Theorem A.3a): Sei \mathcal{H} ein Arrangement von n Hyperebenen im \mathbb{R}^d ; zu berechnen ist die eingeschränkte Funktion $\text{PointLoc}_{\mathcal{H}}|_{\mathbb{R}^d \setminus \bigcup \mathcal{H}}$. O.B.d.A. seien alle $H \in \mathcal{H}$ orientiert, d.h. jeweils ein Halbraum H^+ ausgezeichnet. Für $x \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $\pi(x) \in \{-1, 0, +1\}^n$ den Positionsvektor von x bezüglich \mathcal{H} , d.h.

$$\pi(x)_i = \begin{cases} +1 & \text{falls } x \in H_i^+ \\ 0 & \text{falls } x \in H_i \\ -1 & \text{falls } x \in H_i^- := \mathbb{R}^d \setminus (H^+ \cup H) \end{cases} .$$

Offenbar ist eine *Zelle* (oder allgemeiner: ein k -dimensionales *face*) von \mathcal{H} eine Äquivalenzklasse von Punkten mit gleichem Positionsvektor. Beispielsweise gilt in Abbildung 14:

$$Z_1 = \pi^{-1}(-1, -1, +1, +1, +1, +1) \quad \text{und} \quad Z_2 = \pi^{-1}(-1, -1, -1, +1, +1, +1) .$$

Da eine Zelle per Definition ein volldimensionales *face* ist, enthalten hier die Positionsvektoren keine 0. Betrachte nun einen vollständigen Binärbaum T der Tiefe n , der also auf dem Weg zu einem Blatt v jeweils alle Hyperebenen abfragt. Offenbar haben alle $x \in P(v)$ den gleichen Positionsvektor bezüglich \mathcal{H} . Für jede (nichtleere) Zelle Z sei $x_Z \in Z$. Da $\pi(x_Z) = \pi(Z)$ keine 0 enthält, liegt x_Z auf keiner der abgefragten Hyperebenen, so daß T auf x_Z nicht divergiert sondern in irgendeinem Blatt endet; dieses sei mit v_Z bezeichnet. Wie oben dargelegt, haben alle $x \in P(v_Z)$ den gleichen Positionvektor $\pi(P(v_Z)) = \pi(x_Z) = \pi(Z)$, woraus $P(v_Z) \subseteq Z$ folgt. \square

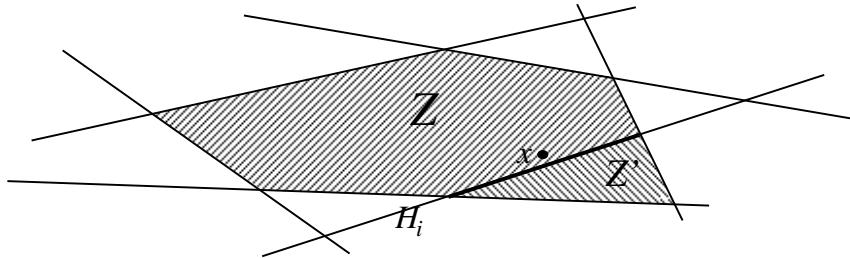


Abbildung 16: HIER BRAUCHT MAN ohne ZUSÄTZLICHE INSTABILITÄTEN MIND. TIEFE n .

Beweis von Theorem A.3b): Besitzt \mathcal{H} eine Zelle mit w Wänden (d.h. $(d-1)$ -dimensionalen *faces*), so braucht ein Entscheidungsbaum für Point Location in \mathcal{H} mindestens Tiefe w , wenn außer den Hyperebenen aus \mathcal{H} keine weiteren Abfragen erlaubt sind: dies erkannte und benutzte bereits Ukkonen [86] im algebraischen Modell, um exponentielle untere Schranken für NP-vollständige Probleme zu deduzieren. Das Argument greift auch hier:

Sei Z diese Zelle, ihre Wände gebildet von den Hyperebenen $H_1, \dots, H_w \in \mathcal{H}$. Betrachte $x \in Z^\circ$. Weil der Typ-2 LDT T keine zusätzlichen instabilen Punkte hat, gehört (jeder ρ^d -Name von) x zu $\text{dom}(T)$. Sei v dasjenige Blatt, in welchem x landet gemäß der Semantik aus Definition A.1. Auf dem Weg von seiner Wurzel bis zu v fragt T keine Hyperebene ab, die Z° schneidet: Ein solches



H gehörte nicht zu \mathcal{H} , würde aber für jedes $x \in Z^\circ \cap H$ eine Instabilität bedeuten im Widerspruch dazu, daß T nur auf $\bigcup \mathcal{H}$ instabil ist. Wir wollen zeigen, daß v mindestens Tiefe w hat.

Bewege hierzu x stetig bis kurz vor die Z° begrenzenden Hyperebene H_i . Auf Grund des eben dargelegten ändert dies nicht den Weg, den x durch T nimmt, und insbesondere landet x nach wie vor im gleichen Blatt v . Wenn man das x jetzt weiter auf H_i und infinitesimal darüber hinweg schiebt, hat es die Zelle Z° von \mathcal{H} verlassen und eine andere $(Z')^\circ$ betreten. Damit T für dieses x' ein anderes Ergebnis liefert als für das x vorher, muß es in einem anderen Blatt $v' \neq v$ landen. Daher fragt T notwendig H_i ab irgendwo auf dem Weg von seiner Wurzel bis v . Da $i = 1, \dots, w$ beliebig war, liegen also mindestens w Abfragen auf dem Weg von der Wurzel zum Blatt v . \square

Beweis von Theorem A.3g): Wir betrachten wieder ein Arrangement \mathcal{H} wie in Abbildung 16, bei dem die Zelle Z alle n Geraden als Wände hat, also n Knoten besitzt. Sei T ein Typ-2 LDT, der Point Location in \mathcal{H} löst mit Tiefe t und dessen zusätzliche Instabilitäten von m Geraden H'_1, \dots, H'_m überdeckt werden. Bezeichne $\mathcal{H}' := \{H'_1, \dots, H'_m\}$. Wie in b) sieht man, daß in jeder Zelle des Arrangements \mathcal{H}' höchstens t Wände von Z liegen und damit (2D) auch höchstens t Knoten. Insbesondere trifft der Rand der konvexen Menge Z mindestens n/t Zellen des m -elementigen Arrangements \mathcal{H}' . Wende jetzt das folgende Lemma an auf $\gamma := \partial Z$. \square

Lemma A.6 *Sei γ eine beliebige geschlossene konvexe Kurve in der Ebene und \mathcal{H}' ein Arrangement von m Linien in der Ebene. Dann 'trifft' γ höchstens $\mathcal{O}(m \cdot \alpha(m))$ Zellen von \mathcal{H}' .*

Beweis: Siehe REMARK(4) auf Seite 334 von [30]. \square

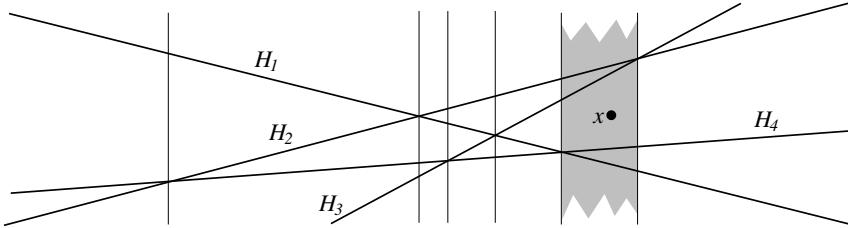


Abbildung 17: SUB-UNTERTEILUNG DER EBENE IN SCHNITTPUNKTFREIE STREIFEN.

Beweis von Theorem A.3e): Die Idee stammt von Dobkin und Lipton [25] und läßt sich auch auf Typ-2 LDTs anwenden, siehe Abbildung 17: Man legt durch jeden Schnittpunkt des Arrangements \mathcal{H} eine zusätzliche vertikale Gerade. Dies unterteilt die Ebene in Streifen, innerhalb derer die (Sub-) Zellen von \mathcal{H} linear geordnet sind: durch Binärsuche kann man deshalb die Eingabe x in ihnen lokalisieren, wenn der zugehörige Streifen erstmal gefunden ist.

Gemäß Lemma A.7 hat das 2D Arrangement \mathcal{H} höchstens $\mathcal{O}(n^2)$ Knoten, so daß die durch die Abfrage der vertikalen Geraden induzierten zusätzlichen Instabilitäten tatsächlich höchstens Zählmaß $\mathcal{O}(n^2)$ haben. Weiterhin gibt es damit auch höchstens $\mathcal{O}(n^2)$ Streifen, so daß sich der x enthaltende durch Binärsuche in $\mathcal{O}(\log(n^2)) = \mathcal{O}(\log n)$ identifizieren läßt. Und die n ursprünglichen Geraden unterteilen diesen Streifen in höchstens $n + 1$ Trapeze, so daß die Binärsuche unter ihnen maximal weitere $\mathcal{O}(\log n)$ Schritte benötigt. \square

Lemma A.7 Ein Arrangement \mathcal{H} von n Hyperebenen im \mathbb{R}^d teilt den Raum in höchstens

$$\sum_{k=0}^d \sum_{i=0}^k \binom{d-i}{k-i} \cdot \binom{n}{d-i} = \mathcal{O}(n^d) \quad (\text{A.3})$$

viele Polytope P_j . Dabei läuft die erste Summe über deren Dimension $k = \dim(P_j)$; die zweite zählt also für $k = 0$ die Punkte P_j , für $k = 1$ die Linien L_j , für $k = 2$ die Flächen und für $k = d$ die Zellen Z_j .

Beweis: Siehe [28]. □

Beweis von Theorem A.3c): Induktion nach der Dimension; der Fall $d = 1$ ist trivial, $d = 2$ wurde bereits abgehandelt.

Im 3D Arrangement aus n Ebenen projizierte alle Schnittgeraden (paarweise Schnitte von Ebenen: $m \leq n^2$ viele) auf die xy -Ebene, ebenso den Eingabepunkt x ; lokalisieren ihn innerhalb dieses 2D Arrangements aus m Geraden gemäß Induktionsvoraussetzung in Zeit $\mathcal{O}(\log m) = \mathcal{O}(\log n)$. Sei z die gefundene 2D-Zelle, dann gehört x zu $z \times \mathbb{R}$; innerhalb dieses Zylinders lassen sich die 3D-Zellen Z von \mathcal{H} wieder totalordnen (im 2D sind das die Streifen aus Abbildung 17), so daß erneute Binärsuche das x enthaltende Z identifiziert in weiteren $\mathcal{O}(\log n)$ Schritten.

So geht es weiter: kann man beliebige Point Location zwischen n Hyperebenen im \mathbb{R}^d in Zeit $T(n, d)$ lösen, dann gilt $T(n, d + 1) \leq T(n^2, d) + T(n, 1)$. □

Beweis von Theorem A.3d): Wir betrachten ein Arrangement in *allgemeiner Lage*, d.h. jeweils d Hyperebenen aus \mathcal{H} treffen sich in einem Punkt und jeweils $d + 1$ viele haben leeren Schnitt. Für Arrangements dieser Art ist bekannt [28], daß Gleichung (A.3) scharf ist. Insbesondere besitzen sie genau $\sum_{i=0}^d \binom{n}{d-i} = \Theta(n^d)$ viele Zellen $Z_j \neq \emptyset$. Wähle $x_j \in Z_j$; dann muß ein Typ-2 LDT, um das zugehörige Point Location Problem zu lösen, jedes x_j in einem anderes Blatt enden lassen, also mindestens $\Omega(n^d)$ Blätter besitzen. Bei Binäräbäumen bedeutet das Tiefe $\Omega(\log(n^d)) = \Omega(\log n)$, da wir d als Konstante ansehen. □

Beweis von Theorem A.3f): Kombiniere die beiden folgenden Lemmata. □

Lemma A.8 Zu jedem Arrangement \mathcal{H} von n Hyperebenen im \mathbb{R}^d in allgemeiner Lage gibt es einen Typ-2 LDT, der das zugehörige Point Location Problem ohne zusätzliche Instabilitäten in Tiefe $\mathcal{O}(w \cdot d \cdot \log n)$ löst, wobei w die maximale Anzahl Wände (=faces der Dimension $d - 1$) einer Zelle von \mathcal{H} bezeichnet.

Beweis: Siehe THEOREM 5 in [23]. Was dort als rLDT (ternärer Baum) bezeichnet wird, läßt sich durch Weglassen der 0-Äste in einen Typ-2 LDT ohne zusätzliche Instabilitäten umwandeln. □

Lemma A.9 Sei \mathcal{H} ein ebenes Arrangement von n Geraden in allgemeiner Lage. Dann gibt es ein Arrangement \mathcal{H}' von $n' \leq \mathcal{O}(n)$ zusätzlichen Geraden, so daß jede Zelle Z von $\mathcal{H} \cup \mathcal{H}'$ höchstens $w \leq \mathcal{O}(\sqrt[3]{n})$ Wände besitzt und $\mathcal{H} \cup \mathcal{H}'$ seinerseits ebenfalls in allgemeiner Lage ist.

Beweis: Siehe LEMMA 13 in [23]. Der Beweis beruht wesentlich auf SECTION 3 von [22]. □



B Grundbegriffe und Bezeichnungsweisen

Seien X, Y Mengen. Eine *partielle mehrwertige Funktion* $F : \subseteq X \rightrightarrows Y$ ist schlichtweg eine Teilmenge des kartesischen Produkts $X \times Y$. Ihre *Definitions-* und *Wertebereiche* lauten

$$\text{dom}(F) = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in F\}, \quad \text{range}(F) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in F\}.$$

Für $A \subseteq X$ bzw. $B \subseteq Y$ seien die *Einschränkungen* $F|_A$ bzw. $F|^B$ definiert durch

$$F|_A = \{(x, y) \in F : x \in A\}, \quad F|^B = \{(x, y) \in F : y \in B\}.$$

F induziert (totale einwertige) Abbildungen $F[\cdot], F^{-1}[\cdot]$ zwischen den *Potenzmengen* von X und Y :

$$F : 2^X \rightarrow 2^Y, \quad F[A] := \text{range}(F|_A), \quad F^{-1} : 2^Y \rightarrow 2^X, \quad F^{-1}[B] := \text{dom}(F|^B).$$

Stets gilt $F^{-1}[Y \setminus B] = \text{dom}(F) \setminus F^{-1}[B]$.

F ist *einwertig* (d.h. eine gewöhnliche partielle Funktion $F : \subseteq X \rightarrow Y$), falls

$$\forall x \in \text{dom}(F) \quad \forall y_1, y_2 \in Y : \quad ((x, y_1) \in F \wedge (x, y_2) \in F \implies y_1 = y_2).$$

Das dann eindeutige $y \in Y$ mit $(x, y) \in F$ mit wird $y = F(x)$ bezeichnet. Ist $x \notin \text{dom}(F)$, so schreibt man " $F(x) = \perp$ ". F ist *total*, falls $\text{dom}(F) = X$; dann schreibt man $F : X \rightarrow Y$. F ist *surjektiv*, falls $\text{range}(F) = Y$.

Sei I eine Menge. Eine *Folge* $(y_i)_{i \in I} \subseteq Y$ ist eine totale Funktion $F : I \rightarrow Y$. Die Menge aller solcher Folgen wird mit Y^I bezeichnet. Insbesondere ist $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller unendlichen Binärstrings²⁴,

$$\{0, 1\}^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}^{[n]}, \quad [n] := \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

B.1 Typ-2 Maschinen

Turing-Maschinen werden in jedem Standard-Lehrbuch über (Bit)Komplexitätstheorie oder Rechenmodelle vorgestellt. Es ist bekannt, daß es vom Berechenbarkeitsstandpunkt (und sogar bezüglich polynomieller Zeit) auf viele Details (z.B. Anzahl der Arbeitsbänder) nicht ankommt. Wir wollen hier annehmen, daß jede TM separate Bänder für Ein- und Ausgabe besitzt; diese seien *one-way*, d.h. der Lesekopf des Eingabebandes und der Schreibkopf des Ausgabebandes darf jeweils nicht zurück sondern nur entweder stehenbleiben oder ein Symbol nach rechts rücken. In der üblichen Semantik realisiert jede TM M eine partielle Funktion $F_M : \subseteq \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ auf endlichen Strings. Ihr Definitionsbereich $\text{dom}(F_M)$ besteht aus allen $\tilde{\sigma} \in \{0, 1\}^*$, für die M ,

²⁴In der Logik muß der Indexbereich I eine Kardinalzahl sein, d.h. eine Äquivalenzklasse von gleichmächtigen Mengen. Dort schreibt man deshalb lieber $\{0, 1\}^\omega$, wobei ω die erste unendliche Kardinalzahl bezeichnet.

gestartet mit Eingabe $\bar{\sigma}$, hält. Die dann auf dem Ausgabeband angesammelte endliche Zeichenkette definiert dann den Funktionswert $F_M(\bar{\sigma})$.

Eine TM mit dieser Semantik sei im folgenden als *Typ-1 Maschine* bezeichnet. TTE betrachtet sogenannte *Typ-2 Maschinen*, von denen es noch drei weitere gibt. Ihre Syntax bleibt die gleiche, nämlich die der gewöhnlichen TM; allerdings arbeiten sie teilweise auf unendlichen Strings $\bar{\sigma} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$:

Eingabe	Ausgabe	Laufzeit
$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$	$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$	unendlich
$\{0,1\}^*$	$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$	unendlich
$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$	$\{0,1\}^*$	endlich
$\{0,1\}^*$	$\{0,1\}^*$	endlich

Wichtig ist, daß man für jede Typ-2 Maschine M die Art der Ausgabe spezifiziert. Dies hat Auswirkungen auf die Akzeptanz-Definition und damit auf den Definitionsbereich:

Für die Ausgabe endlicher Strings gehört Eingabe $\bar{\sigma}$ zu $\text{dom}(F_M)$ genau dann, wenn M hält. Für die Ausgabe unendlicher Strings hingegen gehört Eingabe $\bar{\sigma}$ zu $\text{dom}(F_M)$ genau dann, wenn M eben einen unendlichen String ausgibt; notwendig doch keineswegs hinreichend für letzteres ist, daß M , gestartet mit $\bar{\sigma}$, nicht hält.

Eine (endliche oder unendliche) partielle Stringfunktion F heißt *berechenbar*, wenn es eine Typ-2 Maschine M gibt mit

$$F \subseteq F_M, \quad \text{d.h.} \quad \text{dom}(F) \subseteq \text{dom}(F_M) \quad \wedge \quad F_M|_{\text{dom}(F)} = F$$

Das Übereinstimmen der Definitionsbereiche und insbesondere die Divergenz von M auf $\bar{\sigma} \notin \text{dom}(F)$ wird also *nicht* verlangt, vergleiche Definition 2.6.

Der Grund ist, daß dieser *strenge* Berechenbarkeitsbegriff nicht abgeschlossen ist unter Komposition: TM M mit $\text{dom}(F_M) \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ könnte für die unendliche Eingabe $\bar{\sigma}$ nach einem nur endlichen Anfangsstück mit dem Lesen aufhören und trotzdem eine zulässige (endliche oder unendliche) Ausgabe erzeugen. Falls dem nun eine TM N vorgeschaltet wird, welche für $\bar{\tau} \notin \text{dom}(F_N)$ nur eben dieses endliche Anfangsstück generiert (also *keine* zulässige Ausgabe), so wäre $\bar{\tau} \in \text{dom}(F_{M \circ N})$ aber (per Definition) nicht in $\text{dom}(F_M \circ F_N)$.

B.2 Lineare Algebra

Ein (homogener) *Unterraum* $L \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen gegenüber Addition und Skalarmultiplikation:

$$a, b \in L, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \implies a + \lambda b \in L .$$

Sein *orthogonales Komplement* L^\perp enthält genau diejenigen Vektoren, welche auf ganz L senkrecht stehen, für welche also das *Skalarprodukt* identisch verschwindet:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x^T \cdot y, \quad L^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in L\} .$$



Eine Menge $\{v_1, \dots, v_d\} \in L$ von Vektoren heißt *linear unabhängig*, wenn

$$\sum \lambda_j v_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, d$$

gilt. Ist die Menge maximal, so bildet sie eine *Basis* von L . Alle Basen von L haben gleiche Kardinalität $d = \dim(L)$. Eine Basis kann man (z.B. mit dem *Gram-Schmidt-Verfahren*) orthonormalisieren, dann erfüllt sie

$$1 = \|v_j\| \quad \forall j = 1, \dots, d, \quad 0 = \langle v_j, v_k \rangle \quad \forall j \neq k.$$

Hierbei bezeichnet $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ die Euklidnorm von $v \in \mathbb{R}^n$.

Die *kanonische* Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n sind die Vektoren $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-tes}}, 0, \dots, 0)$. Eine $m \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ induziert (bezüglich dieser Basis) die lineare Abbildung

$$\Phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto A \cdot x = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_{i=1..m}.$$

Umgekehrt hat jede lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diese Form, welche zudem eindeutig ist. Sind allgemeiner V und W reelle Vektorräume mit Basen v_1, \dots, v_n und w_1, \dots, w_m , so definiert A die lineare Abbildung

$$\Phi_A : \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \mapsto \sum_{i=1}^m \mu_i w_i, \quad \mu_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j$$

und umgekehrt. Bezuglich einer festen Basis kann man also Matrizen und lineare Abbildungen identifizieren. Ihr *Bild* und *Kern* sind die Unterräume

$$\text{image}(\Phi) = \Phi[V] \subseteq W, \quad \text{kernel}(\Phi) = \Phi^{-1}[\{0\}] \subseteq V.$$

Ihre Dimensionen sind verknüpft über den *Dimensionssatz*:

$$\dim V = \dim \text{image}(\Phi) + \dim \text{kernel}(\Phi) = \text{rank}(A) + \dim \text{kernel}(\Phi).$$

Hierbei bezeichnet $\text{rank}(A)$ die Größe einer größten invertierbaren Submatrix von A . Ist $n = \dim(V) = \dim(W)$, so sind für Φ (respektive A) äquivalent:

- Φ ist surjektiv,
- Φ ist injektiv,
- Φ ist bijektiv mit stetiger Inverser,
- A ist invertierbar,
- $\det(A) \neq 0$,

- $\text{rank}(A) = n$.

Hierbei bezeichnet det die *Determinantenfunktion*, d.h. die eindeutige normierte alternierende Multilinearform auf der Menge der $n \times n$ -Matrizen.

In endlich-dimensionalen, mit einem Skalarprodukt ausgestatteten Vektorräumen gilt eine schöne Formel für die beste Approximation: Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum, so lässt sich jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eindeutig zerlegen in $x = v + w$ mit $v \in V$ und $w \in V^\perp$; weiterhin ist dieses v das einzige Element aus V , welches x am nächsten kommt: $d_V(x) = d_V(v+w) = \|w\|$. Insbesondere gilt stets

$$d_V(x) + d_{V^\perp}(x) = \|x\| .$$

B.3 Geometrie

Eine *Hyperebene* H im \mathbb{R}^d ist ein $(d-1)$ -dimensionaler affiner Unterraum, d.h. der Kern eines nichtdegenerierten linearen Funktionals:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : \sum \lambda_i x_i + \lambda_0 = 0\}, \quad \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \neq 0 . \quad (\text{B.1})$$

Der positive Halbraum zu (orientiertem) H ist dann gegeben durch

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : \sum \lambda_i x_i + \lambda_0 \geq 0\},$$

H^- entsprechend. Ein *Polytop* P ist der Schnitt endlich vieler Halbräume und insbesondere *konvex*, d.h.

$$\forall x, y \in P \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad : \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in P .$$

Ein beschränktes Polytop heißt ein *Polyeder*. Äquivalent: ein Polyeder ist die konvexe Hülle endlich vieler Punkte. Ein (offener Euklidischer) *Ball* im \mathbb{R}^d ist eine Menge der Form

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d (y_i - x_i)^2 < r^2\}$$

mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^d$ und Radius $r > 0$. $\overline{B}(x, r)$ bezeichnet entsprechend einen abgeschlossenen Euklidischen Ball. Allgemeiner:

B.4 Topologie

Sei X ein *topologischer Raum*, d.h. eine Menge X versehen mit einer Familie $\mathfrak{O} \supseteq \{\emptyset, X\}$ von Teilmengen von X , welche abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen ist. Die Elemente $U \in \mathfrak{O}$ werden *offene Mengen* genannt, ihre Komplemente $A = X \setminus U$ heißen *abgeschlossene Mengen*. Für $M \subseteq X$ heißen

$$\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \subseteq X \\ A \text{ abgeschlossen}}} A \quad \text{und} \quad \overset{\circ}{M} := \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \text{ offen}}} U$$

der *Abschluß* bzw. das *Innere* von M . Diese Operationen sind offensichtlich monoton bzgl. " \subseteq ", und auch die folgenden Aussagen verifiziert man leicht [67]:



Lemma B.1 Sei I eine beliebige Indexmenge und $G, H, M_i \subseteq X$ für alle $i \in I$. Dann

$$\begin{array}{ll} a) \bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{M}_i \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right)^\circ & e) \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{M}_i \supseteq \left(\bigcap_{i \in I} M_i \right)^\circ \\ b) \bigcap \overline{M_i} \supseteq \overline{\bigcap M_i} & f) \bigcup \overline{M_i} \subseteq \overline{\bigcup M_i} \\ c) G^\circ \cap H^\circ = (G \cap H)^\circ & g) \overline{G} \cup \overline{H} = \overline{G \cup H} \\ d) (X \setminus G)^\circ = X \setminus \overline{G} & h) \overline{X \setminus H} = X \setminus H^\circ \end{array}$$

Lemma B.2 Seien U, V, W offene und A, B, C abgeschlossene Teilmengen von X . Dann

$$a) U \subseteq \overset{\circ}{U} \quad b) A \supseteq \overline{A^\circ} \quad c) U = A^\circ \Rightarrow \overset{\circ}{U} = U \quad d) A = \overline{U} \Rightarrow \overline{A^\circ} = A$$

Lemma B.3 Sei X topologischer Raum, darin U, V offen, A abgeschlossen und R regulär.

$$a) \overset{\circ}{\overline{A^\circ}} = A^\circ; \quad \overline{\overset{\circ}{U}} = \overline{U}.$$

b) Falls V von $R = \overline{U}$ geschnitten wird, so auch von U .

$$c) \text{ Aus } U \subseteq R \subseteq X \setminus V \text{ und } \overline{U} \cup \overline{V} = X \text{ folgt } \overline{U} = R = \overline{(X \setminus V)^\circ}.$$

d) Ist $\overline{U} = R = \overline{A^\circ}$, so erfüllt $V := X \setminus A$ daß $U \subseteq R \subseteq X \setminus V$ und $\overline{U} \cup \overline{V} = X$.

Beweis: a) $\overline{A^\circ} \subseteq A$ gemäß Lemma B.1b), also $\overset{\circ}{\overline{A^\circ}} \subseteq A^\circ$.

Umgekehrt ist $\overline{A^\circ} \supseteq A^\circ$, also $\overset{\circ}{\overline{A^\circ}} \supseteq (A^\circ)^\circ = A^\circ$.

Für U analog.

b) Angenommen $V \cap U = \emptyset$. Dann $U \subseteq X \setminus V =: A$ abgeschlossen. Also $\overline{U} \subseteq \overline{A} = A$ wegen Monotonie. Daher $\overline{U} \cap V = \emptyset$, Widerspruch.

c) $\overline{U} \cup \overline{V} = X$ bedeutet $\overline{U} \supseteq X \setminus \overline{V}$; also wegen Monotonie $\overline{U} \supseteq \overline{X \setminus \overline{V}} = X \setminus \overset{\circ}{\overline{V}}$. Die erste Voraussetzung liefert analog

$$\overline{U} \subseteq R = \overline{R^\circ} \subseteq \overline{(X \setminus V)^\circ} = X \setminus \overset{\circ}{\overline{V}} \stackrel{\text{s.o.}}{\subseteq} \overline{U} .$$

d) $U \subseteq \overline{U} = R$ ist klar; $X \setminus V = A \supseteq \overline{A^\circ} = R$ folgt aus Lemma B.2b). Weiterhin

$$\overline{V} = X \setminus A^\circ = X \setminus \overset{\circ}{\overline{R^\circ}} \stackrel{a)}{=} X \setminus R^\circ ,$$

so daß $\overline{U} \cup \overline{V} = R \cup (X \setminus R^\circ) = X$. □

Eine Menge $M \subseteq X$ heißt *nirgends dicht*, falls $\overset{\circ}{M} = \emptyset$. Die abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen heißt *mager*. X mit einer fixierten Topologie heißt *Baire Raum*, falls (mit Ausnahme von \emptyset) keine offene Menge mager ist. Beispielsweise ist \mathbb{R}^d ein Baire Raum.

Lemma B.4 a) Sei $U \subseteq X$ offen und $Q \subseteq X$ beliebig aber dicht. Dann ist $\overline{U \cap Q} = \overline{U}$.

b) Seien $U_1, U_2, W \subseteq X$ offen und $\overline{U_1 \cap U_2} = \overline{W}$. Dann gilt $\overline{W} = \overline{U_1 \cap U_2}$.

c) Sei X ein Baire Raum, $U_n, W \subseteq X$ offen für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} = \overline{W}$. Dann ist $\overline{W} = \overline{\bigcap_n U_n}$.

Seien X, Y topologische Räume. Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig**, wenn Urbilder offener Mengen offen sind: $f^{-1}[U] \in \mathfrak{O}_X$ für jedes $U \in \mathfrak{O}_Y$. Äquivalent: $f^{-1}[A] \in \mathfrak{A}_X$ für jedes $A \in \mathfrak{A}_Y$. Die Funktion heißt **offen**, wenn Bilder offener Mengen offen sind: $f[V] \in \mathfrak{O}_Y$ für jedes $V \in \mathfrak{O}_X$. Sie heißt **abgeschlossen**, wenn Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

Lemma B.5 Seien X, Y topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$, $G \subseteq X$, $H \subseteq Y$.

a) Falls f stetig ist, dann

$$f[\overline{G}] \subseteq \overline{f[G]} \quad f^{-1}[\overline{H}] \supseteq \overline{f^{-1}[H]} \quad f^{-1}[\overset{\circ}{H}] \subseteq (f^{-1}[H])^\circ .$$

b) Falls f eine offene Abbildung ist, dann

$$f[\overset{\circ}{G}] \subseteq (f[G])^\circ \quad f^{-1}[\overline{H}] \subseteq \overline{f^{-1}[H]} \quad f^{-1}[\overset{\circ}{H}] \supseteq (f^{-1}[H])^\circ .$$

c) Falls f eine abgeschlossene Abbildung ist, dann $f[\overline{G}] \supseteq \overline{f[G]}$.

d) Falls f stetig, Y ein Hausdorff-Raum und \overline{G} kompakt, auch dann gilt: $f[\overline{G}] \supseteq \overline{f[G]}$.

Eine Menge $K \subseteq X$ heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt:

$$U_i \in \mathfrak{O}, \bigcup_{i \in I} U_i \supseteq K \implies \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists i_1, \dots, i_n \in I: \quad U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \supseteq K$$

Der topologische Raum X heißt *Hausdorffsch*, falls je zwei verschiedene Punkte in disjunkten offenen Mengen liegen:

$$\forall x \neq y \in X \quad \exists U, V \in \mathfrak{O} \quad : \quad x \in U, \quad y \in V, \quad U \cap V = \emptyset .$$



Beweis von Lemma B.5: a) $f^{-1}[\bar{H}]$ ist eine abgeschlossene Menge (da f stetig), welche $f^{-1}[H]$ enthält; $\overline{f^{-1}[H]}$ ist per Definition die *kleinste* Menge mit dieser Eigenschaft: daraus folgt

$$f^{-1}[\bar{H}] \supseteq \overline{f^{-1}[H]} .$$

Analog ist $f^{-1}[H^\circ]$ eine offene Menge, in $f^{-1}[H]$ liegt; $(f^{-1}[H])^\circ$ hingegen ist die *größte* offene Menge mit dieser Eigenschaft.

Für die erste Behauptung beachte, daß stets

$$f[f^{-1}[H]] \subseteq H, \quad G \subseteq f^{-1}[f[G]] .$$

Folglich enthält $f^{-1}[\overline{f[G]})$ erstens die Menge G und ist zweitens abgeschlossen; damit enthält sie auch \bar{G} : die *kleinste* G enthaltende abgeschlossene Menge. Aus $\bar{G} \subseteq f^{-1}[\overline{f[G]})$ folgt nun

$$f[\bar{G}] \subseteq f\left[f^{-1}[\overline{f[G]})\right] \subseteq \overline{f[G]} .$$

b) analog.

c) $f[\bar{G}]$ ist eine $f[G]$ enthaltende abgeschlossene Menge, $\overline{f[G]}$ ist die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft, \checkmark

d) Bilder $f[\bar{G}]$ von Kompakta \bar{G} unter stetigen Funktionen f sind wieder kompakt. Im Hausdorff-Raum Y ist jede kompakte Menge abgeschlossen: weiter wie bei c) \square

Literatur

- [1] ABERTH, O.: "Computable Analysis", McGraw-Hill (1980).
- [2] ABRAMSKY, S., A. JUNG: "Domain Theory", in *Handbook of Logic in Computer Science* 3, Clarendon Press (1994).
- [3] ATKINSON, K.E.: "An Introduction to Numerical Analysis", Wiley (1978).
- [4] BABAI, L., B. JUST, F. MEYER AUF DER HEIDE: "On the Limits of Computations with the Floor Function", pp.99-107 in *Information and Computation* 78(2) (1988).
- [5] BEN-OR, M.: "Lower bounds for algebraic computations trees", pp.80-86 in *Proc. 15th ACM Annual Symp. on Theory of Comput.* (STOC'83).
- [6] DE BERG, M., M. VAN KREVELD, M. OVERMARS, O. SCHWARZKOPF: "Computational Geometry", Springer (1997).

- [7] BLUM, L., F. CUCKER, M. SHUB, S. SMALE: "Complexity and Real Computation", Springer (1998).
- [8] BOISSONNAT, J-D., J. SNOEYINK: "Efficient algorithms for line and curve segment intersection using restricted predicates", pp.370-379 in *Proc. 15th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.* (SoCG'99).
- [9] BORWEIN, J.M.: "Brouwer-Heyting Sequences Converge", pp.14-15 in *The Mathematical Intelligencer* **20** (1998).
- [10] BRATTKA, V.: "The Emperor's New Recursiveness", erscheint in *International Conference on Words, Languages, and Combinatorics* (ICWLC'2000).
- [11] BRATTKA, V., P. HERTLING: "Feasible real random access machines", pp.490-526 in *Journal of Complexity* **14(4)** (1998).
- [12] BRATTKA, V., P. HERTLING: "Topological Properties of Real Number Representations", *Theoretical Computer Science* (2001).
- [13] BRATTKA, V., G. PRESSER: "Computability on Subsets of Metric Spaces", erscheint in *Theoretical Computer Science*.
- [14] BRATTKA, V., K. WEIHRAUCH: "Computability on Subsets of Euclidean Space I: Closed and Compact Subsets", pp.65-93 in *Theoretical Computer Science* **219** (1999).
- [15] BRATTKA, V., M. ZIEGLER: "Computability of Linear Equations", pp.95-106 in *Proc. of 2nd IFIP International Conference on Theoretical Computer Science* TCS@Montréal, Kluwer (2002).
- [16] BROUWER, L.E.J.: "Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe", pp.251-256 in *Jahresbericht deutsch. Math. Ver.* **33** (1925).
- [17] BÜRGISSE, P., M. CLAUSEN, M.A. SHOKROLLAHI: "Algebraic Complexity Theory", Springer (1997).
- [18] BÜRGISSE, P.: "Completeness and reduction in algebraic complexity theory", Springer (2000).
- [19] BURNIKEL, C., J. KÖNEMANN, K. MEHLHORN, S. NÄHER, S. SCHIRRA, C. UHRIG: "Exact Geometric Computation in LEDA", pp.418-419 in *11th ACM Symposium on Computational Geometry* (SoCG'1995).
- [20] CHADZELEK, T.: "Analytische Maschinen", Dissertation (1998).
- [21] CHADZELEK, T., G. HOTZ: "Analytic machines", pp.151-165 in *Theoretical Computer Science* **219** (1999).
- [22] CLARKSON, K.E., H. EDELSBRUNNER, L.J. GUIBAS, M. SHARIR, E. WELZL: "Combinatorial Complexity Bounds for Arrangements of Curves and Spheres", pp.99-160 in *Discr. Comput. Geom.* **5** (1990).



- [23] DAMEROW, V., L. FINSCHI, M. ZIEGLER: "Point Location Algorithms of Minimum Size", pp.5-9 in *Proceedings of the 14th Canadian Conference on Computational Geometry* (CCCG'2002),
- [24] DEIL, T.: "Darstellungen und Berechenbarkeit reeller Zahlen", *Dissertation und Informatik Berichte* **51**, FernUniversität Hagen (1984).
- [25] DOBKIN, D., R.J. LIPTON: "Multidimensional Searching Problems", pp.181-186 in *SIAM J. Comput.* **5(2)** (1976).
- [26] EDALAT, A., A. LIEUTIER: "Foundations of a Computable Solid Modelling", erscheint in *Theoretical Computer Science* (2002).
- [27] EDALAT, A., A. LIEUTIER, E. KASHEFI: "The Convex Hull in a New Model of Computation", pp.93-96 in *Proceedings of the 13th Canadian Conference on Computational Geometry* (CCCG'2001).
- [28] EDELSBRUNNER, H.: "Algorithms in Combinatorial Geometry", *EATCS* **10**, Springer (1987).
- [29] EDELSBRUNNER, H., E.P. MÜCKE: "Simulation of simplicity: a technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms", pp.99-104 in *ACM Trans. Graph.* **9** (1990).
- [30] EDELSBRUNNER, H., L. GUIBAS, J. PACH, R. POLLACK, R. SEIDEL, M. SHARIR: "Arrangements of curves in the plane — topology, combinatorics, and algorithms", pp.319-336 in *Theoretical Computer Science* **92** (1992), Elsevier.
- [31] EMAMY-K, M.R., M. ZIEGLER: "New Bounds for Hypercube Slicing Numbers", pp.155-163 in *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* (DMTCS), Special Issue: Proceedings of the 1st conference *Discrete Models, Computational and Combinatorial Geometry* (DM-CCG), Paris 2001.
- [32] FOURNIER, H., P. KOIRAN: "Are Lower Bounds Easier over the Reals?", pp.507-513 in *Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* (STOC'98).
- [33] FREDMAN, M.L.: "A lower bounds on the complexity of orthogonal range queries", pp.696-705 in *J. ACM* **28** (1981).
- [34] FUNKE, S., K. MEHLHORN, S. NÄHER: "Structural Filtering – A Paradigm for Efficient and Exact Geometric Programs", pp.39-42 in *Proceedings of the 11th Canadian Conference on Computational Geometry* (CCCG'99).
- [35] FUNKE, S.: "Combinatorial Curve Reconstruction and the Efficient Exact Implementation of Geometric Algorithms", Dissertation (2001).
- [36] GAUTSCHI, W.: "Numerical Analysis", Birkhäuser (1997).
- [37] GE, X., A. NERODE: "On Extreme Points of Convex Compact Turing Located Sets", pp.114-128 in *Logical Foundations of Computer Science*, Springer LNCS **813** (1994).

- [38] GRÖTSCHEL, M., L. LOVÁSZ, A. SCHRIJVER: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer (1993).
- [39] GRUBER, P.M.: "The Space of Convex Bodies", pp.303-312 in *Handbook of Convex Geometry*, Elsevier (1993).
- [40] GRÜNBAUM, B.: "Convex Polytopes", Wiley & Sons (1967).
- [41] GRZEGORCZYK, A.: "On the Definitions of Computable Real Continuous Functions", pp.61-77 in *Fundamenta Mathematicae* **44** (1957)
- [42] HERTLING, P.: "A Real Number Structure that is Effectively Categorical", pp.147-182 in *Math. Log. Quart.* **45**(2) (1999).
- [43] HERTLING, P.: "An Effective Riemann Mapping Theorem", pp.225-265 in *Theoretical Computer Science* **219** (1999).
- [44] HERTLING, P.: "A Comparison between Certain Representations of Regularly Closed Sets", in *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, **66**(1) <http://www.elsevier.nl/locate/entcs> (2002).
- [45] HERTLING, P.: "A Banach-Mazur computable but not Markov computable function", pp.962-972 in *Proc. 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming* (ICALP), **2380** Springer LNCS (2002).
- [46] HEUSER, H.: "Lehrbuch der Analysis", Teubner (1990).
- [47] JUST, B., F. MEYER AUF DER HEIDE, A. WIGDERSON: "On Computations with Integer Division", pp.101-111 in *Theoretical Informatics and Application* **23**(1) (1989).
- [48] KER-I KO: "Complexity Theory of Real Functions", Birkhäuser (1991).
- [49] KHACHIYAN, L.: "A polynomial algorithm in linear programming", Englische Übersetzung aus dem Russischen pp.191-194 in *Soviet Math. Dokl.* **20** (1979).
- [50] KHANBAN, A.A., A. EDALAT, A. LIEUTIER: "Delaunay triangulation and Voronoi diagram with imprecise input data", submitted.
- [51] KIYEK, K., F. SCHWARZ: "Mathematik für Informatiker" **2**, Teubner (1991).
- [52] KLEE, V., G.L. MINTY: "How good is the simplex algorithm?", pp.159-179 in *Inequalities III*, Academic Press (1972).
- [53] KRAUS, BARBARA: "Juannas animierte Welt, Heimat von vielen animierten Gifs und Bildern" (2002),
http://www.fortunecity.de/wolkenkratzer/stern/799/gifsammlung/_schaf03.gif
- [54] KUMMER, M., M. SCHÄFER: "Computability of Convex Sets", pp.550-561 in *Proceedings of the STACS*, Springer LNCS **900** (1995).
- [55] KUŠNER, B.A.: "Markov's Constructive Analysis; a Participant's View", pp.267-285 in *Theoretical Computer Science* **219** (1999).



- [56] LEWIS, H.R., C.H. PAPADIMITRIOU: "Elements of the Theory of Computation", Prentice-Hall (1981).
- [57] LOVÁSZ, L.: "An Algorithmic Theory of Numbers, Graphs, and Convexity", SIAM (1986).
- [58] MATIYASEVICH, Y.: "Hilbert's Tenth Problem", The MIT Press (1993).
- [59] MEYER AUF DER HEIDE, F.: "A Polynomial Linear Search Algorithm for the n -dimensional Knapsack Problem", pp.668-676 in *J. ACM* **31**(3) (1984).
- [60] MEYER AUF DER HEIDE, F.: "Fast Algorithms for N -Dimensional Restrictions of Hard Problems", pp.740-747 in *Journal of the ACM* **35**(3) (1988).
- [61] MEYER AUF DER HEIDE, F.: "On Genuinely Time Bounded Computations", pp.1-16 in *Proceedings of the 6th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science* (STACS'89).
- [62] MICHELUCCI, D., J.-M. MOREAU: "Lazy Arithmetic", pp.961-975 in *IEEE Transactions on Computers* **46**(9) (1997).
- [63] MORET, B.M.: "The Theory of Computation", Addison-Wesley (1998).
- [64] MÜLLER, N.T.: "The iRRAM: Exact arithmetic in C++", pp.222-252 in *Computability and Complexity in Analysis*, **2064** Springer LNCS (2001).
- [65] POUR-EL, M.B., J.I. RICHARDS: "Computability in Analysis and Physics", Springer (1989).
- [66] PREPARATA, F.P., M.I. SHAMOS: "Computational Geometry", Springer (1985).
- [67] VON QUERENBURG, B.: "Mengentheoretische Topologie", Springer (1979).
- [68] RELLICH, F.: "Störungstheorie der Spektralzerlegung I: Analytische Störung der isolierten Punkteigenwerte eines beschränkten Operators", pp.600-619 in *Math. Ann.* **113** (1937).
- [69] ROBERTSON, N., D.P. SANDERS, P. SEYMOUR, R. THOMAS: "A New Proof of the Four-Colour Theorem", pp.17-25 in *ERA of the AMS* **2** (1996).
- [70] RUDIN, W.: "Functional Analysis", McGraw-Hill.
- [71] SAVAGE, J.E.: "Models of Computation", Addison-Wesley (1998).
- [72] SCHÖNHAGE, A.: "On the Power of Random Access Machines", pp.520-529 in *Proceedings of the 6th International Colloquium on Automata, Languages and Programming* (ICALP'79), Springer LNCS **71**.
- [73] SCHRÖDER, M.: "Admissible Representations of Limit Spaces", pp.273-295 in *Computability and Complexity in Analysis*, **2064** Springer LNCS (2001).
- [74] SCOTT, D.: "Outline of a Mathematical Theory of Computation", Technical Monograph PRG-2, Oxford University (1970).

- [75] SHEWCHUK, J.R.: "Adaptive Precision Floating-Point Arithmetic and Fast Robust Geometric Predicates", pp.305-363 in *Discrete and Computational Geometry* **18** (1997).
- [76] SIMPSON, S.G.: "Subsystems of Second Order Arithmetic", Springer (1999).
- [77] SOHLER, C., M. ZIEGLER: "Computing Cut Numbers", pp.73-79 in *Proceedings of the 12th Annual Canadian Conference on Computational Geometry* (CCCG'2000).
- [78] SORGATZ, A., R. HILLEBRAND: "MuPAD – Ein Computeralgebra System I", pp.11-14 in *Linux Magazin* **12** (1995).
- [79] SPECKER, E.: "Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis", pp.145-158 in *The Journal of Symbolic Logic* **14(3)** (1949).
- [80] SPECKER, E.: "The fundamental theorem of algebra in recursive analysis", pp.321-329 in *Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra*, Wiley-Interscience (1969).
- [81] SPIELMANN, D., SHANG-HUA TENG: "Smoothed analysis of algorithms: why the simplex algorithm usually takes polynomial time", pp.296-305 in *Proceedings of the 33rd annual Symposium on Theory of Computing* (STOC'01).
- [82] TACITUS, P. CORNELIUS: "Historiae", Buch I Absatz 22.
- [83] TARSKI, A.: "A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry", University of California Press (1951).
- [84] THOMAS, W.: "Automata on Infinite Objects", pp.135-191 in *Handbook of Theoretical Computer Science* **B**, Elsevier (1990).
- [85] TURING, A.M.: "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", pp.230-265 in *Proc. London Math. Soc.* **42(2)** (1936).
- [86] UKKONEN, E.: "Exponential Lower Bounds for some NP-complete Problems in Restricted Linear Decision Tree Model", pp.181-192 in *BIT* **23(2)** (1983).
- [87] WEIHRAUCH, K.: "Computable Analysis", EATCS, Springer (2001).
- [88] WONG, KAM-CHAU: "Computability of Minimizers and Separating Hyperplanes", pp.564-568 in *Mathematical Logic Quarterly* **42** (1996).
- [89] ZIEGLER, M., V. BRATTKA: "Computing the dimension of linear subspaces", pp.450-458 in *Proceedings of the 29th SOFSEM, 1963* Springer LNCS (2000).
- [90] ZIEGLER, M., V. BRATTKA: "Turing Computability of (Non-)Linear Optimization", pp.181-184 in *Proceedings of the 13th Canadian Conference on Computational Geometry* (CCCG'2001).
- [91] ZIEGLER, M., V. BRATTKA: "A Computable Spectral Theorem", pp.378-388 in *Computability and Complexity in Analysis*, LNCS **2064**, Springer (2001).
- [92] ZIEGLER, M.: "Computability on Regular Subsets of Euclidean Space", pp.157-181 in *Mathematical Logic Quarterly* **48** Suppl.1 (2002).



Danksagung

Natürlich wäre diese Arbeit so nicht möglich gewesen ohne die Unterstützung zahlreicher Menschen:

allen voran meine Frau, meine Eltern und Geschwister;
Friedhelm als überaus toleranter 'Chef' (obwohl er sich als letzteres gar nicht gerne sieht);
meine Kollegen und Kolleginnen aus Informatik, Mathematik und (sic!) Physik;
Freude, Bekannte und viele, viele mehr.

Zwei Leuten aber gebührt ganz besonderer Dank:
Vasco Brattka und Peter Hertling von der FernUniversität Hagen,
die mir mit fachlichem Rat elektronisch stets zur Seite standen.