

Dreidimensionale Vermessung kreisförmiger Objekte mittels Luminanz und Tiefendaten

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
der Universität Paderborn
genehmigte Dissertation

von

M. Eng. Nan-shan Chen

aus Taiwan

Referent: Prof. Dr. rer. nat. G. Hartmann
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. K. Meerkötter
Tag der Mündlichen Prüfung: 17. Juli 2003

D 14-190
Paderborn, 2003

Nomenklatur

Allgemeine:

- Eine lineare Abbildung und ihre Matrix teilen dasselbe Symbol, da es ein Isomorphismus zwischen den Vektorräumen besteht. Sie werden in der Regel in Fett-Druck geschrieben, z. B. die Matrizen bzw. Abbildungen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , etc.; die Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} , \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{n} , $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\sigma}$, ..., und die Skalaren a , b , c , μ , σ , m , n , etc.. In kalligrafischer Schrift, wie \mathcal{A} , wird in der Regel ein Raum dargestellt. Die häufig benutzten Buchstaben für Räume sind $\mathcal{E}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{N}$. Die Zahlen-Mengen sehen wie $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ aus.
- Im euklidischen bzw. unitären Raum ist angenommen, wann immer die Begriffe Orthogonalität, Längen- bzw. Winkel-Messung im Kontext essentiell ist. Das kanonische Skalarprodukt ist impliziert, wenn nicht ausdrücklich spezifiziert wird. Mit $\mathbf{x}^* \mathbf{y}$ bezeichnen wir also das hermitesche Skalarprodukt für \mathbf{x}, \mathbf{y} im unitären Raum \mathcal{U}^n . Cf. Fußnote 77 auf S. 47.

(\mathbf{u}, \mathbf{v})	Skalarprodukt der Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v}
$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$	\mathbf{x} und \mathbf{y} in derselben Äquivalenzklasse
$\mathcal{V} + \mathcal{W}$	Summe von Teilräumen \mathcal{V}, \mathcal{W}
$\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$	direkte Summe von Teilräumen \mathcal{V}, \mathcal{W}
$\mathcal{V} \perp \mathcal{W}$	Teilräume \mathcal{V}, \mathcal{W} stehen senkrecht aufeinander
\mathcal{V}^\perp	das orthogonale Komplement zum Raum \mathcal{V}
$\mathcal{V} \oplus^\perp \mathcal{W}$	direkte Summe der orthogonalen Räume \mathcal{V}, \mathcal{W}
$\ \mathbf{A}\ _2$	Spektralnorm der Matrix \mathbf{A} (vektornorm-induzierte Matrixnorm) ¹
$\ \mathbf{A}\ _2$	$= \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \ \mathbf{Ax}\ _2 / \ \mathbf{x}\ _2 = \sup_{\ \mathbf{x}\ _2=1} \ \mathbf{Ax}\ _2 = \sigma_1$
$\ \mathbf{A}\ _F$	Frobeniusnorm oder Hilbert-Schmidt-Norm der Matrix \mathbf{A}
$\ \mathbf{A}\ _F^2$	$= \text{tr } \mathbf{A}^* \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{AA}^* = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 = \sum \sum a_{ij}^2$
$\ \mathbf{A}\ _U$	unitärinvariante Norm mit $\ \mathbf{U}^* \mathbf{AV}\ _U = \ \mathbf{A}\ _U$, \mathbf{U} und \mathbf{V} unitär
$\ \mathbf{v}\ _2$	euklidische Vektornorm, 2-Norm, ℓ_2 -Norm des Vektors \mathbf{v}
$\ \mathbf{v}\ _p$	ℓ_p -Norm, p -Norm, Hölder-Norm ($(\sum v_i ^p)^{1/p}$, $p \geq 1$)
$\mathbf{1}_m$	m -dimensionaler DC-Vektor. Cf. Gl. (2.4.1) auf S. 31.
\mathbf{A}_r	nächste Rang- r Approximation der Matrix \mathbf{A}
$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$	unitäre Matrix \mathbf{A} über \mathbb{C}
$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$	orthogonale Matrix \mathbf{A} über \mathbb{R}
$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$	selbstadjungierte (hermitesche) Matrix \mathbf{A} über \mathbb{C}
$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$	symmetrische Matrix \mathbf{A} über \mathbb{R}

¹[Horn und Johnson, 1985, pp. 290-320, §5.6]

$\mathbf{A} > 0$	positive Matrix (mit allen Elementen $a_{ij} > 0$)
$\mathbf{A} \geq 0$	nichtnegative Matrix (mit allen Elementen $a_{ij} \geq 0$)
$\mathbf{A} < 0$	negative Matrix (mit allen Elementen $a_{ij} < 0$)
$\tilde{\mathbf{A}}$	spalten-zentrierte Matrix \mathbf{ZA} (<i>Cf.</i> Def. 2.4.3 auf S. 32)
Abb.	Abkürzung von „Abbildung“
\mathbf{A}^{-1}	Inverse der quadratischen Matrix \mathbf{A}
\mathbf{A}^-	generalisierte Inverse $\mathbf{A}^{(1)}$ mit $\mathbf{AXA} = \mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{(1,3)}$	generalisierte $\{1, 3\}$ -Inverse der Matrix \mathbf{A} . <i>Cf.</i> Gl. (2.19) auf S. 15.
$\mathbf{A}^{(1,2,5)}$	$\{1, 2, 5\}$ -Inverse, Gruppen-Inverse der quadratischen Matrix \mathbf{A} .
$\mathbf{A}\{1, 2, 5\}$	Matrizen \mathbf{X} mit $\mathbf{AXA} = \mathbf{A}$, $\mathbf{XAX} = \mathbf{X}$, $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$.
$\mathbf{A}^{(1^k, 2, 5)}$	Drazin-Inverse $\mathbf{A}^k \mathbf{A}^D \mathbf{A} = \mathbf{A}^k$, $\mathbf{A}^D \mathbf{AA}^D = \mathbf{A}^D$, $\mathbf{AA}^D = \mathbf{A}^D \mathbf{A}$.
\mathbf{A}^D	Drazin- (kommunierende) Inverse der quadratischen Matrix \mathbf{A}
$\mathbf{A}^\#$	Gruppen-Inverse der quadratischen Matrix \mathbf{A}
$\mathbf{A}^\#$	$\mathbf{AA}^\# \mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^\# \mathbf{AA}^\# = \mathbf{A}^\#$, $\mathbf{AA}^\# = \mathbf{A}^\# \mathbf{A}$
$\mathbf{A}^\#$	Existenz $\iff \mathcal{R}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathbb{C}^n \iff \text{Ind}(\mathbf{A}) = 1$ ²
$\mathbf{A}^\#$	$\{1, 2, 5\}$ -Inverse der quadratischen Matrix \mathbf{A}
\mathbf{A}^\dagger	Moore-Penrose-Inverse der rektangulären Matrix \mathbf{A}
$\overline{\mathbf{A}}$	komplex Konjugierte der Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\overline{\mathbf{A}} = (\overline{a}_{ij})$
\mathbf{A}^T	Transponierte von \mathbf{A} : $(\mathbf{Au}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}^T \mathbf{v})$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$
\mathbf{A}^*	Adjungierte von \mathbf{A} : $(\mathbf{Au}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}^* \mathbf{v})$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$
\mathbf{A}^*	Adjungierte der Matrix \mathbf{A} durch $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}^T} = \overline{\mathbf{A}}^T$
\mathbf{A}^*	$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$, $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*$, $(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B})^* = \overline{\alpha} \mathbf{A}^* + \overline{\beta} \mathbf{B}^*$
$\mathbf{A}_{m \times n}$	Andeutung der Dimension $m \times n$ von Matrix \mathbf{A}
\mathbf{a}_i	Zeilenvektor der Matrix \mathbf{A} . <i>Cf.</i> Gl. (2.40) auf S. 28
\mathbb{C}	Körper der komplexen Zahlen
\mathbf{C}	theoretische Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors
$\mathbf{C}_\mathbf{A}$	Kovarianzmatrix der Matrix \mathbf{A} in Gl. (2.52) auf S. 36
DOA	Direction of Arrival
$\det \mathbf{A}$	Produkt aller Eigenwerte des Operators \mathbf{A} [Axler, 1995]
$d_M(\mathbf{x})$	Mahalanobis-Distanz von \mathbf{x} zum Mittelwertvektor
$d_M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Mahalanobis-Distanz zwischen \mathbf{x} und \mathbf{y} (<i>Cf.</i> Gl. (2.72) auf S. 44)
$d_M'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	regularisierte Mahalanobis-Distanz (<i>Cf.</i> Gl. (2.77) auf S. 46)
$\dim \mathcal{V}$	Dimension des Raumes \mathcal{V}
$\dim \mathcal{N}(\mathbf{A})$	Rangabfall, Nullität (Dimension des Nullraums) der Matrix \mathbf{A}
\mathbf{e}_1	Standard-Basisvektor $[1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$
EP	quadratische Matrix \mathbf{A} mit $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{AA}^\dagger$
$E[X]$	Erwartungswert der Zufallsvariablen X
\mathcal{E}	endlichdimensionaler, reeller, linearer Raum mit symmetrischer, positiv definiter Bilinearform
\mathcal{E}^n	n -dimensionaler euklidischer Raum (<i>cf.</i> Fußnote 76 auf S. 47)
$\mathfrak{F}[\cdot]$	Fourier Transformation eines 1- oder 2-dimensionalen Skalarfeldes
H	Hesse-Matrix eines Skalarfeldes $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ (<i>cf.</i> Fußnote 99 auf S. 69)
I	Skalarfeld der Bildintensität $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ (<i>cf.</i> Fußnote 88)
I_b	Skalarfeld der binären Bildintensität $\mathbb{R}^2 \mapsto \{0, 1\}$ (<i>cf.</i> § 3.1 ab S. 59)
\mathbb{I}	Ring der ganzen Zahlen
i	$\sqrt{-1}$
$\Im(c)$	Imaginärteil einer komplexen Zahl c

²[Ben-Israel und Greville, 1974, p. 162]

I	Identitätsmatrix mit geeigneter Dimension
I _n	Identitätsmatrix der Dimension $n \times n$
Ind A	Index einer quadratischen Matrix A
Ind A	der kleinste nichtnegative ganze Zahl mit $\text{rank } \mathbf{A}^k = \text{rank } \mathbf{A}^{k+1}$
i. i. d	independent identically distributed
\mathbb{K}	beliebiger Körper ohne Einschränkung
$\mathbb{K}_{1+1 \neq 0}$	beliebiger Körper mit Charakteristik $\neq 2$
\mathcal{K}^{n-2}	Menge aller $(n - 2)$ -dimensionalen Hyperkreise (Def. 2.4.17 auf S. 49)
$\kappa_p(\mathbf{A})$	Konditionsnummer (Inversion) der Matrix A $\equiv \ \mathbf{A}\ _p \cdot \ \mathbf{A}^{-1}\ _p$
Ker A	Kern oder Nullraum der Matrix A
λ_i	der i -te Eigenwert einer Matrix
$\mu_{\mathbf{A}}$	Mittelwertvektor der Matrix A
$\widehat{\mu}_{\mathbf{A}}$	Schätzmittelwertvektor der Matrix A Gl. (2.41) auf S. 31
μ_X	Erwartungswert der Zufallsvariablen X
$\mathcal{N}(\mathbf{A})$	Nullraum oder Kern der Matrix A
$\mathcal{N}(\mathbf{A}^*)$	linker Nullraum der Matrix A
$\mathcal{N}^\perp(\mathbf{A})$	das orthogonale Komplement zu $\mathcal{N}(\mathbf{A})$
$N(\mu, \sigma^2)$	Gaußverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2
$N(\mu, \sigma^2)$	Gaußverteilung mit Dichtefunktion $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
$N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$	Gaußverteilung mit Mittelwertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix C
$N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$	Dichte $(\det \mathbf{C}^{-1}/(2\pi)^n)^{1/2} \exp[-(1/2)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^* \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]$
$\mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$	Projektor(s) auf \mathcal{V} entlang (parallel zu) \mathcal{W} mit $\mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}^2 = \mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$
$\mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$	Projektor(s) mit $\mathcal{R}(\mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}) = \mathcal{V}$ und $\mathcal{N}(\mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}) = \mathcal{W}$
$\mathbf{P}_{\mathcal{V}}$	Orthoprojektor(s) auf Teilraum \mathcal{V} mit $\mathbf{P}_{\mathcal{V}}^2 = \mathbf{P}_{\mathcal{V}} = \mathbf{P}_{\mathcal{V}}^*$
$\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})}$	Orthoprojektor(s) auf den Bildraum $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ von A
$\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A}), \mathcal{N}(\mathbf{A})}$	(Matrix des) Projektor(s) auf $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ entlang (parallel zu) $\mathcal{N}(\mathbf{A})$
\mathbb{Q}	Körper der rationalen Zahlen
RPN	Range Perpendicular to Nullspace: $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$
Rad B	Radikal einer Bilinearform bzw. eines Raumes mit Skalarprodukt
$\mathbf{R}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$	Reflektor(s) in \mathcal{V} entlang (parallel zu) \mathcal{W} mit $\mathbf{R}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}^2 = \mathbf{I} \neq \mathbf{R}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$
$\mathbf{R}_{\mathcal{V}}$	Orthoreflektor(s) in Teilraum \mathcal{V} , mit $\mathbf{R}_{\mathcal{V}}^{-1} = \mathbf{R}_{\mathcal{V}} = \mathbf{R}_{\mathcal{V}}^* \neq \mathbf{I}$
$\mathcal{R}(\mathbf{A})$	Bildraum (Spaltenraum) der Matrix A
$\mathcal{R}(\mathbf{A}^*)$	Zeilenraum der Matrix A
$\mathcal{R}^\perp(\mathbf{A})$	das orthogonale Komplement zu $\mathcal{R}(\mathbf{A})$
rank A	Rang der Matrix A
\mathbb{R}	Körper der reellen Zahlen
$\Re(c)$	Realteil einer komplexen Zahl c
$\rho(\mathbf{A})$	Eigenwertspektrum der Matrix A
S.	Abkürzung von „Seite“
SVD	Singulärwertzerlegung (Singular Value Decomposition)
σ	Standardabweichung (cf. Fußnote 64 auf S. 41)
σ_X	Standardabweichung der Zufallsvariablen X
σ_X^2	Varianz der Zufallsvariablen X
$\sigma(\mathbf{A})$	Singulärwertspektrum der Matrix A : $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\min(m,n)}\}$
σ_1	der größte Singulärwert der Matrix A
σ_1^2	Betrag des größten Eigenwerts der Matrix $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ oder $\mathbf{A} \mathbf{A}^*$
σ_r	der kleinste nichtverschwindende Singulärwert der Matrix A
\mathcal{S}^{n-1}	in \mathcal{E}^n eingebettete Hypersphäre
span{...}	Aufspannung bzw. Erzeugung eines linearen Raumes

$\text{span}\{\mathbf{A}\}$	Erzeugung durch Spaltenvektoren der Matrix \mathbf{A}
$\mathbf{T}_{\mathfrak{F}}^n$	Diskrete Fouriertransformationsmatrix für n Punkte
$\text{tr } \mathbf{A}$	Spur (trace) der Matrix \mathbf{A}
${}^t \mathbf{u}_i$	Zeilenvektor ${}^t \mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i} \ \cdots \ u_{ti}]$ der Matrix \mathbf{U} einer SVD
${}^t \tilde{\mathbf{u}}_i$	Zeilenvektor ${}^t \tilde{\mathbf{u}}_i = [\tilde{u}_{1i} \ \tilde{u}_{2i} \ \cdots \ \tilde{u}_{ti}]$ der Matrix $\tilde{\mathbf{U}}$ einer SVD
\mathcal{U}^n	n -dimensionaler Unitärraum (<i>cf.</i> Fußnote 77 auf S. 47)
$\tilde{\mathbf{U}}$	linke Singulärmatrix einer spalten-zentrierten Matrix
$\tilde{\mathbf{V}}$	rechte Singulärmatrix einer spalten-zentrierten Matrix
$\text{Var}[X]$	Varianz der Zufallsvariablen X
$\mathbf{x}(\zeta, t)$	stochastischer Prozeß [Lathi, 1968, Chap. 3]
$x(\zeta, t)$	Musterfunktion des stochastischen Prozesses $\mathbf{x}(t, \zeta)$
\mathbf{Z}_m	zentrierender Orthoprojektor. <i>Cf.</i> Gl. (2.43) auf S. 32.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	i
Inhaltsverzeichnis	v
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung und Zielsetzung	1
1.2 Das System und Verweise auf die Abschnitte	3
1.3 Portierbare Implementation und Open-Source	3
2 Grundlagen	5
2.1 Projektoren und Reflektoren	6
2.1.1 Projektor	8
2.1.2 Orthoprojektor	8
2.1.3 Reflektor	9
2.1.4 Orthoreflektor	10
2.1.5 Konstruktion der Projektoren	10
2.1.6 Komplexe Householder-Transformation	11
2.2 Generalisierte Inversen	14
2.3 Singulärwertzerlegung	16
2.3.1 Berechnung der Singulärwertzerlegung	19
2.3.2 Vier fundamentale Teilräume	22
2.3.3 Eigenschaften der Singulärwertzerlegung	25
2.4 Meßdaten und Singulärwertzerlegung	28
2.4.1 Der Kondensator ist ein Projektor	29
2.4.2 Kovarianzmatrix via SVD	36
2.4.3 Mahalanobis-Distanz via SVD	38
2.4.4 Kovarianz, Mahalanobis-Metrik und Gaußverteilung	41
2.4.5 Regularisierte Mahalanobis-Distanz via SVD	44
2.4.6 Hyperkreis und Regularisierte Mahalanobis-Distanz	49
3 Ellipsen	59
3.1 Konturenextraktion	59
3.1.1 Canny-Detektor und Gabor-Filterung	62
3.1.2 Kammdetektor unter Abwesenheit der Orientierungskarte	66
3.2 Ellipsenextraktion	69
4 Hyperkreis	77
4.1 Geometrische Filterung	77
4.2 Hyperebene via SVD	79

4.3	Hyperkreis via SVD	83
4.4	Affinitätstest	86
5	Ausblick	93
	Literaturverzeichnis	97
	Index	125
	Autorenverzeichnis	135
	Abbildungsverzeichnis	139

Kapitel 1

Einleitung

Die kreisförmige Kontur ist eines der wichtigsten geometrischen Merkmale vieler Objekte im industriellen Alltag. Dreidimensionale Vermessung solcher Objekte stellt kritische Information für verschiedene Aufgaben des künstlichen Sehens zur Verfügung. Präsentiert werden Verfahren für parametrische Bestimmung eines Kreises im dreidimensionalen euklidischen Raum, mit Generalisierungsmöglichkeit auf endlichdimensionale Räume.

Auf einem Skalarfeld (Intensitätsdaten) mit einem korrespondierenden Vektorfeld (Tiefendaten) eines künstlichen Blickes basierend wird untersucht, signifikante Kreise in der Szene, mit Priorität von Robustheit und geringem Zeitaufwand, parametrisch zu bestimmen.

Lösungsansätze werden vorgestellt, die die Präzisionsanforderungen am Beispiel einer robotischen Manipulation der Autoräder erfüllen. Eigenständige, portierbare Implementierungen in ANSI C sind entsprechend präsentiert, die für weitere Untersuchungen der relevanten Teilprobleme sehr wertvoll sind.

Die parametrische Lagebestimmung eines in der Szene vorhandenen Kreises basiert auf einer Fusion eines Skalarfeldes (Intensitätsbilddaten einer Szene) und eines Vektorfeldes (durch geeichte Stereokameras geschätzte 3D-Koordinaten derselben Szene). Die Fusion der beiden Datenquellen ergibt eine Menge der dreidimensionalen Koordinaten, die eine verrauschte Abtastung des gesuchten Kreises im Raum darstellt. Ein eindimensionaler Kreis im dreidimensionalen euklidischen Raum wird als „Hyperkreis“ aus dieser Datenmenge parametrisch bestimmt. Der neue geometrische Begriff „Hyperkreis“ wird eingeführt, um die Problematik und unseren Ansatz auf endlichdimensionale Räume zu generalisieren. Die Implementation ist hyperkreis-basiert und nimmt eine Datenmenge der beliebigen Dimension auf, was jedoch praktisch nicht immer realisierbar ist.

1.1 Problemstellung und Zielsetzung

Gegeben sind die Bilddaten aus einem geeichten Stereokamerakopf (SONY EVI-310/311) [Trapp, 1998] im Labor des Fachgebietes GET, Universität Paderborn. Die Daten bestehen aus zwei Grauwertbildern und einer Tiefenkarte, in der die geschätzten kartesischen Koordinaten in der Kameraszene bezüglich des Kamerakopfes (Abb. 4.6–(b) auf S. 87) einge-

tragen sind. Diese Tiefenkarte korrespondiert pixelweise mit einem der beiden Intensitätsbilder [Trapp, 1998]³. Aus diesen Daten soll ein in der Szene visuell vorhandener Kreis parametrisch in demselben Koordinatensystem bestimmt werden. Da dieses Ergebnis für den Roboterarm (Manutec r2) (Abb. 4.6-(a) auf S. 87) zur Manipulation des Objektes verwendet werden soll, muß die Lage des Zielobjektes hinreichend präzis angegeben werden, um das Werkzeug relativ zum Objekt ausrichten zu können. Die erforderliche Genauigkeit am Beispiel der Demontage eines Autorades und entsprechender Werkzeuge sei ca. 1 mm hinsichtlich der „Verschiebung“ und ca. 1 Grad in der Orientierung.

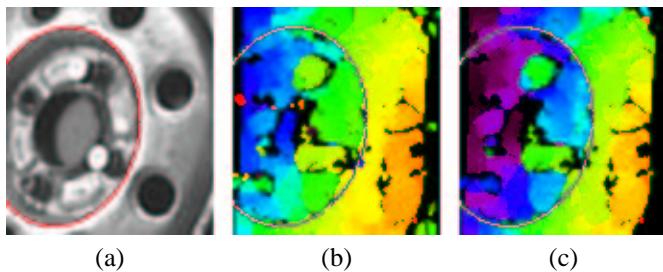


Abbildung 1.1: Intensitätsbild und Tiefenkarte. Bild (a) ist eines der beiden von dem Stereokamerakopf aufgenommenen Intensitätsbilder. In Bild (b) werden die Z-Koordinaten, die pixelweise dem Bild (a) korrespondieren, bezüglich des Kamerakopfes normalisiert und affin auf falsche Farben abgebildet. Die undefinierten Vektoren in der Tiefenkarte werden schwarz dargestellt. Das Bild (c) visualisiert das Ergebnis der *regularisierten Mahalanobis-Filterung* der Z-Koordinaten. Die eigentlichen Werte in der Tiefenkarte werden nicht geändert, sondern nur die Ausreißer werden ausgeschlossen, indem sie als die Undefinierten identifiziert werden. Die erst im Kapitel 3 (S. 59) bestimmte Ellipse wird hier im voraus auf den Bildern gezeichnet.

Wegen inhärenter Ambiguität der Stereopsis und der Gegebenheit der passiven Stereo-korrespondenzverfahren sind in der Tiefenkarte viele undefinierte Vektoren. Solche sind in Abb. 1.1-(b) und -(c) schwarz gezeichnet. Unsichere Korrespondenzbestimmungen, die nicht durch dasselbe Verfahren ausgeschlossen worden sind, werden in der Regel als extrem ausreißende Werte in der resultierenden Tiefenkarte erscheinen, wie z. B. die roten und orangefarbenen Flecken in Abb. 1.1-(b). Solche Art von Rauschen lässt sich nicht effektiv durch lineare Filterungen entfernen. In Bild Abb. 1.1-(c) werden die „roten oder orangefarbenen Ausreißer“ im Bild-(b) durch eine nicht-lineare Filtering erfolgreich entfernt [Chen et al., 2000]. Dies ergibt sich aus der in § 2.4.5 ab S. 44 definierten *regularisierten Mahalanobisdistanz*⁴. Im Bild-(c) wurde eine Distanzschwelle von 3 (`pnmfilt`) verwendet⁵. Dieses Verfahren wird jedoch nicht zur Entfernung der „Ausreißer“ in der Tiefenkarte eingesetzt, denn wir können in einem späteren Stadium nach der Datenreduktion im Kapitel 3 noch niedrigeren Rechenaufwand erzielen, während in diesem Verfahren die Berechnung der *Moore-*

³Ob die linke oder die rechte Kamera des Kopfes ist hier uninteressant. Sie ist arbiträr in [Trapp, 1998] ausgewählt worden.

⁴Es sei darauf geachtet, daß die übliche Definition der *Mahalanobisdistanz* [Mahalanobis, 1930, 1936] [Everitt, 1998] [Duran und Odell, 1974] in der Praxis problematisch ist und eine Berechnung in jedem Moment zum Absturz führen kann, denn es handelt sich um die Invertierung einer eventuell singulären Matrix. In diesem Fall ist die *Mahalanobisdistanz nicht definiert*. Dies heißt nicht, daß wir mit der Distanzberechnung aufhören müssen, sondern es existiert eine plausible Regularisierung durch die *Moore-Penrose-Inverse*, die im Kapitel 2 (S. 5) vorgeschlagen und diskutiert wird. Ich habe mich gewundert, daß dieses Problem trotz des Recherchierens nirgendwo diskutiert ist, obwohl die Definition überall zitiert und in der Praxis eingesetzt wird. Wahrscheinlich gehen die Autoren davon aus, daß eine *Kovarianzmatrix* aus vollrangigen Daten positiv definit sein müsse. Dies ist in der Praxis leider nicht der Fall. Oft wird die Kovarianz semidefinit oder sogar indefinit.

⁵Die „Einheit“ der Distanz wird auf S. 41 und S. 41 im Kapitel 2 diskutiert.

Penrose-Inversen der *Kovarianz* aller relevanten und irrelevanten Z-Koordinaten involviert ist. Cf. Abb. 4.11 auf S. 91.

Andererseits stört uns noch immer die Unvollständigkeit der Tiefenkarte, die wir nun als das *diskrete, unvollständige Vektorfeld* bezeichnen. Die Anzahl der undefinierten Vektoren in Abb. 1.1-(b) beträgt ca. 20 % (kdf2pn) von dem vollen 108×118 Vektorfeld. Diese Rate variiert vom Bild zu Bild je nach der Experimentierumgebung aus nicht vorhersagbaren Gründen.

Wir fassen die Gegebenheiten zusammen:

1. ein diskretes, vollständiges Skalarfeld mit Intensitätsinformation der Szene, das die gesuchte Ellipse möglicherweise nur teilweise in der Szene erfasst hat.
2. ein diskretes, unvollständiges Vektorfeld mit Kamerakoordinaten, das mit dem Skalarfeld pixelweise korrespondiert und eine unbekannte Rauschstruktur besitzt.

Die beiden sollen als verschiedene sensorische Quellen betrachtet werden, um gesuchte Information daraus zu gewinnen.

1.2 Das System und Verweise auf die Abschnitte

In Kapitel 2 (S. 5) werden die mathematischen Grundlagen sowie die der Arbeit spezifischen Definitionen und Korollare zusammengefaßt. Es läßt sich als eine selbständige Einheit lesen. Für einen schnellen Durchblick der Arbeit empfiehlt sich jedoch, dieses Kapitel zu überspringen und nur an der Stelle der Verweise nachzuschlagen. Nichtsdestoweniger ist das Kapitel ein wesentlicher Bestandteil und der Geist der Arbeit.

1.3 Portierbare Implementation und Open-Source

Alle Programme, die in dieser Arbeit relevant sind, sind in ANSI/ISO-C geschrieben, um *maximale Portierbarkeit* und *minimale Ressourcen-Forderung* zu erzielen. Sie sind mit verschiedenen Compilern und auf verschiedenen Maschinen⁶ entwickelt und getestet worden.

Ein großer Vorteil der Wahl ist, daß alle Ergebnisse der Arbeit auf verschiedensten Maschinen und Projekten, betriebssystem-unabhängig, sofort compilierbar und einsatzbereit sind. Keinerlei zusätzliche Software außer einem ANSI/ISO C-Compiler ist erforderlich, welcher auf praktisch allen Platformen vorhanden ist. Es wurde ein großes Projekt mit vielen Hilfsprogrammen und eigenem BLAS. Ein eigenes BLAS zu entwickeln bedeutet auch die Anpassungsnotwendigkeit jeder einzelnen Routine, falls sie aus fremden Quellen (z. B. EISPACK, LINPACK, LAPACK) übernommen werden soll. Für die Korrektheit werden die Ergebnisse stets mit denen von Matlab oder SciLab verglichen bzw. kontrolliert. Sie sind jedoch im Projekt nicht involviert, sonst verliert die ganze Implementierung die Beweglichkeit und Wiedereinsetzbarkeit, auf die sehr großen Wert gelegt wird.

⁶Sun Sparc-Stations mit SunOS/Solaris/Gnu C; Hewlett Packard 200LX Palmtop PC mit MSDOS/Borland Turbo C; und Compaq LTE ELITE 50 Laptop mit Linux(Debian)/Gnu C; Acer TravelMate 312T mit Linux(Debian)/Gnu C.

In der Entwicklung ist ein Floating-Point-Format zum Austausch der Bilder zwischen den einzelnen Modulen kaum vermeidbar. Zu diesem Zweck wurde das PNM-Format⁷ auf PFM (Portable Float Map) erweitert, das die hohe Portierbarkeit von PNM ererbt. Das PFM-Format schreibt das IEEE-754 Single Precision Format im Big-Endian vor⁸. Die Manipulationen und Konvertierungen zwischen PNM, PFM, und Khoros VIFF bzw. KDF Formaten werden unterstützt, da die Bilddaten aus den Stereokameras in Khoros-Format geliefert werden.

Die Quellcodes sind nicht *ad hoc* gemacht, sondern für allgemeine Forschungsprojekte und Wiedereinsetzbarkeit gedacht und produziert worden. Sie werden demnächst im Netz zur Verfügung gestellt. Projekt-spezifische Aufgaben sind durch die Shell-Skripte auszuführen, die die einzelnen C-Programme der Teilprojekte aufrufen.

⁷Gesamtbezeichnung von Portable Bit Map (PBM), Portable Gray Map (PGM) und Portable Pix Map (PPM) aus dem Packet netpbm.

⁸Das Magic „P7“ ist für Bilder mit einem Float-Band verwendet; „P8“ für die ZweiBändigen, usw. Siehe PFM(5). Da jedes Pixel vier Bytes belegt, muß ein Endian-System im Format vorgeschrieben werden. Infolgedessen ist eine Routine zur Endian-Detektion und -Konvertierung für die Portierbarkeit auf verschiedene Maschinen unentbehrlich (z. B. PC in Little-Endian und Sun-Sparc in Big-Endian).

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen zusammengefasst und die Nomenklaturen sowie Notationen vereinbart. In einem etwas ungewöhnlichen Stil werden nur die dieser Arbeit spezifischen bzw. neu eingeführten Definitionen und Korollare durchnummeriert. Die wohl etablierten werden wir so nahe wie möglich neben einander stehen lassen. Infolgedessen sind besonders die Abbildungen Abb. 2.1 auf S. 7 und Abb. 2.2 auf S. 20 nicht nur anschaulich sondern auch sehr nützlich.

In § 2.1 vereinbaren wir die Begriffe komplementärer, dualer und assoziierter *Projektor* und *Reflektor*. Die meisten Autoren erklären nur die Selbst-Adjungierten als Projektoren und Reflektoren. Dennoch, mit dieser Einschränkung ignorieren wir die enge Zusammenhänge zwischen den *Idempotenten* und den *Involutischen*, die wir verallgemeinernd jeweils als *Projektoren* bzw. *Reflektoren* bezeichnen. Die behauptete Parallelität der *Projektoren* und *Reflektoren* werden geometrisch und algebraisch in Abb. 2.1 auf S. 7 veranschaulicht. Die komplexe Householder-Transformation wird diskutiert, die wir u. a. zum Beweis von Lemma 2.4.27 auf S. 54 in § 2.4.6 verwenden werden.

In § 2.2 werden die Definitionen und Fakten der generalisierten Inversen zusammengefasst. Viele davon werden in Abb. 2.2 auf S. 20 zusammen mit SVD anschaulich relativiert. Dieser Abschnitt besteht zwar hauptsächlich aus einer kompakten Wiedergabe der existierenden Fakten aus unterschiedlicher Literatur, ist die Übersicht für uns in Erörterungen über die *regularisierte Mahalanobis-Distanz* in § 2.4.5 ab S. 44 wichtig. Es ist in diesem Komplex ungeeignet, auf die etablierten Fakten einzeln zu verweisen.

In § 2.3 werden die Besonderheiten unserer Implementierung und Anwendung der Singularwertzerlegung (SVD) erörtert. Viele Zusammenhänge und Sätze werden anschaulich in Abb. 2.2 auf S. 20 dargestellt. Es stellt sich heraus, daß diese Abbildung zur Erinnerung vieler Zusammenhänge höchst praktisch und zum allgemeinen Zweck sehr zu empfehlen ist.

In § 2.4.1 wird die Handhabung der Meßdaten und die Konvention ihrer Umsetzung in die Datenmatrizen definiert. Wir legen hier das Wesen der *Daten-Zentrierung* aus algebraischem und numerischem Aspekt aus. Das *affine* Wesen der Daten-Zentrierung ist oft in den mathematischen Formulierungen hinderlich und wird hier linear in einem anderen Raum als *Orthoprojektor* auf den *AC-Teilraum* aufgefasst. Das heißt, die (*nicht-lineare*) *Daten-Zentrierung* wird bei uns als eine (*lineare*) *orthogonale Projektion* behandelt. Somit ergibt

sich oft eine kompaktere Darstellungen, wie wir im Beweis vom Lemma 2.4.23 auf S. 52 demonstrativ ausnutzen werden.

In § 2.4.2, § 2.4.3 und § 2.4.4 bringen wir die Begriffe *Kovarianzmatrix*, *Mahalanobis-Distanz*, *Gaußsche Dichte* und die Singulärwertzerlegung zusammen und sehen, daß alle Begriffe in der Singulärwertzerlegung enthalten sind. Die Auslegung der Singulärwertzerlegung wird im Falle einer Datenmatrix anstatt einer linearen Abbildung diskutiert.

In § 2.4.5 generalisieren wir den Begriff *Mahalanobis-Distanz*, so daß sie auch für eine Datenmenge erklärt wird, die auf einem *affinen Teilraum*⁹ mit Dimension kleiner als n liegt. Dies erfolgt, indem wir im euklidischen Raum Fußnote 76 auf S. 47 eine *ausgeartete Bilinearform* einführen. Die Geltung der resultierenden *Metrik* Fußnote 67 auf S. 44 jedoch schränkt sich auf das orthogonale Komplement des *Radikals* [Kaplansky, 1974, p. 7]. (Cf. Abb. 2.2 auf S. 20 die *Einschränkungen* des Urbildes der Abbildung $(\mathbf{A}^\dagger)^*$, \mathbf{A} auf den Zeilenraum $\mathcal{R}(\mathbf{A}^*)$ und \mathbf{A}^* , \mathbf{A}^\dagger auf den Spaltenraum $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.) Der Gewinn der Generalisierung bzw. Regularisierung ist, daß sich alle Datenmengen unter dieser *Metrik* theoretisch und numerisch wohl verhalten werden, insbesondere für die *Hyperkreise* Cf. Def. 2.4.17 auf S. 49.

In § 2.4.6 stellen wir einige praktische Korollare über die *Hyperkreise*, Kovarianzmatrix und Mahalanobis-Distanz vor.

2.1 Projektoren und Reflektoren

Projektoren (die *Idempotenten*) und *Reflektoren* (die *Involutorischen*) sind prächtige Begriffe, die in linearer Algebra von fundamentaler Bedeutung sind. *Orthogonale*¹⁰ *Projektoren* bzw. *Orthoprojektor* sind zur Darstellung eines Teilraums praktisch, da sich jeder von ihnen eindeutig mit einem Teilraum identifiziert *vide*[Szökefalvi-Nagy, 1967] [Rao und Mitra, 1971] [Boullion und Odell, 1971] [Golub und Van Loan, 1983, 1989, 1996]. Sie sind essentiell in moderner Konzeption der Lösungen kleinster Quadrate eines linearen Gleichungssystems, die wir in § 2.2 gebrauchen werden. *Schiefe Projektoren* sind ebenfalls zur Darstellung zweier komplementärer Teilmengen besonders kompakt und natürlich.

Nennenswerte Monographien sind [Ficken, 1967, pp. 148–151], [Fekete, 1985, pp. 137–143] und [Kahan, 1998], welche die *Projektoren* und die *Reflektoren* seltenerweise parallel behandeln. Denn in der Tat sind die beiden algebraisch und geometrisch untrennbar verkopelt. Vergleiche unsere Abb. 2.1 auf S. 7 mit denen in [Fekete, 1985, p. 141] und [Ficken, 1967, p. 148].

⁹Ein affiner Teilraum bzw. affiner Unterraum wird auch *lineare Varietät* (linear variety) genannt. Anschaulich läßt sich der Begriff *affiner Unterraum* so konstruieren, indem man den ganzen Vektorraum nach einem bestimmten *Unterraum in nicht-leere, disjunkte Teilmenge* so aufteilt (zerlegt), daß jede einzelne Teilmenge zu dem Unterraum „parallel“ ist. Eine Teilmenge heißt zu einem Unterraum „parallel“, wenn die Differenz zweier beliebigen Vektoren aus der Teilmenge im Unterraum liegt. (NB. Zur Kompaktheit der Erklärung haben wir hier die Bedingung der „Parallelität“ provisorisch verstärkt.) Zur formalen Konstruktion werden in der Regel die algebraischen Begriffe Äquivalenzrelation (Reflexivität, Symmetrie und Transitivität), Äquivalenzklasse und Nebenklasse als Grundbausteine verwendet. Infolgedessen ist jeder affine Teilraum durch einen eindeutigen Unterraum zu identifizieren und zu generieren. Die geometrischen Begriffe „Gerade“ und „Ebene“ beispielsweise werden demnach algebraisch formalisiert.

¹⁰Mit „orthogonal“ ist in diesem Zusammenhang *keine lineare Isometrie* gemeint, sondern das „senkrechte“ geometrische Verhältnis zwischen der Projektionsrichtung und dem Zielunterraum eines Projektors. Um Misverständnisse zu vermeiden, werden wir anstatt dessen das Wort *Orthoprojektor* verwenden.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} = [\mathbf{V} \ 0] [\mathbf{V} \ \mathbf{W}]^{-1} = (\mathbf{P}_{\mathcal{W}^\perp} \mathbf{P}_{\mathcal{V}})^\dagger = \mathbf{I} - \mathbf{Q} = (\mathbf{I} + \mathbf{R})/2 = (\mathbf{I} - \mathbf{S})/2$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{\mathcal{W}, \mathcal{V}} = [\mathbf{W} \ 0] [\mathbf{W} \ \mathbf{V}]^{-1} = (\mathbf{P}_{\mathcal{V}^\perp} \mathbf{P}_{\mathcal{W}})^\dagger = \mathbf{I} - \mathbf{P} = (\mathbf{I} + \mathbf{S})/2 = (\mathbf{I} - \mathbf{R})/2$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I} = \mathbf{P} - \mathbf{Q} = -\mathbf{S}, \quad \mathbf{R}^2 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_{\mathcal{W}, \mathcal{V}} = \mathbf{I} - 2\mathbf{P} = \mathbf{Q} - \mathbf{P} = -\mathbf{R}, \quad \mathbf{S}^2 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \quad \mathbb{C}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$$

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{P}^* + \mathbf{Q}^*, \quad \mathbb{C}^n = \mathcal{V}^\perp \oplus \mathcal{W}^\perp, \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}' + \mathbf{z}'$$

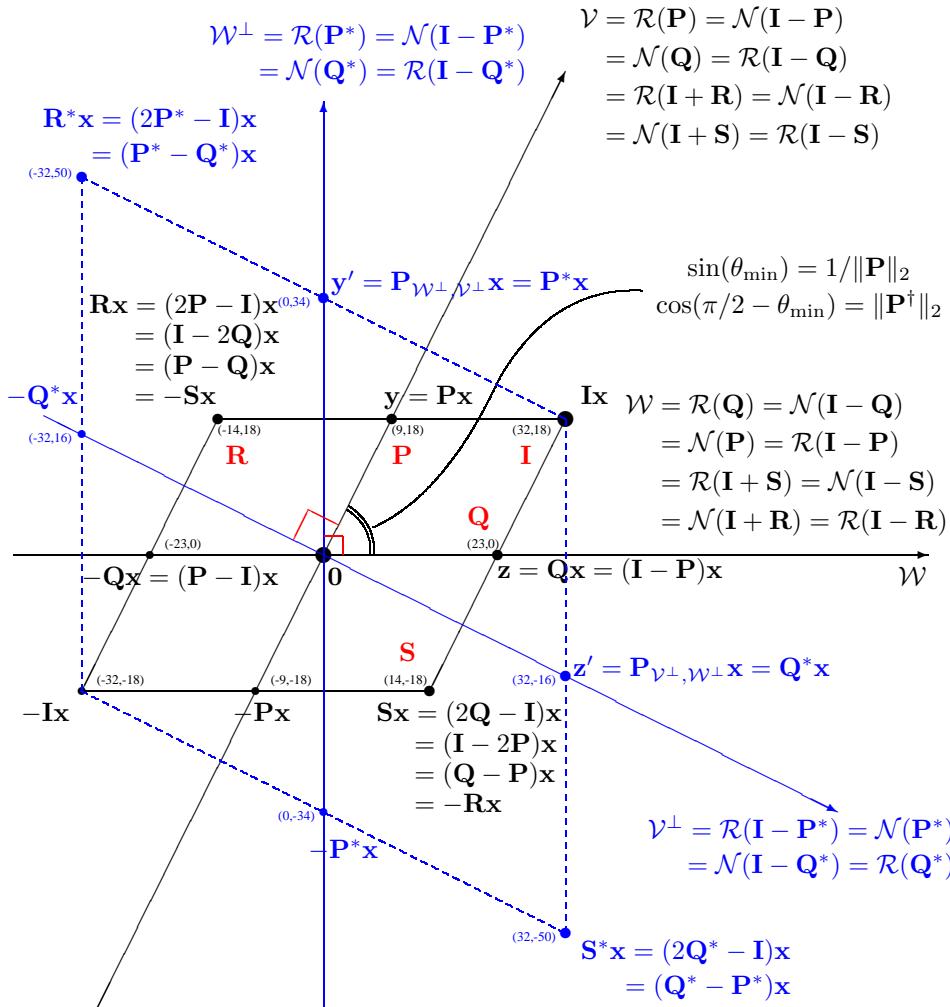


Abbildung 2.1: Komplementäre und duale Projektoren sowie ihre assoziierten Reflektoren. Durch die komplementären Teilräume \mathcal{V} , \mathcal{W} und den Vektor \mathbf{x} in \mathbb{C}^n werden diese Zusammenhänge induziert. Diese Abbildung ist mittels L^AT_EX-picture in mm berechnet und gezeichnet worden, wobei $\mathcal{V} = \text{span}\{\mathbf{V}\} = \text{span}\{[1 \ 2]^T\}$, $\mathcal{W} = \text{span}\{\mathbf{W}\} = \text{span}\{[1 \ 0]^T\}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} = [\mathbf{V} \ 0][\mathbf{V} \ \mathbf{W}]^{-1} = [0 \ 0.5; 0 \ 1]$, $\mathbf{P}^\dagger = [0 \ 0; 0.4 \ 0.8]$, $\theta_{\min} \approx 63.4^\circ$ und der Beispielvektor $\mathbf{x} = [32 \ 18]^T$. Diese Abbildung wird zwar in \mathbb{R}^2 gezeichnet, deren Geltung (bis auf die klein beschrifteten Koordinaten der Vektoren) ist jedoch generell für \mathbb{C}^n gedacht. Für höhere dimensionale Räume sei darauf geachtet, daß \mathcal{V} und \mathcal{W} komplementäre Teileräume seien.

2.1.1 Projektor

Idempotenz ist eine fruchtbare Abstraktion aller scheinbar trivialen Phänomene, bei der die wiederholte Anwendung einer Operation das Ergebnis der ersten Anwendung nicht mehr verändert. In linearer Algebra erkennen wir die *Projektionen*, ob senkrecht oder schief, als *idempotente Abbildungen*. In anderen Worten, alle *idempotenten* Abbildungen bezeichnen wir hier als *Projektoren*.

Alle *idempotenten* Abbildungen bezeichnen wir hier als *Projektoren* [Halmos, 1958, pp. 73–78]. Ein Endomorphismus $\mathbf{P} : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ heißt *Projektor*, wenn er *idempotent* ist. Bild und Kern des Projektors sind komplementär und seine Spur ist gleich dem Rang, das heißt

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \implies \begin{cases} \mathbb{C}^n = \mathcal{R}(\mathbf{P}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{P}) \\ \text{tr } \mathbf{P} = \text{rank } \mathbf{P} = \dim \mathcal{R}(\mathbf{P}) \end{cases}. \quad (2.1)$$

Wegen der Idempotenz sind die Eigenwerte eines Projektors entweder 1 oder 0 ($\lambda^2 = \lambda$). Umgekehrt, besitzt eine quadratischen Matrix nur Eigenwerte 1 und 0, dann stellt die Matrix einen Projektor dar. Die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist gleich dem Rang, der Spur, und der Dimension des Bildraumes des Projektors. Der Bildraum eines Projektors ist also nicht nur ein invariante Teilraum, sondern jeder Vektor in ihm wird unter der Projektion festgelassen. Die Projektion findet statt *entlang* oder *parallel zu* [Stewart, 1963, p.108] [Griffel, 1989a, pp. 109–112] einem Teilraum, den wir als *Richtungsteilraum* bezeichnen. Der *Richtungsteilraum* der Projektion ist der Kern des Projektors. Die Dimension des Kerns ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 0. Die Summe der Dimensionen des Bildraumes und des *Richtungsteilraums* eines Projektors in \mathbb{C}^n ist n . Sie sind also komplementäre Teileräume. Dies ist die Anatomie eines Projektors. Siehe Abb. 2.1 auf S. 7. Ist die Matrix \mathbf{P} ein Projektor, dann sind auch die Matrizen

$$\mathbf{I} - \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^*, \quad \mathbf{I} - \mathbf{P}^*$$

Projektoren, wobei $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ der *komplementäre* und \mathbf{P}^* der *duale* Projektor von \mathbf{P} genannt werden sollen (Abb. 2.1 auf S. 7). Bei einem Projektor \mathbf{P} sprechen wir von einer Projektion aller Vektoren im Raum auf den Teilraum $\mathcal{R}(\mathbf{P})$ entlang (parallel zum) des Teilraums $\mathcal{N}(\mathbf{P})$. Mit $\mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$ bezeichnen wir einen Projektor mit dem Bild \mathcal{V} und Kern \mathcal{W} wie in Abb. 2.1 auf S. 7 dargestellt ist. Die durch einen Projektor \mathbf{P} hervorgerufenen bzw. definierten komplementären Teileräume $\mathcal{R}(\mathbf{P}) = \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{R}(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ haben ein geometrisches Verhältnis, das zum Teil durch einen *Minimalwinkel* [Ipsen und Meyer, 1995, Fig. 1]

$$\theta = \sin^{-1} \frac{1}{\|\mathbf{P}\|_2}, \quad \|\mathbf{P}\|_2 \geq 1 \quad (2.2)$$

zu charakterisieren ist. V. et. Abb. 2.1 auf S. 7. Wir sehen in Gl. (2.1) auf S. 8, daß jeder Projektor auf zwei komplementäre Teileräume aufgebaut und vollständig durch sie zu charakterisieren ist. Umgekehrt, für jedes Paar zweier komplementärer Teileräume gibt es genau zwei komplementäre Projektoren, die die zwei Teileräume als Bild und Kern enthalten.

2.1.2 Orthoprojektor

Ist ein Projektor \mathbf{P} selbstadjungiert, so heißt er *Orthoprojektor* (*orthogonaler Projektor*), denn der Bildraum ist *orthogonal* zum Nullraum. Die Darstellungsmatrix eines Orthoprojektors ist ein Sonderfall der sogenannten *EP-Matrizen* und besitzt immer eine Spektralnorm

von 1. Die EP-Matrizen besitzen viele wichtige Eigenschaften, die in § 2.2 aufgelistet werden. Wir schreiben hier allerdings vorweg, daß u. a.,

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} = \mathbf{P}^* \implies \begin{cases} \mathbb{C}^n = \mathcal{R}(\mathbf{P}) \oplus^\perp \mathcal{N}(\mathbf{P}) \\ \mathbb{C}^n = \mathcal{R}(\mathbf{P}^*) \oplus^\perp \mathcal{N}(\mathbf{P}^*) \\ \mathbf{P}^2 = \mathbf{P} = \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^\dagger \end{cases}. \quad (2.3)$$

2.1.3 Reflektor

Wie bei der *Idempotenz* der Fall, ist auch die *Involution* eine fruchtbare Abstraktion aller Phänomene, bei der die zweite Anwendung einer Operation die erste Anwendung annuliert. Für die Vektoren aus einem linearen Raum erkennen wir die *Spiegelung*, ob senkrecht oder schief, als eine involutorische Abbildung. Alle *involutischen* Abbildungen werden wir hier als *Reflektoren* bezeichnen¹¹, obgleich nur sehr wenig Autoren es tun.

Alle *involutischen* Abbildungen werden wir hier als *Reflektoren* bezeichnen¹², obgleich nur sehr wenig Autoren es tun. Ein Endomorphismus $\mathbf{R} : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ heißt *Reflektor*, wenn er *involutisch* ist, das heißt, wenn

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{I} \neq \mathbf{R} \quad \text{oder} \quad \mathbf{I} \neq \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}. \quad (2.4)$$

Ein Operator \mathbf{R} ist genau dann ein Reflektor, wenn er die Differenz zweier komplementären Projektoren ist [Fekete, 1985, p. 141]. Die *Eigenwerte* eines *Reflektors* sind entweder 1 oder -1 . Umgekehrt, besitzt eine quadratische Matrix nur Eigenwerte 1 und -1 , dann ist sie ein *Reflektor*. Ist \mathbf{R} ein Reflektor, so ist gewiss auch $-\mathbf{R}$ ein Reflektor, der der *komplementäre Reflektor* von \mathbf{R} heißen soll. Anders als ein Projektor, der im allgemeinen einen nicht-trivialen Kern besitzt, ist ein Reflektor hingegen ein Automorphismus (bijektive Abbildung). Es besteht eine *Bijektion* [Fekete, 1985, pp. 140–141] zwischen den *Reflektoren* und den *Projektoren* durch die Beziehung

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I}, \quad \text{oder} \quad \mathbf{P} = (\mathbf{I} + \mathbf{R})/2. \quad (2.5)$$

Die *Anatomie eines Reflektors* ist also mit seinem assoziierten Projektor untrennbar gekoppelt. Ein Reflektor läßt sich nämlich durch das *Bild* und den *Kern* des assoziierten Projektors vollständig charakterisieren. Der *Spiegel* eines Reflektors ist genau der Bildraum des assoziierten Projektors. In anderen Worten, die assoziierten Projektor und Reflektor teilen einen Teilraum gemeinsam als jeweils der Bildraum und der Spiegel. Die Dimension des Spiegels ist die *Vielfachheit* des Eigenwertes 1. Der Spiegel ist nicht nur ein dem Reflektor invariante Unterraum, sondern jeder Vektor im Spiegel wird in sich selber abgebildet. Die Spiegelung bzw. *Reflektion* findet statt entlang (parallel zu) [Ficken, 1967, p. 149] des Eigenraumes mit dem Eigenwert -1 . Dieser invariante Raum des Reflektors nennen wir *Richtungsteilraum* des Reflektors.

Ein Reflektor \mathbf{R} in \mathbb{C}^n zerlegt somit den Raum, durch die Bijektion (2.5) mit einem Projektor, auf zwei komplementäre Teilmengen $\mathcal{R}(\mathbf{P}) = \mathcal{R}(\mathbf{I} + \mathbf{R})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{R})$,

¹¹Dies wird normalerweise als *Involution* bezeichnet wie z. B. in [Fekete, 1985, p. 140]. Viele Autoren nennen einen Operator erst dann „Reflektor“, wenn er selbstadjungiert (bzw. symmetrisch) ist. Wir folgen hier [Kahan, 1998] und nennen alle *involutischen* Operatoren mit (2.4) *Reflektoren* oder *Schief-Reflektoren*. Die *selbstadjungierten* Reflektoren nennen wir *Orthoreflektoren* (*orthogonale* bzw. *senkrechte* Reflektoren). Der Grund, warum wir hier alle *Involutionen* Reflektoren nennen, wird in Abb. 2.1 auf S. 7 deutlich. Die Resultate hier gelten für lineare Räume über allgemeine Körper $\mathbb{K}_{1+1 \neq 0}$ [Ficken, 1967, p. 149].

d. h. (Vgl. (2.1)),

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{I} \neq \mathbf{R} \implies \mathbb{C}^n = \mathcal{R}(\mathbf{I} + \mathbf{R}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{R}). \quad (2.6)$$

Ein Operator ist genau dann ein Reflektor, wenn er die Differenz zweier Projektoren ist. V. et. Abb. 2.1 auf S. 7.

2.1.4 Orthoreflektor

Ein *selbstadjungierter* Reflektor \mathbf{R} heißt *Orthoreflektor (orthogonal Reflektor)*, denn die mit ihm assoziierten Teilmengen $\mathcal{R}(\mathbf{I} + \mathbf{R})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{R})$ (2.6), (2.1) stehen senkrecht aufeinander.

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{I} \neq \mathbf{R} = \mathbf{R}^* \implies \mathbb{C}^n = \mathcal{R}(\mathbf{I} + \mathbf{R}) \oplus^\perp \mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{R}). \quad (2.7)$$

Die *Householder-Spiegelung* [Witt, 1937, 1998] [Kaplansky, 1974, p. 17] [Householder, 1975] [Laurie, 1997a,b] ist ein Beispiel der Anwendung von der orthogonalen Spiegelung. Siehe auch Bemerkung 2.4.29 auf S. 56.

2.1.5 Konstruktion der Projektoren

Sei $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$, $\mathcal{V} \neq \{\mathbf{0}\}$ ein Teilraum. Seien die Spalten der Matrix \mathbf{V} minimal erzeugend für \mathcal{V} . Dann ist der *Orthoprojektor* auf \mathcal{V}

$$\mathbf{P}_{\mathcal{V}} = \mathbf{V}(\mathbf{V}^*\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^*. \quad (2.8)$$

Infolgedessen sind alle *Orthoprojektoren* auf die vier fundamentalen Teilmengen einer linearen Abbildung in Abb. 2.2 auf S. 20 durch die SVD bereits gegebenen.

Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subset \mathbb{C}^n$ komplementäre Teilmengen. Seien Spalten der Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} jeweils minimal erzeugend für Teilmengen \mathcal{V} und \mathcal{W} . Dann ist der Projektor $\mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$ auf \mathcal{V} entlang \mathcal{W} [Meyer, 2000, p. 386]

$$\mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} = [\mathbf{V} | \mathbf{0}] [\mathbf{V} | \mathbf{W}]^{-1} = [\mathbf{V} | \mathbf{W}] \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{V} | \mathbf{W}]^{-1}. \quad (2.9)$$

Seien \mathcal{V} und \mathcal{W} komplementäre Teilmengen in \mathbb{C}^n . Seien $\mathbf{P}_{\mathcal{V}}$ und $\mathbf{P}_{\mathcal{W}^\perp}$ Orthoprojektoren auf \mathcal{V} und \mathcal{W}^\perp . Dann ist der Projektor $\mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$ auf \mathcal{V} entlang \mathcal{W} gegeben durch¹³

$$\mathbf{P}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} = \mathbf{P}_{\mathcal{V}}(\mathbf{P}_{\mathcal{V}} + \mathbf{P}_{\mathcal{W}^\perp} - \mathbf{I})^{-2}\mathbf{P}_{\mathcal{W}^\perp}. \quad (2.10)$$

Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \mathbb{C}^n$ zwei komplementäre Teilmengen und $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ein beliebiger Vektor, dann ist dadurch ein Verhältnis von *Spiegelungen* und *Projektionen* entstanden, wie in Abb. 2.1 auf S. 7 dargestellt wird. Umgekehrt, bei jedem Projektor $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind zwei Teilmengen charakteristisch: $\mathcal{R}(\mathbf{P})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{P})$, wobei der Kern $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ die Richtung der Projektion bestimmt. $\mathcal{R}(\mathbf{P})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ sind die *invarianten Teilmengen* jeweils zum Eigenwert

¹³Dank sei Prof. Zdislav V. Kovarik, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada, für den Hinweis der Formel Gl. (2.10) auf S. 10 aus seinem Aufsatz [Kovarik, 1977].

1 und 0. Bei einem *Reflektor* $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind jedoch $\mathcal{R}(\mathbf{R})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{R})$ trivial, denn ein Reflektor ist ein Automorphismus. Für einen *Reflektor* \mathbf{R} sind der „Spiegel“ und die „Richtung der Spiegelung“ charakteristisch. Solche sind aber genau die beiden charakteristischen Teilmengen, $\mathcal{R}(\mathbf{P})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{P})$, des assoziierten Projektors $\mathbf{P} = (\mathbf{I} + \mathbf{R})/2$. Der Spiegel und die Richtung der Spiegelung sind also $\mathcal{R}(\mathbf{I} + \mathbf{R})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{I} + \mathbf{R})$. In anderen Worten ist der Spiegel des Reflektors genau der Eigenraum zum Eigenwert 1 und der *Richtungsteilraum* der Spiegelung der Eigenraum zum Eigenwert –1. Die *Bijektion* $\mathbf{R} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I}$ bzw. $\mathbf{P} = (\mathbf{I} + \mathbf{R})/2$ verbindet die *Idempotenten* und die *Involutorischen* und macht die *Projektoren* und die *Reflektoren* untrennbar. (Siehe Abb. 2.1 auf S. 7.) Daher haben wir alle Idempotenten die Projektoren gennant, und alle Involutorischen die Reflektoren. Die Selbstadjungierten haben wir also *Orthoprojektoren* und *Orthoreflektoren* genannt. Es besteht kein Grund, die Nicht-Hermiteschen auszusondern, wie es die meisten Autoren pflegen. Die „Schiefen“ haben genau so hohen Anspruch auf die Namen *Projektor* und *Reflektor* wie die „Senkrechten“ bzw. Selbstadjungierten. Ein „schiefer Spiegel“ mit dem optischen Normal ungleich dem Oberflächen-Normal mag ungewöhnlich sein. In der Tat werden solche industriell hergestellt, obgleich die Auflösung solcher optischen Instrumente eingeschränkt ist. Mit noch groberer Körnigkeit sehen wir schiefe akustische Spiegel in den Konzerthallen (u. a. in der Paderhalle). Auch für solche sei die Bezeichnung *Reflektor* geeignet. Den Umweg, zunächst den Begriff *Reflektion* auf die *hermiteschen* Involutionen einzuschränken, dann wiederum die Involutorischen mit „*skew reflection*“ [Fekete, 1985, p. 142] oder „*reflection of X in Y along Z*“ [Ficken, 1967, p. 149] anzureden, halten wir für unnötig.

2.1.6 Komplexe Householder-Transformation

Bei der Householder-Transformation handelt es sich um eine Isometrie, die einen gegebenen Vektor \mathbf{x} auf einen anderen vorgegebenen Vektor \mathbf{y} abbildet [Householder, 1972, 1975]. Diese Technik wird oft in numerischen Verfahren verwendet, um Nullen in einer Matrix unter Similarität einzuführen. Zu diesem Zweck konstruierte A. S. Householder „*elementary reflectors*“ oder „*elementary Hermitians*“, die *symmetrisch* und *involutorisches* sind. Die Grundidee ist zwischen den Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} eine Spiegelung \mathbf{H} zu bilden, so daß der Vektor \mathbf{x} in die Richtung des Vektors \mathbf{y} abgebildet wird. Da in den meistens Texten das Verfahren nur im reellen Fall vorgestellt und diskutiert wird, gehen viele davon aus, daß eine *komplexe* Version des Verfahrens mittels Ersetzens des *Transponierens* durch das *Adjungieren* (hermitesches Transponieren) aus dem reellen Fall erfolgt. Überraschenderweise funktioniert das Verfahren bei den komplexen Vektoren nicht, sondern es wird $\mathbf{x}^*\mathbf{y} = \mathbf{y}^*\mathbf{x}$ vorausgesetzt. Diese Bedingung ist zwar original in [Householder, 1972, 1975] erwähnt worden, sie wird jedoch selten zur Kenntnis genommen und vorgestellt. Eine direkte Übertragung der reellen Householder-Spiegelung auf komplexe Fälle mittels Ersetzens der Transponierten durch hermitesche Transponierte versagt, so daß nicht einmal der Teilraum $\text{span}\{\mathbf{y}\} \in \mathbb{C}^n$ erreicht werden kann. Weiterhin wird in der Anwendung oft ein *reeller* Vielfacher vom Vektor \mathbf{y} benötigt. Dieser Umstand bleibt meines erachtens nur in einem kleineren Fachgebiet bekannt¹⁴ [Laurie, 1997a,b] [Householder, 1972, 1975] [Lehoucq, 1996] [Sun, 1995] [Wilkinson, 1965a] [Dubrulle, 1996]. Es stellt sich heraus, daß das Verfahren modifiziert werden muß, um den zweiten Vektor \mathbf{y} erreichen zu können, mit dem Preis, daß die Matrix nicht mehr selbst-adjungiert und involutorisch sein wird. Der erste Vektor \mathbf{x} wird nach wie vor als $\mp\mathbf{x}^*/\|\mathbf{x}\|_2$ in der ersten Zeile der resultierenden Matrix beibehalten, falls $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1$, nicht

¹⁴zitiert in der Reihenfolge des Heraussuchens der Literatur.

aber in der ersten Spalte¹⁵.

Das Versagen der Householder-Transformation bei komplexen Vektoren läßt sich wie folgt zeigen. Sei $\mathbf{H}\mathbf{x} = \beta\mathbf{y}$, wobei $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{H}^* = \mathbf{H} = \mathbf{H}^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, wie es bei der reellen Householder-Transformation der Fall ist. Dann muß $\mathbf{x}^*\mathbf{H}\mathbf{x} = \beta\mathbf{x}^*\mathbf{y}$ gelten. Ein Widerspruch entsteht jedoch dadurch, daß die linke Seite $\mathbf{x}^*\mathbf{H}\mathbf{x}$ stets reell ist, während der Imaginärteil der rechten Seite $\beta\mathbf{x}^*\mathbf{y}$ nicht immer verschwindet.

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Gesucht wird eine Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so daß $\mathbf{U}\mathbf{x} = \beta\mathbf{y}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Eine unitäre Lösung \mathbf{U} ist

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} - (1 + e^{i\theta})\mathbf{P} \implies \mathbf{U}\mathbf{x} = \mp \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2}\mathbf{y}, \quad (2.11)$$

wobei der Orthoprojektor \mathbf{P} , der *Householder-Vektor* \mathbf{v} und ein Winkel θ gegeben sind durch

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \pm \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_2}, \quad \theta = 2\angle(\mathbf{x}^* \mathbf{v}). \quad (2.12)$$

Die Matrix \mathbf{U} kann in einer möglichst ähnlichen Form wie im reellen Fall (*cf.* Abb. 2.1 auf S. 7) umgeschrieben werden als

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{P}, \quad \alpha = \frac{1 + e^{i\theta}}{2}, \quad (2.13)$$

oder, wie es Prof. Dirk Laurie in [Laurie, 1997a,b] formuliert hat als

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} - \mathbf{P} - \omega\mathbf{P}, \quad \omega = \frac{\overline{\mathbf{v}^* \mathbf{x}}}{\mathbf{v}^* \mathbf{x}} = e^{i\theta}. \quad (2.14)$$

Die Matrix \mathbf{U} ist nun im allgemeinen *nicht* Hermitesch und *nicht* involutorisch aber stets unitär, denn aus $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} = \mathbf{P}^*$ folgt $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}$. Wenn $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$), dann gilt

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mp \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2}\mathbf{y} = \mp \|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_i.$$

Daraus ergibt sich

$$\mp \mathbf{x}^*/\|\mathbf{x}\|_2 = \mathbf{e}_i^* \mathbf{U} = \text{die } i\text{-te Zeile der Matrix } \mathbf{U}. \quad (2.15)$$

Dieses Nebenprodukt der Transformation wird sehr oft als Hauptzweck zur Basisvervollständigung oder Berechnung des orthogonalen Komplements bzw. des Kernes von einem einzeiligen System eingesetzt.

Ist $(\mathbf{x}^* \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$, d. h., $\mathbf{x}^* \mathbf{y} = \mathbf{y}^* \mathbf{x}$, so ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \mathbf{v} &= \mathbf{x}^* \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \pm \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_2} \right) = \left(\frac{\mathbf{x}^* \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \pm \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_2} \right) \\ &= \left(\frac{\mathbf{x}^* \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \pm \frac{\mathbf{y}^* \mathbf{x}}{\|\mathbf{y}\|_2} \right) = \left(\frac{\mathbf{x}^*}{\|\mathbf{x}\|_2} \pm \frac{\mathbf{y}^*}{\|\mathbf{y}\|_2} \right) \mathbf{x} = \mathbf{v}^* \mathbf{x}. \end{aligned}$$

¹⁵Die Erscheinung des Vektors \mathbf{x} in der Matrix ist eine direkte Konsequenz der unitären Abbildung. Meines erachtens sprechen zu viele Menschen von „der ersten Spalte“ der Householder-Matrix. Dies ist nicht allgemein gültig und sollte nicht den Nachkommenden gelehrt werden.

Ist $\mathbf{v}^* \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \mathbf{v}$, da $\mathbf{y} = \pm \|\mathbf{y}\|_2 (\mathbf{v} - \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2)$, so gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* \mathbf{y} &= \pm \mathbf{x}^* \|\mathbf{y}\|_2 \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right) = \pm \|\mathbf{y}\|_2 \left(\mathbf{x}^* \mathbf{v} - \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right) \\ &= \pm \|\mathbf{y}\|_2 \left(\mathbf{v}^* \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right) = \pm \|\mathbf{y}\|_2 \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right)^* \mathbf{x} = \mathbf{y}^* \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{x}^* \mathbf{y} = \mathbf{y}^* \mathbf{x} \iff \mathbf{x}^* \mathbf{v} = \mathbf{v}^* \mathbf{x} \quad (2.16)$$

und

$$\theta = 0 \quad \text{oder} \quad \omega = 1 \iff (\mathbf{x}^* \mathbf{y}) \quad \text{ist reell.} \quad (2.17)$$

Im Falle $(\mathbf{x}^* \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ reduzieren sich Gl. (2.11) auf S. 12, Gl. (2.13) auf S. 12 auf den *Hermiteschen* und *involutorischen Elementar-Reflektor*.

Wir haben die komplexe Version der Householder-Transformation deswegen in der Form von Gl. (2.13) auf S. 12 bzgl. θ und \mathbf{P} präsentiert, weil

- der Winkel θ kein Beliebiger ist, sondern essentiell bei der Einführung des hermitischen Skalarproduktes über \mathbb{C} entstanden ist. Die stellt die Besonderheit aus, daß das hermitische Skalarprodukt in unitären Räumen *nicht reellwertig* und *nicht kommutativ* ist Fußnote 77 auf S. 47. Dadurch entsteht ein Phasen-Winkel, der in unitären Räumen von fundamentaler Bedeutung sein soll. Allerdings wird dieser Winkel, meines erachtens, nicht in der Literatur mit einem Namen angesprochen, obwohl er einen verdiente.
- die Form $\mathbf{I} - 2\mathbf{P}$ beibehalten werden kann. Diese Form deutet darauf hin, daß die o. a. unitäre Abbildung immerhin mit dem komplementären Reflektor des assoziierten Projektors $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ auf den $(n - 1)$ -dimensionalen Halbierungsteilraum zusammenhängt. Cf. Gl. (2.5) auf S. 9 und Abb. 2.1 auf S. 7.

Mit der „luxuriösen“ Ausstattung eines Skalarproduktes werden die geometrischen Begriffe *Länge* eines Vektors und *Winkel* zwischen zwei Vektoren in einen linearen Raum eingeführt. Infolgedessen ist der lineare Raum zugleich mit einer induzierten *Norm* und einer induzierten *Metrik* versehen. Das Wesentliche von einem Skalarprodukt ist, „das geometrische Verhältnis“ zweier Vektoren \mathbf{x}, \mathbf{y} durch eine Bilinearform bzw. eine hermitische Form (\mathbf{x}, \mathbf{y}) zu bestimmen. Dies dürfe gedacht werden als eine Art gewichtete oder nicht gewichtete „Kreuz-Korrelation“. Im Falle einer Bilinearform über \mathbb{R} ist das „Verhältnis“

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos \psi \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \in \mathbb{R}$$

durch den Winkel ψ und die quadratischen Längen (\mathbf{x}, \mathbf{x}) und (\mathbf{y}, \mathbf{y}) beschrieben. In anderen Worten gehören die Länge und der Winkel dem „Inhalt“ dieses „geometrischen Verhältnisses“ zweier Vektoren. Im Falle einer hermitischen Form über \mathbb{C} ist das „Verhältnis“ zwischen zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (a + bi) \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \in \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Da (\mathbf{x}, \mathbf{y}) nun komplex ist, haben wir außer den beiden Längen noch *zwei reelle Werte*, die „das Verhältnis“ beschreiben. Ergo ist der Winkel $\phi = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ von fundamentaler Bedeutung außer dem Betrag $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^{\frac{1}{2}}$. Das heißt, die Beschreibung des „Verhältnisses“ zweier

¹⁶Der Betrag des komplexen Skalarproduktes definiert einen Winkel mit $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \cos \psi \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})}$ der dem *Minimalwinkel* [Ipsen und Meyer, 1995] entspricht. (matstat -wv) Fußnote 17 auf S. 14

komplexer Vektoren durch die Längen und einen einzigen reellen Wert alleine kann nicht vollständig sein¹⁷. Die Entstehung dieses Winkels muß Konsequenzen haben, was im reellen Fall nicht vorhanden ist. Daß in Gl. (2.11) auf S. 12 und Gl. (2.12) auf S. 12 der Winkel $\theta = 2\phi$ benötigt wird, hätte uns nicht überraschen sollen. Dieser Winkel ϕ des Skalarproduktes erscheint auch beim komplexen Gram-Schmidt-Schritt [Gram, 1883] [Schmidt, 1907a, p. 442] falls die Reihenfolge des Skalarprodukts vertauscht ist. In diesem Fall versagt das Verfahren und der resultierende Vektor ist *nicht* orthogonal zum gewünschten Vektor, sondern das Skalarprodukt wird von dem „Winkel des Skalarproduktes“ $\phi = \angle(\mathbf{x}^*\mathbf{y})$ abhängen. Deshalb ist empfehlenswert, bereits im reellen Fall das Skalarprodukt im Orthogonalisierungs-Schritt in der „richtigen“ Reihenfolge zu schreiben.

In der Tat war A. S. Householder (1904–1993) nicht der erste, der sich mit solch einem Problem beschäftigt hat. Ernst Witt (1911–1991) hat 1937 [Witt, 1937, 1998] die Existenz einer orthogonalen Transformation zwischen Vektoren mit gleicher Länge auf beliebigen Körpern $\mathbb{K}_{1+1 \neq 0}$ bewiesen. Bela von Szökefalvi-Nagy [Szökefalvi-Nagy, 1967] hat im Hilbertraum über die unitären Abbildungen diskutiert, die einen Teilraum zum anderen abbilden. Seine Ergebnisse sind uns genau so hilfreich wie die Householder-Transformation für den Beweis vom Lemma 2.4.27 auf S. 54. Allerdings muß dies wieder modifiziert werden, wenn ein *reeller* Vielfacher des Ziel-Vektors erwünscht ist. Die Abwandlung erfolgt wieder durch Einführung vom Winkel ϕ des Skalarproduktes. (Siehe nagy . m.)

2.2 Generalisierte Inversen

In der Computer-Vision sind viele Inversionsprobleme zu lösen. Die Grundlage zur Lösungen solcher Probleme stellt vor allem die theoretische Entwicklung der generalisierten Inversen dar, welche u. a. auch durch die Singulärwertzerlegung numerisch zuverlässig zu berechnen sind (siehe `matstat.c -i`, `ginv.c` und `pinv.c`).

Die für den Autor hilfreichsten Monographien zum Thema sind [Rao und Mitra, 1971] [Boullion und Odell, 1971] [Albert, 1972] [Ben-Israel und Greville, 1974] [Kuhnert, 1976] [Cline, 1979] [Campbell und Meyer, 1979]. Für Testmatrizen siehe [Gregory und Karney, 1969] [Opitz, 1995] [Higham, 1995] [Chen, 1998 `pinv*.*`, `ginv*.*`, `drazin*.*`].

1. (Geometrische) Moore-Bedingungen [Bjerhammer, 1951a,b] [Moore, 1920] [Moore, 1935]:

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &= \mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})}, \\ \mathbf{XA} &= \mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{X})}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

¹⁷ Für weitere Diskussionen über das Verhältnis und die *kanonischen Winkel* bzw. *Hauptwinkel* (*principal angles*) zwischen den Teilräumen sei die folgende Sammlung der Literaturen aufgelistet (in chronologischer Reihenfolge): [Jordan, 1875] [Afriat, 1957] [Davis, 1958] [Zassenhaus, 1964] [Kato, 1966] [Davis und Kahan, 1970] [Shilov, 1971, pp. 244–245, p. 373] [Hohn, 1973, p. 373] [Stewart, 1973a] [Björck und Golub, 1973] [Afriat et al., 1975] [Stewart, 1977] [Wedin, 1982] [Golub und Van Loan, 1983, pp. 20–24] [Golub und Van Loan, 1983, pp. 425–431] [Vandewalle und De Moor, 1988, p. 56] [Stewart und Sun, 1990] [Ritov, 1992] [Ipsen und Meyer, 1995] [Stewart, 1998, pp. 74–76] [Stewart, 1999, pp. 7–8] [Meyer, 2000, pp. 450–459]. V. et. Usenet-Post von Prof. Pertti Lounesto in `angle03` und Notiz [Chen, 2001].

2. (Algebraische) Erweiterte Penrose-Bedingungen [Penrose, 1955, 1956]:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \mathbf{AXA} = \mathbf{A} \\
 (1^k) \quad & \mathbf{A}^k \mathbf{XA} = \mathbf{A}^k \\
 (2) \quad & \mathbf{XAX} = \mathbf{X} \\
 (3) \quad & \mathbf{AX} = (\mathbf{AX})^* \\
 (4) \quad & \mathbf{XA} = (\mathbf{XA})^* \\
 (5) \quad & \mathbf{AX} = \mathbf{XA}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

3. Die (eindeutige) Lösung \mathbf{X} der Gleichungen (1),(2),(3) und (4) in Gl. (2.19) auf S. 15 stimmt mit der in Gl. (2.18) auf S. 14 überein. Solche wird daher die *Moore-Penrose-Inverse* (oder einfach *Pseudoinverse*) der Matrix \mathbf{A} genannt und oft mit \mathbf{A}^\dagger bezeichnet. Die Moore-Penrose-Inverse wird bei manchen Autoren auch mit $\{1, 2, 3, 4\}$ -Inverse bezeichnet. Es ist üblich, die Numerierung in Gl. (2.19) auf S. 15 zur Bezeichnung allermeinerer Lösungen zu benutzen, die eine Untermenge der Bedingungen in Gl. (2.19) auf S. 15 erfüllen.
4. Mit \mathbf{A}^D bezeichnen wir die (eindeutige) *Drazin-Inverse* der Matrix \mathbf{A} . Sie wird auch $\{1^k, 2, 5\}$ -Inverse genannt, da sie die (1^k), (2) und (5) in Gl. (2.19) auf S. 15 erfüllt [Drazin, 1958] [Meyer, 2000, p. 399].
5. Eine kleinste-quadrat-lösende Inverse $\mathbf{A}^{(1,3)}$ ist eine Matrix aus den $\{1, 3\}$ -Inversen.
6. Für die Orthoprojektoren gilt $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \implies \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$.
7. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen äquivalent:¹⁸
 - (a) Die Gruppeninverse der quadratischen Matrix \mathbf{A} existiert.
 - (b) \mathbf{A} hat Index 1.
 - (c) $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^2$.
 - (d) Der Bildraum der Matrix \mathbf{A} „schrumpft“ nicht mit dem Potenzieren.
 - (e) Der Kern der Matrix \mathbf{A} „wächst“ nicht mit dem Potenzieren.
 - (f) $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ sind komplementäre Teilräume.
 - (g) $\mathbb{C}^{n \times n} = \mathcal{R}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$.
8. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:¹⁹
 - (a) Die Matrix \mathbf{A} hat Index k .
 - (b) $\text{rank } \mathbf{A}^k = \text{rank } \mathbf{A}^{k+1}$.
 - (c) Der Kern von \mathbf{A} hört mit dem Wachsen auf am \mathbf{A}^k .
 - (d) Das Bild von \mathbf{A} hört mit dem Schrumpfen auf am \mathbf{A}^k .
9. Besitzt eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Index 1, so ist die Drazin-Inverse \mathbf{A}^D gleich der Gruppeninverse $\mathbf{A}^\#$.²⁰
10. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\text{Ind } \mathbf{A} = k$, dann²¹
 - (a) Die Kette der Nullräume hört auf zu wachsen am $\mathcal{N}(\mathbf{A}^k)$.

¹⁸[Ben-Israel und Greville, 1974, pp. 162–163] [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 162, Theorem 1, p. 165, Ex. 6]

¹⁹[Meyer, 2000, p. 395]

²⁰[Campbell und Meyer, 1975]

²¹[Meyer, 2000, pp. 394–397] [Meyer, 2000, p. 395, Property 3, 4] [Ficken, 1967, p. 280]

- (b) Die Kette der Bildräume hört auf zu schrumpfen am $\mathcal{R}(\mathbf{A}^k)$.
 (c) $\mathcal{R}(\mathbf{A}^k)$ und $\mathcal{N}(\mathbf{A}^k)$ sind invariante Teilräume unter \mathbf{A} .
 (d) $\mathcal{R}(\mathbf{A}^k) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}^k) = 0$.
 (e) $\mathcal{R}(\mathbf{A}^k) + \mathcal{N}(\mathbf{A}^k) = \mathbb{C}^n$.
 (f) $\mathcal{R}(\mathbf{A}^k) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^k) = \mathbb{C}^n$.
 (g) $\mathcal{R}(\mathbf{A}^k)$ und $\mathcal{N}(\mathbf{A}^k)$ sind invariant unter \mathbf{A} .
11. Sei \mathbf{A} eine EP-Matrix, dann hat \mathbf{A} den Index 1. [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 162, Ex. 7].
12. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:²²
- (a) \mathbf{A} ist mit \mathbf{A}^\dagger vertauschbar.
 - (b) $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$.
 - (c) $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^*)$.
 - (d) $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^*)$.
 - (e) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(\mathbf{A}) \oplus^\perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$.
 - (f) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff \mathbf{A}^\dagger\mathbf{x} = \lambda^\dagger\mathbf{x}$.
 - (g) \mathbf{A} ist EP oder RPN (range perpendicular to nullspace).
 - (h) \mathbf{A} ist bild-hermitesch (bild-symmetrisch).
 - (i) Es existiert eine Matrix \mathbf{Y} mit $\mathbf{A}^* = \mathbf{Y}\mathbf{A}$
 - (j) $\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^D$.
13. Weitere Anmerkungen²³:
- (a) Die EP-Matrizen (mit $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$) konstruieren eine größere Kategorie als die der normalen Matrizen und haben eine „gute“ Spektraleigenschaft.
 - (b) $\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$ ist der Orthoprojektor in den Raum $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger) = \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A} \mathbf{A}^*), \quad (2.20)$$

(c) $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ ist Orthoprojektor in den Raum $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\dagger)$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^*) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^\dagger). \quad (2.21)$$

(d) $\mathbf{A} \mathbf{A}^D$ ist ein Schieffprojektor in den Raum $\mathcal{R}(\mathbf{A}^k)$ entlang des Raumes $\mathcal{N}(\mathbf{A}^k)$.
 $\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^D$ ist der komplementäre Projektor in den Raum $\mathcal{N}(\mathbf{A}^k)$ entlang $\mathcal{R}(\mathbf{A}^k)$.

2.3 Singulärwertzerlegung

Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt in der Singulärwertzerlegung (SVD) und ihrer zahlreiche Anwendungen in dieser Arbeit. Fast alle linearen Verfahren haben wir mit diesem „Algebraischen Schweizer Messer“ in ANSI-C Programmiersprache realisieren und im Projekt einsetzen können, obgleich hier und da Alternativen zur Verfügung stünden [Chen et al., 2000]. Eine Wiederholung ist nicht beabsichtigt, sondern die Aufgabenspezifischen und die Unentbehrlichen oder selten Angesprochenen werden diskutiert.

²²[Katz, 1965] [Ben-Israel und Greville, 1974, pp. 163–166] [Campbell und Meyer, 1979, p. 74, Theorem 4.3.1]. [Campbell und Meyer, 1979, p. 129, Theorem 7.3.4], [Koliha, 1999]. [Meyer, 2000, p. 408]

²³[Campbell und Meyer, 1979, p. 74] [Griffel, 1989b, p. 152] [ginv.tex ca. p. 46.] [Campbell und Meyer, 1979, p. 12, Theorem 1.2.2] [Meyer, 2000, p 400]

Alle Matrizen sind diagonal, reell und positiv semidefinit (*cum grano salis*). Dies ist eine weitere kanonische Form *aller* Matrizen in $\mathbb{C}^{m \times n}$ unter der *Singulärwertzerlegung*. Durch die Auswahl einer geeigneten Basis führt die Ähnlichkeitstransformation aller quadratischen Matrizen zu Jordanscher Normalform. Durch Auswahl zweier geeigneten Basen, sowohl in Domäne als auch in Kodomäne, werden *alle Matrizen* zu einer diagonalen Form, die stets reell und positiv semidefinit ist. Die diagonalen Elemente werden *Singulärwerte* genannt. Die Basisvektoren heißen die linken und die rechten *Singulärvektoren*.

Die SVD wird langsam in der Gesellschaft der Mustererkennung bekannt und angewandt obwohl sich die Existenz der SVD (nicht in endgültiger Form) auf die Jahre 1873 [Beltrami, 1873] und 1874 [Jordan, 1874a,b] zurückführen lässt. Meines Erachtens lassen sich die Ingenieure nämlich meistens nur überzeugen, wenn ein Verfahren effizient und zuverlässig zu realisieren ist. Dies geschah in ALGOL60 am Anfang der 70' er Jahre [Golub und Kahan, 1965] [Golub und Reinsch, 1970a] [Golub und Reinsch, 1970b] [Wilkinson und Reinsch, 1971]. Der sogenannte *Golub-Kahan-Reinsch-Algorithmus* wurde in Fortran 77 übersetzt [Forsythe et al., 1977]. Bis 1986 erschienen noch Kommentare wie der folgende:

„... this approach is not ... the most convenient (a library routine for computing the singular value decomposition might not be available, on a microcomputer, for example.)“ [Higham, 1986]

Es war sogar noch im Jahre 1998 schwierig, eine *zuverlässige* Implementierung in ANSI-C zu finden²⁴, denn die meisten Numeriker bleiben nach wie vor bei Fortran. Fortran ist zwar die effiziente und *aktuelle* Mainstream-Sprache für die Numerischen Aufgaben, jedoch haben wir uns wegen industrieller Einsetzbarkeit und Portierbarkeit für C entschieden. *Es sei darauf hingewiesen, daß noch bis heute eine C-Routine für SVD nicht ohne weiteres einzusetzen ist! Sondern, sie muß sorgfältig und weitgehend getestet werden, bevor man sich überhaupt auf das Ergebnis und die Stabilität der Routine verlassen kann.*

Obwohl die Berechnung der SVD oft relativ teurer ist als die von Fall zu Fall an spezielle Matrizenstruktur angepaßten Algorithmen, hat es uns hinsichtlich der Rechenzeit nicht viel ausgemacht, denn in der vorhandenen Arbeit handelt sich noch meistens um kleinere Matrizen (d. i., mit Anzahl der Elemente kleiner als 512×512). Hinzu kommt, daß die Rechenleistung der Maschinen noch stark am Steigen ist²⁵. Dies ist überhaupt ein Grund dafür, warum wir uns mit einem in den siebziger Jahren veröffentlichten Algorithmus noch heute auseinandersetzen müssen.

Ein nennenswerter Vorteil der SVD ist die Beidhändigkeit in der Theorie und in der Praxis (im Vergleich zu anderen Formen wie die Jordansche). Daher kann auch in der Praxis theoretische Gedanken parallel geführt werden und umgekehrt Cf. Abb. 2.2 auf S. 20. Jedoch ist eine „ForTran“ (Formula Translation) in der Numerik ein Tabu hinsichtlich der

²⁴Der Golub-Kahan-Reinsch-Algorithmus wurde in LINPACK, EISPACK und LAPACK (in Fortran 77) integriert und aus LAPACK wurde auch CLAPACK für C abgeleitet. Auch in der beliebten, etwas umstrittenen Monographie [Press et al., 1992] wurde die o. g. Algorithmus in C übersetzt. Es sei bemerkt, daß die SVD-Routine svdcmp.c in [Press et al., 1992] nicht ohne weiteres für kritische Zwecke einzusetzen ist! Denn es gibt ein Beendigungsproblem in der QR-Iteration. Die Terminierung der Iteration verläßt sich nämlich auf einen Unterlauf der Fließkomma-Zahlen ($x + a == a, x \ll a$). Dank Prof. Peter Spellucci in TU Darmstadt wurde mir dieses Problem schnell erhoben. (*vides svdcmp.crp.*) Die Fortran-Quellcodes werden meistens maschinell (z. B. f2c) und nicht in die einheimische Konvention der C-Sprache übersetzt, z. B. mit Array-Indexierung ab 1, was ich immer zu vermeiden versuche. Denn eine Grenzenprüfung wäre bei vielen „bounds-checkers“ nicht möglich. Ein C-Programm, das noch nie durch Grenzenprüfung intensiv getestet worden ist, sei, meiner Erfahrung nach, *niemals zuverlässig*.

²⁵Zur Arbeit benutzt der Autor einen 233 MHz SISD CISC-Prozessor mit einem ungebremsten Betriebssystem.

Effizienz, Genauigkeit und Stabilität. Die Numeriker haben dennoch Konsens, daß numerische Operationen durch orthogonale Transformationen wie bei der SVD stabil bleiben im Gegensatz zu denen via z. B. *Jordanform*, von der in der Praxis nur abzuraten ist, trotz der theoretischen Eleganz. Für eine historische Übersicht der Entwicklung der SVD sei [Stewart, 1992b] ein hilfreicher Aufsatz, in dem auch die Rechenbarkeit²⁶ und zahlreiche Anwendungen wie z. B. in der PCA (Principal Component Analysis)²⁷, oder im *Procrustesproblem*²⁸ angesprochen werden. Obwohl die Lösung des *Procrustesproblems* und deren Generalisierungen²⁹ viele Anwendungen in Computer-Vision findet, werden die originalen Beiträger oft nicht genannt³⁰. Auch deswegen ist [Stewart, 1992b] sehr zu empfehlen.

SVD ist u. a. deswegen in der Mustererkennung ein wichtiges Werkzeug da zahlreiche Probleme in diesem Gebiet wesentlich *schlecht-gestellt* (*ill-posed*) [Hadamard, 1923] (oder „nichtkorrekt“ [Kuhnert, 1976, p. 59]) sind. Die SVD dient nämlich weitgehend als robustes Mittel zur *Regularisierung* eines *schlecht-gestellten* Problems [Hansen, 1987, 1989, 1990, 1998]. Die Gewinnung der *Moore-Penrose-Inversen* ist ein Beispiel dafür, denn die Moore-Penrose-Inverse ist keine stetige Funktion der Elemente der eigentlichen Matrix [Stewart, 1969] [Campbell und Meyer, 1975] [Noble, 1976, p. 251] [Campbell und Meyer, 1979§10] und eine beliebig kleine Störung an einer *rang-defizienten* Matrix \mathbf{A} kann eine beliebig große Abweichung der Pseudoinversen \mathbf{A}^\dagger erregen [Campbell und Meyer, 1979, p. 247, Unpleasant fact] [Noble, 1976]. Dieses „*nichtkorrekte*“ Problem der Berechnung der Moore-Penrose-Inversen \mathbf{A}^\dagger der Matrix \mathbf{A} kann durch SVD *regularisiert* werden [Campbell und Meyer, 1979, p. 247]. Allerdings ist dies nicht blind in der Praxis anzuwenden [Press et al., 1992, pp. 61–64]. Die Variation der Singulärwerte unter Störung der zu zerlegenden Matrix ist beschränkt durch die Spektralnorm der Störungsmatrix. [Lawson und Hanson, 1974, p. 23], [Horn und Johnson, 1985, p. 419, Corollary]. [Stewart und Sun, 1990, pp. 259–269] [Gill et al., 1991, p. 196, §5.8.4] [Stewart, 1991] [Stewart, 1992c] [van der Veen et al., 1993] [Hansen, 1998, p. 20] [Stewart, 1992b] [Golub und Van Loan, 1996, p. 449, Corollary 8.6.2] [Higham, 1996]

Mit der Zeit dehnen sich schnell die Anwendungen der SVD auf zahlreiche Gebiete aus³¹, darunter findet man inzwischen auch Patenten³². Dies liegt nach meiner Sicht daran, daß *SVD die meisten, wenn nicht alle, Eigenschaften a priori linearer Entitäten auf einmal verdeutlicht — sowohl theoretisch, als auch technisch*.

²⁶[Golub und Kahan, 1965] [Golub und Reinsch, 1970a] [Golub und Reinsch, 1970b]

²⁷[Hotelling, 1933] [Hotelling, 1933] [Karhunen, 1946] [Loève, 1955]

²⁸[Green, 1952] [Fan und Hoffman, 1955] [Hurley und Cattell, 1962] [Schöneman, 1966] [Higham, 1986] [Rao, 1980] [Stewart, 1992b] [Golub und Van Loan, 1996, p. 601]

²⁹[Green, 1952] [Fan und Hoffman, 1955] [Schöneman, 1966] [Hurley und Cattell, 1962] [Higham, 1986] [Rao, 1980] [Stewart, 1992b] [Golub und Van Loan, 1996, p. 601]

³⁰wie z. B. der oft zitierte [Arun et al., 1987] und seine Zitierenden. Siehe [Stewart, 1992b] für die originalen Beiträger und eine gute Übersicht der Singulärwertzerlegung.

³¹[Furnas et al., 1988] [De Moor et al., 1988] [Deprettere, 1988] [Scharf, 1991] [Vaccaro, 1991] [Berry et al., 1994a] [Moonen und De Moor, 1995] [Landauer und Dumais, 1997]

³²Patents: „Computer information retrieval using latent semantic structure“. U. S. Patent No. 4,839,853, Jun 13, 1989. Patent: „Computerized cross-language document retrieval using latent semantic indexing“. U. S. Patent No. 5,301,109, Apr 5, 1994.

2.3.1 Berechnung der Singulärwertzerlegung

Alle Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ lassen sich auf Faktoren $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zerlegen, das heißt³³

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{m \times n} = \underbrace{\mathbf{U}}_{m \times m} \quad \underbrace{\Sigma}_{m \times n} \quad \underbrace{\mathbf{V}^*}_{n \times n}, \quad (2.22)$$

mit

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}, \quad \Sigma \geq \mathbf{0},$$

wobei \mathbf{U} und \mathbf{V} unitär sind, und die quadratische Partition oben links der Σ , Cf. Gl. (2.26) auf S. 22, diagonal und positiv semidefinit ist. Wir bezeichnen mit \mathbf{V}^* die Hermitesch Transponierte der Matrix \mathbf{V} . In dieser Arbeit werden *unitäre Matrizen* auch *orthogonal* genannt, wenn als Grundkörper \mathbb{R} angenommen ist, was meistens der Fall ist in der vorliegenden Arbeit.³⁴ Die Abb. 2.2 auf S. 20 dient von nun an zur Übersicht, die auf einmal viele komplexe Zusammenhänge umfaßt, die durch eine SVD auf jeder Matrix hervorgerufen wird.

Die Formulierung Gl. (2.22) auf S. 19 wird meistens in Beweisführungen benutzt und ist relativ ungünstig in unserer Realisierung. Ohne Verlust der Äquivalenz schreiben wir

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{m \times n} = \underbrace{\mathbf{U}}_{m \times n} \quad \underbrace{\Sigma}_{n \times n} \quad \underbrace{\mathbf{V}^*}_{n \times n}, \quad (2.23)$$

wobei $\mathbf{A}, \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die Variation von Gl. (2.22) auf S. 19 zu Gl. (2.23) auf S. 19 hat in unserer Realisierung folgende Vorteile:

1. Die rechnerische Komplexität der in dieser Arbeit benutzten Routinen für die SVD [Golub und Reinsch, 1970a] [Golub und Reinsch, 1970b] auf SISD-Architektur ist etwa $O(mn^2)$ geschätzt [Golub et al., 1980] [Golub und Van Loan, 1996, pp. 253–254] [Pan und Hamdi, 1996]. Somit ergibt sich ein niedrigerer Rechenaufwand wenn $n < m$.
2. Eine SVD-Routine kann die Matrix \mathbf{U} *in situ* der Eingabematrix \mathbf{A} zurückliefern, was in den Implementierungen üblich ist.
3. Im Falle einer „schlanken“ Matrix \mathbf{A} ($m > n$), fordert die Matrix \mathbf{U} in Gl. (2.23) auf S. 19 viel weniger Speicher als in Gl. (2.22) auf S. 19, was bei uns meistens der Fall ist.
4. In unseren Matrizen-Eingaberoutinen³⁵ in sogenannter „Zeilendominanter“ Programmiersprache C ist es günstiger, eine „schlanke“ ASCII Matrix mit $m > n$ einzulesen als eine „Fette“ mit $m < n$. Ebenfalls lässt sich eine „schlanke“ Matrix im Speicher einfacher aktualisieren.

Es lohnt sich an dieser Stelle, Gl. (2.22) auf S. 19 und Gl. (2.23) auf S. 19 zu vergleichen und die Unterschiede aufzulisten, denn wir benutzen hier Gl. (2.23) auf S. 19 während in

³³Eugenio Beltrami (1835–1899) [Beltrami, 1873], Camille Jordan (1838–1921), James Joseph Sylvester (1814–1897), Erhard Schmidt (1876–1959) [Schmidt, 1907a,b] und Hermann Weyl (1885–1955) [Stewart, 1992b].

³⁴[Forsythe et al., 1977] [Dewilde und Deprettere, 1988] [Golub und Van Loan, 1996, pp. 69–74]

³⁵`matsrc0/matio.c` und `matsrc1/matio1.c`

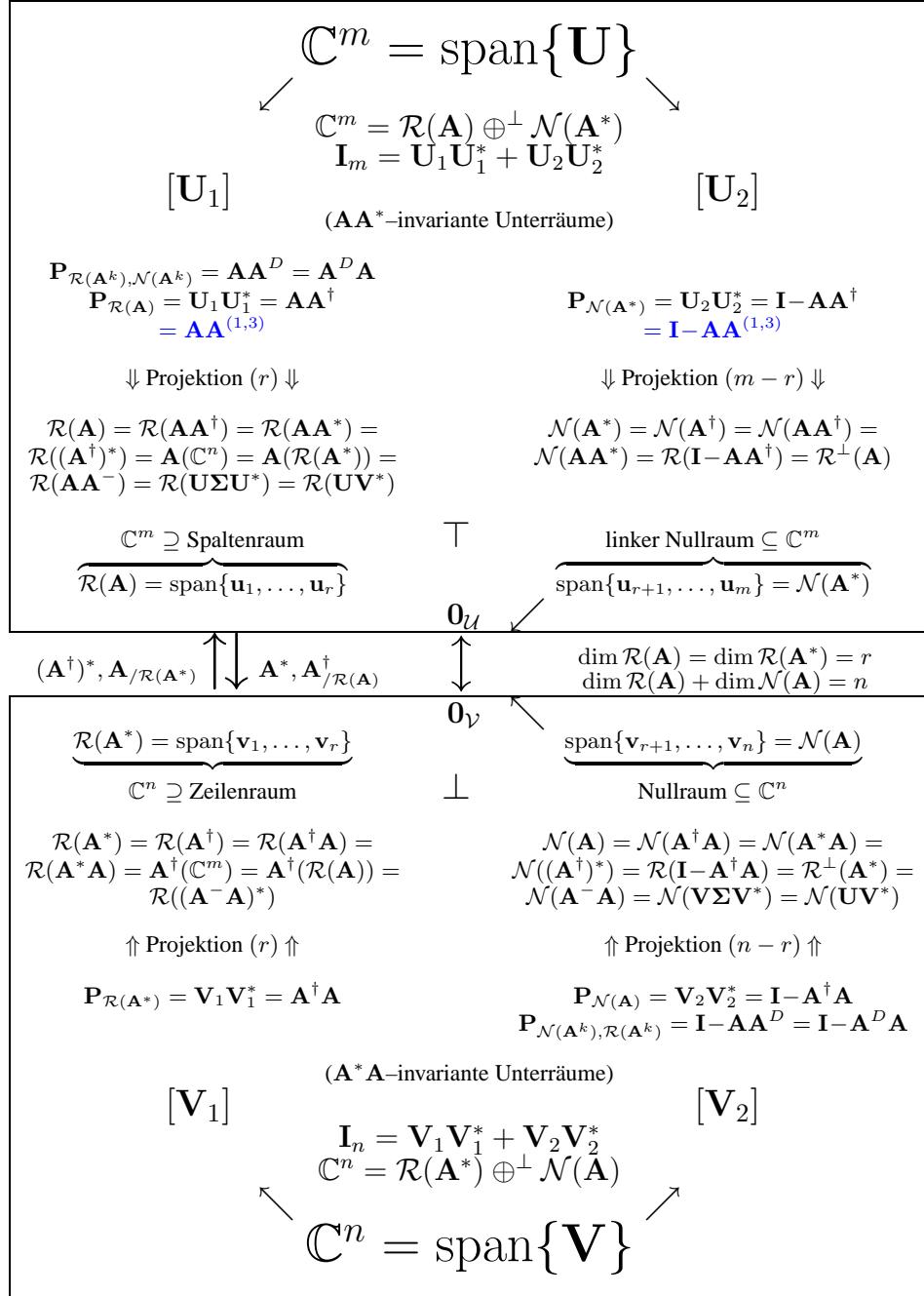


Abbildung 2.2: Singulärwertzerlegung und fundamentale Räume. Die *Singulärwertzerlegung* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$, der *Fundamentalsatz der linearen Algebra* und die *generalisierten Inversen*. Es sei darauf geachtet, daß diese Abbildung nach Gl. (2.22) auf S. 19 anstatt Gl. (2.23) auf S. 19 bis auf den *Polarfaktor* $\mathbf{U}\mathbf{V}^*$ in Gl. (2.38) auf S. 27 und Gl. (2.39) auf S. 27 zu interpretieren ist.

den meisten Literaturen und theoretischen Erörterungen Gl. (2.22) auf S. 19 impliziert wird ohne diese Situation in der Praxis anzusprechen. *Nota bene:* Abb. 2.2 auf S. 20 entspricht Gl. (2.22) auf S. 19 bis auf den Polar-Faktor $\mathbf{U}\mathbf{V}^*$, der nur für Gl. (2.23) auf S. 19 gilt wegen unpassender Dimension.

Da Σ „diagonal“ und \mathbf{V} stets $n \times n$ ist, liegt die Diskrepanz allein in der Anzahl der Spaltenvektoren in \mathbb{C}^m der Matrix \mathbf{U} in Gl. (2.23) auf S. 19. (Siehe Abb. 2.2 auf S. 20.) Die Matrix \mathbf{U} in Gl. (2.23) auf S. 19 besitzt die gleiche Dimension $m \times n$ wie \mathbf{A} und ist generell *nicht-quadratisch*. Sie kann also keine *unitäre* Matrix sein mit

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}, \quad (2.24)$$

sondern eine *subunitäre* Matrix oder eine *partielle Isometrie*³⁶ mit

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^\dagger, \quad (2.25)$$

wobei \mathbf{U}^\dagger die Moore-Penrose-Pseudoinverse der Matrix \mathbf{U} ist.

$m > n$: Ist die Matrix \mathbf{A} „groß und schlank“, so erhalten wir „zu wenig“ linke Singulärvektoren in \mathbb{C}^m in der Matrix \mathbf{U} für die Erzeugung des ganzen Raumes \mathbb{C}^m und *linken Nullraumes* $\mathcal{N}(\mathbf{A}^*)$. Dies ist glücklicherweise ohne weiteres zu umgehen. Bei bedarf des linken Nullraums $\mathcal{N}(\mathbf{A}^*)$ einer Matrix \mathbf{A} , können wir einfach anstatt \mathbf{A} , die Adjungierte \mathbf{A}^* zerlegen, denn $\mathbf{A}^* = \mathbf{V}\Sigma\mathbf{U}^*$. Wir erhalten also den linken Nullraum der eigentlichen Matrix \mathbf{A} an der Stelle vom „rechten“ Nullraum der Matrix \mathbf{A}^* . Dies gilt gewiss auch für den Raum \mathbb{C}^m , falls eine orthonormale erzeugende Menge benötigt wird. Die Aufspannung vom \mathbb{C}^m und $\mathcal{N}(\mathbf{A}^*)$, die im Falle $m > n$ in Gl. (2.23) auf S. 19 betroffen wird, stellt also kein Problem dar und findet wichtige Anwendungen in dieser Arbeit³⁷. In diesem Fall gilt $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}$, denn \mathbf{U} besitzt immerhin orthonormale Spalten.

$m < n$: Ist die Matrix \mathbf{A} „klein und dick“, so erhalten wir „zu viele“ linke Singulärvektoren. Wir haben in $\Sigma_{n \times n}$ stets mindestens $n - m$ verschwundene Singulärwerte. Die rechten $n - m$ Spaltenvektoren in \mathbf{U} sind redundant für die Erzeugung von \mathbb{C}^m und müssen linear abhängig sein von den restlichen m Spalten der Matrix \mathbf{U} . In diesem Fall setzen wir $\mathbf{0}$ an den Stellen von den rechten $n - m$ Spalten für die *Orthogonalität* aller Spaltenvektoren in der Matrix \mathbf{U} . Sie müssen also nicht berechnet werden, denn sie entsprechen den $n - m$ gleicherweise stets verschwundenen Singulärwerten in Σ . *Nota bene:* \mathbf{U} kann nun nur als *partielle Isometrie* oder *subunitäre Matrix* (mit Gl. (2.25) auf S. 21) bezeichnet werden, denn sie besitzt einen nicht-trivialen Kern der Dimension $n - m$.

³⁶ Eine *partielle Isometrie* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ist eine *Isometrie* $\mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^m$ mit *Einschränkung (restriction)* vom Urbild auf den Teilraum $\mathcal{R}(\mathbf{U}^*) = \mathcal{N}(\mathbf{U})^\perp$, d. h., eine *Isometrie* in \mathbb{C}^n mit dem Nullraum ausgeschlossen. Sie bildet alle Vektoren aus $\mathcal{R}(\mathbf{U}^*)$, dem orthogonalen Komplement zu $\mathcal{N}(\mathbf{U})$, *isometrisch* in den Raum $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ ab. Eine partielle Isometrie darf nicht-quadratisch und sogar *rang-difizient* sein. Sie ist eine Verallgemeinerung der Isometrie. Darüber hinaus ermöglicht die partielle Isometrie, die *Polarform* der quadratischen Matrizen für nicht-quadratische Matrizen zu generalisieren. Eine partielle Isometrie besitzt nur die Singulärwerte 1 oder 0. [Halmos, 1958, pp. 150–170] [Boullion und Odell, 1971, pp. 33–38, Theorem 3] [Ben-Israel und Greville, 1974, pp. 252–254, Theorem 3]. [Campbell und Meyer, 1979, pp. 71–72, Theorem 4.2.1] [Higham, 1986] [Golub und Van Loan, 1996, pp. 149–151]

³⁷ Die Aufgabe der Erzeugung vom ganzen Raum ist *nicht* mittels *Gram-Schmidt-Orthonormalisierung* [Gram, 1883] [Schmidt, 1907a, p. 442] zu erfüllen. Das Gram-Schmidt-Verfahren ist ein Verfahren zur Orthonormalisierung einer *vorhandenenen* Menge der linear unabhängigen Vektoren. Es vervollständigt die „fehlenden“ Basisvektoren *nicht*. Mit Hilfe der SVD wird jedoch aus einem einzigen Vektor ein vollständiges Erzeugendensystem für den ganzen Raum erhalten. Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Sei $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^* = \mathbf{x}^*$. Dann ist das orthogonale Komplement von $\text{span}\{\mathbf{x}\}$ durch die rechten $n - 1$ Spalten der Matrix \mathbf{V} ausgespannt. Der Vektor \mathbf{x} ist als ein *komplexes* Vielfach in der ersten Spalte der Matrix \mathbf{V} enthalten. Abb. 2.2 auf S. 20 verdeutlicht diese Anwendung.

Da SVD eine *rang-auflösende* Zerlegung [Stewart, 1992a] ist, schreiben wir auch für eine rang- r Matrix \mathbf{A} in partitionierter Form

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{m \times n} &= \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\mathbf{U}_1}_{m \times r} & \underbrace{\mathbf{U}_2}_{m \times (n-r)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{r \times r} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{V}_1^* \}_{n \times r} \\ \hline \mathbf{V}_2^* \}_{n \times (n-r)} \end{array} \right] \\ &= [\mathbf{U}_1 \mid \mathbf{U}_2] \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{r \times r} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{V}_1^* \\ \hline \mathbf{V}_2^* \end{array} \right]\end{aligned}\quad (2.26)$$

oder ausgeschrieben

$$\mathbf{A} = [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_r \mid \mathbf{u}_{r+1} \dots \mathbf{u}_n] \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 & \\ \ddots & \\ \hline & \sigma_r \\ & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \\ \hline \mathbf{v}_{r+1}^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^* \end{array} \right], \quad (2.27)$$

wobei σ_i die Singulärwerte, \mathbf{u}_i die *linken Singulärvektoren* und \mathbf{v}_i die *rechten Singulärvektoren* der Matrix \mathbf{A} genannt werden. Ohne Verlust der Generalität werden die von Null verschiedenen Singulärwerte nach

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \quad (2.28)$$

sortiert³⁸. Diese Konvention ist bei vielen wichtigen Aussagen über die SVD sowie in ihren Anwendungen vorteilhaft. Bei Bedarf müssten sie nach dem Aufruf der eigentlichen SVD-Routine explizit sortiert werden, denn eine Sortierung ist in dem Algorithmus nicht impliziert. Eine geometrische Anschauung der Singulärvektoren \mathbf{u}_i und \mathbf{v}_i als Basisvektoren, wenn die Matrix \mathbf{A} als lineare Transformation zu betrachten ist, ist in Abb. 2.3 auf S. 23 aus [Tomasi, 1999] dargestellt. Mit der Existenz der Zerlegung Gl. (2.22) auf S. 19 sind also alle generellen Matrizen in $\mathbb{C}^{m \times n}$ ($m = n$ oder $m \neq n$) „diagonalisierbar“ im Gegensatz zur *Spektralzerlegung*, wobei eine Klasse von *Defektiven* Matrizen vorkommt, die sich nicht diagonalisieren lassen.

2.3.2 Vier fundamentale Teilräume

Mit *fundamentalen Teilräumen* [Strang, 1993] einer linearen Abbildung meinen wir

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \text{span} \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \} \perp \text{span} \{ \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n \} = \mathcal{N}(\mathbf{A}^*), \quad (2.29)$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}^*) = \text{span} \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \} \perp \text{span} \{ \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n \} = \mathcal{N}(\mathbf{A}), \quad (2.30)$$

die explizit durch die Singulärvektoren der SVD einer Matrix \mathbf{A} orthonormal aufgespannt werden. Wir nennen $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ den Bildraum oder Spaltenraum der Matrix \mathbf{A} ; $\mathcal{N}(\mathbf{A}^*)$ den linken Nullraum der Matrix \mathbf{A} , welcher orthogonal und komplementär zu $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ in \mathbb{C}^m steht; $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ den Nullraum der Matrix \mathbf{A} ; und $\mathcal{R}(\mathbf{A}^*)$ den Zeilenraum der Matrix \mathbf{A} , welcher orthogonal und komplementär zu $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ in \mathbb{C}^n steht. In Abb. 2.2 auf S. 20 ist eine Anschauung bildlich dargestellt über die wichtigsten Zusammenhänge zwischen den *fundamentalen*

³⁸Wir sortieren die Singulärwerte *zusammen* mit den Singulärvektoren in der Praxis nur bei Bedarf mit einem modifizierten Quick-Sort in `svdsort.c`.

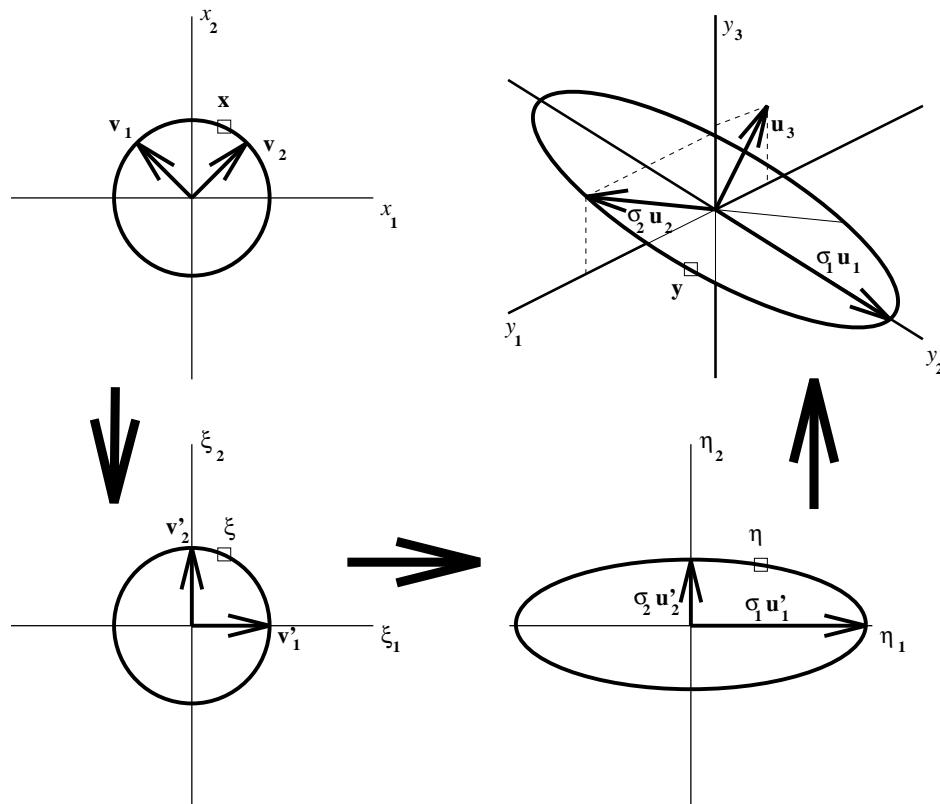


Abbildung 2.3: Geometrische Anschauung der Singulärwertzerlegung. SVD ist eine Auswahl zweier Basen einer linearen Abbildung von sowohl $\{v_1, \dots, v_n\}$ in der Domäne, als auch $\{u_1, \dots, u_m\}$ in der Kodomäne, so daß sich die Abbildung zur bloßen nicht-negativen, reellen Skalierung reduziert. Die Skalierung wird durch das Singulärspktrum $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ alleine beschrieben. Das Singulärspktrum charakterisiert vollständig die Gestalt der Abbildung. Zwei verschiedene lineare Abbildungen unterscheiden sich nur durch das Singulärspktrum (*cum grano salis*). (Nutzung der Zeichnung mit freundlicher Genehmigung von Herrn Carlo Tomasi, Robotics Laboratory, Department of Computer Science, Stanford University, 6. März 2000) [Tomasi, 1999]

Teilräumen [Strang, 1993], *Projektoren*, *Moore-Penrose-Inversen*³⁹ und den *orthogonalen Raumzerlegungen*, die bei jeder Matrix \mathbf{A} bzw. linearer Abbildung apriorisch zu Stande kommt und durch eine *Singulärwertzerlegung* dargeboten sind. Worin liegt die „Fundamentalität“? Dies hat G. Strang in [Strang, 1993] nicht erklärt. *Die Fundamentalität liege in der Apriorität⁴⁰ vierer Teilräume*. Nach I. Kant sei der Wissenschaftliche Prozeß die *Synthese* neuer Erkenntnisse *a priori*, d. h., Wiederentdeckung oder Schöpfung der *erfahrungsunabhängigen Existenz*. Und diese *Apriorität* ist dieselbe Apriorität der Singulärwertdarstellung einer linearen Abbildung, denn in den Faktoren ist nichts anderes als explizite Aufspannung aller vier Räume. Die Singulärwerte erzählen bloß etwas über die Ausdehnung der Teilraume und die *Gestalt* der linearen Abbildung Cf. Abb. 2.3 auf S. 23. Die Existenz der SVD identifiziert sich also mit der vierer fundamentaler Teilräume einer linearen Abbildung. Schränken wir uns auf den Grundkörper einer linearen Abbildung auf \mathbb{C} ein, so identifiziert sich die SVD mit *jeder* linearen Abbildung. Dies sei die *Fundamentalität* der SVD⁴¹. Zum Argument hilft uns ggf. die *Eindeutigkeit* der SVD einer linearen Abbildung. In der Literatur herrscht ausschließlich

Die Singulärwertzerlegung ist eindeutig, wenn ...

Wir sagen aber

Die Singulärwertzerlegung ist eindeutig.

Selbstverständlich ist dies in einer anderen Pragmatik ausgesagt. Wir sprechen nämlich nicht von den einzelnen *Singulärvektoren*, sondern den *Singulärräumen*.

Definition 2.3.1 (Singulärraum). Ein Raum heißt linker bzw. rechter Singulärraum, wenn er durch alle linken bzw. rechten Singulärvektoren zu demselben Singulärwerte aufgespannt ist.

Die Eindeutigkeit der SVD ist also eine unmittelbare Folgerung, wenn die Granularität der Pragmatik von Singulärvektoren auf Singulärräume untergesetzt ist. Die übliche Erklärung mit der Vorzeichenänderungsfreiheit der Singulärvektoren und Drehung einer Basis würde die wichtige Eindeutigkeit der SVD verdecken. Unsere Definition eines *Singulärraumes* ist eigentlich nichts Neues, sondern steht in Parallelität zu der von einem *Eigenraum*. Cf. Abb. 2.2 auf S. 20. Bei einem Eigenwertproblem suchen wir *nicht* die einzelnen Eigenvektoren, sondern die *Eigenräume*. Und dies hat eine direkte Konsequenz in numerischer Stabilität der meisten Algorithmen⁴². Die Dimension des *Singulärraums* ist die *Vielfachheit* des assoziierten Singulärwertes. Unter dem Aufspannen der Räume \mathbb{C}^m und \mathbb{C}^n durch alle linken und rechten Singulärvektoren verstehen wir jetzt die *direkte Summe der Singulärräume*. Das Aufspannen durch Singulärvektoren ist nicht eindeutig, aber die *direkte Summation* von den Singulärräumen ist eindeutig.

Der obere Block von Abb. 2.2 auf S. 20 ist die linke Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, der untere Block die rechte Matrix $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ der SVD einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ nach Gl. (2.22)

³⁹[Lawson und Hanson, 1974, pp. 237–239] [Kuhnert, 1976, pp. 18–21][Campbell und Meyer, 1979, p. 12, Theorem 1.2.2] [Ipsen und Meyer, 1995] [Meyer, 2000, pp. 424–428]

⁴⁰im Kantschen Sinne [Kant, 1781]

⁴¹Dies ist bei der Spektralzerlegung nicht der Fall, denn sie ist wegen der *defektiven* bzw. *nicht-diagonalisierbaren* Matrizen in diesem Kontext „unvollständig“.

⁴²Die Studierenden würden sich sonst überraschen, wenn sie eines Tages in der Numerik zusehen müssen, wie ein Eigenvektor zu tanzen anfängt, während sich zwei Eigenwerte zusammen treffen.

auf S. 19. Die Spaltenvektoren der Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} spannen jeweils den Raum \mathbb{C}^m und \mathbb{C}^n orthonormal auf. Die Räume \mathbb{C}^m und \mathbb{C}^n werden jeweils bei Existenz jeder Matrix \mathbf{A} apriorisch in zwei orthogonal komplementäre Teilräume durch *direkte Summe* zerlegt. Parallel zu solcher werden die beiden Identitäten, \mathbf{I}_m und \mathbf{I}_n , jeweils in zwei *komplementäre Orthoprojektoren* durch die Matrizenaddition zerlegt.

Die beiden Zerlegungen führen insgesamt zu vier *fundamentalen Teilräumen* und entsprechenden *Orthoprojektoren*. Es sei eine vertikale Linie in der Mitte der Abb. 2.2 auf S. 20 vorgestellt, die sowohl konkret die Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} partitioniert als auch abstrakt die Räume \mathbb{C}^m und \mathbb{C}^n zerlegt. Die Position der vertikalen Linie wird durch den *numerischen Rang* der Matrix \mathbf{A} bestimmt, wobei der *numerische Rang* der Matrix \mathbf{A} bereits nach Berechnung der SVD aus der Matrix Σ , d. i., den Singulärwerten σ_i , abzulesen ist [Rust, 1998]. Ist die Matrix \mathbf{A} *vollrangig*, so verschwindet die rechte Seite des Diagramms, das heißt, schrumpfen die Nullräume $\mathcal{N}(\mathbf{A}^*)$ und $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ in die Null-Vektoren $\mathbf{0}_m$ und $\mathbf{0}_n$. Ist die Matrix \mathbf{A} gleich $\mathbf{0}$, so verschwindet die linke Seite des Diagrams, oder schrumpfen die *Bildräume* zu Nullen.

Wir haben also nach der SVD Gl. (2.22) auf S. 19 vier rechteckige Matrizen, $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{V}_1$ und \mathbf{V}_2 , die keine *unitären* Matrizen mehr sind, sondern *Isometrien*⁴³ oder *partielle Isometrien* bzw. *subunitären* Matrizen⁴⁴. Diese spannen wiederum orthonormal die jeweils vier fundamentale Räume $\mathcal{R}(\mathbf{A}), \mathcal{N}(\mathbf{A}^*), \mathcal{R}(\mathbf{A}^*)$ und $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ auf, die *stets* mit jeder Matrix \mathbf{A} koexistieren und sie charakterisieren.

2.3.3 Eigenschaften der Singulärwertzerlegung

Zu Abb. 2.2 auf S. 20 und Abb. 2.1 auf S. 7 fassen wir kompakt einige wichtige Eigenschaften der Singulärwertzerlegung und ihre Zusammenhänge mit Projektoren und Moore-Penrose-Inverse zusammen.

- **Schmidt-Eckart-Young-Mirsky Approximationssatz⁴⁵:** Seien Singulärvektoren $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ und Singulärwerte $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)}$ von $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Sei $\mathbf{A}_r = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*$, so gilt

$$\|\mathbf{A}_r - \mathbf{A}\|_U = \inf_{\text{rank } \mathbf{B} \leq r} \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|_U \quad (2.31)$$

⁴³[Campbell und Meyer, 1979, p. 71, Proposition 4.2.1]

⁴⁴[Ben-Israel und Greville, 1974, p. 254] [Campbell und Meyer, 1979, p. 72, Theorem 4.2.1]

⁴⁵[Schmidt, 1907a,b] [Eckart und Young, 1936] [Mirsky, 1960] Seien die Singulärwerte sortiert nach $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, dann definiert

$$\nu_k^2(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2$$

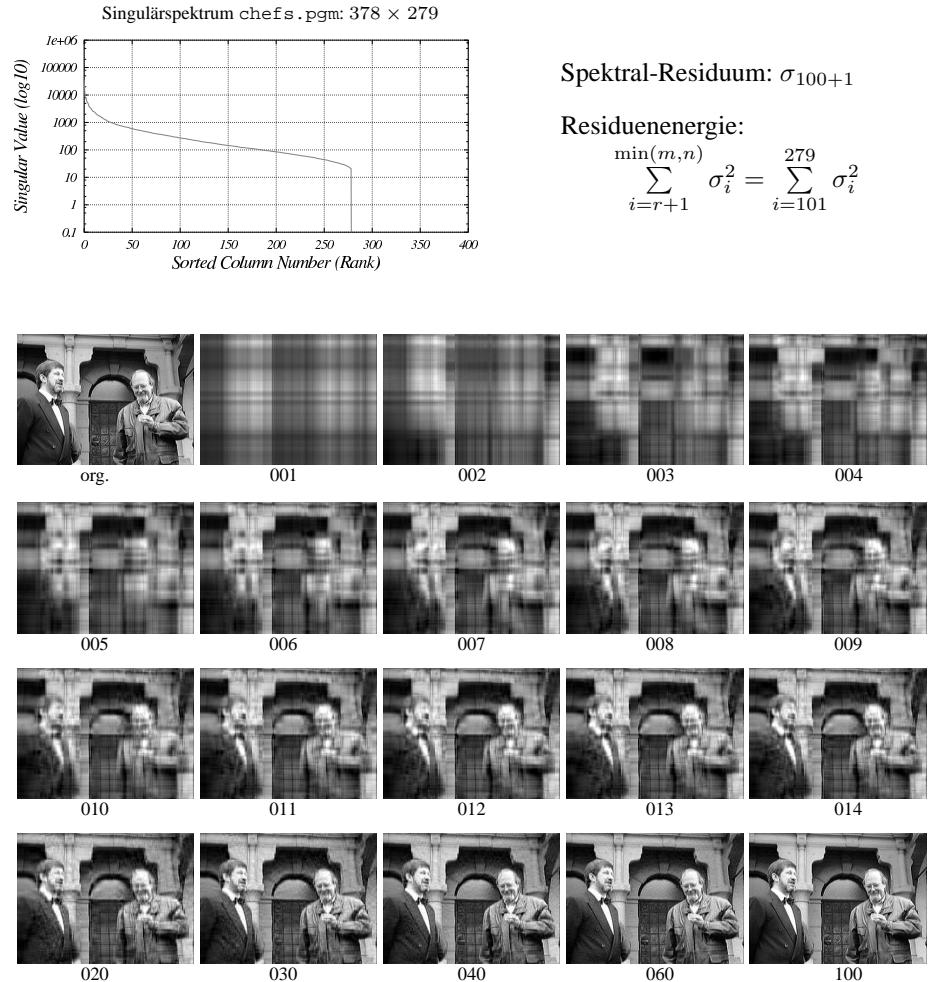
eine unitär invariante Norm für jede $k = 1, \dots, r$ [Meyer, 2000, p. 425]. Spezielle Fälle der $\nu_k(\mathbf{A})$ sind die vektornorm-induzierte Matrixnorm, die *Spektralnorm* [Horn und Johnson, 1985, pp. 290-320, §5.6] gleich dem größten Singulärwert

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{Ax}\|_2 = \sigma_1,$$

und die *Frobeniusnorm* oder *Hilbert-Schmidt-Norm*

$$\|\mathbf{A}\|_F = (\text{tr } \mathbf{A}^* \mathbf{A})^{1/2} = (\text{tr } \mathbf{AA}^*)^{1/2} = (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)^{1/2}.$$

Für Definition und ausführliche Diskussion über verschiedene Matrixnormen ist [Horn und Johnson, 1985 §5.6, pp. 290-320] sehr zu empfehlen. Siehe auch [Ipsen und Meyer, 1995].



Am Beispiel einer Kamera-Szene wird der Approximationssatz in Abb. 2.4 auf S. 26 veranschaulicht.

- Das Hilbert-Schmidt bzw. Frobenius Residuum:

$$\|\mathbf{A}_r - \mathbf{A}\|_F^2 = \sum_{i=r+1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2. \quad (2.32)$$

Das Spektralresiduum (von induzierter 2-Norm):

$$\|\mathbf{A}_r - \mathbf{A}\|_2^2 = \sigma_{r+1}^2. \quad (2.33)$$

- Für $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ gilt $(\mathbf{A}^\dagger)^* = (\mathbf{A}^*)^\dagger$ und für Orthoprojektor $\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})}$ gilt

$$\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})}^\dagger = \mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})} \quad (2.34)$$

- Sei $m = n$ und $\angle(\mathcal{R}(\mathbf{A}), \mathcal{N}(\mathbf{A}))$, [Ipsen und Meyer, 1995, (2.7)]

$$\cos \theta = \|\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathcal{N}(\mathbf{A})}\|_2 = \|\mathbf{P}_{\mathcal{N}(\mathbf{A})}\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})}\|_2 \quad (2.35)$$

- Im generellen, besitzt ein Projektor $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^n$ eine *Bild-Kern-Zerlegung* [Koecher, 1997, p. 51] [Meyer, 2000, p. 394] mit *Index 1*

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathbb{C}^n. \quad (2.36)$$

Der minimale Winkel θ zwischen dem Bild und dem Kern des Projektors \mathbf{P} ist gegeben durch [Ipsen und Meyer, 1995, (2.7)]

$$\sin \theta = 1/\|\mathbf{P}\|_2. \quad (2.37)$$

- Falls $m = n$, $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ sind genau dann komplementäre Teilmengen, wenn $\text{Ind}(\mathbf{A}) = 1$, d. h., wenn das Potenzieren der Matrix \mathbf{A} die Dimensionen vom Bildraum oder Kern nicht ändert. Dies heißt wiederum wenn das Bild nicht schrumpft und der Kern nicht wächst, denn mit dem Potenzieren einer Matrix \mathbf{A} kann der Bildraum nur schrumpfen und der Kern nur wachsen. Der Bildraum und der Kern der Matrix \mathbf{A} sind sogar einander orthogonal wenn \mathbf{A} weiterhin eine EP-Matrix ist.
- *Polar-Zerlegung* oder *Polarform* ist die Faktorisierung einer beliebigen Matrix (auch $m \neq n$) auf eine partielle Isometrie und eine selbstadjungierte positiv semidefinite Matrix. Die folgenden Polarform via SVD sind jeweils eindeutig. Sei $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$ die SVD nach Gl. (2.23) auf S. 19, dann

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^* = \underbrace{\mathbf{U}\mathbf{I}_n}_{m \times m} \Sigma \underbrace{\mathbf{V}^*}_{n \times n} = (\underbrace{\mathbf{U}\mathbf{V}^*}_{m \times n}) (\underbrace{\mathbf{V}\Sigma\mathbf{V}^*}_{n \times n}) = \mathbf{Q}\mathbf{H}_1, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^* = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{I}_n\mathbf{V}^* = (\underbrace{\mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^*}_{m \times m}) (\underbrace{\mathbf{U}\mathbf{V}^*}_{m \times n}) = \mathbf{H}_2\mathbf{Q}, \quad (2.39)$$

wobei selbstadjungierte, positiv semidefinite \mathbf{H}_1 und \mathbf{H}_2 jeweils eindeutig sind. Ist \mathbf{A} vollständig, so ist \mathbf{U} auch eindeutig und $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ positive definite. [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 255, Theorem 5] [Campbell und Meyer, 1979, p. 73, Theorem 4.2.2] [Higham, 1986] [Shoemaker und Duff, 1992] [Golub und Van Loan, 1996]

2.4 Meßdaten und Singulärwertzerlegung

Die *Singulärwertzerlegung* einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ist meistens betrachtet als Zerlegung einer *linearen Transformation* $\mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^m$ auf

1. eine Isometrie⁴⁶ (bzw. Basiswechsel durch die rechten Singulärvektoren in \mathbf{V}) im Quellraum \mathbb{C}^n ,
2. eine reine Skalierung durch die Singulärwerte in Σ ,
3. und eine weitere Isometrie (bzw. Basiswechsel durch die linken Singulärvektoren in \mathbf{U}) im Zielraum \mathbb{C}^m ,

wie in Abb. 2.3 auf S. 23 geometrisch veranschaulicht wird. Wir sehen somit die Abbildung $\mathbf{A} : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^m$ als Produkt dreier verketetteter Teilabbildungen \mathbf{V}^* , Σ und \mathbf{U} an. \mathbf{A} wird also im Zusammenhang der Gleichung $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ gedacht.

Diese Interpretation der Faktorisierung ist jedoch unpassend, falls eine Matrix \mathbf{A} Meßdaten erfasst. Wir stellen uns daher die Frage,⁴⁷

Wie sind \mathbf{U} , Σ und \mathbf{V} zu interpretieren, wenn die zu zerlegende Matrix \mathbf{A} Meßdaten enthält?

An dieser Stelle müssen wir noch einmal die Strukturierung der Meßdaten in eine Matrix \mathbf{A} festlegen und solche charakterisieren. Bei jeder *multivariaten* Messung mit n Variablen erhalten wir einen n -Vektor. Dieser n -Vektor werde als eine Zeile in die Datenmatrix \mathbf{A} hingeschrieben. Mit m wiederholten Messungen ergibt sich also eine $m \times n$ Datenmatrix⁴⁸

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & \cdots & a_{4n} \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{5n} \\ a_{61} & a_{62} & \cdots & a_{6n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_6 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Unsere *Datenmatrix* \mathbf{A} in $\mathbb{C}^{m \times n}$ „wächst“ also mit zunehmender Anzahl der Messungen nach unten. Die auf diese Weise zusammengefaßten Daten in der Matrix \mathbf{A} lassen sich verschieden interpretieren:

1. Mehrkanalmessungen mit n als Anzahl der Meßkanäle (Sensoren) und m als Anzahl der Messungen. Jede Spalte kann als eine diskrete Zeitreihe gedacht werden. Der

⁴⁶Zur Isometrie gehören z. B. Drehungen und Spiegelungen. Verschiebungen und weitere topologische Operationen werden hier nicht berücksichtigt, da wir uns nur auf lineare Abbildungen konzentrieren.

⁴⁷Siehe Seite 40 für eine Rekapitulation unserer Antwort.

⁴⁸In der Statistik werden oft die Symbole p und n für jeweils Anzahl der Variablen und Messungen benutzt, wobei die Matrix $\mathbf{A}_{p \times n}$ mit zunehmender Anzahl der Messungen nach rechts zu wachsen ist. Diese Konvention ist jedoch unpraktisch in unserer Implementierungen in C, welche ein Array von „oben“ nach „unten“ zeilenweise speichert (auch *zeilendominant* genannt), während Fortran von „links“ nach „rechts“ spaltenweise speichert (auch *spaltendominant* genannt). Weitere Möglichkeit der Konfiguration der Datenmatrix für die SVD der *periodischen Signale* ist u. a. in [Bhattacharya und Kanjilal, 1999] untersucht.

Index i ist also der Zeitpunkt und j der Index eines bestimmten Sensors. Jede Zeile kann als ein Merkmalsvektor gedacht werden.

2. Messungen der geometrischen Koordinaten mit Dimension des Raumes n und der Anzahl der gemessenen Punkte m . Jede Zeile stellt einen Punkt im n -Raum dar. Der Index i identifiziert also jeden einzelnen Punkt $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ und j ist der Koeffizient bezüglich des j -ten Basisvektors. a_{ij} ist die j -te Koordinate des i -ten Punktes im Bezug auf die im Kontext definierte Basis.
3. Die Zeilenvektoren $\mathbf{a}_i (i = 1, \dots, m)$ seien Ereignisse des Zufallsvektors $[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$ aus den *Zufallsvariablen*⁴⁹ p_1, \dots, p_n . Jede Spalte der Matrix \mathbf{A} ist somit eine *Realisierung* einer bestimmten Zufallsvariablen $p_j (j = 1, \dots, n)$ von m Beobachtungen. Ein stochastischer Prozeß läßt sich in dieser Konfiguration in Matrixform untersuchen.⁵⁰
4. Ein stochastisches Signal $\mathbf{x}(t)$ läßt sich in der Form der Gl. (2.40) auf S. 28 darstellen, sobald eine Basis $\{\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$ für das Signal festgelegt ist. In diesem Falle, ist n die Dimension des Signalraumes⁵¹, m die Anzahl der wiederholten Beobachtungen des stochastischen Signals. Der Zufallsprozeß $\mathbf{x}(t)$ kann also als ein Zufallspunkt in einem n -dimensionalen Raum gedacht werden. [Lathi, 1968, Chap. 3, pp. 212–214]

2.4.1 Der Kondensator ist ein Projektor

Sei Datenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ aus Gl. (2.40) auf S. 28. Es ist häufig erforderlich, die Mittelwerte $\hat{\mu}_j = 1/m \sum_i a_{ij}$ jeder Spalte j der Matrix \mathbf{A} bzw. den *Schwerpunkt* $\hat{\mu}_{\mathbf{A}} = [\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n]$ ⁵² aus der Matrix \mathbf{A} zu subtrahieren, d. h., den Schwerpunkt $\hat{\mu}_{\mathbf{A}}$ der Datenwolke herunter auf $\mathbf{0}$ zu versetzen. Diese affine Verschiebung der Daten bezeichnen wir als das *Zentrieren* der Datenmenge.

Definition 2.4.1 (Zentrierung). Ein Vektor $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m] \in \mathbb{C}^m$ heißt *zentriert*, wenn $\sum x_i = 0$. Eine Datenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ in der Form von Gl. (2.40) auf S. 28 heißt *spalten-zentriert*, wenn

$$\left[\begin{array}{cccc} \sum_{i=1}^m a_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{in} \end{array} \right] = \mathbf{0}_{1 \times n}.$$

⁴⁹ Abbildung des Musterraumes auf Zahlen in \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

⁵⁰ Für die Definition eines *stochastischen Prozesses* $\mathbf{x}(\zeta, t)$ siehe [Lathi, 1968, Chap 3, pp. 158–230]. Eine anschauliche Abbildung befindet sich in [Lathi, 1968, Fig. 3-1, p. 160]. *Ergodizität* des Prozesses wird angenommen, d. h., die *Scharstatistik* (*Ensemble-Statistik*) sei gleich der *Zeit-Statistik*. Das heißt wiederum, daß jede *Musterfunktion* (*sample function*) oder *Realisierung* des Prozesses repräsentativ sei für das ganze *Ensemble* des Zufallsprozesses und daher die vollständige Charakterisierung eines Prozesses. Eine Spalte der Matrix \mathbf{A} in Gl. (2.40) auf S. 28 kann also einen Prozeß darstellen. Die Datenmatrix \mathbf{A} kann somit zugleich n Prozesse $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ abtasten. Die Ergodizität eines Prozesses impliziert die *Stationarität*, d. h., Die Statistiken aller Ordnungen sind invariant gegenüber Zeitverschiebung [Lathi, 1968, p. 176].

⁵¹ Wir berücksichtigen hier nur Signale endlicher Dimension.

⁵² Dies ist ein *unverzerrter* oder *erwartungstreuer* (*unbiased*) und *konsistenter* Schätzmittelwert. Ein *Schätzer* $\hat{\theta}$ für die Zufallsvariable θ heißt *erwartungstreu* (*unbiased*), wenn $E[\hat{\theta}] = \theta$, sonst heißt er *verzerrt* oder *nicht erwartungstreu* (*baised*). Die Schätzung heißt *konsistent*, wenn $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{\theta}] = 0$, sonst heißt sie *inkonsistent*. Siehe z. B. [Schwartz und Shaw, 1975, pp. 91–94]. Der Zufallsvektor $\hat{\mu}_{\mathbf{A}}$ der *Schätzmittelwerte* $\hat{\mu}_j$ hat Erwartungswerte $E[\hat{\mu}_{\mathbf{A}}] = \mu_{\mathbf{A}}$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{\mu}_{\mathbf{A}}] = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_{\mu_{\mathbf{A}}}^2 / m = \mathbf{0}$. Der Schätzer ist normalverteilt mit $N(\mu_{\mathbf{A}}, \sigma_{\mu_{\mathbf{A}}}^2 / m)$.

und *zeilen-zentriert*, wenn

$$\left[\begin{array}{cccc} \sum_{j=1}^n a_{1j} & \sum_{j=1}^n a_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{mj} \end{array} \right]^T = \mathbf{0}_{m \times 1}.$$

Da wir die Datenmatrix spaltenweise manipulieren, meinen wir *spalten-zentriert*, wenn nur *zentriert* gesagt wird. (Cf. `matstat.c -pz.`)

Beobachtung 2.4.2 (Warum Zentrieren?). Die Zentrierung der Daten ist oft der erste Schritt zur Datenverarbeitung. Warum? Da eine plausible Erklärung meines erachtens in der Literatur nicht gegeben wird, wollen wir hier argumentieren, daß es sich um eine „*Kurzsichtigkeit am Nullvektor*“ handelt, aus jeweils *algebraischem* und *numerischem* Aspekt.

- In einem *linearen Raum* sind alle Vektoren gleichberechtigt bis auf den *Nullvektor*. Er zeichnet sich von allen anderen Vektoren dadurch aus, daß ihn alle linearen Abbildungen fest lassen müssen. Die Auszeichnung des Nullvektors ist eine direkte Konsequenz aus den Axiomen eines Vektorraumes und des zugrunde liegenden Körpers⁵³ seit Hermann Günther Grassmann (1809–1877) [Grassmann, 1894, 1896] [Gray, 1980, 1994] und Giuseppe Peano (1858–1932)⁵⁴. In einem *linearen Raum* mit nicht-ausgeartetem *Skalarprodukt* ist der *Nullvektor* der einzige *isotropische* Vektor (*das Radikal*) [Kaplansky, 1974, p. 7], der zu allen anderen Vektoren *orthogonal* ist. Wir versetzen den Schwerpunkt einer Datenwolke zum Nullvektor, weil wir die Daten dort am besten „anschauen“ können. Das Verhalten aller linearen Abbildungen ist am Nullvektor am schärfsten aufgelöst, denn alle linearen Abbildungen drehen sich ohne Ausnahme nur um ihn herum. In anderen Worten, unsere Augen sind dort am Nullvektor befestigt, während wir zur Datenanalyse linear-algebraische Werkzeuge verwenden. Eine *de facto* 2-dimensionale Dynamik mitten unter den Daten sehen wir, aus großer Entfernung, mittels linear-algebraischen Begriffs als eine rang-3 Matrix. Versetzen wir den Schwerpunkt zum Nullvektor, so wird das Wesen der 2-dimensionalen Dynamik in der Form einer rang-2 Datenmatrix zum Vorschein gebracht. (v. et. Beispiel 2.4.16 auf Seite 48.) Dasselbe kommt bei einer Eigenanalyse und weiteren linearen Methoden der Datenanalyse vor. Dies war eine Erklärung aus dem *algebraischen* Aspekt.
- Auch in der Numerik spielt das *Zentrieren* der zu verarbeitenden Daten eine nicht zu ignorierende Rolle. Rechnerisch werden die *reellen Zahlen* durch das *Fließkomma-Format* [Goldberg, 1991] dargestellt. Dennoch besteht zwischen den Reellen und ihrer maschinenellen Approximierung immenser Unterschied:

1. Die Menge aller darstellbaren Zahlen eines bestimmten Fließkomma-Formates ist *endlich*, *abzählbar* und besitzt keine *Dichtheit*, während die der Reellen *unendlich*, *überzählbar* und *dicht* ist.
2. Die endlich verfügbaren Fließkomma-Zahlen bestimmter Länge sind inhomogen verteilt, so daß der eine Bereich der Reellen am Null *feiner* und der andere *grober* aufgelöst wird, während die gesamte Dynamik aller darstellbaren Zahlen hinreichend groß beibehalten werden kann.

⁵³Der Begriff Körper war zu der Zeit noch nicht etabliert.

⁵⁴Giuseppe Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, 1888.

Die Eigenschaften der Fließkomma-Darstellung haben in der Praxis negative Konsequenzen, die meines erachtens *oft übersehen* seien. Zum Beispiel, die Menge der Zahlen

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

wäre *überhaupt nicht* darstellbar, wenn die Menge M affin durch einen großen Wert verschoben wird. Verschieben wir experimentell die Werte um 1×10^{20} unter IEEE-754 Double-Precision [IEEE, 1985], so erhalten wir genau die Menge

$$\begin{aligned} M' &= \{1 + 10^{20}, 2 + 10^{20}, 3 + 10^{20}, 4 + 10^{20}, 5 + 10^{20}\} \\ &= \{1 \times 10^{20}, 1 \times 10^{20}, 1 \times 10^{20}, 1 \times 10^{20}, 1 \times 10^{20}\}. \end{aligned}$$

Die eigentliche Schar-Dynamik der Daten ist gänzlich verschwunden bzw. nicht aufgelöst⁵⁵. Durch die Brille des Fließkomma-Formates sehen wir die o. g. Menge der verschiedenen Zahlen als eine einzige Zahl aus einer großen Entfernung. In anderen Worten, auch *rechnerisch* „sind unsere Augen fest mit dem Nullvektor gebunden“, das heißt, nur dort können wir die Zahlen in Fließkomma-Darstellung am schärfsten „sehen“. \square

Durch das *Zentrieren* der Datenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ergeben sich *mittelwertfreie Zeitreihe* (*zero-mean time series*) aller *Realisierungen*⁵⁶ (Spalten der Datenmatrix) in einer *zentrierten Matrix* $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Das Zentrieren ist in \mathbb{C}^n keine lineare Abbildung sondern eine Affine. Dennoch werden wir zeigen, daß sich diese *affine Abbildung* in \mathbb{C}^m als ein *linearer Operator* darstellen läßt.

Sei $m \times 1$ Vektor

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{m \times 1},$$

dann ist der Schwerpunktvektor der Matrix \mathbf{A}

$$\hat{\mu}_{\mathbf{A}} = \frac{1}{m} \left[\begin{array}{cccc} \sum_{i=1}^m a_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{in} \end{array} \right]_{1 \times n} = \frac{1}{m} \mathbf{1}^* \mathbf{A}. \quad (2.41)$$

⁵⁵Bei den Fließkomma-Zahlen, gilt

$$x + 1 = x$$

auch für eine überraschend kleine Zahl wie $x = 17000000$ in IEEE-754-Single-Precision [IEEE, 1985]. Dies läßt sich durch das einfache Programm `float.c` verifizieren. Solches Verhalten der Fließkomma-Zahlen ist „legal“ und ist generell *nicht* als *Exception* [Goldberg, 1991] aufgeworfen. Das bedeutet, die dadurch verursachten Fehler sind extrem schwierig zu lokalisieren, zu erheben, oder überhaupt merken zu können. (Siehe auch [Edelman, 1994].) Die o. a. Eigenschaften der Fließkomma-Zahlen fordern zusätzliche Aufmerksamkeit in den numerischen Verfahren, auch wenn die Daten bereits zentriert worden sind. Bei einer *unbekannten Schar-Dynamik* der Eingabedaten ist daher eine *lineare Skalierung* unentbehrlich vorzuprogrammieren, besonders wenn eine *Zentrierung* der Daten wegen Verlust der *Linearität* nicht erlaubt ist. Diese Anforderung für die Korrektheit hat bisher zu wenig Aufmerksamkeit gewonnen. Die Datei `basis33.c` zur Vervollständigung orthonormaler Basis demonstriert übrigens deutlich, wozu eine indifferente Mentalität diesbezüglich führen kann.

⁵⁶Instanzen aus einem *Ensemble* eines Stochastischen Prozesses.

Die zentrierte Matrix ist

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \frac{1}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^*\mathbf{A} = \left(\mathbf{I}_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^*\right)\mathbf{A} = \mathbf{Z}_m\mathbf{A}, \quad (2.42)$$

wobei $\mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{A}}$ von Rang 1 und die zentrierte Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ eine *Rang-1-Abwandlung* der Datenmatrix \mathbf{A} ist. Diese Rang-1-Abwandlung ist zwar nicht-linear in \mathbb{C}^n , lässt sich jedoch durch einen linearen Operator in \mathbb{C}^m darstellen.

Definition 2.4.3 (Zentrierender Operator). Die lineare Abbildung $\mathbf{Z}_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$

$$\mathbf{Z}_m = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^*\right) = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} m-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & m-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & m-1 \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (2.43)$$

heißt *zentrierender Operator* bzw. *zentrierende Matrix* für einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ oder eine Matrix in $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Die Matrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Z}_m\mathbf{A}$ ist also *spalten-zentriert*. Eine *zeilen-zentrierte* Matrix ist $\tilde{\mathbf{A}}' = \mathbf{A}\mathbf{Z}_n$. Wir bezeichnen ihn einfach mit \mathbf{Z} , wenn die Dimension aus dem Kontext im klaren sein soll. Mit $\tilde{\mathbf{A}}$ bezeichnen wir eine spalten-zentrierte $m \times n$ Datenmatrix \mathbf{A} mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Z}_m\mathbf{A}$.

Beispiel 2.4.4. Die *zentrierende Matrix* \mathbf{Z}_{10} in \mathbb{C}^{10} ist

$$\mathbf{Z}_{10} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 9 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Da das Zentrieren die *Idempotenz-Forderung* erfüllen muß, wie bei der Entfernung vom DC-Anteil in einem elektrischen Signal durch die idealen *Kondensatoren* der Fall ist, evaluieren wir \mathbf{Z}_m^2 des zentrierenden Operators \mathbf{Z}_m .

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_m^2 &= \left(\mathbf{I}_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^*\right)\left(\mathbf{I}_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^*\right) \\ &= \mathbf{I}_m - \frac{2}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^* + \frac{1}{m^2}(\mathbf{1}\mathbf{1}^*)^2 \\ &= \mathbf{I}_m - \frac{2}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^* + \frac{1}{m^2}(m\mathbf{1}\mathbf{1}^*) \\ &= \mathbf{I}_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^* \\ &= \mathbf{I}_m - \mathbf{u}\mathbf{u}^* \quad (\mathbf{u} = \mathbf{1}/\sqrt{m}, \quad \|\mathbf{u}\|_2 = 1) \\ &= \mathbf{Z}_m. \end{aligned} \quad (2.44)$$

\mathbf{Z}_m ist also in der Tat *idempotent* und gewiss *symmetrisch*, ergo ein *Orthoprojektor*. Da \mathbf{Z}_m ein *Projektor* ist, muß $\mathbf{I} - \mathbf{Z}_m = (1/m)\mathbf{1}\mathbf{1}^*$ der *komplementäre Projektor* sein. Da das Tensor-Produkt $[\mathbf{1}\ \mathbf{1}^*]$ vom Rang 1 ist, muß $\text{rank}(\mathbf{Z}_m) = m-1$. \mathbf{Z}_m ist also ein *Orthoprojektor* auf den $(m-1)$ -dimensionalen Eigenraum mit dem Eigenwert 1:

$$\mathcal{R}(\mathbf{Z}_m) = \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_m) = \mathcal{N}\left(\frac{1}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^*\right) = \text{span}\{\mathbf{1}\}^\perp, \quad (2.45)$$

entlang des 1-dimensionalen Kernes bzw. Eigenraumes vom Eigenwert 0:

$$\mathcal{N}(\mathbf{Z}_m) = \mathcal{R}(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_m) = \text{span}\{\mathbf{1}\}. \quad (2.46)$$

Der 1-dimensionale Teilraum $\text{span}\{\mathbf{1}_m\}$ von \mathbb{C}^n darf als der *DC-Teilraum* bzw. *Teilraum des Gleichstroms* interpretiert werden, und der $(m-1)$ -dimensionale Teilraum $\text{span}\{\mathbf{1}_m\}^\perp$ der *AC-Teilraum* bzw. *Teilraum des Wechselstroms*. Da \mathbf{Z}_m symmetrisch und positiv semidefinit ist und die Eigenwerte $\lambda_i(\mathbf{Z}_m) \in \{0, 1\}$, sind die Mengen der *Eigenwerte* und *Singulärwerte* identisch.

Wir fassen die Eigenschaften eines *zentrierenden Operators* \mathbf{Z}_m im folgenden Korollar zusammen.

Korollar 2.4.5 (Zentrierender Projektor). *Sei \mathbf{Z}_m ein zentrierender Operator in \mathbb{C}^m , dann*

1. $\mathbf{Z}_m^2 = \mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}_m^\dagger = \mathbf{Z}_m^*$ ist positive semidefinit,
2. $\text{rank } \mathbf{Z}_m = \text{tr } \mathbf{Z}_m = m - 1$,
3. $\mathcal{N}(\mathbf{Z}_m) = \mathcal{R}(\mathbf{I}_m - \mathbf{Z}_m) = \text{span}\{\mathbf{1}_m\}$,
4. Eigenwerte von \mathbf{Z}_m : $\{1, 1, 1, \dots, 1, 0\}$,
5. Singulärwerte von \mathbf{Z}_m : $\{1, 1, 1, \dots, 1, 0\}$,
6. Spektralnorm $\|\mathbf{Z}_m\|_2 = 1$.

Andererseits ist der *komplementäre Projektor* $\mathbf{I} - \mathbf{Z}_m = (1/m)\mathbf{1} \mathbf{1}^*$ als eine Projektion auf den 1-dimensionalen „DC-Teilraum“ anzusehen. Des Weiteren, wenn \mathbf{A} nur Zeilenvektoren enthält, die auf einem affinen Teilraum von \mathbb{C}^n mit Dimension kleiner als n liegen, wird das Zentrieren der Matrix \mathbf{A} den Rang um 1 reduzieren, d. h.,

$$\text{rank } \tilde{\mathbf{A}} = \text{rank } \mathbf{A} - 1. \quad (2.47)$$

Dies impliziert, daß eine *vollrangige* Datenmatrix \mathbf{A} eine *reguläre* Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}$ (§ 2.4.2) nicht gewährleistet.

Da der zentrierende Orthoprojektor \mathbf{Z}_m eine einfache Form Gl. (2.43) auf S. 32 besitzt, kann er die *Singulärwertzerlegung* in einer geschlossenen Form annehmen. Der Orthoprojektor \mathbf{Z}_m besitzt $m - 1$ -fach den Singulärwert von 1 und einfach den Singulärwert von 0. Die *beiden Singulärräume* sind nichts anderes als bloß der $(m - 1)$ -dimensionale AC-Teilraum, $\mathcal{R}(\mathbf{Z}_m) = \text{span}\{\mathbf{1}_m\}^\perp$, und der 1-dimensionale DC-Teilraum bzw. der Kern

$$\text{Ker } \mathbf{Z}_m = \text{span}\{\mathbf{1}_m\}.$$

Bei der Auswahl einer Basis für das orthogonale Komplement vom DC-Teilraum $\text{span}\{\mathbf{1}_m\}$ haben wir zwar eine große Freiheit, sie kann aber durch eine Householder-Spiegelung vom Vektor $\mathbf{1}_m$ auf eine Vielfachheit des Vektors \mathbf{e}_1 bestimmt werden. Diese Basis ergibt zusammen mit dem Vektor $\mathbf{1}_m/\sqrt{m}$ eine orthogonale und zugleich *symmetrische* Matrix für die linke und die rechte Singulärmatrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} . Das ist, \mathbf{U} und \mathbf{V} kann als derselbe *Orthoreflektor* ausgewählt werden, der den Vektor $1/\sqrt{m} [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ zu $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ spiegelt. Der *zentrierende Projektor* \mathbf{Z}_m kann also in die folgenden *Orthoreflektoren* in geschlossener Form zerlegt werden. Cf. § 2.1 ab S. 6, § 2.1.6 ab S. 11 und gmat.c - Z.

Bemerkung 2.4.6 (SVD eines zentrierenden Projektors). Sei \mathbf{Z}_m ein zentrierender Operator in \mathbb{C}^m , $m > 1$, dann ist (Cf. gmat.c -Z und -o)

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{1-m-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} & \frac{1}{1+\sqrt{m}} & \cdots & \frac{1}{1+\sqrt{m}} \\ 1 & \frac{1}{1+\sqrt{m}} & \frac{1-m-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} & \cdots & \frac{1}{1+\sqrt{m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{1+\sqrt{m}} & \frac{1}{1+\sqrt{m}} & \cdots & \frac{1-m-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} \end{bmatrix}$$

und

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

eine Singulärwertzerlegung $\mathbf{Z}_m = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^* = \mathbf{R}\Sigma\mathbf{R}^*$. Diese geschlossene Form ist zugleich die *Spektralzerlegung* von \mathbf{Z}_m .

Bemerkung 2.4.7 (SVD eines zentrierenden Projektors). Die im Korollar 2.4.6 ausgewählte Form der SVD eines zentrierenden Projektors erweist nicht nur den Vorteil der *Symmetrie* und einer *geschlossenen Form*, die die numerische Genauigkeit erhöht und den Rechenaufwand stark reduziert, sondern ermöglicht auch eine anschauliche Interpretation vom zentrierenden Projektor \mathbf{Z}_m . Die diagonale Matrix $\Sigma = \mathbf{P}_{\text{span}\{\mathbf{e}_1\}^\perp}$ ist in der Tat ein *Orthoprojektor*, der die eigentliche Aufgabe der „DC-Filterung“ ausführt — allerdings auf die *kanonische Form* aller Projektoren gleicher Art versetzt, d. i., entlang der Richtung $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$ auf das orthogonale Komplement $\text{span}\{\mathbf{e}_1\}^\perp$. Der rechte *Orthoreflektor* $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}$ ist dafür zuständig, die DC-Anteile des Signals im DC-Teilraum auf den Teilraum $\text{span}\{\mathbf{e}_1\}$ hin zu spiegeln, wo gerade der Kern des Projektors $\Sigma = \mathbf{P}_{\text{span}\{\mathbf{e}_1\}^\perp}$ ist. Da sich alle DC-Anteile nun im Kern des Projektors befinden, werden sie durch die Projektion nulliert. Übrig bleiben nun bloß die AC-Antile des Signals. Sie werden durch eine nochmalige Anwendung des Orthoreflektors \mathbf{R} an der linken Seite zurück gespiegelt. Das Gesamt-Produkt $\mathbf{Z}_m = \mathbf{R}\Sigma\mathbf{R}$ kann als ein orthogonaler *Raum-Zerleger* mit

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^m &= \text{DC-Teilraum} \oplus^\perp \text{AC-Teilraum} \\ &= \mathcal{R}(\mathbf{I}_m - \mathbf{Z}_m) \oplus^\perp \mathcal{R}(\mathbf{Z}_m) \\ &= \text{span}\{\mathbf{1}_m\} \oplus^\perp \text{span}\{\mathbf{1}_m\}^\perp \end{aligned} \quad (2.49)$$

angesehen werden. Cf. Abb. 2.2 auf S. 20. □

Bemerkung 2.4.8 (Zentrierender Projektor auf der Fourier-Basis). Der zentrierenden Projektor \mathbf{Z}_n lässt sich bezüglich der unitären Fourier-Basis wie folgt darstellen.

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{T}_{\mathfrak{F}} \Sigma \mathbf{T}_{\mathfrak{F}}^{-1}, \quad (2.50)$$

wobei Σ aus Gl. (2.48) auf S. 34, $\mathbf{T}_{\mathfrak{F}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die unitäre Fourier-Matrix⁵⁷ mit $\mathbf{T}_{\mathfrak{F}} = 1/\sqrt{n} [z^{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ und $z \in \mathbb{C}$ die primitive n -te Einheitswurzel mit

$z = \exp[2\pi i/n]$, $n > 0$ sind, d. i.

$$\mathbf{T}_{\mathfrak{F}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z & z^2 & \cdots & z^{n-1} \\ 1 & z^2 & z^4 & \cdots & z^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & z^{n-1} & z^{2(n-1)} & \cdots & z^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Hier treffen sich die „elektrotechnische“ und die linear algebraische Interpretationen des Begriffs „Spektrum“ problemlos in endlich dimensionalen Räumen. \square

Lemma 2.4.9 (Zentriertes Produkt der Matrizen). Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ spalten-zentriert, dann ist das Produkt \mathbf{AB} für alle Matrizen $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times p}$ spalten-zentriert. Ist \mathbf{A} zeilen-zentriert, so ist das Produkt \mathbf{BA} für alle Matrizen $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{p \times m}$ zeilen-zentriert.

Beweis. Sei $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times p}$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times p}$ und \mathbf{A} spalten-zentriert. Betrachten wir die j -te Spalte \mathbf{c}_j von \mathbf{C} , $j = 1, \dots, p$, so haben wir aus dem Product \mathbf{AB} das Element

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

welches nur mit der i -ten Zeile der Matrix \mathbf{A} und der j -ten Spalten der Matrix \mathbf{B} zu tun hat. Die Summe aller Elemente der j -ten Spalte von der Matrix \mathbf{C} ist

$$\sum_{i=1}^m c_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{kj} \sum_{i=1}^m a_{ik} = 0,$$

wobei $\sum_{i=1}^m a_{ik} = 0$ per Definition der Spalten-Zentriertheit der Matrix \mathbf{A} in Def. 2.4.1 auf S. 29. Das Gleiche gilt für eine zeilen-zentrierte \mathbf{A} und eine linke Multiplikation durch eine beliebige Matrix \mathbf{B} mit geeigneter Dimension. \square

Bemerkung 2.4.10 (Zentriertes Produkt der Matrizen). Lemma 2.4.9 gilt im allgemeinen nur für eine Multiplikation von der „richtigen“ Seite

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \text{ spalten-zentriert} &\implies \mathbf{AB} \text{ spalten-zentriert;} \\ \mathbf{A} \text{ zeilen-zentriert} &\implies \mathbf{BA} \text{ zeilen-zentriert.} \end{aligned}$$

Die Zentriertheit von \mathbf{A} ist nur hinreichend, aber *nicht notwendig* für die Zentriertheit von \mathbf{AB} bzw. \mathbf{BA} . Dennoch, ist Matrix \mathbf{B} *diagonale* und *vollrangig*, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} \text{ spalten-zentriert} &\implies \mathbf{A} \text{ spalten-zentriert;} \\ \mathbf{BA} \text{ zeilen-zentriert} &\implies \mathbf{A} \text{ zeilen-zentriert,} \end{aligned}$$

denn $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{ij} b_{jj}$, und $\sum_{i=1}^m c_{ij} = \sum_{i=1}^m a_{ij} b_{jj} = b_{jj} \sum_{i=1}^m a_{ij}$. Also, ist $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ spalten-zentriert und $\prod_{j=1}^n b_{jj} \neq 0$, so ist \mathbf{A} spalten-zentriert, bzw., ist die j -te Spalte von $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ zentriert und $b_{jj} \neq 0$ von der *diagonalen* Matrix \mathbf{B} , dann ist die j -te Spalte von \mathbf{A} zentriert. Wir sehen, daß der zentrierende Orthoprojektor \mathbf{Z}_m in Gl. (2.43) auf

⁵⁷Die Fourier-Matrix ist auch eine skalierte Vandermonde-Matrix des Vektors $[z^0 \ z^1 \ \dots \ z^{n-1}]$.

S. 32 sowohl spalten-zentriert als auch zeilen-zentriert ist. Unser Lemma stimmt mit der Erwartung überein, daß *eine zentrierte Matrix via Matrix-Produkt weitere zentrierte Matrizen zu Stande bringt*. Kann also irgendeine zentrierte Matrix die Rolle unseres *zentrierenden Operators* \mathbf{Z}_m übernehmen? Die Antwort ist gewiss nein, denn er muß auch noch die Bedingung der *Idempotenz* erfüllen. \square

Korollar 2.4.11 (SVD einer zentrierten Matrix). Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$ nach Gl. (2.23) auf S. 19, wobei \mathbf{U} subunitär, Σ diagonal und \mathbf{V} unitär sind:

- (a) Ist \mathbf{U} spalten-zentriert, $\mathbf{Z}_m\mathbf{U} = \mathbf{U}$, dann ist \mathbf{A} spalten-zentriert, $\mathbf{Z}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- (b) Ist \mathbf{A} vollrangig und spalten-zentriert mit $m > n$, dann ist \mathbf{U} spalten-zentriert.

Beweis. (a). Die Zentriertheit von \mathbf{A} folgt unmittelbar aus Lemma 2.4.9. (b). Da $\mathbf{AV} = \mathbf{U}\Sigma$, ist $\mathbf{U}\Sigma$ spalten-zentriert nach Lemma 2.4.9. Weil $\prod_{i=1}^n \sigma_i \neq 0$ und Σ diagonal ist, ist \mathbf{U} nach Bemerkung 2.4.10 spalten-zentriert, d. i., $\mathbf{Z}_m\mathbf{U} = \mathbf{U}$. \square

Bemerkung 2.4.12 (SVD einer zentrierten Matrix). Korollar 2.4.11 wurde nicht in der Form von Gl. (2.22) auf S. 19 ausgeführt, weil die Zentrierung einer unitären Matrix notwendigerweise den Rang genau um 1 fallen lässt. Wir können deswegen *nicht* von einer *unitären* und *zentrierten* Matrix sprechen. In anderen Worten, eine unitäre Matrix kann nicht zentriert sein, denn $\sum_{i=1}^n u_{ij} = 0, \forall j = 1, \dots, n$ führt direkt zum Widerspruch der linearen Abhängigkeit der Zeilen bzw. Spalten in der unitären Matrix $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ mit $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$. Dies ist um so deutlicher mit Hilfe unseres *zentrierenden Operators*, daß das Zentrieren einer quadratischen Matrix der Größe m ein Produkt von der Matrix mit \mathbf{Z}_m , welcher einen Rang von $m - 1$ besitzt, und das Produkt kann den *Rang* nicht größer als $m - 1$ haben. Die Bedingung $m > n$ ist deswegen in Korollar 2.4.11-(b) gestellt, weil *eine quadratische Matrix nicht zugleich vollrangig und zentriert sein kann. Falls eine vollrangige und quadratische Matrix zentriert wird, muß ihr Rang um 1 abfallen*. Infolgedessen haben wir einen verschwundenen *Singulärwert*. Die Zentriertheit des entsprechenden *linken Singulärvektors* ist also wegen des verschwundenen Singulärwertes *nicht* garantiert. Cf. Bemerkung 2.4.10 auf S. 35.

\square

2.4.2 Kovarianzmatrix via SVD

Die *Kovarianzmatrix* $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}$ der Matrix \mathbf{A} ⁵⁸ ist eine hermitesche, positiv semidefinite Matrix in $\mathbb{C}^{n \times n}$ mit

$$\mathbf{C}_{\mathbf{A}} = \frac{1}{m-1} \tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{a}}_i^* \tilde{\mathbf{a}}_i, \quad c_{ij} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{ki}^* \tilde{a}_{kj}, \quad (2.52)$$

⁵⁸auch *Varianz-Kovarianz-Matrix (variance-covariance matrix)* genannt. Sie wird bei manchen Autoren die *Gramsche Matrix* der zentrierten Matrix (Gramian of the mean-centered data matrix) genannt. Siehe z. B. [Hohn, 1973, pp. 452–454].

wobei \tilde{a}_{ij} ein Element die zentrierte Matrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Z}_m \mathbf{A}$ in Gl. (2.40) auf S. 28 ist. Sie kann einfach algebraisch wie in (2.52) gedacht oder mit ihrer stochastischen Herkunft mit betrachtet werden.

Die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_\mathbf{A}$ beinhaltet nämlich die Schätzwerte für die *Varianzen* und *Kovarianzen* der in der Datematrix Gl. (2.40) auf S. 28 als Spalten erschienenen Zeitreihen, d. h., Realisierungen des Zufallsvektors $\mathbf{p} = [p_1 \dots p_n]$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbb{E} [(\mathbf{p} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{p})^* (\mathbf{p} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{p})] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{E} [(p_1 - \mu_{p_1})^* (p_1 - \mu_{p_1})] & \cdots & \mathbb{E} [(p_1 - \mu_{p_1})^* (p_n - \mu_{p_n})] \\ \mathbb{E} [(p_2 - \mu_{p_2})^* (p_1 - \mu_{p_1})] & \cdots & \mathbb{E} [(p_2 - \mu_{p_2})^* (p_n - \mu_{p_n})] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E} [(p_n - \mu_{p_n})^* (p_1 - \mu_{p_1})] & \cdots & \mathbb{E} [(p_n - \mu_{p_n})^* (p_n - \mu_{p_n})] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_\mathbf{A}$ in Gl. (2.52) auf S. 36 gilt somit als *unverzerrte (erwartungstreue)* aber *inkonsistente* Schätzungen für die theoretische Kovarianzmatrix in Gl. (2.53) auf S. 37. Ersetzten wir in Gl. (2.52) auf S. 36 den Nenner $m - 1$ durch m , so erhalten wir eine *nicht-erwartungstreue (verzerrte)* aber *konsistente ML-Schätzung* der Varianzen und Kovarianzen. Dies ist in unseren Implementierungen leicht umschaltbar gemacht⁵⁹⁶⁰.

Sei die SVD der zentrierten Datenmatrix in $\mathbb{C}^{m \times n}$

$$\mathbf{Z}_m \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^*, \quad (2.54)$$

und die Kovarianzmatrix in $\mathbb{C}^{n \times n}$

$$\mathbf{C}_\mathbf{A} = \frac{1}{m} \tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\mathbf{A}}, \quad ^{61} \quad (2.55)$$

dann

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\mathbf{A} &= \frac{1}{m} \tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{m} (\tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^*)^* (\tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^*) \\ &= \frac{1}{m} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\Sigma}^2 \tilde{\mathbf{V}}^* \quad (\text{Spektralzerlegung}) \\ &= \frac{1}{m} (\tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^*)^* (\tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^*) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}^2 \tilde{\mathbf{v}}_i \tilde{\mathbf{v}}_i^*, \end{aligned} \quad (2.56)$$

wobei $\tilde{\mathbf{v}}_i$ die i -te Spalte der Matrix $\tilde{\mathbf{V}}$ und die Spektralzerlegung der Matrix $\mathbf{C}_\mathbf{A}$ mitenthalten ist mit Eigenwerten gleich der quadratischen Singulärwerte. Sei $\tilde{\mathbf{A}}$ vollranig. Die Inverse der Kovarianzmatrix ist

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\mathbf{A}^{-1} &= \left(\frac{1}{m} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\Sigma}^2 \tilde{\mathbf{V}}^* \right)^{-1} = m (\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\Sigma}^2 \tilde{\mathbf{V}}^*)^{-1} \\ &= m \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\Sigma}^{-2} \tilde{\mathbf{V}}^* \quad (\text{Spektralzerlegung}) \\ &= m (\tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}^*)^* (\tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}^*) = m \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} \tilde{\mathbf{v}}_i \tilde{\mathbf{v}}_i^*. \end{aligned} \quad (2.57)$$

⁵⁹Siehe `matstat.c -pB`, `m33.c -pB`, `hyper.c -pB`, ...

⁶⁰Der Nenner $m - 1$ anstatt m bei Varianzschatzung kann folgendermaßen ausgelegt werden: Da der im Schätzer benutzte Schätzmittelwert aus den m Einträgen der Beobachtungen bereits eine Schätzung ist, bleiben uns nur noch $m - 1$ Freiheitsgrade.

⁶¹Für kompakte Formulierung wird hier bei $\mathbf{C}_\mathbf{A}$ die Division durch m verwendet. Dies nennen wir die ML-Schätzung der Kovarianzmatrix. Ist m durch $m - 1$ ersetzt, so ergibt sich erwartungstreue Version der Kovarianzschätzung.

Daher sind die *Kovarianzmatrix* \mathbf{C}_A und ihre *Inversen* \mathbf{C}_A^{-1} aus der SVD der zentrierten Matrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Z}_m \mathbf{A}$ in den *Singulärwerten* und *rechten Singulärvektoren* bereits enthalten. Des Weiteren stellen die Singulärwerte in $\tilde{\Sigma}$ und die rechten Singulärvektoren in $\tilde{\mathbf{V}}$ die *Spektralzerlegung* der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\mathbf{A}}$ bereit zur Verfügung. Das heißt, die Matrix $\tilde{\mathbf{V}}$ enthält als Spalten die Basen für die Eigenräume der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\mathbf{A}}$. Vgl. Abb. 2.2 auf S. 20. Da $\mathbf{C}_A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert ist, ist sie *normal*, d.h., sie ist *vertauschbar* mit ihrer Adjungierten. Da eine Matrix in $\mathbb{C}^{n \times n}$ genau dann *unitär diagonalisierbar* ist, wenn sie *normal* ist, können wir immer eine *Orthonormalbasis* für \mathbf{C}_A finden, wo \mathbf{C}_A kanonisch eine diagonale Form annimmt.

In (2.56) und (2.57) haben wir die Muster-Kovarianzmatrix anhand der Singulärwertzerlegung der *zentrierten* Datenmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ ausgedrückt. Dies heißt praktisch, wenn die SVD der *zentrierten* Datenmatrix bereits berechnet ist, ist die Kovarianzmatrix sofort verfügbar und zwar nur von den *Singulärwerten* und die *rechten* Singulärvektoren abhängig. Oft haben wir allerdings nur die Singulärwertzerlegung der *nicht-zentrierten* Datenmatrix zur Verfügung.

Ist es möglich, daß wir die Kovarianzmatrix \mathbf{C}_A anhand der SVD der *nicht-zentrierten* Datenmatrix ausdrücken?

Die Antwort lautet: Ja, und zwar mit Hilfe unseres *zentrierenden Operators* \mathbf{Z} aus § 2.4.1 ab S. 29. Sei die SVD einer *nicht-zentrierten* Datenmatrix $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_A &= \frac{1}{m}(\mathbf{Z}\mathbf{A})^*(\mathbf{Z}\mathbf{A}) = \frac{1}{m}\mathbf{A}^*\mathbf{Z}\mathbf{A} \quad (\mathbf{Z} \text{ Orthoprojektor}) \\ &= \frac{1}{m}\mathbf{V}\Sigma(\mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{U})\Sigma\mathbf{V}^* = \frac{1}{m}\mathbf{V}\Sigma(\mathbf{Z}\mathbf{U})^*(\mathbf{Z}\mathbf{U})\Sigma\mathbf{V}^* \\ &= \mathbf{V}\Sigma\mathbf{C}_U\Sigma\mathbf{V}^*, \quad \text{wobei } \mathbf{C}_U = \frac{1}{m}(\mathbf{Z}\mathbf{U})^*(\mathbf{Z}\mathbf{U}). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Zur „Korrektur“ brauchen wir also die Muster-Kovarianzmatrix \mathbf{C}_U des linken Singulärfaktors \mathbf{U} im Vergleich mit Gl. (2.56) auf S. 37. In anderen Worten, die *Unzentriertheit* der Datenmatrix macht die Kovarianz auch vom linken Singulärfaktor \mathbf{U} abhängig und die Zentrierung wird bei \mathbf{U} nachträglich ausgeführt. Bei der Überlegung vom Rang der Kovarianz sei darauf geachtet, daß \mathbf{C}_U nicht definitiv *regulär* ist, obgleich \mathbf{U} subunitär ist. Über den möglichen *Rangabfall* von \mathbf{C}_U haben wir in § 2.4.1 ab S. 29 diskutiert. Sei $\tilde{\mathbf{A}}$ vollständig, so haben wir aus (2.58)

$$\mathbf{C}_A^{-1} = m[(\mathbf{Z}\mathbf{A})^*(\mathbf{Z}\mathbf{A})]^{-1} = \mathbf{V}(\Sigma\mathbf{C}_U\Sigma)^{-1}\mathbf{V}^*. \quad (2.59)$$

2.4.3 Mahalanobis-Distanz via SVD

Nicht nur ist die Kovarianzmatrix bereits in der SVD der zentrierten Matrix vorhanden, sondern auch die Mahalanobis-Distanzen.

Beobachtung 2.4.13 (Eigenbasis). Sei Datenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und die SVD der zentrierten Matrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Z}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^*$. Seien $\mathbf{a}_i, \tilde{\mathbf{a}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_i$ die Zeilenvektoren von $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}$ und $\tilde{\mathbf{U}}$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^* = \tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^*) = (\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma})\tilde{\mathbf{V}}^* \\ \tilde{\mathbf{U}} &= \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^*)^{-1}, \quad (\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma}) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{V}} \\ \tilde{\mathbf{a}}_i &= \mathbf{a}_i - \hat{\mu}_A = \tilde{\mathbf{u}}_i(\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^*) \\ \tilde{\mathbf{u}}_i &= \tilde{\mathbf{a}}_i(\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^*)^{-1} = (\mathbf{a}_i - \hat{\mu}_A)(\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^*)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

sowie Gl. (2.56) auf S. 37 und Gl. (2.57) auf S. 37.

Wir bezeichnen mit $d_M(\mathbf{a}_i, \hat{\mu}_{\mathbf{A}})$ die *Mahalanobis-Distanz* zwischen dem Zeilenvektor \mathbf{a}_i und dem Schwerpunkt $\hat{\mu}_{\mathbf{A}}$ bezüglich der Menge $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ aus der Datenmatrix Gl. (2.40) auf S. 28. Sei das Produkt \mathbf{ZA} vollständig, so erhalten wir durch Generalisierung des *metrischen Tensors* $\mathbf{G} = \mathbf{C}_{\mathbf{A}}^{-1}$ die *quadratische Mahalanobis-Distanz*

$$\begin{aligned} d_M(\mathbf{a}_i, \hat{\mu}_{\mathbf{A}})^2 &= (\mathbf{a}_i - \hat{\mu}_{\mathbf{A}})\mathbf{G}(\mathbf{a}_i - \hat{\mu}_{\mathbf{A}})^* \\ &= (\mathbf{a}_i - \hat{\mu}_{\mathbf{A}})\mathbf{C}_{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{a}_i - \hat{\mu}_{\mathbf{A}})^* \\ &= \tilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{C}_{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_i^* \\ &= (\tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^*) \mathbf{C}_{\mathbf{A}}^{-1} (\tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^*)^* \\ &= m \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i^*. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Bezeichnen wir mit $d_M(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ die Distanz zwischen dem Vektor \mathbf{a}_i und \mathbf{a}_j unter der *Mahalanobis-Metrik*⁶² bezüglich der Menge $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, so haben wir die quadratische *Mahalanobis-Distanz*

$$\begin{aligned} d_M(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)^2 &= (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)\mathbf{G}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)^* \\ &= (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)\mathbf{C}_{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)^* \\ &= m(\tilde{\mathbf{u}}_i - \tilde{\mathbf{u}}_j)(\tilde{\mathbf{u}}_i - \tilde{\mathbf{u}}_j)^*. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Damit haben wir gesehen, wie die Mahalanobis-Distanzen der Zeilenvektoren \mathbf{a}_i von \mathbf{A} in Gl. (2.40) auf S. 28 bereits in der Matrix $\tilde{\mathbf{U}}$ vorhanden sind, falls die SVD der zentrierten Matrix $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^*$ gegeben sei.

Bemerkung 2.4.14. Wir haben die Mahalanobis-Distanz zugunsten höherer Generalität in \mathbb{C}^n definieren können, weil die quadratische Form mit einem komplexen Vektor reell ist.

„Eigentlich“ sind die Zeilenvektoren $\tilde{\mathbf{u}}_i (i = 1, \dots, m)$ in $\tilde{\mathbf{U}}$ nichts anderes als die originalen Zeilenvektoren $\tilde{\mathbf{a}}_i (i = 1, \dots, m)$ in der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ bezüglich der „guten“ Basis, die durch $\tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^*$ (Regulärität angenommen) gegeben ist. Das ist, die Basisvektoren $\sigma_j \tilde{\mathbf{v}}_j (j = 1, \dots, n)$ konstruieren genau die *Eigenbasis* mit der durch entsprechenden Singulärwert gegebenen Skalierung. Die Singulärwerte sind die Längen der Semiachsen des modellierenden Ellipsoids wie bereits in (2.60), Beobachtung 2.4.13 (S. 38) dargestellt worden ist.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Distanzen davon unabhängig sind, ob die SVD sortiert⁶³ ist oder nicht. Aber eine Sortierung vertauscht die originalen Koordinaten der Punkte in \mathbf{A} und $\tilde{\mathbf{A}}$, wenn wir die Zeilenvektoren \mathbf{a}_i bzw. $\tilde{\mathbf{a}}_i$ als Punkte im n -Raum betrachten. Die meisten SVD-Routinen liefern eine unsortierte Version der Zerlegung zurück. Desweiteren merken wir uns, daß die Mahalanobis-Metrik abhängig ist von der Kovarianzmatrix in Gl. (2.52) auf S. 36. Daher gibt es in der Praxis zwei Versionen der Mahalanobis-Metrik — die eine mit erwartungstreuer aber inkonsistenter und die andere mit verzerrter aber konsistenter Kovarianzschätzung. Solche Variation sind auch in unseren Implementierungen leicht umschaltbar gemacht.

⁶²Da der *Kern* bzw. das *Radikal* der Bilinearform im generellen nicht der Nullvektor ist, also kein linearer Teilraum, sprechen wir von der *Mahalanobis-Metrik* nur im *Tangentialraum* lokal zum Mittelwertvektor. Andererseits können wir die Mahalanobis-Metrik als eine *affine Struktur* über einem *linearen Raum* betrachten.

⁶³Mit Sortierung der SVD meinen wir eine Sortierung nach den Singulärwerten (in \mathbb{R}) in abnehmender Reihenfolge, wobei sowohl die assoziierten linken als auch die rechten Singulärktoren mitsortiert werden.

Wir kehren an dieser Stelle zurück zur Frage auf Seite 28: „Wie sind \mathbf{U} , Σ und \mathbf{V} zu interpretieren, wenn die zu zerlegende Matrix \mathbf{A} Meßdaten enthält?“. Die Antwort lautet, kurz gefasst:

Die Singulärwertzerlegung transformiert die Daten in den euklidischen Raum mit Mahalanobis-Metrik und präsentiert als linke Singulärvektoren die transformierten Daten, als Singulärwerte die Varianzen der entkoppelten Daten, und als rechte Singulärvektoren die Basis.

Wir bringen nun wie folgt die Begriffe SVD, Kovarianz, Eigenanalyse, und Mahalanobis-Metrik in Verbindung, während wir noch einmal der Beobachtung 2.60 (S. 38) einen Blick werfen.

SVD, Mahalanobis–Metrik und Gaußsche Verbunddichte

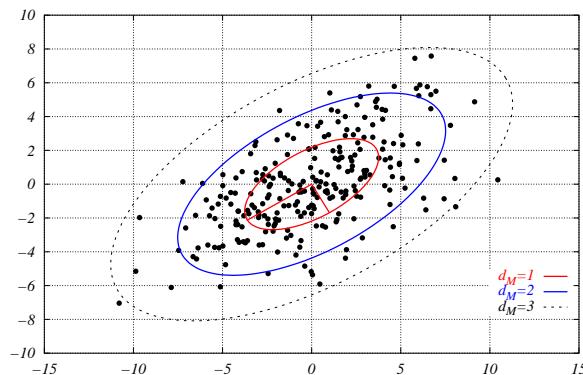


Abbildung 2.5: SVD, Mahalanobis-Metrik und Gaußsche Verbunddichte sind eng mit einander verkoppelt. Hier wird die *Form* des euklidischen Raumes durch die konzentrischen Ellipsoide angedeutet. Die Skalaren sind 1-, 2- und 3-Mal die *entkoppelten Standardabweichung* und die *Singulärwerte* sind genau \sqrt{m} -Mal die maximierten Standardabweichungen.

Gegeben sei die SVD der zentrierten Datenmatrix aus Gl. (2.54) auf S. 37 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Z}_m \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^*$.

1. Die SVD schätzt die Kovarianzmatrix und inverse Kovarianzmatrix jeweils als $(1/m)\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\Sigma}^2\tilde{\mathbf{V}}^*$ und $m\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\Sigma}^{-2}\tilde{\mathbf{V}}^*$ in Gl. (2.56) auf S. 37 und Gl. (2.57) auf S. 37.
2. Die SVD dekorreliert dann die n Zufallsvariablen bzw. die n Kanäle der Meßdaten, indem sie die geschätzte Kovarianzmatrix diagonalisiert. Diese Dekorrelation erfolgt durch eine unitäre Transformation $\tilde{\mathbf{V}}$. In anderen Worten, die SVD *weißt (whitens)* die Daten in $\tilde{\mathbf{A}}$ auf $\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma}$, so daß die Spalten in $\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma}$ auseinander entkoppelt sind. Die Kovarianzen zwischen den neuen Variablen sind verschwunden und die Singulärwerte haben nun eine Interpretation von Standardabweichungen des unitär transformierten

Zufallsvektor bis auf einen Faktor \sqrt{m} :⁶⁴

$$\begin{cases} \sigma_i = \sqrt{m} \times \text{Standardabweichung}(p_i), \\ \sigma_i^2 = m \times \text{Varianz}(p_i), \end{cases} \quad (2.63)$$

wobei $p_i (i = 1, \dots, n)$ die Zufallsvariablen aus Punkt 3 auf S. 29.

3. Die obengenannten transformierten Daten sind als Zeilenvektoren der Matrix $\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma}$ präsentiert, d. h., die Zeilenvektoren

$$[\sigma_1 u_{i1}, \sigma_2 u_{i2}, \dots, \sigma_n u_{in}] \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.64)$$

4. Die entkoppelten und standardisierten Daten sind als Zeilenvektoren der Matrix $\tilde{\mathbf{U}}$ präsentiert. Der Vektor $\tilde{\mathbf{u}}$ sind also die in der Statistik sogenannten standardisierten Zufallsvektor, der eine Einheitsvarianz besitzt. Die Koordinaten sind nun $\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^*$ und die Vektoren $\tilde{\mathbf{u}}_i$ erhalten somit eine Einheit bzw. Skala von einer Standardabweichung. Die Zufallsvektoren $\tilde{\mathbf{u}}_i$ sind nun nämlich unter der Basis $\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^*$ hypersphärisch verteilt.
5. Die Mahalanobis-Distanzen sind explizit in $\tilde{\mathbf{U}}$ durch die SVD präsentiert. Sie sind nach Gl. (2.61) auf S. 39 und Gl. (2.62) auf S. 39 aus $\tilde{\mathbf{U}}$ unmittelbar zu erhalten. Dies ermöglicht die viel bequemere Interpretation der Mahalanobis-Distanz wie folgt. Die quadratische Mahalanobis-Distanz ist nichts anderes als die übliche Distanz der originalen Daten $\tilde{\mathbf{a}}_i$ bzw. \mathbf{a}_i zum Schwerpunkt $\hat{\mu}_{\mathbf{A}}$ unter der standardisierten Eigenbasis $(1/\sqrt{m})\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^*$.

2.4.4 Kovarianz, Mahalanobis-Metrik und Gaußverteilung

Wie bereits in Gl. (2.53) auf S. 37 definiert weist der Begriff *Kovarianzmatrix* einen stochastischen Charakter auf. Wir untersuchen nun die Zusammenhänge unter Kovarianzmatrix, Mahalanobis-Metrik, SVD, und die wichtigste Verteilung – Gaußverteilung. Wir verdeutlichen,

1. wie das Exponentialteil der Gaußverteilung, $(x - \mu)/\sigma$ in Gl. (2.67) auf S. 43 eigentlich als Mahalanobis-Distanz zu verstehen ist;
2. wie die Mahalanobis-Distanz die invariante „Einheit“ der Standardabweichung gewinnt;
3. wie die SVD als Schätzer für die n -dimensionale Gaußsche Verbunddichtefunktion anzuwenden ist.

⁶⁴ Wir haben deswegen das Symbol σ sowohl statistisch für die Varianz als auch algebraisch für die Singulärwerte einer SVD verwendet, weil die quadratischen Singulärwerte bis auf einen Faktor m genau die Varianzen sind von den transformierten Daten. Sei unsortierte SVD $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma})\tilde{\mathbf{V}}^*$, dann die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}'$ der transformierten Daten bezüglich der Basis $\tilde{\mathbf{V}}$ ist

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{A}}' &= (1/m)(\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma})^*(\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma}) \\ &= (1/m)\tilde{\Sigma}(\tilde{\mathbf{U}}^*\tilde{\mathbf{U}})\tilde{\Sigma} = (1/m)\tilde{\Sigma}^2 \\ &= \text{diag}(\sigma_1^2/m, \sigma_2^2/m, \dots, \sigma_n^2/m). \end{aligned}$$

Die o. g. Punkte werden auf einmal deutlich, wenn wir die Dichtefunktion in n -dimensionalen Raum anschauen.⁶⁵

Ein stochastischer Prozess $\mathbf{x}(t)$ heißt Gaußsch, wenn die Zufallsvariablen $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_k)$ für jede $k \in \mathbb{N}$ und alle Mengen $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ verbund-Gaußsch verteilt ist [Lathi, 1968, p. 205].

Wir wählen $k = n$ für eine Menge von n Abtastungen der Musterfunktion $x(\zeta, t)$ zu den Zeitpunkten $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ und wiederholen m Male das Experiment des Gaußschen Prozesses. So, erhalten wir eine $m \times n$ Datemmatrix \mathbf{A} in Gl. (2.40) auf S. 28, wobei jede Zeile $x(\zeta_i, t_j), j = 1, \dots, n$ eine Musterfunktion von ζ_i zu den Zeiten $\{t_1, \dots, t_n\}$ abtastet und jede Spalte $x(\zeta_i, t_j), i = 1, \dots, m$ Beobachtungen zu dem festen Zeitpunkt t_j verschiedenen Musterfunktionen darstellen⁶⁶

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x(\zeta_1, t_1) & x(\zeta_1, t_2) & \cdots & x(\zeta_1, t_n) \\ x(\zeta_2, t_1) & x(\zeta_2, t_2) & \cdots & x(\zeta_2, t_n) \\ x(\zeta_3, t_1) & x(\zeta_3, t_2) & \cdots & x(\zeta_3, t_n) \\ x(\zeta_4, t_1) & x(\zeta_4, t_2) & \cdots & x(\zeta_4, t_n) \\ x(\zeta_5, t_1) & x(\zeta_5, t_2) & \cdots & x(\zeta_5, t_n) \\ x(\zeta_6, t_1) & x(\zeta_6, t_2) & \cdots & x(\zeta_6, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(\zeta_m, t_1) & x(\zeta_m, t_2) & \cdots & x(\zeta_m, t_n) \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_6 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Sei Zufallsvektor $\mathbf{x} = \mathbf{a}_i^T$ aus Gl. (2.40) auf S. 28, mit *Verbundgaußverteilung*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$$

dann lässt sich der Gaußsche Prozeß vollständig durch den Mittelvektor $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}$ und die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}$ in Gl. (2.52) auf S. 36 und Gl. (2.53) auf S. 37 beschreiben, ob der Gaußsche Prozeß *stationär* oder nicht [Lathi, 1968, p. 206]. Die multivariate Verbunddichte $f(\mathbf{x})$ lässt sich bezüglich des Zufallsvektors \mathbf{x} , der theoretischen Kovarianzmatrix \mathbf{C} Gl. (2.53) auf S. 37 und des Mittelwertvektors $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \mathbf{C}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \right] \\ &= \left(\frac{\det \mathbf{C}^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \right] \\ &= \sqrt{\frac{\det \mathbf{C}^{-1}}{(2\pi)^n}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \right] \\ &= \sqrt{\frac{\det \mathbf{C}^{-1}}{(2\pi)^n}} \exp \left[-\frac{1}{2} d_M^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \right], \end{aligned} \quad (2.66)$$

mit

$$\iint \cdots \int_{\mathbb{C}^n} f(\mathbf{x}) = 1,$$

⁶⁵[Lathi, 1968, p. 110, p. 147 (2-135), p. 151 (2-140), pp. 205–207 Gaussian Random Process]

⁶⁶Ähnlich wie das Bild in [Lathi, 1968, Fig. 3-1, p. 160]

wobei μ_x der Mittelwertvektor und C die theoretische Kovarianzmatrix sind. Man merke, daß die Form der quadratischen Mahalanobis Distanze erscheint im exponentiellen Teil der Dichtekunktion $f(x)$ in Gl. (2.66) auf S. 42. Die beiden in Gl. (2.66) auf S. 42 (ind gleich, da $\det^{-1} C_A = \det C_A^{-1}$, wenn C_A regulär ist. Ersetzen wir C_A durch σ^2 , μ_x durch μ in Gl. (2.66) auf S. 42 für 1-dimensionalen Fall, so erhalten wir die auf der 10-Mark-Banknote sehr schön gedruckte Kurve von Carl Friederich Gauß (1777-1855)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (2.67)$$

Sei die SVD der zentrierten Matrix aus Gl. (2.54) auf S. 37

$$\tilde{A} = Z_m A = \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^*, \quad (2.54)$$

dann ist die Determinante der geschätzten Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned} \det C_A &= \det \left(\frac{1}{m-1} \tilde{V} \tilde{\Sigma}^2 \tilde{V}^* \right) \\ &= \left(\frac{1}{m-1} \right)^n \det(\tilde{V}) \det(\tilde{\Sigma}^2) \det(\tilde{V}^*) \\ &= \left(\frac{1}{m-1} \right)^n (\det \tilde{\Sigma})^2, \end{aligned}$$

und

$$\det(C_A^{-1}) = (\det C_A)^{-1} = (m-1)^n (\det \tilde{\Sigma})^{-2}. \quad (2.68)$$

Somit wird die geschätzte Gaußsche Verbunddichte von Gl. (2.66) auf S. 42 bezüglich der SVD Gl. (2.54) auf S. 37

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \sqrt{\frac{\det C_A^{-1}}{(2\pi)^n}} \exp \left[-\frac{1}{2} d_M^2(x, \hat{\mu}_x) \right] \\ &= \sqrt{\frac{(m-1)^n (\det \tilde{\Sigma})^{-2}}{(2\pi)^n}} \exp \left[-\frac{1}{2} d_M^2(x, \hat{\mu}_x) \right] \\ &= \frac{1}{\det \tilde{\Sigma}} \left(\frac{2\pi}{m-1} \right)^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2} d_M^2(x, \hat{\mu}_x) \right] \\ &= \frac{1}{\det \tilde{\Sigma}} \left(\frac{2\pi}{m-1} \right)^{-n/2} \exp \left[-\frac{m-1}{2} (x - \hat{\mu}_x)^* \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-2} \tilde{V}^* (x - \hat{\mu}_x) \right]. \quad (2.69) \end{aligned}$$

(2.69) ist eine allgemeine Form der geschätzten Gaußschen Verbunddichte bezüglich beliebigen Zufallsvektors x . Wir haben die geschätzte Dichte $f(x)$ allerdings bereits an den m Punkten a_i der Datenmatrix A evaluiert, falls Gl. (2.54) auf S. 37 berechnet worden ist. Aus Gl. (2.61) auf S. 39 ergibt

$$\begin{aligned} \hat{f}(a_i) &= \frac{1}{\det \tilde{\Sigma}} \sqrt{\left(\frac{m-1}{2\pi} \right)^n} \exp \left[-\frac{1}{2} d_M^2(a_i, \hat{\mu}_A) \right] \\ &= \frac{1}{\det \tilde{\Sigma}} \sqrt{\left(\frac{m-1}{2\pi} \right)^n} \exp \left[-\frac{1}{2} (m-1) \tilde{u}_i \tilde{u}_i^* \right] \\ &= \frac{1}{\det \tilde{\Sigma}} \left(\frac{2\pi}{m-1} \right)^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (m-1) \tilde{u}_i \tilde{u}_i^* \right]. \quad (2.70) \end{aligned}$$

Seien s_1, \dots, s_n die Standardabweichungen der entkoppelten Zufallsvariablen, d. h., der Spalten der Matrix $\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma}$. Da $\sigma_i = \sqrt{m-1}s_i$ aus Gl. (2.63) auf S. 41, wobei σ_i Singulärwerte aus $\tilde{\Sigma}$ sind, dann läßt sich (2.70) wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\mathbf{a}_i) &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^n s_i^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2}(m-1) \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i^* \right] \\ &= \left(\prod_{i=1}^n s_i \sqrt{2\pi} \right)^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2}(m-1) \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i^* \right].\end{aligned}\quad (2.71)$$

2.4.5 Regularisierte Mahalanobis-Distanz via SVD

Die *Mahalanobis-Distanz* $d_M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ ist eine *quadratische Form* $\mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x} - \mathbf{y})^* \mathbf{G} (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.72)$$

wobei der *metrische Tensor* \mathbf{G} der inversen Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}^{-1}$ entnommen ist, bezüglich einer bestimmten Menge der Vektoren in \mathbb{C}^n . Es läßt sich ohne weiteres zeigen, daß solche den Axiomen einer Metrik⁶⁷ genügt. Wir sprechen von einer *Mahalanobis-Metrik*⁶⁸.

Diese Definition der *Mahalanobis-Metrik* setzt selbstverständlich die Invertierbarkeit der Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}$ voraus. In der Praxis kann es oft passieren, daß die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}$ in Gl. (2.52) auf S. 36 singulär wird, wenn die Datenmatrix \mathbf{A} in Gl. (2.40) auf S. 28 rang-defizient ist. *Selbst wenn die Datenmatrix \mathbf{A} vollständig ist, kann die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}$ sogar nach Gl. (2.47) auf S. 33 in § 2.4.1 singulär sein, wenn alle Zeilenvektoren \mathbf{a}_i genau auf einem affinen Teilraum der Dimension kleiner als n liegen.* Des Weiteren ist nicht nur die Singularität der Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}$ das einzige Problem, sondern auch die *Kondition* $\kappa_p(\mathbf{C}_{\mathbf{A}})$ der zu invertierenden Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}$ eine wichtige Rolle in der numerischen Praxis spielt. Die Invertierung schlecht-konditionierter Matrizen führt oft zu numerischer Instabilität. Im extremen Falle begegnet man z. B. einer Matrix wie die folgen-

⁶⁷ Sei M eine Menge. Eine *Metrik* auf M ist eine Abbildung $d : M \times M \mapsto \mathbb{R}_+$, so daß für alle $x, y \in M$, gilt

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Positiv-Definitheit),
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).

Ein linearer Raum mit einer Metrik heißt *metrischer Raum*. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge kovergent ist.

⁶⁸ Ein linearer Raum \mathcal{V} mit einem Funktional $\|\mathbf{x}\|$ heißt *normierter Raum*, wenn für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$,
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Eine Überführung vom normierten Raum zum Raum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) ist durch *Polarisierung* möglich. Sei \mathbf{x}, \mathbf{y} im linearen Raum mit $\|\cdot\|$ über \mathbb{K} , dann gilt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1/4(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ 1/4(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + i\|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2 - i\|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2) & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}. \quad (2.73)$$

de 8×8 symmetrische, singuläre Rosser'sche Matrix vom Rang 7 [Rosser et al., 1951]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 611 & 196 & -192 & 407 & -8 & -52 & -49 & 29 \\ 196 & 899 & 113 & -192 & -71 & -43 & -8 & -44 \\ -192 & 117 & 900 & 196 & 61 & 49 & 8 & 52 \\ 407 & -192 & 196 & 611 & 8 & 44 & 59 & -23 \\ -8 & -71 & 61 & 8 & 411 & -599 & 208 & 208 \\ -52 & -43 & 49 & 44 & -599 & 411 & 208 & 208 \\ -49 & -8 & 8 & 59 & 208 & 208 & 99 & -911 \\ 29 & -44 & 52 & -23 & 208 & 208 & -911 & 99 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Der Autor kennt keine einzige Routine (bis auf SVD) fürs Invertieren, die die Singularität der Matrix detektiert (unter Standard-Gleitkommazahlen der üblichen Präzision „IEEE-754 double“ [IEEE, 1985])⁶⁹.

Die Aufgabe, Mahalanobis-Distanz zu berechnen, wird in solchen Fällen *inkorrekt* bzw. *schlecht-gestellt* [Hadamard, 1923]. Wir suchen also eine robustere Erweiterung der Mahalanobis-Distanz, die den Schwierigkeiten:

1. die Mahalanobis-Distanz ist nicht erklärt im Falle einer singulären Kovarianzmatrix, und
2. die Berechnung der Mahalanobis-Distanz kann bei schlecht-konditionierten Kovarianzmatrizen numerisch instabil sein,

umgeht. Wie wir sehen werden, die Antwort beinhaltet die Singulärwertzerlegung als der Schlüssel zur Lösung.

Die Gewinnung des metrischen Tensors \mathbf{G} in Gl. (2.61) auf S. 39 und Gl. (2.62) auf S. 39 durch *Invertierung* der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_A verläßt sich auf die *Spektraleigenschaft* [Ben-Israel und Greville, 1974, pp. 166–169] [Campbell und Meyer, 1979, p. 74] der Matrizeninversion. Das bedeutet: sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert und $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor der quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so gilt

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \iff \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}. \quad (2.75)$$

Diese Eigenschaft garantiert im übrigen die Erhaltung der *Positiv-Definitheit* der Matrix \mathbf{A} , wenn sie so ist, was man für eine *Metrik* braucht.

Für *singuläre* quadratische Matrizen \mathbf{A} suchen wir nun eine eindeutige, generalisierte Inverse, die diese Spektraleigenschaft Gl. (2.75) auf S. 45 besitzt. Sie sind als *Spektral inversen* bezeichnet [Rao und Mitra, 1971] [Boullion und Odell, 1971, p. 20] [Ben-Israel und Greville, 1974, pp. 159–161] [Campbell und Meyer, 1979].

Die einem sofort einfallende, und eindeutige Moore-Penrose-Inverse \mathbf{A}^\dagger jedoch erfüllt im allgemeinen die Gl. (2.75) auf S. 45 nicht. Die *Gruppeninverse* $\mathbf{A}^\#$ ⁷⁰ erfüllt zwar diese Bedingung, aber sie existiert nur wenn $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ komplementäre Teilräume sind.

⁶⁹Dieses Beispiel ist hier angeführt, um die Nicht-Trivialität der numerischen Realisierungen zu betonen. Alle, die dran zweifeln, sollten sich trotz des durchaus harmlosen Aussehens einmal die Inverse oder die Determinante der Matrix berechnen lassen. Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß lockere Implementierung und Kontrolle sowie indifferente Mentalität diesgegenüber zu Katastrophen führen können. Der Absturz der europäischen Rakete, Ariane 5, am 4. Juni, 1996 fing mit einem Konvertierungsproblem von 64-Bit-Gleitkommazahlen auf 16-Bit-Integer an und endete mit ratloser Zündung der Selbstvernichtung. [Lions, 1996] [Le Lann, 1997].

⁷⁰[Ben-Israel und Greville, 1974, pp. 162–164, 166–169] [Campbell und Meyer, 1979, p. 129]

Uns bleibt nur noch die eindeutige *Drazin-Inverse* \mathbf{A}^D ⁷¹, bzw. „vertauschbare Pseudoinverse“ (commuting inverse)⁷², die bei allen Matrizen existiert und die Spektraleigenschaft Gl. (2.75) auf S. 45 aufweist⁷³. Glücklicherweise ist unsere Anwendung der *Drazin-Inverse* auf die *selbstadjungierten* Matrizen eingeschränkt. Die Matrizen dieser Kategorie fallen in die Klasse von den sogenannten EP-Matrizen. Und bei den EP-Matrizen fallen die Moore-Penrose-Inverse, die Gruppeninversen und die Drazin-Inverse⁷⁴ zusammen. [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 164, Theorem 3] Wir können also in unserer Aufgabe die Moore-Penrose-Inverse das Problem lösen, denn sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, \mathbf{A} ist genau dann EP, wenn⁷⁵

$$(\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff \mathbf{A}^\dagger\mathbf{x} = \lambda^\dagger\mathbf{x}). \quad (2.76)$$

Hinzu kommt, daß sich die Moore-Penrose-Inverse durch die SVD berechnen läßt, wobei eine Regularisierung der schlechten Kondition der Inversion äußerst günstig vorzunehmen ist.

Definition 2.4.15 (Regularisierte Mahalanobis-Distanz). Wir definieren die *regularisierte Mahalanobis-Distanz* $'d_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ bezüglich einer bestimmten Menge der Vektoren in \mathbb{C}^n durch

$$'d_M^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^* \mathbf{C}_\mathbf{A}^\dagger (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = m \cdot {}_t\tilde{\mathbf{u}}_i \cdot {}_t\tilde{\mathbf{u}}_j^*, \quad (2.77)$$

wobei die Regularisierung operativ in der Berechnung der Moore-Penrose-Inversen enthalten ist, wie bereits in § 2.4.2 diskutiert worden ist. (Cf. schur2.c -pm, matstat.c -mpB und mahr.m)

Die Zeilenvektoren ${}_t\tilde{\mathbf{u}}_i$ und ${}_t\tilde{\mathbf{u}}_j$ in Gl. (2.77) auf S. 46 sind dieselben aus Gl. (2.62) auf S. 39 in § 2.4.3 bis auf einen adjustierbaren numerischen Rang r , ab den die SVD abgeschnitten wird und die entsprechenden Singulärvektoren (ergo Komponenten in ${}_t\tilde{\mathbf{u}}_i$) auf Null gesetzt werden. Für die regularisierte Mahalanobis-Distanz zwischen einem Vektor \mathbf{a}_i und dem Schwerpunkt $\hat{\mu}_\mathbf{A}$ heißt das aus Gl. (2.61) auf S. 39

$$'d_M^2(\mathbf{a}_i, \hat{\mu}_\mathbf{A}) = m \cdot {}_t\tilde{\mathbf{u}}_i \cdot {}_t\tilde{\mathbf{u}}_i^* = m \sum_{j=1}^r \tilde{u}_{ij}^2. \quad (2.78)$$

Wir wollen nun die Plausibilität der regularisierten Mahalanobis-Distanz in Gl. (2.77) auf S. 46 im pathologischen Falle inspeziern, wenn die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_\mathbf{A}$ singulär wäre. Dies ist gerade bei uns interessant, denn ein *Hyperkreis* (Def. 2.4.17 auf S. 49) in \mathcal{U}^n

⁷¹[Ben-Israel und Greville, 1974, pp. 169–175] [Campbell und Meyer, 1975] [Cline, 1979, pp. 57–62] [Wilkinson, 1979] [Higham und Knight, 1993] [Meyer, 2000, p. 399]

⁷²[Rao und Mitra, 1971, pp. 95–97] [Pringle und Rayner, 1971, pp. 19–22]

⁷³Siehe ginv.c -D2 und -D1 via *core-nilpotent-decomposition* [Meyer, 2000, pp. 397–399] und SVD bzw. RREF (*reduced row echelon form* bzw. *reduzierte Zeilenstufenform*). Für weitere Möglichkeit der Implementierung solcher Inversen, siehe z. B. [Campbell und Meyer, 1979, pp. 125–127].

⁷⁴Obwohl die Drazin-Inverse zum diesem Zweck im letzten nicht gebraucht werden muß, war eine praktische Untersuchung ihrer Eigenschaften notwendig. Sie ist deswegen auch im Projekt implementiert worden. (Siehe ginv.c -D1.)

⁷⁵Für einen Beweis siehe [Campbell und Meyer, 1979, p. 75, Theorem 4.3.2].

⁷⁶ ⁷⁷liegt immer auf einem affinen Teilraum von Dimension $n - 1$. Jede Realisierung bzw. Abtastung eines *Hyperkreises* (Def. 2.4.17 auf S. 49), wenn ungestört, ergibt nach Gl. (2.47) auf S. 33 in § 2.4.1 eine singuläre Kovarianzmatrix. Da sich die Hyperkreise höherer Dimension nur schwierig visualisieren lassen, wenn nicht unmöglich, ist ein Funktional auf den Grundkörper mit charakterisierenden Eigenschaften einer Punktmenge wie die Mahalanobis-Distanz zur Untersuchung äußerst hilfreich.

Mit Mahalanobis-Distanz drehen und skalieren wir die Koordinaten je nach der durch ein Hyperellipsoid modellierten Streuung der Daten, so daß die Verteilung der Daten sphärisch wird im Bezug auf diesem (orthogonalen) Koordinatensystem. Dies macht die „Einheit“ der Distanz gleich der Standardabweichung und unabhängig von den originalen Einheiten.

Bei verschwindender Variation der Daten in einer Richtung bricht das Hyperellipsoid in dieser Dimension zusammen. Die dazu gehörige Skala werden „unendlich dicht“. Die resultierenden Koordinaten werden numerisch instabil werden wegen begrenzter Darstellungspräzision, selbst wenn sie nicht unendlich groß werden. Die Strategie ist nun eine

⁷⁶ Ein n -dimensionaler euklidischer Raum \mathcal{E}^n ist ein linearer Raum \mathcal{V} über \mathbb{R} mit Skalarprodukt, das heißt, ein Vektorraum mit zusätzlicher geometrischer Struktur, der *Form* des Raumes, mit der wir von einer *Länge* des Vektors oder einem *Winkel* zwischen zwei Vektoren oder überhaupt vom Begriff *Orthogonalität* sprechen können. Diese geometrische Struktur ist eine symmetrische, positiv-definitive Bilinearform $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$, mit den Axiomen

1. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}$, (Symmetrie)
2. $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$, $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (positiv definite quadratische Form)
3. $(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}, \mathbf{w})$, (Bilinearform)

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alle Bilinearformen, die die Axiome genügen, dürfen als das Skalarprodukt auseinander werden. Aus 1. folgt, daß 3. auch in der ersten Variablen linear ist. Nach Einführung einer Basis genügt den Axiomen die Form $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v}$ mit einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. [Shilov, 1971, pp. 215–216] [Kaplansky, 1974, pp. 1–5] [Kostrikin und Manin, 1989, p. 117] Fußnote 77 auf S. 47

⁷⁷ Ein n -dimensionaler unitärer Raum \mathcal{U}^n ist ein linearer Raum \mathcal{V} über \mathbb{C} mit Skalarprodukt (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , so daß für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, gilt:

1. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} \in \mathbb{C}$, (konjugiert symmetrisch, nicht kommutativ!)
2. $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$, $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (positiv definite quadratische Form)
3. $(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}, \mathbf{w})$, („Physiker-Sesquilinearform“)

Ein vollständiger unitärer Raum heißt *Hilbertraum* [Kantorowitsch und Akilow, 1978, p. 65]. Aus 1. folgt, daß die quadratische Form in 2. reell ist. Diese geometrische Struktur heißt *positiv definite hermitische Sesquilinearform*. Dadurch wird eine Norm $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ Fußnote 68 auf S. 44 induziert. Die Norm induziert wiederum eine Metrik $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|$ Fußnote 67 auf S. 44. Damit ist der Raum zugleich mit einer Metrik ausgestattet. Nach Einführung einer Basis genügt den Axiomen die Form $\mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{v}$ mit einer hermitischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Wir übernehmen die „Physiker-Konvention“ bzw. „Numeriker-Konvention“, daß die *Sesquilinearform* in der zweiten Variablen *linear* und in der ersten *konjugiert linear* seien. Wir schreiben und berechnen nämlich ein *komplexes* Skalarprodukt durch $\mathbf{u}^* \mathbf{v}$, indem wir die Vektoren als Spalten-Matrizen formulieren. NB. Wir haben Erfolg bei Erweiterung des Begriffs *Länge* des Vektors auf komplexe Räume, denn die quadratische Form in 2. ist stets reell. Dennoch begegnen wir Schwierigkeiten beim Begriff „Winkel“, weil das Skalarprodukt in $\cos \theta = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) / \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ im generellen komplex ist. Bei Bedarf kann der Betrag am Zähler genommen werden, denn $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$. Dennoch ist solcher keine plausible Erweiterung des Winkels im euklidischen Raum auf unitären Raum. Eine plausible Erweiterung des Begriffs *Winkel* auf unitären Raum zwischen zwei komplexen Vektoren sollte, meiner Ansicht nach, das geometrische Verhältnis zwischen zwei komplexen Vektoren vollständig beschreiben, wie es im euklidischen Raum der Fall ist. Dies könnte Erfolg haben, indem man das Verhältnis zwischen zwei 2-dimensionalen Teilräumen im euklidischen Raum betrachte. Der Begriff *Orthogonalität* zweier komplexen Vektoren \mathbf{u}, \mathbf{v} ist zwar durch $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ wohl-definiert, die Interpretation derer sei plausibler mittels Verhältnisses zwischen zwei 2-dimensionalen Teilräumen im euklidischen Raum. [Davis, 1958] (im Hilbert-Raum) [Davis und Kahan, 1970] (im Hilbert-Raum) [Shilov, 1971, pp. 244–245, p. 373] [Hohn, 1973, p. 373] [Golub und Van Loan, 1983, pp. 20–24] [Golub und Van Loan, 1983, pp. 425–431] [Vandewalle und De Moor, 1988, p. 56] [Ipsen und Meyer, 1995] [Suschowk, 1956 (1957)] [Zassenhaus, 1964] [Wedin, 1982] [Ritov, 1992] [Golub und Van Loan, 1996, pp. 603–604] [Stewart, 1998, pp. 74–76] [Stewart, 1999, pp. 7–8] [Meyer, 2000, pp. 450–459]

[Chen, 2001] Fußnote 76 auf S. 47

regularisierte Metrik benutzen, die die Messung in dieser „defekten“ Dimension einfach „ignorieren“. Mit „ignorieren“ meinen wir das Nullieren der Beiträge der Koordinaten in dieser Richtung zur Distanz überhaupt. Dieser regularisierte metrische Tensor bekommen wir als die Moore-Penrose-Pseudoinverse der rangdefizienten Kovarianzmatrix.

Die (eindeutige) Moore-Penrose-Inverse einer beliebigen Matrix in $\mathbb{C}^{m \times n}$ wird oft numerisch durch die Singulärwertzerlegung berechnet werden. Ein begleitender Vorteil bei der SVD ist, daß die Anwendung der SVD fast „idiotensicher“ ist hinsichtlicher der numerischen Stabilität. Dies gilt auch in der Situation, wo das Hyperellipsoid in gewisser Richtung ziemlich „flach“ wird.

Die Psdeudoinverse, andererseits, resultiert in eine gleichrangige Matrix mit invertierten Eigenwerten (im Falle der reellen symmetrischen Kovarianz), wenn die zu Invertierenden (numerisch) singulär wird. Die originalen Null-Eigenwerte bleiben unverändert. In diesem Fall bleiben die Skalierung in den Richtungen der von Null verschiedenen Eigenwerte unverändert während die Skalierung in den Richtungen der verschwundenen Eigenwerte „unendlich grob“ gemacht wird, so daß der Anteil eines Punktes in diesen Richtungen trägt zur regularisierten Mahalanobis-Distanz nichts bei. Das heißt, die Variation der Daten in diesen Richtungen hat keinen Einfluß auf die regularisierte Mahalanobis-Distanz.

Beispiel 2.4.16. Seien 4×3 Datenmatrix und ihre Zentrierte

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Z}_4 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dies ist eine gleichmäßige 4-punkt-Abtastung eines 1-Hyperkreises (Def. 2.4.17 auf S. 49) mit Normalvektor $\mathbf{n} = [0 \ 0 \ 1]$, Zentrum $\mathbf{z} = [1 \ 2 \ 3]$ und Radius $r = 5$ (`hyper.c -c`). Der 1-Hyperkreis entspricht einem üblichen Kreis in \mathcal{E}^3 . Es sei beachtet, daß $\text{rank } \mathbf{A} = 3$, und die eigentliche Dimension der Daten-Dynamik, $\text{rank } \tilde{\mathbf{A}} = 2$, wird erst durch das Zentrieren vom Projektator \mathbf{Z}_4 auf den *AC-Teilraum*, $\text{span}\{\mathbf{n}\}^\perp$, zum Vorschein gebracht. Die Punkte (Zeilenvektoren der Matrix \mathbf{A}) liegen nämlich alle in einem 2-dimensionalen affinen Teilraum. Die ML-Schätzung der Kovarianzmatrix ist eine 3×3 rang-2 symmetrische Matrix

$$\mathbf{C}_{\mathbf{A}} = \frac{1}{4} \tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 12.5 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

welche mit der theoretischen Kovarianzmatrix übereinstimmt mit

$$\text{tr } \mathbf{C}_{\mathbf{A}} = r^2 = 5^2$$

und

$$\|\mathbf{C}_{\mathbf{A}}\|_2 = \text{tr } \mathbf{C}_{\mathbf{A}} / (n - 1) = \text{tr } \mathbf{C}_{\mathbf{A}} / (3 - 1) = 12.5$$

Wir merken, daß $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}$ ist nur semidefinit (mit zweifachem 12.5 und einem Null-Eigenwert). Da $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}$ nicht invertierbar ist, ist die *Mahalanobis-Distanz* undefiniert. Unsere *regularisierte Mahalanobis-Distanz* nimmt als „Metrik“ die rang-2 symmetrische Moore-Pseudoinverse

$$\mathbf{C}_{\mathbf{A}}^\dagger = \begin{bmatrix} 0.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.8$ und $\lambda_3 = 0$ als Eigenwerte. Die regularisierte Mahalanobis-Distanz M_r von einem Punkt zum Zentrum

$$\begin{aligned} {}^r d_M(P_1 = (5 \ 0 \ 0)) &= \sqrt{2} \\ {}^r d_M(P_2 = (6 \ 0 \ 0)) &= 1.697056 > \sqrt{2} \\ {}^r d_M(P_3 = (5 \ 0 \ 1)) &= \sqrt{2} \\ {}^r d_M(P_4 = (6 \ 0 \ 1)) &= 1.697056 > \sqrt{2}. \end{aligned}$$

P_1 liegt im *Hyperkreis* (Def. 2.4.17 auf S. 49) und hat eine regularisierte Mahalanobis-Distanz $\sqrt{n-1} = \sqrt{2}$.

P_2 ist in die Richtung der Hyperebene leicht von dem *Hyperkreis* entfernt und hat eine Mahalanobis-Distanz größer als die des P_1 .

P_3 ist von P_1 aus in die Richtung des Null-Eigenwertes verschoben und hat eine regularisierte Mahalanobis-Distanz gleich der der orthogonalen Projektion (P_1) auf der Hyperebene.

P_4 ist vom P_1 verschoben sowohl in die Richtung der Hyperebene als auch in die Richtung des Nullraums der C . In diesem Fall hat der Anteil in der letzteren Richtung keinen Beitrag zu der Distanzmessung.

Anschaulich gedacht, besteht unsere Regularisierung darin, die (linearen) Beiträge der Mahalanobis-Distanz im Nullraum der Kovarianzmatrix zu ignorieren, da eine Messung der Distanz in solchem nicht möglich ist. In anderen Worten, unsere regularisierte Distanz macht keinen Unterschied der Messungen zwischen einem *Hyperkreis* und einem *Hyperzyylinder*.

2.4.6 Hyperkreis und Regularisierte Mahalanobis-Distanz

Definition 2.4.17 (Hyperkreis). Ein *Hyperkreis* in \mathcal{U}^n ist eine nicht ausgeartete Schnittmenge einer Hyperebene und einer Hypersphäre. Das Normal bzw. der Richtungsteilraum des Hyperkreises ist das Normal bzw. Richtungsteilraum der Hyperebene. Das Zentrum bzw. der Radius des Hyperkreises das Zentrum bzw. der Radius der Hypersphäre. Da ein Hyperkreis eine $(n-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathcal{U}^n ist, bezeichnen wir mit \mathcal{K}^{n-2} die Menge aller $(n-2)$ -Hyperkreise in \mathcal{U}^n .

Ein Hyperkreis ist also durch ein Zentrum $\mathbf{z} \in \mathcal{U}^n$, einen Radius $r \in \mathbb{R}$, und einen Richtungsteilraum $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}^n$ bzw. ein Normal $\mathbf{n} \in \mathcal{U}^n$ zu bestimmen.

Beispiel 2.4.18. In \mathcal{E}^3 mit Standard-Skalarprodukt ist ein 1-Hyperkreis in \mathcal{K}^1 ein gewöhnlicher Kreis, der im Raum schwebt, Cf. Abb. 2.6 auf S. 51. Der Richtungsteilraum \mathcal{P} von einem 1-Hyperkreis in \mathcal{K}^1 ist eine 2-dimensionale Ebene durch den „Ursprung“. Auf dem Papier, bzw. in \mathcal{E}^2 ist ein 0-Hyperkreis in \mathcal{K}^0 bloß eine Menge von zwei Punkten mit null Freiheitsgrad. *Note bene!* Ein Kreis auf dem Papier, \mathcal{E}^2 , ist *kein* Hyperkreis, sondern eine 1-Hypersphäre in $\mathcal{S}^1 \subset \mathcal{E}^2$. Die Bezeichnungen sind der topologischen Konvention konform.

Die Visualisierung eines Hyperkreises, einer $(n-2)$ -Mannigfaltigkeit, in höherer Di-

mension ist schwierig, wenn nicht unmöglich⁷⁸. Um rechnerisch mit dem Begriff *Hyperkreis* auseinandersetzen zu können, brauchen wir konkrete Abtastungen der Hyperkreise. Wir präsentieren wie folgt einen Erzeugungsalgorithmus mit statistisch gleichverteilten Abtastpunkten auf einem $(n - 2)$ -Hyperkreis $\subset \mathcal{E}^n$.

Algorithmus 2.4.19 (Erzeugung des Hyperkreises). Sei ein Hyperkreis $K \in \mathcal{K}^{n-2}$ mit Radius $r \in \mathbb{R}$, Normal $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$, Zentrum $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Die folgenden Schritte generieren gleich verteilte Zufallspunkte $\mathbf{k} \in K$:

1. Erzeuge $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n - 1$, so daß

$$\text{span} \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \} = \text{span} \{ \mathbf{n} \}^\perp, \quad \mathbf{a}_i^* \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \quad (2.79)$$

2. Erzeuge neue Zahl $g_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n - 1$, so daß

$$g_i \sim N(0, 1), \quad E[g_i] = 0, \quad E[g_i g_j] = \delta_{ij}, \quad (2.80)$$

3. Berechne neuen Vektor $\mathbf{b} \in \text{span} \{ \mathbf{n} \}^\perp$ durch

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n-1} g_j \mathbf{a}_j, \quad (2.81)$$

4. Berechne neuen Vektor $\mathbf{k} \in K$ durch

$$\mathbf{k} = \mathbf{c} + r \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{b}^* \mathbf{b}}}, \quad (2.82)$$

5. Wiederhole (2) bis (4) für die gewünschte Anzahl der Punkte.

Bemerkung 2.4.20 (Erzeugung des Hyperkreises). G. W. Brown hat 1956 zuerst eine Methode zur Erzeugung gleich verteilter Zufallspunkte auf einer Sphäre veröffentlicht [Brown, 1956] [Knuth, 1981, 1969, pp. 130–131]. Der Algorithmus 2.4.19 (S. 50) ist von Brownscher Methode abgeleitet und in `ghyper -c` implementiert worden. Siehe Abb. 2.6 auf S. 51 für eine Visualisierung des Hyperkreises in \mathcal{K}^1 und \mathcal{K}^2 . Ein Hyperkreis in \mathcal{K}^0 besteht nur aus zwei Punkten. Ein Kreis auf dem Papier, \mathcal{E}^2 , ist *kein* Hyperkreis, sondern eine 1-Hypersphäre.

Da bei uns ein Hyperkreis höherer Dimension nur durch den Algorithmus 2.4.19 (S. 50) per Zufallspunkte realisiert werden kann, beweisen wir in diesem Abschnitt einige hilfreiche Korollare über ihre statistischen Eigenschaften und Mahalanobis-Distanzen.

Lemma 2.4.21 (Kovarianzmatrix der Hypersphäre). Sei gleich verteilter Zufallsvektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}^n$ auf einer $(n - 1)$ -sphäre $\in \mathcal{S}^{n-1} \subset \mathcal{U}^n$ mit Radius $r \in \mathbb{R}$ und beliebigem Zentrum $\mathbf{z} \in \mathcal{U}^n$, dann ist die Kovarianzmatrix aus Gl. (2.53) auf S. 37

$$\mathbf{C}_{\mathcal{S}^{n-1}} = E[(\mathbf{x} - \mathbf{z})(\mathbf{x} - \mathbf{z})^*] = \frac{r^2}{n} \mathbf{I}. \quad (2.83)$$

⁷⁸Die folgenden Monographien werden uns bei der mentalen sowie evtl. physikalischen Visualisierung der höheren dimensionalen Gebilde sicherlich weiter helfen: [Abbott, 1952; Abbott und Buck, 1990] [Du Val, 1964] [Weeks, 1985] [Coxeter, 1973] [Altmann, 1986] [Rucker, 1987] [Banchoff, 1990]

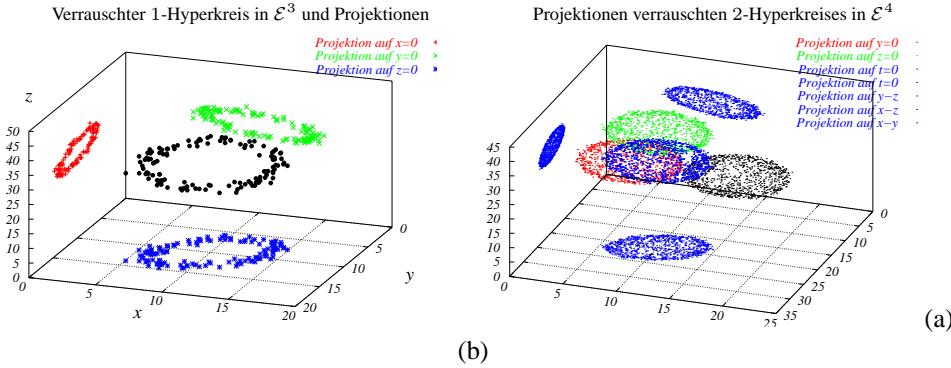


Abbildung 2.6: Visualisierung des Hyperkreises durch Projektionen. (a) Projektionen eines 2-Hyperkreises in \mathcal{E}^4 auf \mathcal{E}^3 mit Radius = 5, Anzahl = 1024, Zentrum = [10 20 30 40], Normal = [1 1 1], $\sigma = 0.2$ (via `ghyper.c-c` und `gaussian.c`). (b) Projektionen verrauschter 1-Hyperkreis in \mathcal{E}^3 auf \mathcal{E}^2 mit Radius = 5, Anzahl = 128, Zentrum = [10 10 30], Normal = [1 1 1], $\sigma = 0.5$.

Beweis. Sei Zufallsvektor $\mathbf{x} = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T$ gleich verteilt auf einer $(n-1)$ -Sphäre mit Radius r und Zentrum $\mathbf{z} = [z_1 z_2 \cdots z_n]^T$ mit

$$(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2 = r^2. \quad (2.84)$$

Da \mathbf{x} gegen das Zentrum isotropisch ist, ist der Erwartungswert einzelnen Komponenten

$$\mathbb{E}[x_1 - z_1] = \cdots = \mathbb{E}[x_n - z_n] = 0. \quad (2.85)$$

und

$$\mathbb{E}[(x_1 - z_1)^2] = \cdots = \mathbb{E}[(x_n - z_n)^2]. \quad (2.86)$$

Da \mathbf{x} konstante Länge von r besitzt, haben wir

$$\mathbb{E}[(\mathbf{x} - \mathbf{z})^T(\mathbf{x} - \mathbf{z})] = \mathbb{E}[(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2] = \mathbb{E}[r^2] = r^2. \quad (2.87)$$

Aus (2.86) und (2.87) ergibt sich die diagonale Elemente der Kovarianzmatrix Gl. (2.53) auf S. 37

$$c_{ii} = \mathbb{E}[(x_i - z_i)^2] = r^2/n, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.88)$$

Die nicht-diagonale Elemente der Kovarianzmatrix

$$c_{ij} = \mathbb{E}[(x_i - \mu_{x_i})(x_j - \mu_{x_j})] = \mathbb{E}[x_i x_j] - \mathbb{E}[x_i] \mathbb{E}[x_j] = 0, \quad (2.89)$$

da x_i und x_j ($i \neq j$) unkorreliert sind ($\mathbb{E}[x_i x_j] = \mathbb{E}[x_i] \mathbb{E}[x_j]$) laut unseres Algorithmus 2.4.19 (S. 50) der Hypersphäregenerierung. \square

Dies heißt, die Kovarianzmatrix gleich verteilter Punkte auf einer Sphäre ist diagonal und nur abhängig von der Dimension des Raumes und dem Radius⁷⁹. Aus diesem Lemma ergibt sich das folgende Korollar über die konstante Mahalanobis-Distanz gleich verteilter Punkte auf einer Sphäre.

⁷⁹Durch Ausführungen von `(ghyper.c -sn4096 (param.) | matstat.c -Ppc -pB)` verifizieren wir, daß dies mit Berechnungen der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_A aus Datenmatrix \mathbf{A} übereinstimmt.

Korollar 2.4.22 (Mahalanobis-Distanz der Hypersphäre). Sei gleich verteilter Zufallsvektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}^n$ auf einer $(n-1)$ -Sphäre $\mathcal{S}^{n-1} \subset \mathcal{U}^n$, dann ist der konstante Erwartungswert der Mahalanobis-Distanz aller Punkte auf der Sphäre eine Konstante, die nur abhängig ist von der Dimension n :

$$\mathbb{E} [d_M(\mathbf{x} \in \mathcal{S}^{n-1})] = \sqrt{n}. \quad (2.90)$$

Beweis. Sei $\mathbf{z} \in \mathcal{U}^n$ das Zentrum der Sphäre und $r \in \mathbb{R}$ der Radius.

$$\mathbb{E} [d_M^2(\mathbf{x} \in \mathcal{S}^{n-1})] = \mathbb{E} [(\mathbf{x} - \mathbf{z})^T \mathbf{C}_{\mathcal{S}^{n-1}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{z})].$$

Aus Lemma 2.4.21 auf S. 50, (2.83), die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathcal{S}^{n-1}} = (r^2/n)\mathbf{I}$ in der quadratischen Form ist eine Konstante.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [d_M^2(\mathbf{x} \in \mathcal{S}^{n-1})] &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \mathbf{z})^T \left(\frac{r^2}{n} \mathbf{I} \right)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \mathbf{z})^T \left(\frac{n}{r^2} \mathbf{I} \right) (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \right] \\ &= \frac{n}{r^2} \mathbb{E} [(\mathbf{x} - \mathbf{z})^T (\mathbf{x} - \mathbf{z})] \\ &= \frac{n}{r^2} r^2 = n. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.4.23 (Lineare Abbildung und Kovarianzmatrix). Seien Zufallsvektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ und Endomorphismus $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\text{rank } \mathbf{A} = n$. Seien $\mathbf{C}_x, \mathbf{C}_y \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Kovarianzmatrizen von \mathbf{x} und \mathbf{y} , dann

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \implies \mathbf{C}_y = \mathbf{AC}_x \mathbf{A}^*. \quad (2.91)$$

Beweis. Dies hätte stochastisch gezeigt werden sollen. Dennoch, um die Robustheit unserer Darstellung von dem *Zentrieren* einer Datenmatrix als eine *Projektion* \mathbf{Z}_m in Gl. (2.42) auf S. 32 und Gl. (2.43) auf S. 32 in § 2.4.1 zu demonstrieren, betrachten wir, wie die Musterkovarianzmatrizen zusammenhängen unter einer linearen Abbildung. Seien Datenmatrizen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, die m Realisierungen der Zufallsvektoren, d. h., die Spalten-Zufallsvektoren \mathbf{x}, \mathbf{y} als Zeilenvektoren in der Form der Gl. (2.40) auf S. 28 enthalten. Somit ist die o. g. lineare Abbildung äquivalent zu

$$\mathbf{Y}_{m \times n} = \mathbf{X}_{m \times n} \mathbf{A}_{n \times n}^*.$$

Die Musterkovarianzmatrix nach der Abbildung ist

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_Y &= \frac{1}{m} (\mathbf{Z}_m \mathbf{Y})^* (\mathbf{Z}_m \mathbf{Y}) \\ &= \frac{1}{m} (\mathbf{Z}_m \mathbf{X} \mathbf{A}^*)^* (\mathbf{Z}_m \mathbf{X} \mathbf{A}^*) \\ &= \frac{1}{m} (\mathbf{A} \mathbf{X}^* \mathbf{Z}_m^*) (\mathbf{Z}_m \mathbf{X} \mathbf{A}^*) \\ &= \frac{1}{m} \mathbf{A} (\mathbf{Z}_m \mathbf{X})^* (\mathbf{Z}_m \mathbf{X}) \mathbf{A}^* \\ &= \mathbf{A} \left[\frac{1}{m} (\mathbf{Z}_m \mathbf{X})^* (\mathbf{Z}_m \mathbf{X}) \right] \mathbf{A}^* \\ &= \mathbf{AC}_x \mathbf{A}^*. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.4.24. Ob der Nenner gleich m oder $m-1$, hat keine Rolle gespielt. Hier waren \mathbf{X}, \mathbf{Y} die *nicht-zentrierten* Datenmatrizen. Die Anwendung des *zentrierenden Projektors* aus Gl. (2.42) auf S. 32 und Gl. (2.43) auf S. 32 hat die Beweisführung kompakt gemacht. *Nota bene:* Hier wurde keine weitere Eigenschaft des Endomorphismus \mathbf{A} angenommen.

Lemma 2.4.25 (Invarianz der Mahalanobis-Distanz). *Die Mahalanobis-Distanz ist invariant unter Verschiebung und regulärer linearer Abbildung. Seien Zufallsvektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}^n$, und $d_M(\mathbf{x}_0), d_M(\mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}$ die Mahalanobis-Distanzen von $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathcal{U}^n$ jeweils zu $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}$ und $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}$. Sei Endomorphismus $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($\text{rank } \mathbf{A} = n$). Dann*

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \implies d_M(\mathbf{y}_0) = d_M(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathcal{U}^n. \quad (2.92)$$

Beweis. Die Invarianz unter Verschiebung versteht sich, denn sie wird per Definition „ausgenommen“. Die Mahalanobis-Distanz des transformierten Vektors \mathbf{y}_0

$$\begin{aligned} d_M^2(\mathbf{y}_0) &= (\mathbf{y}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})^* \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{-1} (\mathbf{y}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}) \\ &= (\mathbf{Ax}_0 - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{-1} (\mathbf{Ax}_0 - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{Ax}_0 - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* (\mathbf{A}^{*-1} \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{A}^{-1}) (\mathbf{Ax}_0 - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{A}^* (\mathbf{A}^{*-1} \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{A}^{-1}) \mathbf{A} (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \\ &= d_M^2(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.4.26 (Invarianz der Regularisierten Mahalanobis-Distanz). *Die regularisierte Mahalanobis-Distanz ist invariant unter Verschiebung und unitärer Abbildung. Seien Zufallsvektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}^n$, und $d_M(\mathbf{x}_0), d_M(\mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}$ die Mahalanobis-Distanzen zwischen $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathcal{U}^n$ und $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}$ und $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}$. Sei unitäre Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, Dann*

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ux} \implies {}^r d_M(\mathbf{y}_0) = {}^r d_M(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathcal{U}^n. \quad (2.93)$$

Beweis. Die Invarianz unter Verschiebung versteht sich, denn sie wird ebenfalls per Definition „ausgenommen“. Die *regularisierte* Mahalanobis-Distanz des transformierten Vektors \mathbf{y}_0

$$\begin{aligned} {}^r d_M^2(\mathbf{y}_0) &= (\mathbf{y}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})^* \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^\dagger (\mathbf{y}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}) \\ &= (\mathbf{Ux}_0 - \mathbf{U}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^\dagger (\mathbf{Ux}_0 - \mathbf{U}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{U}^* \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^\dagger \mathbf{U} (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{U}^* (\mathbf{U} \mathbf{C}_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^*)^\dagger \mathbf{U} (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \\ &= {}^{80} (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{U}^* (\mathbf{U}^{*\dagger} \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^\dagger \mathbf{U}^\dagger) \mathbf{U} (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{U}^* \mathbf{U}^{*-1} \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^\dagger \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^* \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^\dagger (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}) \\ &= {}^r d_M^2(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.4.27 (Kanonische Kovarianzmatrix des Hyperkreises). Sei Zufallsvektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}^n$ gleich verteilt auf einem Hyperkreis $K \in \mathcal{K}^{n-2} \subset \mathcal{U}^n$ mit Radius $r \in \mathbb{R}$, dann gibt es eine Abbildung $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so daß die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ diagonalisiert wird mit

$$\mathbf{C}_K = \mathbb{E} [(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})^*] = \frac{r^2}{n-1} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

Beweis für reellen Fall. Für jeden Hyperkreis $K \in \mathcal{K}^{n-2} \subset \mathcal{E}^n$ gibt es ein Normal $\mathbf{n} \in \mathcal{E}^n$. Wir wählen nun als die Abbildung \mathbf{A} aus Lemma 2.4.23 auf S. 52 den *Householder-Reflektor* \mathbf{H} [Witt, 1937, 1998] [Kaplansky, 1974, p. 17] [Householder, 1972, 1975] [Laurie, 1997a,b], die das Normal $\mathbf{n} \in \mathcal{E}^n$ in die Richtung des ersten kanonischen Basisvektors $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0 \cdots 0]^T$ abbildet, bzw. alle Koordinaten des Normals \mathbf{n} bis auf die Erste annihiliert. Sei *Householder-Vektor*

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \pm \|\mathbf{n}\|_2 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{E}^n, \quad (2.95)$$

so daß die *Householder-Transformation* ergibt

$$\mathbf{H}\mathbf{n} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{P})\mathbf{n} = \left(\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right) \mathbf{n} = \mp \|\mathbf{n}\|_2 \mathbf{e}_1 = \mp \|\mathbf{n}\|_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.96)$$

wobei \mathbf{P} ist ein *Orthoprojektor* auf den 1-dimensionalen Raum vom Householder-Vektor $\text{span}\{\mathbf{v}\}$. Mit der Transformation $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$ ist nun die erste Koordinate des Zufallsvektors $\mathbf{y} \in \mathbf{H}(\mathcal{K}^{n-2})$ eine Konstante. Infolgedessen verschwindet das Element c_{11} der Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathcal{K}^{n-2}}$. Mit gleicher Technik wie im Beweis vom Lemma 2.4.21 auf S. 50 erhalten wir $r^2/(n-1)$ für die restlichen diagonalen Elemente und 0 für die nicht-diagonalen Elemente. Die *reeller Householder-Reflektor* \mathbf{H} besitzt folgende Eigenschaften:

- \mathbf{H} ist symmetrisch, $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$,
- \mathbf{H} ist involutorisch, $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$,⁸¹
- \mathbf{H} ist orthogonal, $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$,
- \mathbf{H} hat eine konstante Determinante, $\det \mathbf{H} = -1$,
- \mathbf{H} besitzt den Vektor $\mathbf{n}^T/\|\mathbf{n}\|_2$ als die erste Zeile bzw. die erste Spalte,
- \mathbf{H} bildet den Vektor \mathbf{n} in die Richtung des Basisvektors \mathbf{e}_1 ab.

⁸⁰Im allgemeinen gilt $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$ nicht. Die Aussage $(\mathbf{ACA}^*)^\dagger = \mathbf{A}^{*\dagger} \mathbf{C}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$ ist ebenfalls falsch, selbst wenn \mathbf{A} regulär und \mathbf{C} selbstdadjungiert, nicht-negativ definit ist. Hier handelt sich um unitäre Matrix \mathbf{U} . Wir haben $(\mathbf{UAV})^\dagger = \mathbf{V}^* \mathbf{A}^\dagger \mathbf{U}^*$ für unitäre Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} [Pringle und Rayner, 1971, pp. 30–32] [Rao und Mitra, 1971, p. 67] [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 25] [Campbell und Meyer, 1979, pp. 11–12, Theorem 1.2.1]. Daher konnten wir das Lemma 2.4.26 nicht auf diese Weise für beliebigen Endomorphismus beweisen. Dieses Lemma soll für beliebige, reguläre Matrix erweiterbar sein. Es genügt allerdings, um den Korollar 2.4.32 (S. 58) beweisen zu können. (cf. mahr .m und matstat -mpB.)

⁸¹Eine *involutarische* Matrix heißt auch *unipotente* Matrix, die zu sich selbst invers ist.

□

Beweis für komplexen Fall. Für jeden Hyperkreis $\mathcal{K}^{n-2} \subset \mathcal{U}^n$ gibt es ein Normal $\mathbf{n} \in \mathcal{U}^n$. Wir wählen als die lineare Abbildung \mathbf{A} aus Lemma 2.4.23 auf S. 52 eine unitäre Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, die das Normal $\mathbf{n} \in \mathcal{U}^n$ in die Richtung des ersten kanonischen Basisvektors $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ abbildet, bzw. alle Koordinaten des abgebildeten Normals \mathbf{Un} bis auf die Erste annihiliert. Seien komplexe Skalaren $\alpha, e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, und der n -Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{U}^n$ mit

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \pm \|\mathbf{n}\|_2 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{U}^n \quad (2.97)$$

und die gesuchte unitäre Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so daß

$$\begin{aligned} \mathbf{Un} &= (\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{P}) \mathbf{n} \\ &= \left(\mathbf{I} - 2 \frac{\Re(\mathbf{v}^* \mathbf{n})}{(\mathbf{v}^* \mathbf{n})} \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} \right) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P} - e^{i\theta}\mathbf{P}) \mathbf{n} \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} - e^{i\theta} \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} \right) \mathbf{n} \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} - \frac{\overline{(\mathbf{v}^* \mathbf{n})}}{(\mathbf{v}^* \mathbf{n})} \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} \right) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.99)$$

$$= \mp \|\mathbf{n}\|_2 \mathbf{e}_1 = \mp \|\mathbf{n}\|_2 \begin{bmatrix} 1 + 0i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.100)$$

wobei

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}}, \quad \alpha = \frac{\Re(\mathbf{v}^* \mathbf{n})}{(\mathbf{v}^* \mathbf{n})} \quad e^{i\theta} = \frac{\overline{(\mathbf{v}^* \mathbf{n})}}{(\mathbf{v}^* \mathbf{n})} \quad \text{und} \quad \theta = -2\angle(\mathbf{v}, \mathbf{n}). \quad (2.101)$$

Mit der Transformation $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$ ist nun die erste Koordinate des Zufallsvektors $\mathbf{y} \in \mathbf{U}(\mathcal{K}^{n-2})$ eine Konstante. Infolgedessen verschwindet das Element c_{11} der Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathcal{K}^{n-2}}$. Mit gleicher Technik wie im Beweis vom Lemma 2.4.21 auf S. 50 erhalten wir $r^2/(n-1)$ für die restlichen diagonalen Elemente und 0 für die nicht-diagonalen Elemente. Die unitäre Matrix \mathbf{U} im komplexen Fall unterscheidet sich von der Householder-Matrix \mathbf{H} im reellen Falle dadurch, daß

- \mathbf{U} keine selbstadjugierte Matrix mehr ist, $\mathbf{U}^* \neq \mathbf{U}$,
- \mathbf{U} keine involutorische Abbildung mehr ist, $\mathbf{U}^2 \neq \mathbf{I}$,
- \mathbf{U} eine unitäre Matrix bleibt, $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}$,
- sich der Normalvektor \mathbf{n} als $\mathbf{n}^*/\|\mathbf{n}\|_2$ in der ersten Zeile der unitären Matrix \mathbf{U} befindet. Die unitäre Matrix \mathbf{U} besitzt also eine Form

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mp \mathbf{n}^* / \|\mathbf{n}\|_2 \\ \mathbf{K}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)}. \quad (2.102)$$

Ist $\mathbf{n}^* \mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $\alpha = \Re(\mathbf{v}^* \mathbf{n}) / (\mathbf{v}^* \mathbf{n}) = 1$ oder $\omega = \overline{\mathbf{v}^* \mathbf{n}} / (\mathbf{v}^* \mathbf{n}) = 1$, so reduziert sich die unitäre Matrix \mathbf{U} auf die Householder-Spiegelungsmatrix \mathbf{H} vom reellen Fall. □

Bemerkung 2.4.28 (Komplexe „Householder-Spiegelung“). Nota bene! Householder-Spiegelung oder Householder-Transformation⁸² ist ein *teures* Beispiel, an dem der reelle Fall nicht zum komplexen Fall überführt werden kann, indem man einfach die Transponierte durch die Hermitesche (*d. h.* konjugiert Transponierte) ersetzt. \square

Bemerkung 2.4.29 (Householder-Spiegelung). Die *Householder-Spiegelung* oder *Householder-Transformation* die im Beweis vom Lemma 2.4.27 auf S. 54 benutzt worden ist, ist darüber hinaus sehr robustes Verfahren zur Orthogonalisierung. Sie wird oft in Numerik dazu benutzt, um 0 in eine Matrix unter Ähnlichkeitsbedingung einzuführen. Da die Matrix \mathbf{H} stets eine normalisierte Version des Normalvektors $\mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|_2$ in der ersten Spalte enthält, spannen also die restlichen $n - 1$ Spalten der Matrix \mathbf{H} das *orthogonale Komplement* $\text{span} \{ \mathbf{n} \}^\perp$ orthonormal auf. Dies ist eine orthonormale *Basisvervollständigung*, bei der das *Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren* [Gram, 1883], [Schmidt, 1907a, p. 442] nicht verwendet werden kann. Denn das *Gram-Schmidtsche Verfahren* benötigt alle n linear unabhängigen Vektoren, um starten zu können. Es ist implementiert als `gmat.c` -o in `matsrc0/gmat.c/house_orth2()`⁸³. denn es ist sehr häufig erforderlich, eine orthonormale basis aus einem vorgegebenen Vektor zu finden, wie wir es im Algorithmus 2.4.19 (S. 50) gebraucht haben. Dieses Verfahren besitzt folgende Vorteile:

1. Da die Matrix nicht nur unitär, sondern auch eine selbstadjungierte Inversion ist, *d. h.*, $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^* = \mathbf{H}$, erspart man das Transponieren bei Bedarf einer Inversion. Vgl. Gl. (2.7) auf S. 10.
2. Householder-Orthogonalisierung ist numerisch stabiler als z. B. die Givens-Drehung, und sie benötigt weniger Operationen als das modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren⁸⁴.
3. Dies dient auch für die Berechnung des Nullraums bzw. orthonormalen Komplements, das das Gram-Schmidtsche Verfahren nicht anbieten kann. (Siehe Abb. 2.2 auf S. 20.)
4. Dies ist anwendbar für arbiträre endliche Dimension im Vergleich zu anderen Verfahren, die nur für z. B. 3-dimensionalen Raum bestimmt sind. (Siehe `basis33.c`.)

Für mehr Details über Householder-Spiegelung siehe Kommentare in Datei `matsrc0:gmat.c, hm.m`, Monographien vom Urheber [Householder, 1972] und [Householder, 1975] [Laurie, 1997a,b] oder [Witt, 1937, 1998] [Stewart, 1973b, pp. 231–235] [Kaplansky, 1974, p. 17] [Strang, 1980, pp. 392–397] [Gill et al., 1991, p. 121] [Golub und Van Loan, 1983, pp. 38–39].

Korollar 2.4.30 (Kovarianzmatrix des Hyperkreises). Sei gleich verteilter Zufallsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ auf einem Hyperkreis $K \in \mathcal{K}^{n-2} \subset \mathcal{U}^n$ mit Normalvektor $\mathbf{n} \in \mathcal{U}^n$ und radius $r \in \mathbb{R}$, dann ist die generelle Form der Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathcal{K}^{n-2}}$ durch den Orthoprojektor

⁸²Alston Scott Householder (1904–1993) nannte solche Reflektoren „elementary Hermitian matrix“, „elementary reflections“ in [Householder, 1972, pp. 11–16, §2] [Householder, 1975, pp. 3–4 §1.1, pp. 133–139] [Laurie, 1997a,b].

⁸³Die numerische Stabilität ist wohl behandelt durch [Stewart, 1973b, pp. 231–235].

⁸⁴[Gram, 1883], [Schmidt, 1907a, p. 442] [Golub und Van Loan, 1996, p. 263]

auf den Richtungsteilraum des Hyperkreises gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\mathcal{K}^{n-2}} &= \mathbb{E} [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^*] \\ &= \left(\frac{r^2}{n-1} \right) \mathbf{P}_{\text{span}\{\mathbf{n}\}^\perp} \\ &= \left(\frac{r^2}{n-1} \right) \frac{\mathbf{KK}^*}{\mathbf{K}^*\mathbf{K}},\end{aligned}\quad (2.103)$$

wobei die $n \times (n-1)$ Matrix \mathbf{K} eine Basis für $\text{span}\{\mathbf{n}\}^\perp$ als Spaltenvektoren enthält, d. h. das $n-1$ -dimensionale orthogonale Komplement des Raumes $\text{span}\{\mathbf{n}\}$.

Beweis. Aus (2.94) vom Lemma 2.4.27 auf S. 54, und Lemma 2.4.23 auf S. 52 existiert eine unitäre Abbildung $\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{x}$, so daß die Kovarianzmatrix des transformierten Vektors \mathbf{y}

$$\mathbf{C}_{\mathcal{K}^{n-2}}(\mathbf{y}) = \mathbf{U}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & r^2/(n-1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & r^2/(n-1) \end{bmatrix} \mathbf{U}^{*-1},$$

wobei $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die unitäre Matrix aus Gl. (2.98) auf S. 55 ist mit

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} - \frac{\overline{(\mathbf{v}^*\mathbf{n})}}{(\mathbf{v}^*\mathbf{n})} \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{n} \pm \|\mathbf{n}\|_2 \mathbf{e}_1.$$

Sei $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)} (\mathbf{K}^*\mathbf{K} = \mathbf{I}_{n-1})$ aus Gl. (2.102) auf S. 55. Da die unitäre Matrix $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$ den Vektor $\mp\mathbf{n}^*/\|\mathbf{n}\|_2$ als die erste Zeile besitzt, die $n-1$ Spalten in \mathbf{K} spannen das orthonormale Komplement des Raumes $\text{span}\{\mathbf{n}\}$, d. h., den *Richtungsteilraum* des Hyperkreises K auf.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_K &= \mathbf{U}^* \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & r^2/(n-1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & r^2/(n-1) \end{bmatrix} \mathbf{U} \\ &= \left(\frac{r^2}{n-1} \right) [\mathbf{U}^*] \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{U}^*]^* \\ &= \left(\frac{r^2}{n-1} \right) \left[\mp \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|_2} \middle| \mathbf{K} \right] \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \left[\mp \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|_2} \middle| \mathbf{K} \right]^* \\ &= \left(\frac{r^2}{n-1} \right) \mathbf{KK}^* = \left(\frac{r^2}{n-1} \right) \mathbf{P}_{\text{span}\{\mathbf{n}\}^\perp}.\end{aligned}$$

□

Die theoretische Kovarianzmatrix (2.103) im Korollar 2.4.30 (S. 56) ist zur Referenz stets durch `ghyper.c -c` ausgegeben.

Korollar 2.4.31 (Spur der Kovarianzmatrix des Hyperkreises). *Sei gleich verteilter Zufallsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ auf einem Hyperkreis $K \in \mathcal{K}^{n-2} \subset U^n$ mit Radikus r , dann ist die Spur der Kovarianzmatrix*

$$\text{tr } \mathbf{C}_K = \text{tr } E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^*] = r^2. \quad (2.104)$$

Beweis. Diese Folgerung ergibt sich trivial sowohl aus dem Lemma 2.4.27 auf S. 54 als auch aus dem Korollar 2.4.30 (S. 56). \square

Wir wollen hier kurz zusammenfassen darüber, wohin wir hinaus wollen und was wir bisher haben. Da die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors auf einem Hyperkreis stets singulär ist, können wir nur von unserer *regularisierten* Mahalanobis-Distanz sprechen. Um nützliche Fakten über die regularisierte Mahalanobis-Distanz des Hyperkreises aussagen zu können, brauchen wir eine möglichst einfache Form der Kovarianzmatrix. Ähnliches geschah für die Hypersphäre ohne Umstand im Korollar 2.4.22 (S. 52), weil die Punkte isotropisch um das Zentrum verteilt, ergo die Kovarianzen verschwunden sind. Im Falle des *Hyperkreises* sind die Zufallspunkte nicht mehr isotropisch um das Zentrum verteilt, sondern vom Normalvektor abhängen. Infolgedessen besitzt die Kovarianzmatrix im generellen nicht mehr immer eine diagonale Form. Um mit einer diagonalen Form der Kovarianzmatrix arbeiten zu können, mußten wir wissen, ob sich der Zufallsvektor transformieren läßt, während die *regularisierte* Mahalanobis-Distanzen unverändert bleiben. Zu diesem Zweck besagt das Lemma 2.4.26 auf S. 53, daß auch die *regularisierte* Mahalanobis-Distanz invariant ist unter unitären Abbildungen des Zufallsvektors. Eine spezifische unitäre Abbildung, die die Kovarianzmatrix in eine diagonale Form umwandelt, haben wir im Lemma 2.4.27 auf S. 54 gegeben. Dies folgt daraus, indem wir das Normal des Hyperkreises in die Richtung des ersten Vektors e_1 der Standard-Basis „spiegeln“ (*cum grano salis*), d. h., den Hyperkreis isometrisch senkrecht zum Vektor e_1 „drehen“. Am Rande haben wir im Korollar 2.4.30 (S. 56) die allgemeine Form der Kovarianzmatrix und den Orthoprojektor des *Richtungsteilraumes* in Verbindung gesetzt. Mit den o. a. Ergebnissen, sind wir nun auszusagen bereit, daß auch der Erwartungswert der *regularisierten* Mahalanobis-Distanz aller Punkte auf einem Hyperkreis eine Konstante ist, die nur von der Dimension abhängt.

Korollar 2.4.32 (Regularisierte Mahalanobis-Distanz des Hyperkreises). *Sei Zufallsvektor $\mathbf{x} \in U^n$ gleich verteilt auf einem $(n-2)$ -Hyperrkreis $K \in \mathcal{K}^{n-2} \subset U^n$, dann ist der konstante Erwartungswert der regularisierten Mahalanobis-Distanz aller Punkte auf dem Hyperkreis*

$$E[\bar{d}_M(\mathbf{x} \in K)] = \sqrt{n-1}. \quad (2.105)$$

Beweis. Sei $r \in \mathbb{R}$ der Radius des *Hyperkreises*. Laut Lemma 2.4.26 auf S. 53 ist das Problem äquivalent zu dem mit dem Zufallsvektor $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$, wobei \mathbf{B} eine durch Lemma 2.4.27 auf S. 54 gegebene unitäre Abbildung ist. Der Erwartungswert der *regularisierten*, quadratischen Mahalanobis-Distanz ist also

$$E[\bar{d}_M^2(\mathbf{y} \in \mathcal{K}^{n-2})] = E[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})^* \mathbf{C}_K^\dagger (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})],$$

wobei die Kovarianzmatrix \mathbf{C}_K in der quadratischen Form eine Konstante laut Lemma 2.4.27 auf S. 54. Ersetzen wir sie durch Gl. (2.94) auf S. 54, so erhalten wir

$$E[\bar{d}_M^2(\mathbf{y} \in \mathcal{K}^{n-2})] = \left(\frac{r^2}{n-1} \right)^\dagger E[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})] = n-1.$$

Da $\bar{d}_M \geq 0$, haben wir $E[\bar{d}_M(\mathbf{x})] = \sqrt{n-1}$. \square

Kapitel 3

Ellipsenlokalisierung

Ein *Kreis* im 3-dimensionalen Raum ist unter der *perspektiven Projektion* eine *Ellipse* auf der 2-dimensionalen Ebene [Kanatani, 1993]. Unser Ansatz, den in der Szene präsentierten *Kreis* im 3-dimensionalen Raum zu vermessen, basiert auf der parametrischen Bestimmung der entsprechenden *Ellipse* im Intensitätsskalarfeld (Luminanz) und einer *Fusion* derer mit dem Tiefenvektorfeld (3-dimensionale Koordinaten), wobei das Skalarfeld $I : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ mit Pixel-Pixel-Korrespondenz auf derselben Domäne definiert sind. Die parametrische Bestimmung der *Ellipse* im Skalarfeld verläßt sich auf die *Konturenextraktion* aus dem Intensitätsbild. Wir beschreiben in diesem Kapitel die Experimente der *Konturenextraktion* und *Ellipsenbestimmung*.

Im § 3.1 ab S. 59 stellen wir unseren Einsatz *energiebasierter* sowie *gradientenbasierter* Methode zur „*Kantendetektion*“ und die Nachverarbeitung zur Formung der *Konturen* in der Form verketteter Pixel vor.

Im § 3.2 ab S. 69 werden wir die Begründung unseres Ansatzes zur Ellipsen-Lokalisierung und die experimentellen Ergebnisse derer auf natürlichen Szenen präsentieren.

3.1 Konturenextraktion

Die *Konturenextraktion* bildet die Basis vieler Aufgaben im Gebiet des „*künstlichen Sehens*“. Sie ist zwar nicht als der Schwerpunkt der Arbeit zu sehen, für unseren Ansatz zur Lösung der Problematik ist sie aber experimentell unentbehrlich. Saubere Segmentierung und Repräsentation der *Konturen* einer optisch empfangenen Szene ermöglicht eine *syntaktische*⁸⁵ Analyse und „*semantische*“ Inferenzen der Bildstruktur. Die Operationen auf den höheren Ebenen auf dem Wege zur realistischen, und bis heute unbegreifbaren *Begriff-Formung* in uns profitieren vor allem von einer starker Verminderung der Datenmenge.

Anstatt des gewöhnlichen Sprachgebrauches der „*Kantendetektion*“ wird hier „*Konturenextraktion*“ benutzt. Eine *Kontur* kann hier eine *Linie*, eine *Kante* oder eine *Mischung* (Cf. Abb. 3.1 auf S. 60) aus den beiden heißen. Mit *Konturenextraktion* eines Intensi-

⁸⁵Parallel zur Linguistik werden hier die Relationen zwischen den Bildelementen (*Pixeln*) gemeint, die den „*Symbole*“ entsprechen. Die Zuweisung der Bildelemente zu einem Aggregat ist eine *syntaktische Strukturierung* der Bildelemente. Dieses Aggregat werden wir *Kontur* nennen.

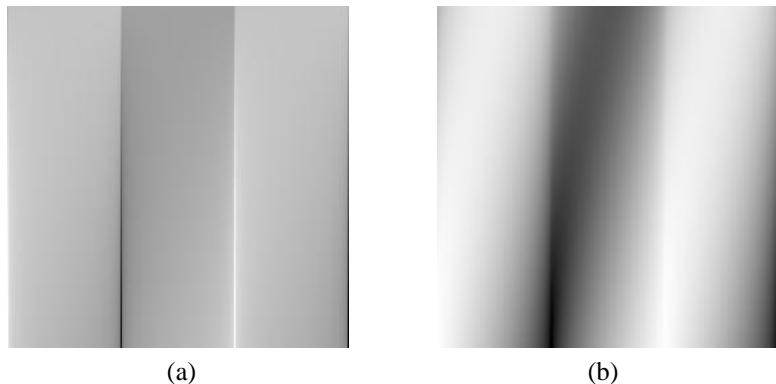


Abbildung 3.1: Kanten oder Linien: Demonstration eines fließenden Übergangs. Die anschauliche Demonstration via *Phasen-Kongruenz* ist aus [Kovesi, 1999, 2002, fig. 2] entnommen. Das Bild (a) illustriert einen fließenden Übergang von einem Step zu einer Linie (`step2line.m(500,-1,256)`), während das Bild (b) zu einem Dach (`step2line.m(500,-2,256)`). Der gradienten-basierte Canny-Detektor (`pgmcanny.c`) weist hier Schwierigkeiten auf (Multi-Antwort und Verschiebung), während die energie-basierten Methoden via *Quadratur-Filterung* (`gfilt.c -s`), mit Verminderung der radialen Bandbreite bei (b), oder *Phasen-Kongruenz* die Hybride holistisch als vertikale Geraden auffassen können. Die originalen 256×256 Bilder sind für Drucker Gamma-korrigiert (`pfgamma.c`) und daher für Wiederverwertern nicht geeignet. Für weitere Diskussionen über Hybriden-Konturen siehe auch [Perona und Malik, 1990, 1991]. (Nutzung der Bilder mit freundlicher Genehmigung von Herrn Peter Kovesi, School of Computer Science & Software Engineering, The University of Western Australia, 25. November, 2002)

tätsbildes meinen wir, als Resultat, ein Bild bzw. eine Sammlung der *Konturenlisten* mehrerer verketteten *Konturenpixels*, die sich ununterbrochen „sinnvoll“ zu der gleichen Kontur gruppieren lassen. Für Inferenzen, ob syntaktische oder semantische, auf den höheren Ebenen verlangen wir, daß eine herausgezogene Kontur *ein-pixel-breit* sei. Eine *Konturenliste* enthält *Konturenpixels*, die binäre Werte annehmen oder eine „*Konturenstärke*“ kodieren können. Anschaulich ist unter *Konturenextraktion* hier eine Art *Federzeichnung* des Eingangsintensitätsbildes vorzustellen. Cf. Abb. 3.2 auf S. 63 oder Abb. 4.6 auf S. 87.

Die Güte einer Konturenextraktion wird in der Arbeit vor allem *visuell* bewertet und Kontrolliert. Der Grund dafür ist die Abwesenheit einer allgemeingültigen und weitgehend akzeptierten Definition des Begriffes *Kontur*, denn in dem Begriff sind u. a. auch *kognitive* und *psychologische* Faktoren involviert. Auf der anderen Seite, vertreten wir die Meinung, daß trotz strenger theoretischen Entwicklung eine *visuelle Inspektion* der Ergebnisse stets notwendig sei. Daher fordern wir auch hierbei auf, daß ein gemeinsames, leicht zugängliches Referenzbild, z. B. das Lena-Bild in Abb. 3.2 auf S. 63 [Lena Sjöblom-Söderberg, 1972] [Munson, 1996], verwendet werde, damit zumindest die Ergebnisse visuell verglichen werden könnten.

Ein Kriterium zur Güte der *Konturenextraktion*, das wir unter Umständen stellen könnten, ist die „*Idempotenz-Eigenschaft*“ [Halmos, 1958, pp. 73–78] des Konturenextraktors (cf. § 2.1.1 ab S. 8). Nach unserer *ad hoc* operativen Definition der *Konturen* (cf. Fußnote 85 auf S. 59) mit *Konturenverkettung* (cf. Abb. 3.2 auf S. 63, Abb. 4.6 auf S. 87), dürfen wir erwarten, daß von einer *nochmaligen* Konturenextraktion sich dasgleiche, oder zumindest ein „Ähnliches“ ergebe. Wir bedenken jedoch, daß ein *idempotenter* Operator *linear* sein muß, während unser Konturenextraktor mit einem binären Ergebnis insgesamt *nicht-linear* ist.

linear ist. Wie dem auch sei, sind wir im Stande, visuell die „Idempotenz-Eigenschaft“ der Konturenextraktoren experimentell „mit Gewissheit“ festzustellen. Wir sprechen daher in diesem Zusammenhang von einer *Pseudo-Idempotenz*.⁸⁶

Wir werden hier die eingesetzten und entwickelten Verfahren mit Kommentaren zur Implementierung minimal beschreiben. Wegen der *Schlechtgestelltheit* [Hadamard, 1923] der Problematik der *Konturenextraktion* spielt die Implementierung hier eine relativ signifikantere Rolle, denn bei jeder *Auflösung der Ambiguität* in einem veröffentlichten Verfahren wird sehr oft zu verschiedenen Ergebnissen geführt. Daher wäre eine Beschreibung unserer Verfahren ohne Verweis auf die wirklich beitragenden C-Quellkoden unvollständig.

Unsere Wahl der Verfahren zur Konturenextraktion *erster Phase* ist zweierlei,

1. Gradienten-basierte Methode: Canny-Detektor (`pgmcanny.c -g`),
2. Energie-basierte Methode: Gabor-Filterung (`gfilt.c -s`),

wobei hauptsächlich die *erste Methode* zugunsten des Rechenaufwands verwendet wird (`pgmell.sh`, `pose.sh`). Es sei dran erinnert, daß der Canny-Detektor nur für *Kanten* (Step) gedacht und optimiert ist, und bei einem Signal wie in Abb. 3.1 auf S. 60 die Eindeutigkeit⁸⁷ der Antwort verlieren wird. Dennoch ist der *Canny-Detektor* ein hervorragendes Verfahren und wird deutlich am meisten zitiert und verwendet. Er ist nach wie vor das *de facto* Standardverfahren zur Kantendetektion seit 1983. Die Abb. 3.2 auf S. 63 illustriert das endgültige Ergebnis unserer Konturenextraktion via gradienten-basierten Canny-Detektor am Beispiel Lena und eine Szene unseres Laboratoriums. Die *zweite Methode* via *lokale Energie* [Morrone und Owens, 1987] [Venkatesh und Owens, 1989] wird benötigt, wenn der Canny-Detektor überfordert wird, wie z. B. im Falle, wo die Lokalisierung der Linien-Konturen in Abb. 3.2-(c) auf S. 63 und der Hybriden-Konturen in Abb. 3.1 auf S. 60 kritisch ist, oder in Abb. 3.4 auf S. 66 und Abb. 3.5 auf S. 67, wo die „Konturen“ nur in der Tiefenstruktur impliziert und physikalisch nicht vorhanden sind.

Das Resultat der Konturenextraktion *erster Phase* sind zwei „gradientenähnliche“ Skalarfelder⁸⁸. Zur *zweiten Phase* der Extraktion verwenden wir Canny’s *Non-Maximum-Suppression*⁸⁹ [Canny, 1983, 1986], um die Pixel zu unterdrücken, derer Konturenstärken

⁸⁶Die Rolle der *Idempotenz* in der Bildverarbeitung ist sehr wenig diskutiert worden [Frei und Chen, 1977] [Gonzalez, 1987, pp. 340–347] [Owens et al., 1989]. [Frei und Chen, 1977] formulieren die Problematik in einer hohen dimensionalen Raum $\mathbb{R}^{m \times n}$, in dem ein $m \times n$ Bild als ein mn -Vektor im linearen Raum betrachtet wird, während wir hier ein Bild als ein Skalarfeld $I : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ behandeln.

⁸⁷Die Eindeutigkeit ist eines der Kriterien der *Optimalität* des Canny-Detektors. Die Kriterien der Optimalität sind: 1. gute Detektion mit maximalem S/N, 2. gute Lokalisation der Kanten, und 3. einfache Antwort auf eine Kante. Der *optimale Detektor* demzufolge ist allerdings *nicht die Gaußsche Ableitung (Gaussian derivative)*, sondern ihr sehr ähnlich [Canny, 1986], während `pgmcanny.c` die *Gaußsche Ableitung* via `iir.c` [Deriche, 1993] zur Approximation des Detektors verwendet, wobei die *Gaußsche Ableitung* wiederum als *regularisierte Realisierung* des Gradienten gedacht weden darf. Cf. Fußnote 88 auf S. 61.

⁸⁸Der *Gradient* am Vektor $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ eines Skalarfeldes, $I(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, ist ein Vektorfeld $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$

$$\nabla I(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial I}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial I}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Im 2-dimensionalen Fall, $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, läßt sich das Vektorfeld in zwei Skalarfeldern darstellen — das eine für den *Betrag* und das andere für die durch einen *Winkel* kodierten *Richtung* des 2-Vektors. Im Skalarfeld für den *Betrag* kodieren wir die *lokalen Konturenstärken* (Cf. Abb. 3.7 auf S. 69). Im Skalarfeld der Winkel tragen wir die *lokalen Richtungen* der Konturenpixel ein und nennen wir es „*Orientierungskarte*“ (`pgmcanny.c -g`). Mit „*gradientenähnlich*“ wird zwei Skalarfelder gemeint, die durch andere Mittel wie z. B. *Quadratur-Filterung* (Cf. `gfilt.c -s` und Abb. 3.7 auf S. 69) oder *Diagonalisierung* der Matrix der *ersten Fundamentalform* bzw. des *Riemann-Tensors* (`pfgauge.c -1`) [Hilbert und Cohn-Vossen, 1932, 1952] [Heckbert und Garland, 1999] gewonnen und als Konturenstärke sowie Orientierungskarte benutzt werden.

⁸⁹Siehe auch [Sahoo et al., 1988] für eine Übersicht für die Technik der Unterdrückung unerwünschter Konturen.

keine lokale Maxima sind. Das Ergebnis wird durch Hysterese-Schwellenwert-Verfolgung (`pfmdir.c -H`) oder „dynamische Schwellenwert-Verfolgung“ (`pgmlink.c -D`) [Venkatesh und Rosin, 1995] zu den endgültigen Konturen verkettet, wobei die isolierten Pixel, die Statistik (`lstfilt.c -s`) der Konturen und ihre Gewichte je nach Bedarf behandelt werden. Obwohl das Ergebnis der Konturenextraktion im Grunde ein binäres Skalarfeld $I_b : \mathbb{R}^2 \mapsto \{0, 1\}$ ist, wobei die Domäne \mathbb{R}^2 nun auf die Konturen stark eingeschränkt ist, sind die Konturenstärken an diesen Stellen zur Verfügung in den Listen beibehalten. Trotz weiterer Entwicklung sind unsere *Implementierung* dies bezüglich und das ASCII-Format für die Konturen-Listen und Ellipsen-Listen den Veröffentlichungen und den entsprechenden Quellcoden von [Rosin, 1994] [Venkatesh und Rosin, 1995] [Rosin und West, 1995] [Rosin, 1995] [Rosin und West, 1989] [Rosin und West, 1997] sehr zu danken.

3.1.1 Canny-Detektor und Gabor-Filterung

Canny-Detektor [Canny, 1983, 1986] (`pgmcanny.c`)⁹⁰ wird vor allem zur Konturen-detection auf dem Skalarfeld $I : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ einer Szene (bzw. dem Intensitätsbild) verwendet. Solches liefert die „optimalen Kanten“, in denen die Kanten-Stärke kodiert sind. Die dazugehörige *Gaußsche Glättung* und diskrete *Ableitung* des Eingangsbildes wird zugunsten der Präzision und des Zeitaufwands statt einer festen Faltungsmaske durch einen *rekursiven Filter* [Deriche, 1993] (`iir.c`) im Ortsbereich oder durch DFT (`dft.c -X -Y`) im Ortsfrequenzbereich durchgeführt⁹¹.

Obwohl die *Gaußsche Glättung* (`pgmgauss.c`) oder *Gaußsche Ableitung* (`pgmcanny.c -g`) am Eingang des Canny-Detektors kongenial einen stochastischen, nachrichtentechnischen Charakter [Canny, 1986] besitzt, lässt sich allerdings aus einer ganz anderen Sicht als eine lineare, neutrale und regularisierende *Apertur* betrachten. Die *Gaußsche Glättung* lässt sich als die lineare und neutrale *Apertur der Beobachtung* interpretieren, die nicht in der physikalischen Realität zu umgehen ist. Für eine *lineare* sowie *neutrale* (uncommitted [ter Haar Romeny, 1999]) Beobachtung ohne Vorzug aller Merkmale bis auf eine „*Skala*“ (*scale*) ist wieder einmal die *Gaußsche Apertur* Gl. (2.66) auf S. 42 die einzige Lösung [ter Haar Romeny, 1999]. Diese Skala (*scale*) entspricht der Standardabweichung σ (`pgmcanny.c -s`) der Gaußschen Apertur. Auf der anderen Seite, da die partielle Ableitung in Canny-Detektor `pgmcanny.c` schlecht gestellt ist, ist solche durch dieselbe *Gaußsche Apertur* zu regularisieren [Schwartz, 1951, 1966] [Florack et al., 1992] [ter Haar Romeny, 1999]. Als Konsequenz ist die *regularisierte Ableitung* des diskretisierten Bildes eine Faltung mit der *Gaußschen Ableitung* (Gaussian derivative), die in `pgmcanny.c` implementiert ist. Die Gaußsche Funktion und ihre Ableitungen sind Lösungen der linearen Diffusionsgleichung, die den linearen *Skala-Raum* (*scale-space*) generiert (cf. Abb. 3.3 auf S. 64).

Gabor-Filterung verwenden wir andererseits im Laboratorium GET, Universität Paderborn, um biologisch plausibel die Bild-Konturen zu extraieren. Der Einsatz der Gabor-Fil-

⁹⁰ `pgmcanny.c` ist im Stande, Bilder in PBM-, PGM-, oder PFM-Format zu bearbeiten. Intern wird in IEEE-754 single [IEEE, 1985] berechnet. Das Programm benutzt die (unendlich ableitbare) Gaußsche *Apertur* und führt die Ableitungen erster Ordnung entlang der beiden „praktischen Bildbasen“ unter Gaußscher *Regularisierung* aus, da eine Ableitung schlecht gestellt ist [Schwartz, 1951, 1966] [ter Haar Romeny, 1999].

⁹¹ In vielen Implementierungen werden zur Glättung kleine oder große räumliche Faltungsmasken der Gaußschen Approximation und zur *Ableitung* kleine Maske wie z. B. der *Sobel-Operator* verwendet [Sobel, 1990] [Danielson, 1990].

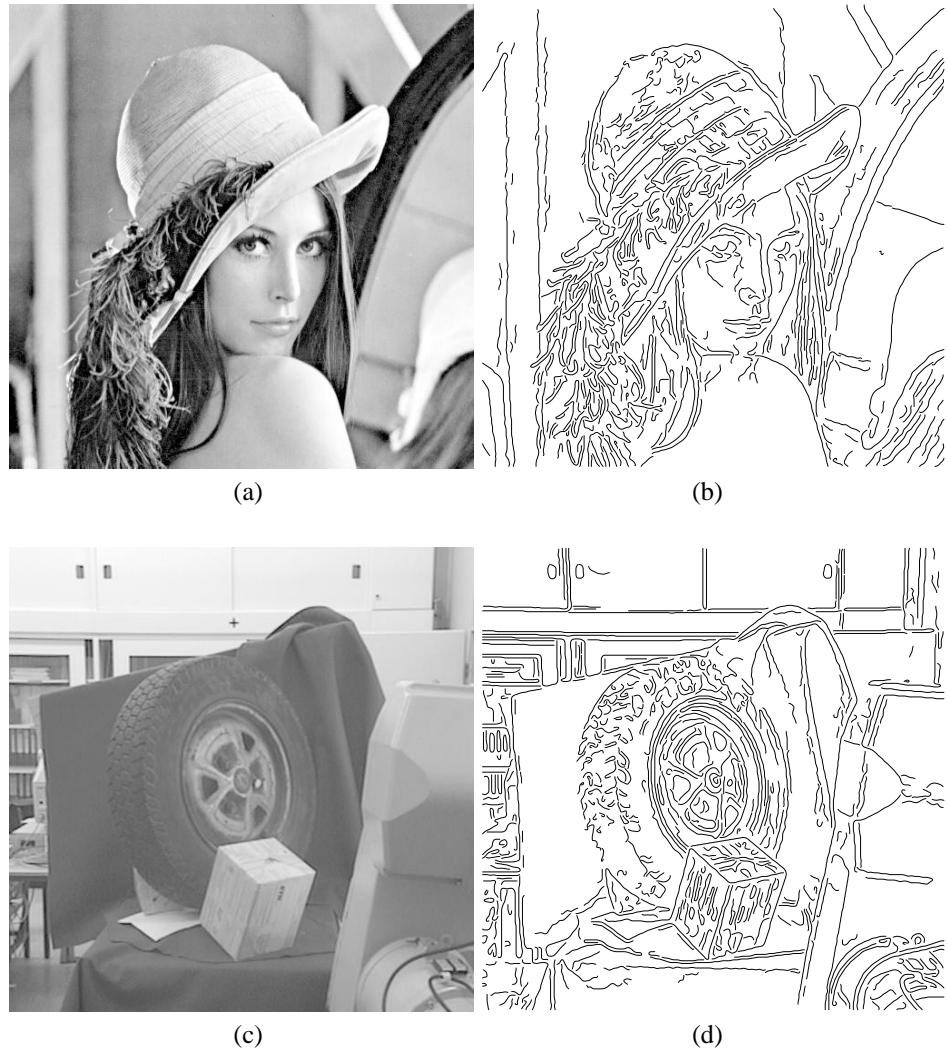


Abbildung 3.2: Canny-Detektor mit Hysterese-Schwellenwert-Kantenverfolgung- und -Verkettung am Beispiel Lena und Rad [Canny, 1983, 1986]. Die Ergebnisse der Konturenextraktion (pgmcanny.c -s1 -g und gradedge.sh -H) aus den 512×512 Intensitätsbildern (a) [Lena Sjööblom-Soderberg, 1972] [Munson, 1996] und (c) sind jeweils in (b) und (d) in Postscript wiedergegeben. Als Aperture wurde der Wert $\sigma = 1.2$ (pgmcanny.c -s1 .2) zur Gaußschen Regularisierung der partiellen Ableitung verwendet [ter Haar Romeny, 1999]. Die originalen 512×512 Bilder (a) und (c) sind für Drucker Gamma-korrigiert (pfmgamma.c) und daher für Wiederverwerthen nicht geeignet.

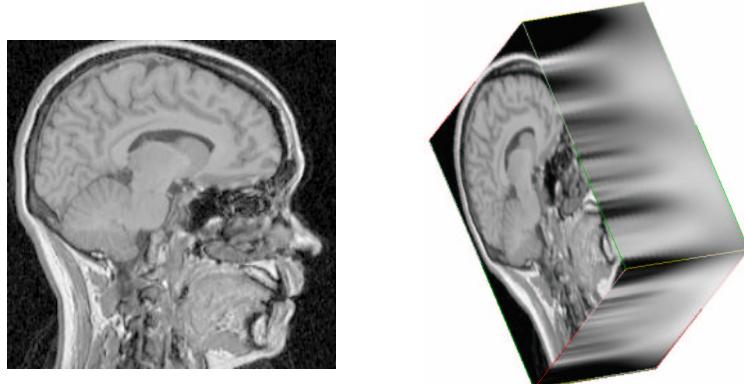


Abbildung 3.3: Die weitere, mit inbegriffene Dimension der Bild-Struktur. Die Beobachtung einer Szene kann nur durch eine Apertur erfolgen. Die Variation des „Umfangs“ einer linearen, neutralen Apertur generiert eine weitere Dimension der wahrgenommenen Bildstruktur. Ohne explizite Benennung strukturiert Hartmann [Hartmann, 1982] hierarchisch die Bild-Merkmale in dieser Dimension. Koenderink [Koenderink, 1984] hat die *lineare Diffusionsgleichung* $\partial L/\partial s = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} L = \Delta L = L_{xx} + L_{yy}$ als die generierende Gleichung für den linearen *Skala-Raum (scale-space)* [Witkin, 1983] identifiziert, daß die partielle Ableitung in Skala (scale) gleich dem *Laplacian* des Luminanzfeldes ist. Die *Gaußsche Funktion* ist die *Greensche Funktion* der Diffusionsgleichung [ter Haar Romeny, 1999]. (Mit freundlicher Genehmigung von Herrn Bart M. ter Haar Romeny, Image Sciences Institute, University Medical Center, The Netherlands, 7. Februar, 2001, ist diese Abbildung aus [ter Haar Romeny, 1999] entnommen.)

terung⁹² in der Bildverarbeitung wird oft durch die neurophysiologischen Fakten inspiriert, wobei die *Quadratur-Funktionen*⁹³ das lineare Verhalten der orientierungsselektiven *einfachen Zellen*⁹⁴ eingesetzt, da in der primären visuellen Rinde (V1, Schichten 4 und 6) wegen ihrer Phasenrelationens [Pollen und Ronner, 1981] *paarweise* modellieren sollen. Desweiteren scheinen die *komplexen Zellen* (in V1, Schichten 2, 3 und 5) auf die Stimuli im rezeptiven Feld *nicht-linear* zu reagieren, wobei die Ausgangssignale mehreren einfachen Zellen weiter zu verknüpfen und keine Differenzierung der (Quadratur-)Phasenverschiebung der

⁹²Siehe [Gábor, 1946] [Ville, 1948] [Marcelja, 1980] [Bastiaans, 1980] [Daugman, 1980, 1985] [Jones und Palmer, 1987a,b].

⁹³Eine reelle, „quasi Einseitenband“-Übertragungsfunktion auf der 2-dimensionalen Fourier-Halbebene entspricht einer komplexen Funktion in der Ortsdomäne. Die Real- und Imaginär-Teile der komplexen Übertragungsfunktion im Ortsbereich stehen in Quadratur-Phasenrelation und werden zur Modellierung [Marcelja, 1980] [Daugman, 1980, 1985, 1989] der einfachen Zellen [Hubel und Wiesel, 1962] [Bishop et al., 1973] [Goodwin et al., 1975] eingesetzt, da die einfachen Zellen meist ebenso in Quadratur-Phasenrelationen *paarweise* zu finden sind [Pollen und Ronner, 1981]. Jeder unserer Gabor-Kanäle ergo modelliert *zwei* in Quadratur-Phasenrelation stehenden einfachen Zellen [Movshon et al., 1978b; Movshon und Tolhurst, 1975] [Andrews und Pollen, 1979] [Marcelja, 1980] [Daugman, 1985, pp. 1164–1165]. Obwohl ein 1-dimensionales *analytisches Signal* [Gábor, 1946] [Ville, 1948] und *Hilbert-Transformation* [Bracewell, 1987] wohl definiert sind, findet man bis heute keinen Konsens über eine Definition multi-dimensionaler Hilbert-Transformation und multi-dimensionalen analytischen Signals. Die *Riesz-Transformation* [Bülow et al., 2000], *partielle Hilbert-Transformation* [Hahn, 1992], *analytisches Bild* [Havlicek et al., 1997] wurden u. a. vorgeschlagen. Siehe auch [Peyrin et al., 1968] [Zhu et al., 1990] [Havlicek et al., 2000] und `dft.c -H1`.

⁹⁴Die Organisation der Zellen und ihrer rezeptiven Felder auf der Retina wurde zuerst in [Hubel und Wiesel, 1962, 1974, 1978], anschließend in [Bishop et al., 1973] [Goodwin et al., 1975] beschrieben, während die Linearität der Zellen in [Movshon et al., 1978a,b; Movshon und Tolhurst, 1975] diskutiert wurde.

Stimuli aufzuweisen. Da die einfachen Zellen verschiedene Bereiche (*Mittelfrequenzen*⁹⁵) auf der Fourier-Ebene verdecken, und unterschiedliche *Orientierung* des Mittelfrequenzvektors, *radiale Bandbreite* und *Orientierungsbandbreite*⁹⁶, werden oft *Multi-Kanäle* Filterung mit der Gabor-Funktion vorgenommen.

In `gfilt.c` werden *lineare* Multi-Kanal-Gabor-Filterungen (MKGF), *nicht-lineares* „Energie-Modell“ [Adelson und Bergen, 1985] und *nicht-lineare* Verknüpfung via „The-winner-takes-it-all“ (WTIA)⁹⁷ am Ausgang der Kanäle implementiert. Im Gegensatz zu unserer alten Implementierung in [Trapp, 1998] verfügt die Implementierung über die Flexibilität, daß sich alle Parameter der Übertragungsfunktionen ändern und online generieren lassen. Dies ist wichtig auch für weitere Untersuchungen, denn der Parameter-Raum einer einzigen Übertragungsfunktion auf der Fourier-Ebene ist mindestens 4-dimensional⁹⁸. Mit solcher Komplexität ist eine experimentelle Möglichkeit für die Verifizierung einer Konjektur immer hilfreich, wenn nicht erforderlich. In Abb. 3.4 auf S. 66 wird die Extraktion einer optisch nicht-vorhandener Konturen via `gfilt.c` demonstriert, was mittels existeriender Implementierung unserer Gabor-Filterung nicht machbar ist. In dieser Abbildung wird der optisch nicht-vorhandene Kreis von `xclock` aus dem X11 lokalisiert. Der kritische Punkt in diesem Beispiel ist eine Drehung der (notwendigerweise) elliptischen Gabor-Funktion um das Eigen-Zentrum um $\pi/2$, daß sich die Antworten im Ortsbereich zu verknüpfen anfangen. Des Weiteren sind beispielsweise die Experimente in Abb. 3.5 auf S. 67 und Abb. 3.6 auf S. 68, wo die Elliptizität, radiale Bandbreite, Mittelfrequenz, und die Positionierung der Kanäle auf der Fourier-Ebene variiert werden müssen, was nur durch die neue Implementierung `gfilt.c` möglich ist.

⁹⁵Da die *Ortsfrequenz* in unserem Fall ein 2-Vektor (mit DC in der „Mitte“) der Fourier-Ebene ist, wird sie hier *polar* via *Betrag* und *Richtung* angesprochen. Unsere Konvention der *Richtung* eines *Ortsfrequenzvektors* sei *horizontal von rechts im Uhrzeigersinn*. Die *Richtung* eines *Ortsfrequenzvektors* entspricht also in der Ortsdomäne der *Propagierungsrichtung* der „Welle“. Mit der Abkürzung *Frequenz* sei der *Betrag* eines *Ortsfrequenzvektors* gemeint, welcher eine gewöhnliche Einheit besitzt. Ein *Fourier-Pixel* (unserer Bezeichnung) auf der Fourier-Ebene entspricht im Ortsbereich einem *Zyklus/Bild* bzw. *cpi* (*cycle per image*). Das heißt, eine Verschiebung um 1 Pixel in der *radialen* Richtung von DC auf der Fourier-Ebene entspricht im Ortsbereich einer Änderung von 1 Zuklus/Bild (*cpi*) der harmonischen Schwingung. Wir benutzen außerdem „Nyquist“ (`gfilt.c -w`) als eine „bildgrößenunabhängige“ Einheit für die Frequenz (im Bezug auf Pixel). Die Frequenz von 1 „Nyquist“ (unserer Konvention) ist also die höchstmögliche Abtastrate, welche einer Wellenlänge von 2 Pixeln pro Zyklus (`gfilt.c -1`) *unabhängig von der Bildgröße* entspricht. Sinnvolle Werte der Frequenz seien also in $[0, 1]$ Nyquist. Die voreingestellte Mittelfrequenz in `gfilt.c, -w0 . 5`, heißt immer 4 Pixel pro Zuklus (`gfilt.c -14`). *Nota bene*: In dieser Konvention wird allerdings ein größeres Bild mit „höherer Auflösung“ (im Bezug auf der Bildgröße) mit den gleichen Parametern in unserem `gfilt.c` gefiltert.

⁹⁶Die *Bandbreite* ist hier durch FWHM (*full-width-half-maximum*) der Übertragungsfunktion in der Fourierdomäne gegeben, was für die Intensität der Objekte in der astronomischen Bildverarbeitung üblich ist. Die FWHM entspricht $2\sigma\sqrt{2\ln(2)} \approx 2.35482\sigma$ für Gl. (2.67) auf S. 43. Wir adoptieren die Definitionen der *radialen Bandbreite* und *Orientierungsbandbreite* in [Bovik et al., 1990, Fig. 3]. Da wir die Übertragungsfunktion im Fourierbereich initialisieren, läßt sich der *Filterentwurf* von den vorgegebenen Parametern (Mittelfrequenz, Bandbreiten, Orientierung, Exzentrizität) in `gfilt.c` unkompliziert online-ausführen.

⁹⁷The-winner-takes-it-all ist ein Algorithmus der nicht-linearen Verknüpfung der *lokalen Energie* [Adelson und Bergen, 1985] am Ausgang der N Kanäle: $\mathcal{F}^{-1} [G_{(\arg \max_i |h_i(x,y)|)}(u, v)I(u, v)]$, $i \in \{0, \dots, N-1\}$, wobei $G_i(u, v) = \mathcal{F}[h_i(x, y)]$ der i -te Gaborkanal in Fourierdomäne, $I(u, v)$ das zu bearbeitende Bild im Fourier-Bereich sind. Siehe `gfilt.c` für Details.

⁹⁸Die *Mittelfrequenz* ist ein 2-Vektor auf der Fourier-Ebene. Die *Bandbreite* (oder die *Elliptizität bzw. aspect ratio* der 2-dimensionalen Gabor- bzw. Gaußschen Funktion) ist ein 2-Vektor (Orientierungsbandbreite und radiale Bandbreite). Diese Dimensionierung schließt bereits eine beliebige Drehung eines elliptischen Gaussians um das eigene Zentrum und die Anordnung multikanäler Übertragungsfunktionen auf der Fourier-Ebene aus. Alternativ kann die Dimensionierung im Zusammenhang vom Gaborschen „*logon*“ [Gábor, 1946] interpretiert werden. Ein *logon* im Falle einer 2-dimensionalen Gaborschen bzw. Gaußschen Funktion ist ein 4-dimensionaler *Hyperwürfel* im *Verbund-Orts-Fourier-Raum*, in dem die *Unbestimmtheitsrelation* [Heisenberg, 1927] herrscht. Daß die 2-dimensionale Gabor-Funktion die *Verbund-Ungenauigkeit* minimiert, hat John G. Daugman in [Daugman, 1985] bewiesen.

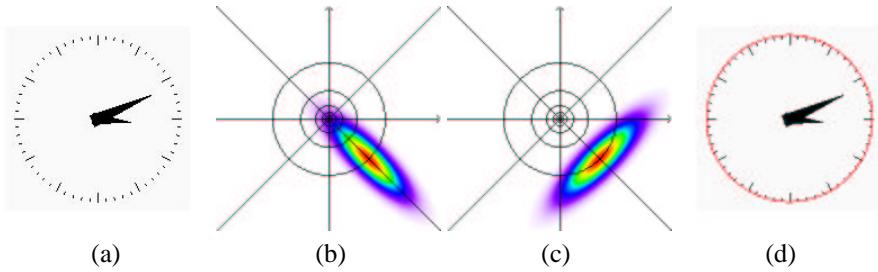


Abbildung 3.4: Gabor-Gestaltung und illusive Kontur: Beispiel `xclock`. Der implizierte Kreis in `xclock` (a) von X11 ist physikalisch nicht vorhanden. Dies ist eine sogenannte „illusive Kontur“. Mit einer üblichen Übertragungsfunktion (b), wie es oft in der Literatur diskutiert wird, ist eine nicht-vorhandene Kontur nicht herauszuziehen, während das Ergebnis (d) durch eine um $\pi/2$ gedrehte Übertragungsfunktion (c) (`gfilt.c -w0 .5 -b0 .5 -Q3 .5`) mit großer Toleranz der Parameter möglich ist. Siehe auch Shell-Scripts `gxclock.sh` und `pgmell.sh`, in dem 12 Kanäle von (c) benutzt sind.

Ein weiterer Grund für eine neue Implementierung für die Multi-Kanal-Gabor-Filterung (`gfilt.c`) ist der experimentelle Versuch, einen „Skala-Raum (scale-space)“, nicht im Sinne von [Hartmann, 1982, 1983] [Witkin, 1983] [Koenderink, 1984], durch den Parameter-Raum der *Bandbreite* und *Mittelfrequenz* der Gabor-Kanäle zu generieren. Cf. Abb. 3.3 auf S. 64.

3.1.2 Kammdetektor unter Abwesenheit der Orientierungskarte

Ein Dilemma bei Anwendung der Gabor-Filterung zur Konturenextraktion ist die Wahl der Anzahl der Kanäle. Sind die Übertragungsfunktionen auf der Fourier-Ebene dicht nebeneinander überlagert, wie bei den *Orientierungssäulen* im visuellen Kortex der Fall ist, so erhöht sich drastisch der Rechenaufwand, denn mit jedem zusätzlichen Kanal ist eine DFT mehr erforderlich, da die Antworten erst im Ortsbereich verknüpft werden. Ist die Anzahl der Kanäle verringert, so verliert man die Konnektivität der endgültigen Konturen. Unsere alte „Standard“- bzw. festprogrammierte Übertragungsfunktionen sind eine Oktave von radialem Bandbreite, 0.5 Nyquist der Mittelfrequenz, und $\pi/12$ für die Orientierungsbandbreite. Dies impliziert eine Elliptizität (aspect ratio) der Gabor-Funktion von 0.394957. Mittels Herstellung einer *Orientierungskarte* (`gradedge.sh`) via diagonalisierung der Hesse-Matrix⁹⁹ (`gmagedge.sh`) haben wir hier jedoch mit dengleichen Parametern wohl konnektierte Konturen extraieren können, wie beispielsweise in Abb. 3.8 auf S. 70 und Abb. ?? auf S. ?? demonstriert ist. Die Lage der extrauierten Konturen werden in Abb. 3.10 auf S. 72 und Abb. 3.11 auf S. 73 überprüft.

⁹⁹Die Hesse-Matrix am Vektor $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ eines zweimal partiell differenzierbaren Skalarfeldes $I : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ lässt sich durch die zweiten Ableitungen wie folgt bilden:

$$H(I(\mathbf{x})) = \frac{\partial^2 I(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 I}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 I}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 I}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 I}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 I}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

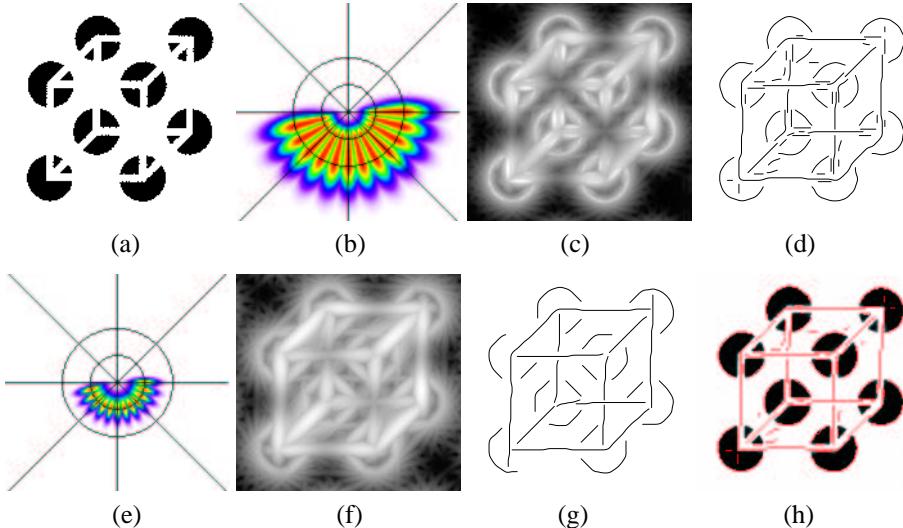


Abbildung 3.5: Gabor-Gestaltung und Wahrnehmung *illusiver Konturen* I. Das originale 175×169 Bild (a) wird mit MKGF von insgesamt 96 Gabor-Kanälen in (b) durch `gfilt.c -pz0 -s -N8 -F0.9 -O0` gefiltert — jeweils 12 Kanäle an der Mittelfrequenz $0.5, 0.45, 0.405, 0.3645, 0.32805, 0.295245, 0.2657205$ und $0.23914845 = 0.5 \times 0.9^7$ Nyquist mit *radialer Bandbreite* von 1 Oktave und *Orientierungsbandbreite* von 15° . Das Bild (c) stellt die *lokale Energie* der Ausgabe vom `gfilt.c` nach dem nicht-linearen WTIA-Verknüpfung im Ortsbereich dar. Einfache Konturen (d) sind aus (c) via `gradedge.sh` zu extrahieren. (Siehe Abb. 3.8-(c) auf S. 70 für den Inhalt des `gradedge.sh`.) Der Aufwand von 96 Kanälen (30 Sekunden auf einem 233 Mhz SISD CISC-Prozessor) in (b), (c) und (d) ist für die *Suche* der geeigneten *Skala* gewidmet. Die geeignete Skala wird an der Mittelfrequenz von 0.23914845 Nyquist gefunden, wobei die Kontur des Würfels als eine dicke *Linie* anstatt zwei *Kanten* „wahrgenommen“ wird. In der Tat lassen sich die *illusiven Konturen* mit großer Toleranz der Parameter und viel wenigerem Aufwand (4 Sekunden in derselben Umgebung) ableiten. Mit 12 Kanälen an der Mittelfrequenz 0.24 Nyquist und elliptischem Verhältnis von 0.3 (e) sind die *lokale Energie* (f) durch `gfilt -pz0 -s -A15 -Q0.3 -w0.24` und die abgeleiteten Konturen (g) durch `gradedge.sh` zu gewinnen. Das Bild (h) überprüft die Lage der Konturen durch eine Überlagerung mit dem originalen Bild (a). Es sei darauf hingewiesen, daß die Ergebnisse (c) und (f) durch *anschauliche* WTIA-Verknüpfung der *lokalen Energie* zu gewinnen sind. Dies bedeutet, daß eine Form der *illusiven Konturen* bereits bei den *einfachen* und *komplexen* Zellen durchaus repräsentiert werden kann, da die hierzu benötigten Operationen für die biologischen Systeme realistisch sind.

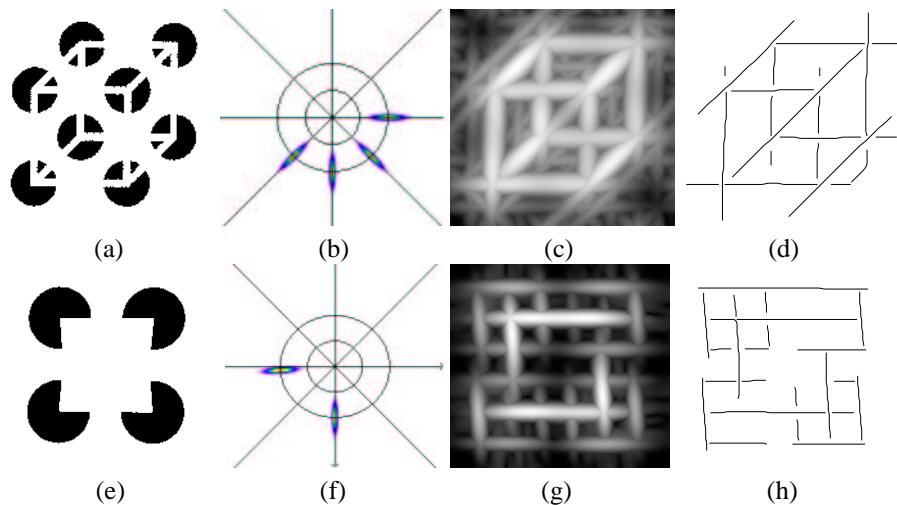


Abbildung 3.6: Gabor-Gestaltung und Wahrnehmung *illusiver Konturen* II. Als Fortsetzung zur Abb. 3.5 auf S. 67 wird hier der redundante Aufwand zur Formung nicht-physikalischer Konturen weiter reduziert. Wir haben in (b) nun 4 Gabor-Kanäle, die den Haupt-Beitrag zur kritischen lokalen Energie in (c) darstellen (`gfilt.c -pz0 -s -w0.5 -Q0.2 -A45 -b0.5`). Das Bild (d) wird nach wie vor durch `gradededge.sh` gewonnen. Weiterhin wird in (e) – (h) auf nur 2 Kanäle reduziert, derer Orientierungen einander in 86° stehen. Da die zwei vertikalen Kanten in (e) gekrümmmt sind, ist in (g) und (h) deutlich stärkere Antwort auf die Kanten oben links und unten rechts vom linken Kanal in (e) zu erkennen. (`gfilt.c -s -Q0.2 -a90 -A86 -w0.5 -b0.5`). Die Verbindungskraft einer optisch mit großer Entfernung unterbrochenen Kontur besteht sehr effizient in der Elliptizität (`gfilt.c -Q`) einer 2-dimensionalen Gabor-Funktion bzw. des Rezeptivfeldes einer einfachen Zelle. Introspektiv gedacht könnte die Wahrnehmung der illusiven Kontur ausgelöst werden durch eine geringe Anzahl der einfachen Zellen in der primitiven Stufe des visuellen Pfades in die Richtung *bottom-up*. Auf der anderen Seite könnte *attentiv* in der Form einer „Schablone“ *top-down* die Zellen-Aktivitäten „interpretiert“ werden. Unser Experiment und Auslegung verfügt über den Vorteil der Anschaulichkeit und kein Verstoß gegen bekannte neurophysiologische Fakten. (Die Energie-Bilder (c) und (g) sind durch `pfmgamma.c -G0.35` Gamma-Korrigiert.)

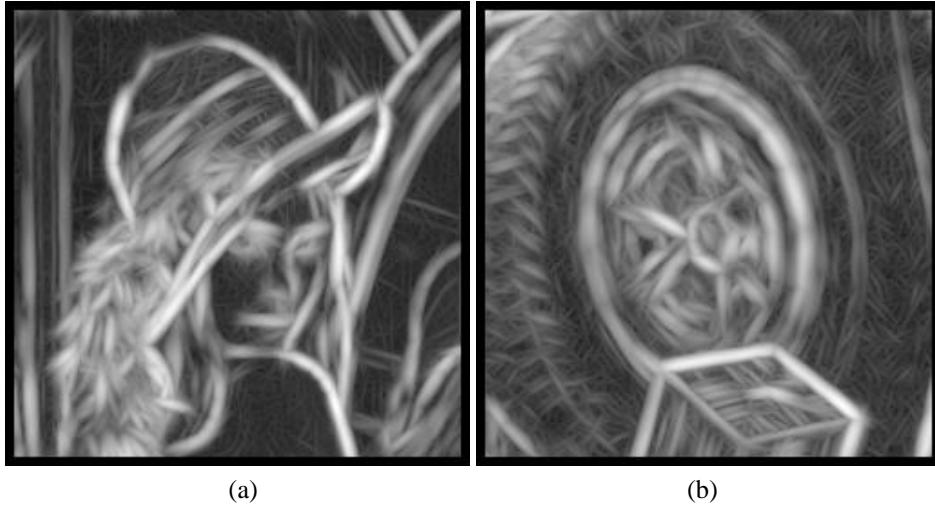


Abbildung 3.7: Lokale Energie via Gabor-Filterung: Beispiel Lena und Rad. MKGF und WTIA von `gfilt.c -s` mit dengleichen Parametern wie in [Trapp, 1998]. Diese dienen als Eingabe für die in Abb. 3.8 auf S. 70 und Abb. ?? auf S. ??.

3.2 Ellipsenextraktion

Für „*Ellipsen-Detektion*“ und -Fitting existieren äußerst zahlreiche Literaturen¹⁰⁰, denn die Ellipsen im 2-dimensionalen Raum sind perspektive Projektionen der Kreise im 3-dimensionalen Raum. Solche geometrischen Primitive sind für besonders wichtig gehalten und sind in weitreichenden Aufgaben in Computer-Vision involviert. Dennoch sind praktische Ergebnisse auf natürlichen Szenen mit der Geschwindigkeit und Präzision, die unsere Forderungen erfüllen, mit heutiger Rechenleistung sehr eingeschränkt.

Mit *Ellipsenextraktion* wird hier *parametrische* Lokalisierung einer Ellipse gemeint, denn mit *parametrischer* Bestimmung der Lage einer Ellipse ist *Sub-Pixel-Präzision* in Bildkoordinaten möglich. Weil die Tiefendaten im rektangulären Pixel-Raster geliefert wird, müssen die Koordinaten allerdings bei der Fusion wieder einmal zu dem *nächsten Nachbar* quantisiert werden. Die Bezeichnung „*Erkennung*“ möchten wir hier mit Absicht vermeiden, denn sie ist für sehr verschiedene Aufgaben verwendet und daher mehrdeutig geworden. Die Aufgabe besteht darin, die Frage

Wo ist die Ellipse in der Szene?

nicht aber

Die Hesse-Matrix bzw. *Weingarten-Abbildung* ist der *ersten* und der *zweiten Fundamentalform* verbunden. Die Diagonalisierung solcher eines 2-dimensionalen Skalarfeldes verrät die lokalen *Hauptrichtungen* $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}_2(\mathbf{x})$ und *Hauptkrümmungen* $\kappa_1(\mathbf{x}), \kappa_2(\mathbf{x}) \in \sigma(H)$ nahe \mathbf{x} . Die *invariante Gaußkrümmung* ist gleich $\det H = \kappa_1 \kappa_2$ und die *invariante mittlere Krümmung* $\text{tr } H/2 = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$, wobei κ_1 und κ_2 die *Hauptkrümmungen* sind. [Hilbert und Cohn-Vossen, 1932, 1952] [ter Haar Romeny, 1999; ter Haar Romeny et al., 1994] [Heckbert und Garland, 1999].

¹⁰⁰unter anderen [Agin, 1981] [Yuen et al., 1989] [Rosin und West, 1989] [Porrill, 1990] [Ellis et al., 1992] [Rosin, 1993a] [Rosin, 1993b] [Yoo und Sethi, 1993] [Gander et al., 1994b] [Gander et al., 1994a] [Karl et al., 1994] [Ho und Chen, 1995] [Fitzgibbon et al., 1996] [Rosin, 1996b] [Rosin, 1996a] [Cabrera und Meer, 1996] [Werghi et al., 1996] [Cui et al., 1996] [Aguado et al., 1996] [Hal'ir und Flusser, 1998] [McLaughlin, 1998]



Abbildung 3.8: Konturenextraktion nach der Gabor-Filterung: Beispiel Lena. Nachverarbeitung nach der Multikanal-Gabor-Filterung und WTIA mit dem Eingangsbild von Abb. 3.7-(a) auf S. 69. Die Bilder (a) und (b) sind die jeweils vorhergehenden Ergebnisse durch den G- und M-Verdünnungsalgorithmus unterm Khoros. Das Bild (c) ist vom Algorithmus (`gradededge.sh`) durch die Kreierung einer Orientierungskarte während der Multikanal-Gabor-Filterung (`gfilt.c -t2`), *Non-Maximum-Suppression*, *Hysterese-Schwellenwert-Verfolgung* (`pfmdir -H`) [Canny, 1983, 1986], binäre Verdünnung (`pgmthin.c`) [Zhang und Suen, 1984] [Lee und Chen, 1992] [Gonzalez, 1987, 398–402] [Guy und Medioni, 1983, 1992, 1996] und Konturenverkettung (`pgmlink.c`) gewonnen worden. Mit einem ähnlichen Verfahren (`gmagedge.sh`), bis auf den Verzicht auf die vorgegebene Orientierungskarte, ist das Bild (d) konstruiert worden. Die für die *Non-Maximum-Suppression* notwendige Orientierungskarte wird durch die *Diagonalisierung* der Hesse-Matrix (v. et. Fußnote 99 auf S. 69 und `pfmgauge.c -g`) des Eingangsbildes Abb. 3.7-(a) auf S. 69 nachgewonnen. Es sei darauf hingewiesen, daß die Konturen in den früheren Ergebnissen (a) und (b) *nicht* ein-pixel-breit sind und viel geringere *Idempotenz-Eigenschaft* als unsere in den Bildern (c) und (d) aufweisen. Cf. § 2.1.1 ab S. 8.

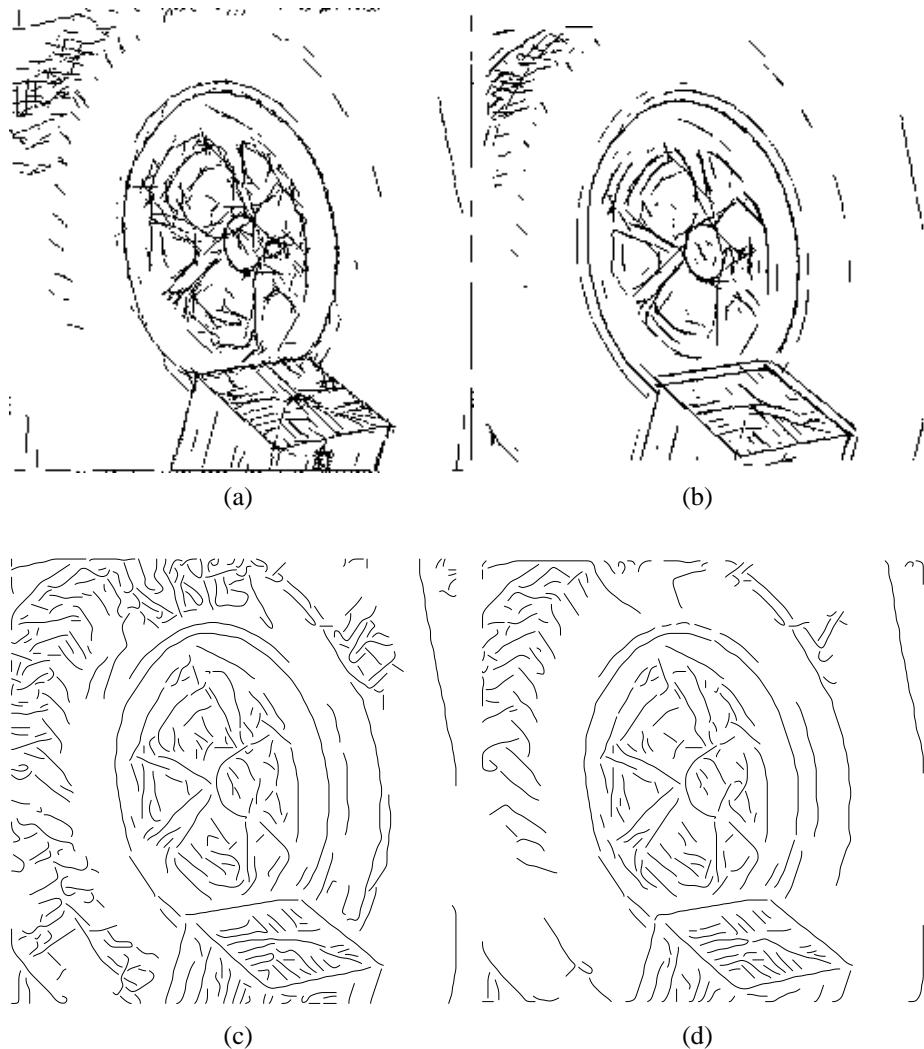


Abbildung 3.9: Konturenextraktion nach der Gabor-Filterung: Beispiel Rad. Nachverarbeitung nach der Multikanal-Gabor-Filterung und WTIA mit dem Eingangsbild von Abb. 3.7-(b) auf S. 69. Die Bilder (a) und (b) sind die jeweils vorhergehenden Ergebnisse durch den G- und M-Verdünnungsalgorithmus unterm Khoros. Das Bild (c) ist vom Algorithmus (`gradedge.sh`) durch die Kreierung einer Orientierungskarte während der Multikanal-Gabor-Filterung (`gfilt.c -t 2`), *Non-Maximum Suppression*, *Hysterese-Schwellenwert-Verfolgung* (`pfmdir -H`) [Canny, 1983, 1986], binäre Verdünnung (`pgmthin.c`) [Zhang und Suen, 1984] [Lee und Chen, 1992] [Gonzalez, 1987, 398–402] [Guy und Medioni, 1983, 1992, 1996] und Konturenverkettung (`pgmlink.c`) gewonnen worden. Mit einem ähnlichen Verfahren (`gmagedge.sh`), bis auf den Verzicht auf die vorgegebene Orientierungskarte, ist das Bild (d) konstruiert worden. Die für die *Non-Maximum-Suppression* notwendige Orientierungskarte wird durch die *Diagonalisierung* der *Hesse-Matrix* (v. et. Fußnote 99 auf S. 69 und `pfmgauge.c -g`) des Eingangsbildes Abb. 3.7-(b) auf S. 69 nachgewonnen. Es sei darauf hingewiesen, daß die Konturen in den früheren Ergebnissen (a) und (b) *nicht* ein-pixel-breit sind und viel geringere *Idempotenz-Eigenschaft* als unsere in den Bildern (c) und (d) aufweisen. Cf. § 2.1.1 ab S. 8.

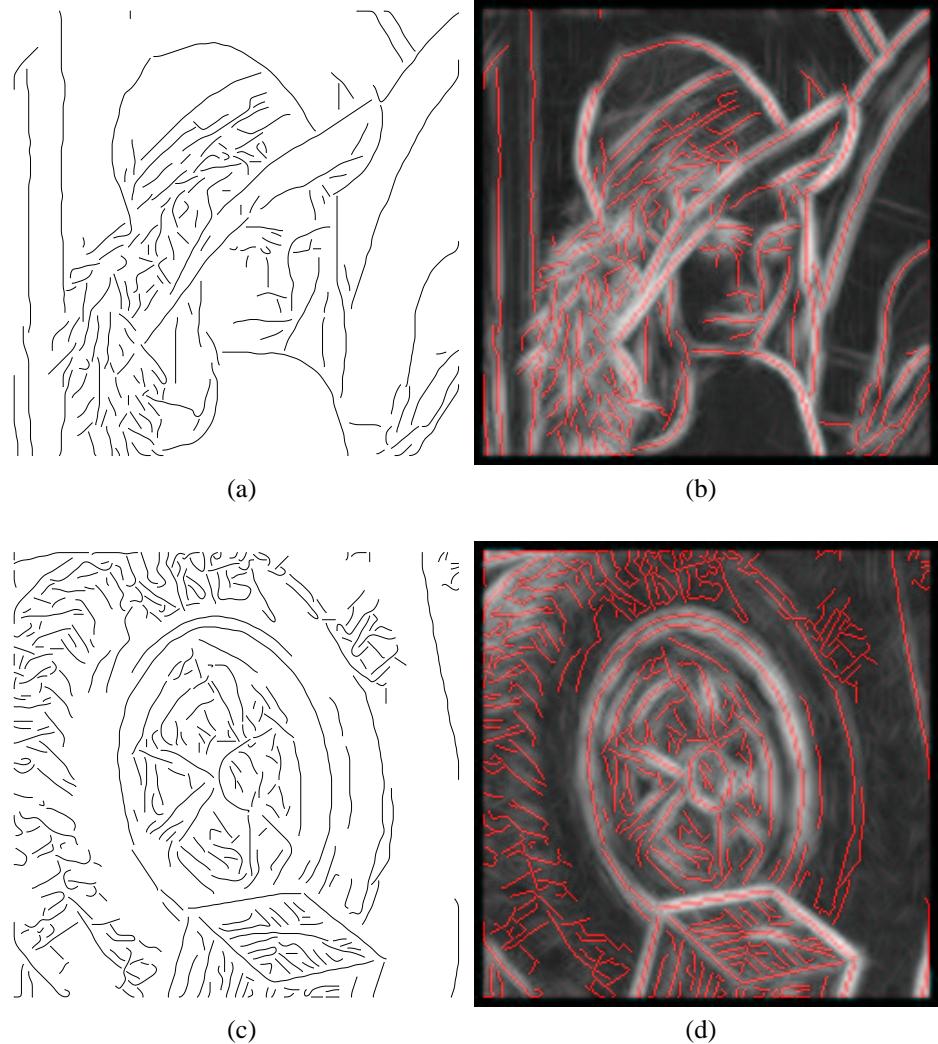


Abbildung 3.10: Lage-Überprüfung-I der Konturenextraktion nach Gabor-Filterung via `gradedge.sh`. In (a) und (c) geben wir jeweils Abb. 3.8–(c) auf S. 70 und Abb. ??–(c) auf S. ?? wieder. Um die Zussamenghörigkeit der *Konturenpixel* zu einer *Konturenliste* zu verdeutlichen, zeichnen wir die Terminatoren jeder Konturenliste mit *schwarzen Punkten*, während der Rest in *grauen Linien* gezeichnet wird. In (b) und (d) werden diese herausgezogenen ein-pixel-breiten Konturen binär ins Bild der lokalen Energie Abb. 3.7 auf S. 69 überlagert, um die Lage der Konturen zu überprüfen. *Nota bene:* Sowohl die lokale Energie als die Konturen-Stärke als auch die Orientierungen der Gabor-Kanäle als Orientierungskarte werden zur Konturenextraktion verwendet.

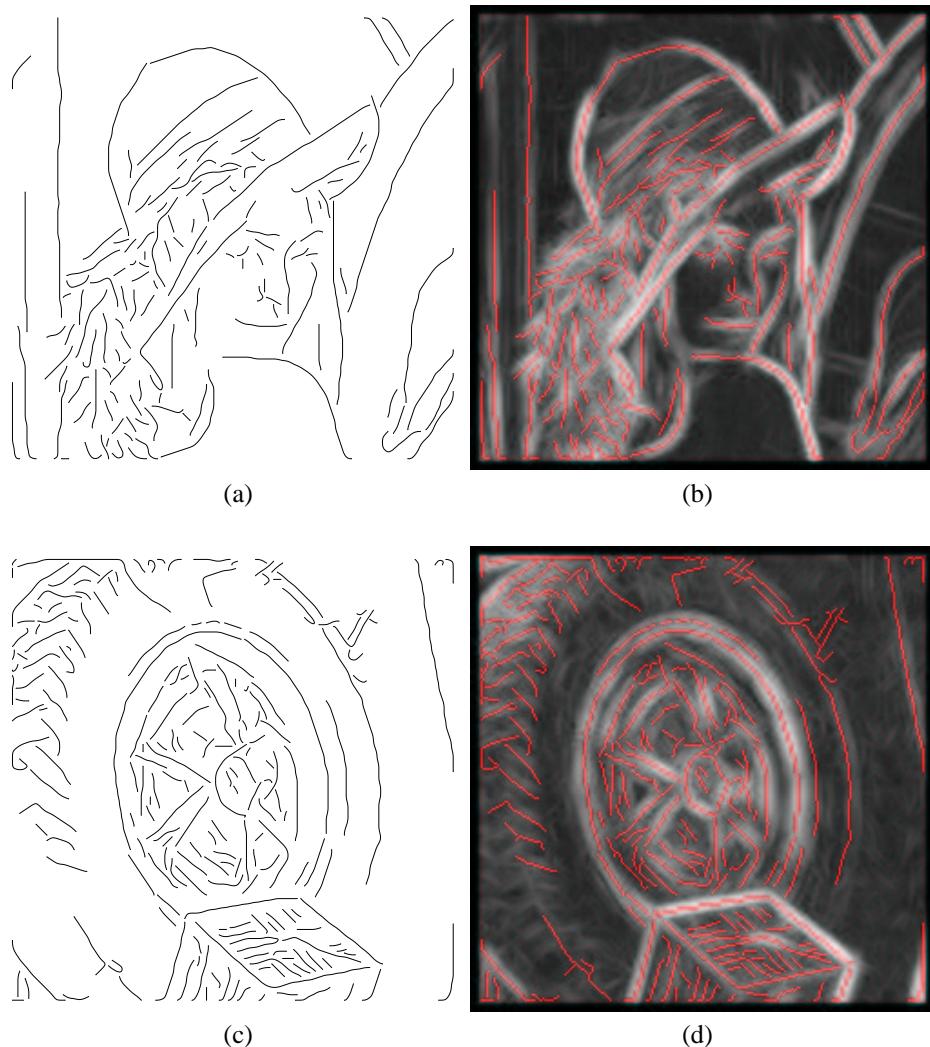


Abbildung 3.11: Lage-Überprüfung-II der Konturenextraktion nach Gabor-Filterung via `gmagedge.sh`. In (a) und (c) geben wir jeweils Abb. 3.8–(d) auf S. 70 und Abb. ??–(d) auf S. ?? wieder. Um die Zussamengehörigkeit der *Konturenpixel* zu einer *Konturenliste* zu verdeutlichen, zeichnen wir die Terminatoren jeder Konturenliste mit *schwarzen Punkten*, während der Rest in *grauen Linien* gezeichnet wird. In (b) und (d) werden diese herausgezogenen ein-pixel-breiten Konturen binär ins Bild der lokalen Energie Abb. 3.7 auf S. 69 überlagert, um die Lage der Konturen zu überprüfen. *Nota bene:* Nur die lokale Energie wird hier als Konturenstärke benutzt. *Keine* Orientierungsinformation ist am Eingang des Algorithmus vorhanden.

Ob eine Ellipse in der Szene existiert?

zu beantworten. Es wird angenommen, daß es eine „visuell signifikante“ Ellipse in der Szene zu finden sei. Bei Schwierigkeiten all dieser Anführungszeichen sei es bedacht, daß auch Rauschen in der Szene die Kontur einer kleinen Ellipse formen kann. Weiterhin muß sich die Ellipse „zum großen Teil“ in der Szene befinden, denn theoretisch ist ein *gerades Segment* im Bild auch ein Teil einer Ellipse, derer Umfang sich der Unendlichkeit annähert. Solche Umstände u. a. werden uns auf ein *ad hoc* Verfahren einschränken.

Die Ansätze via *Evidenz-Akkumulation* sind zwar robust gegenüber Störungen in dem Intensitätsfeld, er heißt aber im Falle einer Ellipsen-Modellierung eine *erschöpfte* Akkumulation der Evidenzen im 5-dimensionalen Parameter-Raum gefolgt durch eine Suche nach dem lokalem Maximum im 5-dimensionalen Evidenz-Raum und ist daher mit sehr hoher Komplexität verbunden. In der Praxis können wir uns den Zeitaufwand für einen *hough-basierten* Algorithmus nicht leisten, denn für die erforderliche Präzision unserer Aufgabe müssen wir den Evidenz-Raum mit einem noch feineren Gitter diskretisieren, was diesen Ansatz für die Echt-Zeit-Anwendung mit der gegenwärtig verfügbaren Rechenleistung nicht-realisierbar macht.

Die Verfahren via *Template-Matching* andererseits, unabhängig davon, wie es „gematcht“ wird, setzt die *Schablone* voraus. Im Falle der Ellipsen besitzt aber die Schablone ein Freiheitsgrad von 5. Dies bedeutet auch eine Suche im 5-dimensionalen Schablonen-Raum plus eine Suche im 2-dimensionalen Bild-Raum. Schränkt man die Freiheit der Schablonen ein, so verliert man die Auflösung der Ellipsen, wie beim Parameter-Raum der Evidenz-Akkumulation der Fall ist. Dies heißt auch beispielweise, daß man das zu demontierende Objekt nicht *schräg* oder *unvollständig* in der Szene haben darf. Wir haben mit unserem Ansatz hier demonstriert, daß solche Nachteile vermieden werden können, ohne größeren, wenn nicht mit geringerem, Rechenaufwand aufwenden zu müssen.

Die Voraussetzung unseres Ansatzes der Ellipsen-Lokalisierung ist eine gute Konturenextraktion, welche in § 3.1 ab S. 59 diskutiert worden ist. Es sei darauf hingewiesen, daß eine „gute“ Konturenextraktion im Vergleichen zu den o. g. Verfahren nur einen sehr geringen Aufwand benötigt. Dennoch unterziehen sich bei unserer *Konturenextraktion* die Eingangsintensitätsdaten aus einer der Stereo-Kameras einer starker *Datenreduktion*. Des Autors Meinung nach sei die *Datenreduktion* eine der *höchsten Direktiven* überhaupt bei einem kybernetischen Versuch, eine natürliche Wahrnehmung nachzuahmen. Dies heißt, schlicht und logisch, die irrelevante Information zu *ignorieren*, um *Effizienz* zu gewinnen. Selbstverständlich führt dieses *Ignorieren der Daten* hier und da zu unerwünschten Konsequenzen. Der Autor persönlich ist zweimal unter genau derselben Situation in den falschen Bus eingestiegen. Im nach hinein stellt sich introspektiv heraus, daß dies genau die Konsequenz der o. g. Unterlassung ist. Es sei aber anstatt des bloßen Verlustes das *Verhältnis* vom Verlust und Gewinn betrachtet, denn unsere Informationsverarbeitung wäre sonst durch die immense Menge der Daten überlastet.

Die Konturen, als Ergebnis vom § 3.1 ab S. 59, präsentieren sich nun als Listen der verketteten Konturen-Pixel, eine syntaktische¹⁰¹ Strukturierung der sonst nicht-zusammenhängenden Bildelemente. Die Konturenlisten werden jeweils direkt mit einer Ellipse modelliert (*kalmell.c*) [Porrill, 1990]. Alternativ werden die Konturenpixel zu Linien und Bogen segmentiert (*pix2line.c* [Rosin und West, 1989]) und anschließend mit Ellipsen modelliert (*ellin3x.c* [Rosin und West, 1989]). Um die signifikanteste Ellipse, die eventuell

¹⁰¹ Cf. Fußnote 85 auf S. 59

in der Szene vorhanden ist, haben wir *ad hoc* die Berechnung mit zusätzlicher Gewichtung, Auslesung und Sortierung versehen lassen (`ellfilt.c`). Uns ist gelungen, in den natürlichen Szenen, mit hoher Sicherheit die „signifikantesten“ Ellipsen präzis zu lokalisieren (`pgmell.sh`, `pose.sh` und `pose2.sh`). Es sei darauf hingewiesen, daß sich unserer Ansatz sehr stark auf eine zuverlässige Konturenextraktionsalgorithmus. Wir demonstrieren in Abb. 3.12 auf S. 75 und Abb. 3.13 auf S. 76 einige natürliche Szene, die den anderen Verfahren mit gleichem Zeitaufwand sehr schwierig sind.

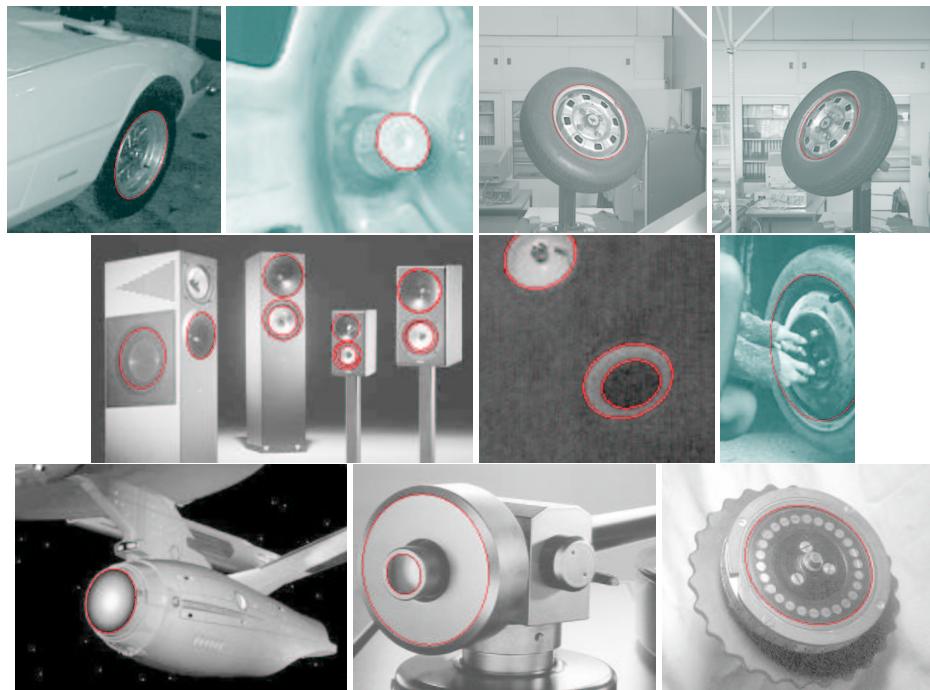


Abbildung 3.12: Ellipsen-Lokalisierung: Beispiele an realen Szenen I.

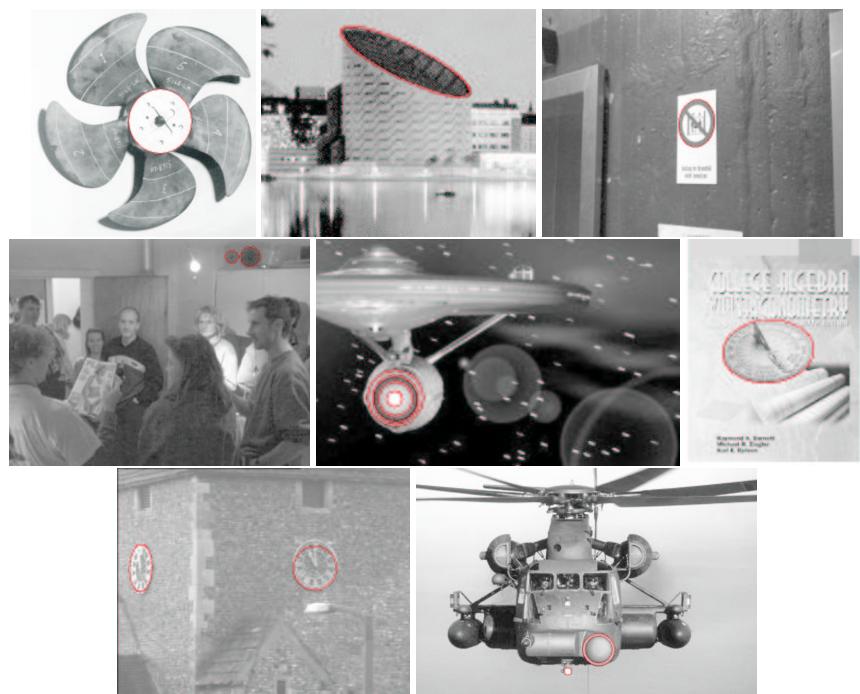


Abbildung 3.13: Ellipsen-Lokalisierung: Beispiele an realen Szenen II.

Kapitel 4

Hyperkreis

Es ist möglich, einen *Kreis* im 3-dimensionalen Raum von ihrer *perspektiven Projektion* in der 2-dimensionalen Ebene, einer *Ellipse*, mittels geeichter Kameras perspektiv geometrisch, mit eingeschränkter Ambiguität, zu *invertieren*. Das Ergebnis solcher Verfahren erfüllt dennoch unsere Forderung der Genauigkeit nicht [Kanatani, 1993]. Eine Vermessung durch *Invertierung* ist nämlich für unsere Aufgabe zu sensitiv und abhängig von der Konturenextraktion. Eine zuverlässige, eindeutige und wohl-definierte „Konturenextraktion“ ist die gemeinsame Schwachstelle im künstlichen Sehen überhaupt, wie wir bereits im Kapitel 3 diskutiert haben.

Unsere parametrische Lagebestimmung eines in der Szene vorhandenen Kreises basiert auf der *Fusion* eines *Skalarfeldes* und eines *Vektorfeldes*, wobei das Skalarfeld aus den *Intensitätsdaten* der Szene und das Vektorfeld aus den *Tiefendaten* derselben Szene besteht. Die Tiefendaten sind die Koordinatenvektoren, die durch geeichte Stereokameras geschätzt werden und in Pixel-Pixel-Korrespondenz zu den Intensitätsdaten stehen [Trapp, 1998]. Die *Fusion* der beiden Datenquellen ergibt eine *Punktmenge* der dreidimensionalen Koordinaten, die eine verrauschte Abtastung des gesuchten *Kreises* im Raum darstellt. Der *Kreis* im dreidimensionalen euklidischen Raum wird als Spezialfall eines 1-*Hyperkreises* (cf. Def. 2.4.17 auf S. 49) aufgefasst und zur Modellierung der Punktmenge parametrisch geschätzt. Die Implementation der entgültigen dreidimensionalen Vermessung ist *hyperkreisbasiert* und nimmt eine Datenmenge *beliebiger Dimension* auf, die nur durch maschinelle Leistungsfähigkeit eingeschränkt ist [Chen et al., 2000].

Der im Kapitel 2 (S. 5) eingeführte geometrische Begriff *Hyperkreis* verallgemeinert auf endlich dimensionale Räume den üblichen *Kreis*. Der Begriff *Hyperkreis* lässt sich nicht nur hier zur Modellierung einer 3-dimensionalen Punktmenge anwenden, sondern er ermöglicht eine *neue geometrische Anschauung höherer dimensionaler Daten*. Wegen der Einfachheit i. a. des Begriffes parallel zu den wichtigsten geometrischen Primitiven argumentieren wir, daß der neue Aspekt höherer dimensionaler Daten von potenzieller Bedeutung sein soll.

4.1 Nicht-Lineare Geometrische Ausreißer-Filterung

Die in der Tiefenkarte vorhandenen Fehler verhindern die genaue Lage-Bestimmung des Objektes, besonders in einer schießen Orientierung, die beim Stereoverfahren nicht vorge-

sehen ist, Cf. Abb. 1.1 auf S. 2, Abb. 4.3 auf S. 80, Abb. 4.5 auf S. 81 und Abb. 4.8 auf S. 89. Die Entfernung der Fehler ist also eine kritische Voraussetzung für ein brauchbares Ergebnis. Wir stellen hier *ad hoc* ein äußerst effektives Verfahren vor. Mit *ad hoc* meinen wir, daß es leider nur für einen 1-Hyperkreis im 3-dimensionalen Raum geschaffen ist. Weiterer Untersuchungen einer möglichen Generalisierung auf n -Hyperkreise lassen sich wünschen¹⁰². Dennoch ist dieser Ansatz zusammen mit der anschließenden Regression deutlich effizienter als eine „robuste Regression“ [Brown, 1982] [Rousseeuw, 1984] [Rousseeuw, 1987], die sich während der Regression unmittelbar mit den „Ausreißern“ auseinandersetzt¹⁰³. Wir nutzen im Gegensatz hierzu das geometrische Vorwissen von einem Kreise zur Vorverarbeitung einer Datenmenge, die Ausreißer enthalten kann, stark aus. *Unser Ansatz ist insgesamt eine robuste Regression.*

In unserer Formulierung der Datenmatrix ist die *Kovarianzmatrix* in den Singulärwerten sowie rechten Singulärvektoren und die *regularisierten Mahalanobis-Distanzen* in den linken Singulärvektoren mitenthalten, Cf. § 2.4.2 ab S. 36 und § 2.4.3 ab S. 38. Mit der Anwendung der SVD wird das Problem der Invertierung einer singulären Kovarianzmatrix oder höher Konditionsnummern umgegangen (`pnmfilt.c`). Während es möglich ist, zum Teil die vorhandenen Fehler in der Tiefenkarte anhand regularisierter Mahalanobis-Distanz zu entfernen, Cf. Abb. 1.1–(c) auf S. 2 und Abb. 4.1 auf S. 78, vermeiden wir dies wegen des relativ höheren Rechenaufwands, einer SVD aller definierten Tiefenvektoren. Die Fehler in der Tiefenkarte werden erst nach Datenreduktionsstadien, Ellipsendetektion und Teil-Fusion mit der Tiefenkarte, nachverarbeitet. Dies erspart uns die Verarbeitung irrelevanter Tiefen-Vektoren, die zu unserem Ergebnis wenig beitragen können.

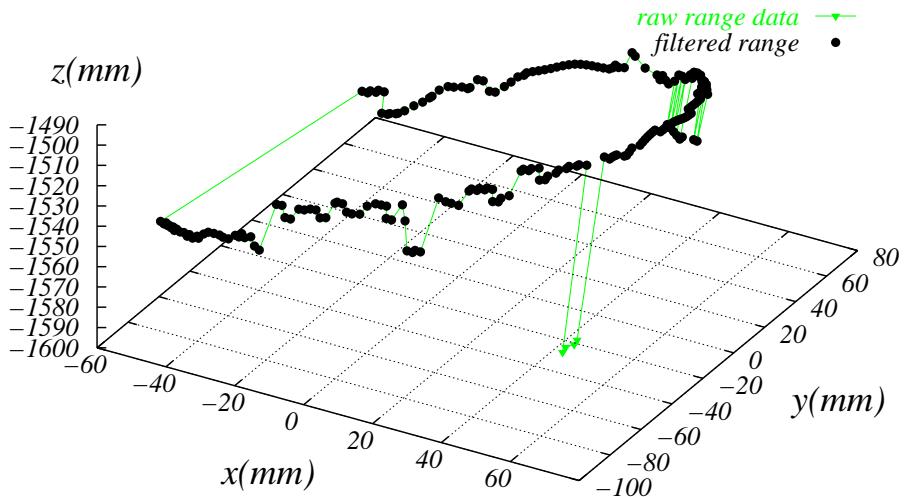


Abbildung 4.1: Regularisierte Mahalanobis-Distanz und Ausreißer. (Def. 2.4.15 auf S. 46) via SVD auf die Tiefenvektoren (`pnmfilt.c`). Die Daten beziehen sich auf die Szene in Abb. 1.1 auf S. 2. Die grünen Punkte stellen die rohen Daten aus der Tiefenkarte dar. Die schwarzen sind übriggebliebenen Vektoren nach unserer Mahalanobis-Filterung. Dies ist mit Abb. 4.2 auf S. 80 zu vergleichen.

¹⁰²In der Tat ist unser Verfahren (`curvfilt.c`) nicht auf einen 1-Hyperkreis eingeschränkt, sondern soll für alle zu gewissem Grad ableitbaren Kurven anwendbar sein.

¹⁰³Siehe `progress` und `progress.exe`. Mit der robusten „Least Median of Squares Regression“ [Rousseeuw, 1984] ist es zwar auch sehr effektiv zur Detektion der „Ausreißer“, ist dies in der Geschwindigkeit ein großer Nachteil.

Die Ambiguität des Begriffes „Ausreißer“ wird vermieden, indem wir *ad hoc* eine operative Definition eines Ausreißers einführen. Um einen Vektor in einer 3-dimensionalen, geordneten Punktmenge $\{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, m\}$ als „Ausreißer“ zu identifizieren und auszuschließen, definieren wir die eine „Abweichung“ $D_i(\lambda)$ des *i*ten Punktes \mathbf{x}_i von einem hypothetischen Kreis als [Chen et al., 2000]

$$D_i(\lambda) = \sum_{\delta=1}^{\lambda} \|(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-\delta}) \times (\mathbf{x}_{i+\delta} - \mathbf{x}_i)\|_2, \quad (4.1)$$

wobei \times ist das 3-dimensionale *Kreuzprodukt* und $(2\lambda + 1)$ die Länge des Fenters einer Nachbarschaft des Punktes \mathbf{x}_i , für den die „Abweichung“ $D_i(\lambda)$ berechnet wird. Ein Punkt \mathbf{x}_i sei als Ausreißer identifiziert und abgelehnt, wenn

$$D_i(\lambda) > 10 \cdot \text{Med}\{D_k(\lambda) : k = 1, \dots, m\}, \quad (4.2)$$

wobei Med bezeichnet den nicht-linearen Median-Operator. Gute Ergebnisse für unsere Anwendung erhalten wir mit einem empirischen Werte von $\lambda = 5$. Diese nicht-lineare Filterung nutzt sehr stark die *geometrische Invarianz* eines Kreises aus und erfüllt die folgenden Kriterien:

- Transparenz unter additiven, Gaußschen, weißen Störungen;
- Unversehrtheit der durchgelassenen Vektoren bzw. Punkte;
- Ausreichende Effektivität für Brauchbarkeit des Ergebnisses.

Diese Filterung hat keinerlei Einfluß auf eine Punktmenge von einem gleichmäßig abgetasteten Kreis mit additiven Gaußschen, weißen Rauschen, während sogar ein typischer menschlicher Tippfehler detektiert werden kann¹⁰⁴. Dies ist eine wichtige Eigenschaft für die anschließenden Schätzungen. Des Weiteren lässt sich *empirisch* feststellen, daß der Algorithmus über eine *Radius-Invarianz* verfügt. In Abb. 4.2 auf S. 80 wird das Ergebnis der geometrischen Filterung am Beispiel Abb. 1.1 auf S. 2 gezeichnet. Die „Saubereit“ dieses Algorithmus wird mit einem weiteren Beispiel Abb. 4.3 auf S. 80 in Abb. 4.4 auf S. 81 demonstriert. Wir sehen in Abb. 4.5 auf S. 81, daß er für diese bestimmte Aufgabe des Projektes *kritisch und unentbehrlich* ist.

4.2 Hyperebene via SVD

Sei eine Menge von m Beobachtungsvektoren $\{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, m\}$

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{bmatrix},$$

Wir nennen den Spaltenvektor \mathbf{x}_i einen *Punkt* in \mathcal{E}^n , einem n -dimensionalen euklischen Raum mit gewöhnlichem Skalarprodukt. Ein $(n - 1)$ -*Flach* bzw. eine *Hyperebene* $\Pi \subset \mathcal{E}^n$

$$\Pi = \{\mathbf{x}_i : p_1 x_{i1} + p_2 x_{i2} + \dots + p_{n+1} x_{in} = 0\}, \quad p_1, p_2, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

¹⁰⁴Cf. `ghyper.c`, `gaussian.c`, `curvfilt.c`

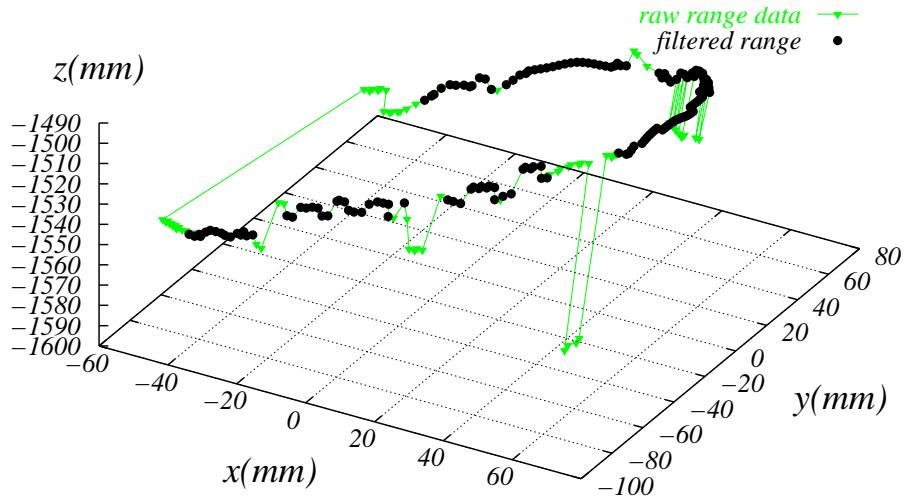


Abbildung 4.2: Beispiel der *geometrischen Filterung* der Ausreißer nach Gl. (4.1) auf S. 79 und Gl. (4.2) auf S. 79 (`curvfilt.c`). Die grünen Punkte stellen die rohen Daten aus der Tiefenkarte dar. Die schwarzen sind übriggebliebenen Vektoren nach der Filterung. Die Daten beziehen sich auf die Szene in Abb. 1.1 auf S. 2. Dies ist mit Abb. 4.1 auf S. 78 zu vergleichen. Mit starker Ausnutzung von *geometrischen Vorwissen* ist unser Verfahren in der Lage, effizienter ein „saubereres“ Ergebnis zu liefern.

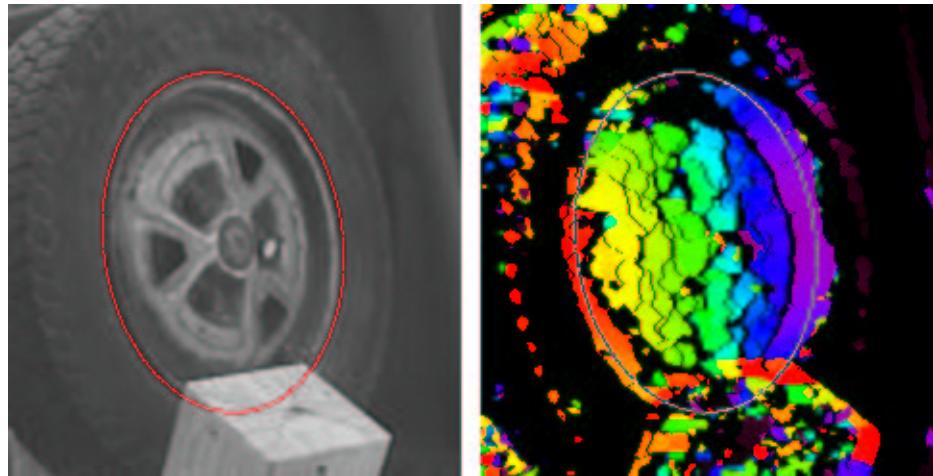


Abbildung 4.3: Tiefendaten in kritischer Orientierung: Beispiel Rad. Dieses Beispiel stellt eine Herausforderung für das Stereoverfahren [Trapp, 1998]. Das Rad steht in einer kritisch schrägen Orientierung an der Vermögensgrenze des Stereoverfahrens. Dennoch liegt die Orientierung weit innerhalb des Vermögens unserer Algorithmen [Chen et al., 2000].

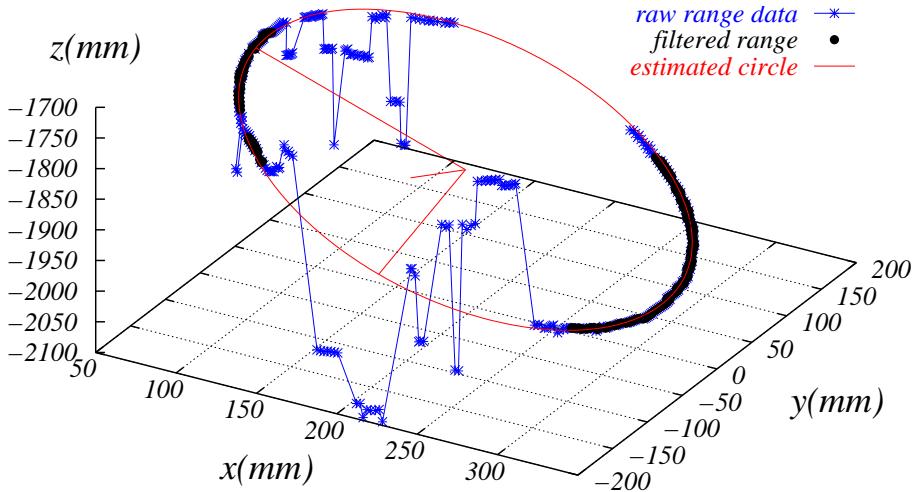


Abbildung 4.4: Daten-Fusion *mit* Ausreißer-Detektion und Filterung. Beispiel der geometrischen Ausreißer-Filterung im Bezug auf die Szene in Abb. 4.3 auf S. 80 [Chen et al., 2000]. Die blauen Punkte stellen die rohen Vektoren aus der Tiefenkarte dar. Die schwarzen sind übriggebliebenen Vektoren nach unserem Verfahren. Im voraus wird der geschätzte Kreis rot gezeichnet mit RMS-Residuum: 1.0677036 mm, Orientierungsunsicherheit: 0.67828°, Radius: 180.3740 mm. Vgl. mit dem Ergebnis in Abb. 4.5 auf S. 81, wo unsere Ausreißer-Filterung *nicht* durchgeführt wird. (Da die Stereo-Messungen [Trapp, 1998] durch 32-bit IEEE-754-Single-Precision [IEEE, 1985] [Goldberg, 1991, p. 193] in Khoros-Float-Format gegeben sind, werden hier die Ergebnisse in maximal 8 Dezimalstellen ausgedruckt, obgleich die Daten intern in mindestens 64-bit-double verarbeitet worden sind.)

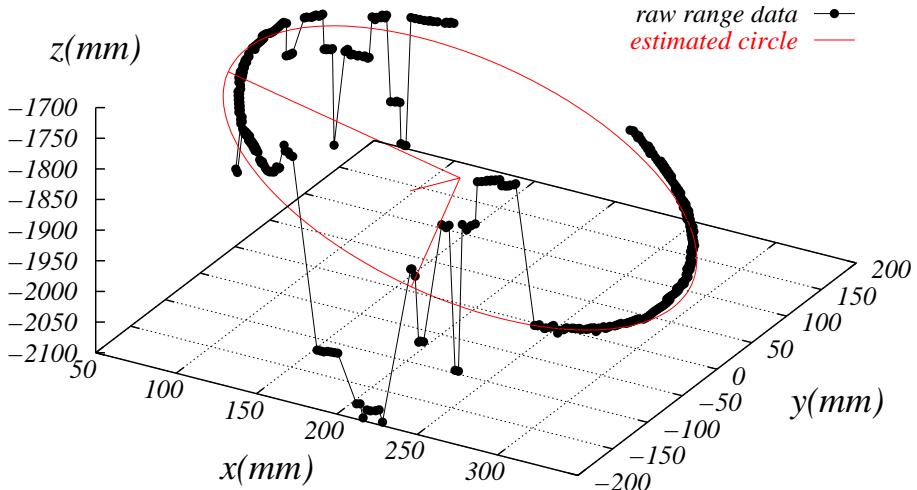


Abbildung 4.5: Daten-Fusion *ohne* Ausreißer-Detektion und Filterung. Im Vergleich zu Abb. 4.4 auf S. 81 wird in dieser Abbildung die Kreisbestimmung *ohne* Ausreißer-detection und -Filterung durchgeführt [Chen et al., 2000]. Der geschätzte Kreis mit RMS-Residuum: 49.28086 mm, Orientierungsunsicherheit: 29.1249°, Radius: 176.89928 mm wird im voraus rot gezeichnet (Da die Stereo-Messungen [Trapp, 1998] durch 32-bit IEEE-754-Single-Precision [IEEE, 1985] [Goldberg, 1991, p. 193] in Khoros-Float-Format gegeben sind, werden hier die Ergebnisse in maximal 8 Dezimalstellen ausgedruckt, obgleich die Daten intern in mindestens 64-bit-double verarbeitet worden sind.)

soll die Menge $\{\mathbf{x}_i\}$ modellieren mit dem gesuchten Parameter-Vektor

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

In [Chen et al., 2000] die „beste“ *affine Teilraum* durch eine SVD berechnet. Die Punkte \mathbf{x}_i werden wie Gl. (2.40) auf S. 28 von oben nach unten, Cf. § 2.4 ab S. 28, in einer $m \times n$ Datenmatrix \mathbf{D} eingetragen¹⁰⁵.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \mathbf{x}_3^T \\ \mathbf{x}_4^T \\ \mathbf{x}_5^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3n} \\ x_{41} & x_{42} & \cdots & x_{4n} \\ x_{51} & x_{52} & \cdots & x_{5n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Wir appendieren eine zusätzliche Spalte mit „Einsen“ und formen eine $m \times (n + 1)$ augmentierte Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & 1 \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3n} & 1 \\ x_{41} & x_{42} & \cdots & x_{4n} & 1 \\ x_{51} & x_{52} & \cdots & x_{5n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Sei sortierte Singulärwertzerlegung von \mathbf{A} nach Gl. (2.23) auf S. 19 Cf. § 2.1 ab S. 6 und § 2.3 ab S. 16,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T, \quad (4.7)$$

dann ist die letzte Spalte in \mathbf{V}

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{v}_{n+1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

eine Lösung der kleinsten Quadrate. Cf. Gl. (2.31) auf S. 25. Dies ist äquivalent zur Lösung der Gleichung

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{0}, \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{p}\|_2 = 1, \quad (4.9)$$

Wegen Meßfehler und anderen Störungen besitzt \mathbf{A} in der Regel einen trivialen Kern. In anderen Worten, die letzte rechte Singulärvektor \mathbf{v}_{n+1} ist die Lösung des Minimierungsproblems, Cf. Gl. (2.31) auf S. 25,

$$\mathbf{p}^* \mathbf{A}^* \mathbf{Ap}, \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{p}\|_2 = 1. \quad (4.10)$$

¹⁰⁵Die Daten $\{\mathbf{x}_i\}$, werden in unserer Anwendung die Koordinaten-Vektoren aus der Tiefenkarte sein, Cf. Abb. 1.1 auf S. 2.

Dies gilt für alle unitär invarianten Normen.

Da Variierungen von allen Elementen \mathbf{x}_{ij} in der Teilraummodellierung involviert sind, kann diese Methode als *total least squares* (TLS)¹⁰⁶ betrachtet werden.

4.3 Hyperkreis via SVD

Nach Def. 2.4.17 auf S. 49 in § 2.4.6 sei der gesuchte Hyperkreis die Schnittmenge der $(n - 1)$ -Hyperebene $\tilde{\Pi} \subset \mathcal{E}^n$

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j \tilde{p}_j \right) + \tilde{p}_{n+1} = 0 \quad (4.11)$$

und einer noch zu determinierenden $(n - 1)$ -Hypersphäre $S \in \mathcal{S}^{n-1} \subset \mathcal{E}^n$

$$\sum_{j=1}^n (x_j - c_j)^2 - r^2 = 0 \quad (4.12)$$

mit unbekanntem Vektor $\mathbf{z} = \{c_1, \dots, c_n\} \in \tilde{\Pi} \subset \mathcal{E}^n$ und $r \in \mathbb{R}$, wobei die Hyperebene $\tilde{\Pi}$ aus § 4.2 ab S. 79 ist durch \mathbf{n} und \mathbf{p} gegeben mit

$$\tilde{\Pi} = \{\mathbf{x} + \mathbf{p} : \mathbf{x} \in \text{Ker } \mathbf{n}^T, \mathbf{n}, \mathbf{p} \in \mathcal{E}^n, \mathbf{p} \in \tilde{\Pi}\}. \quad (4.13)$$

Wegen der Einschränkung $\mathbf{z} \in \tilde{\Pi}$ wird in unserem Ansatz die Bestimmung der $(n - 1)$ -Sphäre in \mathcal{E}^n der (4.12) durch das Modellieren einer $(n - 2)$ -Sphäre in \mathcal{E}^{n-1} ersetzt, indem wir die Vektoren in Gl. (4.5) auf S. 82 auf die *affine Teilraum* $\tilde{\Pi}$ projizieren lassen durch eine *affine Projektion*. Mit $\mathbf{x}'_i \in \mathcal{E}^{n-1}$ bezeichnen wir die *orthogonale* Projektion von $\mathbf{x}_i \in \mathcal{E}^n$ auf den affinen Teilraum $\tilde{\Pi}$.

Repräsentiert wird der affine Teilraum $\tilde{\Pi}$ in (4.13) durch einen $(n - 1)$ -dimensionalen Richtungsteilraum und ein Element in $\tilde{\Pi}$. Der Richtungsteilraum wird wiederum durch eine orthonormale Basis für das orthogonale Komplement vom Normal \mathbf{n} repräsentiert. Diese Basis ist explizit durch eine Singulärwertzerlegung auf der Zeilen-Matrix \mathbf{n}^T gegeben (Cf. Abb. 2.2 auf S. 20)¹⁰⁷. Gesucht sind also jetzt das Zentrum $\mathbf{z}' = (c'_1, \dots, c'_{n-1}) \in \mathcal{E}^{n-1}$ und der Radius $r \in \mathbb{R}$ von einer $(n - 2)$ -Sphäre $\subset \tilde{\Pi}$, $\sum_{j=1}^{n-1} (x'_j - c'_j)^2 = r^2$.

Sei $\mathbf{x}'_i \in \mathcal{E}^{n-1}$ die orthogonale, affine Projektion von dem Vektor $\mathbf{x}_i \in \mathcal{E}^n$ aus \mathbf{D} in Gl. (4.5) auf S. 82 auf dem $(n - 1)$ -dimensionalen affinen Teilraum $\tilde{\Pi}$. Sei \mathcal{P} der Richtungsteilraum von $\tilde{\Pi}$ und \mathbf{P}_n elementarprojektor auf \mathbf{n} aus Gl. (4.13) auf S. 83. Die Datenmatrix nach der affinen Projektion wird zu (Cf. § 2.4.1 ab S. 29)

$$\mathbf{D}_\pi = \mathbf{D} - \mathbf{Z}_m \mathbf{D} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathcal{P}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{D}_\pi = \mathbf{D} - \mathbf{Z}_m \mathbf{D} \mathbf{P}_n, \quad (4.14)$$

¹⁰⁶[Golub und Van Loan, 1980] [Van Huffel, 1987, 1988, 1997] [Van Huffel und Vandewalle, 1987; Van Huffel und Vandewalle, 1987]. [Van Huffel und Vandewalle, 1991] [Späth, 1999] [Fierro et al., 1997] Dies ist in `hyper.c` implementiert. Siehe `matstat.c -Q1` für eine weitere Implementierung der TLS.

¹⁰⁷Das allgemeine Problem, eine orthonormale Basis von einem einzigen Vektor heraufzubauen, ist *nicht* durch den Gram-Schmidt-Prozeß zu realisieren. Dies ist ein *sehr oft zu sehendes Misverständnis*. Sondern, ein *Householder-Reflektor* (Cf. § 2.1.6 ab S. 11) wird vorgeschlagen (von Eric Rudd im Usenet; siehe auch unsere Implementierungen `basis33.c` und `gmat.c -o`) oder den Kern der $1 \times n$ Matrix \mathbf{n}^T via SVD zu berechnen, Cf. Abb. 2.2 auf S. 20, `matstat.c -s0`, `schur2 -s` und `svd.c`.

wobei die letzte Spalte von \mathbf{D}_π durch eine Drehung \mathbf{Q} eine Konstante k wird. Sei \mathbf{D}_π^{n-1} die $m \times (n-1)$ Untermatrix von den ersten $n-1$ Spalten von $\mathbf{D}_\pi \mathbf{Q}$,

$$\mathbf{D}_\pi^{n-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1'^T \\ \mathbf{x}_2'^T \\ \mathbf{x}_3'^T \\ \mathbf{x}_4'^T \\ \mathbf{x}_5'^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m'^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x_{1(n-1)} \\ x'_{21} & x'_{22} & \cdots & x_{2(n-1)} \\ x'_{31} & x'_{32} & \cdots & x_{3(n-1)} \\ x'_{41} & x'_{42} & \cdots & x_{4(n-1)} \\ x'_{51} & x'_{52} & \cdots & x_{5(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{m1} & x'_{m2} & \cdots & x_{m(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Die neue $m \times (n-1)$ Datenmatrix \mathbf{D}_π^{n-1} mit Punkten $\mathbf{x}'_i \in \mathcal{E}^{n-1}$ ist durch eine $(n-1)$ -Sphäre zu modellieren (hyper . c -s). Um Iterationen zu vermeiden, minimieren wir MMSE (Modified Mean Square Error) von von Thomas und Chan¹⁰⁸,

$$Q = \sum_{i=1}^m \left[\left[\sum_{j=1}^{n-1} (x'_{ij} - \tilde{c}'_j)^2 \right] - \tilde{r}^2 \right]^2. \quad (4.16)$$

welche zu einem linearen System

$$\begin{bmatrix} x'_{11} & \cdots & x'_{1n-1} & 1 \\ x'_{21} & \cdots & x'_{2n-1} & 1 \\ x'_{31} & \cdots & x'_{3n-1} & 1 \\ x'_{41} & \cdots & x'_{4n-1} & 1 \\ x'_{51} & \cdots & x'_{5n-1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ x'_{m1} & \cdots & x'_{mn-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum x'^2_{1j} \\ -\sum x'^2_{2j} \\ \vdots \\ -\sum x'^2_{mj} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

führt mit

$$s_j = -2c'_j \quad (j = 1, \dots, n-1); \quad s_n = \sum_{j=1}^{n-1} c'^2_j - r^2. \quad (4.18)$$

Dies wiederum wird durch eine SVD gelöst und ergibt das geschätzte Zentrum \tilde{c}'_j und Radius \tilde{r}

$$\tilde{c}'_j = -\frac{s_j}{2} \quad (j = 1, \dots, n-1); \quad \tilde{r}^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{c}'_j^2 - s_n. \quad (4.19)$$

Das geschätzte Zentrum $\tilde{\mathbf{z}} \in \tilde{\Pi}$ ergibt sich durch k und die Umkehrisometrie \mathbf{Q}^{-1} :

$$\tilde{\mathbf{z}} = [\tilde{c}'_1 \quad \dots \quad \tilde{c}'_{n-1} \quad k] \mathbf{Q}. \quad (4.20)$$

Der Orthoprojektor $\mathbf{P}_{\mathcal{P}}$ bzw. sein Komplementärer \mathbf{P}_n in (4.14) wird in unserem Projekt durch einen *schießen* Projektor ersetzt. Cf. Gl. (2.9) auf S. 10 und Gl. (2.10) auf S. 10 in § 2.1.5 und [Chen et al., 2000] sowie hyper . c -c und hyper . c -s.

¹⁰⁸[Thomas und Chan, 1989]. Siehe auch [Bookstein, 1979] [Landau, 1987] [Thomas und Chan, 1989] [Takiyama und Ono, 1989] [Chaudhuri und Kundu, 1993].

In § 4.2 ab S. 79 und § 4.3 ab S. 83 haben wir die Bestimmung eines üblichen Kreises im 3-dimensionalen Raum auf n -dimensionale Räume verallgemeinert. Sie ist ein *lineares* Verfahren zur Bestimmung eines $(n - 2)$ -Hyperkreises in \mathcal{E}^n , wo alleine die *Singulärwertzerlegung* alle algebraischen Aufgaben übernehmen kann. Ein üblicher Kreis im 3-dimensionalen Raum wird zu einem Spezialfall unserer *Hyperkreise*. In `hyper.c` wird der lineare Algorithmus zur Bestimmung eines $(n - 2)$ -Hyperkreises implementiert. Zum Testen der Hyperkreise in höheren dimensionalen Räumen ist in `ghyper.c` der Algorithmus 2.4.19 (S. 50) implementiert, welche algorithmisch unabhängig voneinander arbeiten. Als Eingaben für `ghyper.c` wird ein Radius, ein Zentrum beliebiger Dimension und ein Normalvektor dergleichen Dimension angegeben. Als Ausgabe wird eine beliebige Anzahl der Zufallspunkte ausgegeben, die auf dem Hyperkreis liegen (*Cf.* Abb. 2.6–(b) auf S. 51):

```

# ghyper version 0.9 Nan-shan Chen C19990607/20000519
# command line: "ghyper -n 1024 -c param4"
# ranmar subsequence (555, 555), position = 177439 (1-indexed)
# This sequence may be reproduced by -I555 -K555 -G177439
# hypercircle generated from the following parameters:
# Center:   10  20  30  40
# Normal:    1   1   1   1
# radius:    5
      6.58322   21.232497   28.921771   43.262513
      6.4437391  23.355132   30.815672   39.394457
      9.6310175  16.177576   32.952728   41.238679
      5.6892833  21.102441   31.437061   41.771215
      6.2398444  19.468438   32.97328    41.318438
      9.263555   20.853     26.497652   43.385793
      9.4440056  16.942309   33.905894   39.707791
      14.30428   18.594589   28.935448   38.165683
      12.446607  15.858661   31.309625   40.385107
      6.2360415  19.246432   32.084509   42.433018
      10.327064  19.137466   33.732248   36.803222
      11.08734   22.151748   31.020706   35.740207
      6.6191481  23.677369   29.814109   39.889373
      13.458571  20.598017   29.463804   36.479608
      5.8044821  21.903488   31.903531   40.388499
      7.7412601  17.281475   32.734739   42.242525
      10.060879  19.329395   26.814827   43.794899
      13.227736  21.007963   26.366374   39.397927
      10.766811  18.418762   33.69203    37.122396
      11.378956  23.366027   27.122083   38.132933
      7.6076424  23.896191   30.465779   38.030388
      14.19957   19.528495   28.44585    37.826084
      12.068194  19.990756   25.920701   42.020349
      10.548548  21.035574   32.552484   35.863394
      12.123608  16.380915   28.97654    42.518937
      10.9803   22.692399   30.404815   35.922486
      11.675553  18.406669   33.093409   36.824368
      .
      .
      .
      .

```

Diese Daten ergeben durch `hyper.c -c -f1` folgende Ausgabe¹⁰⁹:

```
Offset: 10.01890223 19.95226238 29.94313783 40.08569756
Normal: 0.50000000 0.50000000 0.50000000 0.50000000
Center: 10.00000000 20.00000000 30.00000000 40
radius: 5.00000000
hypersphere orthogonal rmse: 0.00000000
hyperplane algebraic rmse: 0.00000000
hyperplane orthogonal rmse: 0.00000000
uncertainty: 0.00000000 degrees
```

¹⁰⁹Für kompakte Darstellung sind die generierten Daten in niedrigerer Präzision zitiert während für `hyper.c` die Ausgaben mit voller Präzision `double` von `ghyper.c -cfl` benutzt werden müssen.

Mit additiven, erwartungsfreien, Gaußschen, weißen Zufallsvektoren¹¹⁰ wurden die Algorithmen höheren dimensionalen Räumen bis zur Dimension 150 getestet, wobei die *Reproduzierbarkeit* der Zufallssequenz¹¹¹ in den Implementationen gesichert ist:

```
# data file generated by gaussian v1.9 Nan-shan Chen C19980304
# command line: "gaussian -s0.2 hypcirc4.dat"
# ranmar subsequence (555, 555), position = 172229 (1-indexed)
# This sequence may be reproduced by -I555 -K555 -G172229
# corrupting input data file: "hypcirc4.dat" with
# additive gaussian white noise, sigma=0.2, mean=0

 8.10201720    22.33646819    26.90547753    42.20840699
 8.76968279    23.52058263    30.13928415    37.31405972
.
.
.
```

Keine Anomalien¹¹² konnten in höheren dimensionalen Räumen festgestellt werden. Wir möchten bei der Gelegenheit darauf hinweisen, daß unsere Implementationen mit konstantem Streben nach Korrektheit, Portierbarkeit, Flexibilität und allgemeiner Anwendbarkeit sorgfältig produziert worden sind. Dies gilt auch bei der Auswahl eines Zufallsgenerators Fußnote 111 auf S. 86. Da zum Ziel außerst hoher Aufwand der Entwicklung erforderlich gewesen ist, hoffen wir, daß sie für weitere Untersuchungen wieder eingesetzt werden können.

4.4 Affinitätstest

Die bisher vorhandene Schätzung der Zuverlässigkeit bzw. Unsicherheit der Orientierungsschätzungen eines kreisförmigen Objektes ist im Bezug auf die Punktmenge selbst durch die Residuen der Ausgleichsrechnung gewonnen worden (*Cf.* Abb. 4.4 auf S. 81 und Abb. 4.5 auf S. 81). Da die absolute Genauigkeit der Lageschätzung eines Kreises erst nach der sogenannten „Hand-Augen-Eichung“ des gesamten Roboter-Kamera-Systems vollständig geprüft werden kann, die in dieser Phase noch nicht verfügbar ist, soll die *Affinität* zwischen den Orientierungsschätzungen und Drehungen des Objekts geprüft werden. Andererseits kann die Brauchbarkeit der Auflösung der Tiefendaten erst durch Vermessungen eines realistischen Objectkes mit bekannter Geometrie festgestellt werden. Zu diesem Zweck ist ein in Abb. 4.6 auf S. 87 dargestelltes Experiment für die Affinitätsprüfung aufgebaut. Um die eventuell vorhandenen Probleme entdecken zu können, wurde die Experimentsumgebung

¹¹⁰Mit „weiß“ meinen wir hier nicht nur diagonale Kovarianz, sondern auch eine skalare Vielfachheit der Identitätsmatrix. *Cf.* gaussian.c.

¹¹¹Der in gaussian.c und ghyper.c fungierende Zufallsgenerator ist ranmar.c. Sie ist eine Übersetzung von Jim Butler in Ithaca College aus der Fortran-Routine ranmar.f von Florida State University [Marsaglia und Zaman, 1987]. Der Zufallsgenerator verfügt über 900 Millionen verschiedene Sequenzen mit einer Periode von 10^{30} . Zitat aus den Fortran-Quellcoden: „This is the best known random number generator available. (However, a newly discovered technique can yield a period of 10^{600} . But that is still in the development stage.) It passes all of the tests for random number generators and has a period of 2^{144} , is completely portable (gives bit identical results on all machines with at least 24-bit mantissas in the floating point representation).“ Zur Formung der *Gaußschen Dichte* benutzten wir eine Variante der Polarform der *Box-Muller-Transformation* [Box et al., 1958] [Knuth, 1981, 1969, p. 117] mit der Grundform:

$$\begin{aligned}y_1 &= \cos(2\pi x_1) \sqrt{-2 \ln(x_2)} \\y_2 &= \sin(2\pi x_1) \sqrt{-2 \ln(x_2)},\end{aligned}$$

wobei $x_1, x_2 \in [0, 1]$ gleich verteilt seien, und $y_1, y_2 \sim N(0, 1)$.

¹¹²[Conway und Sloane, 1993, 1999] [Le Lionnais, 1984, p. 58] [Peterson, 1988, pp. 96–101]

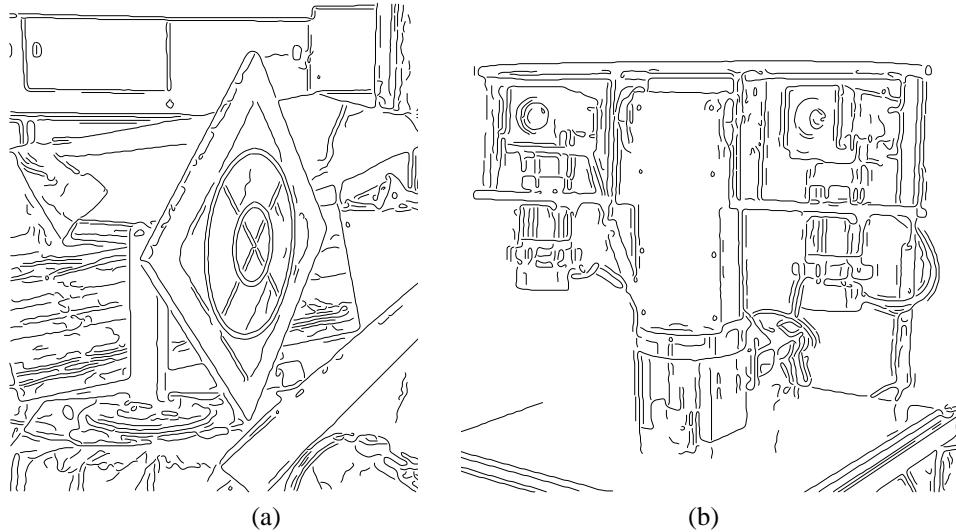


Abbildung 4.6: Affinitätsprüfung: Experimentsumgebung. Aufbau des Experiments zur Prüfung der Affinität zwischen den manuell *eingestellten* Orientierungen eines auf dem Stativ montierten Kreises (a) und den *geschätzten* Orientierungen unserer Verfahren durch den Stereo-Kamerakopf (b). Cf. Abb. 4.7 auf S. 87, Abb. 4.8 auf S. 89, Abb. 4.9 auf S. 90, Abb. 4.10 auf S. 91 und Abb. 4.11 auf S. 91.

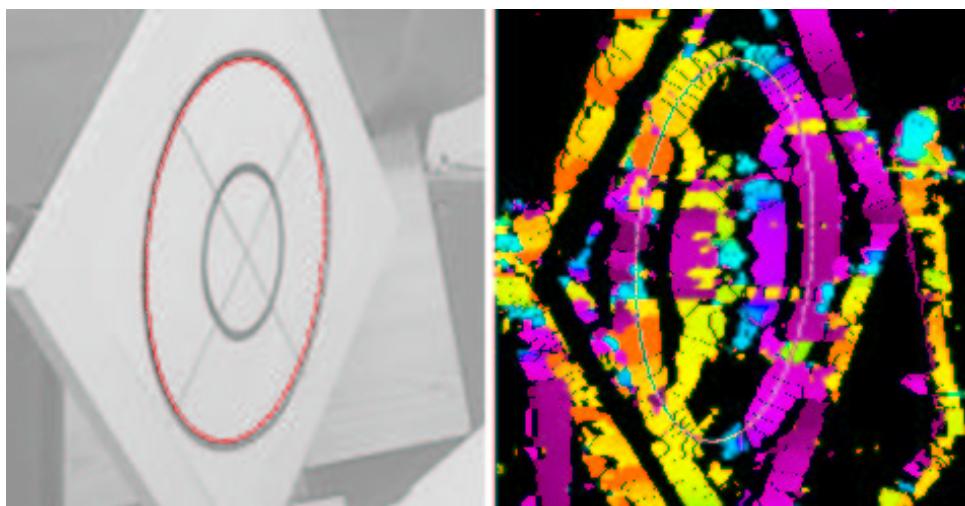


Abbildung 4.7: Affinitätsprüfung: Ellipse und Orientierungsschätzung. Affinitätsprüfung mit dem Aufbau in Abb. 4.6 auf S. 87. Die Orientierung des Objektes in dieser Beispiel-Szene liegt bereits außerhalb des erlaubten Orientierung des Stereoverfahrens. Daher werden die definierten Vektoren spärlich besetzt und mit größeren Fehlern versehen. Die Daten sind via Abb. 4.8 auf S. 89 in Abb. 4.9 auf S. 90, Abb. 4.10 auf S. 91 und Abb. 4.11 auf S. 91 evaluiert.

so einfach wie möglich eingerichtet, daß die Szene möglichst störungsfrei durch das Stereo-Verfahren [Trapp, 1998] und unsere Algorithmen verarbeitet werden konnte. Typische Ausgaben des Shell-Scripts `pose.sh`, die unsere C-Programme¹¹³ `Netpbm` und `Gnuplot` aufruft, werden teilweise in Abb. 4.7 auf S. 87 und Abb. 4.8 auf S. 89 wiedergeben.

Das Experiment (*Cf.* Abb. 4.6 auf S. 87) wurde durch 21 verschiedene Einstellungen des Winkels von 0° bis 45° am Stativ durchgeführt. Im Verlauf des Experiments wurde jede aufgenommene Szene durch das Shell-Script `pose` und seine Ausgaben in Abb. 4.7 auf S. 87 und Abb. 4.8 auf S. 89 u. a. *online* kontrolliert. Die „Vergenz“ der beiden Kameras fürs Stereoverfahren [Trapp, 1998] wurde *nicht* bei jeder Szene neu eingestellt. Wegen der Vergenz und mechanischer Probleme am Kamerakopf wurden *nicht alle* Szenen direkt in die Evaluierungsmenge aufgenommen, sondern eine Szene wurde wiederholt aufgenommen und evaluiert, wenn Absurditäten in Abb. 4.7 auf S. 87 und Abb. 4.8 auf S. 89 zu erkennen waren.

Die geschätzten Posen des Kreises und die Zentren sind gegen Drehung des Objektes am Stativ in Abb. 4.9 auf S. 90-(a) animiert. Die Animation stellt eine bedeutende Übersicht zur Diagnose des Experiments zur Verfügung. Zur Evaluierung der Daten wird die *Affinität* zwischen unseren *Schätzungen* und den *Einstellungen* am Stativ durch lineare Regression in Abb. 4.9 auf S. 90-(b) untersucht. Es sei darauf hingewiesen, daß eine *orthogonale Regression* in diesem Fall theoretisch *ungeeignet* ist, da sich die Fehler eher in den *geschätzten* Posen als in den *eingestellten* Winkeln befinden. Wichtige Punkte in der Evaluierung sowie Interpretation der Ergebnisse durch lineare Regression fassen wir wie folgt zusammen:

- Affinität statt Linearität;
- Algebraische statt geometrische Distanz;
- Fixierung der Steigung zur Identität.

Um die Konsistenz unter verschiedenen „Auflösungen“ zu prüfen, werden alle Daten parallel in Abb. 4.9 auf S. 90, Abb. 4.10 auf S. 91 und Abb. 4.11 auf S. 91 dargestellt. Die Feststellung, daß die niedrigeren „Auflösungen“ bzw. stärkeren Unterabtastungen im Stereoverfahren schwächere Sicherheit in der Pose-Schätzung ergeben, ist äußerst wichtig, obgleich solche trivial zu sein scheint. Wir erhalten in Abb. 4.9 auf S. 90-(b) jeweils ein RMS-Residuum von 0.3386° , 0.5192° , und 1.0533° zur erwünschten *Affinität* der *geschätzten* und *eingestellten* Orientierung des Objekts. Über die Einzelheiten der Regression wird in Abb. 4.9 auf S. 90 kommentiert. Die gleichen Daten von Abb. 4.9 auf S. 90-(b) sowie geschätzten Radii aller Unterabtastungsfaktoren sind in Abb. 4.10 auf S. 91-(a) überlagert dargestellt. In Abb. 4.11 auf S. 91 demonstrieren wir die *Robustheit* unserer geometrischen Filterung (*Cf.* § 4.1 ab S. 77).

¹¹³`pose.sh`: `kdf2pn.m.c`, `pgmroi.c`, `pfm2ppm.c`, `pgmcanny.c`, `pgmpix.c`, `pfmpix.c`, `pgmlink.c`, `kalmell.c`, `ellfilt.c`, `lst2pgm.c`, `phoenix3.c`, `curvfilt.c`, `hyper.c`, `g3data.c`, `pfmgamma.c`, `asc2pgm.c`,

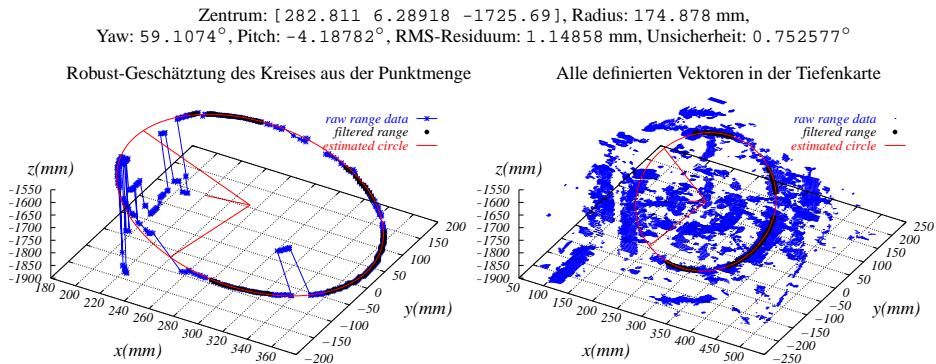


Abbildung 4.8: Kreislokalisierung in kritischer Lage mit dem Aufbau in Abb. 4.6 auf S. 87. Die Pose-Estimation bezieht sich auf die Szene der Affinitätsprüfung in Abb. 4.7 auf S. 87, wobei das Stereoverfahren mit Absicht durch einen Winkel von 60° am Stativ überfordert wird, um mehr Fehler produzieren zu können. Trotz der unheimlich starken Störungen in den Tiefenvektoren gewinnen wir eine Unsicherheit der Orientierungsschätzung von 0.752577 Grad. Dies demonstriert die *Robustheit* unseres Verfahrens. Dies bedeutet auch, daß das Stereoverfahren [Trapp, 1998] trotz der verstärkten Fehler auch weit außerhalb der angegebenen Grenze ziemlich konsistente, sogar brauchbare, Daten liefert. Fehler-Unterdrückung sollte günstigerweise im Stereoverfahren eingebaut werden müssen. (Da die Stereo-Messungen [Trapp, 1998] durch 32-bit IEEE-754-Single-Precision [IEEE, 1985] [Goldberg, 1991, p. 193] in Khoros-Float-Format gegeben sind, werden hier die Ergebnisse in maximal 8 Dezimalstellen ausgedruckt, obgleich die Daten intern in mindestens 64-bit-double verarbeitet worden sind.)

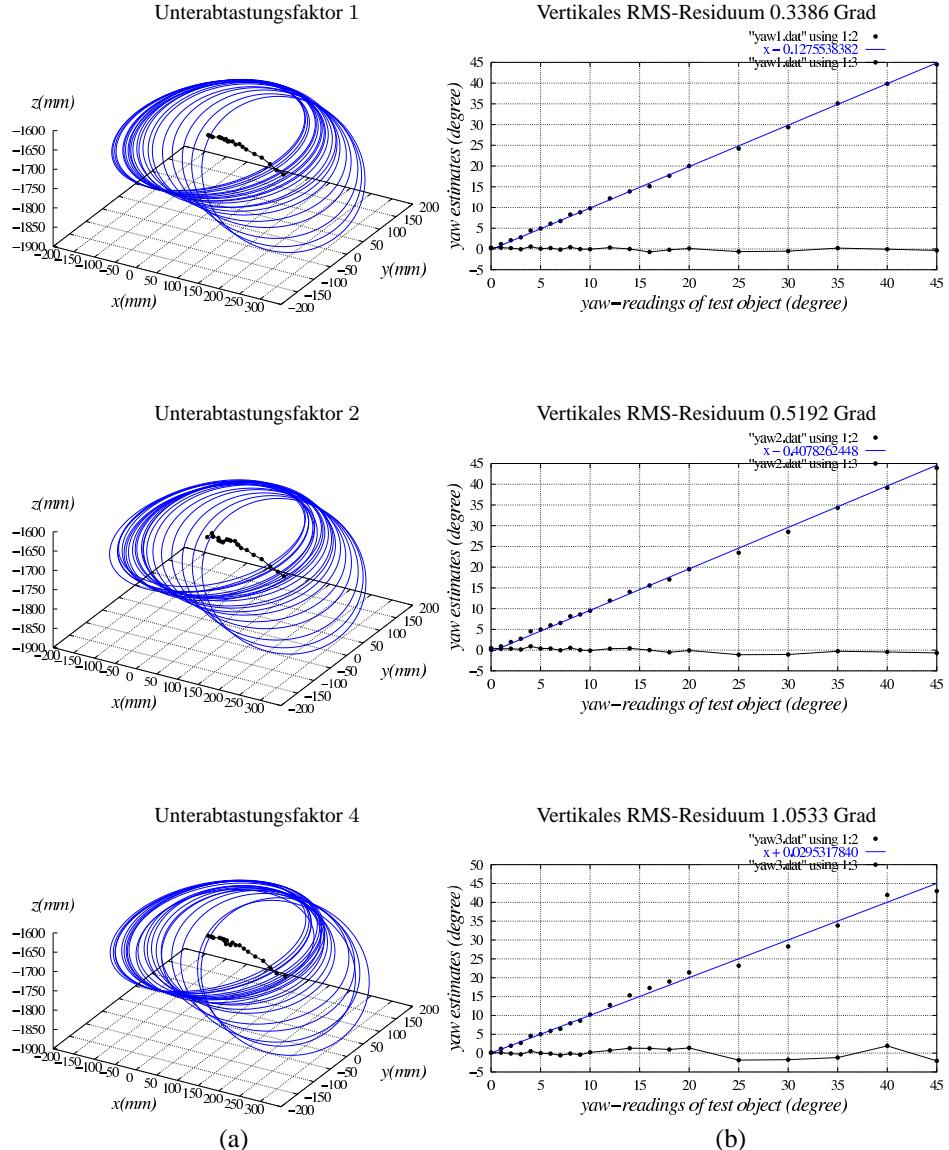


Abbildung 4.9: Affinitätsprüfung mit dem Aufbau in Abb. 4.6 auf S. 87. In der linken Spalte (a) wird der *geschätzte Kreis* und sein *Zentrum* in allen ausgeführten Orientierungen animiert. Dies beliefert uns mit einer wichtigen Übersicht zur makroskopischen Diagnose in der Entwicklung. In der rechten Spalte (b) werden die *geschätzten* Orientierungen der Kreise (y) gegen die am Stativ manuell *eingestellten* Winkel (x) gezeichnet. *Nota bene:* Wir dürfen hier keinen Anspruch auf eine *Linearität* stellen, sondern eine *Affinität*. Daher wird eine Gerade $y = ax + b$ der kleinsten Quadrate über *algebraische* bzw. *vertikale Distanz* (lsline2.c -e) berechnet. In [Büker et al., 1999] haben wir zwar die Steigung a freigelassen, dies hätte wir auf 1 einschränken müssen. Hier in der rechten Spalte wird $y = 1 \cdot x + b$ in der Regression verwendet (lsline2.c -1). *Orthogonale Distanz* wurde nicht verwendet, weil sich die Fehler meist in y konzentrieren.

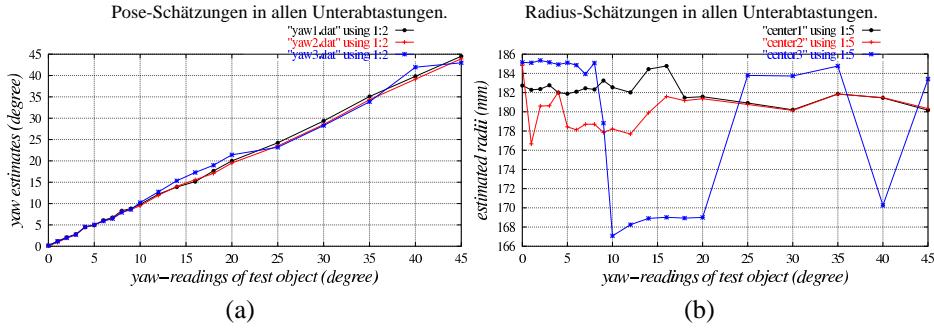


Abbildung 4.10: Affinitätsprüfung mit dem Aufbau in Abb. 4.6 auf S. 87. (a) Die drei „Auflösungsstufen“ von den *geschätzten* Orientierungen (y) der Kreise gegen die manuell *eingestellten* Winkeln (x) aus Abb. 4.9 auf S. 90 werden überlagert geplottet, um die Konsistenz aller Unterabtastungsraten zu überprüfen. (b) Schätzungen der Radii in drei „Auflösungsebenen“ werden überlagert dargestellt. Die Schwäche der stärkeren Unterabtastung (blau) wird in den beiden verdeutlicht.

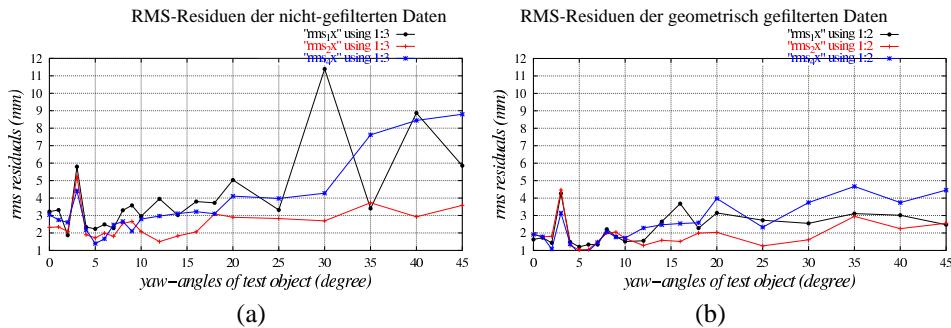


Abbildung 4.11: Affinitätsprüfung mit dem Aufbau in Abb. 4.6 auf S. 87. Diese Abbildung verdeutlicht die Effektivität der Fehlerunterdrückung unserer nicht-linearen, geometrischen Filterung. Alle drei „Unterabtastungen“ sind jeweils in einem Plot überlagert gezeichnet. Im linken Plot (a) werden die RMS-Fehler der Orientierung *ohne Ausreißerdetektion* der Punktmenge in verschiedenen Orientierungen dargestellt. Im rechten Plot (b) werden die Gleichen mit *geometrischer Filterung* wiederholt. Da unsere geometrische Filterung nichts anderes getan hat als bloß die als „Ausreißer“ identifizierten Vektoren aus der Tiefenkarte ausgeschlossen hat, läßt sich feststellen, daß die Hauptquelle der unterdrückten Fehler in der *Tiefenkarte* liegt. Cf. Abb. 1.1 auf S. 2 und curvfilt.c. Allerdings ist diese nicht-lineare Filterung zur Zeit *ad hoc* und nur anwendbar bei einer *dreibindimensionalen, geordneten* Punktmenge. Dennoch führt dies insgesamt zu einer *robusten Modellierung* [Brown, 1982] [Rousseeuw, 1984] [Rousseeuw, 1987].

Kapitel 5

Ausblick

Hyperkreis. Wir haben den geometrischen Begriff eingeführt, um einen üblichen Kreis im dreidimensionalen Raum zu modellieren. Dies wäre zwar nicht notwendig gewesen, ermöglicht aber Explorationen der *Datengeometrie* in höheren Dimensionen. Mit *Datengeometrie* meinen wir die gegenseitigen geometrischen bzw. algebraischen Verhältnisse der Daten. Besonders schwierig wird Einsichten in die Daten zu gewinnen. In der Industrie ist die Auswertung hoch dimensionaler Daten immer häufiger eine wichtige Fragestellung. Man spricht also von „*data mining*“. Eine ausschlaggebende Aufgabe von „*Data mining*“ ist meiner Auffassung nach, die tief verborgenen Strukturen in den Daten zu erkennen und auszugraben. Was heißt erkennen? und wozu? „Erkennen“ muß notwendigerweise „wiedererkennen“ heißen. Das ist eine *Identifizierung* von etwas Fremden mit etwas bereits Bekannten. Wir erkennen eine Ebene vielleicht, weil sie etwa optisch oder tastsinnig „flach“ wahrzunehmen ist. Näher betrachtet, wir identifizieren sie mit einem bereits wohl definierten geometrischen Gebilde, an dem all die bekannten Werkzeuge einzusetzen sind. Wir freuen uns, eine Kugel wiederzuerkennen, nicht nur, weil sie mit unseren schönen Gefühlen sehr verbunden ist, sondern auch, weil sie bereits so gründlich erforscht worden ist, so daß wir bereit sind, uns damit auseinanderzusetzen, falls ein Problem entsteht.

Kugel und Ebene sind „wichtige“ geometrische Primitive. Schneiden wir die Kugeloberfläche mit einer Ebene, so entsteht ein weiteres „wichtiges“ Gebilde, ein Kreis. Hypersphäre und Hyperebene sind ebenso bekannte und „wichtige“ geometrische Primitive. Schneiden wir nun die Hypersphäre mit einer Hyperebene, so entsteht ein weiteres Primitiv, das keinen Namen besitzt. Wir haben „Hyperkreis“ vorgeschlagen. Die Verallgemeinerung von einem *Kreis* auf einen *Hyperkreis* soll ebenso „wichtig“ sein, wie die von *Ebene* und *Sphäre* auf *Hyperebene* und *Hypersphäre*. Diese Parallelität ist auch in Kapitel 2 (S. 5) mit den Projektoren und Reflektoren angeführt.

Schauen wir uns genauer um, so sehen wir, es ist überhaupt sehr schwierig, den Kreisen in unserem Alltag einen Augenblick zu entfliehen¹¹⁴. Warum sind die Kreise ubiquitär? Weil sie einfach zu produzieren sind? Weil sie schön sind? Oder weil sie praktisch sind? Der nächste Mann am Tisch antwortete mir auf diese Frage, weil sie „natürlich“, „bequem“, „harmonisch“, „symbolisch“, „allerwichtigste Form“ seien und „keinen Anfang, kein Ende“ hätten. Ich würde sagen, der Kreis kann auch „poetisch“ sein:

¹¹⁴Nein, das ist in der Wüste oder im Meer kaum einfacher.

*Fortunae rota volvitur: descendō minoratus;
 alter in altum tollitur; nimis exaltatus
 Rex sedet in vertice – caveat ruinam!
 nam sub axe legimus Hecubam reginam.*
 – aus *Carmina Burana*

Vielmehr kümmern wir uns um die Existenz gewisser *Apriorität*. Die „Wichtigkeit“ des Kreises ist in der Tat nicht nur an dem Gefühle gebunden, sondern auch an der algebraischen „Einfachheit“ und den mechanischen Eigenschaften sowie physikalischen Gesetzen *a priori*, so daß er durch einen klitzekleinen Zufall in der Natur und in der Wissenschaft entstehen kann. Die *Carmina Burana* haben uns daran erinnert, daß ein Kreis auch durch eine *Drehung* entsteht. Eine *Drehung* in $SO(n)$ ist eine *apriorische* Existenz. Hier werden jedoch die *Spezialorthogonalen Gruppen* nicht auf Dimension 3 eingeschränkt. Und nachdem ich dem Mann über einen *Hyperkreis* aufgeklärt habe, fragte er

Kommt er oft vor?

Dies ist gerade die Frage, die uns beschäftigt hat. Nach all diesen Besinnungen, werden wir darauf erst einmal „umgehend“

Warum nicht?

erwidern. Wir „sehen“ sie nämlich nur nicht. Daher haben wir in Abb. 2.6–(b) auf S. 51 versucht, einen Hyperkreis im 4-dimensionalen Raum zu visualisieren. Einige Eigenschaften eines Hyperkreises haben wir in Kapitel 2 (S. 5) vorgestellt. Und da wir doch befürchteten, daß sie nicht vorkommen würden, haben wir einen Algorithmus (`ghyper . c`) zur Generierung eines Hyperkreises präsentiert. Die erzeugten Zufallsabtastungen sind wiederum durch einen anderen Algorithmus (`hyper . c`) parametrisch als Hyperkreis zu modellieren. Siehe auch [Chen et al., 2000]. Ein Hyperkreis sollte nun „realistisch“ genug sein. Dennoch, für Anwendungen müssen wir Beispiele in der Natur und Wissenschaft finden, trotz der Überzeugung, daß sie beispielsweise durch Interaktionen von *Hypersphären* und *Hyperebenen* oder *Drehungen* in höheren Dimensionen oft vorkommen sollten. Die Untersuchung, die wir geleistet haben, ist keinesfalls genügend. Die topologischen Zusammenhänge mit einem *Torus* müssen beispielsweise geklärt werden. Wir sind auch deswegen unzufrieden, weil eine *Drehung* niemals zum Vorschein gebracht worden ist, obwohl der Inbegriff wie ein Geist in der ganzen Arbeit durchdringend und allgegenwärtig ist.

Nicht-Orthogonale Raumzerlegung zur Schätzung des Rauschunterraums. In Kapitel 4 (S. 77) haben wir die Daten auf eine Hyperebene *schief* projiziert, wobei der 1-dimensionale Kern des Projektors der *Z*-Achse des Kamerakopfes parallel gewählt worden ist, weil sich die Rauschenleistung *empirisch* in dieser Richtung konzentriert ist. Wie wäre es, wenn diese Richtung unbekannt ist? Ein Teilproblem davon kann vereinfacht folgendermaßen paraphrasiert werden.

Gegeben seien m Punkte im n -dimensionalen Raum, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \gg n$. Es ist möglich, daß alle Punkte (Zeilenvektoren in \mathbf{A}) exakt entweder auf dem 1-dimensionalen Raum \mathcal{X} oder auf seinem $(n - 1)$ -dimensionalen komplementären Raum \mathcal{Y} liegen, wobei \mathcal{Y} nicht orthogonal sein muß zu \mathcal{X} . Siehe Abb. 5.1

auf S. 95. Da alle Information über die komplementären Teilmengen \mathcal{X} und \mathcal{Y} in \mathbf{A} enthalten ist, soll \mathcal{X} und \mathcal{Y} aus \mathbf{A} alleine bestimmt werden. Dabei wird angenommen, daß die Zeilenvektoren in \mathbf{A} die Räume \mathcal{X} und \mathbf{Y} „hinreichend“ aufspannen. Weil \mathcal{X} und \mathcal{Y} komplementäre Unterräume sind, ist das Problem äquivalent zu dem, den Projektator $\mathbf{P}_{\mathcal{Y}, \mathcal{X}}$ auf den Teilraum \mathcal{Y} entlang des Teilraumes \mathcal{X} zu schätzen.

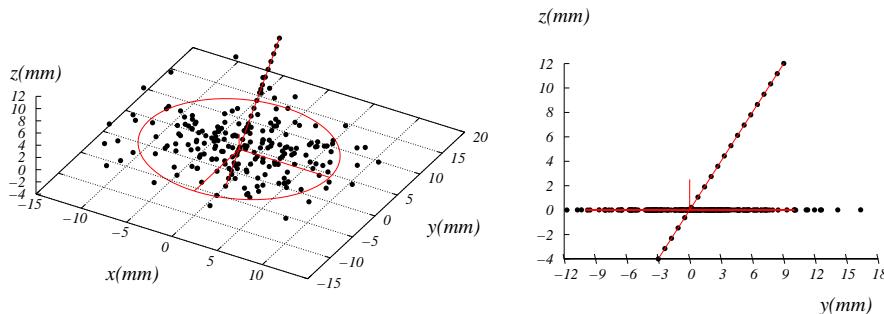


Abbildung 5.1: Nicht-Orthogonale Raumzerlegung zur Schätzung des Rauschunerraums. Gegeben seien m Punkte im n -dimensionalen Raum, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \gg n$. Die m Punkte spannen hinreichend einen 1-dimensionalen Raum \mathcal{X} und einen $(n - 1)$ -dimensionalen komplementären Raum \mathcal{Y} auf. Gesucht wird der schiefe Projektator $\mathbf{P}_{\mathcal{Y}, \mathcal{X}}$. Dies soll auf r - und $(n - r)$ -dimensionale ($r < n$) komplementäre Teilmengen erweitert werden. Cf. [Afriat, 1957] [Davis, 1958] (im Hilbert-Raum) [Afriat et al., 1975] [Davis und Kahan, 1970] [Kovarik, 1977] (im Banach-Raum).

Darüber hinaus wäre eine „natürliche“ Basis für \mathbf{A} bzw. die Daten dieselben für \mathcal{X} und \mathcal{Y} . Eine orthogonale Basis wäre in diesem Fall nicht sinnvoller als eine nicht-orthogonale Basis wie dieselben für \mathcal{X} und \mathcal{Y} . Das Problem soll auf komplementäre Teilmengen \mathcal{X} mit Dimension $r < n$ und \mathcal{Y} mit Dimension $n - r$ erweitert werden, wobei \mathcal{X} und \mathcal{Y} ständen nicht unbedingt orthogonal zu einander.

Datenzentrierung als orthogonale Projektion. In § 2.4.1 ab S. 29 haben wir uns mit dem Problem der Datenzentrierung auseinandergesetzt. Das Datenzentrieren wird extrem oft geübt aber kaum formal angesprochen, sehr wahrscheinlich deswegen, weil es *nicht-linear* ist. Ohne *Linearität* sind wir sehr behindert. Aber auch bloß die Affinität macht einen ausdruck wie $\mathbf{Z}_m \mathbf{A}$ zu einem wie $(\mathbf{I}_m - (1/m)\mathbf{1}\mathbf{1}^*)\mathbf{A}$ aus Gl. (2.42) auf S. 32. Mit der Einführung von *AC-Teilraum* und *DC-Teilraum* haben wir das Zentrieren in der anderen Dimension als *orthogonaler Projektator* formulieren können. Dies kann als eine Art *Linearisierung* des Problems angesehen werden und wird viel mehr algebraischen Ausdrücke vereinfachen oder komplizierte Zusammenhänge veranschaulichen. Wie wir im Lemma 2.4.23 auf S. 52 vorgeführt haben, so würden wir z. B. aber auch über die Bestimmung des *Ranges einer Kovarianzmatrix* oder die *affine Projektion* in § 4.3 ab S. 83 noch mehr leisten können.

Literaturverzeichnis

- E. A. Abbott. *Flatland: a romance of many dimensions / with ill. by the author, A square.* Dover, New York, 6 edition, 1952. P41TBX1363(6) (v. et. Rucker [Rucker, 1986] and [Abbott und Buck, 1990] for German translation).
- E. A. Abbott und P. Buck. *Flächenland.* Reprinta historica didactica; 5. Franzbecker, Bad Salzdetfurth, 1990. P03K1036 (see [Abbott, 1952] for original edition).
- E. H. Adelson und J. R. Bergen. Spatiotemporal energy models for the perception of motion. *Journal of the Optical Society of America A*, 2(2):284–299, 1985.
- S. N. Afriat. Orthogonal and oblique projectors and the characteristics of pairs of vector spaces. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53:800–816, 1957. cited in [Afriat et al., 1975] [Ipsen und Meyer, 1995] [Davis und Kahan, 1970];.
- S. N. Afriat, M. V. R. Sastry, und G. Tintner. *Studies in Correlation: Multivariate Analysis and Econometrics.* Angewandte Statistik und Ökonometrie; 1. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975. P41TKO1089.
- G. J. Agin. Fitting ellipses and general second-order curves. In *CMU-RI-TR*, 1981.
- A. S. Aguado, M. E. Montiel, und M. S. Nixon. On using directional information for parameter space decomposition in ellipse detection. *Pattern Recognition*, 29(3):369–381, 1996.
- A. Albert. *Regression and the Moore Penrose pseudoinverse.* Mathematics in science and engineering; 94. Academic Press, New York, 1972. P41TKK1445.
- S. L. Altmann. *Rotations, Quaternions and Double Groups.* Oxford Science Publications. Clarendon Press, Oxford, 1986. P41TEX1747 (v. et. [Du Val, 1964] [Coxeter, 1973] recommended by Pertti Lounesto).
- B. W. Andrews und D. A. Paffen. Relationship between spatial frequency selectivity and receptive field profile of simple cells. *Journal of Physiology (London)*, 287:163–176, 1979. cited in [Daugman, 1985].
- K. S. Arun, T. S. Huang, und S. D. Blostein. Least-squares fitting of two 3-d point sets. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 9(5):698–700, 1987. cited in [Umeyama, 1991].
- L. Autonne. Sur les groupes linéaires, réels et orthogonaux. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 30:121–134, 1902. cited in [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 242] [Munthe-Kaas et al., 2001].

- S. Axler. Down mit determinants! *American Mathematical Monthly*, 102:139–154, 1995. (collected in [Carlson et al., 1997]).
- T. F. Banchoff. *Beyond the Third Dimension: Geometry, Computer, Graphics, and Higher Dimensions*. Scientific American Library; 33. Scientific American Library, New York, 1990. P41TBW1677 (cites [Abbott, 1952] in pp. 2–3).
- S. Barnett. *Matrices in control theory: with applications to linear programming*. Van Nostrand Reinhold, London, 1971. P41TIQ1439+1 (ausgeschieden: 2812; 24.4.2001, 2 DM) cites [Ben-Israel und Charnes, 1963].
- T. S. Baskett und I. J. Katz. Theorems on products of epr matrices. *Linear Algebra Appl.*, 2:87–103, 1969. (cited in [Koliha, 1999]; v. et. [Hartwig und Katz, 1997]).
- M. Bastiaans. Gabor’s expansion of a signal into gaussian elementary signals. *Proceedings of the IEEE*, 68:538–539, 1980. cited in [Daugman, 1988].
- E. Beltrami. Sulle funzioni bilineari. *Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Universita*, 11:98–106, 1873. An English translation by D. Boley is available as University of Minnesota, Department of Computer Science, Technical Report 90–37, 1990.
- A. Ben-Israel und A. Charnes. Contributions to the theory of generalized inverses. *SIAM journal of Appl. Math.*, 11:667–699, 1963. (cited in [Barnett, 1971, p. 130]).
- A. Ben-Israel und T. N. E. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. A Wiley-Interscience publication. John Wiley & Sons, New York, 1974. P41TJU1027 (cited in [Kuhnert, 1976, p. 23]); v. et. [Boullion und Odell, 1971] [Campbell und Meyer, 1991]; cites [Halmos, 1958]; [Ben-Israel und Greville, 1976]; cites [Cline, 1968]; cites [Schmidt, 1907a,b] [Autonne, 1902] [Eckart und Young, 1936, 1939]).
- A. Ben-Israel und T. N. E. Greville. Some topics in generalized inverses of matrices. In M. Z. Nashed, editor, *Generalized Inverses and Applications*, Publication of the Mathematics Research Center, The University of Wisconsin, Madison; 32, pages 125–147. Academic Press, New York, 1976. P41TJV1080 (cites [Ben-Israel und Greville, 1974]).
- P. G. Bergman, R. Penfield, R. Schiller, und H. Zatkis. The Hamiltonian of the general theory of relativity with electromagnetic field. *Physical Review*, 52:1950, 1950. cited in [Stewart und Sun, 1990, pp. 108–109].
- M. W. Berry, S. T. Dumais, und G. W. O’Brien. Using linear algebra for intelligent information retrieval. *SIAM Review*, 37(4):573–595, 1994a. (v. et. [Berry et al., 1994b] [Furnas et al., 1988]); cited in [Husbands et al., 2000]).
- M. W. Berry, S. T. Dumais, und G. W. O’Brien. Using linear algebra for intelligent information retrieval. Technical Report UT-CS-94-270, Department of Computer Science, University of Tennessee, Knoxville, 1994b. v. et. [Berry et al., 1994a].
- J. Bhattacharya und P. P. Kanjilal. On the detection of determinism in a time series. *Physica D*, 132:100–110, 1999.
- P. O. Bishop, J. S. Coombs, und G. H. Henry. Receptive fields of simple cells in the cat striate cortex. *Journal of Physiology (London)*, 231:31–60, 1973. cited in [Marcelja, 1980].

- A. Bjerhammar. Applications of calculus of matrices to method of least squares; with special references to geodetic calculations. *Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm*, 49:1–86, 1951a. (cited in [Kuhnert, 1976, p. 16]).
- A. Bjerhammar. Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations. *Bulletin Géodésique*, 52:188–220, 1951b. cited in [Kuhnert, 1976, p. 16] [Stewart und Sun, 1990, pp. 108–109]).
- A. Bjerhammar. *Theory of errors and generalized matrix inverse*. Scientific Publishing Company, Amsterdam-London-New York, 1973. (cited in [Kuhnert, 1976, p. 23]).
- Å. Björck und G. H. Golub. Numerical methods for computing angles between linear subspaces. *Math. Comp.*, 27:579–594, 1973. Cited in [Golub und Van Loan, 1983, p. 431].
- F. L. Bookstein. Fitting conic sections to scattered data. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 9:56–71, 1979. cited in [Chaudhuri und Kundu, 1993] [Karl et al., 1994] [Gander et al., 1994a].
- T. L. Boullion und P. L. Odell. *Generalized Inverse Matrices*. John Wiley & Sons, New York, 1971. P41TDQ1918 (cited in [Kuhnert, 1976, p. 23]; v. et. [Ben-Israel und Greville, 1974] [Campbell und Meyer, 1991])).
- A. C. Bovik, M. Clark, und W. S. Geisler. Multichannel texture analysis using localized spatial filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(1): 55–73, 1990. P50/88i61 copied 970072950.
- G. E. P. Box, M. E. Muller, und G. Marsaglia. A note on the generation of random normal deviates. *Annals Math. Stat.*, 29:610–611, 1958. (cited for polar method in Knuth [Knuth, 1981, 1969, p. 117]; v. et. Boeing Scientific Res. Lab. report D1-82-0203 (1962)).
- R. N. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw-Hill electrical and electronic engineering series. McGraw-Hill, New York, 2 edition, 1987. P41TIR1353, P41TIR1353(2)-1+4.
- G. W. Brown. Random points on n -dimensional sphere. In E. F. Beckenbach, editor, *Modern Mathematics for the Engineer*, First Series, page 302. McGraw-Hill, New York, 1956. (cited in [Knuth, 1981, 1969, pp. 130–131]).
- M. L. Brown. Robust line estimation with errors in both variables. *Journal of the American Statistical Association*, 77:71–79, 1982. cited in [Rousseeuw, 1987].
- U. Büker, S. Drüe, N. Götze, G. Hartmann, R. Stemmer, und R. Trapp. Aktive Objekterkennung und -vermessung zur Steuerung eines Demontageroboters. *Künstliche Intelligenz im Rahmen des BMBF Projektes*, 1/99:25–30, 1999. (Diese Arbeit wurde im Rahmen des BMBF Projektes 01 IN 506 B 2 DEMON gefördert.).
- T. Bülow, D. Pallek, und G. Sommer. Riesz transforms for the isotropic estimation of the local phase and moiré interferograms. In G. Sommer, N. Krüger, und C. Perwass, editors, *Mustererkennung 2000, 22. DAGM-Symposium, Kiel, 13.-15. September 2000, Proceedings*, Informatik Aktuell, pages 333–340. Springer, 2000. cites [Hahn, 1992].
- J. R. Bunch und C. P. Nielsen. Updating the singular value decomposition. *Numerische Mathematik*, 31:111–129, 1978. cited in [Stewart, 1990] [Stewart, 1992c].

- J. Cabrera und P. Meer. Unbiased estimation of ellipses by bootstrapping. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(7):752–756, 1996.
- S. L. Campbell. *Recent Applications of Generalized Inverses*. Research notes in mathematics; 66. Pitman, London, 1982. P40TAY3023 (v. et. [Campbell und Meyer, 1979]).
- S. L. Campbell und C. D. Meyer. Continuity properties of the Drazin pseudoinverse. *Linear Algebra and Its Applications*, 10:77–83, 1975. P4061111, 1.1968 - 274.1998 Magazin (cites [Stewart, 1969] [Greville, 1967] [Meyer, 1974]).
- S. L. Campbell und C. D. Meyer. *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Surveys and reference works in mathematics; 4. Pitman, London, 1979. P65TDQ3041+2 (ausgeschieden: 9381; 24.4.2001, 2 DM) (newest edition is [Campbell und Meyer, 1991]; cited in [Ipsen und Meyer, 1998] [Higham und Knight, 1993]; cites [Drazin, 1958], [Gauß, 1809]; v. et. [Campbell, 1982] [Boullion und Odell, 1971] [Ben-Israel und Greville, 1974]).
- S. L. Campbell und C. D. Meyer. *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Dover Publications, New York, 1991. cited in [Ipsen und Meyer, 1995]; (This edition is not found in UBPB; v. et. the older version [Campbell und Meyer, 1979] and [Campbell, 1982]; citing [Drazin, 1958], [Gauß, 1809]; v. et. [Boullion und Odell, 1971] [Ben-Israel und Greville, 1974]).
- J. F. Canny. Finding edges and lines in images. Master's thesis, MIT AI Lab., 1983. available as technical report TR-720; v. et. [Canny, 1986].
- J. F. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6):679–698, 1986. cited in [Nalwa und Binford, 1986] [Venkatesh und Rosin, 1995]; v. et. [Canny, 1983], [Deriche, 1993], pgmcanny . c; cf. [Marr und Hildreth, 1980] [Shen und Castan, 1992].
- D. Carlson, C. R. Johnson, D. C. Lay, und A. D. Porter, editors. *Resources for Teaching Linear Algebra*, volume 42 of *MAA Notes*. American Mathematical Society, Ann Watkins, and William Watkins., 1997. v. et. [Cowen, 1997] [Axler, 1995] [Maron und Maron, 1993].
- B. B. Chaudhuri. Optimal circular fit to objects in two and three dimensions. *Pattern Recognition Letters*, 11(8):571–574, 1990.
- B. B. Chaudhuri und P. Kundu. Optimum circular fit to weighted data in multi-dimensional space. *Pattern Recognition Letters*, 14(1):1–6, 1993. (cites [Bookstein, 1979], [Landau, 1987], [Thomas und Chan, 1989], [Chaudhuri, 1990]).
- B. B. Chaudhuri und G. P. Samanta. Elliptic fit of objects in two and three dimensions by moment of inertia optimization. *Pattern Recognition Letters*, 12:1–7, 1991. (cited by [Karl et al., 1994]).
- N.-S. Chen. A collection of 450 annotated test matrices in ASCII files. (These files are constantly being updated.), 1998.
- N.-S. Chen. Notes on angles between subspaces. (These notes contains notes and a rare collections of literature discussing the distance, angles between subspaces.), 2001.
- N.-S. Chen, G. Hartmann, und S. Drüe. Circle location from intensity and range data using the singular value decomposition. In *Proceedings of the 15th International Conference on Pattern Recognition ICPR'2000*, volume III, pages Vol III: 782–785, 2000.

- R. E. Cline. Inverses of rank invariant powers of a matrix. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5: 182–197, 1968. (cited in [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 169]).
- R. E. Cline. *Elements of the Theory of Generalized Inverses for Matrices*. The UMAP expository monograph series. Education Development Center, Newton, Mass., 1979. (citing [Halmos, 1958], [Drazin, 1958]; v. et. [Cline und Greville, 1980]).
- R. E. Cline und T. N. E. Greville. A Drazin inverse for rectangular matrices. *j-LINEAR-ALGEBRA-APPL.*, 29:53–62, 1980. (v. et. [Cline, 1979]).
- F. W. Campbell, G. F. Cooper, und C. Enroth-Cugel. The spatial selectivity of the visual cells of the cat. *Journal of Physiology London*, 203:223–235, 1969. cited in [Marcelja, 1980].
- F. W. Campbell und J. G. Robson. Application of fourier analysis to the visibility of grating. *Journal of Physiology London*, 197:551–566, 1968. cited in [Marcelja, 1980].
- J. H. Conway und N. J. A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Grundlehrer der mathematischen Wissenschaften; 290. Springer, New York, 2 edition, 1993. P41TFH1351(2) v. et. 3rd ed. [Conway und Sloane, 1999] (hypersphere).
- J. H. Conway und N. J. A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Grundlehrer der mathematischen Wissenschaften; 290. Springer, New York, 3 edition, 1999. P77TFH1505(3) v. et. 2nd ed. [Conway und Sloane, 1993] (hypersphere).
- F. W. Cooper und J. G. Robson. Successive transformation of spatial information in the visual system. In *IEE/NPL Conference on Pattern Recognition*, pages 134–143. IEE Conf. Publ. London 42, 1968. cited in [Marcelja, 1980].
- C. C. Cowen. A project on circles in space. In D. Carlson, C. R. Johnson, D. C. Lay, und A. D. Porter, editors, *Resources for Teaching Linear Algebra*, pages 59–70. American Mathematical Society, Washington, 1997. v. et. [Carlson et al., 1997].
- H. S. M. Coxeter. *Regular Polytopes*. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover, New York, 3 edition, 1973. P41TGA1782(3) (v. et. [Du Val, 1964] [Altmann, 1986] recommended by Pertti Lounesto).
- Y. T. Cui, J. Weng, und H. Reynolds. Estimation of ellipse parameters using optimal minimum-variance estimator. *Pattern Recognition Letters*, 17(3):309–316, 1996.
- P.-E. Danielsson. Generalized and separable sobel operators. In H. Freeman, editor, *Machine Vision for Three-Dimensional Scenes*, pages 376–379. Academic Press, 1990. v. et. [Sobel, 1990] (not found in UBPB).
- J. G. Daugman. Two-dimensional spectral analysis of cortical receptive field profiles. *Vision Research*, 20:847–856, 1980.
- J. G. Daugman. Uncertainty relation for resolution in space, spatial frequency, and orientation optimized by two-dimensional visual cortical filters. *Journal of the Optical Society of America A*, 2(7):1160–1169, 1985. cites [Andrews und Pollen, 1979; Daugman, 1980; Gábor, 1946; Hubel und Wiesel, 1962, 1974; Marcelja, 1980; Movshon et al., 1978b; Movshon und Tolhurst, 1975; Pollen und Ronner, 1981; Rodieck, 1965], P40/67o3 A copied 970047243.

- J. G. Daugman. Complete discrete 2-d gabor transforms by neural networks for image analysis and compression. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36(7):1169–1179, 1988. (invited paper) P50/88i42 copied 970072758.
- J. G. Daugman. Entropy reduction and decorrelation in visual coding by oriented neural receptive fields. *IEEE Trans. Biomed. Engin.*, 36(1), 1989.
- C. Davis. Separation of two linear subspaces. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 19: 172–187, 1958. (Magazin P40/61a5 1958 TOMUS XIX).
- C. Davis und W. Kahan. The rotation of eigenvectors by a perturbation. III. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 7(1):1–46, 1970. cited in [Kovarik, 1977]; cites [Afriat, 1957] [Suschowk, 1956 (1957)] [Mirsky, 1960] [Zassenhaus, 1964].
- B. L. R. De Moor, J. Staar, und J. Vandewalle. Oriented energy and oriented signal-to-noise ratio concepts in the analysis of vector sequence and time series. In E. F. Deprettere, editor, *SVD and Signal Processing: Algorithms, Applications and Architectures*, pages 209–232. Elsevier Science, Delft, The Netherlands, 1988. (P51YCB3194-1 *** Important! To read again! ***).
- S. C. Deerwester, S. T. Dumais, T. K. Landauer, G. W. Furnas, und R. A. Harshman. Indexing by latent semantic analysis. *Journal of the American Society of Information Science*, 41(6):391–407, 1990. cited in [Kolenda und Hansen, 1999] [Landauer und Dumais, 1997] [Husbands et al., 2000].
- E. F. Deprettere, editor. *SVD and Signal Processing: Algorithms, Applications and Architectures*, volume 1 of *SVD and signal processing*; 2. Elsevier Science, Delft, The Netherlands, 1988. (P51YCB3194-1) (cited by [van der Veen et al., 1993] [Leach, 1998]) (v. et. [Vaccaro, 1991] [Moonen und De Moor, 1995]).
- R. Deriche. Recursively implementing the gaussian and its derivatives. Technical Report RR-1893, INRIA, 1993. (RR-1893.pdf, RR-1893.ps.gz; v. et. [Monga et al., 1991], pgmcanny.c, iir.c).
- P. Dewilde und E. F. Deprettere. Singular value decomposition: An introduction. In E. F. Deprettere, editor, *SVD and Signal Processing: Algorithms, Applications and Architectures*, pages 3–41. Elsevier Science, Delft, The Netherlands, 1988. P51YCB3194-1.
- M. P. Drazin. Pseudo-inverse in associative rings and semigroups. *American Mathematical Monthly*, 65:506–514, 1958. (cited in [Campbell und Meyer, 1979], [Campbell und Meyer, 1991], [Ipsen und Meyer, 1998] [Cline, 1979, p. 57]).
- P. Du Val. *Homographies Quaternions and Rotations*. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford, 1964. P49TEN1357 (seel also [Coxeter, 1973] [Altmann, 1986] recommended by Pertti Lounesto).
- A. A. Dubrulle. Work notes on elementary matrices. Technical Report HPL-63-69, Hewlett-Packard Laboratories, 1996. cited in [Lehoucq, 1996].
- B. S. Duran und P. L. Odell. *Cluster Analysis: A Survey*. Lecture notes in economics and mathematical systems; 100; Econometrics. Springer, Berlin, 1974. *** P31QGW1393; v. et. [Mahalanobis, 1930] [Everitt, 1998].

- C. Eckart und G. Young. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1:211–218, 1936. cited in [Stewart, 1992b] [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 242]; v. et. [Eckart und Young, 1939].
- C. Eckart und G. Young. A principal axis transformation for non-Hermitian matrices. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45:118–121, 1939. cited in [Stewart, 1992b] [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 242]; v. et. [Eckart und Young, 1936].
- A. Edelman. When is $x * (1/x) \neq 1$? (Lecture Notes, MIT), 1994.
- T. Ellis, A. Abbood, und B. Brillault. Ellipse detection and matching with uncertainty. *Image and Vision Computing*, 10:271–276, 1992.
- B. S. Everitt. *Cluster Analysis*. Arnold, London, 3 edition, 1998. *** P41TKO2116(3); v. et. [Mahalanobis, 1930] [Duran und Odell, 1974].
- K. Fan und A. J. Hoffman. Some metric inequalities in the space of matrices. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 6:111–116, 1955. cited in [Higham, 1986] [Stewart, 1992b].
- A. E. Fekete. *Real Linear Algebra*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics; 91. Dekker, New York, 1985. P41TDQ3871.
- F. A. Ficken. *Linear Transformations and Matrices*. Prentice-Hall, New Jersey, 1967. P41TDQ1560.
- D. J. Field. Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells. *Journal of The Optical Society of America A*, 4(12):2379–2394, 1987. cited in [Kovesi, 2002].
- R. D. Fierro, G. H. Golub, P. C. Hansen, und D. P. O’leary. Regularization by truncated total least squares. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(4):1223–1241, 1997.
- A. Fitzgibbon, M. Pilu, und R. Fisher. Direct least-square fitting of ellipses. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996. [To be submitted to IEEE PAMI; Extended version of ICPR’96 and ICIP’96 papers].
- L. M. J. Florack. Mathematical techniques for image analysis. 8D020 Course Notes, Version I.I; cites [Hilbert, 1887, 1890, 1893] [Hadamard, 1902] [Schwartz, 1951, 1966], 2002.
- L. M. J. Florack, B. M. ter Haar Romeny, J. J. Koenderink, und M. A. Viergever. Families of tuned scale-space kernels. In G. Sandini, editor, *Proceedings of the European Conference on Computer Vision May 19–22 1992*, pages 19–23, Santa Margherita Ligure, Italy, 1992.
- G. E. Forsythe, M. A. Malcom, und C. B. Moler, editors. *Computer Methods for Mathematical Computations*. Prentice-Hall, N.J., 1977. (P41TDZ1034) cited in [Leach, 1998].
- W. Frei und C. Chen. Fast boundary detection: A generalization and a new algorithm. *IEEE Transactions on Computers*, C-26(10):988–998, 1977. (cited in [Hall, 1979, pp. 396–402], [Gonzalez, 1987, pp. 340–347]; v. et. 980767857 for a short description.).

- G. W. Furnas, S. C. Deerwester, S. T. Dumais, T. K. Landauer, R. A. Harshman, L. A. Streeter, und K. E. Lochbaum. Information retrieval using a singular value decomposition model of latent semantic structure. In *International Conference on Research and Development in Information Retrieval*, pages 465–480, Grenoble, France, 1988. (v. et. [Berry et al., 1994a]).
- D. Gábor. Theory of communication. *Journal of the Institute of Electrical Engineers (London)*, 93(26):429–457, 1946. cites [Heisenberg, 1927]; v. et. [Ville, 1948]; cited in [Daugman, 1985, 1988; Marcelja, 1980] [Havlicek et al., 1997].
- W. Gander, G. H. Golub, und R. Strelbel. Fitting of circles and ellipses, least square solution. tech-reports-1994 217, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Department Informatik, Institut für Wissenschaftliches Rechnen, 1994a. also in [Gander et al., 1994b]; cites [Bookstein, 1979] [Späth, 1986].
- W. Gander, G. H. Golub, und R. Strelbel. Least-squares fitting of circles and ellipses. *BIT*, 34(4):558–578, 1994b. P40/64b1; from [Gander et al., 1994a].
- C. F. Gauß. *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis*. John Wiley & Sons, 1809. (see [Gauß, 1963] for engl trans.).
- C. F. Gauß. *Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections (Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis)*. Dover books on astronomy and space topics. Dover, New York, 1963. P41VBI1039 (v. et. [Gauß, 1809]).
- P. E. Gill, W. Murry, und M. H. Wright. *Numerical Linear Algebra and Optimization*. Addison-Wesley, Redwood City, Calif., 1991. P41TKZ1911-1.
- I. C. Gohberg und M. G. Krein. *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society; 18, Providence, RI, 1969. P41TJS1328 P65TJS1328+2 cited in [Ipsen und Meyer, 1995].
- D. Goldberg. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 23(1):5–48, 1991. cites [IEEE, 1985].
- G. H. Golub und W. Kahan. Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix. *SIAM Journal on Numerical Analysis, Ser. B*, 2(2):205–224, 1965. cited in [Rust, 1998] [Golub und Reinsch, 1970a,b].
- G. H. Golub, W. Kahan, und F. T. Luk. Computing the singular-value decomposition on the illiac-iv. *CM Transactions on Mathematical Software*, 6:524–539, 1980. cited in [Pan und Hamdi, 1996].
- G. H. Golub, V. Klema, und G. W. Stewart. Rank degeneracy and least squares problems. Technical Report TR-456, Department of Computer Science, University of Maryland, 1976. (cited by [Rust, 1998]).
- G. H. Golub und C. Reinsch. Singular value decomposition and least squares solution. *Numerische Mathematik*, 14(5):403–420, 1970a. v. et. [Golub und Reinsch, 1970b]; cited in [Pan und Hamdi, 1996]; cites [Wilkinson, 1965b].
- G. H. Golub und C. Reinsch. Singular value decomposition and least squares solution. In J. H. Wilkinson und C. Reinsch, editors, *Linear Algebra vol. II of Handbook for Automatic Computation*, pages 134–151. Springer-Verlag, New York, 1970b. v. et. “the yellow book” [Golub und Reinsch, 1970a]; cites [Wilkinson, 1965b].

- G. H. Golub und C. F. Van Loan. An analysis of the total least squares problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 17:883–893, 1980. P40/61s8, 3.1966- (cited in [Späth, 1986]).
- G. H. Golub und C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1983. (P41TDQ3588) (v. et. [Golub und Van Loan, 1989] [Golub und Van Loan, 1996]; cites [Pearson, 1901] on p. 425; cited in [Leach, 1998]).
- G. H. Golub und C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 2nd edition, 1989. (v. et. [Golub und Van Loan, 1983] [Golub und Van Loan, 1996]).
- G. H. Golub und C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 3 edition, 1996. (P41TDQ3588(3)) (v. et. [Golub und Van Loan, 1983] [Golub und Van Loan, 1989]).
- R. C. Gonzalez. *Digital Image Processing*. Addison-Wesley Publishing Company, 2 edition, 1987. P41TVV1460(2)+2 (cites [Frei und Chen, 1977] in pp. 340–347; [Zhang und Suen, 1984] [Lee und Chen, 1992]).
- A. W. Goodwin, G. H. Henry, und P. O. Bishop. Direction selectivity of simple striate cells. *J. Neurophysiology*, 38:1500–1523, 1975. cited in [Marcelja, 1980].
- J. P. Gram. Über die Entwicklung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 94:41–73, 1883. cf. [Schmidt, 1907a].
- H. G. Graßmann. *Die Ausdehnungslehre von 1844 (Die lineale Ausdehnungslehre: ein neuer Zweig der Mathematik) und die geometrische Analyse*. Gesammelte mathematische und physikalische Werke; 1,1. Verlag von Otto Wigand, Leipzig, 1894. P40TAW1097-1,1; v. et. [Graßmann, 1896].
- H. G. Graßmann. *Die Ausdehnungslehre von 1862*. Gesammelte [Serie] mathematische und physikalische Werke; 1,2. Verlag von Otto Wigand, Leipzig, 1896. P40TAW1097-1,2; v. et. [Graßmann, 1894].
- J. Gray. The history of the concept of a finite-dimensional vector space. *Historia Mathematica*, pages 65–70, 1980. P40/61h3 (2.1975–27.2000).
- J. J. Gray. Finite-dimensional vector spaces. In I. Grattan-Guinness, editor, *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, volume 2, pages 947–951. Routledge, London, 1994. P40TBC1708.
- B. F. Green. The orthogonal apprroximation of the oblique structure in factor analysis. *Psychometrika*, 17(4):429–440, 1952. cited in [Higham, 1986] [Stewart, 1992b]; v. et. [Schönenman, 1966] [Rao, 1980] [Hurley und Cattell, 1962].
- R. T. Gregory und D. L. Karney. *A Collection of Matrices for Testing Computational Algorithms*. Wiley-Interscience, a division of John Wiley & Sons, New York, 1969. P41TDZ1408 (cites [Rosser et al., 1951, pp. 61–62]).
- T. N. C. Greville. Spectral generalized inverses of square matrices. M. R. C. Technical Summary Report #823, Mathematics Research Center, Univ. of Wisc., Madison Wisc., 1967. (cited in [Campbell und Meyer, 1975], [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 169]).

- D. H. Griffel. *Linear algebra and its applications*, volume 1 of *Ellis Horwood series in mathematics and its applications*. Elllis Horwood Limited, 1989a. P41TDQ3994-1.
- D. H. Griffel. *Linear algebra and its applications*, volume 2 of *Ellis Horwood series in mathematics and its applications*. Elllis Horwood Limited, 1989b. P41TDQ3994-2.
- G. Guy und G. Medioni. Inferring global perceptual contours from local features. In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 786–787, 1983. v. et. [Guy und Medioni, 1992] [Guy und Medioni, 1996].
- G. Guy und G. Medioni. Inferring global perceptual contours from local features. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 24, 1992. v. et. [Guy und Medioni, 1983] [Guy und Medioni, 1996].
- G. Guy und G. Medioni. Inferring global perceptual contours from local features. *International Journal of Computer Vision*, 20(1):113–133, 1996. v. et. [Guy und Medioni, 1992] [Guy und Medioni, 1983].
- J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Bul. Univ. Princeton*, 13:49–62, 1902. v. et. [Hadamard, 1923]; cited in [Florack, 2002].
- J. Hadamard. *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, CT, 1923. v. et. [Hadamard, 1902].
- S. L. Hahn. Multidimensional complex signals with single-orthant spectra. *Proceedings of the IEEE*, 80(8):1287–1300, 1992. cited in [Havlicek et al., 1997].
- R. Halíř und J. Flusser. Numerically stable direct least squares fitting of ellipses. In *The Sixth International Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization, WSCG'98*, 1998.
- E. L. Hall. *Computer Image Processing and Recognition*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, New York, 1979. P41TVV1834; (cites [Frei und Chen, 1977] in pp. 396–402).
- P. R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Van-Nostrand, New Jersey, 1958. (P41TDQ2710) cited by Cline [Cline, 1979] as an excellent textbook for basic matrix theory parallel to Noble's [Noble und Daniel, 1977] and Strang's [Strang, 1980]; cited in [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 50].
- P. C. Hansen. The truncated svd as a method for regularization. *BIT*, 27:534–553, 1987. Cited in Åke Björck's bibliography on least squares, which is available by anonymous ftp from math.liu.se in pub/references. cited in [Rust, 1998]; 978463811; v. et. [Hansen, 1989, 1990, 1998].
- P. C. Hansen. Regularization, gsvd and truncated gsvd. *BIT*, 29:491–504, 1989. v. et. [Hansen, 1987, 1990, 1998].
- P. C. Hansen. Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11:503–518, 1990. Cited in Åke Björck's bibliography on least squares, which is available by anonymous ftp from math.liu.se in pub/references; v. et. [Hansen, 1987, 1989, 1998].

- P. C. Hansen. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*. SIAM monographs on mathematical modeling and computation. SIAM, Philadelphia, 1998. P41TKZ2276 (cited in [Rust, 1998] and 979790705); v. et. [Hansen, 1987, 1989, 1990].
- R. J. Hanson und J. L. Phillips. A numerical method for solving fredholm integral equations of the first kind using singular values. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 8: 616–622, 1971. (cited in [Rust, 1998]) (v. et. [Hanson und Phillips, 1971]).
- R. J. Hanson und J. L. Phillips. An adaptive numerical method for solving linear fredholm equations of the first kind. *Numer. Math.*, 24:291–307, 1975. Cited in Åke Björck's bibliography on least squares, which is available by anonymous ftp from `math.liu.se` in `pub/references`. (v. et. [Hanson und Phillips, 1971]).
- G. Hartmann. Continuous line structures by a hierarchical system. In *Proceedings of the 6th International Conference on Pattern Recognition ICPR'1982*, pages 195–200, 1982.
- G. Hartmann. Processing of continuous lines and edges by the visual system. *Biological Cybernetics*, 47:43–50, 1983.
- R. E. Hartwig und I. J. Katz. On products of ep matrices. *Linear Algebra Appl.*, 252: 339–345, 1997. (cited in [Koliha, 1999]; v. et. [Baskett und Katz, 1969]).
- J. P. Havlicek, D. S. Harding, und A. C. Bovik. Multidimensional quasi-eigenfunction approximations and multicomponent. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(2), 2000. v. et. [Havlicek et al., 1997].
- J. P. Havlicek, J. W. Havlicek, und A. C. Bovik. The analytic image. In *International Conference on Image Processing (ICIP '97)*, volume 3, pages 446–449. IEEE Computer Society, 1997. v. et. [Havlicek et al., 2000].
- P. S. Heckbert und M. Garland. Optimal triangulation and quadric-based surface simplification. *Computational Geometry*, 14(1–3):49–65, 1999.
- W. Heisenberg. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen (About the quantum-theoretical reinterpretation of kinetic and mechanical relationships). *Zeitschrift für Physik*, 33:879–893, 1925. v. et. [Heisenberg, 1927, 1931].
- W. Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43:172–198, 1927. Translation by John Archibald Wheeler and Wojciech Hubert Zurek “The Perceptible content of the Quantum Theoretical Kinematics and Mechanics” in *Quantum Theory and Measurement* ed. JAW and WHZ, Princeton University Press, Princeton NJ 1983, p. 62–84; v. et. [Heisenberg, 1925, 1931] [Kennard, 1927] [Robertson, 1929]; cited in [Gábor, 1946].
- W. Heisenberg. Die Rolle der Unbestimmtheitsrelationen in der modernen Physik. *Mnatshefte für Mathematik und Physik*, 38:365–372, 1931. v. et. [Heisenberg, 1925, 1927].
- N. J. Higham. Computing the polar decomposition—with applications. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(4):1160–1174, 1986. P40/61s31; cited in [Shoemaker und Duff, 1992] [Higham, 1995]; cites [Green, 1952] [Fan und Hoffman, 1955] [Schöneman, 1966].

- N. J. Higham. The test matrix toolbox for matlab (version 3.0). Numerical Analysis Report No. 276, Manchester Centre for Computational Mathematics, 1995. cited [Higham, 1986].
- N. J. Higham. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. SIAM, Philadelphia PA, 1996. P41TKX5046.
- N. J. Higham und P. A. Knight. Finite precision behavior of stationary iteration for solving singular systems. *Linear Algebra and Appl.*, 192:165–186, 1993. (cites [Campbell und Meyer, 1979]).
- N. J. Higham und R. S. Schreiber. Fast polar decomposition of an arbitrary matrix. Technical Report 88-942, Computer Science, Cornell University, Ithaca, NY 14853, 1988. cited in [Golub und Van Loan, 1989] [Shoemake und Duff, 1992].
- D. Hilbert. Über einen allgemeinen Gesichtspunkt für Invarianten-theoretische Untersuchungen im binaren Formengebiete. *Mathematische Annalen*, 28:381–446, 1887. cited in [Florack, 2002].
- D. Hilbert. Über die Theorie der algebraischen Formen. *Mathematische Annalen*, 36: 473–534, 1890. cited in [Florack, 2002].
- D. Hilbert. Über die vollen Invariantensystemen. *Mathematische Annalen*, 42:313–373, 1893. cited in [Florack, 2002].
- D. Hilbert und S. Cohn-Vossen. *Anschauliche Geometrie*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen; 37. Springer, Berlin, 1932. P41TGA1334-DT v. et. [Hilbert und Cohn-Vossen, 1952].
- D. Hilbert und S. Cohn-Vossen. *Geometry and the imagination (Anschauliche Geometrie 1932)*. Chelsea scientific books; 87. Chelsea, New York, 1952. P41TGA1334 v. et. [Hilbert und Cohn-Vossen, 1932].
- C.-T. Ho und L.-H. Chen. A fast ellipse/circle detector using geometric symmetry. *Pattern Recognition*, 28(1):117–124, 1995. (v. et. [Yuen et al., 1989] [McLaughlin, 1998]).
- F. E. Hohn. *Elementary Matrix Algebra*. Macmillan, New York, 3 edition, 1973. P41TDR1280(3).
- R. A. Horn und C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985. P41TDQ3774+7.
- H. Hotelling. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24:417–441 and 498–520, 1933. cited in [Stewart, 1992b]; v. et. [Hotelling, 1936].
- H. Hotelling. Relation between two sets of variates. *Biometrika*, 28:322–377, 1936. cited in [Stewart, 1992b]; v. et. [Hotelling, 1933].
- A. S. Householder. Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix. *Journal of the ACM*, 5(4):339–342, 1958. v. et. [Householder, 1972, 1975].
- A. S. Householder. *Lectures on numerical algebra: notes on lectures given at the 1972 MAA summer seminar*. Mathematical Ass. of America, Washington, DC, 1972. P41TKZ1238 v. et. [Householder, 1958, 1975], [Householder und Landahl, 1945] [Laurie, 1997a,b].

- A. S. Householder. *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. Dover, New York, 1975. P65TKZ1466+4 v. et. [Householder, 1958, 1972], [Householder und Landahl, 1945] [Laurie, 1997a,b]; cited in [Lehoucq, 1996].
- A. S. Householder und H. D. Landahl. *Mathematical biophysics of the central nervous system*. Principia Press, Bloomington, Ind., 1945. v. et. [Householder, 1972, 1975].
- D. H. Hubel und T. N. Wiesel. Receptive fields, binocular interaction, and functional architecture in the cat's visual cortex. *Journal of Physiology (London)*, 160:106–154, 1962. cited in [Daugman, 1985, 1988; Marcelja, 1980].
- D. H. Hubel und T. N. Wiesel. Sequence regularity and geometry of orientation columns in the monkey striate cortex. *J. Comput. Neurol.*, 158:267–293, 1974. cited in [Daugman, 1985, 1988].
- D. H. Hubel und T. N. Wiesel. Functional architecture of macaque monkey visual cortex. *Proceedings of the Royal Society of London B*, 198:1–59, 1978. cited in [Lee, 1996].
- J. R. Hurley und R. B. Cattell. The Procrustes program: Direct rotation to test a hypothesized factor structure. *Behavioral Science*, 7:258–262, 1962. v. et. [Schöneman, 1966] [Rao, 1980] [Green, 1952]; Cited in [Stewart, 1992b].
- P. Husbands, H. Simon, und C. Ding. On the use of singular value decomposition for text retrieval. In M. W. Berry, editor, *Proc. of SIAM Comp. Info. Retrieval Workshop*, 2000. cites [Deerwester et al., 1990] [Berry et al., 1994a].
- IEEE. IEEE standard 754-1985 for binary floating-point arithmetic. Reprinted in SIGPLAN 22, 9–25, IEEE, 1985. cited in [Goldberg, 1991].
- I. C. F. Ipsen und C. D. Meyer. The angle between complementary subspaces. Technical Report Series 4.24.667 NA-019501, Mathematics Department, NCSU, 1995. (v. et. [Meyer, 2000]; cites [Afriat, 1957; Björck und Golub, 1973; Campbell und Meyer, 1991; Davis und Kahan, 1970; Gohberg und Krein, 1969; Golub und Van Loan, 1989; Kato, 1966; Ljance, 1959; Schumacher, 1992; Stewart, 1973a, 1977; Stewart und Sun, 1990; Strang, 1988, 1993; Wedin, 1982; Zhu, 1994]).
- I. C. F. Ipsen und C. D. Meyer. The idea behind krylov methods. *American Mathematical Monthly*, 105(10):889–899, 1998. (available in the homepage of Meyer; citing [Drazin, 1958], [Campbell und Meyer, 1979]).
- J. P. Jones und L. A. Palmer. An evaluation of the two-dimensional gabor filter model of simple receptive fields in cat striate cortex. *J. Neurophysiology*, 58(6):1233–1258, 1987a. (v. et. [Jones und Palmer, 1987b]).
- J. P. Jones und L. A. Palmer. The two-dimensional spatial structure of simple receptive fields in the cat striate cortex. *J. Neurophysiology*, 58(6):1187–1211, 1987b. (v. et. [Jones und Palmer, 1987a]).
- C. Jordan. Mémoire sur les formes bilinéaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Deuxième Série*, 19:35–54, 1874a.
- C. Jordan. Sur la réduction des formes bilinéaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 78:614–617, 1874b.

- C. Jordan. Essai sur la géométrie à n dimensions. *Bulletin de la Société Mathématique*, 3: 103–174, 1875.
- B. Kågström und A. Ruhe, editors. *Matrix Pencils: Proceedings of a Conference held at Pite Havsbad, Sweden March 22–24 1982*. Lecture Notes in Mathematics; 973. Springer, Berlin, 1993. P40TAY820075 cited in [Ipsen und Meyer, 1995] v. et. [Wedin, 1982].
- W. Kahan. Geometry of elementary operations. (same source as [Kahan, 1999]), 1998.
- W. Kahan. Is there a skew cayley transform with zero diagonal? v. et. [Satake, 1975, p. 201] [Fekete, 1985, p. 265] (same source as [Kahan, 1998]), 1999.
- K. Kanatani. *Geometric Computation for Machine Vision*. Carendon Press, Oxford, 1993. P41TGJ1711.
- K. Kanatani. Comments on "nonparametric segmentation of curves into various representations". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(12): 1391–1392, 1997. v. et. [Rosin und West, 1997] [Rosin und West, 1997].
- I. Kant. *Kritik der reinen Vernunft*. Ed. Dt. Bibliothek, München, 2 edition, 1781. Dem Text liegt zugrunde die 1. Ausg. (1781), hrsg. von Karl Kehrbach, 2. Aufl. Leipzig 1878; P11JIQE1030.
- L. W. Kantorowitsch und G. P. Akilow. *Funktionalanalysis in normierten Räumen*. Thun, 1978. P41TJL2052.
- I. Kaplansky. *Linear Algebra and Geometry*. Chelsea Publ. Co., New York, 2 edition, 1974. P65TDQ3203(2)+4 cites [Witt, 1937]; cites on p. 120 [MacLane und Birkhoff, 1967, Chapter 12].
- K. Karhunen. Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse. *Prozessa Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Ser. A: 1, Mathematica, physica*, 37:1–37, 1946. P03SA24-1947 (v. et. [Loève, 1955] [Loève, 1963]).
- W. C. Karl, G. C. Verghese, und A. S. Willsky. Reconstructing ellipsoids from projections. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Graphical Models and Image Processing*, 56(2):124–139, 1994. (citing [Bookstein, 1979], [Chaudhuri und Samanta, 1991]).
- T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete; 132. Springer, Berlin, 1966. P65TJK1051+3 cited in [Ipsen und Meyer, 1995]; see [Kato, 1976] for 2nd ed.
- T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete; 132. Springer, Berlin, 2 edition, 1976. P65TJK1051(2)+8 (see [Kato, 1966] for the 1st ed.).
- I. J. Katz. Wiegman type theorem for ep_r matrices. *Duke Math. Journal*, 32:423–427, 1965. cited in [Ben-Israel und Greville, 1976, p. 166].
- E. H. Kennard. Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen. *Zeitschrift für Physik*, 44:326–352, 1927. v. et. [Heisenberg, 1927] [Robertson, 1929].

- D. E. Knuth. *Fundamental Algorithms*, volume 1 of *The Art of Computer Programming*; 1. Addison-Wesley, 1973, 1968. P41TXB1078(2) (v. et. [Knuth, 1981, 1969, 1998]).
- D. E. Knuth. *Seminumerical Algorithms*, volume 2 of *The Art of Computer Programming*; 2. Addison-Wesley, 1981, 1969. P41TXB1078(2)-2 (v. et. [Knuth, 1973, 1968, 1998]).
- D. E. Knuth. *Sorting and Searching*, volume 3 of *The Art of Computer Programming*; 3. Addison-Wesley, 1998. P41TXB1078(2)-3 (v. et. [Knuth, 1973, 1968, 1981, 1969]).
- M. Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Springer-Lehrbuch: Grundwissen Mathematik. Springer, Berlin, 4 edition, 1997. P41TDQ3562(4).
- J. J. Koenderink. The structure of images. *Biological Cybernetics*, 50:363–370, 1984.
- T. Kolenda und L. K. Hansen. Independent components in text. In M. Girolami, editor, *Advances in Independent Component Analysis*, pages Chapt. 13, pp. 23556. Springer-Verlag, 1999. cites [Deerwester et al., 1990].
- J. J. Koliha. Simple proof of the product theorem for ep matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 294:213–215, 1999. (cites [Barnett, 1971; Campbell und Meyer, 1991; Hartwig und Katz, 1997]).
- A. I. Kostrikin und Y. I. Manin. *Linear Algebra and Geometry*. Algebra, Logic and Applications Series Volumne 1. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1989. P41TDQ4021+1 (originally published in Russian in 1981 by Moscow University Press).
- Z. V. Kovarik. Similarity and interpolation between projectors. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 39:341–351, 1977. (Magazin P40/61a5 1977 Tomus 39); cites [Davis und Kahan, 1970].
- P. Kovesi. Image features from phase congruency. *Videre: Journal of Computer Vision Research*, 1(3):1–26, 1999. v. et. [Kovesi, 2002].
- P. Kovesi. Edges are not just steps. In *The 5th Asian Conference on Computer Vision, 23–25 January 2002, Melbourne, Australia*, 2002. v. et. [Kovesi, 1999]; cites [Field, 1987] [Morrone und Owens, 1987] [Morrone und Burr, 1988] [Owens et al., 1989].
- F. Kuhnert. *Pseudoinverse Matrizen und die Methode der Regularisierung*. Teubner-Texte zur Mathematik. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1 edition, 1976. (P41TDQ2639); cites [Bjerhammer, 1951a,b], [Moore, 1920], [Penrose, 1955, 1956], [Ben-Israel und Greville, 1974], [Boullion und Odell, 1971], [Bjerhammer, 1973], [Rao und Mitra, 1971], [Stewart, 1973b].
- U. M. Landau. Estimation of a circular arc center and its radius. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 38:317–326, 1987.
- T. K. Landauer und S. T. Dumais. A solution to plato's problem: The latent semantic analysis theory of acquisition, induction and representation of knowledge. *Psychological Review*, 104(2):211–240, 1997. cites [Deerwester et al., 1990].
- B. P. Lathi. *An Introduction to Random Signals and Communication Theory*. International Textbook Company, Scranton, 1968.
- D. Laurie. Complex analogue of householder reflections: Summary. *Numerical Analysis Digest*, 97(22), 1997a. <http://www.netlib.org/na-digest-html/97/v97n22.html>; cf. [Householder, 1972, 1975] [Sun, 1995] [Lehoucq, 1996].

- D. Laurie. Complex analogues of householder reflections. *Numerical Analysis Digest*, 97(18), 1997b. <http://www.netlib.org/na-digest-html/97/v97n18.html>; cf. [Householder, 1972, 1975] [Sun, 1995] [Lehoucq, 1996].
- C. L. Lawson und R. J. Hanson. *Solving Least Squares Problems*. Prentice Hall Series in Automatic Computation. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974. P51TKZ1212 (cited in [Vandewalle und De Moor, 1988]).
- G. Le Lann. An analysis of the ariane 5 flight 501 failure – a system engineering perspective. In *10th IEEE International ECBS Conference, March 1997*, pages 339–346, 1997. v. et. [Lions, 1996].
- F. Le Lionnais. *Les nombres remarquables*. Actualites scientifiques et industrielles; 1407. Hermann, Paris, 1984. P41TBX3080.
- S. Leach. Singular value decomposition - a primer. `minisvd.ps` cites [Scharf, 1991] [Forsythe et al., 1977] [Deprettere, 1988] [Vaccaro, 1991] [Golub und Van Loan, 1983], 1998.
- H.-J. Lee und B. Chen. Recognition of handwritten chinese characters via short line segments. *Pattern Recognition*, 25(5):543–552, 1992. v. et. [Zhang und Suen, 1984] (XITE).
- T. S. Lee. Image representation using 2D gabor wavelets. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(10), 1996. cites [Daugman, 1980, 1985, 1988; Gábor, 1946; Hubel und Wiesel, 1978; Jones und Palmer, 1987a; Marcelja, 1980; Olshausen und Field, 1966,?; Optican und Richmond, 1987; Tolhurst, 1989; Werner und Mountcastle, 1965], P50/88i61 reviewed 970154527 but not copied.
- R. B. Lehoucq. The computation of elementary unitary matrices. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 22(4):393–400, 1996. cf. [Laurie, 1997a,b] [Sun, 1995]; cites [Wilkinson, 1965a] [Householder, 1975] [Dubrulle, 1996].
- Lena Sjööblom-Soderberg. Centerfold: Miss. November 1972. *Playboy*, 11:138, 1972. v. et. 1997 October issue, Playmate News; cited in [Munson, 1996].
- J.-L. Lions. Ariane 5 flight 501 failure. Report by the Inquiry Board Ariane Status Report No. 6, ESA (European Space Agency)/CNES (Centre National d'Etudes Spatiales), Paris, 1996. <http://www.esrin.esa.it/htdocs/tidc/Press/Press96/ariane5rep.html> or lib/txt/comp/ariane5.zip; v. et. [Le Lann, 1997].
- V. E. Ljance. Some properties of idempotent operators. *Teor. i Prikl. Mat. L'vov*, 1:16–22, 1959. (Russian) cited in [Ipsen und Meyer, 1995].
- M. M. Loève. *Probability Theory*. Van Nostrand, New York, 1955. (v. et. [Loève, 1963] [Karhunen, 1946]).
- M. M. Loève. *Probability Theory*. The university series in higher mathematics. Van Nostrand, New York, 3 edition, 1963. P41TKA1681(3). v. et. [Loève, 1955] [Karhunen, 1946].
- S. MacLane und G. Birkhoff. *Algebra*. Macmillian, London, 1967. P41TDP2812 cited in [Kaplansky, 1974, p. 120].
- L. Maffei und A. Fiorentini. The visual cortex as a spatial frequency analyzer. *Vision Res.*, 13:1255–1267, 1973. cited in [Marcelja, 1980].

- L. Maffei, C. Morrone, M. Pirchio, und G. Sandini. Responses of visual cortical cells to periodic and non-periodic stimuli. *Journal of Physiology London*, 296:27–47, 1979. cited in [Marcelja, 1980].
- P. C. Mahalanobis. On tests and measures of groups divergence I. *Journal of the Asiatic Society of Benagal*, 26:541, 1930. (seel also [Everitt, 1998] [Duran und Odell, 1974]).
- P. C. Mahalanobis. On the generalized distance in statistics. *Proceedings of the National Institute of Science of India*, 12:49–55, 1936.
- S. Marcelja. Mathematical description of the response of simple cortical cells. *Journal of Optical Society of America, A*, 70(11):1297–1300, 1980. cites [Bishop et al., 1973; Campbell et al., 1969; Compbell und Robson, 1968; Cooper und Robson, 1968; Gábor, 1946; Goodwin et al., 1975; Hubel und Wiesel, 1962; Maffei und Fiorentini, 1973; Maffei et al., 1979; Movshon et al., 1978a,b; Orban et al., 1979; Robson, 1975] P40/67o03A (Magazin: -1980).
- M. J. Maron und G. M. Maron. A geometric interpretation of the columns of the (pseudo)inverse of a . *College Math Journal*, 24(1):73–75, 1993. (This article is collected in [Carlson et al., 1997]).
- D. Marr und E. C. Hildreth. Theory of edge detection. *Proceedings of the Royal Society of London, B-207*:187–217, 1980. v. et. [Deriche, 1993], pgmarr.c, iir.c; cf. [Canny, 1986] [Shen und Castan, 1992].
- G. Marsaglia und A. Zaman. Toward a universal random number generator. Technical Report FSU-SCRI-87-50, Florida State University, 1987. (rammar.c, ghyper.c, gaussian.c; later modified by F. James and published in “A Review of Pseudo-random Number Generators”).
- R. A. McLaughlin. Randomized hough transform: Improved ellipse detection with comparison. *Pattern Recognition Letters*, 19(3-4):299–305, 1998. (v. et. [Yuen et al., 1989] [Ho und Chen, 1995]).
- C. D. Meyer. Limits and the index of a square matrix. *SIAM J. Appl. Math*, 26:469–478, 1974. (cited in [Campbell und Meyer, 1975]).
- C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 2000. P41TDQ4893-1 (v. et. [Ipsen und Meyer, 1995]).
- L. Mirsky. Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. *Quarterly Journal of Mathematics*, 11:50–59, 1960. cited in [Stewart, 1992b].
- O. Monga, R. Deriche, G. Malandain, und J.-P. Cocquerez. Recursive filtering and edge tracking: two primary tools for 3d edge detection. *Image and Vision Computing*, 9(4): 203–214, 1991. (v. et. [Deriche, 1993] and iir.c).
- R. K. Moniot. Least-squares fitting of a hyperplane. cites [Pearson, 1901] [Williamson, 1968], 2002.
- M. Moonen und B. L. R. De Moor, editors. *SVD and Signal Processing III: Algorithms, Architectures and Applications*, volume 3 of *SVD and signal processing; 3*. Elsevier Science, Delft, The Netherlands, 1995. (P51YCB3194-3).

- E. H. Moore. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26:394–395, 1920. (cited in [Cline, 1979, p. 18], [Kuhnert, 1976, p. 16], [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 7] [Stewart und Sun, 1990, pp. 108–109]).
- E. H. Moore. General analysis. *Memoirs Amer. Philos. Soc.*, 1:147–209, 1935. (cited in [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 7]).
- M. C. Morrone und D. C. Burr. Feature detection in human vision: A phase-dependent energy model. *Proceedings of the Royal Society of London B*, 235:221–245, 1988. cited in [Kovesi, 2002].
- M. C. Morrone und R. A. Owens. Feature detection from local energy. *Pattern Recognition Letters*, 6:303–313, 1987. cited in [Kovesi, 2002].
- J. A. Movshon, I. D. Thompson, und D. J. Tolhurst. Receptive field organization of complex cells in the cat's striate cortex. *Journal of Physiology (London)*, 283:79–99, 1978a. cited in [Marcelja, 1980].
- J. A. Movshon, I. D. Thompson, und D. J. Tolhurst. Spatial summation in the receptive fields of simple cells in the cat's striate cortex. *Journal of Physiology (London)*, 283: 53–77, 1978b. cited in [Daugman, 1985].
- J. A. Movshon und D. J. Tolhurst. On the response linearity of neurons in cat visual cortex. *Journal of Physiology (London)*, 249:56–57, 1975. cited in [Daugman, 1985].
- D. C. Munson. A note on Lena. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(1):3, 1996. cites [Lena Sjööblom-Soderberg, 1972]).
- H. Z. Munthe-Kaas, G. R. W. Quisppe, und A. Zanna. Generalized polar decompositions on lie groups with involutive automorphisms. *Comput. Math.*, 1:297–324, 2001. cites [Autonne, 1902].
- V. S. Nalwa und T. O. Binford. On detecting edges. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(6):699–714, 1986. cites [Canny, 1986].
- M. Z. Nashed und L. B. Rall. Annotated bibliography on generalized inverses and applications. In M. Z. Nashed, editor, *Generalized Inverses and Applications*, pages 771–1041. Academic Press, New York, 1976. cited in [Stewart und Sun, 1990, pp. 108–109].
- B. Noble. Methods for computing the moore-penrose generalized inverse, and related matters. In M. Z. Nashed, editor, *Generalized Inverses and Applications*, Publication of the Mathematics Research Center, The University of Wisconsin, Madison; 32, pages 245–301. Academic Press, New York, 1976. P41TJV1080 (cites [Ben-Israel und Greville, 1974]).
- B. Noble und J. W. Daniel. *Applied Linear Algebra*. Prentice-Hall, 2 edition, 1977. P41TDQ1675(2).
- I. Ohzawa, G. C. DeAngelis, und R. D. Freeman. Stereoscopic depth discrimination in the visual cortex: Neurons ideally suited as disparity detectors. *Science*, pages 1037–1041, 1990. (v. et. [Ohzawa et al., 1997; Ohzawa und Freeman, 1986]).
- I. Ohzawa, G. C. DeAngelis, und R. D. Freeman. Encoding of binocular disparity by complex cells in the cat's visual cortex. *Journal of Neurophysiology*, 77:2897–2909, 1997. (v. et. [Ohzawa et al., 1990; Ohzawa und Freeman, 1986]).

- I. Ohzawa und R. D. Freeman. The binocular organization of simple cells in the cat's visual cortex. *Journal of Neurophysiology*, 56(1):221–242, 1986. (v. et. [Ohzawa et al., 1990, 1997]).
- B. A. Olshausen und D. J. Field. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images. *Nature*, 381:607–609, 1966. P40/58n3; cited in [Lee, 1996].
- P. Opitz. *Numerische Einschließung der Moore-Penrose-Inversen von Matrizen*. PhD thesis, Technische Hochschule Leipzig, Mathematik/Informatik und Naturwissenschaft, Leipzig, 1995. P03D10147.
- L. M. Optican und B. J. Richmond. Temporal encoding of two-dimensional pattern by single units in primate inferior temporal cortex. iii. information theoretic analysis. *J. Neurophysiology*, 57:162–178, 1987. cited in [Lee, 1996].
- G. A. Orban, H. Kato, und P. O. Bishop. End-zone region in receptive fields of hypercomplex and other striate neurons in the cat. *J. Neurophysiology*, 42:818–832, 1979. cited in [Marcelja, 1980].
- R. Owens, S. Venkatesh, und J. Ross. Edge detection is a projection. *Pattern Recognition Letters*, 9:223–244, 1989. cited in [Kovesi, 2002].
- Y. Pan und M. Hamdi. Singular value decomposition on processor arrays with a pipelined bus system. *Journal of Network and Computer Applications*, 19:235–248, 1996. cites [Golub et al., 1980], [Golub und Reinsch, 1970b].
- K. Pearson. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2:559–572, 1901. v. et. [Williamson, 1968]; cited in [Moniot, 2002].
- R. Penrose. A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51:406–413, 1955. (cited in [Cline, 1979, p. 18], [Kuhnert, 1976, p. 16], [Stewart und Sun, 1990, pp. 108–109]).
- R. Penrose. On best approximate solutions of linear matrix equations. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 52:17–19, 1956. (cited in [Kuhnert, 1976, p. 16] [Stewart und Sun, 1990, pp. 108–109]).
- P. Perona und J. Malik. Detecting and localizing edges composed of steps, peaks and roofs. In *Proc. 3rd Int. Conf. on Computer Vision*, pages 52–57, 1990. v. et. [Perona und Malik, 1991].
- P. Perona und J. Malik. Detecting and localizing composite edges in images. In *Procs. ICCV*, Osaka, 1991. v. et. [Perona und Malik, 1990].
- I. Peterson. *The Mathematical Tourist: Snapshots of Modern Mathematics*. Freeman, New York, 1988. P41TBW1669.
- F. Peyrin, Y. M. Zhu, und R. Goutte. Extension of the notion of analytic signal for multidimensional signals. Application to images. In I. T. Young, editor, *Signal Processing III: Theories and Applications*, pages 677–680, Amsterdam, B. V. (North-Holland), 1968. Elsevier Science Publishers. cited in [Havlicek et al., 1997].

- D. A. Pollen und S. F. Ronner. Phase relationship between adjacent simple cells in the visual cortex. *Science*, 212:1409–1411, 1981. cited in [Daugman, 1985] P40/58s1 copied 970160934.
- J. Porrill. Fitting ellipses and predicting confidence envelopes using a bias corrected kalman filter. *Image and Vision Computing*, 8(1):37–41, 1990.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, und B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 1992. P41TKX3832(2)-10,A+1.
- R. M. Pringle und A. A. Rayner. *Generalized inverse matrices with applications to statistics*. Griffin's statistical monographs and courses; 28. Griffin, London, 1971. P41TKP1068.
- C. R. Rao. Matrix approximations and reduction of dimensionality in multivariate statistical analysis. In P. R. Krishnaiah, editor, *Multivariate Analysis—V*. North-Holland, Amsterdam, 1980. v. et. [Green, 1952] [Hurley und Cattell, 1962] [Schöneman, 1966]; cited in [Stewart, 1992b].
- C. R. Rao und S. K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Wiley, New York, 1971. (cited in [Kuhnert, 1976, p. 23] & 985253598).
- Y. Ritov. Bounds on the error of an approximate invariant subspace for non-self-adjoint matrices. *Ejournals*, 1992.
- H. P. Robertson. The uncertainty principle. *Physical Review*, 34:163–164, 1929. v. et. [Heisenberg, 1927] [Kennard, 1927].
- J. G. Robson. Receptive fields: Neural representation of the spatial and intensive attributes of the visual image. In E. C. Carterette und M. P. Friedman, editors, *Handbook of Perception*, volume V. Academic, New York, 1975. cited in [Marcelja, 1980].
- R. W. Rodieck. Quantitative analysis of cat retinal ganglion cell response to visual stimuli. *Vision Research*, 5:583–601, 1965. cited in [Daugman, 1985].
- P. L. Rosin. Ellipse fitting by accumulating five-point fits. *Pattern Recognition Letters*, 14: 661–669, 1993a. v. et. [Rosin, 1993b, 1997].
- P. L. Rosin. A note on the least squares fitting of ellipses. *Pattern Recognition Letters*, 14 (10):799–808, 1993b. v. et. [Rosin, 1993a, 1997].
- P. L. Rosin. Non-parametric multiscale curve smoothing. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 8(6):1381–1406, 1994.
- P. L. Rosin. Edges: Saliency measures and automatic thresholding. Technical Report I.95.58, Institute of Remote Sensing Applications, Joint Research Centre, 1995. (v. et. [Venkatesh und Rosin, 1995] and pgmlink).
- P. L. Rosin. Analyzing error of fit functions for ellipses. In *BMVC96*, page Poster Session 2, 1996a.
- P. L. Rosin. Assessing error of fit functions for ellipses. *Graphical Models and Image Processing*, 58(5):494–502, 1996b.

- P. L. Rosin. Further five point fit ellipse fitting. In *BMVC97, Electronic Proceedings of the Eighth British Machine Vision Conference*, 1997. v. et. [Rosin, 1993a,b].
- P. L. Rosin und G. A. W. West. Segmentation of edges into lines and arcs. *Image Vision Comput.*, 7:109–114, 1989. (cited in [Venkatesh und Rosin, 1995]; v. et. [Rosin und West, 1995] and pgmlink).
- P. L. Rosin und G. A. W. West. Nonparametric segmentation of curves into various representations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(12): 1140–1153, 1995. v. et. [Kanatani, 1997] [Rosin und West, 1997].
- P. L. Rosin und G. A. W. West. Response to kanatani. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(9):1393–1394, 1997. v. et. [Rosin und West, 1995] [Kanatani, 1997].
- J. B. Rosser, C. Lanczos, M. R. Hestenes, und W. Karush. Separation of close eigenvalues of a real symmetric matrix. *Jour. Res. Nat. Bur. Standards*, 47:291–297, 1951. (cited in [Gregory und Karney, 1969, pp. 61–62]).
- P. J. Rousseeuw. Least median of squares regression. *Journal of the American Statistical Association*, 79:871–881, 1984. v. et. [Rousseeuw, 1987].
- P. J. Rousseeuw. *Robust Regression and Outlier Detection*. John Wiley & Sons, New York, 1987. P41TKM3609 (cites [Brown, 1982]; v. et. [Rousseeuw, 1984], progress.exe).
- R. Rucker. *The fourth dimension*. Penguin, 1986. P41UAZ1875-EN (v. et. Abbott [Abbott, 1952] and [Rucker, 1987] for German edition).
- R. Rucker. *Die Wunderwelt der vierten Dimension: ein Kursbuch für Reisen in die höhere Wirklichkeit*. Scherz, 1987. P41UAZ1875 P77UAZ1859 (see [Rucker, 1986] for English edition).
- B. W. Rust. Truncating the singular value decomposition for ill-posed problems. Technical Report NISTIR 6131, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899, 1998. (cites [Golub und Kahan, 1965] [Golub. et al., 1976] [Hansen, 1990] [Hansen, 1987] [Hansen, 1998] [Smithies, 1970] [Hanson und Phillips, 1971] [Hanson und Phillips, 1975]).
- P. K. Sahoo, S. Soltani, A. K. C. Wong, und Y. C. Chen. A survey of thresholding techniques. *Comput. Vision Graphics Image Process*, 41:233–260, 1988. (cited in [Venkatesh und Rosin, 1995]).
- I. Satake. *Linear Algebra*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics; 29. Marcel Dekker Inc., New York, 1975. P41TDQ2778 Aus dem Japan. ers.
- L. L. Scharf. The SVD and reduced-rank signal processing. In R. J. Vaccaro, editor, *SVD and Signal Processing II: Algorithms, Analysis and Applications*, pages 3–31. Elsevier Science, Delft, The Netherlands, 1991. P51YCB3194-2 cited by [van der Veen et al., 1993] [Leach, 1998] (v. et. [Deprettere, 1988] [Vaccaro, 1991]).
- E. Schmidt. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil. Entwicklung willkürlichen Funktionen nach System vorgeschrifbener. *Mathematische Annalen*, 63:433–476, 1907a. v. et. [Schmidt, 1907b]; cf. [Gram, 1883]; cited in [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 242].

- E. Schmidt. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II. Teil. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung. *Mathematische Annalen*, 64:161–174, 1907b. v. et. [Schmidt, 1907a]; cited in [Ben-Israel und Greville, 1974, p. 242].
- P. H. Schöneman. A generalized solution of the orthogonal Procrustes problem. *Psychometrika*, 31:2–10, 1966. cited in [Higham, 1986] [Stewart, 1992b]; v. et. [Rao, 1980] [Hurley und Cattell, 1962] [Green, 1952].
- J. M. Schumacher. A pointwise criterion for controller robustness. *Systems and Control Letters*, 18:1–8, 1992. cited in [Ipsen und Meyer, 1995].
- L. Schwartz. Théorie des distributions. In *Actualités scientifiques et industrielles; Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg*, volume I, II, pages 1091–1122, 1950–1951. l'Université de Strasbourg, Paris, 1951. v. et. [Schwartz, 1966]; cited in [ter Haar Romeny, 1999] [Florack, 2002].
- L. Schwartz. *Théorie des Distributions*. Hermann & Cie, 2 edition, 1966. v. et. [Schwartz, 1951]; cited in [ter Haar Romeny, 1999] [Florack, 2002].
- M. Schwartz und L. Shaw. *Signal processing: discrete spectral analysis, detection, and estimation*. McGraw-Hill classic textbook reissue series. McGraw-Hill, New York, 1975. P51YCB1362.
- J. Shen und S. Castan. An optimal linear operator for step edge detection. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 54(2):112–133, 1992. cf. [Canny, 1986] [Marr und Hildreth, 1980].
- G. E. Shilov. *Linear Algebra*. Prentice-Hall, 1971. P41TDQ1439.
- K. Shoemake und T. Duff. Matrix animation and polar decomposition. In *Proceedings of Graphics Interface*, pages 258–264, 1992. (citing [Higham, 1986] [Higham und Schreiber, 1988]).
- F. Smithies. *Integral Equations*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1970. P41TIR2252 (cited in [Rust, 1998]).
- I. Sobel. An isotropic 3×3 image gradient operator. In H. Freeman, editor, *Machine Vision for Three-Dimensional Scenes*, pages 376–379. Academic Press, 1990. v. et. [Danielsson, 1990] (not found in UPPB).
- H. Späth. Orthogonal least squares fitting with linear manifold. *Numerische Mathematik*, 48:441–445, 1986. cited in [Van Huffel und Vandewalle, 1991, p. 6] [Gander et al., 1994a]; citesGolubVanLoan1980.
- H. Späth. Incomplete total least squares. *Numerische Mathematik*, 81(4):521–538, 1999.
- J. Staar. *Concepts for Reliable Modeling of Linear Systems with Application to On-line Identification of Multivariable State Space Descriptions*. PhD thesis, Dept. of Electrical Engrg., Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 1982. (cited in [Vandewalle und De Moor, 1988]).
- F. M. Stewart. *Introduction to linear Algebra*. The University Series in Undergraduate Mathematics. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1963. P41TDQ3431.

- G. W. Stewart. On the continuity of the generalized inverse. *SIAM J. Appl. Math.*, 17: 33–45, 1969. (cited in [Campbell und Meyer, 1975]).
- G. W. Stewart. Error and perturbation bounds for subspaces associated with certain eigenvalue problems. *SIAM Review*, 15:727–764, 1973a.
- G. W. Stewart. *Introduction to Matrix Computations*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, 1973b. (cited in [Kuhnert, 1976, p. 27]).
- G. W. Stewart. On the perturbation of pseudo-inverses, projections, and linear least squares problems. *SIAM Review*, 19:634–662, 1977.
- G. W. Stewart. An updating algorithm for subspace tracking. Technical Report CS-TR 2494, Department of Computer Science, University of Maryland, 1990. (revised January 1991) also in [Stewart, 1992c]; cites [Bunch und Nielsen, 1978].
- G. W. Stewart. Perturbation theory for the singular value decomposition. In R. J. Vaccaro, editor, *SVD and Signal Processing II: Algorithms, Analysis and Applications*, pages 99–109. Elsevier Science, Delft, The Netherlands, 1991. P51YCB3194-2 cited in [van der Veen et al., 1993] (v. et. [Deprettere, 1988] [Vaccaro, 1991]).
- G. W. Stewart. Determining rank in the presence of error. Technical Report UMIACS-TR-92-108, CS-TR-2972, Dept. of Computer Science, Univ. of Maryland, 1992a.
- G. W. Stewart. On the early history of the singular value decomposition (for gene golub on his fifteenth birthday). *SIAM Review*, 35:551–566, 1992b. (UMIACS-TR-92-31, CS-TR-2855) (cites [Beltrami, 1873] [Jordan, 1874a,b], [Weyl, 1912] [Eckart und Young, 1936] [Green, 1952] [Fan und Hoffman, 1955] [Hurley und Cattell, 1962] [Schöneman, 1966] [Rao, 1980]).
- G. W. Stewart. An updating algorithm for subspace tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40:1535–1541, 1992c. also in [Stewart, 1990]; cites [Bunch und Nielsen, 1978].
- G. W. Stewart. *Matrix Algorithms Volume I: Basic Decompositions*, volume 1. SIAM, Philadelphia, 1998. P41TKZ2307 (This book exists as postscript files: 00tit.ps 01mat.ps 02mam.ps 03gau.ps 04qrd.ps 05rnk.ps 99ref.ps *962615378. For volume II, 00tit.ps 01eig.ps 02qra.ps 03sym.ps 04esp.ps 97app.ps 98ref.ps *962614513).
- G. W. Stewart. Eigenspaces / canonical angles between subspaces. Class Notes CMSC760 / MAPL600, Department of Computer Science, University of Maryland, 1999.
- G. W. Stewart und J.-G. Sun. *Matrix Perturbation Theory*. Computer science and scientific computing. Academic Press, Boston, 1990. P41TKZ1987 cited in [Ipsen und Meyer, 1995]; cites [Moore, 1920] [Bjerhammar, 1951b] [Penrose, 1955] [Penrose, 1956] [Bergman et al., 1950] [Nashed und Rall, 1976].
- G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Academic Press, New York, 2 edition, 1980. P40TDQ4746(2)-T, P41TDQ4746(2)-T+1 cited by Cline [Cline, 1979] as an excellent textbook for basic matrix theory (there's a 3rd ed. 1988 [Strang, 1988]).
- G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Academic Press, New York, 3 edition, 1988. (3rd ed. not yet appear in UBPB); see the 2nd ed. [Strang, 1980].

- G. Strang. The fundamental theorem of linear algebra. *The American Mathematical Monthly*, 100:848–855, 1993. cited in [Ipsen und Meyer, 1995] P40/61a31.
- X. Sun. On elementary unitary and ϕ -unitary transformations. Technical Report Technical report DUKE-TR-1995-27, Duke University, Department of Computer Science, 1995. cf. [Laurie, 1997a,b] [Lehoucq, 1996].
- D. Suschowk. Über die gegenseitige Lage zweier linearer Vektorräume. *Beyer. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. S.-B.*, pages 15–22, 1956 (1957). cited in [Davis und Kahan, 1970].
- B. Szökefalvi-Nagy. *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; [N.F.],39. Springer, Berlin, 1967. P65TJK1310+4.
- R. Takiyama und N. Ono. A least square error estimation of the center and radii of concentric arcs. *Pattern Recognition Letters*, 10(4):237–242, 1989.
- B. M. ter Haar Romeny. Introduction to scale-space theory: Multiscale geometric image analysis. In *Conf. on Visualization in Biomedical Computing VBC'96*, Hamburg, Germany, 1996. v. et. [ter Haar Romeny, 1999].
- B. M. ter Haar Romeny. Scale-space theory for multiscale geometric image analysis. In *CVPR'99 half-day tutorial, 21 June 1999*, 1999. v. et. [ter Haar Romeny, 1996]; cites [Schwartz, 1951, 1966].
- B. M. ter Haar Romeny, L. M. J. Florack, A. H. Salden, und M. A. Viergever. Higher order differential structure of images. *Image and Vision Computing*, 12(6):317–325, 1994.
- S. M. Thomas und Y. T. Chan. A simple approach for the estimation of circular arc center and its radius. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 45:362–370, 1989.
- D. J. Tolhurst. The amount of information transmitted about contrast by neurons in the cat's visual cortex. *Visual Neuroscience*, 2:409–413, 1989. cited in [Lee, 1996].
- C. Tomasi. CS205, Stanford University: Mathematical methods for robotics and vision. available as <http://www.stanford.edu/class/cs205/book.pdf> or book.ps, 1999.
- R. Trapp. *Stereoskopische Korrespondenzbestimmung mit impliziter Detektion von Okklusionen*. PhD thesis, Universität-GH Paderborn, Paderborn, 1998.
- S. Umeyama. Least-squares estimation of transformation parameters between two point patterns. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(4):376–380, 1991. cites [Arun et al., 1987].
- R. J. Vaccaro, editor. *SVD and Signal Processing II: Algorithms, Analysis and Applications*, volume 2 of *SVD and signal processing*; 2. Elsevier Science, Delft, The Netherlands, 1991. (P51YCB3194-2) (cited by [van der Veen et al., 1993] [Leach, 1998]) (v. et. [Deprettere, 1988] [Moonen und De Moor, 1995]).
- A.-J. van der Veen, E. F. Deprettere, und A. L. Swindlehurst. Subspace based signal analysis using singular value decomposition. *Proceedings of the IEEE*, 81(9):1277–1308, 1993. (137 references e. g., [Deprettere, 1988] [Vaccaro, 1991] [Scharf, 1991] [Stewart, 1991]).

- S. Van Huffel. *Analysis of the Total Least Squares Problem and Its Use in Parameter Estimation*. PhD thesis, Dept. of Electrical Engrg., Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 1987. (cited in [Vandewalle und De Moor, 1988]).
- S. Van Huffel. The total least squares technique: Computation, properties and applications. In E. F. Deprettere, editor, *SVD and Signal Processing: Algorithms, Applications and Architectures*, pages 189–207. Elsevier Science, Delft, The Netherlands, 1988. P51YCB3194-1 (cited in [Vandewalle und De Moor, 1988]).
- S. Van Huffel. Recent advances in total least squares techniques and errors in variables modeling. In *proceedings of the Second International Workshop on Total Least Squares and Errors-in-Variables Modeling, Leuven, Belgium*, Philadelphia Pa., 1997. Society for Industrial and Applied Mathematics. P40TAY960370.
- S. Van Huffel und J. Vandewalle. Algebraic relationships between classical regression and total least-squares estimation. *Linear Algebra and its Applications*, 93:149–162, 1987. Cited in Åke Björck's bibliography on least squares, which is available by anonymous ftp from math.liu.se in pub/references.
- S. Van Huffel und J. Vandewalle. Subset selection using the total least squares approach in collinearity problems with errors in the variables. *Linear Algebra and its Applications*, 88/89:695–714, 1987. Cited in [Golub und Van Loan, 1989].
- S. Van Huffel und J. Vandewalle. *The Total Least Squares Problem: computational aspects and analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia Pa., 1991. P41TIF2870.
- J. Vandewalle und B. L. R. De Moor. A variety of applications of singular value decomposition in identification and signal processing. In E. F. Deprettere, editor, *SVD and Signal Processing: Algorithms, Applications and Architectures*, pages 43–91. Elsevier Science, Delft, The Netherlands, 1988. P51YCB3194-1 (cites [Van Huffel, 1987] [Staar, 1982] [Van Huffel, 1988] [Golub und Van Loan, 1983] [Lawson und Hanson, 1974]).
- S. Venkatesh und R. Owens. An energy feature detection scheme. In *Proceedings, IEEE Int. Conf. on Image Processing*, pages 553–557, Singapore, 1989.
- S. Venkatesh und P. L. Rosin. Dynamic threshold determination by local and global edge evaluation. *Graphical Models and Image Processing*, 75(2):146–160, 1995. (P50/80c6A) (cites [Canny, 1986] [Rosin und West, 1989] [Sahoo et al., 1988]; v. et. [Rosin, 1995] and pgmlink).
- J. Ville. Théorie et applications de la notation de signal analytique. *Cables et Transmission*, 2A:61–74, 1948. translated from the French in I. Selin, “Theory and applications of the notion of complex signal,” Tech. Rept. T-92, The RAND Corporation, Santa Monica, CA, August 1958. v. et. [Gábor, 1946]; cited in [Havlicek et al., 1997].
- P.-Å. Wedin. On angles between subspaces of a finite dimensional inner product space. In B. Kågström und A. Ruhe, editors, *Matrix Pencils*, pages 263–285, New York, 1982. Springer. cited in [Ipsen und Meyer, 1995] v. et. [Kågström und Ruhe, 1993].
- J. R. Weeks. *The Shape of Space: How to Visualize Surfaces and Three-Dimensional Manifolds*. Pure and applied mathematics : a program of monographs, textbooks, and lecture notes. Dekker, New York, 3 edition, 1985. P41TGT1240.

- N. Werghi, C. Doignon, und G. Abba. Ellipse fitting and three-dimensional localization of objects based on elliptic features. *IEEE International Conference on Image Processing*, 1: 57–60, 1996.
- G. Werner und V. B. Mountcastle. Neural activity in mechano-receptive cutaneous afferents: Stimulus-response relations, weber functions, and information transmission. *J. Neurophysiology*, 28:359–397, 1965. cited in [Lee, 1996].
- H. Weyl. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwert linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf der Theorie der Hohlraumstrahlung). *Mathematische Annalen*, 71:441–479, 1912.
- J. H. Wilkinson. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, England, 1965a. v. et. [Wilkinson, 1978]; cited in [Lehoucq, 1996].
- J. H. Wilkinson. Error analysis of transformation based on the use of matrices of the form $i - 2ww^h$. In L. B. Rall, editor, *Error in digital computation*, volume II, pages 77–101. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1965b. cited in [Golub und Reinsch, 1970a,b].
- J. H. Wilkinson. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, England, 1978. P65TKZ1107+7 (v. et. [Wilkinson, 1965a]).
- J. H. Wilkinson. Note on the practical significance of the Drazin inverse. Technical Report STAN-CS-79-736, Computer Science Department, Stanford University, 1979.
- J. H. Wilkinson und C. Reinsch, editors. *Linear Algebra vol. II of Handbook for Automatic Computation*. Springer-Verlag, New York, 1971. (“the yellow book”) P41TUA1097-2+2.
- J. H. Williamson. Least-squares fitting of a straight line. *Canadian Journal Physics*, 46: 1845–1846, 1968. v. et. [Pearson, 1901]; cited in [Moniot, 2002].
- A. P. Witkin. Scale-space filtering. In *Proc. International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 1983)*, pages 1019–1023, (Karlsruhe, Germany), 1983. Academic Pres.
- E. Witt. Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 176:31–44, 1937. v. et. [Witt, 1998]; cited in [Kaplansky, 1974, p. 17].
- E. Witt. Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. In I. Kersten, editor, *Collected papers = Gesammelte Abhandlungen: With an essay on Witt vectors / by Günter Harder*, pages 2–15. Springer, Berlin, 1998. P41TAWW1145 v. et. [Witt, 1937]; cited in [Kaplansky, 1974, p. 17].
- J. H. Yoo und I. K. Sethi. An ellipse detection method from the polar and pole definition of conics. *Pattern Recognition*, 26:307–315, 1993.
- H. K. Yuen, J. Illingworth, und J. Kittler. Detecting partially occluded ellipses using the hough transform. *Image and Vision Computing*, 7(1):31–37, 1989. (v. et. [McLaughlin, 1998] [Ho und Chen, 1995]).
- H. Zassenhaus. “angles of inclination” in correlation theory. *American Mathematical Monthly*, 71:218–219, 1964. cited in [Davis und Kahan, 1970].
- T. Y. Zhang und C. Y. Suen. A fast parallel algorithm for thinning digital patterns. *Communications of the ACM*, 27(3):236–239, 1984. v. et. [Lee und Chen, 1992] (XITE); cited in [Gonzalez, 1987].

S. Q. Zhu. Robust complementarity and its application to robust stabilization. preprint from the Automation and Robotics Research Institute, University of Texas at Arlington, Fort Worth, Texas. (cited in [Ipsen und Meyer, 1995]), 1994.

Y. M. Zhu, F. Peyrin, und R. Goutte. The use of a two-dimensional Hilbert transform for Wigner analysis of 2-dimensional real signals. *Signal Proc.*, 19:205–220, 1990. cited in [Havlicek et al., 1997].

Index

Gnuplot, 88
Khros, 70, 71
PBM(5), 4, 62
PGM(5), 4, 62
PPM(5), 4, 62
angle03, 14
asc2pgm.c, 88
basis33.c, 31, 56, 83
 house(), 56
curvfilt.c, 79, 80, 88, 91
dft.c
 -H1, 64
 -X, 62
 -Y, 62
ellfilt.c, 88
f2c, 17
float.c, 31
g3data.c, 88
gaussian.c, 51, 79, 86
gfilt.c, 65
 -A45, 68
 -F0.9, 67
 -N8, 67
 -O0, 67
 -Q0.2, 68
 -Q3.5, 66
 -Q, 68
 -b0.5, 66, 68
 -l4, 65
 -l, 65
 -pz0, 67, 68
 -s, 60, 61, 68, 69
 -t2, 70, 71
 -w0.5, 65, 66, 68
 -w, 65
ghyper.c, 79
 -c, 50, 51, 57, 85, 94
 -f1, 85
 -s, 51, 57
ginv.c, 14
 -D1, 46
 -D2, 46
gmagedge.sh
 -H, 70, 71, 73
gmat.c
 -Z, 33, 34
 -h1, 56
 -o, 34, 56, 83
 house_orth2(), 56
gradededge.sh, 67, 68
 -H, 63, 70–72
 -L5, 63
gxclock.sh, 66
hm.m, 56
hyper.c, 83, 88
 -c, 48, 84, 85, 94
 -pB, 37
 -s, 84
iir.c, 61, 62
kalmell.c, 88
kdf2pnm.c, 88
lsline2.c
 -1, 90
 -e, 90
lst2pgm.c, 88
lstfilt.c
 -p, 63, 70, 71, 87
m33.c
 -pB, 37
mahr.m, 46, 54
ratio0.c, 19
ratio1.c, 19
matstat.c
 -Q1, 83
 -i, 14
 -mpB, 46, 54
 -pB, 37
 -pc, 51

- pz, 30
- s0, 83
- t0, 26
- t, 26
- wv, 13
- nagy.m, 14
- netpbm, 88
- pfm2ppm.c, 88
- pfmdir.c
 - H, 62, 63
 - n, 70, 71
- pfgamma.c, 60, 63, 88
 - G0.35, 67, 68
- pfgauge.c
 - 1, 61
 - g, 70, 71
- pfmpix.c, 88
- pgmcanny.c, 60–62, 88
 - g, 61, 63, 87
 - s1, 63
 - s, 62
- pgmell.sh, 61, 66
- pgmlink.c, 62, 88
 - D, 62, 70, 71
 - l5, 63
- pgmpix.c, 88
- pgmroi.c, 88
- pgmthin.c, 63, 70, 71
- phoenix3.c, 88
- pinv.c, 14
- pnmfilt.c, 2, 78
- pose.sh, 61, 88
- progress.exe, 78
- progress, 78
- ranmar.c, 86
- ranmar.f, 86
- schur2.c
 - pm, 46
 - s, 83
- step2line.m
 - (500, -1, 256), 60
 - (500, -2, 256), 60
- svd.c, 83
- svdcmp.crp, 17
- svdcmp.c, 17
- svdsort.c, 22
- xclock, 66
- KDF(5), 4
- PFM(5), 4
- PNM(5), 4
- VIFF(5), 4
- Äquivalenzklasse, 6
- Äquivalenzrelation, 6
- lstfilt.c
 - s, 62
- pfmdir.c
 - H, 62
- pgmlink.c
 - D, 62
- Abbildung
 - bijektive, 9
- Ableitbarkeit
 - unendliche, 62
- Ableitung, 62
 - diskrete, 62
 - Gaußsche, 61
 - partielle, 63
 - regularisierte, 61, 62
- abzählbar, 30
- AC-Anteil, 34
- AC-Tailraum, 33
- AC-Teilraum, 33, 48, 95
- adjungierte Matrix, 38
- affine Abbildung, 31, 32
- affine Projektion, 83, 95
- affine Struktur, 39
- affiner Teilraum, 6, 46, 82
- affiner Unterraum
 - Definition, 6
- Affinität, 88, 90
- algebraische Distanz, 90
- Ambiguität, 61
- analytisches Bild, 64
- analytisches Signal, 64
- ANSI C, 17
- Apertur, 62
 - Gaußsche, 62, 63
- Approximationssatz, 26
- Approximationssatz der SVD, 25
- Apriorität, 24
- Ariane 5, 45
- assozierter Projektor, 9
- assozierter Reflektor, 9
- Ausreißer-Filterung, 77
- Ausreißerdetektion, 91
- Automorphismus
 - Reflektoren, 9
- Bandbreite, 66

- Definition, 65
- Basis
 - nicht-orthogonal, 95
 - Basisvervollständigung, 56
 - Basiswechsel, 28
 - biased estimate, 29
 - Bijektion, 11
 - Reflektoren und Projektoren, 9
 - Bild, 9
 - Bild-Kern-Zerlegung, 27
 - Bildraum, 16
 - Bilinearform, 39, 44
 - ausgeartete, 6
 - singuläre, 6
 - bottom-up, 68
 - bounds-checking, 17
 - Box-Muller-Transformation, 86
 - Butler, Jim, 86
- cancellation theorem
 - Witt, 14
- Canny-Detektor, 61
 - Optimalität, 61
- Canny-Rosin-Venkatesh-Verfahren, 63
- canonical angles between subspaces, 14
- Carmina Burana, 94
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 44
- Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung, 47
- centering
 - definition, 29
- commuting inverse, 46
- core-nilpotent decomposition, 46
- covariance matrix, 36
- cpi, cycle per image, 65
- Dach, 60
- data matrix, 28
- data mining, 93
- Datengeometrie, 93
- Datenmatrix, 28
- Datenzentrierung, 95
- Datenzentrierung als orthogonale Projektion, 95
- DC-Anteil, 34
- DC-Filterung, 34
- DC-Tailraum, 33
- DC-Teilraum, 33, 34, 95
- decoupling, 28
- defektive Matrix, 24
- Dekorrelation, 41
- diagonale Matrix, 35
- diagonalisierbar, 22, 38
 - unitär, 38
- Diagonalisierung, 70, 71
- Dichtheit, 30
- Diffusionsgleichung, lineare, 64
- direkte Summe, 20
- direkte Summe der Singulärräume, 24
- Drazin-Inverse, 45, 46
- Drehung, 28, 94
- Dreiecksungleichung, 44
- dualer Projektor, 8
- Ebene, 6
- Eckart-Young-Mirsky Approximationssatz, 25
- eigenanalyse, 39
- Eigenbasis, 38
- Eigenraum, 24
- Eigenwert, 33
- ein-pixel-breit, 59, 70, 71
- Eindeutigkeit der SVD, 24
- einfache Zelle, 68
- Einheitswurzel, 35
- Einschränkung, 6, 21
- Einseitenband, 64
- Elementarreflektor, 11
- elementary Hermitian, 11
- elementary Hermitians
 - Householder, 56
- elementary reflections
 - Householder, 56
- elementary reflector, 11
- Ellipse, 59, 77
- Elliptizität der Gabor-Funktion, 68
- Endian, 4
- Endomorphismus, 8, 9
- energiebasiert, 59
- Ensemble-Statistik, 29
- Entkopplung, 28, 41
- EP-Matrix, 9, 16, 46
- Ergodizität, 29
- erste Fundamentalform, 61
- erwartungstreue, 29, 37
- euklidischer Raum
 - Definition, 47
- euklidischer Raum, 79
- Exception, 31, 45
- Faltung, 62

- Federzeichnung, 61
- Fehlkorrespondenz, 3
- Filterentwurf, 65
- Filterung
 - DC, 34
- Flach, 79
- Fließkomma-Zahlen, 30
- Form
 - hermitesche, 47
 - symmetrische positiv-definite bilineare, 47
- Fortran, 17
- Fourier-Basis, 34, 35
- Fourier-Matrix, 35
- Fourier-Pixel, 65
- Frequenz
 - Konvention, 65
- Frobenius Residuum der SVD, 27
- Frobeniusnorm, 25
- full rank decomposition, 26
- fundamentale äume, 22
- fundamentale Unterräume, 20
- Fundamentalsatz der linearen Algebra, 20
- Fusion, 59, 77
- FWHM (full-width-half-maximum), 65
- Gabor-Filter
 - Bandbreite, 65
 - Gestalt, 65
 - Mittelfrequenz, 65
 - Orientierung, 65
- Gabor-Filtering, 62
- Gabor-Filterung, 66
- Gabor-Funktion, 68
- Gauß, 43
- Gaußrümung, 69
- Gaußsche Ableitung, 61, 62
- Gaußsche Apertur, 62, 63
- Gaußsche Dichte, 86
- Gaußsche Funktion, 64
- Gaußsche Glättung, 62
 - Interpretation, 62
- Gaußsche Regularisierung, 63
- Gaußscher Operator, 62
- Gaußsches Rauschen, 86
- Gaußverteilung, 43
- Gaussian derivative, 61, 62
- generalisierte Inverse, 20
- geometrische Filterung, 77, 91
- geometrische Invarianz, 79
- geometrische Struktur, 47
- geometrische Vorwissen, 80
- Gerade, 6, 90
- geschlossene Form, 34
- Gestalt der linearen Abbildung, 24
- Gleitkommazahlen, 45
- Golub-Kahan-Reinsch-Algorithmus, 17
- Gradient
 - Definition, 61
 - gradientenähnlich
 - Definition, 61
- gradientenbasiert, 59
- Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, 21
- Gram-Schmidtsches Verfahren, 56
- Gramian matrix, 36
- Gramsche Matrix, 36
- Grassmann, Hermann, 30
- Greensche Funktion, 64
- Gruppeninverse, 45
- Halbierungsteilraum, 13
- Hauptkrümmung, 69
- Hauptrichtung, 69
- Hauptwinkel zwischen Teilräumen, 14
- hermitesch, 15
- hermitesch Skalarprodukt, 47
- Hermitesches Transponieren, 56
- Hesse-Matrix, 70, 71
 - Definition, 69
- Hessian, 70, 71
- Hilbert-Schmidt Residuum der SVD, 27
- Hilbert-Schmidt-Norm, 25
- Hilbert-Transformation, 64
- Hilbertraum
 - Definition, 47
- Householder reflector, 11
- Householder, Alston Scott, 56
- Householder-Reflektor, 54
- Householder-Spiegelung, 33, 56
 - komplexe, 56
- Householder-Spieglung, 10
- Householder-Transformation, 54, 56
 - komplexe, 11
- Householder-Vektor, 12, 54
- HP200LX, 4
- HSC, Hierarchical Contour Coding, 64
- Hybriden-Konturen, 61
- Hyperebene, 79
- Hyperkreis, 46, 49, 58, 77, 93
 - Definition, 49

- Kovarianzmatrix von, 54
- Mahalanobis-Distanz von, 58
- Visualisierung, 51
- hyperkreis-basiert, 77
- Hyperzylinder, 49
- Hysterese-Schwellenwert-Verfolgung, 70, 71
- hyteresis thresholding, 70, 71
- idempotent, 8, 15, 32, 60
- Idempotenz, 6, 9, 36
- Idempotenz-Eigenschaft, 60
 - der Konturen, 70, 71
- Idempotenz-Forderung, 32
- ill-posed, 18, 62
- ill-posed problem, 18
- illusive Konturen, 61, 67, 68
- Index, 20
- inkonsistent, 29
- inkonsistente, 37
- Integer, 45
- Intensitätsdaten, 77
- invariante Teileräume, 10, 16
- Invarianz
 - Mahalanobis-Distanz, 53
 - regularisierte Mahalanobis-Distanz, 53
- Inverse
 - generalisierte, 20
- Invertierung, 45, 77
- Involution, 9
 - Definition, 9
- involutorisches, 9, 54
 - Definition, 9
- ISO/ANSI-C, 31
- Isometrie, 25
- Isomorphismus, 9
 - Reflektoren und Projektoren, 9
- isotropisch, 30
- Jordanform, 18
- Kamera, 88
- kanonische Form, 34
- kanonische Winkel zwischen Teileräumen, 14
- Kante, 59, 60
- Kantendetektion, 59
- Kern, 9, 16, 20, 21
- Khoros, 4
- kleinste Quadrate, 90
- kognitive Faktoren, 60
- kommutativ
- nicht, 47
- komplementäre Teileräume, 7
- komplementäre Unterräume, 7
- komplementärer Projektor, 8, 33
- komplementärer Reflektor, 10
- komplementäre Teileräume, 95
- komplexe Householder-Spiegelung, 56
- komplexe Zellen, 62
- komplexes Skalarprodukt, 47
- Kondensator, 32
- konjugiert linear, 47
- konjugiert Transponierte, 56
- konsistent, 29, 37
- Kontur, 59
 - Definition, 59
- Konturen
 - als syntaktische Struktur, 59
- Konturenextraktion
 - Definition, 59
 - Güte der, 60
- Konturenextraktor
 - Güte der, 60
- Konturenliste, 59
- Konturenpixel, 59
- Konturenverkettung, 60
- Kovarianzmatrix, 2
 - Definition, 36
 - Hyperkreis, 54
 - Kondition, 44
 - Rang, 95
 - reguläre, 33
 - singuläre, 33, 44
 - Sphäre, 50
- Kreis, 59, 77
- Kreuz-Korrelation, 13
- Kreuzprodukt, 79
- Kurzsichtigkeit am Nullvektor, 30
- Laplacian, 64
- latent semantic indexing, 18
- Laurie, Dirk, 56
- left nullspace, 21
- left singular vectors, 22
- linear, 60
- lineare Abbildung, 32
- lineare Algebra, 30
- lineare Diffusionsgleichung, 64
- lineare Varietät, 6
- linearer Operator, 31
- linearer Raum, 30, 39

- Linearisierung, 95
- Linearität, 88, 90
- Linie, 59, 60
- linke Singulärvektoren, 22
- linker Nullraum, 20, 21
- lokale Energie, 61, 67, 68
- Lounesto, Pertti, 14
- LSA, 18
- LSI, 18
- Mahalanobis-Distanz, 5, 39
 - Definition, 44
 - Hyperkreis, 58
 - Invarianz, 53
 - Sphäre, 52
- Mahalanobis-Metrik, 39
 - Definition, 44
 - regularisierte, 44
- Mannigfaltigkeit, 50
- Matrix
 - defektive, 24
 - EP, 16
 - nicht-diagonalisierbare, 24
 - normale, 16
 - singuläre, 45
- matrix
 - covariance, 36
 - Gramian, 36
- Metrik, 6, 44, 45
 - Definition, 44
- metrischer Raum
 - Definition, 44
 - Vollständigkeit, 44
- metrischer Tensor, 39, 44
- Minimalwinkel, 8
- Mittelfrequenz, 65, 66
- mittelwertfrei, 31
- mittlere Krümmung, 69
- MKGF, 65, 70, 71
- ML-Schätzung
 - Kovarianzmatrix, 37
- modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren, 56
- Moore-Penrose-Inverse, 2, 18
- Nebenklasse, 6
- nicht erwartungstreu, 29
- nicht-ausgeartete Bilinearform, 30
- nicht-diagonalisierbare Matrix, 24
- nicht-erwartungstreu, 37
- nicht-lineare geometrische Filterung, 77
- Nicht-Maximum-Unterdrückung, 70, 71
- nicht-orthogonale Raumzerlegung, 94
- nicht-zentrierte Datenmatrix, 38
- nichtkorrekte Aufgabe, 18
- non-maximum-suppression, 70, 71
- normale Matrix, 16, 38
- normierter Raum
 - Definition, 44
- Nullraum, 16, 20
- Nullvektor, 30
- Numeriker-Konvention, 47
- Nyquist
 - Definition, 65
- oblique projector, 16
- Operator
 - Gaußscher, 62
 - zentrierender, 32
- Optimalität, 61
- Orientierungsbandbreite, 67, 68
 - Definition, 65
- Orientierungskarte, 67, 68, 70, 71
 - Definition, 61
- Orientierungssäule, 66
- orthogonal, 19
- orthogonale Distanz, 90
- orthogonale Projektion, 20, 95
- orthogonale Raumzerlegungen, 20
- orthogonale Regression, 88
- orthogonale Spiegelung
 - Definition, 10
- orthogonale Transformation, 18
- orthogonaler Projektor
 - Definition, 8
- orthogonaler Reflektor
 - Definition, 9, 10
- orthogonales Komplement, 33
- Orthogonalität, 21
- orthonormal, 20
- Orthonormalbasis, 38
- orthonormale Baiss, 22
- orthonormales Komplement, 56
- Orthoprojektor, 6, 10, 15, 25, 32, 34, 54
 - Definition, 8
- Orthoreflektor, 9, 33, 34
 - Definition, 9, 10
- Ortsfrequenz
 - Betrag, 65
 - Konvention, 65
 - Richtung, 65

- Ortsfrequenzvektor, 65
- Parallelität, 5, 24
- partielle Isometrie, 21, 25
- Patent
- U. S. Patent No. 5,301,109, 18
 - U. S. Patent No. 4,839,853, 18
- PCA, 18
- periodische Signale, 28
- perspektive Projektion, 59, 77
- Phase, 13
- Phasen-Kongruenz, 60
- Physiker-Konvention, 47
- Pixel
- Definition, 59
- Polar-Zerlegung, 21, 27
- Polarform, 21, 27
- Polarisierung, 44
- positiv semidefinit, 33
- Positiv-Definitheit, 44, 45
- Postscript, 63
- principal angles between subspaces, 14
- principal component analysis, 18
- Procrustesproblem, 18
- Produkt der Matrizen, 35
- Projektor, 10
- assozierter, 9
 - Definition, 8
 - dualer, 8
 - komplementärer, 8
 - orthogonaler, 54
- Projektoren, 7, 20
- Propagierungsrichtung, 65
- Pseudo-Idempotenz, 60
- psychologische Faktoren, 60
- Punkt, 79
- Punktmenge, 77
- quadratische Form, 44
- quadratische Matrix, 36
- Quadratur-Filtering, 62
- Quadratur-Filterung, 60, 61
- Quadratur-Funktionen, 64
- radiale Bandbreite, 67, 68
- Definition, 65
- Radikal, 6, 30, 39
- Radius-Invarianz, 79
- Rang
- der Datenmatrix, 33
- einer zentrierten quadratischen Matrix, 36
- Rang einer Kovarianzmatrix, 95
- Rang-1-Abwandlung, 32
- rang-auflösende Zerlegung, 22
- rang-defizient, 18
- Rangabfall, 33, 38
- Rangabfall einer unitären Matrix, 36
- rank-1 update, 32
- rank-revealing decomposition, 22
- Rauschenteilraum, 94
- Rauschenunterraum, 94
- rechte Singulärvektoren, 22
- reduced row echelon form, 46
- reduzierte Zeilenstufenform, 46
- reelle Zahlen, 30
- Reflektor, 9, 10
- assozierter, 9
 - Definition, 9
 - komplementärer, 10
 - orthogonaler
 - Definition, 10
 - schiefer, 9
- Reflektoren, 7
- Regression, 90
- robust, 78
- reguläre Matrix, 33
- regularisierte Ableitung, 61, 62
- regularisierte Mahalanobis-Distanz
- Definition, 46
 - Invarianz, 53
- regularisierte Mahalanobis-Metrik, 44
- regularisierte Mahalanobisdistanz, 2, 3
- Regularisierung, 2, 18, 62
- Gaußsche, 62, 63
- Residuenenergie, 26
- restriction, 21
- Rezeptivfeld, 68
- Richtungsteilraum
- des Hyperkreises, 11, 57, 58
 - des Projektors, 8
 - des Reflektors, 9
- Riemanntensor, 61
- Riesz-Transformation, 64
- right singular vectors, 22
- Robust-Schätzung des Kreises, 89
- robuste Modellierung, 91
- robuste Regression, 78
- Robustheit, 89
- Rosser'sche Matrix, 45

- RREF (row reduced echelon form), 46
- scale, 62, 64
- scale-space, 64, 66
- Schätzer, 29
- Schätzmittelwert, 29
- Schätzmittelwertvektor
 - Definition, 31
- Scharstatistik, 29
- Schiefprojektor, 16
- schlecht-gestellt, 18, 62
- schlechtgestelles Problem, 18
- Schlechtgestelltheit, 61
- schlectgestellt, 62
- Schmidt-Eckart-Young-Mirsky
 - Approximationssatz, 25
- Schwerpunkt, 30
 - Definition, 29
- selbst-adjungiert, 15
- Semantik, 59
- sesquilineares Skalarprodukt, 47
- SesquilinearForm
 - hermitesche positiv definite, 47
- singulär, 45
- Singulärräume, 24
- Singulärraum, 24
 - Definition, 24
 - Dimension von, 24
- Singulärspektrum, 26
- Singulärvektor, 36
- Singulärvektoren, 22
- Singulärwert, 33, 36, 38
- Singulärwertdarstellung, 24
- Singulärwertzerlegung, 20, 33
- singular space
 - definition, 24
- singular vectors, 22
- Skala, 62, 64
- Skala-Raum, 64, 66
- Skalarprodukt
 - aus Norm durch Polarisierung, 44
 - hermitesch, 47
 - komplexes, 47
 - sesquilineares, 47
- Skalarproduktes
 - als Kreuz-Korrelation, 13
- SO(n), 94
- Sobel-Operator, 62
- Sortierung der SVD, 39
- spalten-zentrierte Matrix
 - Definition, 29
- Spalten-Zentriertheit, 35
- spaltendominant, 28
- Spaltenraum, 20
- special orthogonal group, 94
- Spektral-Residuum, 26
- Spektraleigenschaft der Inversion, 45
- Spektralinverse, 45
- Spektralnorm, 25
- Spektralresiduum der SVD, 27
- Spektralzerlegung, 22, 34, 38
- Spektrum, 35
- Spellucci, Peter, 17
- Spezialorthogonale Gruppe, 94
- Sphäre
 - Kovarianzmatrix von, 50
 - Mahalanobis-Distanz von, 52
- Spiegelung, 9, 28, 34
 - Householder, 56
 - orthogonale
 - Definition, 10
 - Standardabweichung, 40
- Stationarität, 29
- Stereokamerakopf, 88
- stochastischer Prozeß
 - Definition, 29
- subunitäre Matrix, 21, 36
- Sun Space, 4
- SVD, 46
 - Approximationssatz, 25
 - Frobenius Residuum der, 27
 - Golub-Kahan-Reinsch-Algorithmus, 17
 - Hilbert-Schmidt Residuum der, 27
- SVD einer zentrierten Matrix, 36
- SVD eines zentrierenden Projektors, 34
- Symmetrie, 34, 44
- symmetrisch, 33
- Syntaktik, 59
- syntaktische Strukturierung, 59
- Tangentialraum, 39
- Teilräume
 - komplementäre, 7
- Teilraum des Gleichstroms, 33
- Teilraum des Wechselstroms, 33
- Teilraummodellierung, 26
- The-winner-takes-it-all, 65
- Tiefendaten, 77
- TLS, 83
- top-down, 68

- Torus, 94
TravelMate, 4

überzählbar, 30
Übertragungsfunktion, 64
Unbestimmtheit, 65
unbiased estimate, 29
uncommitted sperture, 62
unipotent, 54
unitär, 19, 25
unitär diagonalisierbar, 38
unitär invariante Norm, 25
unitäre Matrix, 36
unitärer Raum, 53
 Definition, 47
Unterräume
 komplementäre, 7
Ununterbrochenheit, 63
unverzerrt, 37

Vandermonde-Matrix, 35
Verbund-Orts-Fourier-Raum, 65
Verbundgaußverteilung, 42
Verdünnung, 70, 71
Vergenz, 88
vertauschbar, 16, 38
vertauschbare Inverse, 46
vertikale Distanz, 90
verzerrt, 37
verzerrte Schätzung, 29
Vielfachheit der Eigenwerte, 9
Vielfachheit der Singulärwerte, 24
Visualisierung, 50
visuelle Inspektion, 60
Vollrang-Faktorisierung, 26
vollrangig, 26
vollrangige Matrix, 33, 36
Vollrangzerlegung, 26

weißen, 28, 41
weißes Rauschen, 86
Weingarten-Abbildung, 69
whitening, 28, 41
Winkel, 13
Winkel zwischen Bild und Kern, 8
Winkel zwischen Teilräumen, 8
WTIA, 65, 70, 71

Y2K, 45

zeilen-zentrierte Matrix

Autorenverzeichnis

- Abbott und Buck [1990], 50
Abbott [1952], 50
Adelson und Bergen [1985], 65
Afriat et al. [1975], 14, 95
Afriat [1957], 14, 95
Agin [1981], 69
Aguado et al. [1996], 69
Albert [1972], 14
Altmann [1986], 50
Andrews und Pollen [1979], 64
Arun et al. [1987], 18
Axler [1995], ii
Banchoff [1990], 50
Bastiaans [1980], 64
Beltrami [1873], 17, 19
Berry et al. [1994a], 18
Bhattacharya und Kanjilal [1999], 28
Bishop et al. [1973], 64
Bjerhammer [1951a], 14
Bjerhammer [1951b], 14
Björck und Golub [1973], 14
Bookstein [1979], 84
Boullion und Odell [1971], 6, 14, 21, 45
Bovik et al. [1990], 65
Box et al. [1958], 86
Bracewell [1987], 64
Brown [1956], 50
Brown [1982], 78, 91
Büker et al. [1999], 90
Bülow et al. [2000], 64
Cabrera und Meer [1996], 69
Campbell und Meyer [1975], 15, 18, 46
Campbell und Meyer [1979], 14, 16, 18, 21,
24, 25, 27, 45, 46, 54
Canny [1983], 61–63, 70, 71
Canny [1986], 61–63, 70, 71
Chaudhuri und Kundu [1993], 84
Chen et al. [2000], 2, 16, 77, 79–82, 84, 94
Chen [1998], 14
Chen [2001], 14, 47
Cline [1979], 14, 46
Conway und Sloane [1993], 86
Conway und Sloane [1999], 86
Coxeter [1973], 50
Cui et al. [1996], 69
Danielsson [1990], 62
Daugman [1980], 64
Daugman [1985], 64, 65
Daugman [1989], 64
Davis und Kahan [1970], 14, 47, 95
Davis [1958], 14, 47, 95
Deprettere [1988], 18
Deriche [1993], 61, 62
Dewilde und Deprettere [1988], 19
Drazin [1958], 15
Dubrulle [1996], 11
Duran und Odell [1974], 2
Du Val [1964], 50
Eckart und Young [1936], 25
Edelman [1994], 31
Ellis et al. [1992], 69
Everitt [1998], 2
Fan und Hoffman [1955], 18
Fekete [1985], 6, 9, 11
Ficken [1967], 6, 9, 11, 15
Fierro et al. [1997], 83
Fitzgibbon et al. [1996], 69
Florack et al. [1992], 62
Forsythe et al. [1977], 17, 19
Frei und Chen [1977], 61
Furnas et al. [1988], 18
Gander et al. [1994a], 69
Gander et al. [1994b], 69
Gill et al. [1991], 18, 56
Goldberg [1991], 30, 31, 81, 89
Golub et al. [1980], 19
Golub und Kahan [1965], 17, 18
Golub und Reinsch [1970a], 17–19

- Golub und Reinsch [1970b], 17–19
 Golub und Van Loan [1980], 83
 Golub und Van Loan [1983], 6, 14, 47, 56
 Golub und Van Loan [1989], 6
 Golub und Van Loan [1996], 6, 18, 19, 21, 27, 47, 56
 Gonzalez [1987], 61, 70, 71
 Goodwin et al. [1975], 64
 Gram [1883], 14, 21, 56
 Gray [1980], 30
 Gray [1994], 30
 Graßmann [1894], 30
 Graßmann [1896], 30
 Green [1952], 18
 Gregory und Karney [1969], 14
 Griffel [1989a], 8
 Griffel [1989b], 16
 Guy und Medioni [1983], 70, 71
 Guy und Medioni [1992], 70, 71
 Guy und Medioni [1996], 70, 71
 Gábor [1946], 64, 65
 Hadamard [1923], 18, 45, 61
 Hahn [1992], 64
 Halmos [1958], 8, 21, 60
 Hal’ır und Flusser [1998], 69
 Hansen [1987], 18
 Hansen [1989], 18
 Hansen [1990], 18
 Hansen [1998], 18
 Hartmann [1982], 64, 66
 Hartmann [1983], 66
 Havlicek et al. [1997], 64
 Havlicek et al. [2000], 64
 Heckbert und Garland [1999], 61, 69
 Heisenberg [1927], 65
 Higham und Knight [1993], 46
 Higham [1986], 17, 18, 21, 27
 Higham [1995], 14
 Higham [1996], 18
 Hilbert und Cohn-Vossen [1932], 61, 69
 Hilbert und Cohn-Vossen [1952], 61, 69
 Ho und Chen [1995], 69
 Hohn [1973], 14, 36, 47
 Horn und Johnson [1985], i, 18, 25
 Hotelling [1933], 18
 Householder [1972], 11, 54, 56
 Householder [1975], 10, 11, 54, 56
 Hubel und Wiesel [1962], 64
 Hubel und Wiesel [1974], 64
 Hubel und Wiesel [1978], 64
 Hurley und Cattell [1962], 18
 IEEE [1985], 31, 45, 62, 81, 89
 Ipsen und Meyer [1995], 8, 13, 14, 24, 25, 27, 47
 Jones und Palmer [1987a], 64
 Jones und Palmer [1987b], 64
 Jordan [1874a], 17
 Jordan [1874b], 17
 Jordan [1875], 14
 Kahan [1998], 6, 9
 Kanatani [1993], 59, 77
 Kantorowitsch und Akilow [1978], 47
 Kant [1781], 24
 Kaplansky [1974], 6, 10, 30, 47, 54, 56
 Karhunen [1946], 18
 Karl et al. [1994], 69
 Kato [1966], 14
 Katz [1965], 16
 Knuth [1981, 1969], 50, 86
 Koecher [1997], 27
 Koenderink [1984], 64, 66
 Koliha [1999], 16
 Kostrikin und Manin [1989], 47
 Kovarik [1977], 10, 95
 Kovesi [1999], 60
 Kovesi [2002], 60
 Kuhnert [1976], 14, 18, 24
 Landauer und Dumais [1997], 18
 Landau [1987], 84
 Lathi [1968], iv, 29, 42
 Laurie [1997a], 10–12, 54, 56
 Laurie [1997b], 10–12, 54, 56
 Lawson und Hanson [1974], 18, 24
 Le Lann [1997], 45
 Lee und Chen [1992], 70, 71
 Lehoucq [1996], 11
 Lena Sjööblom-Soderberg [1972], 60, 63
 Le Lionnais [1984], 86
 Lions [1996], 45
 Loève [1955], 18
 Mahalanobis [1930], 2
 Mahalanobis [1936], 2
 Marcelja [1980], 64
 Marsaglia und Zaman [1987], 86
 McLaughlin [1998], 69
 Meyer [2000], 10, 14–16, 24, 25, 27, 46, 47
 Mirsky [1960], 25
 Moonen und De Moor [1995], 18
 Moore [1920], 14
 Moore [1935], 14

- Morrone und Owens [1987], 61
 Movshon et al. [1978a], 64
 Movshon et al. [1978b], 64
 Movshon und Tolhurst [1975], 64
 Munson [1996], 60, 63
 Noble [1976], 18
 Opitz [1995], 14
 Owens et al. [1989], 61
 Pan und Hamdi [1996], 19
 Penrose [1955], 15
 Penrose [1956], 15
 Perona und Malik [1990], 60
 Perona und Malik [1991], 60
 Peterson [1988], 86
 Peyrin et al. [1968], 64
 Pollen und Ronner [1981], 64
 Porrill [1990], 69, 74
 Press et al. [1992], 17, 18
 Pringle und Rayner [1971], 46, 54
 Rao und Mitra [1971], 6, 14, 45, 46, 54
 Rao [1980], 18
 Ritov [1992], 14, 47
 Rosin und West [1989], 62, 69, 74
 Rosin und West [1995], 62
 Rosin und West [1997], 62
 Rosin [1993a], 69
 Rosin [1993b], 69
 Rosin [1994], 62
 Rosin [1995], 62
 Rosin [1996a], 69
 Rosin [1996b], 69
 Rosser et al. [1951], 45
 Rousseeuw [1984], 78, 91
 Rousseeuw [1987], 78, 91
 Rucker [1987], 50
 Rust [1998], 25
 Sahoo et al. [1988], 61
 Scharf [1991], 18
 Schmidt [1907a], 14, 19, 21, 25, 56
 Schmidt [1907b], 19, 25
 Schwartz und Shaw [1975], 29
 Schwartz [1951], 62
 Schwartz [1966], 62
 Schöneman [1966], 18
 Shilov [1971], 14, 47
 Shoemake und Duff [1992], 27
 Sobel [1990], 62
 Späth [1999], 83
 Stewart und Sun [1990], 14, 18
 Stewart [1963], 8
 Stewart [1969], 18
 Stewart [1973a], 14
 Stewart [1973b], 56
 Stewart [1977], 14
 Stewart [1991], 18
 Stewart [1992a], 22
 Stewart [1992b], 18, 19
 Stewart [1992c], 18
 Stewart [1998], 14, 47
 Stewart [1999], 14, 47
 Strang [1980], 56
 Strang [1993], 22, 24
 Sun [1995], 11
 Suschowk [1956 (1957)], 47
 Szökefalvi-Nagy [1967], 6, 14
 Takiyama und Ono [1989], 84
 Thomas und Chan [1989], 84
 Tomasi [1999], 22, 23
 Trapp [1998], 1, 2, 65, 69, 77, 80, 81, 88, 89
 Vaccaro [1991], 18
 Van Huffel [1987], 83
 Van Huffel [1988], 83
 Van Huffel [1997], 83
 Vandewalle und De Moor [1988], 14, 47
 Venkatesh und Owens [1989], 61
 Venkatesh und Rosin [1995], 62
 Ville [1948], 64
 Wedin [1982], 14, 47
 Weeks [1985], 50
 Werghi et al. [1996], 69
 Wilkinson und Reinsch [1971], 17
 Wilkinson [1965a], 11
 Wilkinson [1979], 46
 Witkin [1983], 64, 66
 Witt [1937], 10, 14, 54, 56
 Witt [1998], 10, 14, 54, 56
 Yoo und Sethi [1993], 69
 Yuen et al. [1989], 69
 Zassenhaus [1964], 14, 47
 Zhang und Suen [1984], 70, 71
 Zhu et al. [1990], 64
 ter Haar Romeny et al. [1994], 69
 ter Haar Romeny [1999], 62–64, 69
 van der Veen et al. [1993], 18
 Ben-Israel und Greville [1974], ii, 14–16, 21,
 25, 27, 45, 46, 54
 De Moor et al. [1988], 18
 Van Huffel und Vandewalle [1987], 83
 Van Huffel und Vandewalle [1987], 83
 Van Huffel und Vandewalle [1991], 83

Abbildungsverzeichnis

1.1	Intensitätsbild und Tiefenkarte	2
2.1	Komplementäre, duale Projektoren und assoziierte Reflektoren	7
2.2	Singulärwertzerlegung und fundamentale Räume	20
2.3	Geometrische Anschauung der Singulärwertzerlegung	23
2.4	Singulärspektrum und Teilraummodellierung: Beispiel Rathaus	26
2.5	SVD, Mahalanobis-Metrik und Gaußsche Verbunddichte	40
2.6	Visualisierung des Hyperkreises durch Projektionen	51
3.1	Kanten oder Linien: Demonstration eines fließenden Übergangs	60
3.2	Canny-Detektor mit Hysterese-Kantenverkettung: Lena und Rad	63
3.3	Die weitere, mit inbegriifene Dimension der Bild-Struktur	64
3.4	Gabor-Gestaltung und illusive Kontur: Beispiel <code>xclock</code>	66
3.5	Gabor-Gestaltung und Wahrnehmung illusiver Konturen I	67
3.6	Gabor-Gestaltung und Wahrnehmung illusiver Konturen II	68
3.7	Lokale Energie via Gabor-Filterung: Beispiel Lena und Rad	69
3.8	Konturenextraktion nach der Gabor-Filterung: Beispiel Lena	70
3.9	Konturenextraktion nach der Gabor-Filterung: Beispiel Rad	71
3.10	Konturenextraktion nach Gabor-Filterung: Lage-Überprüfung-I	72
3.11	Konturenextraktion nach Gabor-Filterung: Lage-Überprüfung-II	73
3.12	Ellipsen-Lokalisierung: Beispiele an realen Szenen I	75
3.13	Ellipsen-Lokalisierung: Beispiele an realen Szenen II	76
4.1	Regularisierten Mahalanobis-Distanz und Ausreißer	78
4.2	Geometrischen Filterung der Ausreißer: Beispiel Rad	80
4.3	Tiefendaten in kritischer Orientierung: Beispiel Rad	80
4.4	Daten-Fusion mit Ausreißer-Detektion und Filterung	81
4.5	Daten-Fusion ohne Ausreißer-Detektion und Filterung	81
4.6	Affinitätsprüfung: Experimentsumgebung	87
4.7	Affinitätsprüfung: Ellipse und Orientierungsschätzung	87
4.8	Affinitätsprüfung: Kreislokalisierung in kritischer Lage	89
4.9	Affinitätsprüfung: Animation der Schätzungen	90
4.10	Affinitätsprüfung: Vergleich verschiedener Auflösungen	91
4.11	Affinitätsprüfung: Residuen der linearen Schätzungen	91
5.1	Nicht-Orthogonale Raumzerlegung zur Schätzung des Rauschunerraums . .	95