

# **Phänomenologische Analyse von Raumheizsystemen mittels objektorientierter Modellbildung und Simulation**

Zur Erlangung des akademischen Grades

**DOKTOR-INGENIEUR (Dr.-Ing.)**

der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik  
der Universität Paderborn  
genehmigte Dissertation

von

**Dipl.-Ing. Michael Frigge**

aus Paderborn

Referent: Prof. Dr.-Ing. Frank Dörrscheidt

Korreferent: Prof. Dr. tech. Felix Gausch

Tag der mündlichen Prüfung: 04.06.2004

Paderborn, im Juni 2004

Diss. 14-195



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Regelungstechnik des Fachbereichs Elektrotechnik und Informationstechnik der Universität Paderborn.

An dieser Stelle möchte ich dem Fachgebietsleiter Prof. Dr.-Ing. Frank Dörrscheidt für die vielen wertvollen Hinweise und Anregungen, die zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen haben, danken.

Des weiteren danke ich Prof. Dr. Felix Gausch für die Übernahme des Korreferats und für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse.

Ein besonderer Dank geht an den Kooperationspartner *Viterra Energy Services AG* aus Essen und an Dr.-Ing. Günter Mügge als primären Ansprechpartner für die Ermöglichung der interessanten Projektarbeiten und die stets gute Zusammenarbeit.

Ein herzliches Dankeschön geht auch an meine Kolleginnen und Kollegen des Fachgebietes Regelungstechnik und des Fachbereichs, insbesondere an Dipl.-Math. Bernd Lichte und Dr.-Ing. Klaus Panreck für die vielen interessanten Diskussionen und Anregungen, sowie an Dipl.-Ing. Andrea Schulte-Thomas, Dipl.-Ing. Thorsten Maschkio, Dr.-Ing. Bernd Reißweber, Dipl.-Ing. Günter Wegener, Herrn Wilhelm Knievel, Frau Angelika Kossmann und nicht zuletzt an die Studenten, die mir im Rahmen ihrer studentischen Tätigkeiten und Abschlußarbeiten ebenfalls hilfreich zur Seite standen.

Schließlich möchte ich meiner Familie und besonders meiner Frau Kristina danken, die auf ihre Weise das Entstehen dieser Arbeit gefördert haben.

Paderborn, im Juni 2004

*Michael Frigge*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung.....</b>	<b>1</b>
1.1 Ausgangssituation und Motivation .....	1
1.2 Zielsetzung der Arbeit.....	3
<b>2 Grundlagen der Heizkostenverteilung.....</b>	<b>5</b>
2.1 Verfahren zur Ermittlung des Wärmeverbrauchs .....	5
2.1.1 Heizkostenverteiler .....	6
2.1.2 Verbrauchsabhängige Heizkostenverteilung.....	8
2.1.3 Bedeutung des <i>c</i> -Wertes.....	9
2.2 <i>c</i> -Wert-Prüfung .....	11
2.2.1 Randbedingungen.....	11
2.2.2 Prüfumfang.....	12
2.2.3 Aufwandsanalyse .....	12
2.3 Einsatzpotential der Simulationstechnik.....	14
<b>3 Modellierung von Raumheizsystemen .....</b>	<b>15</b>
3.1 Grundlagen und Methoden der objektorientierten Modellbildung .....	15
3.1.1 Das Modellierungswerkzeug <i>CAMex</i> .....	15
3.1.2 Objektorientierte Modellbildung.....	17
3.2 Konzeptionelle Modellbildung und Strukturierung .....	19
3.2.1 Relevante Teilmodelle (Grobstrukturierung).....	20
3.2.2 Schnittstellen zwischen den Teilmodellen.....	20
3.2.3 Kennzeichnung relevanter Systemgrößen.....	23
3.2.4 Modellattribute.....	25
3.2.5 Bewertung des Modellkonzepts .....	25
3.3 Substantielle Abstraktion .....	26
3.4 Phänomenologische Abstraktion .....	31
3.4.1 Wärmeleitung durch die Wand .....	36
3.4.2 Äußerer Wärmeübergang – Physiknaher Modellansatz.....	36
3.4.3 Innerer Wärmeübergang .....	50
3.4.4 Wärmedurchgang – Potenzansatz .....	59
3.4.5 Gegenüberstellung von physikalischem Ansatz und Potenzgesetz.....	69
3.4.6 Modifizierter Potenzansatz .....	72

3.5	Strömungssimulation (CFD).....	79
3.5.1	Das CFD-Werkzeug <i>STAR-CD</i> .....	79
3.5.2	Integration der CFD-Simulation .....	81
3.5.3	Parametrierte Ersatzmodelle .....	86
3.6	Weitere Modellbausteine .....	89
3.6.1	Kontaktmodell.....	89
3.6.2	<i>c</i> -Wert-Berechnung.....	94
3.6.3	Strahlungsanteil.....	94
<b>4</b>	<b>Parametrierung .....</b>	<b>96</b>
4.1	Klassifikation von Modellparametern.....	96
4.1.1	Geometrieparameter.....	97
4.1.2	Stoffparameter.....	98
4.1.3	Heizkörper-Parameter .....	99
4.1.4	Montage-Parameter .....	101
4.1.5	Strukturparameter.....	101
4.2	Implementierte Parameteridentifikation .....	102
4.2.1	Identifikation unbekannter Geometrieparameter .....	102
4.2.2	Approximation des Fließkanalquerschnitts.....	103
4.2.3	Automatisierung der Parameteridentifikation.....	104
4.3	Parameterverwaltung .....	105
4.4	Parameterwirkungsplan.....	107
<b>5</b>	<b>Simulation .....</b>	<b>109</b>
5.1	Aggregation zum Prozeßmodell .....	109
5.2	Simulation des Prozeßverhaltens .....	113
5.3	Validierung des Prozeßmodells .....	116
5.4	Modellbeurteilung.....	118
5.4.1	Anwendungsbereich.....	118
5.4.2	Praktischer Nutzen des Virtuellen <i>c</i> -Wert-Prüfstands .....	118
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung.....</b>	<b>119</b>
<b>7</b>	<b>Literatur.....</b>	<b>121</b>
<b>8</b>	<b>Anhang .....</b>	<b>124</b>
	Anhang A: Formelzeichen .....	124
	Anhang B: Modellparameter.....	126

# 1 Einleitung

## 1.1 Ausgangssituation und Motivation

Aufgrund der in Deutschland – und in ähnlicher Form auch im benachbarten Ausland – geltenden *Verordnung über die verbrauchsabhängige Abrechnung der Heiz- und Warmwasserkosten* von 1981 ist die Ermittlung der im Wohnungsbereich anfallenden Heizkosten mittels verbrauchsorientierter Verfahren vorgeschrieben, wenn die Wohnungen zentral mit Wärme versorgt werden. Diese sogenannte *Heizkosten-Verordnung* hat grundsätzlich das Ziel, den Energieverbrauch von Gebäudeheizungen zu vermindern [BÖT81].

Das Interesse an der möglichst exakten Erfassung des Wärmeverbrauchs zum Zwecke der Kostenverrechnung hat aber noch weitere Beweggründe. Neben umweltpolitischen und ökologischen Gründen ist auch aus volkswirtschaftlicher Sicht ein möglichst sparsamer und zweckdienlicher Umgang mit Primärenergie sinnvoll. Zusätzlich kann der durch einen wiederholten Anstieg der Energiepreise sensibilisierte Endverbraucher mittels kontrollierter Verbrauchsmessung auch in eigenem Interesse Verschwendung vermeiden und somit den Einsatz von Primärenergie deutlich verringern.

Vordergründig ist man allerdings aus betriebswirtschaftlichen Aspekten daran interessiert, verbrauchte Wärmemengen präzise zu ermitteln, wie dies bereits bei Energieträgern wie Strom, Heizöl oder Gas der Fall ist. Solche Messungen liefern die Grundlage für eine „gerechte“ Aufteilung der angefallenen Energiekosten.

Zur verbrauchsabhängigen und damit möglichst gerechten Abrechnung von Heizkosten werden in einer zentral versorgten Nutzergemeinschaft vielfach *Heizkostenverteiler* eingesetzt, die eine bestimmte Meßgröße liefern, welche mit der von einem Heizkörper in einer bestimmten Zeitspanne abgegebenen Wärmemenge korreliert. Die Verwendung solcher Geräte im deutschen bzw. europäischen Raum regelt die Europäische Norm *Heizkostenverteiler für die Verbrauchswerterfassung von Raumheizflächen* [EN834] (diese Norm ersetzt die [DIN4713] *Verbrauchsabhängige Wärmekostenabrechnung*, Teil 1-3, des Deutschen Instituts für Normung). In diesem Normblatt wird als rechtliche Grundlage für einen Einsatz von Heizkostenverteilern die Kenntnis und Verwendung bestimmter Bewertungsfaktoren vorgeschrieben. In diesem Zusammenhang muß auch der sogenannte *c-Wert* bekannt sein, dessen meßtechnische Ermittlung in der Praxis üblicherweise mit einem nicht unerheblichen Aufwand und daraus resultierenden hohen Kosten verbunden ist.

Für die Verwendung eines Heizkostenverteilers an einem Heizkörper ist die Kenntnis des *c-Wertes* genau dieser Kombination aus Heizkörper und Heizkostenverteiler für die Heizkostenabrechnung zwingend vorgeschrieben [EN834]:

» *Es dürfen nur solche Heizkörper ausgestattet werden, für die der  $c$ -Wert zum Zeitpunkt der Abrechnung bekannt ist.* «

Die Zertifizierung und Markteinführung eines Heizkostenverteilers erfordert deshalb in der Praxis die Ermittlung zahlreicher  $c$ -Werte für die verschiedensten Heizkörpertypen.

Um den hierfür erforderlichen zeitlichen und finanziellen Aufwand möglichst zu verringern, wurde die Idee verfolgt, durch den Einsatz der Simulationstechnik eine solche  $c$ -Wert-Prüfung *virtuell* durchzuführen. Im Rahmen einer Kooperation zwischen der *Viterra Energy Services AG* (Essen), einem Dienstleister für verursachergerechte Abrechnung von Wärme und Wasser, und dem *Fachgebiet Regelungstechnik* der Universität Paderborn wurde daher das Forschungsprojekt „*Virtueller  $c$ -Wert-Prüfstand*“ initiiert; das Fachgebiet befaßt sich seit langem mit der rechnergestützten Modellierung und Simulation komplexer technischer Prozesse

Ziel des Forschungsprojekts war die Erarbeitung von Ansätzen, mit denen sich der Aufwand bei der Ermittlung von  $c$ -Werten reduzieren läßt. Die grundlegende Idee bestand darin, von einem realen Prüfstand abzugehen und statt dessen zu versuchen, die spezifischen Eigenschaften und phänomenologischen Verhaltensweisen in einem mathematischen *Modell* des Prüfstandes nachzubilden. Eine Lösung dieses Modells mittels *Simulation* liefert dann unter bestimmten Randbedingungen die gewünschten  $c$ -Werte als Ausgangsgrößen.

Die konventionelle  $c$ -Wert-Prüfung soll dabei nicht grundsätzlich und in vollem Umfang durch die Simulation *ersetzt* werden. Es bietet sich jedoch an, die klassische und kostenintensive Vorgehensweise für einen Großteil der marktüblichen Heizkörper durch ein Werkzeug zur  $c$ -Wert-Simulation zu *ergänzen*. Ansatzpunkt ist die Formulierung in der bereits zitierten Norm [EN834, DIN4713], daß der Antragsteller selbst  $c$ -Werte vorlegen kann, die von einer Prüfstelle stichprobenartig nachgemessen werden. Dabei wird nicht festgelegt, mittels welcher Methode der Antragsteller diese eigenen  $c$ -Werte zu ermitteln hat.

## 1.2 Zielsetzung der Arbeit

### Anforderungen an einen virtuellen Prüfstand

Der „Virtuelle  $c$ -Wert-Prüfstand“ soll eine korrekte  $c$ -Wert-Bestimmung ohne den Einsatz real existierender Komponenten wie Heizkörper, Heizkostenverteiler oder einer Prüfkabine ermöglichen. Die bisher übliche *experimentelle Durchführung* einer Prüfung soll also durch eine *rechnerische Nachbildung (Simulation)* ersetzt werden.

Der potentielle Anwender des virtuellen Prüfstands soll imstande sein, eine zu untersuchende Heizkörper-Heizkostenverteiler-Kombination am Rechner nachzubilden und anschließend durch Simulation den zugehörigen  $c$ -Wert zu ermitteln.

Als Voraussetzung für ein solches Vorgehen muß für den Prüfstand ein äquivalentes Modell erstellt werden, welches in der Lage ist, die inneren Eigenschaften bzw. das Verhalten des Systems zu reproduzieren. Durch die Anwendung der betreffenden physikalischen Gesetze kann das theoretische Systemverhalten mittels mathematischer Zusammenhänge beschrieben werden.

Der Einsatz rechnergestützter Verfahren in modernen Softwarewerkzeugen kann die effiziente Modellbildung eines solchen technischen Systems erheblich unterstützen. So existieren heute leistungsfähige Programmpakete, welche eine Modellbildung beispielsweise unter Verwendung *objektorientierter Mechanismen* oder durch Anwendung der *Finite-Elemente-Methode* ermöglichen. Ergänzt werden solche Werkzeuge durch effiziente Simulatoren (Algorithmen zur Lösung von Gleichungssystemen) und vielfältige Möglichkeiten zur Visualisierung und Weiterverarbeitung von Simulationsergebnissen (Postprocessing).

Voraussetzung für einen universellen Einsatz des virtuellen Prüfstands ist der Aufbau und die Erweiterbarkeit einer *Modellbibliothek* für Heizkörper- und Heizkostenverteiler-Modelle. Daher ist es für die Umsetzung des Grundkonzepts auch von größter Wichtigkeit, die Modellbildung so zu konzipieren, daß sowohl weitere Heizkörpertypen als auch neue Heizkostenverteiler mit möglichst wenig Aufwand in die Modellbibliothek des Prüfstands aufgenommen werden können.

### Aufbau der Arbeit

Die Durchführung des Forschungsprojekts „*Virtueller  $c$ -Wert-Prüfstand*“ kann in vier grundlegende Projektphasen aufgeteilt werden, an denen sich auch die Gliederung der einzelnen Kapitel dieser Arbeit orientiert:

1. Überprüfung der grundsätzlichen Machbarkeit,
2. phänomenologische Prozeßanalyse und konzeptionelle Modellbildung,

3. Parametrierung der Modellklassen und
4. Realisierung eines einsatzfähigen Simulators.

Nach der Sicherstellung der grundsätzlichen Machbarkeit einer virtuellen  $c$ -Wert-Prüfung liegt der Schwerpunkt der Arbeiten in der phänomenologischen Analyse des zugrunde liegenden Prozesses sowie der Modellbildung unter Verwendung objektorientierter Methoden (Kapitel 3).

Bedingt durch die Heizkörpervielfalt muß bei der Vielzahl der zu erwartenden Modelle auch der Parametrierung der entstehenden Modellklassen eine besondere Bedeutung beigemessen werden. Der Anwender eines Simulators zur virtuellen Ermittlung von  $c$ -Werten muß in der Lage sein, auf alle für eine Berechnung erforderlichen Modellparameter ohne größeren Aufwand zugreifen zu können. Im vierten Kapitel wird diese Problematik eingehend behandelt, indem spezifische Modellparameter angegeben sowie Strategien und Automatismen zur Identifikation unbekannter Modellparameter vorgestellt werden.

Im fünften Kapitel der Arbeit steht die Analyse des zuvor hergeleiteten Prozeßmodells durch Simulation im Vordergrund. Der Schwerpunkt liegt in diesem Zusammenhang bei der Verifikation und Validierung des Modellkonzepts. Eine umfassende Modellbeurteilung gibt den zulässigen Gültigkeitsbereich an und bewertet schließlich die praktische Einsetzbarkeit des „Virtuellen  $c$ -Wert-Prüfstands“.

Zunächst soll jedoch das nachfolgende zweite Kapitel in kurzen Zügen die zum Verständnis der Arbeit erforderlichen Grundlagen aus dem umfangreichen Themenkomplex der Heizungstechnik mit dem Schwerpunkt der Heizkostenverteilung vermitteln.

## 2 Grundlagen der Heizkostenverteilung

Wie bereits in der Einleitung angedeutet, steht bei dem Exkurs in das Themengebiet der Heizungstechnik insbesondere die Vorgehensweise bei der Ermittlung des Wärmeverbrauchs und der verursachergerechten Verteilung von Heizkosten im Vordergrund. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird verdeutlicht, welches Potential der Einsatz der Simulationstechnik in diesem speziellen Aufgabenbereich der Heizkostenabrechnung besitzt.

### 2.1 Verfahren zur Ermittlung des Wärmeverbrauchs

Die *Verordnung über die verbrauchsabhängige Abrechnung der Heiz- und Warmwasserkosten* in der Grundfassung vom 23. Februar 1981 schreibt bei einer durch eine gemeinsame Heizungsanlage versorgten Nutzergemeinschaft (häufig z.B. verschiedene Parteien in einem Mehrfamilienhaus) die Verrechnung der Heizkosten durch eine *verbrauchsabhängige Heizkostenverteilung* vor [BÖT81]. Der gesamte Wärmeverbrauch einer solchen Abrechnungseinheit wird gewöhnlich durch die als exakt anzusehende Messung der verbrauchten Brennstoffmenge (meistens Öl oder Gas) oder auch der Wärmemenge (z.B. bei Versorgung durch Fernwärme, die Messung erfolgt dann durch Wärmehähler) bestimmt. Zur anteiligen und somit möglichst „gerechten“ Verteilung der so ermittelten absoluten Heizkosten wird der Wärmeverbrauch der einzelnen Nutzereinheiten (z.B. Wohnungen) benötigt.

Für die Erfassung der Wärmeabgabe aller Raumheizflächen einer Nutzereinheit können prinzipiell ebenfalls Wärmehähler eingesetzt werden, welche die verbrauchte Heizwärme  $\dot{Q}_H$  durch Messung des Massenstromes  $\dot{m}$  und der Temperaturspreizung  $\Delta T$  des fluiden Wärmeträgers (Heizmedium) über den Zusammenhang

$$\dot{Q}_H = \dot{m} c_p \Delta T \quad (2.1)$$

ermitteln ( $c_p$  = spezifische Wärmekapazität des Heizmediums). Die praktische Anwendbarkeit dieser Meßmethode setzt allerdings voraus, daß sich alle Raumheizflächen dieser Nutzereinheit an einem gemeinsamen Versorgungsstrang befinden (Wohnungsring bei horizontaler Rohrleitung), da sonst an jeder einzelnen Raumheizfläche (z.B. Heizkörper, Fußbodenheizung) Wärmehähler angebracht werden müßten. Eine solche Anordnung eines zentralen Versorgungsstranges ist in der Praxis eher selten (häufiger bei Neubauten) anzutreffen, zudem ist die Installation von Wärmehälern selbst in diesem Fall durch die erforderliche Messung des Massenstroms vergleichsweise kostspielig.

In den meisten Fällen werden zentral versorgte Heizungsanlagen mit vertikal verlaufenden Steigsträngen ausgerüstet, die übereinander liegende Räume versorgen, die meist nicht zur gleichen Nutzereinheit gehören. Bei dieser Installationsart bietet sich als einzige ökonomisch

sinnvolle Meßmethode die Erfassung der Wärmeabgabe jeder einzelnen Raumheizfläche durch *Heizkostenverteiler* (HKV) an.

Während diese Methode der Verbrauchserfassung zwar vergleichsweise kostengünstig ist, können aus technischen Gründen unterschiedliche Probleme auftreten, welche häufig zu Meßungenauigkeiten und damit auch zu Abrechnungsfehlern führen. Bevor auf diese möglichen Probleme genauer eingegangen wird, soll jedoch zunächst eine Klassifizierung der gängigen Heizkostenverteiler-Typen vorgenommen werden.

### 2.1.1 Heizkostenverteiler

Für eine eingehende Betrachtung von Heizkostenverteilern wird zunächst eine Klassifizierung der derzeit am Markt gebräuchlichen Meßsysteme vorgenommen [ADU91]. Alle Geräteausführungen beruhen auf dem gemeinsamen Prinzip, daß die Erfassung des Wärmeverbrauchs immer auf die Messung einer oder mehrerer Temperaturen zurückgeführt wird. Generell muß zwischen zwei physikalisch möglichen Meßverfahren unterschieden werden.

Die sicherlich kostengünstigste Methode ist der Einsatz von *Heizkostenverteilern nach dem Verdunstungsprinzip* (Kurzbezeichnung *HKVV*). In Abhängigkeit von der am Montageort des HKVV auftretenden mittleren Temperatur des Heizkörpers verdunstet eine sich in einer Ampulle befindliche spezielle Meßflüssigkeit. Die Abnahme des Flüssigkeitsstandes ist somit ein Maß für die in einem bestimmten Abrechnungszeitraum vom Heizkörper abgegebene Wärmemenge. Durch die thermische Kopplung der Meßflüssigkeit an die Heizkörperoberfläche wird, sofern hier überhaupt von einer Messung gesprochen werden kann, lediglich *ein* Temperaturwert erfaßt. Aufgrund der schlechten Korrelation zwischen der Verdunstungsrate und der Wärmeleistung des Heizkörpers (im Sommer kann es z.B. bei direkter Sonnenbestrahlung des HKVV trotz kaltem Heizkörper zur Verdunstung kommen, zusätzlich findet eine Kaltverdunstung statt) und dem damit einhergehenden geringen Vertrauen des Verbrauchers in diesen Gerätetyp sprechen in der Praxis vor allem die niedrigen Herstellungskosten für einen Einsatz von Heizkostenverteilern nach dem Verdunstungsprinzip.

Bei den *elektronischen Heizkostenverteilern* (Heizkostenverteiler mit Hilfsenergie, Kurzbezeichnung *HKVE*) werden charakteristische Temperaturwerte mittels thermoresistiver Sensoren (z.B. NTC-Sensoren) gemessen. Die Differenz zwischen der mittleren Heizkörpertemperatur und der umgebenden Raumlufttemperatur, auch *Übertemperatur* genannt, kann so meßtechnisch ermittelt werden. Diese Übertemperatur korreliert mit der momentanen Wärmeleistung eines Heizkörpers, so daß hier die zeitliche Integration der Übertemperatur ein Maß für die abgegebene Wärmemenge liefert. Die Elektronik dieses Gerätetyps ermöglicht neben den nötigen Rechenoperationen auch die Speicherung bestimmter Werte in Verbindung mit einer Datumserfassung (Kalenderfunktion). Die für die Wärmekostenverrechnung relevanten Verbrauchsdaten eines Abrechnungszeitraums können über eine Infrarot-Schnittstelle oder – bei neueren Gerätegenerationen – auch über Funk (Fernabfrage) ausgelesen werden.

Elektronische Heizkostenverteiler lassen sich gegenwärtig nach der Anzahl der gemessenen Temperaturwerte wie folgt differenzieren [ADU91]:

- *Einfühlergeräte* messen lediglich die Temperatur des Heizkörpers am Montageort des Gerätes. Das Ziel ist es (wie auch bei den Verdunstungsgeräten), durch entsprechende Wahl des Montageortes eine repräsentative Oberflächentemperatur der Heizfläche zu erfassen. Die Temperatur der Raumluft und der Umschließungswände wird dabei als konstant angenommen (Referenz-Lufttemperatur). Bei Räumen mit niedrigeren Auslegung-Innentemperaturen als diese Referenz-Lufttemperatur wird die Leistungsänderung durch einen zusätzlichen *Bewertungsfaktor*  $K_T$  berücksichtigt (siehe Abschnitt 2.1.2).
- *Zweifühlergeräte* nehmen zusätzlich zur Oberflächentemperatur auch den Wert der Raumlufttemperatur auf<sup>1</sup>, um so den tatsächlichen Wert der Übertemperatur zu ermitteln. Da der Raumtemperatursensor meist im Inneren des HKVE an der dem Heizkörper abgewandten Seite platziert wird, kann jedoch nur eine mit der Raumluft korrelierte Ersatztemperatur gemessen werden. Als Abhilfe kann der Raumluftsensor als sogenannter *Fernfühler* in geeigneter Entfernung vom Heizkörper montiert werden. Vorgeschrieben ist der Einsatz von Fernfühlern, wenn es in der unmittelbaren Umgebung des Heizkostenverteilers zu einem Wärmestau kommen kann (z.B. durch abdeckende Bleche oder beim Einbau in einem Schacht, wie dies häufig bei Konvektoren der Fall ist).
- *Dreifühlergeräte* messen neben Vor- und Rücklauftemperatur des Heizkörpers auch die Raumlufttemperatur. Sie können bei Annahme eines logarithmischen Temperaturprofils die physikalisch wirksame logarithmische Übertemperatur erfassen (mittels Gleichung 2.8 in Abschnitt 2.1.3).
- *Mehrfühlergeräte* gestatten es bei geeigneter Anordnung der Meßfühler, zusätzlich zu den bereits genannten Meßgrößen auch Transmissionswärmeströme zwischen einzelnen Wohneinheiten zu bestimmen. Sie ermöglichen so die angenäherte Messung des tatsächlichen Wärmeverbrauchs. Aufgrund hoher Investitions- und Installationskosten konnte sich dieses Meßprinzip bisher jedoch nicht durchsetzen.

Gemäß der mit dem Kooperationspartner *Viterra Energy Services AG* angestrebten Projektziele beschränken sich die weiteren Ausführungen der vorliegenden Arbeit allein auf die Behandlung elektronischer Heizkostenverteiler (HKVE) in der Betriebsart als Ein- oder Zweifühlergerät. Das im dritten Kapitel hergeleitete grundlegende Modellkonzept läßt sich aber prinzipiell auch auf andere Systeme, wie z.B. Heizkostenverteiler nach dem Verdunstungsprinzip oder Mehrfühlergeräte, übertragen<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Eine andere kaum verwendete Form des Zweifühlergerätes mißt Vor- und Rücklauftemperatur und nimmt den Wert der Raumlufttemperatur als Fixwert an, woraus nach Gleichung 2.8 die logarithmische Übertemperatur berechnet wird.

<sup>2</sup> Der Mehraufwand liegt dann bei der Modellierung des neu betrachteten Heizkostenverteilers, während das Teilsystem *Heizkörper* (siehe 3.2) unverändert Verwendung findet.

## 2.1.2 Verbrauchsabhängige Heizkostenverteilung

### Bewertungsfaktoren

Der reine *Anzeigewert* eines elektronischen Heizkostenverteilers stellt zunächst nur einen Näherungswert des Zeitintegrals der gemessenen charakteristischen Temperaturdifferenz zwischen der Heizfläche und dem umgebenden Raum dar. Dieser Wert reicht natürlich noch nicht zur Ermittlung der Wärmeabgabe aus, da die Übertemperatur allein z.B. keine Aussage über spezifische Heizkörperdaten (insbesondere dessen Wärmeleistung) zuläßt.

Daher ist eine Bewertung der Anzeigewerte mit mindestens den Kenndaten des jeweiligen Heizkörpers erforderlich. Hierzu wird der Bewertungsfaktor  $K_Q$  eingeführt, der als (dimensionsloser) Zahlenwert die in Watt ausgedrückte Norm-Wärmeleistung eines Heizkörpers berücksichtigt. Somit wird der Anzeigewert grundsätzlich an die individuell unterschiedlichen Wärmeleistungen der Heizkörper einer Abrechnungseinheit angepaßt. Um darüber hinaus etwaige Fehlereinflüsse von Heizkostenverteilern oder besonderen äußeren Randbedingungen zu kompensieren, werden gewöhnlich weitere *Bewertungsfaktoren* bzw. *Korrekturfaktoren* zur Bewertung der Anzeigewerte herangezogen<sup>3</sup>. Der Gesamtbewertungsfaktor  $K$  ergibt sich schließlich aus dem Produkt der einzelnen anzuwendenden Bewertungsfaktoren [EN834].

Der mit diesem Gesamtbewertungsfaktor bewertete Anzeigewert wird als *Verbrauchswert* bezeichnet, welcher sich schließlich für die verbrauchsabhängige Abrechnung eignet.

Einer weiterer wichtiger Korrekturfaktor ist der  $K_C$ -Faktor. Er berücksichtigt die physikalisch bedingte Tatsache, daß der Temperaturfühler eines Heizkostenverteilers aufgrund seiner räumlichen Trennung vom Heizkörper nicht in der Lage ist, die exakte Temperatur des Heizmediums an der Montagestelle zu erfassen. Der Meßwert des Heizkörpersensors wird vielmehr geringfügig unter dem wahren Wert liegen, da auch der HKVE über sein Gehäuse Wärme an die Umgebungsluft abgibt und somit thermische Verluste auf der Wärmeleitstrecke zum Sensor hin auftreten. Obwohl diese Temperaturabweichung meist recht klein ist, entstehen bei der Verbrauchserfassung nicht zu vernachlässigende Abweichungen. Sollte insbesondere auch die Umgebungstemperatur durch einen Sensor gemessen werden, so tritt bei Zweifühlergeräten eine nicht unerhebliche Abweichung zwischen dem wahren und dem gemessenen Temperaturwert auf. Der Sensor für die Umgebungstemperatur befindet sich hier innerhalb des HKVE-Gehäuses und wird dadurch zwangsläufig einen höheren Wert für die Umgebungstemperatur liefern, weil es am warmen Heizkörper nicht zu vermeiden ist, daß sich auch das Gehäuse des HKVE und die sich darin befindliche Luft erwärmen. Ein höherer Meßwert für die Raumtemperatur hat eine geringere Übertemperatur zur Folge, weshalb ohne Korrektur eine kleinere als die wahre Wärmeleistung gemessen werden würde.

---

<sup>3</sup> Neben den Bewertungsfaktoren  $K_Q$  (Heizkörperleistung) und  $K_C$  ( $c$ -Wert) kommen ggf. noch der Bewertungsfaktor  $K_T$  (bei größerer Abweichung der tatsächlichen Raumlufttemperatur von 20°C) zur Anwendung.

Der  $K_C$ -Korrekturfaktor muß für jeden HKVE zur Bewertung angewandt werden, wenn die zuvor beschriebenen Abweichungen der Sensoren innerhalb einer Abrechnungseinheit unterschiedliche Werte annehmen [DIN4713, EN834]. Dies ist immer dann der Fall, wenn verschiedene Heizkörperausführungen in einer Abrechnungseinheit installiert sind (z.B. Heizkörper verschiedener Hersteller oder Plattenheizkörper gemeinsam mit Gliederheizkörpern).

### 2.1.3 Bedeutung des $c$ -Wertes

Zur Berechnung des Bewertungsfaktors  $K_C$  wird als grundlegende Kenngröße der sogenannte  $c$ -Wert herangezogen. Dem  $c$ -Wert kommt damit in der Heizkostenabrechnung eine zentrale Bedeutung zu. Wie in der Einleitung bereits angedeutet, muß er für jeden Heizkostenverteiler in Kombination mit dem jeweiligen Heizkörper, an dem er eingesetzt wird, genau bekannt sein. Bei der Vielzahl der am Markt üblichen und im Einsatz befindlichen unterschiedlichen Heizkörpertypen erfordert die  $c$ -Wert-Prüfung gegenwärtig einen nicht unerheblichen meßtechnischen Aufwand.

Der  $c$ -Wert kann als *Maß für die thermische Ankopplung eines Heizkostenverteilers an die jeweilige Raumheizfläche* angesehen werden. Wünschenswert sind demnach sehr kleine Werte (nahe Null), welche eine entsprechend gute thermische Anbindung bedeuten.

Der  $c$ -Wert ist ganz allgemein wie folgt definiert:

$$c_m = \frac{(T_m - T_{m,F}) - (T_L - T_{L,F})}{T_m - T_L}. \quad (2.2)$$

Die Größen  $T_{m,F}$  und  $T_{L,F}$  sind die Fühlertemperaturen des Heizkörper- und des Raumluft-sensors, die beim elektronischen Heizkostenverteiler als Meßgrößen ausgelesen werden können. Bei Einfühlergeräten und bei Zweifühlergeräten, die als Einfühlergerät betrieben werden, wird nur die Sensortemperatur  $T_{m,F}$  als mittlere Oberflächentemperatur der Heizfläche gemessen. Für die Lufttemperatur wird bei dieser Betriebsart ein konstanter Wert

$$T_{L,F} = T_L \quad (2.3)$$

angenommen, so daß dann die Vereinfachung

$$c_m = \frac{T_m - T_{m,F}}{T_m - T_L} \quad (2.4)$$

gilt.

Die für eine  $c$ -Wert-Bestimmung zusätzlich zu messenden Größen sind je nach Betriebsart des Heizkostenverteilers die

- mittlere Temperatur des Heizmediums  $T_m$  (für Ein- und Zweifühlerbetrieb) und die
- Temperatur der Umgebungsluft  $T_L$  als Referenz-Lufttemperatur.

Gemäß Beziehung (2.2) drückt der  $c$ -Wert das *Verhältnis der Differenz der Meßabweichungen zur Differenz der wahren Größen* aus.

Durch Umformung dieser Gleichung erhält man die in der Literatur (wie auch in der Norm zur Heizkostenverteilung [EN834]) häufiger anzutreffende Form

$$c_m = 1 - \frac{T_{m,F} - T_{L,F}}{T_m - T_L} = 1 - \frac{\Delta T_F}{\Delta T} \quad (2.5)$$

für den *wärmeträgerseitigen*  $c$ -Wert (Index  $m$ ). Weiterhin wird mit der Beziehung

$$c_O = 1 - \frac{T_{O,F} - T_{L,F}}{T_O - T_L} \quad (2.6)$$

der weniger gebräuchliche *oberflächenabhängige*  $c$ -Wert (Index  $O$ ) definiert. Der  $c_m$ -Wert stellt den Zusammenhang zwischen der mittleren Wärmeträgertemperatur  $T_m$  bzw. der Umgebungstemperatur  $T_L$  und den Temperaturen der Meßfühler  $T_{m,F}$  und  $T_{L,F}$  dar. Dagegen gibt  $c_O$  die Güte des Wärmekontaktes als relativen Temperaturabfall zwischen Heizkörperoberfläche und Meßfühler wieder ( $c_O$  wird seit Gültigkeit der [EN834] nicht mehr verwendet).

Zur Berechnung des Korrekturfaktors  $K_C$  schreibt die Norm [DIN4713] bzw. [EN834] die Verwendung des wärmeträgerseitigen  $c$ -Wertes vor. Dort ist folgende Definition für den  $c$ -Wert zu finden:

$$c_m = 1 - \frac{\Delta T_{ist}}{\Delta T_{soll}} \quad (2.7)$$

mit  $\Delta T_{ist} =$  Temperaturdifferenz der Meßwertaufnehmer  $T_{H,F} - T_{L,F}$ ,

$\Delta T_{soll} =$  Heizmedium-Übertemperatur  $T_m - T_L$  oder  $\Delta T_{in}$ .

Dabei wird die *logarithmisch gemittelte Heizmedium-Übertemperatur*  $\Delta T_{in}$  nach der Beziehung

$$\Delta T_{in} = \frac{T_V - T_R}{\ln \frac{T_V - T_L}{T_R - T_L}} \quad (2.8)$$

aus der Vorlauftemperatur  $T_V$ , der Rücklauftemperatur  $T_R$  und der Raumlufitemperatur  $T_L$  bestimmt. Gemäß dieser Gleichung wird die Differenz  $T_m - T_L$  folglich nicht direkt ermittelt, sondern aus der Vor- und Rücklauftemperatur des Heizmediums abgeleitet. Die so definierte logarithmische Übertemperatur bildet das vertikale Temperaturprofil des Wärmeträgers im Heizkörper ab [ADU91].

Im weiteren Verlauf der Arbeit sei bei der Verwendung des Begriffs „c-Wert“, soweit nicht anders vermerkt, immer der wärmeträgerseitige  $c_m$ -Wert verstanden.

## 2.2 c-Wert-Prüfung

### 2.2.1 Randbedingungen

Gemäß der bereits zitierten zuständigen Normen EN 834 bzw. DIN 4713 (3) sind bei der meßtechnischen Ermittlung von  $c$ -Werten folgende Voraussetzungen einzuhalten:

- Die Prüfung der  $c$ -Werte ist im sogenannten *Basiszustand* durchzuführen,
- drei Heizkostenverteiler je Typ und Heizkörper sind unter gleichen Prüfbedingungen zu untersuchen,
- die Montageorte und Montageanweisungen des Antragstellers (Hersteller bzw. Dienstleister) sind einzuhalten und
- die Fühlertemperaturen sind durch (geeichte) Laborfühler oder, bei Kenntnis der Fühlerkennlinien, anhand der Fühlersignale zu erfassen.

#### Definition des Basiszustandes

Der Basiszustand zur Festlegung der Bewertungsfaktoren und zur Bestimmung der  $c$ -Werte ist in bestimmten Grenzen frei wählbar und gibt Werte für die Systemtemperaturen am Heizkörper an. Als Basiszustand definiert die Europäische Norm [EN834]:

- Vorlaufeinführung am Heizkörper oben.
- Mittlere Heizmediumtemperatur:  $T_m = (40 \dots 60) \text{ °C}$
- Referenz-Lufttemperatur:  $T_L = (20 \pm 2) \text{ °C}$
- Norm-Heizmediumstrom bei:  $T_V / T_R / T_L = (90 / 70 / 20) \text{ °C}$

Einen wichtigen Stellenwert nimmt schließlich auch die Prüfumgebung des Systems Heizkörper – Heizkostenverteiler ein. So wird für die  $c$ -Wert-Messung im Basiszustand eine spezielle Prüfkabine vorgeschrieben. Zulässige Ausführungsformen für eine solche Prüfkabine schreibt die hierfür zuständige Norm DIN 4704 „Prüfung von Raumheizkörpern“ bzw. EN 442 „Radiatoren und Konvektoren“ vor [DIN4704, EN442]. Zu unterscheiden ist demgemäß

zwischen einer *offenen Prüfkabine* nach DIN 4704 (2) und einer *geschlossenen Prüfkabine* nach DIN 4704 (3) bzw. einem *Referenz-Prüfstand* nach EN 442-2. In diesen Normblättern werden alle geometrischen Abmessungen, die vorgeschriebene Installation des Heizkörpers sowie sonstige Anforderungen an die Prüfumgebung detailliert aufgeführt.

In analoger Weise schreibt die EN 834 bei der Definition des Basiszustandes vor, daß die Referenz-Lufttemperatur „in einer *klimastabilen* Prüfkabine 0,75 m über dem Boden in einem Abstand von 1,5 m vor der Heizfläche zu messen ist“. Diese Aussage stellt in der Praxis hohe Anforderungen an die Prüfkabine, die meist durch aufwendige Installationen gekühlt werden muß, um die geforderte Klimastabilität zu gewährleisten.

Zum Erreichen des Norm-Heizmediumstroms muß der Heizmediumstrom so lange variiert werden, bis sich bei einer Vorlauftemperatur von  $T_R = 90\text{ °C}$  und einer Lufttemperatur von  $T_L = 20\text{ °C}$  eine Rücklauftemperatur von  $T_R = 70\text{ °C}$  einstellt. Diese Vorgehensweise bedarf einiger Erfahrung des durchführenden Personals der Prüfstelle und führt zusammen mit dem erforderlichen Installationsaufwand zu einem vergleichsweise hohen Zeitbedarf für eine einzelne *c*-Wert-Prüfung. In der Praxis lassen sich selbst durch erfahrene Prüfer meist nur wenige *c*-Werte je Arbeitstag messen.

### 2.2.2 Prüfumfang

Grundsätzlich sind *durch Messungen* die *c*-Werte für sieben Grundheizkörper zu bestimmen (Gußradiator, Stahlradiator, senkrecht profilierter Plattenheizkörper, nicht profilierter Plattenheizkörper, Röhrenradiator, Rohrregisterheizkörper und Plattenheizkörper mit waagerechter Wasserführung) [EN 843]. Sollten für diese Heizkörper vom Antragsteller eigene *c*-Werte vorgelegt werden, so vergleicht die Prüfstelle diese mit ihren Meßergebnissen.

Für die Ausstattung weiterer Heizkörper, deren *c*-Werte nicht durch die Messungen an den sieben Grundheizkörpern bekannt sind, müssen die Werte vom Antragsteller der Prüfstelle zur Bestätigung vorgelegt werden. Diese überzeugt sich durch Nachmessung einer Stichprobe im Umfang von 3 % der Anzahl der vorgelegten Werte von der Richtigkeit dieser *c*-Werte.

Die vorgelegten *c*-Werte des Antragstellers dürfen von den Meßwerten der Prüfstelle unsystematisch bis zu  $\pm 0,02$  abweichen. Zusätzlich sind systematische Abweichungen zulässig, sofern diese den Bewertungsfaktor  $K_C$  um nicht mehr als  $\pm 3\%$  verändern.

### 2.2.3 Aufwandsanalyse

Bei praktischer Betrachtung der zuvor beschriebenen Anforderungen zur Einhaltung des Basiszustandes (insbesondere die Notwendigkeit einer Prüfkabine) sowie des Prüfumfanges läßt sich festzustellen, daß die durch die Norm geforderte Vorgehensweise mit einem hohem Aufwand verbunden ist. Dieser erstreckt sich sowohl auf die *c*-Wert-Prüfung durch die

Prüfstelle (zwecks Zertifizierung) als auch auf die eigenen *c*-Wert-Messungen des Antragstellers.

Dieser Aspekt begründet die zwangsläufig entstehenden hohen Kosten für die Durchführung einer solchen Prüfung. Weiterhin ist aber auch der zeitliche Aufwand nicht zu vernachlässigen, da im Zuge der Markteinführung eines Heizkostenverteilers häufig innerhalb sehr kurzer Zeit möglichst viele *c*-Werte bestimmt werden müssen.

Im einzelnen läßt sich der Aufwand wie folgt spezifizieren:

- *Sach- bzw. Materialaufwand*: Zur Messung der *c*-Werte an marktüblichen Heizkörperarten müssen diese in einem entsprechend umfangreichen Heizkörperlager vorgehalten werden. Aufbau, Unterhaltung und eine ständige Erweiterung eines solchen Lagers ist mit hohen Kosten verbunden, da auch seltenere Heizkörperarten vorhanden sein müssen, um sie mit Heizkostenverteiler ausstatten zu können.
- *Kosten der Infrastruktur*: Als Prüfumgebung wird entsprechend der Norm eine spezielle Prüfkabine vorausgesetzt. Zusätzlich müssen geeignete Installationen und Apparaturen (z.B. Wärmeerzeuger zur Beheizung der Prüfheizkörper, Pumpe, Rohrleitungsnetzwerk etc.) sowie eine umfassende meßtechnische Ausstattung (Durchfluß- und Temperaturmessung) vorhanden sein.
- *Personalkosten*: Zur Unterhaltung des Prüfstands, Pflege eines Heizkörperlagers sowie für die Durchführung der Prüfungen selbst werden geeignet geschulte Fachkräfte benötigt, was zu entsprechend hohen Personalkosten führt.
- *Zeitaufwand*: Obwohl eine *c*-Wert-Messung zum Teil automatisiert durchgeführt werden kann, dauert eine einzelne Messung gewöhnlich ca. 4 - 6 Stunden. Diese Zeit setzt sich aus üblichen Montage- und Umrüstzeiten, der Aufheiz- bzw. Einschwingdauer zum Erreichen des Basiszustandes sowie der eigentlichen Messung (an drei Vergleichsgeräten je *c*-Wert) zusammen. In der Regel können demnach meist nur etwa ein bis zwei *c*-Werte pro Tag gemessen werden.

Aus diesen Aufwendungen entstehen dem Antragsteller für jede eigene *c*-Wert-Messung Kosten in Höhe von einigen Hundert Euro, während für eine externe Prüfung durch ein Fremdunternehmen etwa die doppelte Summe aufzuwenden ist (Stand: 2001).

Insbesondere bei der Einführung eines neuen Heizkostenverteiler-Modells müssen in Anbetracht der Vielfalt an marktüblichen Heizkörpern sehr viele Messungen durchgeführt werden, um für jede Kombination Heizkörper – Heizkostenverteiler den *c*-Wert zu bestimmen.

### 2.3 Einsatzpotential der Simulationstechnik

Durch die Realisierung der Idee einer virtuellen Prüfung kann eine einzelne  $c$ -Wert-Messung vollständig durch eine Simulation ersetzt werden. Auf kostenintensive Einrichtungen wie die Installation einer aufwendigen Prüfkabine und die Unterhaltung eines umfangreichen Heizkörperlagers kann möglicherweise ganz verzichtet werden. Diese Perspektive birgt ein erhebliches Einsparpotential. Neben geringeren Sach- bzw. Materialkosten ist insbesondere der vergleichsweise geringe zeitliche Aufwand zu nennen, den eine  $c$ -Wert-Ermittlung an einem virtuellen Prüfstand in Anspruch nimmt.

Die vorangegangene Aufwandsanalyse verdeutlicht dieses Potential, welches bei der  $c$ -Wert-Prüfung durch den Einsatz der Simulationstechnik ausgeschöpft werden kann:

- Der Zeitaufwand für eine  $c$ -Wert-Messung läßt sich durch die Simulation auf wenige Minuten reduzieren, je nach Komplexität des Modells und der geforderten Genauigkeit dauert die reine Simulationszeit in der Regel sogar nur einige Sekunden. Wie später im Kapitel 4 gezeigt wird, liegt auch der Zeitaufwand zur Ermittlung aller für die virtuelle Prüfung erforderlichen Modellparameter (Parametrierung) im Normalfall im Bereich weniger Minuten.
- Der Personalaufwand beschränkt sich bei der virtuellen  $c$ -Wert-Prüfung theoretisch auf *einen* Anwender. Bei geeigneter Gestaltung der Oberfläche und Funktionalität der Anwendersoftware (*Mensch-Maschine-Schnittstelle*) läßt sich die Handhabung derart vereinfachen und automatisieren, daß eine Nutzung des „Virtuellen  $c$ -Wert-Prüfstands“ auch ohne eine zeitaufwendige Schulung des Anwenders möglich ist.
- Da es sich bei dem virtuellen  $c$ -Wert-Prüfstand letztlich um eine Software handelt, ist als Materialaufwand lediglich ein marktübliches PC-System ohne besondere Anforderungen an die Rechenleistung erforderlich.

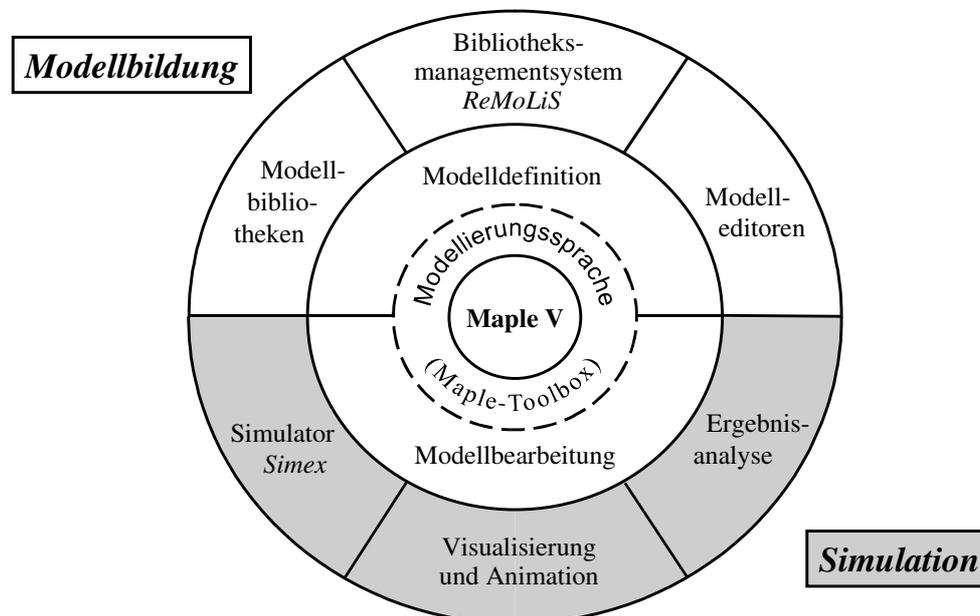
## 3 Modellierung von Raumheizsystemen

### 3.1 Grundlagen und Methoden der objektorientierten Modellbildung

#### 3.1.1 Das Modellierungswerkzeug *CAMex*

Für die theoretische Analyse und Modellbildung der  $c$ -Wert-Prüfung soll in erster Linie das am Fachgebiet Regelungstechnik der Universität Paderborn entwickelte Modellierungswerkzeug *CAMex* (**C**omputer-Aided **M**odeling for **e**xperimental Design) eingesetzt werden [JAH97, PAN98]. *CAMex* ist ein objektorientiertes, symbolisches Werkzeug zur rechnergestützten Modellbildung technischer Prozesse [PAN02]. Seine Merkmale sollen im folgenden kurz dargestellt werden.

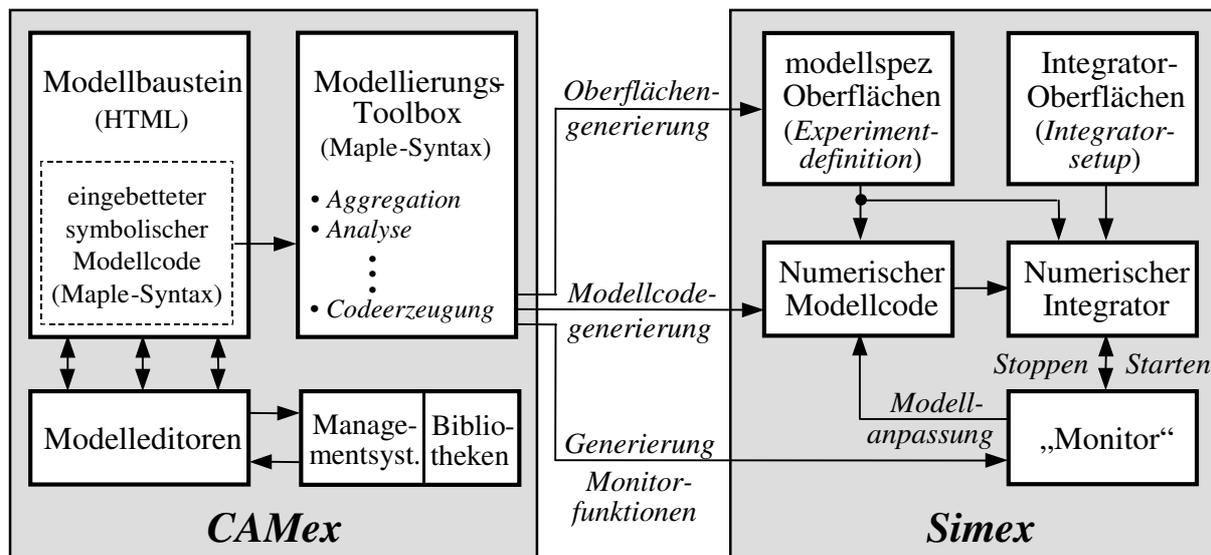
Das Werkzeug basiert in seinem Kern auf dem Computeralgebra-System *Maple V Release 3.0* und kann somit als *Maple-Toolbox* angesehen werden. Mathematische Modelle lassen sich unabhängig von einem speziellen Simulationssystem beschreiben und gegebenenfalls erforderliche algebraische Umformungen sehr einfach vornehmen und automatisieren. Den konzeptionellen Aufbau der Modellierungsumgebung verdeutlicht die folgende Abbildung:



**Bild 3.1:** Struktur der Modellierungsumgebung *CAMex*

Neben den Mechanismen der Modellmanipulation mittels Computeralgebra spielt die Dokumentation und Verwaltung implementierter Modelle eine äußerst wichtige Rolle. Eine übersichtliche, gut verständliche und leicht aufzufindende Dokumentation ist Voraussetzung für

die Transparenz und Wiederverwendbarkeit erstellter Modelle. Zu diesem Zweck stellt *CAMex* das Modellbibliotheks-Managementsystem *ReMoLiS* (**R**elation-Based **M**odel **L**ibrary **S**ystem) zur Verfügung. Die Modelle werden im verbreiteten *HTML*-Format (**H**yper**T**ext **M**arkup **L**anguage) implementiert und enthalten neben dem eigentlichen mathematischen Modellcode stets auch eine umfangreiche und einheitlich strukturierte Dokumentation<sup>4</sup>. Das schnelle Auffinden gesuchter Modelle wird durch die Verwendung aktiver Querverweise (*Hyperlinks*) zusätzlich unterstützt; der Anwender kann sich so auch innerhalb umfangreicher Modellbibliotheken schnell orientieren und komfortabel bewegen.



**Bild 3.2:** Verbindung zwischen Modellierungs- und Simulationsumgebung

Unter *CAMex* erstellte Modelle können sehr effizient mit dem angebundenen Prozeßsimulator *Simex* simuliert werden (Bild 3.2). Dazu wird aus den in symbolischer Form vorliegenden Modellgleichungen effizienter Programmcode (in FORTRAN) zur numerischen Lösung generiert. Daneben stehen weitere Routinen zur Verfügung, mit denen die mathematischen Modelle in *Dymola*<sup>®</sup>-Syntax übersetzt oder in *Matlab*<sup>®</sup>/*Simulink* eingebunden werden können. Neben der Erzeugung des numerischen Modellcodes werden zusätzlich modellspezifische Oberflächen zur menügesteuerten Eingabe von Modell- und Simulationsparametern sowie dem Verlauf der Eingangsgrößen generiert. Speziell angepaßte Monitorfunktionen gestatten eine kennzahlbasierte Überwachung der numerischen Integration unter Berücksichtigung gegebenenfalls erforderlicher Modellanpassungen während der Simulation [PAN00]. Der Integrator verwendet drei wahlweise und problemspezifisch einstellbare numerische Verfahren (BDF-Verfahren, BLEND-Methode und DASSL-Implementierung der BDF-Ver-

<sup>4</sup> Dem Modellierer wird zur Gewährleistung einer einheitlichen Struktur eine Maske eines Modellbausteins (*Template*) zur Verfügung gestellt.

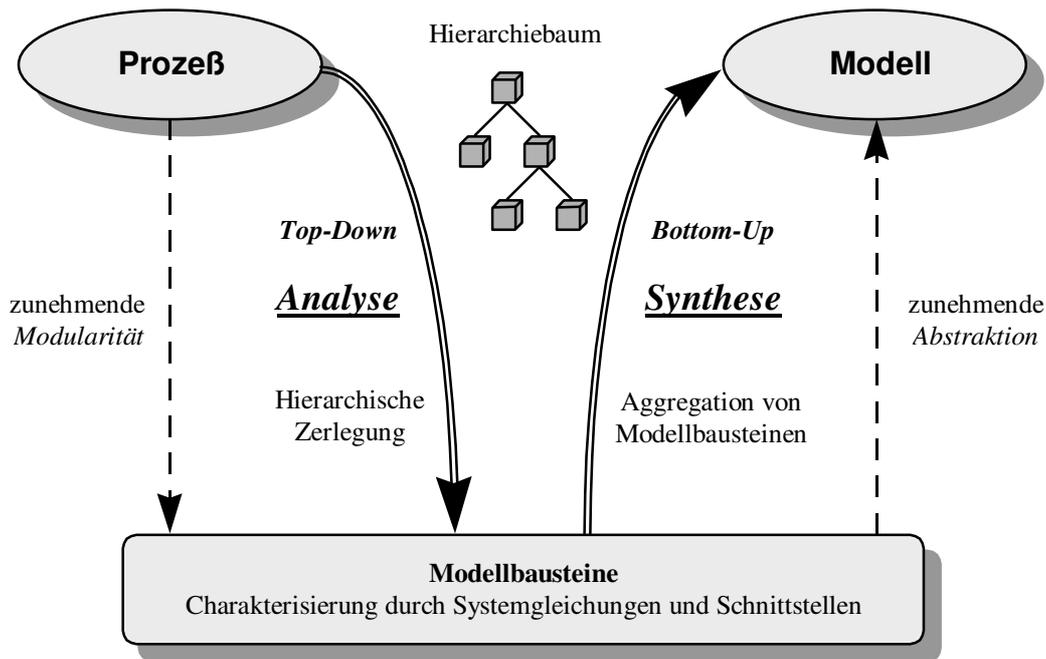
fahren), welche der kommerziellen Fortran-NAG-Bibliothek (Numerical Algorithm Group) entnommen wurden. Diese Lösungsverfahren eignen sich insbesondere für steife Systeme mit dünn besetzter Jacobi-Matrix. Die bei der objektorientierten Modellierung entstehenden Modelle besitzen durch die Verkopplung von Modellbausteinen typischerweise eine solche Struktur, so daß der Prozeßsimulator *Simex* ein optimales Werkzeug für die numerische Lösung der hier modellierten Prozesse darstellt.

### 3.1.2 Objektorientierte Modellbildung

Die Vorgehensweise der objektorientierten Modellbildung mit dem Werkzeug *CAMex* läßt sich in zwei wesentliche Schritte aufteilen (Bild 3.3):

Zunächst wird der zu analysierende komplexe Prozeß hierarchisch verfeinert und dadurch sukzessive in einfacher zu modellierende Teilkomponenten zerlegt. Durch diese Strukturierung entstehen einerseits Teilsysteme unterschiedlicher Detaillierungstiefe und andererseits deren Verknüpfungen untereinander. Abgegrenzte Teilsysteme können wiederum komplexe Prozeßkomponenten oder auch fein aufgelöste Subsysteme sein. Diese auch als *substantielle Abstraktion* bezeichnete topologische Strukturierung orientiert sich in der Regel am natürlichen Aufbau des Prozesses und kann durch einen *Hierarchiebaum* repräsentiert werden (Bild 3.4). Derart abgegrenzte Subsysteme, die sogenannten *Objekte*, werden durch eingehende Analyse ihrer physikalischen Phänomene separat modelliert, wobei Objekte mit ähnlichen Merkmalen zu *Klassen* zusammengefaßt werden. Durch Schnittstellen können diese Klassen mit anderen Objekten kommunizieren (Kapselung). Bei dieser *phänomenologischen Abstraktion* wird jedem isolierten Teilsystem und jeder Verknüpfung ein Satz von Modellgleichungen zugeordnet. Die Herleitung der Modellgleichungen erfolgt durch Bilanzierung der physikalischen Größen Masse, Energie und Impuls. Jeder Bilanzgleichungsterm steht für ein in einer bestimmten Weise zu beschreibendes oder gegebenenfalls zu vernachlässigendes Phänomen und kann weiter verfeinert werden, sofern er sich durch andere Variablen ausdrücken läßt. Werden Variablen nicht weiter verfeinert, stellen sie zwangsläufig entweder Zustandsgrößen, vorgegebene Eingangsgrößen oder Parameter dar. Ein so entstandener Satz an Modellgleichungen wird mit einer möglichst gründlichen Dokumentation versehen und schließlich als *Modellbaustein* bzw. *Modellklasse* in einer strukturierten Bibliothek abgelegt.

Die individuelle Vorgehensweise bei dieser *Top-Down-Analyse* eines komplexen Prozesses ist nicht eindeutig festgelegt und wird daher subjektiv durch die Intuition und das a priori-Wissen des jeweiligen Modellierers gesteuert. Als Modellierungsstrategie läßt sich nur allgemein empfehlen, daß grundsätzlich jeder einzelne Modellbaustein für sich aussagekräftig sein sollte und damit ein abgrenzbares Objekt oder Phänomen beschreibt.



**Bild 3.3:** Vorgehensweise bei der objektorientierten Modellbildung

In einem zweiten Schritt werden die so erstellten Modellbausteine rechnergestützt wieder zum Gesamtprozeß zusammengefügt. Diese *Bottom Up-Synthese* orientiert sich sinngemäß an dem im ersten Modellierungsschritt entstandenen Hierarchiebaum des Gesamtprozesses. Aus den implementierten Modellklassen werden konkrete Modellbausteine, sogenannte *Instanzen*, erzeugt und der Hierarchie entsprechend durch Verkopplung (*Aggregation*) zum Modell des Gesamtsystems zusammengefügt. Die Modellbausteine werden durch Verbindung der schon bei der Modellierung festgelegten physikalischen Schnittstellen der einzelnen Teilsysteme miteinander verknüpft.

Ein wichtiges Merkmal der objektorientierten Modellbildung ist die Verwendung spezieller Vererbungsmechanismen bei der *Bottom Up-Synthese*. Eine neue Modellklasse kann entweder durch Spezifizierung aus einer vorhandenen Klasse abgeleitet (*AKO = A Kind Of-Vererbung*) oder durch *Aggregation* aus mehreren bestehenden Modellklassen gebildet werden (*APO = A Part Of-Vererbung*).

Die Strukturierungsmethoden der substantiellen und phänomenologischen Abstraktion bilden zusammen mit der Klassenbildung sowie den speziellen Vererbungsmechanismen die Grundlage der Objektorientierung. Der Begriff steht ganz allgemein für anpassungsfähige und wiederverwendbare Komponenten (Software im weiteren Sinne). Einzelne Komponenten werden als Klassen implementiert, die Instanz einer Klasse bildet ein Objekt. Durch die topologische Strukturierung wird die *Modularität* eines Systems als wichtiger Aspekt der Objektorientierung explizit aufgezeigt. Zusätzlich wird die hierarchische Struktur des Systems, also die Anordnung seiner Subsysteme, durch einen Hierarchiebaum beschrieben.

Die entscheidenden Vorteile der objektorientierten Modellbildung lassen sich wie folgt angeben:

- Komplexe Prozesse gestalten sich *hierarchisch überschaubar* und werden so in gewissem Maße transparent.
- Modellbausteine lassen sich, ergänzt durch eine ausführliche Dokumentation, in *Modellbibliotheken* ablegen (hier z.B. eine Heizkörperbibliothek). So kann Modellierungswissen weitergegeben werden, was kürzere Entwicklungszeiten zur Folge hat.
- Der Aufbau und die Verwaltung von Modellbibliotheken unterstützt die *Wiederverwendbarkeit* implementierter Modelle. Der Aufwand bei einer späteren Modellbildung verwandter Prozesse (z.B. ähnlicher Heizkörpertypen) kann dadurch erheblich reduziert werden.
- *Rechnergestützte Werkzeuge* erlauben eine symbolische Verkopplung der Teilkomponenten und reduzieren dadurch den Modellierungsaufwand. Durch Vererbungsmechanismen kann die Struktur auch bei verkoppelten Systemen aufrecht erhalten werden. Zudem ermöglicht die Rechnerunterstützung die unmittelbare Anbindung eines effizienten Prozeßsimulators, die komfortable Verwaltung umfangreicher Modellbibliotheken sowie eine einfache Realisierung vielfältiger Möglichkeiten zur Ergebnisvisualisierung.

Mit der Verwendung des Modellierungswerkzeugs *CAMex* werden diese Vorteile und Eigenschaften auch für die in der Einleitung in Abschnitt 1.2 beschriebene Aufgabenstellung genutzt. Die weiteren Ausführungen in diesem Kapitel zur Modellbildung des Prüfstandes und seiner Komponenten orientieren sich daher eng an den zuvor beschriebenen objektorientierten Methoden und Konzepten.

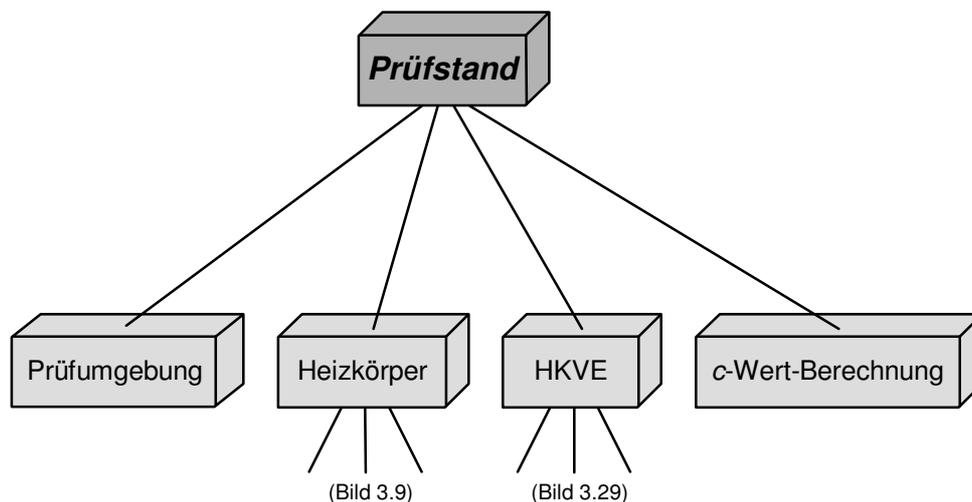
### **3.2 Konzeptionelle Modellbildung und Strukturierung**

Die Grundlage für eine umfassende Modellierung des Prozesses wird durch den Entwurf eines möglichst allgemeingültigen Modellkonzepts gebildet. Anhand dieser ersten Prozeßanalyse lassen sich allgemeine und wesentliche Eigenschaften und Attribute des späteren Modells spezifizieren. Weitere, in bezug auf die jeweiligen Teilsysteme charakteristische Modelleigenschaften werden bei der anschließenden Behandlung dieser Komponenten im Detail betrachtet (Abschnitte 3.3 bis 3.6).

Als erster wichtiger Schritt der konzeptionellen Modellbildung wird eine geeignete Strukturierung des Gesamtprozesses in Form einer hierarchischen Verfeinerung vorgenommen. Die dadurch entstehenden Teilsysteme können isoliert betrachtet und damit einfacher modelliert werden. Diese substantielle Abstraktion orientiert sich eng an der Gestalt des realen Prozesses, im konkreten Anwendungsfall also an der natürlichen Topologie eines Prüfstandes (Prüfkabine mit Heizkörper und Heizkostenverteiler).

### 3.2.1 Relevante Teilmodelle (Grobstrukturierung)

Wird der Aufbau einer Prüfsituation bezüglich seiner Topologie betrachtet, so läßt sich zunächst die Anordnung *Heizkörper mit Heizkostenverteiler* von der Prüfkabine, die als *Prüfumgebung* bezeichnet werden soll, trennen. Weiterhin ist es naheliegend, auch die Komponenten *Heizkostenverteiler* und *Heizkörper* voneinander zu lösen und getrennt zu betrachten. Schließlich kann auch die eigentliche *c-Wert-Berechnung* auf dieser Hierarchieebene als eigenständiges Teilsystem angesehen werden. Obwohl es sich dabei nicht um eine physikalisch existierende Komponente des Prüfstandes, sondern um eine Berechnungsvorschrift (Signalmodell) handelt, sollte diese doch vom System des Heizkostenverteilers getrennt modelliert werden. Diese zwar noch grobe, aber wichtige Grundstruktur des Gesamtsystems kann als oberste Hierarchieebene (erste Verzweigung) in einem Hierarchiebaum nach Bild 3.4 festgehalten werden.



**Bild 3.4:** Hierarchiebaum des Gesamtprozesses *Prüfstand* (erste Hierarchieebene)

Bei der Strukturierung eines komplexen Prozesses in einfachere Teilsysteme ist es neben der Identifikation der Subsysteme erforderlich, geeignete Schnittstellen zur Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen den Teilmodellen zu definieren.

### 3.2.2 Schnittstellen zwischen den Teilmodellen

Das durch die topologische Strukturierung isolierte Teilmodell der *Prüfumgebung* soll bereits an dieser Stelle etwas ausführlicher betrachtet werden. Die Prüfkabine steht als Prüfumgebung in direktem Wärmeaustausch mit dem Heizkörper und dem sich daran befindlichen Heizkostenverteiler. Diese Wechselwirkungen lassen sich durch folgende Einflußgrößen spezifizieren:

- *Raumlufttemperatur*. Heizkörper und Heizkostenverteiler geben im aufgeheizten Zustand Wärme durch Konvektion an die sie umgebende Luft ab. Dieser *Newtonsche Wärmeübergang* hängt direkt von der Lufttemperatur ab (wirksame Temperaturdifferenz).
- *Temperatur der raumumschließenden Wände*. Die wärmeren Oberflächen von Heizkörper und Heizkostenverteiler stehen im Strahlungswärmeaustausch mit den sie umgebenden, kälteren Wandflächen der Prüfkabine.

Diese beiden Systemtemperaturen liegen allgemein als örtlich verteilte Zustandsgrößen vor. Nach der Definition des Basiszustandes in Abschnitt 2.2.1 muß aber für die Lufttemperatur der Wert  $(20 \pm 2) \text{ }^\circ\text{C}$  eingehalten werden. Diese Forderung wird in der Praxis durch eine klimastabile Prüfkabine erfüllt. Es liegt daher nahe, für die Temperaturen der Raumluft und der Wände jeweils einen repräsentativen Mittelwert als konzentrierten Parameter und somit als eingeprägte Größe anzusetzen. Beide Temperaturwerte lassen sich mit dieser Annahme als *Eingangsgrößen* auffassen, mit deren Hilfe die Randbedingung für den geforderten Basiszustand direkt vorgegeben werden kann.

Weiterhin stellt auch der Anschluß des Heizkörpers an einen geeigneten Wärmeerzeuger einen Teil der Prüfumgebung dar. Dazu müssen folgende Größen des Wärmeerzeugers bzw. der Infrastruktur als Schnittstellen berücksichtigt werden:

- *Vorlauftemperatur* des Heizmediums. Diese Größe liegt nach der Definition direkt am Vorlaufanschluß des Heizkörpers an.
- *Massenstrom* des Heizmediums. Es wird davon ausgegangen, daß sich der Volumen- bzw. Massenstrom des Heizmediums durch den Heizkörper mittels geeigneter Armaturen wie Umwälzpumpe und Regelventil konstant vorgeben läßt.

Durch den Wärmeerzeuger werden diese Größen so vorgegeben, daß sich am Heizkörper der erforderliche Basiszustand einstellt (Norm-Heizmediumstrom). Für das Modell des Prüfstandes bzw. für die *c*-Wert-Messung ist es allerdings unerheblich, *wie* das Heizmedium erwärmt wird, es wird schlicht von einer *Bereitstellung* des erforderlichen Anschlusses (der physikalischen Schnittstelle) ausgegangen. Aus diesem Grund kann auf eine separate Modellierung des Wärmeerzeugers in der Prüfumgebung ganz verzichtet werden<sup>5</sup>. Die Schnittstellengrößen Vorlauftemperatur und Heizmedium-Massenstrom werden vielmehr ebenfalls als *Eingangsgrößen* interpretiert, mit denen der Betriebszustand des Heizkörpers und damit auch die Randbedingungen zum Erreichen des Basiszustands unmittelbar vorgegeben werden können.

---

<sup>5</sup> Das setzt allerdings voraus, daß der thermische Innenwiderstand des Wärmeerzeugers Null ist, d. h. die beiden Größen Vorlauftemperatur und Massenstrom belastungsunabhängig sind. Das ist gleichbedeutend mit einem hinreichend leistungsfähigen Wärmeerzeuger.

Alle Einwirkungen der *Prüfumgebung* auf die übrigen Komponenten Heizkörper, Heizkostenverteiler und  $c$ -Wert-Berechnung können folglich als Eingangsgrößen für diese Teilmodelle berücksichtigt werden, womit die Notwendigkeit eines separaten Teilmodells zur Beschreibung der Prüfumgebung entfällt. Da eine  $c$ -Wert-Messung im stationären Basiszustand durchgeführt wird, reduziert sich das Eingangsgrößenmodell auf einen konstanten *Eingangsvektor* mit den physikalischen Größen

*Vorlauftemperatur*  $T_V$  [°C],

*Heizmedium-Massenstrom*  $\dot{m}_H$  [kg/s],

*Raumlufttemperatur*  $T_L$  [°C] und

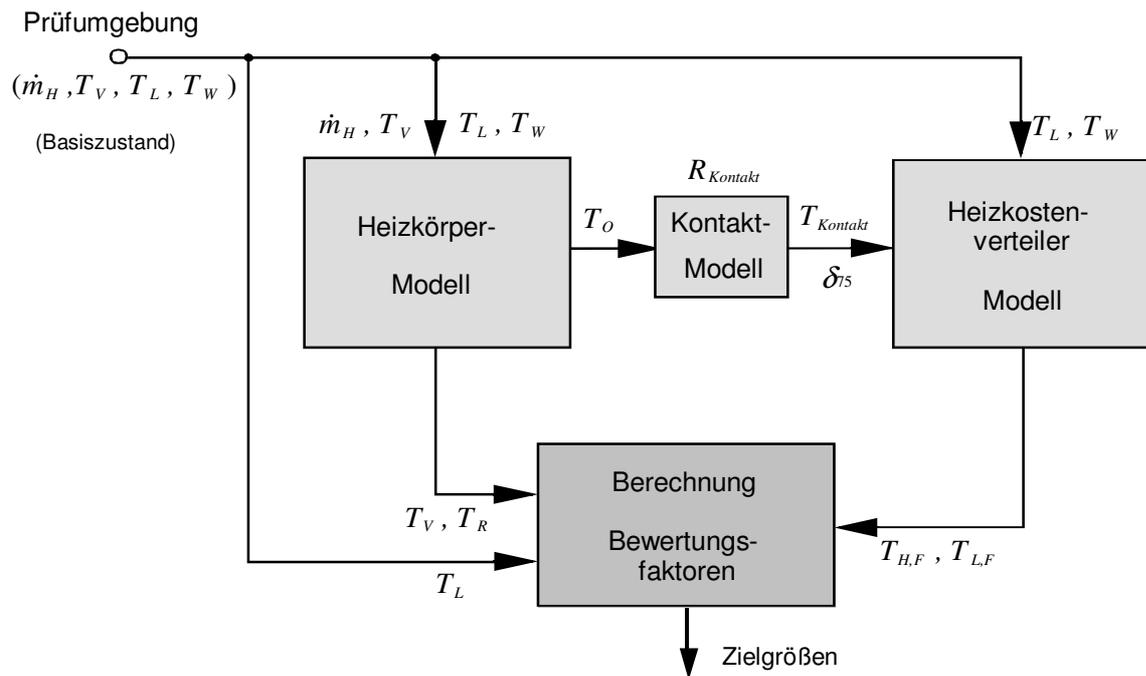
*Wandtemperatur*  $T_W$  [°C].

Als Schnittstelle zwischen den Teilmodellen *Heizkörper* und *Heizkostenverteiler* ist primär die Temperatur zu nennen, die sich im Bereich des Montageortes des Gerätes an der Heizkörperoberfläche einstellt (*Kontakttemperatur*  $T_K$ ). Hier besteht zwischen den beiden physikalischen Systemen ein wärmeleitender Kontakt. Da der Heizkostenverteiler gegenüber dem Heizkörper eine viel geringere Wärmekapazität und kleinere Abmessungen aufweist, wird durch das Anbringen des Gerätes das thermische Verhalten des Heizkörpers sicherlich kaum beeinflusst. Daher kann die thermische Wechselwirkung zwischen Heizkörper und Heizkostenverteiler als rückwirkungsfrei in bezug auf den Heizkörper angesehen werden. Weitere mögliche Einflüsse werden bei der Modellbildung des Heizkörpers im Abschnitt 3.4 noch genauer analysiert.

Bei der Orientierung an der Grobstrukturierung nach Bild 3.4 bleibt noch die Spezifizierung der Schnittstellen des letzten Teilmodells, der  $c$ -Wert-Berechnung. Wie bereits erwähnt, repräsentiert dieses Teilmodell die Berechnungsvorschrift für den  $c$ -Wert gemäß der Gleichung 2.7. Demnach sind hier als Schnittstellen zum Heizkörper die charakteristischen Temperaturwerte seines Betriebszustandes (Vorlauftemperatur  $T_V$  und Rücklauftemperatur  $T_R$ ), als Schnittstelle zum Heizkostenverteiler die Temperatur des heizkörperseitigen Fühlers  $T_{H,F}$  und des raumseitigen Fühlers  $T_{L,F}$  sowie als weitere Einflußgröße die Umgebungstemperatur  $T_L$  zu nennen (vgl. Abschnitt 2.1.3 zur  $c$ -Wert-Berechnung).

Den beiden Sensortemperaturen des Heizkostenverteilers, aus denen der  $c$ -Wert berechnet wird, kommt eine besondere Bedeutung zu. Sie bilden die Grundlage für eine spätere Validierung des Prüfstandes, da sich anhand von Prüfprotokollen konventioneller  $c$ -Wert-Messungen neben dem  $c$ -Wert auch simulierte und gemessene Temperaturwerte vergleichen lassen.

Zur Veranschaulichung der physikalischen Verknüpfungen zwischen den Teilmodellen läßt sich die Grundstruktur des Gesamtmodells für den virtuellen Prüfstand mit den jeweiligen Schnittstellengrößen in einem Wirkungsplan skizzieren (Bild 3.5).



**Bild 3.5:** Grundstruktur und Schnittstellen des Gesamtprozesses

An der Schnittstelle zwischen Heizkörper- und Heizkostenverteiler-Modell wird ein zusätzliches Modell zur Berücksichtigung des Kontaktes eingeführt. Auf die Notwendigkeit und die Herleitung wird später im Abschnitt 3.6.1 eingegangen.

### 3.2.3 Kennzeichnung relevanter Systemgrößen

Neben den Schnittstellengrößen existieren weitere, den Prozeß und seine Teilkomponenten kennzeichnende Größen, die in einem zweiten Schritt betrachtet werden sollen.

Als interessierende Größen am Heizkostenverteiler sind zusätzlich zu den Sensortemperaturen die *Temperaturen* und *Wärmeströme* am Gehäuse des Gerätes zu nennen, die den Wärmeaustausch mit der Umgebung (Luft, Wände und Heizkörper) kennzeichnen. Welche Rolle diese Prozeßgrößen einnehmen, wird in den detaillierten Ausführungen zur Modellbildung des Teilsystems „Heizkostenverteiler“ genauer betrachtet (Abschnitt 3.5). Tabelle 3.1 faßt alle relevanten Größen des Heizkostenverteilers zusammen.

Neben dem Heizkostenverteiler ist die zweite wesentliche Komponente des Prüfstands der Heizkörper, an dem der jeweilige *c*-Wert ermittelt werden soll. Als typische Prozeßgrößen eines Heizkörpers wird man in erster Linie seine *Temperatur* als verteilten Parameter nennen. Zu unterscheiden ist dabei zwischen den Temperaturen des Heizmediums, welche den jeweiligen Betriebszustand beschreiben, und den Temperaturen an der Heizkörperoberfläche. Für jeden Betriebszustand wird sich ein charakteristisches Temperaturfeld ausbilden.

**Tabelle 3.1:** Systemgrößen des Heizkostenverteilers

Typ	Bezeichnung	Formelzeichen
Schnittstellen	Temperaturen der Sensoren	$T_{H,F}, T_{L,F}$
	Kontakttemperatur	$T_K$
	Luft- und Wandtemperatur	$T_L, T_W$
Weitere wichtige Prozeßgrößen	Wärmeströme am Gehäuserand	$q_i$
	Temperaturen am Gehäuserand	$T_i$

Die Rücklauftemperatur ergibt sich in Abhängigkeit von der Wärmeleistung des Heizkörpers und stellt somit eine Ausgangsgröße dar. Für die Gesamtproblematik der Wärmekostenabrechnung ist diese abgegebene *Wärmeleistung*, aufgeteilt in Strahlungs- und Konvektionsleistung, eine weitere interessierende Prozeßgröße. Obwohl die Wärmeleistung für die  $c$ -Wert-Berechnung nicht unmittelbar benötigt wird, stellt sie doch eine wichtige Systemgröße dar, mit deren Hilfe das Teilmodell *Heizkörper* validiert werden kann. Abweichend vom Basiszustand können weitere Betriebszustände simuliert und deren Einflüsse auf die Heizkostenverteilung untersucht werden.

**Tabelle 3.2:** Systemgrößen des Heizkörpers

Typ	Bezeichnung	Formelzeichen
Schnittstellen	Vor- und Rücklauftemperatur	$T_V, T_R$
	Heizmedium-Massenstrom	$\dot{m}_H$
	Kontakttemperatur zum HKVE	$T_{O,75\%}$
	Luft- und Wandtemperatur	$T_L, T_W$
Weitere wichtige Prozeßgrößen	Temperaturprofil, allgemein	$T_{m,i}, T_{O,i}$
	Wärmeleistung (Konv. / Strahl.)	$\dot{Q}_K, \dot{Q}_S$
	Übertemperatur (log. gemittelt)	$\Delta T_{ln}$

Für das Teilmodell der  $c$ -Wert-Berechnung stellt die logarithmisch mittlere Heizmediumtemperatur nach Gleichung 2.8 eine weitere, wichtige Prozeßgröße der Systemkomponente Heizkörper dar (Tabelle 3.2).

### 3.2.4 Modellattribute

Auf dem Weg zum Modell des Prozesses ist es für die weitere Analyse erforderlich, die spezifischen Eigenschaften der entstehenden Modellbausteine festzulegen. Als Modellattribute werden beispielsweise geometrische Grundformen und ihre Lage in einem bestimmten Koordinatensystem definiert, Zustands- oder Ortsabhängigkeiten von Modellparametern festgelegt oder die Dimensionalität örtlich verteilter Zustände bestimmt.

Im Abschnitt 3.2.1 wurden für das Modell des Prüfstands als wesentliche Teilsysteme die Modellbausteine *Heizkörper* und *Heizkostenverteiler* herausgestellt, die es getrennt voneinander zu untersuchen gilt. Eine Spezifikation der Eigenschaftsmerkmale dieser beiden Modellbausteine wird ausführlich bei der Abstraktion der jeweiligen Modellklasse „Heizkörper“ und „Heizkostenverteiler“ später in diesem Kapitel durchgeführt.

Für das Teilsystem der *Prüfumgebung* wurde bereits festgehalten, daß die beschreibenden Zustandsgrößen als Eingangsgrößen in konzentriert parametrischer Form angenommen werden können. Eine Zuordnung der global wirkenden Größen in ein festes Koordinatensystem entfällt daher ebenso wie mögliche Zustandsabhängigkeiten, da es sich um eingeprägte Eingangsgrößen handelt.

### 3.2.5 Bewertung des Modellkonzepts

Durch die topologische Strukturierung des Gesamtmodells in *Heizkörper* und *Heizkostenverteiler* lassen sich die beiden Submodelle getrennt voneinander untersuchen, wobei die sequentielle Kopplung den Ablauf der Modellbildung bestimmt (Wirkrichtung in Bild 3.5). Der Aufwand für die Modellierung des Gesamtproblems bleibt somit überschaubar, da er sich im wesentlichen auf die Modellbildung dieser Teilkomponenten beschränkt. Der Detaillierungsgrad der Modellierung wird durch die Wahl der erforderlichen Schnittstellen sowie durch den Anwendungszweck festgelegt.

Eine wichtige Anforderung an das Modellkonzept des Prüfstands ist die leichte Übertragbarkeit auf andere Heizkörper- und Heizkostenverteiltertypen. Es muß sichergestellt werden, daß auch variable Bauformen dieser Komponenten ohne zusätzlichen Modellierungsaufwand in das Gesamtmodell integriert werden können. Dieser Forderung kommt in Anbetracht der enormen Heizkörpervielfalt eine sehr große Bedeutung zu.

Eine solche *Universalität* des Modellkonzepts kann dann erreicht werden, wenn man es schafft, Heizkörper mit ähnlichen Merkmalen durch eine gemeinsame Modellklasse zu beschreiben. Die Verschiedenartigkeit aller möglichen Heizkörpervarianten reduziert sich durch eine solche *Klassifizierung* auf nur wenige Modellklassen, mit denen sich jeweils durch

Spezifizierung und Variation charakteristischer Parameter individuelle Heizkörpertypen beschreiben lassen. Ergänzt wird das Modellkonzept durch den Aufbau und die Verwendung entsprechender Modellbibliotheken zur übersichtlichen Implementierung und Verwaltung der einzelnen Modellklassen.

Durch diese Klassifizierung, durch die Trennung der Prüfanordnung in separate Teilmodelle sowie durch die Festlegung geeigneter Schnittstellen wird sichergestellt, daß die Anzahl der insgesamt zu modellierenden Module trotz der enormen Vielfalt an möglichen Kombinationen zwischen Heizkörper und Heizkostenverteiler überschaubar bleibt.

Das Teilsystem *Heizkörper* bildet aufgrund seiner Variantenvielfalt und Komplexität den Schwerpunkt bei der Modellbildung. In analoger Vorgehensweise zum Gesamtsystem wird dieses Submodell nun bei der substantiellen Abstraktion weiter strukturiert und analysiert. Im zweiten Schritt werden anschließend im Rahmen der phänomenologischen Abstraktion zwei verschiedene Modellansätze vorgestellt und miteinander verglichen, um schließlich eine geeignete mathematische Beschreibung für das Systemverhalten des Heizkörpers abzuleiten.

### 3.3 Substantielle Abstraktion

Die weiteren Ausführungen der Arbeit beschränken sich zunächst auf die beiden gängigsten Heizkörpertypen

- *Plattenheizkörper* und
- *Gliederheizkörper*.

Im Rahmen der substantiellen Abstraktion wird nun untersucht, wie diese beiden Heizkörpertypen durch topologische Zerlegung sinnvoll strukturiert werden können. Wegen seiner schon äußerlich ausgeprägten Bauart soll zunächst der *Gliederheizkörper* betrachtet werden.

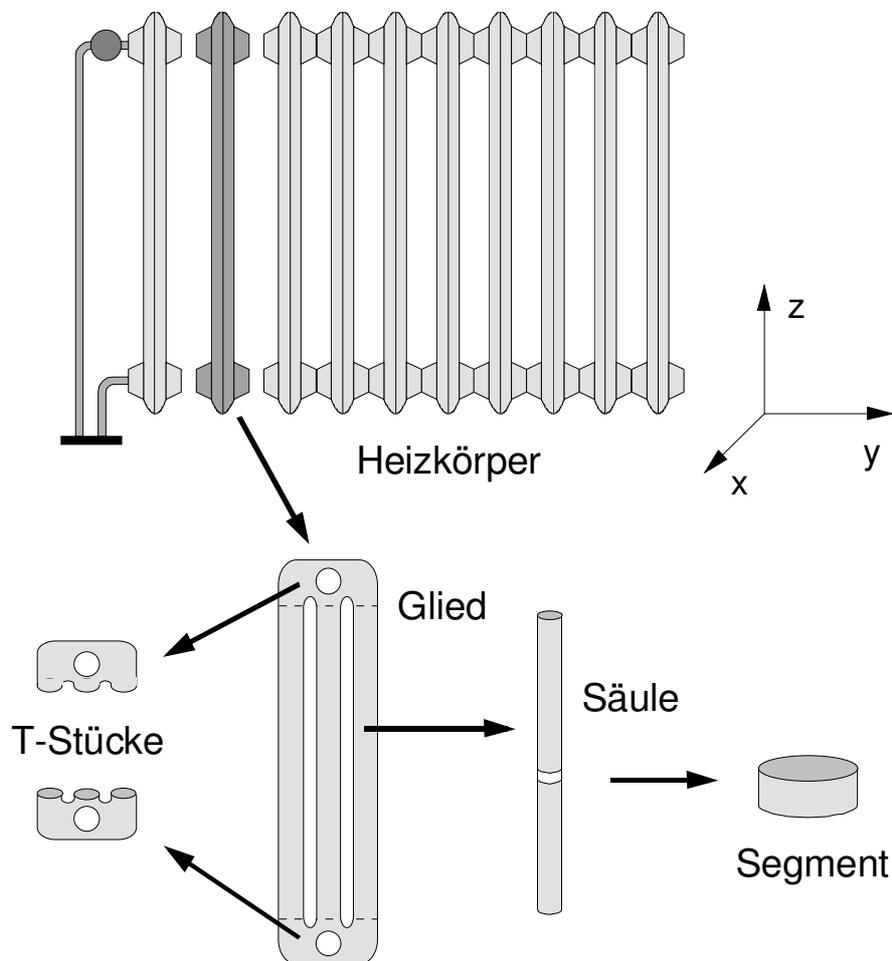
#### Substantielle Abstraktion des Gliederheizkörpers

Alle Gliederheizkörper setzen sich aus hintereinandergereihten *Gliedern* zusammen, die entweder miteinander verschweißt oder zusammengenippelt sind. Die einzelnen Glieder werden vom Heizmedium vollständig durchflossen. Es liegt also nahe, als erstes das Verhalten eines einzelnen Gliedes zu analysieren. Ein solches Glied besteht im wesentlichen – je nach Bautiefe – aus bis zu sechs hintereinander angebrachten wasserführenden Kanälen, welche allgemein als *Säulen* bezeichnet werden.

Diese Säulen sind je nach Heizkörpertyp entweder baulich miteinander verbunden (z.B. Gußradiatoren, DIN-Stahlradiatoren) oder offen nebeneinander ausgeführt (z.B. Stahlröhrenradiatoren). Einen Überblick über die Bauart verschiedener Radiortypen und anderer Raumheizflächen gibt z.B. [BUD94].

Bei eingehender Betrachtung der Säulen verschiedener Gliederheizkörper fällt auf, daß je nach Heizkörpertyp der Fließkanalquerschnitt unterschiedlichste Geometrieformen aufweisen kann. Während man bei Gußradiatorn keine einheitliche Querschnittsform vorfindet, besitzen DIN-Stahlradiatorn einen „spitzovalen“ und Stahlröhrenradiatorn einen kreisrunden Säulenquerschnitt. Auch hier liefert [BUD94] einen Überblick.

Eine Säule bzw. ein Heizrohr läßt sich topologisch noch weiter verfeinern, indem man es durch eine Stufendiskretisierung in gleiche „Scheiben“ der Höhe  $\Delta z$  unterteilt. Diese als *Segmente* bezeichneten Abschnitte bilden an dieser Stelle zunächst die unterste Hierarchieebene im Rahmen der substantiellen Abstraktion und damit den Ausgangspunkt für die nachfolgende phänomenologische Abstraktion. Bild 3.6 verdeutlicht die Schritte der topologischen Strukturierung.



**Bild 3.6:** Topologische Strukturierung eines Gliederheizkörpers

Die Feinheit dieser Zerlegung in  $z$ -Richtung, also die Anzahl  $N_A$  der Rohrsegmente je Säule der Bauhöhe  $B_H$ , wird durch den späteren Anwendungszweck (vertikale Auflösung des Temperaturprofils) individuell als Modellparameter vorgegeben. Im Gegensatz dazu bestimmt

die jeweilige Topologie eines Gliederheizkörpers durch Aufteilung in einzelne Glieder und Säulen die Anzahl dieser Komponenten in  $x$ -Richtung ( $N_S$  Säulen) und in  $y$ -Richtung ( $N_G$  Glieder).

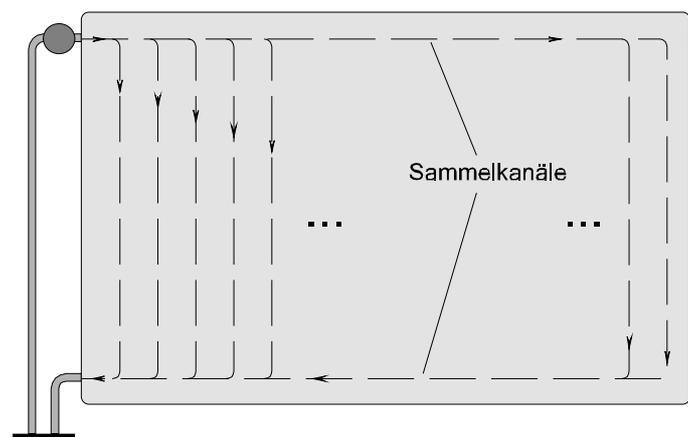
Bei der Zerlegung nach Bild 3.6 treten als weitere Elemente noch die sogenannten *T-Stücke* auf. Diese sollen näherungsweise so modelliert werden, daß sie selbst keine Wärme abgeben, sondern nur die Aufteilung bzw. Zusammenführung des Heizmediumstromes nachbilden.

Als zusätzliche Komponente des Gesamtprozesses „Heizkörper“ könnte generell auch das am Vorlauf angebrachte Heizkörperventil angesehen werden, welches meistens als Thermostatventil ausgeführt ist. Da jedoch der Heizmedium-Massenstrom bereits als aufgeprägte Eingangsgröße vorgegeben wird, entfällt die Notwendigkeit, das Heizkörperventil zusätzlich zu modellieren<sup>6</sup>.

### Substantielle Abstraktion des Plattenheizkörpers

Bei der Strukturierung eines Gliederheizkörpers konnte man sich direkt an der vorgegebenen Topologie orientieren, welche auch die Wasserführung durch den Heizkörper bestimmt. Dies scheint bei Betrachtung eines Plattenheizkörpers zunächst nicht der Fall zu sein, da diese Heizkörperausführung optisch ein geschlossenes Flächenelement darstellt.

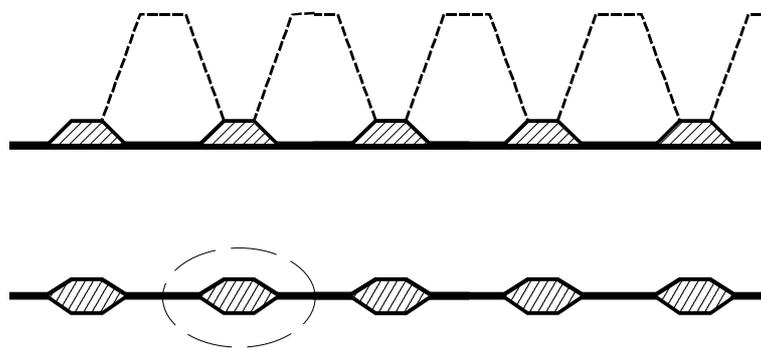
Versucht man einen Plattenheizkörper mit glatter Oberfläche zu strukturieren, so stellt sich in Anlehnung an den Gliederheizkörper zunächst die Frage, wie das Heizmedium innerhalb des Heizkörpers geführt wird. Selbst wenn eine ebene Vorderfront vorhanden ist, wird man meist feststellen, daß die Rückseite der Heizplatte nicht ebenfalls glatt, sondern häufig senkrecht profiliert ist.



**Bild 3.7:** Wasserführung im Plattenheizkörper

<sup>6</sup> Würde man das Heizkörperventil berücksichtigen, so wäre als Eingangsgröße die Vorgabe der Druckdifferenz des Heizmediumstroms vorzugeben, aus der sich in Abhängigkeit von der Ventilstellung ein resultierender Massenstrom einstellen würde (fluidische Last).

Bei den meisten Plattenheizkörpern wird also das Wasser ähnlich wie beim Gliederheizkörper durch senkrechte Kanäle geleitet (abgesehen vom oberen und unteren waagerechten Sammelkanal, siehe Bild 3.7). Diese senkrecht ausgeprägten Wasserkanäle entstehen häufig durch Aufschweißen einer profilierten Halbschale auf eine glatte oder ebenfalls entsprechend profilierte vordere Halbschale (Bild 3.8). Zur Erhöhung der Heizleistung bei gleicher Frontfläche können auf den rückseitigen wasserführenden Kanälen zusätzliche Bleche angeschweißt sein (Konvektionsblechreihen, in Bild 3.8 gestrichelt dargestellt). Durch die Vergrößerung der Oberfläche und die besondere Formgebung (Schachtwirkung bzw. „Kamineffekt“) wird die konvektive Wärmeabgabe des Plattenheizkörpers deutlich begünstigt.



**Bild 3.8:** Schnitt durch einen einseitig profilierten Plattenheizkörper mit Konvektionsblechen (oben) und durch einen beidseitig profilierten Plattenheizkörper (unten)

Nimmt man den theoretischen Fall an, daß das Wasser zwischen zwei parallelen Platten ohne ausgeprägte Kanäle frei hindurchströmen kann, so könnte aufgrund einer „fehlenden topologischen Ausprägung“ zunächst keine sinnvolle Zerlegung angegeben werden. Hier wäre eine Analyse des Strömungsverhaltens der Wasserschicht zwischen Zu- und Ablauf erforderlich (vergleichbar mit der feldtheoretischen Analyse der Stromverteilung in einer elektrisch leitenden Platte). Da solche Heizkörper aber in der Praxis kaum anzutreffen sind, wird die Untersuchung von Plattenheizkörpern auf solche Ausführungen mit vertikaler Wasserführung beschränkt.

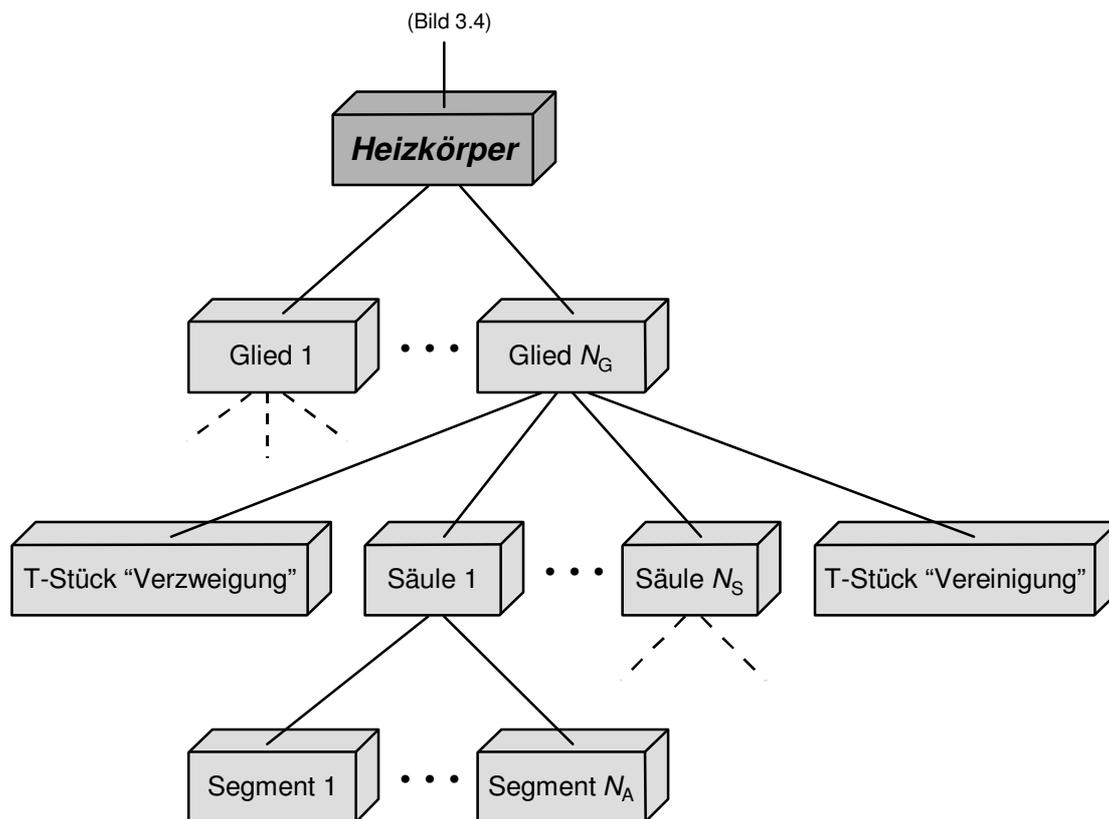
Zur Steigerung der Heizleistung werden häufig mehrere Plattenreihen mit oder ohne Konvektionsblechen (wie in Bild 3.8 skizziert) hintereinander angebracht. Für die theoretische Analyse sollen zunächst nur *einreihige* Plattenheizkörper (d.h. Heizkörper, die nur aus *einer* Platte bestehen) ohne Konvektionsbleche betrachtet werden. In der einschlägigen Literatur werden diese Heizkörper mit dem Zusatz *Typ 10* gekennzeichnet (1. Ziffer: Anzahl der Platten, 2. Ziffer: Anzahl der Konvektionsblechreihen) [BUD94].

Bei der Frage nach einer geeigneten Strukturierung des Plattenheizkörpers wäre zunächst eine Unterteilung in wasserführende Bereiche (Kanäle) und nicht wasserführende Bereiche

(Sicken) denkbar. Beschreibt man nach einer Stufendiskretisierung eines Kanals jedes Element durch *einen* Temperaturwert, so würde sich die Temperatur eines Sicken-Elementes näherungsweise als Mittelwert der beiden benachbarten Kanaltemperaturen ergeben. Aufgrund des relativ kurzen Abstandes (die Breite von Kanal und Sicke beträgt z.B. bei DIN-Plattenheizkörpern 30 mm) und der guten Wärmeleitfähigkeit des Heizkörpermaterials kann jedoch auf eine separate Berücksichtigung der Sicken als Teilmodell verzichtet werden.

Aus diesen Gründen wird der (einreihige) Plattenheizkörper durch Orientierung an den senkrechten Wasserkanälen in unmittelbarer Analogie zum Gliederheizkörper in Säulen unterteilt. Eine Säule wird dabei so definiert, daß sie einen Wasserkanal und zu den Seiten jeweils eine Steghälfte einschließt (eingekreister Bereich in Bild 3.8 unten).

Aufgrund dieser gleichartigen Strukturierung für die beiden Typen *Glieder-* und *Platten-*heizkörper läßt sich für die topologische Abstraktion nach Bild 3.4 ein verallgemeinerter Hierarchiebaum für das Teilsystem *Heizkörper* aufstellen.



**Bild 3.9:** Verallgemeinerter Hierarchiebaum des Teilsystems *Heizkörper*

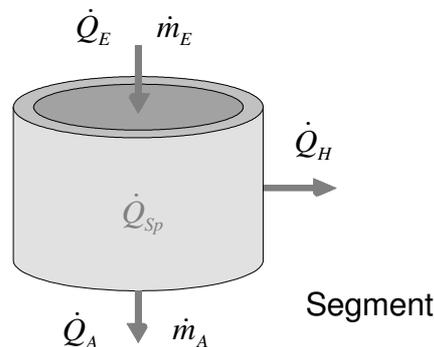
In der untersten Hierarchieebene verbleibt als kleinstes Subsystem das (Säulen-) *Segment*. Dieser Baustein soll auf substantieller Ebene nicht mehr weiter zerlegt werden, so daß das Modell eines Segmentes einen *elementaren* bzw. *atomaren Modellbaustein* darstellt. Die

sogenannten *T-Stücke* bilden weitere elementare Modellbausteine, die strukturell nicht weiter zerlegt werden. Sie vervollständigen eine oder mehrere Säulen zu einem kompletten Heizkörperglied.

### 3.4 Phänomenologische Abstraktion

Auf den ersten Schritt der *substantiellen* Abstraktion folgt bei der Top-Down-Analyse der objektorientierten Modellbildung der zweite Schritt der *phänomenologischen* Abstraktion. Dabei werden die Modellgleichungen der zuvor spezifizierten elementaren Modellbausteine der untersten Hierarchieebene durch eingehende Analyse der inneren Vorgänge, also ihrer *physikalischen Phänomenologie*, aufgestellt.

Bei abgeschlossenen physikalischen Systemen können die Modellgleichungen zur Beschreibung der inneren Vorgänge grundsätzlich durch Anschreiben der Erhaltungssätze für *Masse*, *Impuls* und *Energie* aufgestellt werden. Anhand der folgenden Grafik, welche die physische Ausdehnung eines verallgemeinerten Segments verdeutlicht (unabhängig von der dargestellten kreisrunden Querschnittsform), sollen diese Erhaltungsgleichungen hergeleitet werden.



**Bild 3.10:** Wärmestrombilanz an einem Heizkörper-Segment

In bezug auf den betrachteten Prozeß Heizkörper können zunächst folgende einschränkende und damit vereinfachende Annahmen getroffen werden:

- Für das Heizmedium wird Wasser als inkompressibles Fluid angenommen<sup>7</sup>.
- Alle Stoffwerte werden trotz mehr oder weniger ausgeprägter Temperaturabhängigkeit für den Gültigkeitsbereich des Basiszustandes als konstant angenommen. Die verwendeten Zahlenwerte können Anhang B entnommen werden. Einzig die Dichte der Luft muß von

<sup>7</sup> In manchen Heizungsanlagen (z.B. bei Fernwärmenutzung) wird auch Wasserdampf als Heizmedium eingesetzt. In Anlehnung an die *c*-Wert-Messung soll jedoch nur Wasser als Heizmedium betrachtet werden.

dieser Annahme ausgeschlossen werden, da sich bei konstanter Dichte keine freie Konvektion einstellen könnte (siehe Abschnitt 3.4.2).

Die Systemgrenzen des physikalischen Gebildes *Segment* werden gemäß Bild 3.10 durch die obere und untere Schnittfläche (Stirnflächen) sowie durch die äußere Mantelfläche (Oberfläche) beschrieben.

### Massenerhaltung (Kontinuität)

Bedingt durch diese Systemgrenzen kommt eine Massenbilanzierung nur für das Heizmedium in Betracht. Bei dem Prozeß „Heizkörper“ handelt es sich um ein hydraulisch geschlossenes System. Die *Massenbilanz* dieses Systems besagt, daß das am Vorlaufanschluß einströmende Heizmedium am Rücklaufanschluß wieder ausströmen muß, die beiden Massenströme daher gleich sind. Analog gilt demnach auch für das einzelne Segment des Heizkörpers die Massenbilanz

$$\text{zufließende Masse} - \text{abfließende Masse} = 0$$

Durch zeitliche Ableitung der Massen erhält man für den Massenstrom durch ein Segment bzw. durch eine Säule (Index *S*) die triviale Bilanzgleichung

$$\dot{m}_E = \dot{m}_A = \dot{m}_S \quad . \quad (3.1)$$

Aufgrund des inkompressiblen Heizmediums gilt diese Beziehung sowohl für den stationären Zustand als auch bei veränderlichen Massenströmen (instationärer Zustand).

### Impulserhaltung (Bewegung)

Wegen der Inkompressibilität des Heizmediums gilt auch hier der einfache Impulssatz

$$m_E v_E = m_A v_A \quad , \quad (3.2)$$

er liefert jedoch keinen informativ neuen Beitrag in bezug auf das Systemverhalten.

Da die Untersuchung des thermischen Verhaltens der Heizkörper im Vordergrund steht, sollen die hydrodynamischen Vorgänge beim Fließen des Heizmediums nicht im Detail analysiert werden. Es stellt sich hier aber auch für die Berücksichtigung der „T-Stücke“ die Frage, wie sich das am Vorlauf einströmende Wasser innerhalb des Heizkörpers auf die Glieder und Säulen aufteilt. In der Literatur (z.B. in [ADU84-2]) wird allgemein festgestellt, daß bei nicht zu großen Baulängen (unter 3 m) ein möglicher Temperaturabfall in horizontaler Richtung vernachlässigt werden kann. Im Hinblick auf die Heizkostenverteilung kommt die Tatsache hinzu, daß Heizkostenverteiler bei Baulängen kleiner als 3 m in der Mitte der Baulänge montiert werden und somit aus meßtechnischer Sicht eine Mittelung des horizontalen Temperaturprofils stattfindet. Aus diesen Gründen wird daher weiterhin angenommen:

- Das durch einen Heizkörper strömende Wasser teilt sich bei nicht zu kleinen Massenströmen gleichmäßig auf die einzelnen Glieder und Säulen bzw. wasserführenden Kanäle auf.

In diesem Zusammenhang interessiert auch der Strömungszustand in einem Kanal bzw. einer Säule. Im folgenden wird daher kurz untersucht, ob das Wasser *laminar* oder *turbulent* durch den Heizkörper fließt. Zur Beurteilung des Strömungszustandes einer Rohrströmung wird allgemein die dimensionslose *Reynoldszahl*

$$Re = \frac{\bar{u}D}{\nu} \quad (3.3)$$

verwendet, wobei  $D$  den Rohrdurchmesser,  $\bar{u}$  die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und  $\nu$  die kinematische Viskosität bezeichnet. Für den Umschlag des Strömungszustandes wird häufig eine kritische Reynoldszahl von  $Re_{kr} = 2300$  angegeben [MER87]. Dieser Grenzwert besagt allerdings nur, daß bei ihrer Unterschreitung von einer laminaren Strömung ausgegangen werden kann (sofern die Strömung nicht ständig gestört wird). Bei größeren Reynoldszahlen kann eine Rohrströmung weiterhin laminar verlaufen, würde aber bei Einbringen einer Störung in den turbulenten Zustand übergehen.

Ausgehend von der kritischen Reynoldszahl läßt sich bei bekannter Querschnittsgeometrie eine resultierende kritische Strömungsgeschwindigkeit angeben. Bei einem Rohrdurchmesser von beispielsweise  $D = 21$  mm (für einen DIN-Stahlröhrenradiator) und der kinematischen Viskosität  $\nu = 0,55 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s für Wasser bei 50 °C ergibt sich eine kritische Geschwindigkeit von  $\bar{u}_{kr} \approx 60$  mm/s. In der Praxis stellt sich die maximale Fließgeschwindigkeit bei Heizkörpern großer Bauhöhe und bei größtmöglichem Massenstrom ein. Anhand der technischen Daten verschiedener Hersteller lassen sich für den Normzustand mittlere Strömungsgeschwindigkeiten von  $\bar{u} \leq 6$  mm/s für  $\dot{m} \leq \dot{m}_N$  errechnen. Aufgrund dieser theoretischen Überlegungen kann also weiterhin angenommen werden:

- Das Heizmedium strömt im Basiszustand laminar durch die Heizkörperkanäle.

Praktisch wirken aber durch den Zulauf, das Ventil und die Verzweigungen viele Störungen auf die Strömung ein. Außerdem kann es innerhalb der laminaren Rohrströmung durch Abkühlung des Wassers an der Rohrwand zu Verwirbelungen bzw. zu Rückströmungen durch zusätzliche Auftriebsströmungen kommen.

Zur Abschätzung möglicher Einflüsse durch Ausbildung eines laminaren Strömungsprofils und Wärmeleitung innerhalb der Strömung wurde im Rahmen einer Studienarbeit eine weitere substantielle Verfeinerung des Modellbausteins *Segment* vorgenommen [SIE97]. Für den Spezialfall eines kreisrunden Säulenquerschnitts wurde eine radiale Ortsdiskretisierung sowohl im Inneren einer Säule für das Heizmedium als auch für die Säulenwand durch-

geführt. Aufgrund des bei laminarer Strömung bekannten parabelförmigen Strömungsprofils (Maximale Geschwindigkeit in der Rohrmitte und Haften an der Rohrwand) zeigen die Ergebnisse der Arbeit das zu erwartende Temperaturgefälle von der Rohrmitte hin zur Rohrwand. Diese Erkenntnisse gelten, wie bereits einschränkend erwähnt, lediglich bei einem kreisrunden Fließkanalquerschnitt, bei beliebigen Querschnittsformen kann eine detaillierte Analyse der inneren Strömungsverhältnisse nicht mehr stattfinden. Aus diesem Grunde wird der innere Wärmeübergang im Abschnitt 3.4.3 mittels eines halbempirischen Ansatzes beschrieben.

### Energieerhaltung

Durch Anschreiben der *Energiebilanzgleichung* läßt sich auf das Temperaturverhalten eines einzelnen Segmentes schließen:

$$\text{gespeicherte Wärme} = \text{zufließende Wärme} - \text{abfließende Wärme} - \text{abgegebene Wärme}$$

Betrachtet man direkt die zeitliche Ableitung dieser Gleichung, so folgt eine Bilanz für die Wärmeströme bzw. Wärmeleistungen

$$\dot{Q}_{Sp} = \dot{Q}_E - \dot{Q}_A - \dot{Q}_H \quad (3.4)$$

mit den Bezeichnungen gemäß Bild 3.10. Diese grundlegende Bilanzgleichung für ein Säulen-segment wird bei der weiteren phänomenologischen Abstraktion sukzessive verfeinert, indem jeder Bilanzgleichungsterm getrennt analysiert wird.

Zunächst sei der Speicherterm der Bilanzgleichung betrachtet. Im *stationären* Fall, der für eine *c*-Wert-Prüfung vorausgesetzt wird, ist die im Segment gespeicherte Wärme konstant, so daß die Änderung Null ist und damit die Ableitung dieses Terms verschwindet:

$$\dot{Q}_{Sp} = 0 \quad \text{stationär (c-Wert-Messung)} \quad (3.5)$$

Obwohl für die *c*-Wert-Prüfung nicht relevant, soll dennoch kurz auf den *instationären* Fall eingegangen werden, der für eine weiterführende Verwendung der Modellklasse Heizkörper interessant sein könnte. Wird davon ausgegangen, daß die Temperaturwerte des Heizmediums (Index *W*) und der Heizkörperwand (Index *H*) in einem Segment nur geringfügig voneinander abweichen, läßt sich bei Kenntnis der beteiligten Massen und ihrer spezifischen Wärmekapazitäten  $c_p$  der in einem Segment gespeicherte Wärmestrom durch den Ausdruck

$$\dot{Q}_{Sp} = (m_W c_{p,W} + m_H c_{p,H}) \frac{dT_m}{dt} \quad \text{instationär} \quad (3.6)$$

mit der mittleren Segmenttemperatur  $T_m$  annähern. Eine derartige Zusammenfassung der *Speichermassen* ist aufgrund der gleichförmigen zeitlichen Änderung der Temperatur und wegen des vergleichsweise guten Wärmeüberganges zwischen dem Heizmedium und der Heizkörperwand in erster Näherung vertretbar. Wird der Speicherterm in dieser Form berücksichtigt, kann auch das dynamische Heizkörperverhalten (Aufheiz- und Abkühlvorgänge) simuliert werden.

Die nächsten Bilanzgleichungsterme nach Gleichung (3.4) sind die durch die Segmentgrenzen über das Heizmedium zu- und abfließenden Wärmemengen. Der zufließende Wärmestrom setzt sich aus dem Massenstrom und der Eintrittstemperatur des Heizmediums in das Segment nach der Beziehung

$$\dot{Q}_E = \dot{m}_S c_{p,W} T_E \quad (3.7)$$

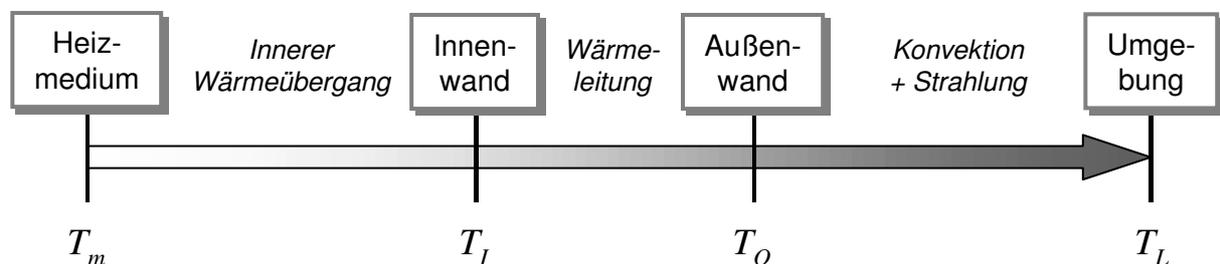
zusammen, ebenso folgt für den austretenden Wärmestrom

$$\dot{Q}_A = \dot{m}_S c_{p,W} T_A \quad (3.8)$$

Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt somit die dem betrachteten Säulensegment durch das Heizmedium zugeführte Wärmeleistung

$$\dot{Q}_{Zu} = \dot{Q}_E - \dot{Q}_A = \dot{m}_S c_{p,W} (T_E - T_A). \quad (3.9)$$

Schließlich fehlt bei der Analyse der einzelnen Bilanzgleichungsterme gemäß Gleichung (3.4) noch der Term zur Berücksichtigung der von einem Segment an die Umgebung abgegebenen Wärmeleistung  $\dot{Q}_H$ .



**Bild 3.11:** Temperaturabfall durch Wärmeübergangsphänomene

Dieser Wärmestrom führt zu einem Temperaturabfall entlang der „thermischen Strecke“ zwischen Heizmedium, Heizkörperwand und Umgebung, wie in Bild 3.11 verdeutlicht wird.

Es zeichnet sich ab, daß der größte Modellierungsaufwand in der phänomenologischen Betrachtung des Wärmedurchgangs vom Heizmedium an die äußere Umgebung liegt. Die von einem diskreten Segment abgegebene Wärmeleistung (Heizleistung) spielt demnach eine zentrale Rolle. In Anlehnung an die Abbildung werden in den nachfolgenden Abschnitten die Phänomene *Wärmeleitung*, *innerer Wärmeübergang*, *Konvektion* sowie *thermische Strahlung* einzeln betrachtet. Das Zusammenwirken dieser Phänomene beschreibt insgesamt den *Wärmedurchgang* vom Heizmedium zur Umgebung.

### 3.4.1 Wärmeleitung durch die Wand

Durch das Temperaturgefälle zwischen der Innenwand (Temperatur  $T_I$ ) und der äußeren Oberfläche des Segmentes (Temperatur  $T_O$ ) bildet sich ein Wärmestrom durch die Säulenwand aus. Dieses Phänomen der *Wärmeleitung* wird durch das Fouriersche Grundgesetz

$$\dot{q} = -\lambda_H \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.10)$$

beschrieben, wobei die Stoffkonstante  $\lambda_H$  die *Wärmeleitfähigkeit* [W/(m<sup>2</sup>K)] des Heizkörpermaterials (Metall) charakterisiert. Der gesamte abgegebene Wärmestrom  $\dot{Q}_H$  fließt durch die umschließende Wand des wasserführenden Kanals, so daß nach der Integration über die Wanddicke (Ortskoordinate  $x$ ) die Beziehung

$$\dot{Q}_H = \lambda_H \frac{\bar{A}}{d} (T_I - T_O) \quad (3.11)$$

mit  $\bar{A}$  als der mittleren Mantelfläche der Dicke  $d$  folgt. Bei geeigneter Mittelung von  $\bar{A}$  kann die Beziehung auch für die Wärmeleitung durch gekrümmte Oberflächen herangezogen werden. Auf phänomenologischer Ebene bilden die beiden Randtemperaturen  $T_I$  und  $T_O$  als *Transvariablen* zusammen mit dem Wärmestrom als *Pervariabler* die physikalischen Schnittstellen zu den angrenzenden Phänomenen (innerer und äußerer Wärmeübergang) [DÖR98].

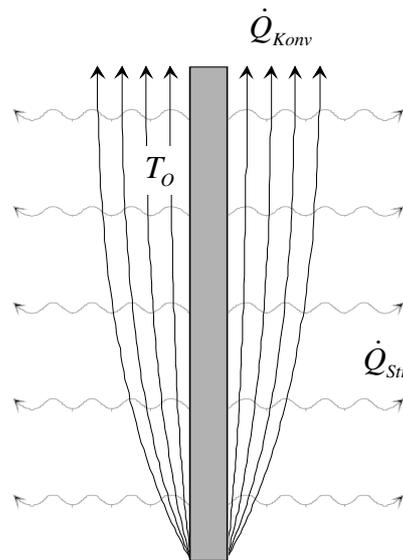
Das Phänomen des äußeren Wärmeübergangs durch Konvektion ist sehr komplex und stellt in diesem Zusammenhang neben dem inneren Wärmeübergang die größte Herausforderung an die Modellbildung dar. In den beiden folgenden Abschnitten sollen zwei mögliche Modellansätze zur Berücksichtigung der Wärmeübertragung eines Heizkörpers an seine Umgebung hergeleitet und anschließend verglichen werden.

### 3.4.2 Äußerer Wärmeübergang – Physiknaher Modellansatz

Es sei vorangestellt, daß es praktisch unmöglich ist, das Phänomen der Wärmeübertragung eines Heizkörpers an seine Umgebung physikalisch exakt zu beschreiben. Angesichts der Vielfalt an Heizkörpern und ihren möglichen Einsatzbedingungen ist dies auch gar nicht

sinnvoll. Vielmehr soll ein physikalisch motivierter Ansatz gefunden werden, der unter Berücksichtigung zweckmäßiger Näherungen die Wärmeabgabe von Heizkörpern hinreichend genau beschreibt.

Ein Heizkörper gibt an seine Umgebung Wärme grundsätzlich durch die beiden physikalischen Phänomene *Konvektion* und *Strahlung* ab (Bild 3.12). Diese beiden Vorgänge sollen im folgenden detailliert untersucht werden.



**Bild 3.12:** Wärmeabgabe durch Konvektion und Strahlung

Die Phänomene der Wärmeübertragung eines Heizkörpers werden nur für den stationären Beharrungszustand betrachtet, was auch der Anforderung an den Prüfstand (stationärer Basiszustand) gerecht wird. Zum transienten Verhalten der Wärmabgabe kann zudem festgestellt werden:

- Der Strahlungswärmeaustausch findet ohne zeitliche Verzögerung statt.
- Die Wärmeabgabe durch Konvektion kann wegen des relativ langsamen Aufheizverhaltens eines Heizkörpers als stationär angesehen werden.

### Wärmeübertragung durch Konvektion

An der senkrechten Front einer beheizten Platte findet aufgrund des Temperaturgefälles ein Ausgleichsvorgang zwischen der wärmeren Heizkörperoberfläche und der kühleren umgebenden Luft statt. Zunächst erwärmen sich wandnahe Luftteilchen durch die unmittelbare Wärmeleitung zwischen Festkörper und Fluid. Als Folge dieser Erwärmung entstehen Dichteunterschiede, die unter Einwirkung der Schwerkraft eine Aufwärtsströmung der warmen Luft zur Folge haben. Dadurch wird die Wärme mit den Luftteilchen mitgeführt, eine

*freie Konvektion* stellt sich ein. Dieses Phänomen ist also stets auch an einen Energietransport durch Wärmeleitung direkt an der Materialoberfläche gekoppelt.

Die Wärmestromdichte beim Wärmeübergang zwischen einem festen und einem fluiden Medium läßt sich ganz allgemein durch die Beziehung

$$\dot{q} = \alpha (T_o - T_L) \quad (3.12)$$

ausgedrückt, welche als *Newtonsches Abkühlungsgesetz* bezeichnet wird. Der Proportionalitätsfaktor  $\alpha$  [W/m<sup>2</sup>K] wird *Wärmeübergangskoeffizient* genannt. Bei diesem Koeffizienten handelt es sich nicht um einen Stoffparameter, sondern um eine problemspezifische Größe, die häufig komplizierte Abhängigkeiten von der wirksamen Temperaturdifferenz ( $T_o - T_L$ ), der Oberflächengeometrie und weiteren unterschiedlichsten Einflüssen zeigt. Die eigentliche Problemstellung bei der Analyse des konvektiven Wärmeübergangs ist die Ermittlung dieses Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$ . Zur Kennzeichnung des äußeren Wärmeübergangs an der Oberfläche wird dem Koeffizienten im weiteren der Index *O* angehängt ( $\alpha_o$ ).

Setzt man obige Beziehung mit der Wärmestromdichte an der Oberfläche durch reine *Wärmeleitung* in der Luft (für den eindimensionalen Fall senkrecht zur Oberfläche)

$$\dot{q} = -\lambda_L \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \right\}_o \quad (3.13)$$

nach dem *Fourierschen Wärmeleitungsansatz* gleich (vgl. Gleichung 3.10) und erweitert mit einer für das Problem charakteristischen Länge  $L$ , so ergibt sich nach Umformung

$$Nu = \frac{\alpha_o L}{\lambda_L} = - \left[ \frac{\partial \left( \frac{T}{T_o - T_L} \right)}{\partial \left( \frac{x}{L} \right)} \right]_o \quad (3.14)$$

Diese dimensionslose Kennzahl wird *Nußeltzahl*<sup>8</sup> genannt und besitzt nach dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (3.14) die Bedeutung eines *negativen dimensionslosen Temperaturgradienten* an der Wand. Dabei ist  $\lambda_L$  die Wärmeleitfähigkeit der Luft und stellt im Gegensatz zu  $\alpha_o$  eine Stoffkonstante dar. Bei Kenntnis der charakteristischen Länge  $L$  kann somit die Aufgabenstellung „Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_o$ “ in ein Problem der „Ermittlung geeigneter Nußeltzahlen“ überführt werden.

<sup>8</sup> *Wilhelm Nußelt* (1882 – 1957) verwendete 1915 erstmals dimensionslose Gruppen als Parameter, die heute als die Kenngrößen der Ähnlichkeitstheorie bekannt sind [MER87].

Versucht man zu einer physikalisch vollständigen Darstellung der Vorgänge beim Wärmeübergang zu gelangen, müssen auch für den wandnahen Bereich der Umgebungsluft zunächst die allgemeinen Erhaltungssätze angeschrieben werden, um ein mathematisches Gleichungssystem zur Beschreibung des Problems zu erhalten.

Das Geschwindigkeits-, Temperatur- und Druckfeld wird für Newtonsche Fluide vollständig durch die vektorielle Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung)

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla\mathbf{u}), \quad (3.15)$$

die Bewegungsgleichung (Impulserhaltung)

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \tau_{ij} + \rho \mathbf{g} \quad (3.16)$$

und die Energiegleichung

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \mathbf{q} + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \Phi_{Diss} \quad (3.17)$$

beschrieben [MER87]. Zur Vervollständigung dieser auch als *Navier-Stokes-Gleichungen* bekannten Beziehungen sollen hier noch die Dissipationsfunktion

$$\Phi_{Diss} = \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (3.18)$$

der Schubspannungsansatz nach Stokes

$$\tau_{ij} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \eta \delta_{ij} \nabla \mathbf{u} \quad (3.19)$$

sowie der bereits bekannte Wärmeleitungsansatz nach Fourier

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (3.20)$$

angeschrieben werden. Dieses Gleichungssystem ist in seiner vollständigen Form praktisch kaum lösbar, soll jedoch im folgenden unter Berücksichtigung zweckmäßiger und zulässiger Näherungen für das Phänomen der freien Konvektion analysiert werden.

Unter den teilweise bereits zuvor getroffenen Annahmen, daß

- die Dichte  $\rho$  im Auftriebsterm der Bewegungsgleichung als Funktion der Temperatur und in allen übrigen Gleichungen als konstant betrachtet werden kann,
- alle sonstigen Stoffwerte ( $c_p$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\eta$ ) konstant sind,
- der Dissipationsterm  $\Phi_{Diss}$  (irreversible Umsetzung der Arbeit der Oberflächenkräfte durch Reibung in Wärme) für das fluide Medium Luft aufgrund der relativ kleinen Strömungsgeschwindigkeiten und der daraus annehmbaren Inkompressibilität der Luft vernachlässigt wird,
- das Problem nur für einen stationären Zustand gelöst und
- die Gleichungen für ein zweidimensionales Problem (senkrechte ebene Platte) betrachtet werden,

erhält man aus den obigen Navier-Stokes-Gleichungen die unter der Bezeichnung *Oberbeck-Boussinesq-Approximation* zusammengefaßten Grundgleichungen für den Wärmeübergang bei freier Konvektion

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.21)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta g (T - T_0), \quad (3.22)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (3.23)$$

mit der Temperaturleitfähigkeit  $a = \lambda / \rho c_p$  und der kinematischen Viskosität  $\nu = \eta / \rho$  [MER87]. In ihrer Gesamtheit stellen sie die stationären zweidimensionalen Grenzschichtgleichungen an der senkrechten Wand dar. Den Gleichungen wurde das kartesische Koordinatensystem  $x$  (Abstand normal zur Platte) und  $z$  (Höhe an der Platte) mit dem Ursprung im unteren Plattenanfang zugrunde gelegt (siehe auch Achsenkreuz in Bild 3.6).

Bringt man dieses Differentialgleichungssystem durch charakteristische Bezugsgrößen auf eine dimensionslose Form (Normierung), tauchen als Gleichungsparameter nur noch die beiden ebenfalls dimensionslosen Kennzahlen

$$\text{Grashofzahl} \quad Gr = \frac{gL^3}{\nu^2} \beta (T_o - T_L) \quad (3.24)$$

und

$$\text{Prandtlzahl} \quad Pr = \frac{\nu}{a} \quad (3.25)$$

auf. Die darin enthaltenen Stoffparameter sind:

$g$  – Erdbeschleunigung [ $\text{m/s}^2$ ]

$\nu$  – kinematische Viskosität [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]

$\beta$  – isobarer Wärmeausdehnungskoeffizient [ $1/\text{K}$ ]

$a$  – Temperaturleitfähigkeit [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]

Die beiden Kennzahlen lassen sich physikalisch wie folgt interpretieren:

- Die *Prandtlzahl* als Quotient aus kinematischer Viskosität und Temperaturleitfähigkeit vergleicht zwei molekulare Transportkoeffizienten und beschreibt damit das Verhältnis vom Impuls- zum Wärmeaustausch. Sie stellt eine reine Stoffkonstante dar (für trockene Luft gilt  $Pr = 0,71$ ).
- Die *Grashofzahl* kann als Quotient der Auftriebskraft zur Trägheitskraft gedeutet werden und charakterisiert damit den Auftriebseffekt.

Da in den drei Grundgleichungen nach der Normierung nur noch die Prandtl- und die Grashofzahl auftauchen, kann eine Lösung des Problems und damit die Nußeltzahl nur von diesen beiden Kennzahlen abhängen, so daß als allgemeine Lösung für den Wärmeübergang bei freier Konvektion folgt:

$$Nu = f(Pr, Gr). \quad (3.26)$$

Diese Erkenntnis kann folgendermaßen interpretiert werden: Der Wärmestrom (*Nußeltzahl*) hängt von der Ausbildung des Geschwindigkeitsfeldes durch Auftrieb (*Grashofzahl*) und seiner Beziehung zum Temperaturfeld (*Prandtlzahl*) ab.

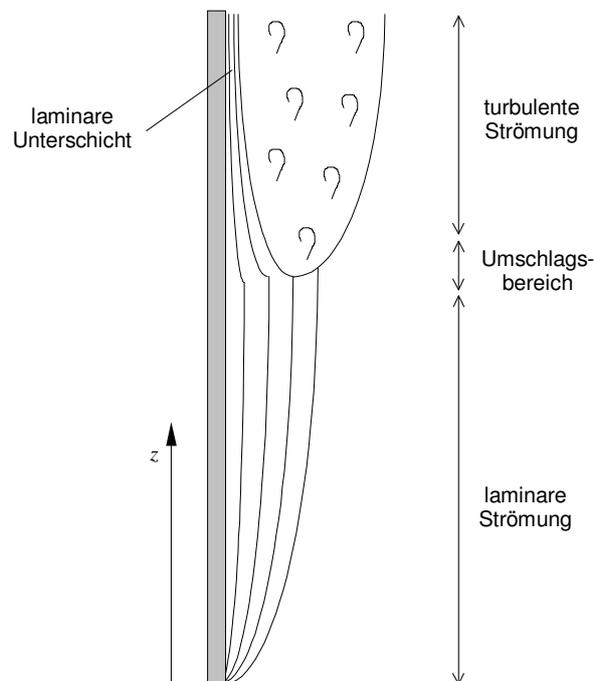
Im folgenden soll eine Lösung der Oberbeck-Boussinesq-Approximation und damit eine Beziehung für die Nußeltzahl über einen Ansatz mittels der sogenannten *Grenzschichttheorie* hergeleitet werden.

### **Grenzschichttheorie**

Die wesentlichen Transportvorgänge finden bei vielen Problemen der Wärmeübertragung in unmittelbarer Nähe vor festen Wänden statt. Dort existiert eine dünne *Grenzschicht*, deren Abmessungen klein gegenüber denen des betrachteten Systems sind. An einer Wand entste-

hende Strömungen besitzen daher sogenannten „Grenzschichtcharakter“ und bilden sich nur innerhalb dieser dünnen Grenzschicht aus. Diese Eigenschaft trifft sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen zu, da letztere immer eine laminare Unterschicht besitzen.

Praktische Untersuchungen haben gezeigt, daß der Anlaufteil einer freien Strömung, beginnend an der unteren Kante, zunächst laminar ist. Ab einer gewissen Höhe wird die Strömung im Bereich eines Übergangsfeldes turbulent, die Höhe des Umschlagsbereichs von laminar in turbulent hängt dabei von mehreren Einflüssen ab. Läßt man äußere Einwirkungen wie Störungen außer Betracht, so ist im wesentlichen die mittlere Geschwindigkeit der Luftströmung entscheidend. Innerhalb der turbulenten Grenzschicht existiert im unmittelbar wandnahen Bereich eine laminare Unterschicht [BOS72]. Das prinzipielle Aussehen der Strömung vor einer beheizten Wand verdeutlicht Bild 3.13, wobei die Proportionen bewußt verzerrt dargestellt sind.

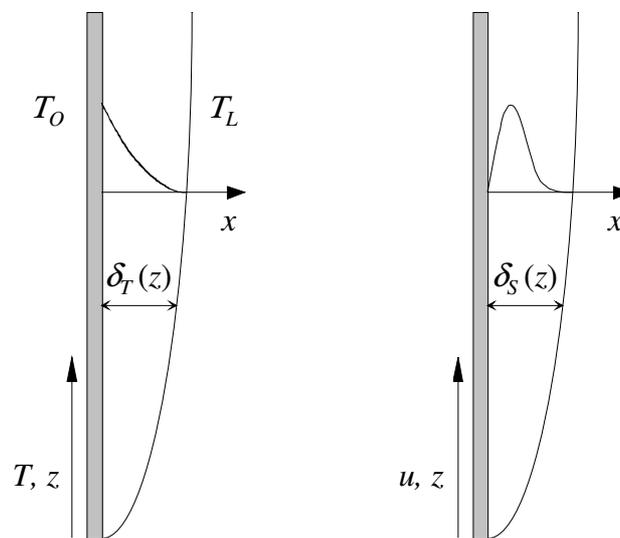


**Bild 3.13:** Ausbildung einer Grenzschicht an der vertikalen beheizten Platte

Während bei der erzwungenen Konvektion durch eine aufgeprägte Strömung die Höhe des Umschlags von laminar in turbulent von der Reynoldszahl abhängt, tritt bei der freien Konvektion die Grashofzahl als Kennzahl an die Stelle der Reynoldszahl. Als kritischen Wert für den Umschlagsbereich wird etwa  $Gr_{kr} \approx 10^9$  angenommen [GRÖ81], sofern keine äußeren Störungen (überlagerte Strömungen, grobe Plattenunebenheiten) auf die Strömung einwirken. Bei Übertemperaturen zwischen Oberfläche und Umgebung im betrachteten Bereich von  $\Delta T = 30 \dots 60$  K folgt daraus eine Höhe für den Umschlag von etwa  $h_{kr} = 0,60 \dots 0,75$  m. Für

Heizkörper mit einer größeren Bauhöhe ist daher das Vorliegen einer Übergangsströmung zu beachten. Im weiteren soll von einer rein laminaren Strömung und einer isothermen Platte ausgegangen werden, um eine theoretische Betrachtung vornehmen zu können.

Grundsätzlich müssen je nach physikalischer Größe zwei unterschiedliche Grenzschichten betrachtet werden. Einerseits gibt es eine *Temperaturgrenzschicht*  $\delta_T(z)$ , innerhalb der die Temperatur des strömenden Mediums von der Oberflächentemperatur  $T_O$  auf den Wert der Umgebungstemperatur  $T_L$  abnimmt (Bild 3.14 links), andererseits existiert eine *Strömungsgrenzschicht*  $\delta_S(z)$ , in der die Geschwindigkeit  $u$  der strömenden Luft von Null verschieden ist (Bild 3.14 rechts).



**Bild 3.14:** Prinzipieller Verlauf von Temperatur- und Strömungsgrenzschicht

Diese beiden Grenzschichten und das Profil der zugehörigen Größe *Temperatur* bzw. *Strömungsgeschwindigkeit* seien nun etwas näher betrachtet. Die Dicke der jeweiligen Grenzschicht (in einer bestimmten Höhe  $z$ ) hängt im wesentlichen von der Prandtlzahl  $Pr$  ab. Sie gibt nach obiger Definition den Quotienten aus Impulstransport und Energietransport an. Ursache des Impulstransportes ist ein Geschwindigkeitsgefälle, während der thermische Energietransport durch ein Temperaturgefälle hervorgerufen wird. Somit ist die Prandtlzahl maßgebend für die Beziehungen zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfeld und damit auch für eine Beziehung zwischen  $\delta_T$  und  $\delta_S$ . Für den speziellen Fall  $Pr = 1$  gilt die Gleichheit der Grenzschichtdicken  $\delta_T = \delta_S$  [JIS82]. Für das Medium *Luft* nimmt die Prandtlzahl den Wert  $Pr = 0,71$  an, wofür in guter Näherung immer noch  $\delta_T \approx \delta_S$  angenommen werden kann. Erst bei Werten  $Pr \ll 1$  wird  $\delta_T \neq \delta_S$ . Im weiteren gelte also für die Grenzschichtdicken näherungsweise  $\delta_T = \delta_S = \delta$ .

Die Temperatur der Luft sinkt innerhalb der Grenzschicht von der Oberflächentemperatur  $T_O$  auf den Wert der Lufttemperatur  $T_L$  ab und geht stetig in diese über. Zur Beschreibung eines solchen Verlaufes eignet sich ein quadratisches Polynom der Form

$$T(x, z) = a(z) + b(z) x + c(z) x^2 \quad (3.27)$$

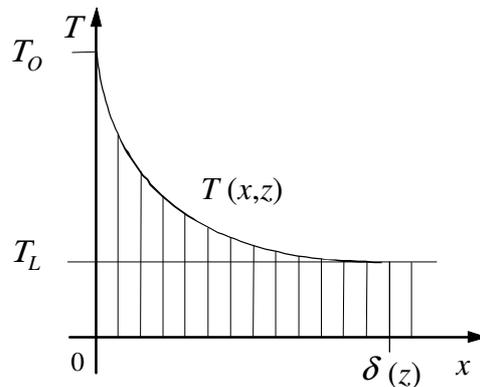
Die drei unbekanntenen, von der  $z$ -Koordinaten abhängigen Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  ergeben sich aus den zu erfüllenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} x = 0 & : T = T_O , \\ x = \delta(z) & : T = T_L ; \frac{\partial T}{\partial x} = 0 , \end{aligned} \quad (3.28)$$

und man erhält für das bezogene (dimensionslose) Temperaturprofil die Beziehung

$$\frac{T(x, z) - T_L}{T_O - T_L} = \left(1 - \frac{x}{\delta(z)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq \delta(z), \quad (3.29)$$

welche in Bild 3.15 graphisch dargestellt ist. Diese Approximation des Temperaturverlaufs kann als brauchbare Näherung der exakten Lösung angesehen werden.



**Bild 3.15:** Verlauf des Temperaturprofils  $T(x, z)$  innerhalb der Grenzschicht

Analog zum Ansatz des Temperaturprofils kann auch der Verlauf der Geschwindigkeit betrachtet werden. Aufgrund der Haftungsbedingung muß die Geschwindigkeit an der Wand gleich Null sein, zudem verschwindet  $u$  außerhalb der Strömungsgrenzschicht. Folglich muß innerhalb der Grenzschicht ein Maximum existieren, als Ansatz wird daher ein kubisches Polynom der Form

$$u(x, z) = a(z) + b(z)x + c(z)x^2 + d(z)x^3 \quad (3.30)$$

gewählt. Die Randbedingungen für die Geschwindigkeit lauten hier:

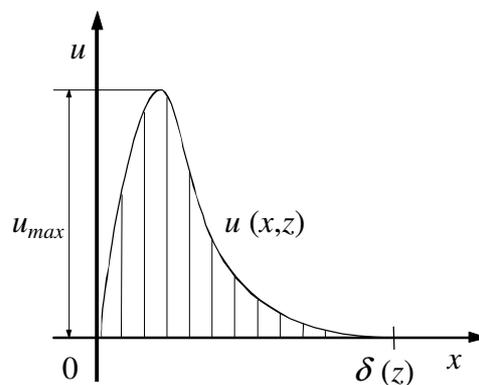
$$\begin{aligned} x = 0 & : u = 0 ; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{g\beta}{\nu}(T_o - T_L), \\ x = \delta(z) & : u = 0 ; \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

wobei sich die zweite Randbedingung bei  $x = 0$  durch Auswertung der Impulsgleichung (3.22) an der Wand ergibt. Nach dem Einsetzen dieser Bedingungen folgt für das dimensionslose Geschwindigkeitsprofil der Zusammenhang

$$\frac{u(x, z)}{u_0(z)} = \frac{x}{\delta(z)} \left(1 - \frac{x}{\delta(z)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq \delta(z) \quad (3.32)$$

mit der Bezugsgeschwindigkeit

$$u_0(z) = \delta^2(z) \frac{g\beta}{4\nu} (T_o - T_L). \quad (3.33)$$



**Bild 3.16:** Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit  $u(x)$  innerhalb der Grenzschicht

Die maximale Strömungsgeschwindigkeit  $u_{max}$  liegt wegen der kubischen Form an der Stelle  $x = \delta/3$  und nimmt dort den Wert  $u_{max} = 4u_0/27$  an (Bild 3.16).

Durch obige Ansatzfunktionen werden das Temperaturprofil  $T(x, z)$  und das Geschwindigkeitsprofil  $u(x, z)$  näherungsweise beschrieben. Aus den Gleichungen der Oberbeck-

Boussinesq-Approximation (3.21) bis (3.23) lassen sich durch partielle Integration zwei Integralbedingungen für den Impuls und für die Energie herleiten [JIS82]. Werden die Ansätze für die Temperatur (3.29) und die Geschwindigkeit (3.32) darin eingesetzt und anschließend integriert, so erhält man zwei gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen für die beiden Parameter  $u_0$  und  $\delta$ :

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dz} (u_0^2 \delta) = -\nu \frac{u_0}{\delta} + \frac{\delta}{3} g \beta (T_o - T_L), \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{30} \frac{d}{dz} (u_0 \delta) = \frac{2a}{\delta}. \quad (3.35)$$

Mit der Kenntnis aus Gleichung (3.33), daß  $u_0 \sim \delta^2$  ist, folgt aus der zweiten Differentialgleichung sofort der Ansatz  $\delta(z) = C_1 z^{1/4}$  und folglich  $u_0(z) = C_2 z^{1/2}$ . Durch Einsetzen dieser Lösungsansätze in obige Differentialgleichungen fällt die  $z$ -Abhängigkeit heraus (ein Nachweis für die korrekte Wahl der Ansätze), und man erhält zwei algebraische Gleichungen, aus denen die noch fehlenden Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  bestimmt werden können.

Nach mehreren Umformungen folgt für die gesuchte Grenzschichtdicke

$$\frac{\delta(z)}{z} = 3,936 \left( \frac{0,952 + Pr}{Pr^2 Gr_z} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.36)$$

mit der lokalen Grashofzahl

$$Gr_z = \frac{g z^3}{\nu^2} \beta (T_o - T_L). \quad (3.37)$$

Mit der Kenntnis der Grenzschichtdicke und des Temperaturverlaufs läßt sich nun über die Gleichung (3.14) auch die Nußeltzahl als eigentlich gesuchte Größe für den konvektiven Wärmeübergang bestimmen. Aus der Verknüpfung

$$\dot{q} = -\lambda_L \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_o = -\lambda_L \left( -\frac{2}{\delta(z)} (T_o - T_L) \right) = \alpha_o (T_o - T_L) \quad (3.38)$$

folgt

$$\alpha_o(z) = \frac{2 \lambda_L}{\delta(z)} \Rightarrow Nu_z = \frac{\alpha_o(z) \cdot z}{\lambda_L} = \frac{2 z}{\delta(z)}. \quad (3.39)$$

Durch Einsetzen der nach der Beziehung (3.36) errechneten Grenzschichtdicke ergibt sich schließlich die *lokale Nußeltzahl* zu

$$Nu_z = \frac{0,508 Pr^{1/2}}{(0,952 + Pr)^{1/4}} Gr_z^{1/4} = 0,377 Gr_z^{1/4} \quad (3.40)$$

mit der Prandtlzahl für trockene Luft  $Pr = 0,71$ .

Die Nußeltzahlen können auch durch numerische Lösung der Gleichungen (3.21) bis (3.23) bestimmt werden. In der einschlägigen Literatur zum konvektiven Wärmeübergang existieren zahlreiche Approximationen exakter Lösungen und zugehöriger Nußeltzahlen [JIS82, MER87, GRÖ81], denen sich die mittels der Grenzschichttheorie gefundene Lösung recht gut annähert.

Für die konvektive Wärmeabgabe folgt somit insgesamt die Beziehung

$$\dot{Q}_{Konv} = \alpha_o A_o (T_o - T_L) = \frac{\lambda_L}{z} A_o Nu_z (T_o - T_L). \quad (3.41)$$

Wird die Nußeltzahl  $Nu_z$  eingesetzt, so erhält man für die örtliche Wärmeabgabe durch Konvektion

$$\dot{Q}_{Konv} = 0,377 A_o \lambda_L \left( \frac{g \beta}{\nu^2} \right)^{1/4} z^{-1/4} (T_o - T_L)^{5/4} = C_K A_o z^{-1/4} (T_o - T_L)^{5/4} \quad (3.42)$$

mit dem neu eingeführten Parameter  $C_K$ . Mit den Stoffparametern nach Anhang B (Annahme konstanter Stoffwerte um den Arbeitspunkt) folgt für diesen Parameter der Zahlenwert

$$C_K = 0,377 \lambda_L \left( \frac{g \beta}{\nu^2} \right)^{1/4} = 1,073 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \left( \frac{\text{m}}{\text{K}} \right)^{1/4}. \quad (3.43)$$

Damit wurde unter Ausnutzung der Grenzschichttheorie eine physikalisch begründete Beziehung zur Beschreibung der konvektiven Wärmeabgabe gefunden.

Gemäß der Herleitung gilt diese Beziehung jedoch nur für die senkrechte Platte. Dies bedeutet für den in Abschnitt 3.3 beschriebenen Modellbaustein *Segment*, daß Gleichung (3.42) nur für das Segment eines ebenen Plattenheizkörpers Gültigkeit besitzt. Für kreisrunde Segmente wie in Bild 3.10 ist die Analyse der freien Konvektion am senkrechten Zylinder erforderlich, um auch für das Segment eines Stahlröhrenradiators eine gültige Beziehung zu finden.

Das Phänomen der freien Konvektion ist am senkrechten Zylinder stärker ausgeprägt als an der Platte, weshalb hier die Wärmeabgabe entsprechend höher ausfällt. Zur Berücksichtigung

dieses Sachverhaltes wird im VDI-Wärmeatlas [VDI94] ein additiver Korrekturterm für die Nußeltzahl am Zylinder angegeben:

$$Nu_{Zylinder} = Nu_{Platte} + 0,97 \frac{z}{D} \quad (3.44)$$

mit dem Durchmesser  $D$  des Zylinders bzw. der Säule und der Ortskoordinaten  $z$  (Höhe). Berücksichtigt man diese Korrektur in der Beziehung für die konvektive Wärmeleistung, so folgt statt Gleichung (3.42) die modifizierte Gleichung für den senkrechten Zylinder

$$\dot{Q}_{Konv} = \left( C_K \left( \frac{T_O - T_L}{z} \right)^{1/4} + 0,97 \frac{\lambda_L}{D} \right) A_O (T_O - T_L). \quad (3.45)$$

Aus den vorangegangenen Untersuchungen läßt sich folgern, daß der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_O$  bei laminarer Grenzschichtströmung eine Abhängigkeit von der Übertemperatur in der Form

$$\alpha_O \sim \Delta T^{1/4} \quad (3.46)$$

zeigt. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die konvektive Luftströmung am Heizkörper bei in der Praxis gebräuchlichen Bauhöhen (bis zu 1 m) im oberen Bereich turbulent wird. Bei turbulenter Strömung stellt sich für den konvektiven Wärmeübergang jedoch allgemein eine Abhängigkeit der Form  $\alpha_O \sim \Delta T^{1/3}$  ein, wie in [ADU84-1] gezeigt wird. Überraschenderweise konnte nach [ADU87] durch Messungen an Heizkörpern vergleichbarer Höhe, also auch mit turbulentem Bereich, ein Zusammenhang gemäß Gleichung (3.46) recht genau wiedergegeben werden. Daraus läßt sich folgern, daß die Wärmeabgabe auch bei Bauhöhen, die größer sind als die kritische Höhe  $h_{kr}$  für den Umschlag in turbulente Strömung, überwiegend bei laminarer Grenzschichtströmung erfolgt. Diese Vermutung wurde auch schon recht früh in [RAI66] experimentell bestätigt.

### Wärmeübertragung durch Strahlung

Die nun folgenden Ausführungen zur Analyse des physikalischen Phänomens der *thermischen Strahlung* gelten zunächst ebenfalls nur für den Plattenheizkörper, da er sich aufgrund seiner ebenen Oberfläche gut für die theoretische Untersuchung eignet. Die Wärmeabgabe durch Strahlung sei auf die Vorder- und Rückseite des Heizkörpers beschränkt, Randeffekte an den schmalen Seiten können aufgrund der vergleichsweise kleinen Flächen vernachlässigt werden.

Alle Körper emittieren bei einer absoluten Temperatur von  $T > 0$  elektromagnetische Strahlung als Folge ihrer inneren Energie. Im hier betrachteten Temperaturbereich wird diese

langwellige Strahlung als Wärme empfunden und liegt nach [BUD94] im Infrarotbereich mit Wellenlängen von 0,75...400  $\mu\text{m}$ .

Ein Heizkörper verhält sich aufgrund seines Anstrichs mit speziellen Heizkörperlacken (Thermolackierung) wie ein grauer Strahler [ADU83], für dessen Wärmestrahlung nach dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz* mit  $\varepsilon_0$  als Emissionsverhältnis des grauen Strahlers und  $\sigma_S$  als Strahlungskonstante des schwarzen Körpers

$$\dot{Q} = \varepsilon_0 \sigma_S T_0^4 \quad (3.47)$$

gilt. Dabei ist  $T_0$  die mittlere Oberflächentemperatur. Diese Beziehung ergibt sich durch Integration des Planckschen Strahlungsgesetzes (Intensität der Strahlung als Funktion der Wellenlänge) über alle Raumwinkel und alle Wellenlängen. Für übliche Heizkörperlacke gibt [ADU91] Werte für die Emissionszahl von  $\varepsilon_0 \approx 0,95$  an (unabhängig von der Farbe des Heizkörperlackes).

Die obige Beziehung gilt nur für die Strahlung in den unendlich großen, leeren Raum. Nach der Definition eines grauen Körpers wird die empfangene Strahlung zum Teil absorbiert und der restliche Anteil wieder reflektiert. Maßgeblich für die effektive Wärmeabgabe ist deshalb die *Strahlungswechselwirkung* mit dem umgebenden Raum bzw. der einhüllenden Fläche; sie hängt von dessen Temperatur und den geometrischen Verhältnissen ab. Die umgebende Fläche ist aber im allgemeinen nicht homogen und zudem meist auch nicht bekannt. Für den Netto-Wärmestrom zwischen zwei strahlenden Flächen gilt die Bilanz

$$\dot{Q}_{St} = \dot{Q}_{St,1} - \dot{Q}_{St,2} = \varepsilon_1 \sigma_S A_1 T_1^4 - \varepsilon_2 \sigma_S A_2 T_2^4. \quad (3.48)$$

Für den Fall, daß eine homogene geschlossene Fläche  $A_W$  mit der mittleren Oberflächentemperatur  $T_W$  einen Heizkörper mit der Temperatur  $T_0$  und der Fläche  $A_0$  einhüllt (wie dies auch bei der geschlossenen Prüfkabine zutrifft), läßt sich für den Strahlungswärmeaustausch mit dem Heizkörper nach [GRÖ81, HEL73] die Beziehung

$$\dot{Q}_{St} = \varepsilon_{0,w} \sigma_S A_0 (T_0^4 - T_W^4) \quad (3.49)$$

mit dem Koeffizienten

$$\varepsilon_{0,w} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{A_0}{A_W} \left( \frac{1}{\varepsilon_W} - 1 \right)} \quad (3.50)$$

anschreiben. Da praktisch immer  $A_o/A_w \ll 1$  angenommen werden kann (die Heizflächen sind viel kleiner als die umgebenden Raumflächen, in der Praxis ergibt sich meist ein Verhältnis von  $A_o / A_w \approx 0,01 \dots 0,05$ ), vereinfacht sich dieser Koeffizient zu

$$\varepsilon_{o,w} \approx \varepsilon_o. \quad (3.51)$$

Der Einfluß der Inhomogenität der raumumschließenden Flächen ist damit in guter Näherung vernachlässigbar. Die Überlegungen setzen allerdings voraus, daß eine mittlere Oberflächen- bzw. Wandtemperatur  $T_w$  angesetzt werden kann.

Gliederheizkörper weisen aufgrund ihres Aufbaus keine einheitlich ebene Oberfläche auf. Es scheint daher sinnvoll, statt der beim Plattenheizkörper direkt verwendbaren Heizkörperoberfläche  $A_o$  eine äquivalente, zum Strahlungsaustausch beitragende Fläche der Größe  $q \cdot A_o$  mit  $q \leq 1$  zu benutzen [ADU91]. In grober Näherung läßt sich die Hüllfläche des Heizkörpers als Wert für  $q \cdot A_o$  heranziehen. Die Größe  $q$  ist von der speziellen Bauart des Gliederheizkörpers abhängig (Säulenordnung, Säulenzahl je Glied) und im allgemeinen nicht bekannt. In der Praxis wird jedoch mit den Kenndaten eines Heizkörpers häufig auch der leistungsbezogene *Strahlungsanteil* angegeben. Dieser soll als Kontrollgröße dazu dienen, den zunächst unbekanntem Parameter  $q$  in späteren Untersuchungen (siehe Abschnitt 3.4.5) validieren zu können.

Von der äußeren Oberfläche eines Segmentes wird durch die beiden zuvor theoretisch betrachteten Phänomene Konvektion und Strahlung die Wärmeleistung  $\dot{Q}_H$  an die Umgebung abgegeben. Da diese Wärmeübergangsmechanismen unabhängig voneinander auftreten, gilt für die gesamte von einem Segment abgegebene Wärmeleistung die additive Überlagerung

$$\dot{Q}_H = \dot{Q}_{Konv} + \dot{Q}_{St}. \quad (3.52)$$

### 3.4.3 Innerer Wärmeübergang

Der innere Wärmeübergang vom fluiden Heizmedium an die feste Rohrwand läßt sich zunächst wieder ganz allgemein über das Newtonsche Abkühlungsgesetz

$$\dot{Q}_H = \alpha_i A_i (T_m - T_l) \quad (3.53)$$

beschreiben. Dabei ist  $T_m$  der Mittelwert aus Ein- und Austrittstemperatur ( $T_E$  und  $T_A$ ) des Heizmediums und  $\alpha_i$  die lokale Wärmeübergangszahl für das jeweils  $i$ -te Segment. Letztere Größe ist jedoch zunächst unbekannt. Zu Beginn des vorangegangenen Abschnitts wurde bei der Analyse der konvektiven Wärmeübertragung die aus der Ähnlichkeitstheorie bekannte

*Nußeltzahl*  $Nu = \alpha l / \lambda$  als dimensionsloser Temperaturgradient an der Wand [VDI97] eingeführt. Mit Hilfe dieser Kennzahl kann die gesuchte Wärmeübergangszahl  $\alpha_i$  zu

$$\alpha = \frac{\lambda}{l} Nu \quad (3.54)$$

berechnet werden, sofern eine geeignete Nußeltzahl für das Problem des inneren Wärmeübergangs bekannt ist. In diesem Fall ist  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit des fluiden Heizmediums (meist Wasser) und  $l$  eine für das thermische Problem charakteristische Länge. Bei der Verwendung von Nußeltzahlen ist stets darauf zu achten, daß die charakteristische Länge als Bezugsgröße bei vergleichbaren thermischen Problemstellungen einheitlich definiert wird. Im Zusammenhang mit der Analyse von Strömungen durch Rohre mit kreisrundem Fließkanalquerschnitt wird für die charakteristische Länge in der Regel der innere Rohrdurchmesser  $d_i$  verwendet. Betrachtet man dagegen Rohre mit nicht-kreisförmigem Strömungsquerschnitt, so läßt sich als äquivalente Ersatzgröße für die charakteristische Länge der sogenannte *hydraulische Durchmesser*

$$d_{hyd} = 4 \frac{A_{Q,i}}{U_i} \quad (3.55)$$

aus dem Verhältnis von Querschnittsfläche  $A_{Q,i}$  zum Umfang  $U_i$  des Fließkanals angeben. Damit berechnet sich die lokale Wärmeübergangszahl für den inneren Wärmeübergang zu

$$\alpha_i = \frac{\lambda_w}{d_{hyd}} \cdot Nu_i \quad (3.56)$$

### Nußeltzahlen für den inneren Wärmübergang

Die Nußeltzahl hängt von vielfältigen Einflußfaktoren wie Stoffparametern, speziellen geometrischen Verhältnissen, Beschaffenheit der Strömung etc. ab. Für den konvektiven Wärmeübergang bei Rohrströmungen ist insbesondere die Geometrie des Fließkanalquerschnitts ausschlaggebend.

Für einige Querschnittsformen finden sich in der einschlägigen Literatur Nußeltzahlen für die Randbedingung einer thermisch und hydraulisch voll entwickelten laminaren Strömung (z.B. [SHA78], [KAY66]). In Anbetracht der Vielfalt der in der Heizkörperpraxis anzutreffenden Heizkörperbauformen, und damit auch der verschiedenen Strömungsquerschnitte, wird schnell ersichtlich, daß die Ermittlung einer für eine spezielle Geometrie geltenden Nußeltzahl äußerst aufwendig ist und solche Nußeltzahlen auch in der Literatur kaum zu finden sind. Die Aufgabe besteht also darin, eine begrenzte Anzahl an *Querschnittsklassen* bzw.

*Querschnittstypen* zu finden, über die sich viele der in der Praxis anzutreffenden Querschnittsgeometrien näherungsweise approximieren lassen.

Die generellen Einflüsse auf die Nußeltzahl sollen für den speziellen Anwendungsfall der „Strömung in einem Heizkörper“ analysiert werden:

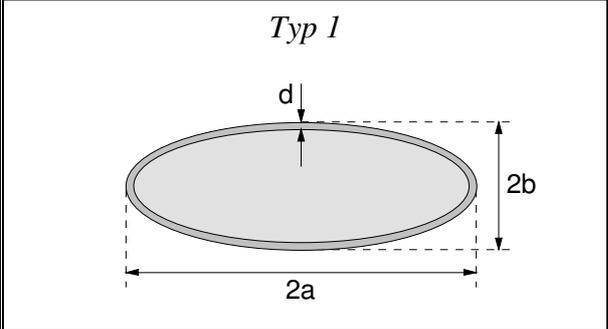
- Im üblichen Betriebszustand eines Heizkörpers bewegt sich der Heizmediumstrom durch den Heizkörper in der Größenordnung des Norm-Heizmediumstroms (in der Regel gilt  $\dot{m} \leq 2 \cdot \dot{m}_N$ ). Damit liegt die Reynoldszahl der Strömung durch eine einzelne Säule stets im Bereich  $Re \ll 2300$ , womit der konvektive Wärmeübergang vom Heizmedium zur Heizkörperwand stets bei *laminarer Strömung* stattfindet. In den Sammelkanälen kann örtlich begrenzt auch turbulente Strömung auftreten, so z.B. im Zu- und Rücklaufbereich durch höhere Fließgeschwindigkeiten sowie bei Änderungen der Querschnittsgeometrie infolge der Abzweigungen in Gliedern bzw. Säulen.
- Die *Strömungsgeschwindigkeit* hat erst bei turbulenter Strömung einen nennenswerten Einfluß auf die Nußeltzahl. Bei einer voll ausgebildeten laminaren Strömung ist die Nußeltzahl unabhängig von der Geschwindigkeit der Heizmediumströmung [VDI97].
- Im *Einlaufbereich* einer Heizkörpersäule hat sich das typische laminare Strömungsprofil des Geschwindigkeits- und des Temperaturfeldes noch nicht voll ausgebildet. In diesem Bereich ist der Wärmeübergang aufgrund des turbulenten Charakters des einströmenden Heizmediums größer, so daß diese Abhängigkeit der Nußeltzahl von der Ortskoordinate  $z$  (Höhe am Heizkörper) berücksichtigt werden muß.
- Wird der Fließkanalquerschnitt allgemein durch zwei orthogonale Geometrieparameter (Breite und Tiefe) beschrieben, so hängt die Nußeltzahl vom Verhältnis der beiden Größen zueinander ab. Diese beiden Geometrieparameter sollen im folgenden mit  $2a$  und  $2b$  bezeichnet und so definiert werden, daß immer  $a \geq b$  gilt (damit für den Wertebereich des Verhältnisses  $0 \leq b/a \leq 1$  gilt). Bei einem symmetrischen Seitenverhältnis von  $b/a = 1$  ist der Wärmeübergang stets schlechter als bei einem kleineren Verhältnis (schmäler Querschnitt, der Grenzfall  $b/a \rightarrow 0$  entspricht parallelen Platten mit dem Abstand  $2b$ ).

### **Ermittlung charakteristischer Geometrieparameter**

In der Literatur werden Nußeltzahlen für die voll entwickelte, laminare Strömung oft für die Randbedingungen konstanter Temperatur oder eines konstanten radialen Wandwärmestromes angegeben [SHA78]. Aufgrund des bekannten Temperaturprofils ist die Bedingung konstanter Temperatur sicher nicht erfüllt, aber auch ein konstanter Wandwärmestrom liegt im Fall der vertikalen Strömung im Heizkörper nicht unbedingt vor. Wie u.a. aus Parameterstudien zum „Virtuellen  $c$ -Wert-Prüfstand“ deutlich wird, sind die Abweichungen des Wandwärmestroms um seinen Mittelwert dennoch verhältnismäßig gering, so daß diese Randbedingung als näherungsweise erfüllt angesehen werden kann.

Nach eingehender Recherche und Analyse marktüblicher Heizkörper läßt sich feststellen, daß in den meisten Fällen die auftretenden Fließkanalquerschnitte fertigungsbedingt durch wenige markante Geometrieformen angenähert werden können. Die drei häufigsten sollen an dieser Stelle kurz aufgeführt werden.

**Tabelle 3.3:** Elliptischer Strömungsquerschnitt mit Nußeltzahlen ([SHA78], Table 65)

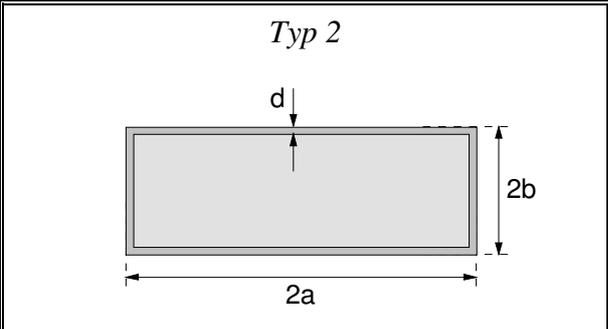
<i>Typ 1</i>		$b^*/a^*$	Nu
		1	4,364
		0,75	4,402
		0,5	4,558
		0,25	4,880
		0	5,225

Sehr viele Fließkanalquerschnitte weisen eine Form auf, die sich näherungsweise durch eine Ellipse beschreiben läßt. Als kennzeichnende Parameter werden neben der Wandstärke  $d$  die beiden Halbmesser  $a$  und  $b$  angegeben. Eine wichtige Sonderform dieses Querschnittstyps ist der *kreisrunde* Querschnitt mit dem Radius  $a = b$  (Stahlröhrenradiatoren und alle sonstigen Rohrheizkörper). Die Nußeltzahlen werden in Tabelle 3.3 in Abhängigkeit vom Verhältnis der *inneren* Abmessungen  $b^*$  und  $a^*$  aufgeführt, wobei

$$\begin{aligned} a^* &= a - d \\ b^* &= b - d \end{aligned} \tag{3.57}$$

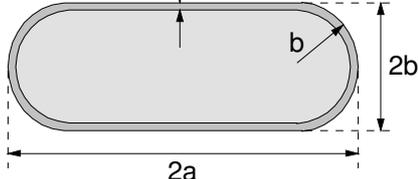
gilt. Aus technischen Datenblättern sind meist nur die äußeren Abmessungen entnehmbar, während sich die Nußeltzahl aus den inneren Querschnittsmaßen berechnet.

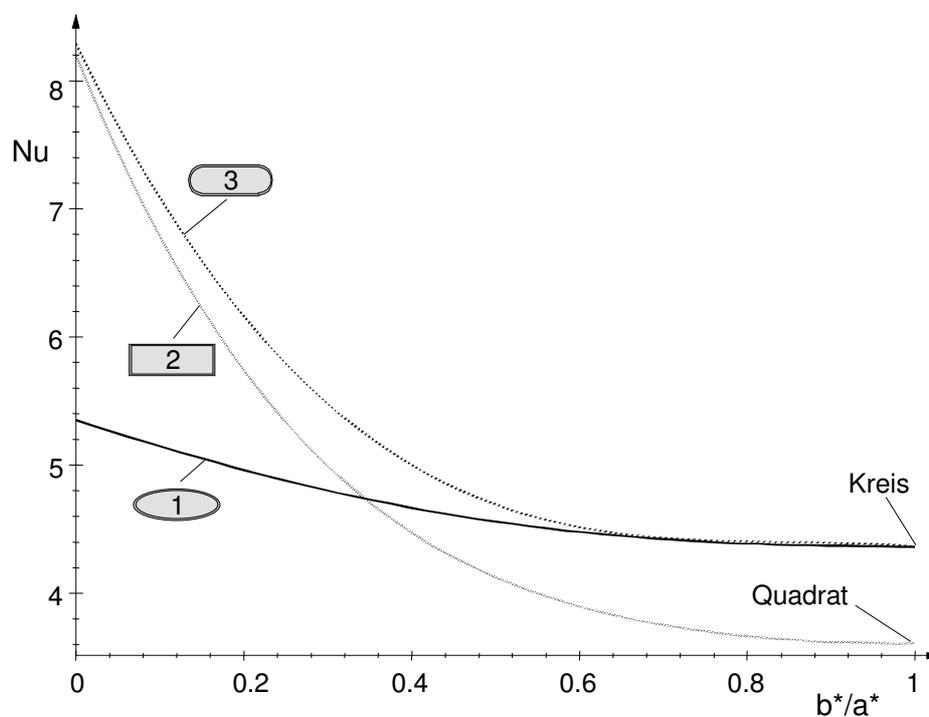
**Tabelle 3.4:** Rechteckiger Strömungsquerschnitt mit Nußeltzahlen ([SHA78], Table 42)

<i>Typ 2</i>		$b^*/a^*$	Nu
		1	3,608
		0,75	3,701
		0,5	4,123
		0,25	5,331
		0	8,235

Neben der ovalen bzw. elliptischen Form sind oft auch rechteckige Strömungsquerschnitte anzutreffen (siehe Tabelle 3.4); die äußeren Kantenlängen werden hier mit  $2a$  und  $2b$  gekennzeichnet. Als eine abgewandelte Geometrieform trifft man häufig auf eine rechteckige Querschnittsform mit abgerundeten Seiten wie in Tabelle 3.5 abgebildet. Die Geometrieparameter werden analog zum Rechteck definiert. Das Längenmaß  $2a$  umfaßt die gesamte Breite; die halbe Tiefe  $b$  stellt zugleich den Radius der Rundung dar. Der Sonderfall  $a = b$  entspricht in Analogie zur Ellipse einem kreisrunden Strömungsquerschnitt.

**Tabelle 3.5:** Nußeltzahlen rechteckiger Rohre mit Rundung ([SHA78], Table 81)

<i>Typ 3</i>		$b^*/a^*$	Nu
		1	4,36
		0,667	4,45
		0,5	4,72
		0,25	5,77
		0	8,24



**Bild 3.17:** Nußeltzahlen verschiedener Strömungsquerschnitte (voll entwickelte Strömung)

Mit diesen drei vorgestellten Querschnittstypen 1, 2, 3 lassen sich bereits die meisten der anzutreffenden Fließkanalquerschnitte berücksichtigen. Die obige Grafik stellt den Verlauf der Nußeltzahlen aus den Tabellen vergleichend dar, die Kurvenverläufe ergeben sich durch Interpolation über die diskreten Datenpunkte. Erkennbar ist für  $b^*/a^* = 1$  der Übergang der Querschnittstypen 1 und 3 in den kreisrunden Fließkanal, für den sich die Nußeltzahl zu  $Nu = 4,364$  theoretisch berechnen läßt [VDI97]. Der Querschnittstyp 2 wird für  $b^*/a^* = 1$  quadratisch, in diesem Fall wird  $Nu = 3,608$ . Für die meisten Heizkörper ist vor allem der Bereich von ca.  $0,2 \leq b^*/a^* \leq 1,0$  relevant, kleinere Seitenverhältnisse sind kaum anzutreffen.

### Berücksichtigung des Einlaufbereichs

Eine laminare Strömung stellt sich in einem Rohr erst nach einer bestimmten Wegstrecke in Strömungsrichtung hinter dem Kanaleinlauf ein. Innerhalb dieser *Einlauflänge* bildet sich das für laminare Strömung typische parabolische Profil sowohl der Strömungsgeschwindigkeit als auch der Temperaturverteilung aus. Die *thermische Einlauflänge*, in der sich das Temperaturprofil ausprägt, wird in [JIS82, HEL73] mit

$$L_{th} \approx 0,05 \operatorname{Re} \operatorname{Pr} d_i \quad (3.58)$$

angegeben, wobei  $d_i$  für den inneren Rohrdurchmesser steht. Die Einlauflänge für das Profil der Strömung ist in der Regel kürzer. Für diese *hydraulische Einlauflänge* findet sich in [JIS82] die Näherung

$$L_{hyd} \approx 0,05 \operatorname{Re} d_i \quad (3.59)$$

Folglich unterscheidet sich die thermische Einlauflänge von der hydraulischen durch Multiplikation mit der *Prandtlzahl*  $\operatorname{Pr}$ . In Bild 3.18 wird zur Veranschaulichung ein Vergleich der Größenordnung von hydraulischer und thermischer Einlauflänge mit der Gesamtbauhöhe eines Heizkörpers beispielhaft dargestellt (graue Bereiche).

Beide Einlaufängen hängen außer vom Rohrdurchmesser  $d_i$  grundsätzlich auch von der Reynoldszahl  $\operatorname{Re}$  und damit von der Strömungsgeschwindigkeit des Heizmediums ab.

Für den Heizkörper läßt sich annehmen, daß die Heizmediumströmung durch die Abzweigung von den horizontalen Sammelrohren verwirbelt wird; die eintretende Strömung kann daher näherungsweise als Blockströmung interpretiert werden. Bei diesem Strömungscharakter findet im Einlaufbereich ein besserer Wärmeübergang statt als im weiteren Verlauf bei voll entwickelter laminarer Strömung.

Unter der bereits zuvor gerechtfertigten Annahme einer konstanten Wärmestromdichte entlang des Rohres existieren zur Berücksichtigung des thermischen und hydrodynamischen Anlaufs Approximationen für die lokale Nußeltzahl, deren Gültigkeit sich auf den Bereich der

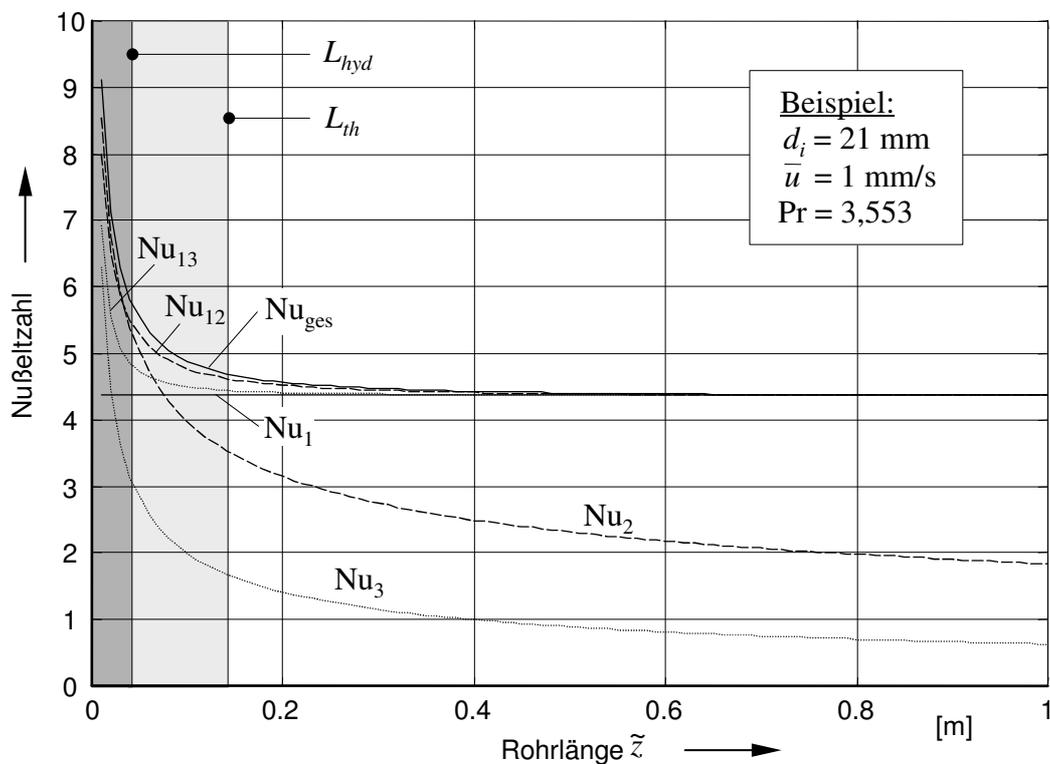
Einlauflänge beschränkt. Im Bild 3.18 sind dies die gestrichelt dargestellten Kurvenverläufe für  $Nu_2$  und  $Nu_3$ , deren Verlauf sich aus den Beziehungen

$$Nu_2 = 1,302 \left( \text{Re Pr} \frac{d_i}{\tilde{z}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.60)$$

für den thermischen Anlauf bei hydrodynamisch ausgebildeter Strömung und

$$Nu_3 = 0,462 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \left( \text{Re} \frac{d_i}{\tilde{z}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.61)$$

für den gleichzeitigen hydrodynamischen und thermischen Anlauf ergibt ([VDI97], Abschnitt Ga). Diese beiden Gleichungen gelten nur für große Werte des Verhältnisses  $d_i/\tilde{z}$ , wobei die Ortskoordinate  $\tilde{z}$  vom Einlauf aus in Strömungsrichtung verläuft und somit  $\tilde{z} = B_H - z$  gilt. Die Asymptote für die voll ausgebildete laminare Strömung wird in der Grafik mit  $Nu_1$  (im vorangegangenen Text stets ohne Index) gekennzeichnet.



**Bild 3.18:** Kombination verschiedener Nußeltzahl-Approximationen für den Einlaufbereich

Mit dem Ziel einer praktischen Handhabung soll eine gemeinsame, auf die gesamte Rohrlänge anwendbare Beziehung für die lokale Nußeltzahl gefunden werden. Eine solche Nußeltzahl kann nur aus einer Kombination der drei Nußeltzahlen  $Nu_1$  (Asymptote),  $Nu_2$  und  $Nu_3$  (Einlaufbereich) bestehen. In der Literatur wird dazu die folgende, durch experimentell ermittelte Werte [SPA96] gestützte Beziehung angegeben [VDI97]:

$$Nu_{ges} = \sqrt[3]{Nu_1^3 + 1 + (Nu_2 - 1)^3 + Nu_3^3} . \quad (3.62)$$

Es werden weiterhin die beiden Abschätzungen

$$Nu_{12} = \sqrt[3]{Nu_1^3 + 1 + (Nu_2 - 1)^3} \quad \text{und} \quad (3.63)$$

$$Nu_{13} = \sqrt[3]{Nu_1^3 + Nu_3^3} \quad (3.64)$$

für eine Verknüpfung aus der Asymptote  $Nu_1$  mit jeweils nur einer der Approximationen für den Einlaufbereich  $Nu_2$  oder  $Nu_3$  betrachtet. Die graphischen Verläufe der einzelnen Asymptoten und deren Kombinationen sind gemeinsam in Bild 3.18 dargestellt.

Beim Vergleich der Verläufe von  $Nu_{12}$  und  $Nu_{13}$  mit der theoretisch „optimalen“ Kombination  $Nu_{ges}$  fällt auf, daß der Graph von  $Nu_{12}$  im Einlaufbereich nur unwesentlich neben dem Verlauf von  $Nu_{ges}$  liegt. Der Einfluß von  $Nu_3$  kann also vernachlässigt werden, so daß als Beziehung für die lokale Nußeltzahl letztlich nur die Gleichung (3.63) von Bedeutung ist. Damit verringert sich auch der Aufwand bei der Modellimplementierung, die Komplexität der Modellgleichungen wird nicht unnötig gesteigert.

Für den inneren Wärmeübergang folgt somit schließlich die Nußeltzahl

$$Nu_i(z) = \sqrt[3]{Nu_1^3 + 1 + \left(1,302 \sqrt[3]{\text{Re Pr} \frac{d_i}{B_H - z} - 1}\right)^3} , \quad (3.65)$$

wobei  $Nu_1$  je nach Fließkanaltyp und Querschnittsparametern aus Tabelle 3.3 bis Tabelle 3.5 gewonnen wird.

### Übersicht aller Modellgleichungen der phänomenologischen Abstraktion

Mit dem inneren Wärmeübergang ist schließlich auch der letzte Term der Wärmebilanzgleichung (3.4) bestimmt und die Gleichung im Sinne der phänomenologischen Abstraktion vollständig verfeinert worden.

Für eine bessere Übersicht sind alle Modellgleichungen in Tabelle 3.6 noch einmal zusammengefaßt.

**Tabelle 3.6:** Modellgleichungen für den Modellbaustein *Segment*

Wärmestrombilanz	$\dot{Q}_{Sp} = \dot{Q}_E - \dot{Q}_A - \dot{Q}_H$
Speicherterm	Instationär: $\dot{Q}_{Sp} = (m_W c_{p,W} + m_H c_{p,H}) \frac{dT_m}{dt}$ Stationär: $\dot{Q}_{Sp} = 0$
Eintretender Wärmestrom	$\dot{Q}_E = \dot{m}_S c_{p,W} T_E$
Austretender Wärmestrom	$\dot{Q}_A = \dot{m}_S c_{p,W} T_A$
Heizmediumtemperatur	$T_m = \frac{T_E + T_A}{2}$
Innerer Wärmeübergang	$\dot{Q}_H = \alpha_i A_i (T_m - T_I)$ mit $\alpha_i = \frac{\lambda_w}{d_{hyd}} \cdot Nu_i$
Wärmeleitung Wand	$\dot{Q}_H = \lambda_H \frac{\bar{A}}{d} (T_I - T_O)$
Äußerer Wärmeübergang	$\dot{Q}_H = \dot{Q}_{Konv} + \dot{Q}_{St}$
Konvektion	$\dot{Q}_{Konv} = C_K A_O z^{-1/4} (T_O - T_L)^{5/4} + 0,97 \frac{\lambda_L A_O}{D} (T_O - T_L)$ $\dot{Q}_{Konv} = C_K A_O z^{-1/4} (T_O - T_L)^{5/4}$ (Säule / Platte)
Strahlung	$\dot{Q}_{St} = \varepsilon_0 \sigma_s q A_O (T_O^4 - T_W^4)$ (Platte: $q = 1$ )

Zur Berücksichtigung der Wechselwirkungen mit anderen Modellen werden neben den Modellgleichungen in Tabelle 3.7 alle Schnittstellen und Eingangsgrößen des Modellbausteins spezifiziert. Eine Festlegung der Ausgangsgrößen soll an dieser Stelle noch nicht vorgenommen werden, da prinzipiell alle auftretenden Prozeßgrößen als solche definiert werden können.

Alle weiteren, in Tabelle 3.6 aufgeführten Größen stellen als Modellparameter bekannte Größen dar, so daß sich insgesamt ein lösbares, differential-algebraisches Gleichungssystem ergibt, welches das interessierende physikalische Verhalten eines einzelnen Heizkörpersegmentes beschreibt. Die Implementierung dieses Gleichungssystems als Modellbaustein in das Modellierungswerkzeug *CAMex* wird später im vierten Kapitel beschrieben.

**Tabelle 3.7:** Schnittstellen und Eingangsgrößen des Modellbausteins *Segment*

Koppeleingänge	$T_E$	Temperatur des einströmenden Heizmediums
	$\dot{m}_S$	Massenstrom durch die Säule
Koppelausgänge	$T_A$	Temperatur des ausströmenden Heizmediums
	$\dot{m}_S$	Massenstrom durch die Säule
Eingangsgrößen (global)	$T_L$	Mittlere Temperatur der umgebenden Raumluft
	$T_W$	Mittlere Temperatur der umschließenden Wände

Die vorangegangenen theoretischen Untersuchungen zum äußeren Wärmeübergang wurden im Verlauf der Herleitung auf ebene Plattenheizkörper bzw. auf eine Säulenform mit kreisrundem Fließkanalquerschnitt (Stahlröhrenradiator) beschränkt, um die Ermittlung einer analytischen (Näherungs-) Lösung überhaupt erst zu ermöglichen. Damit zeigt sich allerdings auch der gravierende Nachteil der theoretischen Betrachtung, nämlich die *Einschränkung auf nur wenige Spezialfälle*.

#### 3.4.4 Wärmedurchgang – Potenzansatz

Im diesem Abschnitt soll aus den zuvor genannten Gründen versucht werden, die von einem Segment abgegebene Wärmeleistung  $\dot{Q}_H$  – und damit den äußeren Wärmeübergang – mittels eines speziellen Ansatzes zu approximieren: dem *Potenzansatz*.

Ein solcher Ansatz geht prinzipiell ebenfalls von der physikalischen Herleitung aus. Dazu wird die gesamte Wärmeleistung durch Addition der konvektiven Wärmeleistung und der Strahlungswärme zu der Beziehung

$$\dot{Q}_H = C_{Konv} (T_O - T_L)^{5/4} + C_{St} (T_O^4 - T_W^4), \quad (3.66)$$

angeschrieben. Der rechte Ausdruck kann mit der Definition der Oberflächen-Übertemperatur  $\Delta T = T_O - T_W$  in das Polynom

$$\begin{aligned} T_O^4 - T_W^4 &= (T_W + \Delta T)^4 - T_W^4 \\ &= 4T_W^3 \Delta T + 6T_W^2 \Delta T^2 + 4T_W \Delta T^3 + \Delta T^4 \end{aligned} \quad (3.67)$$

entwickelt werden. Geht man weiterhin in guter Näherung von der Gleichheit der Lufttemperatur  $T_L$  und der Wandtemperatur  $T_W$  aus, setzt also  $T_W = T_L$ , so läßt sich die

Wärmeleistung insgesamt als Quasi-Polynom<sup>9</sup> der wirksamen Oberflächen-Übertemperatur  $\Delta T = T_O - T_L$  angeben:

$$\dot{Q}_H = b \Delta T^{5/4} + a_1 \Delta T + a_2 \Delta T^2 + a_3 \Delta T^3 + a_4 \Delta T^4. \quad (3.68)$$

Diese Gleichung ist in ihrer Handhabung recht umständlich, obwohl gezeigt werden kann, daß die beiden höchsten Potenzen vernachlässigbar sind, da die zugehörigen Koeffizienten  $a_4$  und  $a_3$  vergleichsweise klein gegenüber den übrigen Koeffizienten sind. Um allerdings eine insgesamt möglichst einfache Beziehung zu bekommen, soll die Wärmeleistung durch einen einfacheren Zusammenhang der Form

$$\dot{Q}_H \sim \Delta T^n \quad (3.69)$$

angenähert werden. Tatsächlich geht die Motivation für diesen Ansatz weit über das Ziel der Approximation hinaus, stellt doch dieses sogenannte *Potenzgesetz*<sup>10</sup> eine in der Praxis häufig verwendete Methode zur Beschreibung der Wärmeleistung eines Heizkörpers dar:

Um einen Heizkörper auf den Markt zu bringen, muß jeder Hersteller zuvor bestimmte Kenn-daten erfassen, um die verschiedensten marktüblichen Heizkörper einordnen und vergleichen zu können. Diese Vorgehensweise wird durch die betreffenden Normen zur Prüfung von Raumheizkörpern [DIN4704, EN442] vorgeschrieben.

Es stellt sich damit die Frage, ob unter Berücksichtigung der Tatsache, daß für jeden Heizkörper bereits bestimmte charakteristische Kennwerte in technischen Datenblättern dokumentiert sind, diese Parameter nicht auch für ein Heizkörpermodell genutzt werden können.

Die wichtigste dieser Kenngrößen ist die sogenannte *Norm-Wärmeleistung*  $\dot{Q}_N$ . Sie gibt bei der Prüfung von Raumheizkörpern die Leistung an, die der Heizkörper in der Prüfkabine (vgl. Kapitel 2) im *Normzustand* abgibt. Dieser Normzustand ist für das Heizmedium Wasser so definiert, daß sich für die Vorlauftemperatur von  $T_V = 90 \text{ °C}$  bei einer Lufttemperatur von  $T_L = 20 \text{ °C}$  eine Rücklauftemperatur von  $T_R = 70 \text{ °C}$  einstellt (Kurzbezeichnung: 90/70/20) [DIN4704]. Da moderne Heizungsanlagen heutzutage mit deutlich niedrigeren Vorlauf-temperaturen betrieben werden, ist man in neueren Normenblättern zu einer Änderung der Definition des Normzustandes übergegangen: hier werden die Auslegungstemperaturen zu 75/65/20 festgelegt [EN442]<sup>11</sup>. Bei der Angabe der Norm-Wärmeleistung muß in technischen

<sup>9</sup> Genaugenommen handelt es sich im streng mathematischen Sinne nicht um ein Polynom, da nicht alle Exponenten ganzzahlig sind.

<sup>10</sup> Die Bezeichnung *Gesetz* hat sich aufgrund der weiten Verbreitung durchgesetzt, obwohl es sich aus physikalischer Sicht um einen empirischen Ansatz handelt.

<sup>11</sup> Bei Heizkörpern für moderne Niedertemperatur-Anlagen wird die Wärmeleistung oft sogar für den Auslegungszustand 55/45/20 mit einer mittleren Übertemperatur von  $\Delta T = 30 \text{ K}$  angegeben.

Datenblättern aufgrund der möglichen Mehrdeutigkeit des Normzustandes die der Messung zugrunde liegende Norm genannt werden.

Der Massenstrom, der jeweils im Normzustand durch den Heizkörper fließt, wird sinngemäß als *Norm-Heizmediumstrom*  $\dot{m}_N$  bezeichnet.

Durch Aufnahme weiterer Meßpunkte bei verschiedenen Übertemperaturen  $\Delta T$  erhält man bei konstantem Norm-Massenstrom eine Kennlinie zur Darstellung der Wärmeleistung des Heizkörpers als Funktion der Übertemperatur. Nach der Norm läßt sich dann die Wärmeleistung in Abhängigkeit von der Übertemperatur mit ausreichender Genauigkeit in Form des zuvor beschriebenen Potenzansatzes

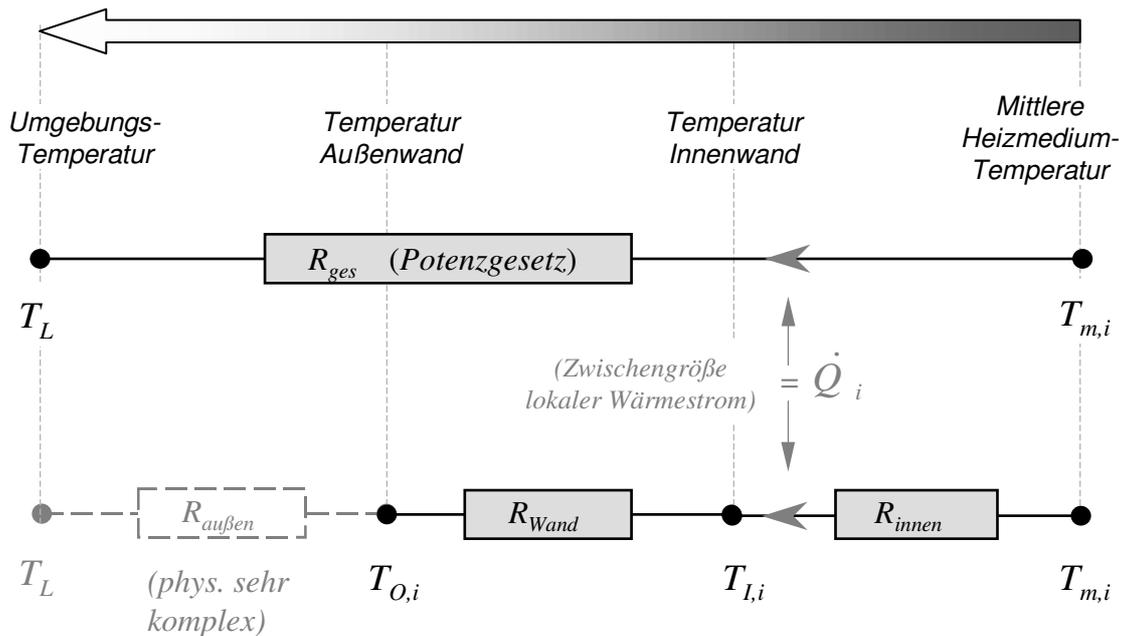
$$\dot{Q}_{HK} = C \cdot \Delta T^n \quad (3.70)$$

mit zunächst unbekanntem Proportionalitätsfaktor  $C$  und Exponenten  $n$  darstellen [DIN4704, EN442]. Werden die Meßwerte in einem Diagramm mit logarithmisch geteilten Achsen aufgetragen, so kann der Exponent  $n$  aus der Steigung einer durch die Meßpunkte gelegten Geraden bestimmt werden. Dieser sogenannte *Heizkörper-Exponent*  $n$  und die Norm-Wärmeleistung  $\dot{Q}_N$  stellen für die Modellbildung des Prozesses Heizkörper sehr aufschlußreiche Größen dar, charakterisieren sie doch das spezifische Verhalten des betreffenden Heizkörpers.

Es liegt also nahe, diese beiden in der Regel für jeden Heizkörper bekannten Parameter für eine Modellbeschreibung auf der Basis des Potenzansatzes zu nutzen. In der Literatur wird die Anwendbarkeit dieser heuristischen Gesetzmäßigkeit vielfach diskutiert und für bestimmte Randbedingungen in Frage gestellt [ADU84-1]. Besonders bei niedrigen Heizmediumströmen (Drosselzustände) weicht das reale Verhalten von der Potenzfunktion zunehmend stärker ab. Im Hinblick auf den gewünschten Anwendungszweck des Modells ( $c$ -Wert-Messung) kann allerdings festgestellt werden, daß die Randbedingungen einer Heizkörperprüfung und einer  $c$ -Wert-Prüfung nahezu identisch sind:

- Als Prüfumgebung wird in beiden Fällen eine Prüfkabine nach DIN 4704 (2), (3) vorgeschrieben.
- Die kennzeichnenden Heizkörperparameter werden beim Norm-Heizmediumstrom ermittelt, dieser ist auch Voraussetzung für eine  $c$ -Wert-Prüfung (Festlegung des Basiszustands).

Der einzig bedeutende Unterschied besteht bei den Auslegungstemperaturen (Vor- und Rücklauf), die bei der  $c$ -Wert-Prüfung niedriger sind als im Normzustand. Liegt die Übertemperatur jedoch im Bereich  $\Delta T \geq 20$  K (Normzustand:  $\Delta T \approx 60$  K [DIN4704] bzw.  $\Delta T \approx 50$  K [EN442], mittlerer Basiszustand:  $\Delta T \approx 30$  K), so kann das Potenzgesetz als hinreichend genau angesehen werden [ADU83].



**Bild 3.19:** Gegenüberstellung Wärmeübergänge – Wärmedurchgang

Ein wichtiger Unterschied in bezug auf die Übertemperatur muß allerdings verdeutlicht werden: Die Übertemperatur hat in dem Potenzansatz nach Gleichung (3.70) nicht mehr die Bedeutung der Oberflächen-Übertemperatur wie zuvor in Gleichung (3.68). Sie stellt vielmehr die mittlere Heizmedium-Übertemperatur nach Gleichung (2.8) dar. Die wirksame Temperaturdifferenz besteht also zwischen Heizmedium und der Umgebung ( $\Delta T = T_m - T_L$ ). Dieser Ansatz beschreibt somit nicht nur den äußeren Wärmeübergang wie in Bild 3.11 dargestellt, sondern den gesamten Wärmedurchgang vom Heizmedium zur Umgebung, siehe Bild 3.19. Mit dem Begriff der Übertemperatur werde im weiteren Verlauf der Arbeit immer die letztgenannte Heizmedium-Übertemperatur bezeichnet.

Mit Hilfe des Potenzgesetzes soll nun ein Ansatz zur Beschreibung der Wärmeleistung  $\dot{Q}_{HK}$  eines Heizkörpers sowie in einem weiteren Schritt für ein diskretes Heizkörper-Segment hergeleitet werden.

Wird die obige Gleichung (3.70) für den Normzustand angeschrieben, so folgt sofort die zuvor definierte Norm-Wärmeleistung

$$\dot{Q}_{HK, Norm} = \dot{Q}_N = C_N \cdot \Delta T_N^n. \quad (3.71)$$

Die (logarithmische) Übertemperatur ist für den Normzustand durch Gleichung (2.8) ebenfalls festgelegt und nimmt nach DIN 4704 (90/70/20) den konstanten Wert  $\Delta T_N = 59,44$  K an (für den Normzustand gemäß EN 442 folgt  $\Delta T_N = 49,83$  K). Damit könnte  $C_N$  für jeden Heizkörper anhand seiner charakteristischen Kenndaten bestimmt werden. Werden diese

Beziehungen mit Gleichung (3.70) ins Verhältnis gesetzt, so folgt der exponentielle Zusammenhang

$$\dot{Q}_{HK} = \dot{Q}_N \frac{C}{C_N} \left( \frac{\Delta T}{\Delta T_N} \right)^n. \quad (3.72)$$

für die Wärmeleistung des Heizkörpers außerhalb des Normzustandes in Abhängigkeit von seiner Übertemperatur  $\Delta T$ .

In einigen Aufsätzen wie [ADU84-1] werden der konstante Faktor  $C/C_N$  und der Exponent  $n$  aus dem physikalisch motivierten Ansatz (Polynom in  $\Delta T$  gemäß Gleichung (3.68)) ermittelt, indem über einen Optimierungsansatz versucht wird, das Zahlenpaar  $(C/C_N, n)$  für die beste Approximation des physikalischen Ansatzes zu gewinnen. Diese Vorgehensweise widerspricht jedoch der oben beschriebenen Motivation zur Verwendung des Potenzansatzes: Es sollen ja die üblicherweise bereits verfügbaren Parameter eines Heizkörpers genutzt und nicht neu ermittelt werden. Der Exponent  $n$  ist also bekannt, so daß lediglich der Vorfaktor  $C/C_N$  unbestimmt bleibt.

Häufig wird bei der Verwendung von Gleichung (3.70) von der Konstanz des Parameters  $C$  über einen bestimmten Betriebsbereich ausgegangen, so daß auch  $C_N = C$  gilt und damit der unbekannte Vorfaktor in Gleichung (3.72) entfällt. Diese Beziehung findet sich dann häufig in den technischen Datenblättern zur Berechnung der Wärmeleistung bei anderen Auslegungstemperaturen als im Normzustand. Das Potenzgesetz findet sich in dieser einfachen Form ebenfalls in den betreffenden Normblättern, in den Katalogen und Datenblättern der Heizkörperhersteller sowie in der einschlägigen Literatur wieder.

Das Potenzgesetz soll nun dazu genutzt werden, um die Wärmeabgabe des diskreten Teilmodells *Segment* zu beschreiben und damit eine alternative Beschreibung für den Gleichungsterm  $\dot{Q}_H$  der Wärmestrombilanz (3.4) zu erhalten. Ein erster Ansatz folgt aus der einfachen Aufteilung des Gesamt-Wärmestroms, so daß als Norm-Wärmeleistung für jedes einzelne Segment der gleiche Anteil  $\dot{Q}_N / N_A$  eingesetzt wird,

$$\dot{Q}_H = \frac{\dot{Q}_N}{N_A} \left( \frac{\Delta T}{\Delta T_N} \right)^n, \quad (3.73)$$

wobei  $N_A$  die Anzahl der Segmente je Glied angibt (vertikale Diskretisierung). Die Übertemperatur  $\Delta T$  wird dementsprechend auch nur für dieses eine Segment berechnet:

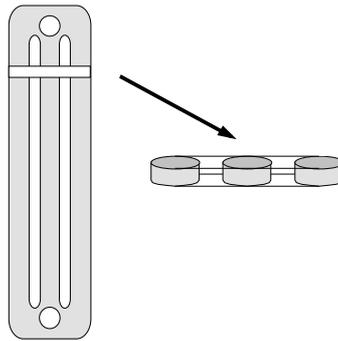
$$\Delta T = \frac{T_E - T_A}{\ln \frac{T_E - T_L}{T_A - T_L}}. \quad (3.74)$$

An einem einzelnen Segment ist bei einer Diskretisierung von  $N_A \gg 1$  die Differenz zwischen der Temperatur  $T_E$  des einströmenden und  $T_A$  des ausströmenden Heizmediums und damit die *Temperaturspreizung*  $T_E - T_A$  relativ klein (Beispiel:  $T_V = 55 \text{ °C}$ ,  $T_R = 45 \text{ °C}$ ,  $N_A = 10$  Segmente  $\Rightarrow$  Temperaturspreizung eines Segments  $\approx 1 \text{ K}$ ). Daher kann für die Berechnung der Übertemperatur eines Segmentes in guter Näherung auch die arithmetische Übertemperatur

$$\Delta T_{ar} = \frac{T_E + T_A}{2} - T_L \quad (3.75)$$

eingesetzt werden. Bei sehr kleinen Temperaturspreizungen des Heizmediums stimmt diese mit der logarithmischen Übertemperatur praktisch überein.

Für eine korrekte Anwendung des Potenzansatzes muß ein weiterer wichtiger Aspekt beachtet werden. Für einen Gliederradiator beschreibt die lokale Wärmeabgabe nach Gleichung (3.73) jetzt nicht mehr nur ein Segment einer einzelnen Säule, sondern ein Segment bzw. eine *Schicht* des gesamten Gliedes mit  $N_S$  Säulen (Bild 3.20). Das widerspricht zwar der ursprünglichen Strukturierung nach Abschnitt 3.3, wo die Glieder zunächst in Säulen und diese dann in einzelne Segmente zerlegt wurden. Andererseits erweist sich die Einführung solcher kompletten „Gliedersegmente“ als zweckmäßig und sogar erforderlich, weil in den Datenblättern für Gliederheizkörper die Parameter Norm-Wärmeleistung  $\dot{Q}_N$  und Heizkörper-Exponent  $n$  üblicherweise *je Glied* angegeben werden. Würde dennoch die Aufteilung eines Gliedes in Säulen durchgeführt, so könnte der Potenzansatz nicht mehr ohne weiteres für jede einzelne Säule angewandt werden. Sicherlich unterscheidet sich bei mehreren Säulen je Glied die Phänomenologie des Wärmeübergangs zwischen den inneren und äußeren Säulen (Strahlung, Konvektion). Daher bleibt fraglich, ob die Anwendung des Potenzansatzes auf einzelne Segmente innerhalb des Gliedes sinnvoll und überhaupt zulässig wäre.



**Bild 3.20:** Vollständige Schicht eines Gliedes als „Gliedersegment“

Für den Plattenheizkörper muß eine ähnliche Betrachtung erfolgen. Hier wird die Norm-Wärmeleistung üblicherweise je laufendem Meter Baulänge angegeben. Soll die Gleichung (3.73) jeweils für ein Segment eines wasserführenden Kanals angesetzt werden, so wird als zusätzliche Information noch die Anzahl der senkrechten Wasserkanäle je Meter benötigt. Dieser Wert ist für den Plattenheizkörper ebenfalls bekannt und wird aus der *Teilung*  $p_T$  bestimmt [BUD94]. Damit folgt für die lokale Wärmeabgabe des Segmentes eines Plattenheizkörpers die Beziehung

$$\dot{Q}_H = \frac{\dot{Q}_N}{N_A} \frac{p_T}{L_{Bez}} \left( \frac{\Delta T}{\Delta T_N} \right)^n. \quad (3.76)$$

Übliche DIN-Plattenheizkörper weisen eine Säulenteilung von  $p_T = 30$  mm bei einer Bezugslänge von  $L_{Bez} = 1$  m auf, d.h. durch die Profilierung werden je Meter Baulänge  $33\frac{1}{3}$  wasserführende senkrechte Kanäle ausgeprägt. Alternativ kann eine Unterteilung des Plattenheizkörpers in „Meterstücke“ erfolgen, so daß die Teilung als Parameter wegfällt, da ja die Norm-Wärmeleistung je Meter angegeben wird. Ein diskretes Segment würde dann eine Schicht mit einer Breite von 1 m darstellen. Die Motivation für eine solche, zunächst grob erscheinende Strukturierung wird im Zusammenhang mit der anschließenden Modellierung der beiden „T-Stücke“ verdeutlicht.

Bei der Festlegung des Heizmedium-Massenstromes als Schnittstelle bzw. Koppeleingang wird beim Stahlröhrenradiator nun der Massenstrom durch das gesamte Glied berücksichtigt, während er beim Plattenheizkörper entsprechend der Strukturierung je wasserführendem Kanal bzw. je Meter Baulänge angesetzt wird (Tabelle 3.9).

**Tabelle 3.8:** Modellgleichungen für die Wärmeleistung beim Potenzansatz

Lokale Wärmeabgabe an die Umgebung	$\dot{Q}_H = \frac{\dot{Q}_N}{N_A} \left( \frac{\Delta T}{\Delta T_N} \right)^n$	(Glieder-HK: je Glied)
	$\dot{Q}_H = \frac{\dot{Q}_N}{N_A} \frac{p_T}{L_{Bez}} \left( \frac{\Delta T}{\Delta T_N} \right)^n$	(Platten-HK: je Kanal)
Lokale Übertemperatur	$\Delta T = \frac{T_E + T_A}{2} - T_L$	(arithmetisches Mittel)

**Tabelle 3.9:** Schnittstellen und Eingänge eines Segments beim Potenzansatz

Koppeleingänge	$T_E$	Temperatur des einströmenden Heizmediums
	$\dot{m}_S$	Massenstrom durch: Glied / Kanal / je m Baulänge
Koppelausgänge	$T_A$	Temperatur des ausströmenden Heizmediums
	$\dot{m}_S$	Massenstrom durch: Glied / Kanal / je m Baulänge
Eingangsgrößen	$T_L$	Mittlere Temperatur der umgebenden Luft / Wände

Im Vergleich zum physikalisch motivierten Ansatz (Tabelle 3.6) fällt auf, daß die globale Eingangsgröße *Wandtemperatur der Prüfkabine* beim Potenzansatz nicht mehr auftritt. Die getrennte Modellierung der Phänomene Konvektion (Einflußgröße  $T_L$ ) und Strahlung (Einflußgröße  $T_W$ ) findet nun nicht mehr statt, in den Gleichungen des Potenzansatzes tritt als wirksame Potentialdifferenz die Übertemperatur  $\Delta T$  auf, für deren Berechnung die verallgemeinerte *Umgebungstemperatur*  $T_U$  verwendet wird. Diese müßte genau genommen aus der Luft- und der Wandtemperatur gemittelt werden, da beide einen Einfluß auf den Wärmeübergang haben. Hält man sich wiederum die Prüfbedingungen nach der Norm [EN834] vor Augen (Abschnitt 2.2.1), so ist dort von einer „klimastabilen“ Prüfkabine die Rede, bei der in guter Näherung von der Gleichheit der Luft- und Wandtemperatur ausgegangen werden kann. Aus diesen Gründen stimme in den weiteren Ausführungen zum Potenzansatz der Wert der Umgebungstemperatur  $T_U$  mit dem der Lufttemperatur  $T_L$  überein, so daß zur Berechnung der Übertemperatur stets die Lufttemperatur  $T_L = T_U$  herangezogen wird (Tabelle 3.8).

### Modellierung der „T-Stücke“ zur Verzweigung / Vereinigung

Eine Säule wird bis zum Erreichen der kompletten Bauhöhe des Heizkörpers  $B_H$  aus einzelnen Segmenten zusammengesetzt. Damit wird bereits die gesamte „vertikale“ Wärmeabgabe einer Heizkörpersäule modelliert. Ein T-Stück kann deshalb vereinfacht so modelliert werden, daß es selbst keine Wärme abgibt, sondern lediglich die Aufteilung des Massenstroms beschreibt; die Wärmeabgabe der kurzen horizontalen Abschnitte wird also vernachlässigt. Zu Beginn des Abschnitts 3.4 wurde zudem bereits angenommen, daß sich der Heizmedium-Massenstrom gleichmäßig auf alle Glieder und Säulen bzw. wasserführenden Kanäle aufteilt.

Unter dieser Voraussetzung gilt für den Massenstrom durch ein Glied

$$\dot{m}_G = \frac{1}{N_G} \dot{m}_{HK} \quad (3.77)$$

und in gleicher Weise für den Massenstrom durch eine Säule

$$\dot{m}_S = \frac{1}{N_S} \dot{m}_G = \frac{1}{N_S N_G} \dot{m}_{HK} . \quad (3.78)$$

Für das obere T-Stück *Verzweigung* kann aus der Energiebilanz die Bilanzgleichung für die beteiligten Wärmeströme

$$\dot{Q}_{Sp} = \dot{Q}_{Ein} - \dot{Q}_{Aus} - \dot{Q}_{Glieder} \quad (3.79)$$

angeschrieben werden. Durch eine ähnliche Approximation des Speicherterms wie in Gleichung (3.6) könnte das instationäre Verhalten durch Berücksichtigung der beteiligten Speichermassen beschrieben werden, für den  $c$ -Wert-Prüfstand wird jedoch wieder die stationäre Bedingung  $\dot{Q}_{Sp} = 0$  eingesetzt.

Da das T-Stück selbst keine Wärme abgeben soll, folgt für die Differenz aus ein- und austretendem Wärmestrom

$$\dot{Q}_{Ein} - \dot{Q}_{Aus} = (\dot{m}_{Ein} - \dot{m}_{Aus}) c_{p,W} T_E , \quad (3.80)$$

das Heizmedium erfährt also in horizontaler Richtung keine Abkühlung. Der Wärmestrom in das Glied wird durch

$$\dot{Q}_{Glieder} = \dot{m}_G c_{p,W} T_E \quad (3.81)$$

beschrieben. Somit führt die Wärmebilanzgleichung bei dieser Betrachtung zu der Massenstrombilanz

$$\dot{m}_{Ein} = \dot{m}_G + \dot{m}_{Aus} \quad (3.82)$$

für das obere T-Stück *Verzweigung*.

In gleicher Vorgehensweise wird auch das untere T-Stück betrachtet und modelliert. Die Bilanzgleichung für die Wärmeströme lautet hier

$$\dot{Q}_{Sp} = \dot{Q}_{Ein} - \dot{Q}_{Aus} + \dot{Q}_{Glie} \quad (3.83)$$

Durch Einsetzen der jeweiligen Wärmeströme folgt mit  $\dot{Q}_{Sp} = 0$  und Division durch  $c_{p,W}$

$$\dot{m}_{Aus} T_{Aus} = \dot{m}_{Ein} T_{Ein} + \dot{m}_G T_G \quad (3.84)$$

Die Ausgangstemperatur aus dem T-Stück  $T_{Aus}$  stellt sich aufgrund einer Durchmischung der beiden eintretenden Massenströme mit den jeweiligen Temperaturwerten  $T_G$  als Austrittstemperatur des aktuellen Gliedes und  $T_{Ein}$  als Temperatur des Heizmediums vom vorherigen T-Stück ein.

Um eine spätere Verkopplung der T-Stücke untereinander und mit den Säulen zu ermöglichen, werden als Koppelgrößen wieder die Temperatur und der Massenstrom des Heizmediums an der jeweiligen physikalischen Schnittstelle festgelegt.

Die bisherige Betrachtung der T-Stücke wurde aufgrund der anschaulichen Topologie nur auf den Stahlröhrenradiator bezogen. Für den Plattenheizkörper lassen sich jedoch die unteren und oberen Verbindungselemente zwischen zwei wasserführenden Kanälen ebenfalls als T-Stücke berücksichtigen und demnach auch in gleicher Weise modellieren. Es entstehen daher insgesamt nur die beiden Modellklassen *T-Stück Verzweigung* und *T-Stück Zusammenführung*, welche durch entsprechende Parameterwahl für verschiedene Heizkörpertypen verwendet werden können. Zusammen mit den Modellbausteinen *Gliedersegment* und *Plattensegment* lassen sich die beiden Heizkörpertypen *Gliederheizkörper* und *Plattenheizkörper* vollständig nachbilden. Hier werden wiederum die Vorteile der objektorientierten Vorgehensweise bei der Modellbildung deutlich.

Es wurde bereits angedeutet, daß sich in der Praxis im stationären Zustand in horizontaler Richtung für nicht zu große Baulängen und bei Norm-Massenstrom ein nahezu konstantes Temperaturniveau einstellt. Diese Beobachtung wird auch in der Literatur (z.B. [ADU91, SCHL76]) beschrieben und durch Messungen und Wärmebilder (Thermographieaufnahmen) von Heizkörpern bestätigt.

Für die Untersuchung des thermischen Verhaltens im stationären Basiszustand genügt daher prinzipiell die Betrachtung eines einzelnen Heizkörpergliedes, da für die  $c$ -Wert-Messung lediglich das vertikale Temperaturprofil von Bedeutung ist.

### 3.4.5 Gegenüberstellung von physikalischem Ansatz und Potenzgesetz

Zur Abschätzung der Modellgüte soll als Vorgriff auf die Simulation ein Vergleich zwischen dem vorgestellten Potenzansatz und dem zuvor beschriebenen physikalisch motivierten Ansatz in Verbindung mit einer ersten Validierung durchgeführt werden. Als Resümee dieses Vergleichs wird ein weiterer Ansatz vorgestellt, der sich durch eine geeignete Erweiterung aus dem einfachen Potenzansatz herleitet und im weiteren als *modifizierter Potenzansatz* bezeichnet wird.

### Simulationsstudien zum physikalisch motivierten Ansatz

Zur ersten Validierung des physiknahen Ansatzes nach Abschnitt 3.4.2 wurden mit dem Modellierungswerkzeug *CAMex* zwei verschiedene Heizkörpermodelle für den Heizkörpertyp *Stahlröhrenradiator* und ein Modell für den *Plattenheizkörper* erzeugt. Die Wahl dieser exemplarischen Heizkörpertypen folgt zwangsläufig aus den bei der Herleitung getroffenen Annahmen und Beschränkungen (ebene Platte bzw. kreisrunder Fließkanalquerschnitt). Details zur Implementierung und Verkopplung verschiedener Modellbausteine zum Simulationsmodell werden später in Kapitel 5 beschrieben.

Für das Teilmodell *Heizkörper* wurden zur Analyse der verschiedenen Ansätze separate Parameterstudien durch Simulation der Modelle durchgeführt.

In einer ersten Studie werden zwei unterschiedliche Diskretisierungsstufen eines Stahlröhrenradiators untersucht. Bei einem aus 10 Gliedern mit einer Säule je Glied bestehenden Modell wird jede Säule in 5, 10 und 20 Segmente zerlegt. Als reale Vorlage für diesen Modellheizkörper dient der Einsäuler-Stahlröhrenradiator des Herstellers *Zehnder*. Unter Vorgabe der entsprechenden Geometrie- und allgemeinen Stoffparameter werden die Modelle im Normzustand simuliert. Als Kenngrößen für die Validierung werden Rücklauftemperatur, Norm-Wärmeleistung und Strahlungsanteil aus den technischen Datenblättern der Hersteller herangezogen. Aus der Studie lassen sich die folgenden wesentlichen Schlußfolgerungen ziehen:

- Die beiden Modellparameter  $C_K$  (Konstante des Konvektionsterms) und  $q$  (strahlungswirksamer Flächenanteil) stellen sich als „kritische“ bzw. „unsichere“ Parameter heraus. Um die Norm-Wärmeleistung unter Einhaltung des vom Hersteller angegebenen Strahlungsanteils zu erreichen, muß insbesondere die Konvektionskonstante  $C_K$  im allgemeinen größer als der in der Herleitung berechnete Wert gewählt werden.

- Für den strahlungswirksamen Flächenanteil werden anhand der Studie Werte im Bereich von  $q = [0,63...0,52]$  identifiziert, während  $C_K$  im Bereich  $[1,8...2,8] \text{ Wm}^{-7/4} \text{ K}^{-5/4}$  liegt. Dabei wurde die Bauhöhe in einem Intervall  $B_H = [0,2...3,0]$  m variiert.
- Auffällig ist vor allem die Abhängigkeit des Parameters  $C_K$  von der Bauhöhe des Heizkörpers, da sich dieser nach der Herleitung lediglich aus Konstanten und Stoffparametern zusammensetzt. Dagegen kann die Bauhöhenabhängigkeit des Parameters  $q$  anschaulich dadurch erklärt werden, daß Gliederheizkörper durch den Einfluß der horizontalen Sammelkanäle tatsächlich einen höheren strahlungswirksamen Flächenanteil bei niedrigeren Bauhöhen aufweisen. Für einen Säulendurchmesser von 23 mm werden bei einer Gliedbaulänge von 36 mm allerdings allgemein höhere Werte als die identifizierten erwartet.
- Beim Vergleich der verschiedenen Diskretisierungsstufen (5 / 10 / 20 Segmente) fällt auf, daß die modellierte Konvektionsleistung bei einer feineren Diskretisierung leicht ansteigt (um etwa 2,8 % bei doppelter Feinheit). Eine ähnliche Tendenz zeigt auch die Strahlungsleistung (Anstieg um ca. 1,5 %). Demnach bleibt der Strahlungsanteil nahezu konstant, während sich die Gesamtleistung des Heizkörpers bei konstanten Werten für  $C_K$  und  $q$  durch eine feinere Diskretisierung leicht erhöht (um etwa 1,8 % bei Verdoppelung der Anzahl der Diskretisierungsstufen).

Die Ergebnisse der Parameterstudie zeigen, daß für die beiden Parameter  $C_K$  und  $q$  keine konstanten, von der Heizkörper-Bauhöhe unabhängigen Werte eingesetzt werden können. Dies widerspricht jedoch der theoretischen Herleitung des Konvektionsparameters  $C_K$  aus Gleichung 3.42 (Konstanz von  $C_K$ ). Die leichte Bauhöhenabhängigkeit des strahlungswirksamen Flächenanteils  $q$  erscheint dagegen noch plausibel.

In einer zweiten Studie wird der physikalisch motivierte Ansatz am Modell eines Plattenheizkörpers untersucht. Für den Modellheizkörper werden 10 wasserführende Kanäle mit 5 Segmenten je Kanal zu einem Plattenheizkörper verkoppelt. Zur Validierung des Modells eignen sich einreihige Plattenheizkörper ohne Konvektionsbleche (Bezeichnung „Typ 10“). Verglichen werden abermals die simulierte Norm-Wärmeleistung und der Strahlungsanteil mit den jeweiligen Herstellerangaben (*Buderus, Zehnder*).

- Der strahlungswirksame Flächenanteil nimmt bei einem Plattenheizkörper den Wert  $q = 1$  an, da die gesamte sichtbare Oberfläche strahlungswirksam ist. Das Modell kann folglich nur durch den Konvektionsparameter  $C_K$  beeinflusst werden.
- Zum Erreichen der Norm-Wärmeleistung muß für Bauhöhen von  $B_H = [0,35...0,9]$  m der Parameter  $C_K = [0,79...0,82] \text{ Wm}^{-7/4} \text{ K}^{-5/4}$  vorgegeben werden. Die Abhängigkeit von der Bauhöhe scheint recht gering, es werden hier jedoch nur Bauhöhen bis zu 0,9 m betrachtet. Die Werte für  $C_K$  liegen damit nur geringfügig unter dem theoretisch hergeleiteten Wert von  $C_K = 1,037 \text{ Wm}^{-7/4} \text{ K}^{-5/4}$ .

- Wird unter Berücksichtigung der korrekten Norm-Wärmeleistung der Strahlungsanteil betrachtet, so liefert das Modell hier Werte bis zu 70 %. Laut Herstellerangaben besitzen die Heizkörper jedoch nur einen Strahlungsanteil von maximal 35 %.

Auf den Strahlungsterm kann beim Modellansatz für den Plattenheizkörper kein Einfluß mehr genommen werden. Während die Gesamt-Wärmeleistung durch den theoretisch hergeleiteten Wert für  $C_K$  noch relativ gut nachgebildet wird, tritt ein nicht zu vernachlässigender Fehler im Verhältnis von Strahlungs- zu Konvektionsleistung auf.

Zur Auswertung der Parameterstudien sei noch angemerkt, daß bei der Verwendung der Datenblätter von Heizkörperherstellern davon ausgegangen wurde, daß der angegebene Strahlungsanteil das tatsächliche Verhältnis der Strahlungsleistung zur Gesamtleistung wiedergibt<sup>12</sup>.

Insgesamt läßt sich aus den *Parameterstudien A* und *B* die Schlußfolgerung ziehen, daß sich die detaillierte, physikalisch motivierte Modellierung des äußeren Wärmeübergangs nur sehr eingeschränkt anwenden läßt, zumal die Herleitung nur für zwei spezielle Geometrieformen vorgenommen werden konnte. Damit scheidet dieser Ansatz insbesondere im Hinblick auf den Wunsch nach einem möglichst allgemeingültigen Modellansatz für verschiedene Heizkörpertypen aus.

### **Simulationsstudien zum Potenzansatz**

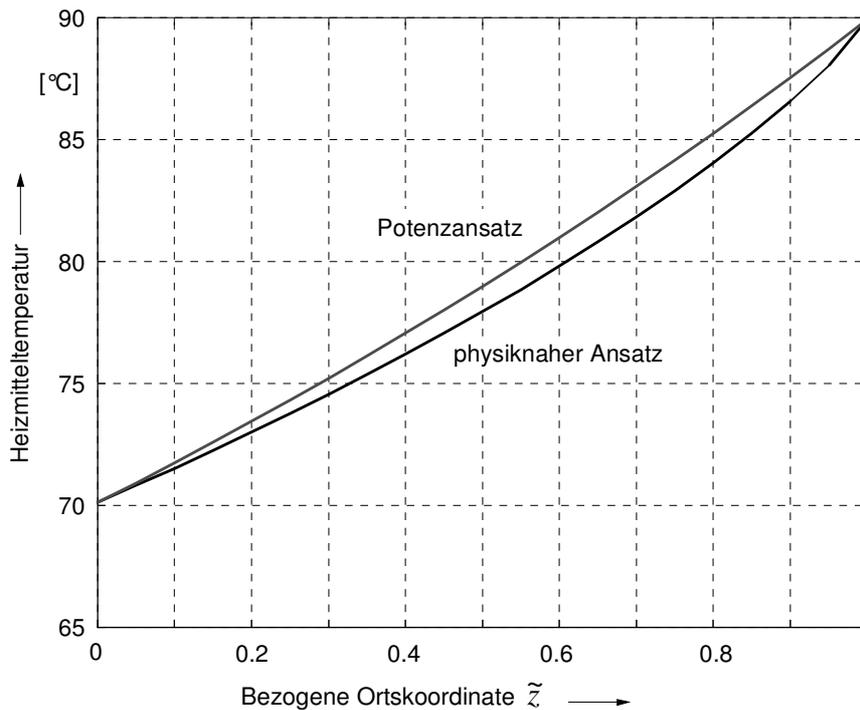
In den Modellgleichungen zum einfachen Potenzansatz treten neben Stoff- und Geometrieparametern nur noch die bekannten charakteristischen Heizkörperparameter Norm-Wärmeleistung  $\dot{Q}_N$  und Heizkörper-Exponent  $n$  auf. Eine Parameterstudie entfällt somit, da strukturbedingt keine unbekanntes bzw. „unsicheren“ Parameter existieren, so daß hier nur eine erste Validierung des Modells erfolgt.

Die Simulationen verschiedener, nach dem einfachen Potenzansatz generierten Heizkörpermodelle kommen zu dem gemeinsamen Ergebnis, daß die Kontrollgrößen *Rücklaufemperatur* und *Norm-Wärmeleistung* erreicht werden. Die Beschreibung der lokalen Wärmeabgabe eines Segmentes nach Gleichung (3.73) liefert somit auch für das Gesamtmodell eines Heizkörpers ein korrektes Ergebnis. Der Strahlungsanteil kann nicht überprüft werden, da ja die gesamte Wärmeleistung durch den Potenzansatz beschrieben wird und somit die Phänomene Strahlung und Konvektion strukturbedingt nicht ohne weiteres separiert werden können.

Zum Vergleich des physikalisch motivierten Ansatzes mit dem einfachen Potenzansatz werden in der folgenden Grafik die Temperaturprofile gegenübergestellt. Als Randbedingung wurde jeweils der gleiche Heizkörper im Normzustand simuliert.

---

<sup>12</sup> Die Ermittlung und Dokumentation des Strahlungsanteils in Hersteller-Datenblättern wird durch die Norm nicht explizit vorgeschrieben. Somit gibt es auch keine verlässlichen Aussagen zur Meßmethode und damit zur Genauigkeit der angegebenen Zahlenwerte, mit denen der simulierte Strahlungsanteil verglichen wird.



**Bild 3.21:** Vertikales Temperaturprofil am Heizkörper zum Vergleich der beiden Ansätze

### 3.4.6 Modifizierter Potenzansatz

Als fundamentale Eigenschaften der beiden bisher vorgestellten Ansätze können folgende Punkte hervorgehoben werden:

- Aus dem physikalisch motivierten Ansatz wird die grundsätzliche Erkenntnis gewonnen, daß die konvektive Wärmeabgabe eines diskreten Segmentes außer von der Übertemperatur auch von der aktuellen Höhe  $z$  dieses Segmentes abhängt. Gemäß dem Konvektionsterm aus Tabelle 3.6 gilt die Abhängigkeit  $\dot{Q}_{Konv} \sim z^{-1/4}$ . Die Wärmeabgabe durch Konvektion verhält sich umgekehrt proportional zur Grenzschichtdicke  $\delta(z) \sim z^{1/4}$ , d.h. je dünner die Grenzschicht an einem Segment ist, desto höher ist auch die lokale Konvektionsleistung. Die Wärmeabgabe durch Strahlung hängt dagegen nur von der Übertemperatur ab.
- Beim einfachen Potenzansatz nach Gleichung (3.73) werden bereits bekannte, charakteristische Heizkörper-Parameter genutzt, da sie für nahezu jeden gebräuchlichen Heizkörper verfügbar sind (Hersteller-Datenblätter) und bereits eine bestimmte Charakteristik des Heizkörpers widerspiegeln.

Das Potenzgesetz ist in der Praxis zur Ermittlung der Heizkörperleistung bei verschiedenen Systemtemperaturen allgemein verbreitet und wird in den betreffenden Normenblättern zitiert [DIN4704; EN442]. Während also die Anwendbarkeit des Potenzgesetzes für den Heizkörper

„in seiner Gesamtheit“ in der Literatur mehrfach bestätigt wurde, ist die Gültigkeit des Ansatzes beim Übergang auf ein diskretes Segment bisher noch nicht näher untersucht worden.

Nach den vorangegangenen Ausführungen wird für die diskrete Normleistung jedes Segmentes der gleiche Anteil an der gesamten Norm-Wärmeleistung angesetzt. Da jedoch die konvektive Wärmeabgabe, wie aus der physikalischen Phänomenologie geschlossen werden kann, grundsätzlich von der Höhe  $z$  am Heizkörper als Ortskoordinate abhängt, muß die vorgenommene Vereinfachung  $C/C_N = 1$  prinzipiell in Frage gestellt werden. Zusätzlich werden die Phänomene Strahlung und Konvektion auch durch das vertikale Temperaturprofil beeinflußt.

Während also beim einfachen Potenzansatz die lokale Norm-Wärmeleistung jedes einzelnen Segmentes gleichgesetzt wird, soll nun wieder der zunächst unbekannte Faktor  $C^* = C/C_N$  eingeführt werden. Dabei wird die Struktur des Gewichtungsfaktors  $C^*$  so gewählt, daß sich die prinzipiellen Unterschiede der Wärmeabgabe durch die beiden Phänomene Konvektion und Wärmestrahlung in der Struktur des Ansatzes wiederfinden. Ausgehend von der zuvor gewonnenen Strukturinformation, daß die konvektive Wärmeabgabe von der aktuellen Höhe in der Form  $\dot{Q}_{Konv} \sim z^{-1/4}$  abhängt, wird für den Gewichtungsfaktor die Beziehung

$$C^*(z) = C_K \left( \frac{B_H}{z} \right)^{1/4} + C_S \quad (3.85)$$

angesetzt ( $B_H =$  Bauhöhe des Heizkörpers), so daß für die lokale Wärmeabgabe eines Segmentes der neue Ansatz

$$\dot{Q}_H = C^*(z) \cdot \frac{\dot{Q}_N}{N_A} \left( \frac{\Delta T}{\Delta T_N} \right)^n \quad (3.86)$$

folgt. Durch diese Wahl des Gewichtungsfaktors werden die zwei unbekanntenen, dimensionslosen Parameter  $C_K$  und  $C_S$  eingeführt<sup>13</sup>.

Diese beiden Parameter können jedoch nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Ein physikalisch gültiger Ansatz muß die Bedingung erfüllen, daß im Normzustand die Summe aller lokalen Wärmeleistungen der einzelnen Segmente der Norm-Gesamtwärmeleistung des betreffenden Gliedes entspricht:

$$\dot{Q}_{Ges} = \sum_{N_A} \left[ C_K \left( \frac{B_H}{z} \right)^{1/4} + C_S \right] \cdot \frac{\dot{Q}_N}{N_A} \left( \frac{\Delta T(z)}{\Delta T_N} \right)^n = \dot{Q}_N \quad (3.87)$$

<sup>13</sup> Der Parameter  $C_K$  steht in diesem Ansatz für einen neuen, a priori unbekanntenen Parameter und hat mit der zusammengefaßten Konstanten  $C_K$  des physikalisch motivierten Ansatzes aus Gleichung (3.42) nichts gemein.

Die Auswertung dieser Bedingung für den Normzustand liefert eine Beziehung zwischen  $C_K$  und  $C_S$ , so daß als Freiheitsgrad ein in bestimmten Grenzen frei wählbarer Parameter übrig bleibt. Mit der finiten Höhe eines Segmentes  $\Delta z$  und der daraus folgenden Diskretisierung  $N_A = B_H/\Delta z$  ergibt sich nach der Division durch die Norm-Wärmeleistung der Ausdruck

$$\sum_{\Delta z} \left[ C_K \left( \frac{B_H}{z} \right)^{1/4} + C_S \right] \cdot \frac{\Delta z}{B_H} \left( \frac{\Delta T(z)}{\Delta T_N} \right)^n = 1. \quad (3.88)$$

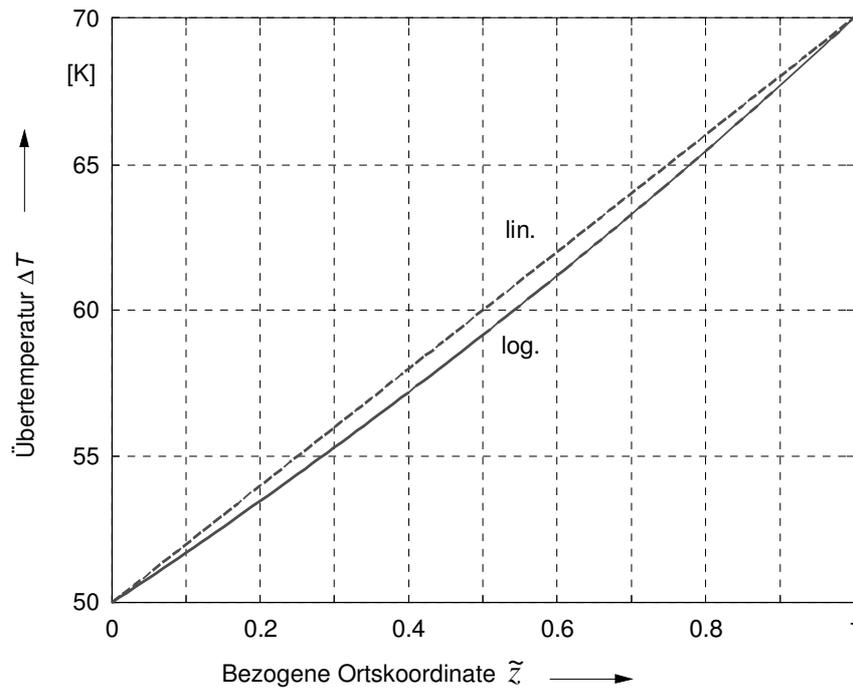
Wird nun der Grenzübergang  $\Delta z \rightarrow 0$  betrachtet, indem unendlich viele Segmente angenommen werden ( $N_A \rightarrow \infty$ ), so läßt sich die Summenauswertung in eine Integralbedingung überführen. Nach Einführung der bezogenen Ortskoordinate  $\tilde{z} = z/B_H$  folgt damit für die beiden Parameter die Integralbedingung

$$\int_0^1 (C_K \cdot \tilde{z}^{-1/4} + C_S) \cdot \left( \frac{\Delta T(\tilde{z})}{\Delta T_N} \right)^n d\tilde{z} = 1. \quad (3.89)$$

Um die Integration ausführen zu können, fehlt noch ein Ausdruck für die Übertemperatur  $\Delta T(\tilde{z})$ , die ja von der Höhe  $z$  bzw.  $\tilde{z}$  abhängt. Im betrachteten Normzustand mit den definierten Auslegungstemperaturen  $T_V = 90 \text{ °C}$ ,  $T_R = 70 \text{ °C}$  und  $T_L = 20 \text{ °C}$  wird der Bereich  $50 \text{ K} \leq \Delta T(\tilde{z}) \leq 70 \text{ K}$  überstrichen. Für die Übertemperatur  $\Delta T$  lassen sich mit  $\tilde{z} = 0 \dots 1$  zwei mögliche Ansätze angeben:

$$\begin{aligned} \Delta T(\tilde{z}) &= a + b \tilde{z} = 50 \text{ K} + 20 \text{ K} \cdot \tilde{z} && \text{(linear)} \\ \Delta T(\tilde{z}) &= c d^{\tilde{z}} = 50 \text{ K} \cdot \left( \frac{7}{5} \right)^{\tilde{z}} && \text{(logarithmisch)} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Die Grafik in Bild 3.22 veranschaulicht den Unterschied zwischen diesen beiden Ansätzen für das Übertemperatur-Profil  $\Delta T(\tilde{z})$ .



**Bild 3.22:** Ansätze für das Profil der Übertemperatur  $\Delta T(\tilde{z})$

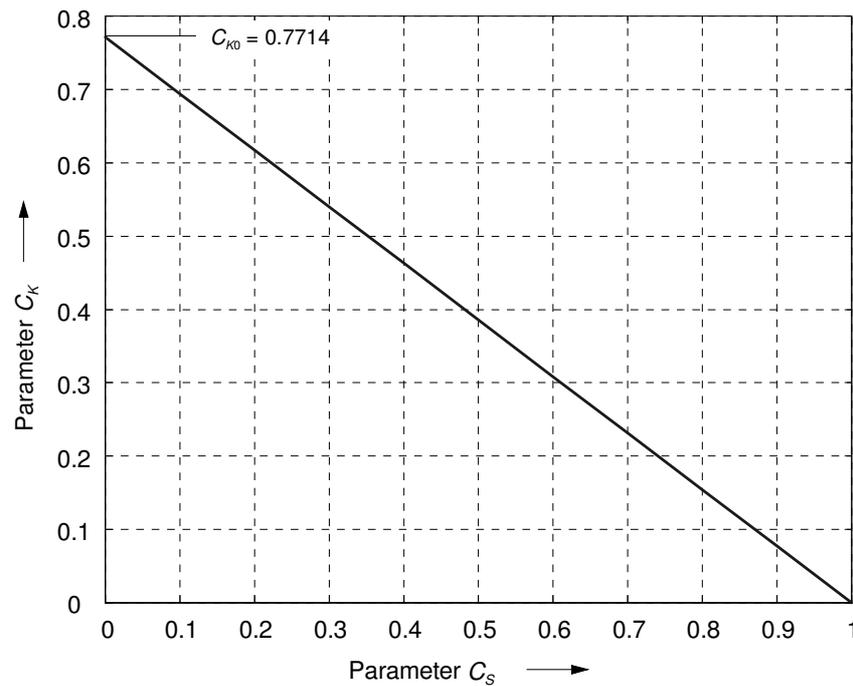
Aus den zuvor beschriebenen Simulationsstudien und der einschlägigen Literatur wie z.B. [ADU91] kann allgemein die Erkenntnis gezogen werden, daß das Temperaturprofil auch im Normzustand nicht linear ist, sondern eher einem logarithmischen Verlauf entspricht.

Wird also für  $\Delta T(\tilde{z})$  das logarithmische Temperaturprofil eingesetzt, folgt zusammen mit den Zahlenwerten für die logarithmische Übertemperatur  $\Delta T_N$  im Normzustand die Integralbedingung

$$\int_0^1 (C_K \tilde{z}^{-1/4} + C_S) \left[ \frac{5}{2} \left( \frac{7}{5} \right)^{\tilde{z}} \ln \frac{7}{5} \right]^n d\tilde{z} = 1. \quad (3.91)$$

In dieser Beziehung taucht allerdings noch der Heizkörper-Exponent  $n$  auf. Die Gleichung muß somit mehrfach innerhalb eines in der Praxis sinnvollen Wertebereichs des Exponenten  $n$  ausgewertet werden, um die Abhängigkeit vom Heizkörper-Exponenten festzustellen.

Die numerische Auswertung des symbolisch nicht geschlossen lösbaren Integrals liefert zwischen den Parametern  $C_K$  und  $C_S$  den in Bild 3.23 graphisch dargestellten Zusammenhang. Der Heizkörper-Exponent  $n$  wurde für diese Auswertung in den praktisch relevanten Grenzen von  $n = 1,20 \dots 1,33$  variiert, ohne daß der Verlauf der Kurve erkennbare Abweichungen zeigte.



**Bild 3.23:** Auswertung der Integralbedingung nach Gleichung (3.91) für  $C_K$  und  $C_S$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Parametern läßt sich sehr gut durch eine Gerade approximieren. Aus der Grafik kann sofort die Gleichung dieser Geraden zu

$$C_K = C_{K0}(1 - C_S) \quad \text{mit} \quad C_{K0} = 0,7714 \quad (3.92)$$

abgelesen werden, womit für den zuvor eingeführten Gewichtungsfaktor  $C^*(z)$  die Beziehung

$$C^*(z) = C_{K0}(1 - C_S) \left( \frac{B_H}{z} \right)^{\frac{1}{4}} + C_S \quad (3.93)$$

folgt, in der jetzt nur noch der unbekannte Parameter  $C_S$  auftaucht.

Durch diese Modifikation des allgemeinen Potenzansatzes wird in den Gleichungen für das Teilmodell *Heizkörper* ein neuer Modellparameter eingeführt. Dieser unbekannte Parameter soll im folgenden eingehend betrachtet werden, indem sein Einfluß zunächst theoretisch untersucht und anschließend mittels einer geeigneten Parameterstudie analysiert wird.

Der dimensionslose Parameter  $C_S$  läßt sich nach Bild 3.23 grundsätzlich in dem Wertebereich von  $C_S = [0 \dots 1]$  variieren. Diese Grenzwerte lassen sich in Anlehnung an die Phänomene des Wärmeübergangs wie folgt interpretieren:

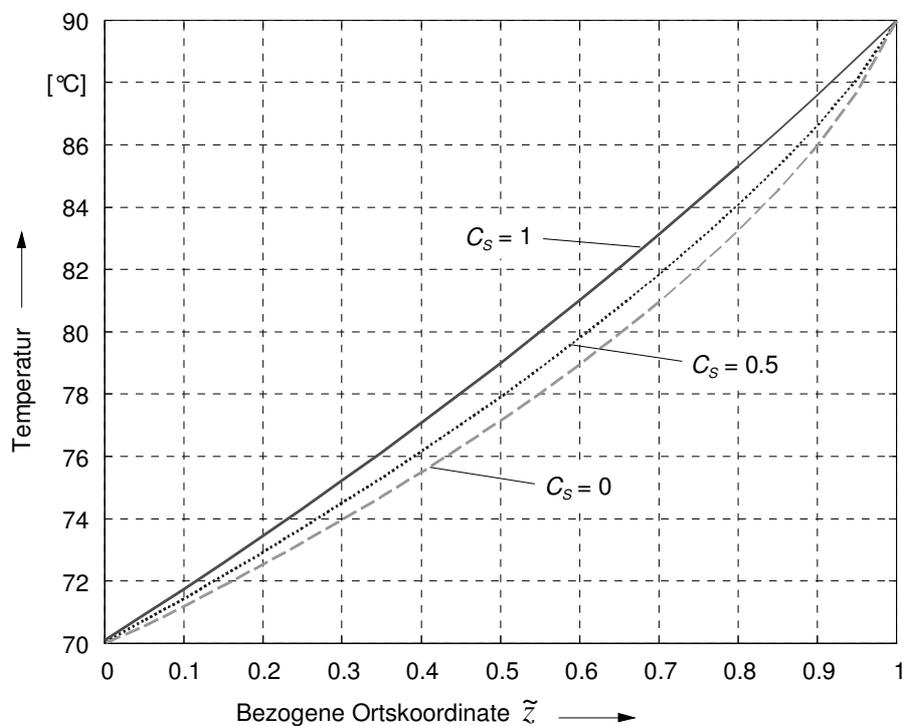
- Für  $C_S = 1$  wird auch der Faktor  $C^*(z) = 1$ , der modifizierte Ansatz geht damit wieder in den klassischen Potenzansatz nach Gleichung (3.70) über. Dadurch wird die physikalisch

begründete  $z$ -Abhängigkeit der lokalen Konvektionsleistung nicht mehr berücksichtigt. Die Wärmeleistung besitzt also einen „eher strahlenden Charakter“, was einer höheren Strahlungsleistung des betreffenden Heizkörpers entspricht.

- Für den Grenzwert  $C_S = 0$  hängt der Gewichtungsfaktor  $C^*$  „größtmöglich“ von der Höhe  $z$  ab und bekommt dadurch einen „stark konvektiven Charakter“.
- Über den Modellparameter  $C_S$  kann also indirekt das spezifische Verhalten eines Heizkörpers in bezug auf das Verhältnis von Strahlung zu Konvektion auf das Modell übertragen werden. Grundsätzlich darf der Parameter  $C_S$  jedoch nicht direkt mit dem in Hersteller-Datenblättern oft angegebenen *Strahlungsanteil* von Heizkörpern (prozentuales Verhältnis der Strahlungsleistung zur Gesamtleistung) verwechselt werden.

Da nach der Definition des Heizkörpertyps *Radiator* Wärme sowohl durch Konvektion als auch durch Strahlung abgegeben wird, kann für solche Heizkörper zunächst keine bestimmte Tendenz bezüglich naheliegender Zahlenwerte des Parameters  $C_S$  angegeben werden.

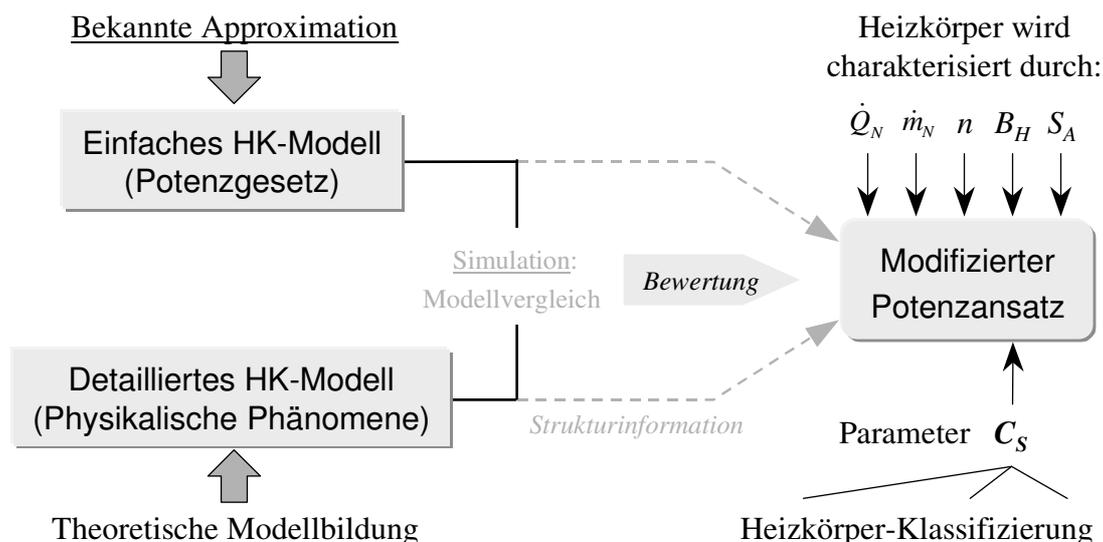
Zur Veranschaulichung des Parametereinflusses zeigt das nachfolgende Bild 3.24 als Vorgriff auf die Simulation das vertikale Temperaturprofil eines einzelnen Gliedes im Normzustand (Vorlauftemperatur 90 °C und Lufttemperatur 20 °C bei Norm-Heizmediumstrom) für die drei ausgewählten Parameterwerte  $C_S = 0, 0,5$  und 1.



**Bild 3.24:** Vertikales Temperaturprofil bei Variation des Modellparameters  $C_S$

Zur detaillierten Analyse des Einflusses des Parameters  $C_S$  wurde eine weitere Parameterstudie durchgeführt. Dabei soll dieser Parameter durch einen Abgleich der Heizkörpermodelle mit experimentellen Daten (Meß- und Prüfprotokolle der *Viterra Energy Services*) identifiziert und anschließend klassifiziert werden. Folgende Erkenntnisse wurden aus dieser Parameterstudie gewonnen:

- Der Parameter nimmt tendenziell bei Plattenheizkörpern höhere Werte an als bei Gliederheizkörpern. Diese grundsätzliche Eigenschaft bestätigt den zuvor bereits theoretisch vermuteten Charakter des Modellparameters  $C_S$ . Bei einer Vorlauftemperatur von  $60\text{ °C}$  und Norm-Heizmediumstrom (Einstellungen für den Basiszustand) werden für Plattenheizkörper Werte von  $C_S = [0,7...0,9]$  ermittelt, für einen DIN-Stahlradiator liegen die Werte bei  $C_S = [0,1...0,4]$ .
- Die Temperaturwerte aus den Meßprotokollen lagen für verschiedene Vorlauftemperaturen und Massenströme vor. Bei hohen Vorlauftemperaturen und geringen Massenströmen bleibt der identifizierte Parameterwert für  $C_S$  relativ konstant. Dagegen zeigt sich bei niedrigeren Vorlauftemperaturen die Tendenz, daß auch der Parameterwert kleiner wird. Diese Abhängigkeit von der Vorlauftemperatur muß also bei der Vorgabe von  $C_S$  berücksichtigt werden.
- Wird der modifizierte Potenzansatz mit dem physikalisch motivierten Ansatz verglichen, so stimmen die simulierten Temperaturprofile für den Stahlröhrenradiator bei einem Wert von  $C_S \approx 0,5$  annähernd überein.



**Bild 3.25:** Zur Entstehung des modifizierten Potenzansatzes

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß durch die vorgenommene Modifikation des Potenzansatzes das Modell für den Heizkörper insofern verbessert werden konnte, daß es universeller verwendbar ist. Die geringe Temperaturabhängigkeit des Parameters  $C_5$  kann bei Beschränkung auf den für die  $c$ -Wert-Prüfung relevanten *Basiszustand* vernachlässigt werden, so daß sich innerhalb des Definitionsbereichs dieser Randbedingung konstante Werte vorgeben lassen.

Durch den modifizierten Potenzansatz wurde für das Teilsystem Heizkörper ein universelles Modellkonzept gefunden, welches mittels geeigneter Parametrierung (Kapitel 4) eine Vielzahl unterschiedlicher Heizkörpertypen zu beschreiben ermöglicht. Die damit modellierbaren Heizkörperklassen können zusammengefaßt werden als *Radiatoren mit vertikaler Durchströmung des Heizmediums*.

### 3.5 Strömungssimulation (CFD)

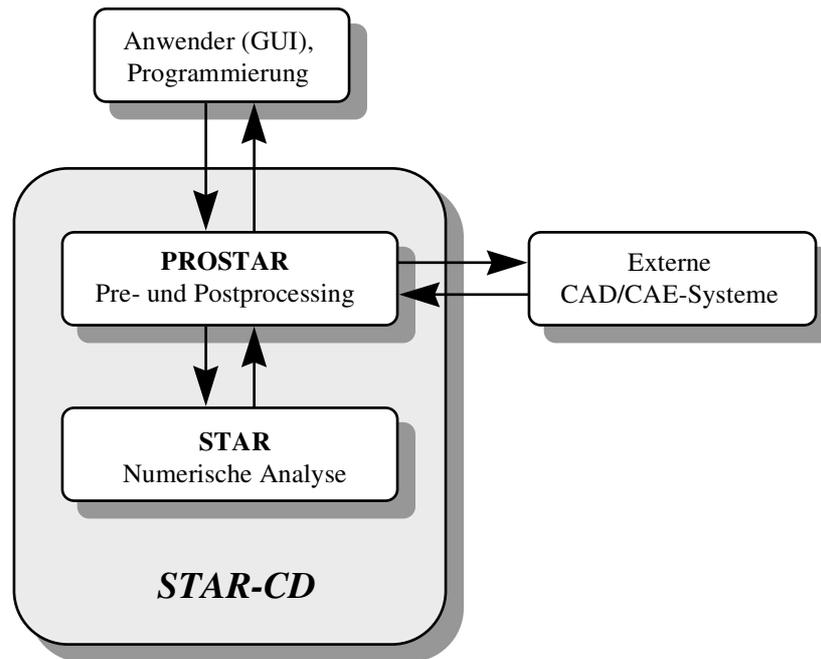
#### 3.5.1 Das CFD-Werkzeug *STAR-CD*

Lassen sich interessierende physikalische Größen wie Temperatur oder Strömung je nach Anforderung an den Detaillierungsgrad nicht mehr mit konzentrierten Parametern beschreiben, so ist man auf einen Ansatz durch partielle Differentialgleichungen angewiesen. Deren Lösung mittels Ortsdiskretisierung kann häufig aufgrund komplexer Geometrieverhältnisse kaum „manuell“ berechnet werden, so daß man auf rechnergestützte Verfahren und damit oft auf kommerzielle Werkzeuge ausweichen muß.

Für derart detaillierte Untersuchungen thermischer und strömungsphysikalischer Zusammenhänge wurde im Rahmen der Arbeit das kommerzielle Werkzeug *STAR<sup>14</sup>-CD* der *Computational Dynamics Ltd.* eingesetzt. Es handelt sich dabei um ein leistungsfähiges *CFD*-Programm (*Computational Fluid Dynamics*) zur Finite-Volumen-Modellierung und Simulation thermodynamischer Prozesse mit komplexen Geometrieverhältnissen.

---

<sup>14</sup> *STAR* = Simulation of Turbulent flow in Arbitrary Region



**Bild 3.26:** Softwarestruktur des kommerziellen CFD-Programms *STAR-CD*

Die grundsätzliche Systemstruktur und die wesentlichen Leistungsmerkmale des Programms *STAR-CD* lassen sich wie folgt charakterisieren [STA99]:

1. Bandbreite berechenbarer physikalischer Phänomene:

- Vielfältige Strömungsarten (laminar/turbulent, kompressibel/inkompressibel, Mehrfachströmungen, Multiphasen-Strömungen, Strömungen durch poröse Medien, Diffusion).
- Wärmetransport durch Wärmeleitung, Konvektion (frei/erzwungen), Wärmestrahlung.

2. Modellvorbereitung durch Gittererzeugung und Gittermanipulation (*Preprocessing*):

- Programmeigener Netzgenerator *PROSTAR* mit Kommandoingabe und graphischer Benutzerschnittstelle (GUI).
- Import von CAD-Geometrien und Gittern externer CFD-/FEM-Tools (Bild 3.26).
- Unstrukturierte Gitter: Nicht orthogonale Gitter unterschiedlicher Zellenformen.
- Automatische Gitterverfeinerung (Zellteilung lokal oder global).
- Bewegte Gitter: Transiente Gitterstrukturen, rotierende Gitter, Gitterverformung.

3. Numerische Berechnung (Simulation):

- Ortsdiskretisierung nach der Finite-Volumen-Methode.
- Erzeugung effizienten Simulationscodes in *FORTRAN* für den eigenständigen Simulator *STAR* (Bild 3.26), dadurch Trennung von Pre-/Postprocessing und Simulation.
- Einsatz problemspezifischer Lösungsalgorithmen (Prädiktor-Korrektor-Verfahren) mit diversen Manipulationsmöglichkeiten (Fehlertoleranz, Relaxation, Monitoring etc.).

#### 4. Modellnachbereitung und Ergebnisvisualisierung (*Postprocessing*):

- Zugriff auf spezifizierte Ergebnisdatensätze, registerorientierte Rechenoperationen.
- Vielfältige Möglichkeiten zur Visualisierung: Konturplots (Temperatur, Druck, Dichte), Isoplots, Vektorplots (Strömungen), Trajektorien und Diagramme sowie Animationen zur Visualisierung transienter Ergebnisdaten.
- Export von Gitterdaten und Simulationsergebnissen.

Diese Zusammenstellung dokumentiert die Leistungsfähigkeit des eingesetzten CFD-Werkzeugs. Üblicherweise bringt allerdings die Modellbildung und Simulation komplexer Prozesse mit solchen CFD-Werkzeugen einen nicht unerheblichen Aufwand mit sich. Neben der personellen und zeitlichen Investition in die Modellerstellung ist weiterhin zu bedenken, daß vergleichsweise mächtige Modellbeschreibungen entstehen, deren numerische Lösung selbst auf modernen Computersystemen relativ große Simulationszeiten erfordern und häufig speicherintensive Ergebnisdatensätze entstehen lassen [MEC98].

Aus diesen Gründen wird das Werkzeug *STAR-CD* im Hinblick auf den virtuellen *c*-Wert-Prüfstand nur begrenzt eingesetzt, um detaillierte Kenntnisse über das thermische Verhalten komplexer Teilkomponenten zu erlangen. Aus diesem Wissen werden in einem weiteren Schritt geeignete Ersatzmodelle hergeleitet, welche für den jeweiligen Anwendungszweck eine hinreichend genaue Modellbeschreibung liefern. Diese Ersatzmodelle werden in dem ursprünglich verwendeten Modellierungswerkzeug *CAMex* implementiert, so daß der gesamte Prüfstand zur Wahrung der Modellkontinuität letztlich mit diesem einen Werkzeug beschrieben wird.

### 3.5.2 Integration der CFD-Simulation

Für die thermische Bewertung von Heizkostenverteilern ist die Kenntnis der beiden Sensortemperaturen des Heizkörper- und des Raumluftfühlers  $T_{H,F}$  und  $T_{L,F}$  erforderlich (vgl. Abschnitt 2.1.3). Aufgrund des komplexen Aufbaus der Geräte (Gehäusegeometrie, innere Komponenten wie Leiterplatte, Bauteile und Batterie) ist es nahezu unmöglich, das Temperaturverhalten der Sensoren durch einen Ansatz mit konzentrierten Parametern zu modellieren. Unterschiedlichste Einflüsse durch Luftströmungen sowie die dreidimensionale Wärmeleitung durch verschiedene Materialien sind dabei ebenso zu berücksichtigen wie der Wärmeaustausch des Gerätes durch thermische Strahlung. Aus diesen Gründen ist man für die Analyse des thermischen Verhaltens von Heizkostenverteilern, insbesondere im Hinblick auf die dabei interessierenden Zielgrößen der Sensortemperaturen, auf den Einsatz der CFD-Simulation angewiesen.

### Gittererstellung und Vernetzung

Die Erstellung eines Gitters für ein Finite-Volumen-Modell basiert meist auf CAD-Daten der zu modellierenden Geometrie. Solche CAD-Daten lassen sich unter STAR-CD durch einen Import-Filter in das Werkzeug portieren, wobei einige Grundsätze zu beachten sind:

- CAD-Daten sollten für einen effizienten Import in das CFD-Werkzeug aufbereitet werden, so daß nur relevante Geometriedaten (Kanten, Blöcke, Splines statt einzelner Knoten etc.) übernommen werden.
- Die Geometrieinformationen in CAD-Daten beschreiben in der Regel nur die Festkörper (*Solids*). Für die Strömungssimulation (mit konvektivem Wärmeaustausch) interessieren aber insbesondere auch die umgebenden bzw. bei Hohlkörpern enthaltenen flüssigen oder gasförmigen Raumbereiche (*Fluids*).

Markante Koordinatenpunkte bzw. Kanten bilden *Blöcke*, deren Oberflächen oft Systemgrenzen zwischen Festkörpern und fluiden Medien darstellen. Solche Blöcke lassen sich je nach Genauigkeitsanforderung automatisiert verfeinern, wodurch als finite Volumenelemente *Zellen* entstehen. Die Schwierigkeit bei dieser Art der Modellbildung liegt in der Berücksichtigung komplizierter Geometrieverhältnisse aufgrund der verschiedenen Gerätekomponenten wie Metallrückwand, Kunststoffgehäuse, LCD-Display, Batterie und Leiterplatte mit weiteren Bauteilen.

Im Rahmen der Projektarbeiten wurden drei Heizkostenverteiler-Systeme der *Viterra Energy Services AG* mit dem Werkzeug STAR-CD modelliert und analysiert [MEC98, MEC99]. Die detaillierte Vorgehensweise bei der Gittererzeugung und Simulation wird in diesen beiden Arbeiten dokumentiert.

### Randbedingungen – Schnittstellen zum Heizkörper

Um die Simulation des Heizkostenverteilers unter möglichst real nachgebildeten Verhältnissen durchführen zu können, ist eine Analyse dieser äußeren Bedingungen erforderlich.

Ein Heizkostenverteiler wird immer in Verbindung mit einem Heizkörper betrachtet. Daher ist die Kontaktstelle zum Heizkörper von besonderer Bedeutung. An den Berührungsflächen wird die Oberflächentemperatur des Heizkörpers in der Höhe des Montageortes als feste Randtemperatur vorgegeben (Dirichletsche Randbedingung). Bei der hier betrachteten Heizkörper-Klasse werden Heizkostenverteiler nach der Norm in 75% der Heizkörper-Bauhöhe montiert<sup>15</sup>. Für die Temperaturkopplung werden folgende Annahmen getroffen:

- Entlang der Ausdehnung der Kontaktfläche wird kein Temperaturprofil, sondern ein einzelner Wert als *konzentrierter Parameter* vorgegeben. Diese Annahme ist vertretbar, da die Abmessungen des Heizkostenverteilers deutlich kleiner sind als die Bauhöhe der hier

---

<sup>15</sup> Abweichungen in der Montagehöhe gibt es bei anderen Heizkörperarten wie z.B. Handtuchheizkörpern, Konvektoren etc.

betrachteten Heizkörpertypen. Zudem befinden sich die Sensoren in der Mitte des Gerätes, wodurch quasi eine Mittelung stattfindet. Als Kontakttemperatur wird die Oberflächen-temperatur am Heizkörper herangezogen, die am Ort der geometrischen Mitte der Heizkostenverteiler-Rückwand anliegt.

- Bei der Montage eines Heizkostenverteilers an einen Plattenheizkörper erfolgt die Temperaturvorgabe an der gesamten Fläche der Rückseite des Gerätes. Findet die Montage dagegen an einem Gliederheizkörper statt, sind die Kontaktflächen in der Regel sehr schmal („Linienkontakt“). In diesem Fall werden zur Nachbildung realistischer Verhältnisse zwei Zellreihen (entspricht einer Breite von etwa 1mm) mit der Temperaturvorgabe versehen.

Da Heizkörper einen Teil der Wärme durch Konvektion abgeben, existiert in unmittelbarer Nähe der Oberfläche eine aufsteigende Luftströmung. Im Abschnitt 3.4.2 wurde diese Grenzschichtströmung durch ein charakteristisches Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil gekennzeichnet. Wird der Heizkostenverteiler am Heizkörper angebracht, so befindet er sich zwangsläufig teilweise oder ganz innerhalb dieser Grenzschicht und wird von der aufsteigenden Luft angeströmt. Diese Umströmung muß als äußere Randbedingung ebenfalls berücksichtigt werden, da sie den thermischen Zustand des Heizkostenverteilers beeinflusst. Zudem könnten ohne diese Umströmung keine Aussagen zur Wärmeübertragung des Gerätes an seine Umgebung gemacht werden (z.B. Wärmeübergangskoeffizienten).

Das Gittermodell eines Heizkostenverteilers muß aus diesem Grund derart erweitert werden, daß ein hinreichend großer Luftraum in seiner unmittelbaren Umgebung modelliert wird (Bild 3.27). Als äußere Randbedingung für diesen Luftraum wird die am Rand vorliegende Umgebungstemperatur  $T_L$  vorgegeben, an der Unterseite muß dann zusätzlich die am Heizkörper in der Montagehöhe vorhandene Grenzschichtströmung in Form einer *Einlaßrandbedingung* berücksichtigt werden. Die Temperatur- und Strömungsgrenzschicht lassen sich ausgehend von der lokalen konvektiven Wärmeabgabe durch die Grenzschichtdicke nach Gleichung (3.39) zu

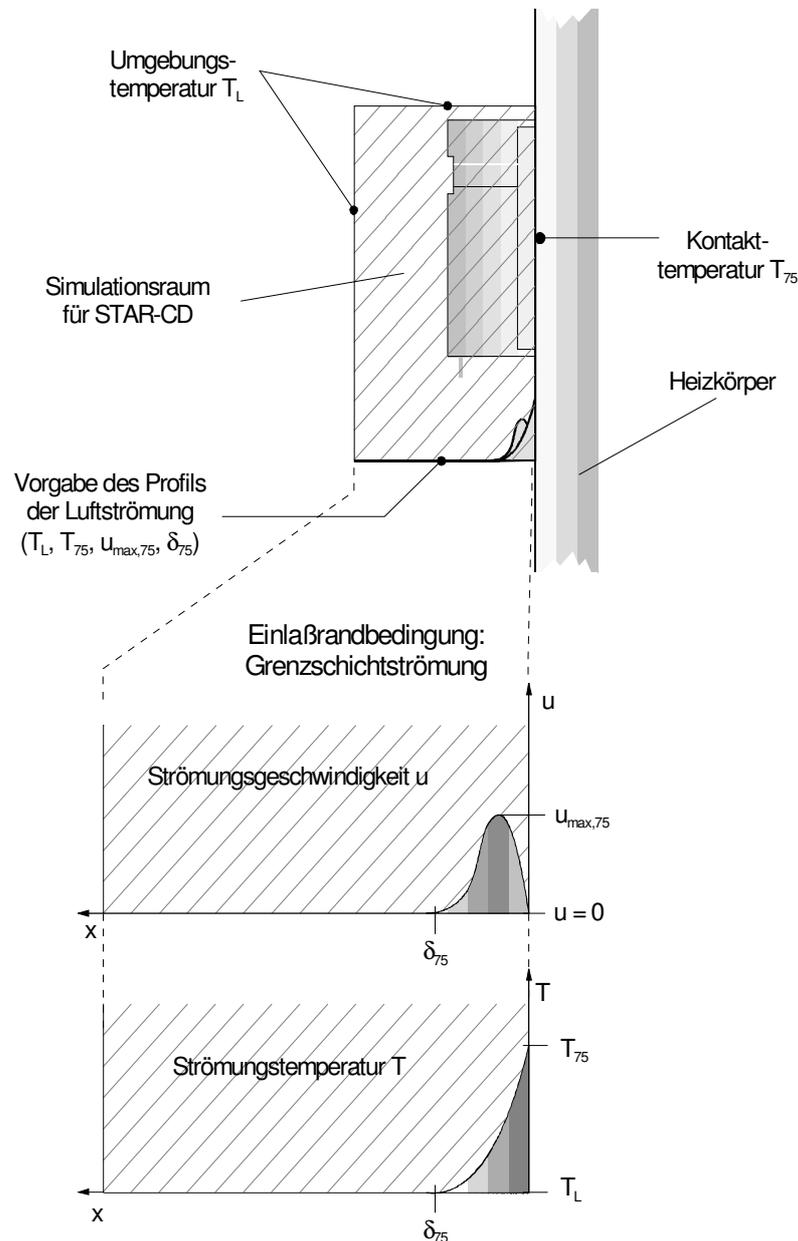
$$\delta = \frac{2\lambda_L}{\alpha} = 2\lambda_L \frac{A \Delta T}{\dot{Q}_{Konv}} \quad (3.94)$$

bestimmen. Damit ist das Temperaturprofil mit einem Verlauf gemäß Gleichung (3.29) bereits eindeutig bestimmt.

Zur Festlegung des Geschwindigkeitsprofils fehlt noch der Wert der maximalen Strömungsgeschwindigkeit  $u_{\max}$ , der sich aus Gleichung (3.33) zu

$$u_{\max} = \frac{4}{27} u_0 = \frac{4}{27} \delta^2 \frac{g \beta}{4\nu} \Delta T \quad (3.95)$$

ergibt (siehe Seite 45). Mit dem kubischen Ansatz aus Gleichung (3.32) ist damit auch das Geschwindigkeitsprofil eindeutig bestimmt. Ausgehend von diesen Parametern wird die Grenzschichtströmung als Einlaßrandbedingung für die Simulation vorgegeben, indem eine Diskretisierung der beiden Profile in Anlehnung an das Gittermodell vorgenommen wird.

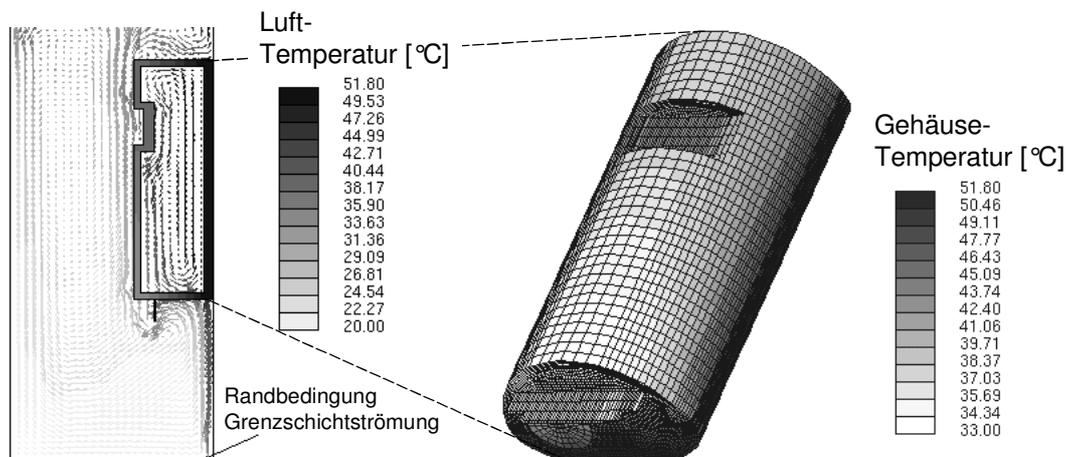


**Bild 3.27:** Simulationsraum um einen Heizkostenverteiler mit Randbedingungen

Schließlich wird auch der Strahlungswärmeaustausch des Heizkostenverteilers mit seiner Umgebung berücksichtigt, da das Gehäuse auch durch thermische Strahlung Wärme an die umgebenden Wände abgibt und sich somit ebenfalls abkühlt.

### CFD-Simulation

Auf eine detaillierte und damit farbintensive graphische Darstellung der Simulationsergebnisse soll an dieser Stelle weitgehend verzichtet werden, da in erster Linie die Methodik der Kennfeldermittlung im Vordergrund steht. Exemplarisch sei jedoch die simulierte Luftbewegung (Umströmung und Strömung im Gehäuse) als Vektorplot sowie die Gehäusetemperatur als Konturplot dargestellt, um das prinzipielle Aussehen und die Aussagefähigkeit der Ergebnisse zu verdeutlichen. Im Bild 3.28 repräsentiert die Länge der Vektorpfeile die Strömungsgeschwindigkeit und die Graustufen die verschiedenen Temperaturwerte.



**Bild 3.28:** Visualisierung der CFD-Simulationsergebnisse eines Heizkostenverteilers

Das Beispiel zeigt einen Heizkostenverteiler in Kontakt mit einem ebenen Plattenheizkörper. Erkennbar ist neben der Einlaßrandbedingung der Grenzschichtströmung gemäß Bild 3.27 die weitere Ausprägung der Luftströmung durch freie Konvektion und die Umströmung des Gehäuses. Im Geräteinneren (hier ein Schnitt durch eine bauteilfreie Ebene) bildet sich durch die Temperaturdifferenz zwischen warmer Rückseite (Kontakt zum Heizkörper) und kühlerer Vorderseite eine Zirkulationsströmung aus, die neben der Wärmeleitung aller festen Komponenten einen zusätzlichen Einfluß auf die Sensortemperaturen hat.

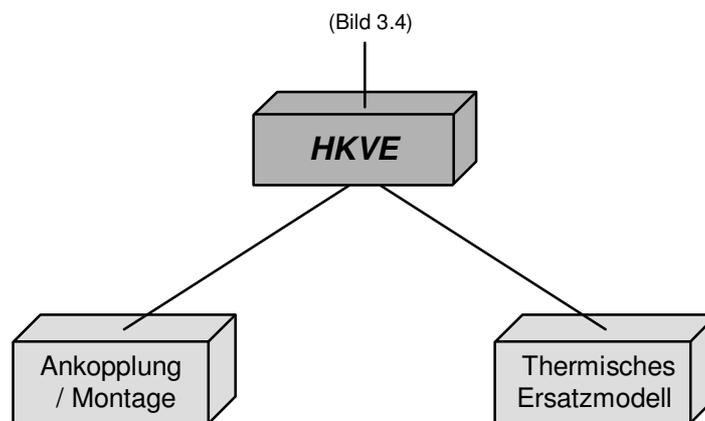
Bei der Auswertung einer CFD-Simulation werden zur Gewinnung der interessierenden Sensortemperaturwerte diejenigen Zellen aus dem Gittermodell herangezogen, welche die geometrische Lage der Sensoren im Modell repräsentieren. Für die Ermittlung eines konzentrierten Temperaturwertes wird dann eine arithmetische Mittelung über die betreffenden Zellen durchgeführt.

### 3.5.3 Parametrierte Ersatzmodelle

In Anlehnung an den Hierarchiebaum aus Abschnitt 3.2.1 (Bild 3.4) soll im Anschluß an die zweite Hierarchieebene auch das Teilsystem Heizkostenverteiler sinnvoll strukturiert werden, um relevante Teilmodelle zu abstrahieren. Wichtigster Aspekt dieser Strukturierung ist wie zuvor die spätere Wiederverwendbarkeit der entstehenden Submodelle als Instanz in einem individuell aggregierten Gesamtprozeß des Prüfstands.

#### Substantielle Abstraktion

Bei der Modellbildung und Simulation eines Heizkostenverteilers wird das Gerät immer im Zusammenhang mit einem Heizkörper betrachtet. Die jeweilige *Montage* muß daher neben möglichen Randbedingungen in eine Modellbeschreibung integriert werden. Um diese stets vorhandene Kopplung zwischen Heizkörper und der Gehäuserückseite bei verschiedenen Geräten nicht jedesmal neu modellieren zu müssen, wird eine Trennung in ein *thermisches Heizkostenverteiler-Modell* und ein *Koppelmodell* vorgenommen (Bild 3.29). Die Ähnlichkeit der geometrischen Kontur der Rückseite auch verschiedener Geräteausführungen gewährleistet die gewünschte Wiederverwendbarkeit der beiden Submodelle.



**Bild 3.29:** Hierarchiebaum des Teilmodells *Heizkostenverteiler*

#### Modellbaustein Heizkostenverteiler – Thermisches Ersatzmodell

Da es sich bei der *c*-Wert-Prüfung um einen stationären Vorgang handelt, genügt auch für mögliche Ersatzmodelle die alleinige Berücksichtigung des stationären Systemverhaltens. Um verallgemeinerte nichtlineare Zusammenhänge erfassen zu können, liegt es nahe, das thermische Verhalten durch geeignete *Kennlinienfelder* zu approximieren. Im einfachsten Fall läßt sich ein nichtlineares Systemverhalten in einer Umgebung  $\Delta$  um einen Arbeitspunkt *AP* durch einen quadratischen Ansatz annähern, die Ausgangsgröße dieser Kennlinie folgt der Beziehung

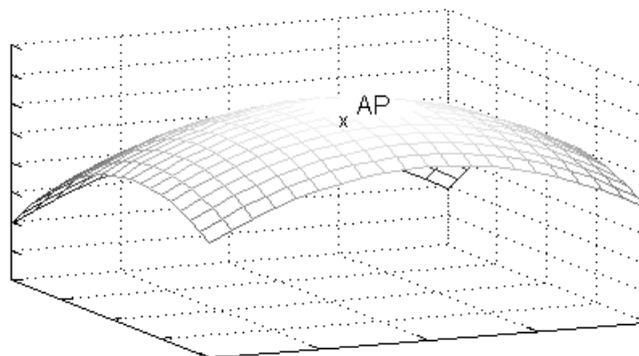
$$z = f(x) = a x^2 + b x + c . \quad (3.96)$$

Werden durch Messung oder Simulation drei Punkte dieser gesuchten Kennlinie ermittelt ( $AP$ ,  $AP + \Delta x$ ,  $AP - \Delta x$ ), so können die drei unbekannt Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $c$  als Lösung des entstehenden Gleichungssystems eindeutig bestimmt werden. Als Arbeitspunkt wird im Hinblick auf die Randbedingungen bei der  $c$ -Wert-Prüfung der Basiszustand bei einer mittleren Heizmediumtemperatur von  $T_m = 50 \text{ °C}$  definiert. Die Abweichungen ( $AP \pm \Delta$ ) werden derart gewählt, daß die gesamte Kennlinie um den Arbeitspunkt herum für den zulässigen Bereich der mittleren Heizmediumtemperatur von  $T_m = 40 \dots 60 \text{ °C}$  Gültigkeit erlangt (durch Extrapolation sind auch randnahe Bereiche außerhalb der Meßpunkte noch zulässig).

Hängt die Ausgangsgröße von mehreren Eingangsgrößen ab, so führt dies zu mehrdimensionalen Kennlinienfeldern. Wie zuvor bereits herausgestellt wurde, findet die wesentliche thermische Beeinflussung des Heizkostenverteilers über die beiden Schnittstellengrößen des Heizkörpers, die *Kontakttemperatur*  $T_{75}$  und die *Grenzschichtdicke*  $\delta_{75}$ , statt. Ein dafür erforderliches Kennlinienfeld mit zwei Eingangsgrößen kann bei quadratischem Ansatz durch die Beziehung

$$z = f(x, y) = a x^2 + b x + c y^2 + d y + e \quad (3.97)$$

beschrieben werden, die fünf unbekannt Parameter werden durch Auswertung fünf diskreter Zustände um den interessierenden Arbeitspunkt ( $AP$ ,  $AP + \Delta x$ ,  $AP - \Delta x$ ,  $AP + \Delta y$ ,  $AP - \Delta y$ ) ermittelt. Geometrisch läßt sich ein solches zweidimensionales Kennlinienfeld als parabolische Fläche veranschaulichen, die über die verschiedenen Arbeitszustände gelegt wird (Bild 3.30).

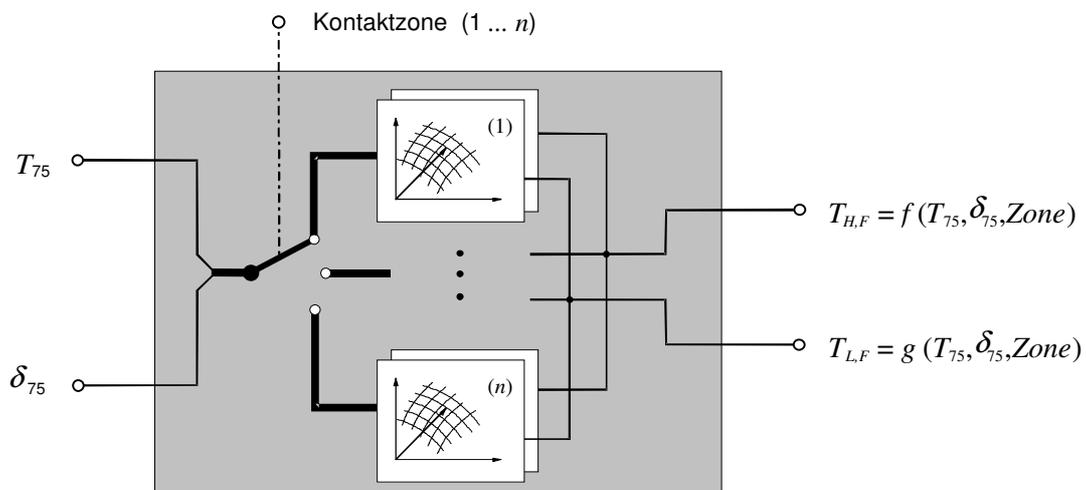


**Bild 3.30:** Beispiel eines zweidimensionalen Kennlinienfelds um einen Arbeitspunkt  $AP$

Die Lage und Größe der Kontaktfläche zwischen Heizkörper und Heizkostenverteiler unterscheidet sich mit jedem Heizkörpertyp, weshalb theoretisch beliebig viele Variationsmöglichkeiten existieren. Um diese Vielfalt mit dem Ziel der konzentrierten Modellbildung handhaben zu können, wird die Kontur der Geräte-Rückseite in diskrete *Kontaktzonen* aufgeteilt. Da die Berührung stets vollständig in vertikaler Richtung stattfindet (Linien- bzw. Flächenkontakt), erstrecken sich diese durch Stufendiskretisierung entstandenen Zonen über die gesamte Bauhöhe der Geräterückseite.

Zur Parametrierung thermischer Kennfeld-Ersatzmodelle werden somit detaillierte und mit hohem Aufwand verbundene CFD-Simulationen jeweils nur für eine diskrete Zone erforderlich. Allerdings müssen für jede der betrachteten Zonen zur vollständigen Ermittlung eines quadratisch approximierten Kennlinienfeldes mindestens fünf Zustände zur Berechnung der charakterisierenden Kennfeldparameter ermittelt werden.

Die Verschaltung und Implementierung der ermittelten Kennlinienfelder bildet schließlich einen Modellbaustein der Klasse *Heizkostenverteiler*, die prinzipielle Struktur dieser Modellbausteine wird in Bild 3.31 veranschaulicht. Als Schnittstellen für die Verkopplung werden die Kontakttemperatur  $T_{75}$  und Grenzsichtdicke  $\delta_{75}$  als Koppelleingänge sowie die beiden interessierenden Sensortemperaturen  $T_{H,F}$  für die Heizkörper- und  $T_{L,F}$  für die Raumlufttemperatur als Koppelausgänge spezifiziert. Praktisch wird für jede berücksichtigte Kontaktzone ein eigener Modellbaustein implementiert. Das „Umschalten“ zwischen verschiedenen Zonen entspricht damit der Auswahl des zugehörigen Modellbausteins für diese Zone. Die *Kontaktzone* kann als Modellparameter angesehen werden und läßt sich im Gesamtprozeß des virtuellen Prüfstands in die Parameterklasse der *Strukturparameter* einordnen (ähnlich wie der Parameter *Querschnittstyp* aus Abschnitt 3.4.3, mehr zur Parametrierung im Abschnitt 4.1).



**Bild 3.31:** Strukturelle Einbindung thermischer Ersatzmodelle durch Kennlinienfelder

Bei der Verwendung einer Instanz des Modellbausteins Heizkostenverteiler im Prozeß der Modellaggregation (*Bottom-Up-Synthese*) wird zunächst angenommen, daß der Kontakt immer nur in einer Zone stattfindet. Eine zusätzliche Verfeinerung läßt sich jedoch ohne größeren Aufwand durch Interpolation zwischen zwei benachbarten Zonen erreichen (wenn der Kontakt beispielsweise genau zwischen zwei diskreten Zonen stattfindet).

### Implementierung

Die Verwendung der Ersatzmodelle für das Subsystem *Heizkostenverteiler* im Gesamtmodell des Prüfstandes erfolgt durch Implementierung eines Kennlinienfeldes als *CAMex*-Modellbaustein *ModKLFeld5P*. Zur Spezifizierung des Kennlinienfeldes müssen die Koeffizienten der Gleichung (3.97) nicht explizit berechnet werden. Statt dessen werden der simulierte Arbeitspunkt und die ausgewählten Zustände in seiner Umgebung ( $\pm \Delta x$ ,  $\pm \Delta y$ ) angegeben. Die Koeffizienten des Kennlinienfeldes werden erst später bei der Instanzierung eines Objektes durch Auswerten und Lösen des entstehenden Gleichungssystems automatisch bestimmt<sup>16</sup>.

Ein Modellbaustein für die Hierarchie *Heizkostenverteiler* läßt sich durch Aggregation aus zwei Kennlinienfeldern vererben, wobei für jede Sensortemperatur ein entsprechender Modellbaustein implementiert wird. Damit läßt sich das stationäre thermische Verhalten schließlich durch einen Satz nichtlinearer algebraischer Gleichungen beschreiben.

## 3.6 Weitere Modellbausteine

### 3.6.1 Kontaktmodell

Die Erfahrungen bzw. die mit der bisherigen Heizkörperauswahl durchgeführten Simulationen haben gezeigt, daß manche Heizkörperarten, wie z.B. Guß-Heizkörper oder Faltschalen-Radiatoren, in der Simulation tendenziell zu niedrigen  $c$ -Werten aufweisen. So war es u.a. Gegenstand des Projektes, diese Abweichungen genauer zu analysieren und die Ursachen möglichst einzugrenzen. Bei den  $c$ -Werten fällt allgemein auf, daß insbesondere bei den sogenannten *Schmalsäulern* und bei *Gußradiatoren* Abweichungen des  $c_{1,F}$ -Wertes auftreten.

Bei den Gußradiatoren lassen sich diese Abweichungen damit begründen, daß sie in der Regel durch den Herstellungsprozeß bedingt eine rauhere Oberfläche aufweisen als aus Stahlblech oder Stahlröhren gefertigte Heizkörper. Bei der Montage eines Heizkostenverteilers kommt es demzufolge zu einem vergleichbar schlechteren Wärmeübergang. Diese Gegebenheit läßt sich im Modellkonzept des virtuellen  $c$ -Wert-Prüfstandes durch die Einführung eines zusätzlichen *thermischen Kontaktwiderstandes* berücksichtigen, der im Folgenden mit  $R_K$  bezeichnet werden soll.

---

<sup>16</sup> Auf der Basis des verwendeten Computeralgebraprogramms *Maple V* läßt sich die Berechnung der Kennfeldkoeffizienten besonders gut automatisieren (geeignete Lösungsverfahren, algebraische Operationen, Einsetzen der Lösung).

### Physikalische Betrachtung

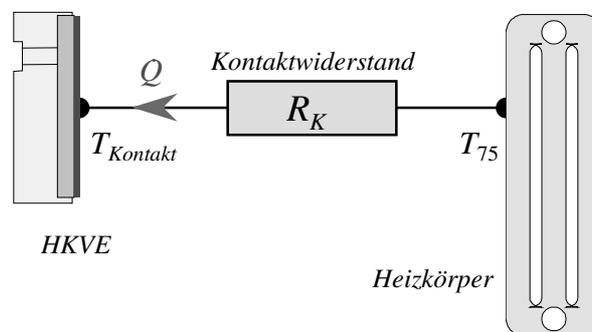
In Analogie zum ohmschen Gesetz der Elektrotechnik  $U = IR$ , welches den Spannungsabfall  $U$  über einen vom Strom  $I$  durchflossenen elektrischen Widerstand  $R$  beschreibt, kann auch in der Thermodynamik ein Temperaturabfall  $\Delta T$  über einen thermischen Widerstand  $R_K$  mit Hilfe des gesamten Wärmestromes  $\dot{Q}$  beschrieben werden,

$$\Delta T = R_K \cdot \dot{Q}, \quad (3.98)$$

wobei der thermische Widerstand  $R_K$  die physikalische Einheit *Kelvin pro Watt* [K/W] besitzt<sup>17</sup>. Mit dieser Konvention läßt sich die resultierende Kontakttemperatur  $T_K$  am Heizkostenverteiler-Unterteil mit der Gleichung

$$T_K = T_{75} - R_K \cdot \dot{Q} \quad (3.99)$$

berechnen (Bild 3.32). Dabei ist  $T_{75}$  die Oberflächentemperatur des Heizkörpers in 75% der Bauhöhe (Montageort) und stellt eine physikalische Schnittstelle des Teilmodells Heizkörper dar (Koppelausgang).



**Bild 3.32:** Zur Definition des Kontaktwiderstandes

Als Voraussetzung zur Implementierung der Gleichung (3.99) muß der Wärmestrom bekannt sein, der in den Heizkostenverteiler hineinfließt.

### Wärmeströme am Heizkostenverteiler

Da sich ein Heizkostenverteiler durch seinen Kontakt zur warmen Heizkörperoberfläche erwärmt, gibt er selbst wieder Wärme durch Konvektion an die stets kühlere Umgebungsluft bzw. durch thermische Strahlung an die umgebenden Wände ab. Dieser gesamte Wärmestrom

<sup>17</sup> Gebräuchlich ist oft auch der Kehrwert des thermischen Widerstandes. Dieser *thermische Leitwert* mit der Einheit *Watt pro Kelvin* besitzt die Bedeutung einer Wärmeübergangszahl (z.B.  $\alpha A$  bei Konvektion oder  $\lambda d$  bei Wärmeleitung).

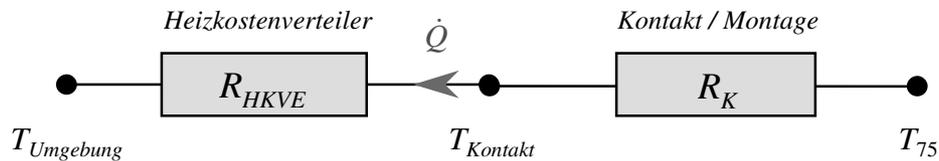
muß näherungsweise durch die Kontaktfläche zum Heizkörper fließen, sofern man den sehr geringen Strahlungswärmaustausch zwischen Heizkostenverteiler und Heizkörper vernachlässigt. Diese Kontaktfläche fällt dabei je nach Montage mehr oder weniger groß aus: an Plattenheizkörpern mit ebener Frontseite (ohne Profilierung) entspricht sie annähernd der Fläche der Rückseite des Gerätegehäuses in der Größenordnung weniger Quadratzentimeter (sie ist aufgrund von Montagebohrungen stets etwas kleiner), während z.B. bei der Montage an Gliederheizkörpern nur ein „linienförmiger“ Kontakt in der Größenordnung einiger Quadratmillimeter zustande kommt (bei verkanteter Montage ggf. noch weniger). Zusätzlich fließt immer auch ein kleiner Wärmestrom durch die Montagebolzen, die ebenfalls im thermischen Kontakt zum Heizkörper stehen und als Metall eine relativ gute Wärmeleitfähigkeit besitzen. Dieser Anteil kann allerdings gegenüber dem Wärmestrom durch die Kontaktfläche als gering angesehen werden, da der „Wärmeleitweg“ durch einen solchen Bolzen (bei der Montage am Gliederheizkörper) relativ lang ist.

Als Ergebnis einer CFD-Simulation sind neben den oft interessierenden Temperatur- und Strömungsverhältnissen weitere charakteristische Größen der Fluidodynamik, wie z.B. Druck, Dissipation und auch Wärmeströme, zugänglich. Aus den Simulationsergebnissen der Heizkostenverteiler (Abschnitt 3.5) können somit neben den für die  $c$ -Wert-Berechnung notwendigen Temperaturen auch die interessierenden Wärmeströme extrahiert werden. Als Option des Programms STAR-CD lassen sich bei der Simulation die Bilanzgleichungen für jedes Material ausgeben. Alternativ können beim *Postprocessing* der Ergebnisdaten die Wärmestromdichten an den Grenzen zwischen zwei Materialien visualisiert werden. Über diese Größen ist dann durch Multiplikation mit den finiten Flächenelementen der Kontaktfläche und anschließender Aufsummierung der gesuchte Wärmestrom ebenfalls berechenbar.

Die simulierten Wärmeströme, die ein Heizkostenverteiler vom Heizkörper aufnimmt, liegen generell in der gleichen Größenordnung um etwa 1 Watt. Diese Feststellung ist insofern bemerkenswert, da sich die Abmessungen der Kontaktflächen je nach Heizkörperart oft sehr deutlich voneinander unterscheiden. Die Größe der Kontaktfläche selbst hat damit keinen derart großen Einfluß auf die interessierenden Zielgrößen „ $c$ -Werte“, wie man zunächst hätte vermuten können. Die Wärmestromdichte vergrößert sich als Verhältnis von Wärmestrom zur Fläche mit kleiner werdender Kontaktfläche, sie beträgt z.B. für  $T_{75} = 50 \text{ °C}$  bei ebenem, großflächigem Kontakt etwa  $0,4 \text{ kW/m}^2$ , während sie bei näherungsweise linienförmigem Kontakt bis auf  $9,2 \text{ kW/m}^2$  ansteigt (Zahlenbeispiel eines Anwendungsfalls).

Vergleicht man den thermischen Widerstand eines Heizkostenverteilers  $R_{HKVE}$  bezüglich des Wärmeflusses, der über die Kontaktflächen hineinfließt und über alle sonstigen Flächen wieder an die Umgebung abgeführt wird, mit dem Kontaktwiderstand  $R_K$ , so gilt das Verhältnis  $R_{HKVE} \gg R_K$ . Die Wärmeabfuhr über das Gehäuse ist deutlich schlechter als der wärmeleitende Kontakt zum Heizkörper. Da die beiden Widerstände eine thermische Reihen-

schaltung gemäß Bild 3.33 bilden, wird der Wärmestrom  $\dot{Q}$  im wesentlichen durch den größeren der beiden Widerstände bestimmt<sup>18</sup> (wie auch im elektrischen Analogon), hier also durch den thermischen Widerstand  $R_{HKVE}$  des Heizkostenverteilers.



**Bild 3.33:** Thermische Ersatzwiderstände beim Heizkostenverteiler

Aus dieser Tatsache läßt sich schließen, daß die *Größe der Kontaktzone* aufgrund des stets kleineren Widerstandes  $R_K$  gegenüber  $R_{HKVE}$  nur einen sehr geringen Einfluß auf den Wärmestrom  $\dot{Q}$  durch einen Heizkostenverteiler und damit auch auf die Temperatur am Ort des Heizkörper- bzw. Raumluftfühlers hat. Entscheidend ist vielmehr der *Ort des Kontaktes* bzw. die Zone, in der die Berührung stattfindet. Bei linienförmigem Kontakt (und damit kleinerer Fläche) ist der Wärmestrom in der Regel sogar größer als bei großflächigem Kontakt. Diese Beobachtung kann damit begründet werden, daß bei einem Kontakt in den äußeren Zonen der mittlere, relativ große Bereich von der Luft der Grenzschichtströmung überstrichen und dadurch abgekühlt wird. Dies bewirkt eine Verringerung des dominanten thermischen Widerstandes des Heizkostenverteilers  $R_{HKVE}$  und führt somit bei konstanter Temperaturdifferenz  $T_{75} - T_{Umgebung}$  zu einem größeren Wärmestrom.

### Anwendung des Kontaktwiderstandes im Gesamtprozeß

Der thermische Kontaktwiderstand  $R_K$  stellt einen neuen, zunächst unbekanntem Modellparameter dar. Aus diesem Grunde wurden dessen Auswirkungen auf die Ausgangsgrößen des Prozeßmodells detailliert untersucht. In entsprechenden Parameterstudien wird als Ergebnis dokumentiert, welchen Einfluß der thermische Kontaktwiderstand auf die  $c$ -Werte hat und in welcher physikalisch plausiblen Größenordnung sich der Wertebereich bewegt.

Die Motivation für die Einführung des thermischen Kontaktwiderstandes als neuen Modellparameter stützt sich auch auf die Schaffung neuer Anwendungsmöglichkeiten, welche die universelle Verwendbarkeit des Gesamtmodells gewährleisten bzw. erweitern:

- Der (wenn auch meist kleine) Wärmewiderstand einer Heizkörperlackschicht kann berücksichtigt werden. Mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{Lack}$  und der Dicke der Lackschicht

<sup>18</sup> Der größere Widerstand entspricht der kleineren Wärmeübergangszahl und damit der schlechteren Wärmeleitung.

$d_{Lack}$  berechnet sich der thermische Widerstand unter Berücksichtigung der Kontaktfläche  $A_{Kontakt}$  zu

$$R_K = \frac{d_{Lack}}{\lambda_{Lack} A_{Kontakt}} \quad (3.100)$$

Dieser Wärmewiderstand kann vorab ermittelt und als Zahlenwert eingegeben oder auf der Basis dieser Gleichung als eigener Modellbaustein implementiert werden<sup>19</sup>.

- Bei der bisher untersuchten Heizkörperklasse ist stets davon ausgegangen worden, daß sich der Heizkostenverteiler direkt gegenüber eines wasserführenden Kanals befindet, da die Temperatur  $T_{75}$  für die äußere Oberfläche der Säule berechnet wird. Oft wird das Gerät jedoch nicht unmittelbar an einer wasserführenden Säule, sondern je nach Heizkörperbauart weiter außen montiert (z.B. bei Heizkörpern mit Rippen, Konvektionsblechen oder beim Einsatz eines Verbreiterungsteils bei Gliederradiatoren). In diesem Fall existiert durch die Metallanordnung zwischen Heizkostenverteiler und wasserführendem Kanal in bezug auf den Kontaktwiderstand ein *zusätzlicher Wärmeleitwiderstand*. Häufig kann dieses Wärmeleitproblem auf zweidimensionaler Ebene so analysiert werden, daß es sich durch einen äquivalenten thermischen Ersatzwiderstand repräsentieren läßt. Ansätze für einfache Geometrieformen finden sich beispielsweise in den Berechnungsblättern des VDI-Wärmeatlas [VDI97].

Bei geeigneter Strukturierung (Verallgemeinerung, Definition von Schnittstellen etc.) läßt sich somit die Problematik eines zusätzlich zu berücksichtigenden Wärmeleitproblems durch einen neuen Modellbaustein in den Virtuellen  $c$ -Wert-Prüfstand integrieren.

### Implementierung

Die Auswertung der CFD-Simulationsergebnisse zur Ermittlung des Wärmestroms liefert die Erkenntnis, daß die Grenzschichtdicke  $\delta_{75}$  nur einen geringen Einfluß auf den Wärmestrom hat und damit der Wärmestrom in das Gerät nur von der Temperaturdifferenz zur Umgebung  $T_{75} - T_L$  abhängt. Zur Implementierung genügt deshalb für jeden Heizkostenverteiler eine 3-Punkt-Kennlinie, um den funktionalen Zusammenhang  $\dot{Q} = f(T_{75} - T_L)$  durch ein quadratisches Polynom anzunähern.

Die Modellbausteine der Klasse Heizkostenverteiler lassen sich gemäß dieser Anforderung erweitern, indem bei der Vererbung als zusätzliches Submodell die 3-Punkt-Kennlinie *ModKL3P* aggregiert wird. Bei dieser Spezifikation wird weiterhin der neue Modellparameter „Thermischer Kontaktwiderstand [K/W]“ hinzugefügt, der sich zur Abgrenzung von den allgemeinen Heizkörper-Parametern in eine neue Parametergruppe „Montage-Parameter“

<sup>19</sup> Als Zahlenbeispiel ergibt sich für eine angenommene Lackschichtdicke von  $d_{Lack} \approx 0,3$  mm, einer Kontaktfläche von  $130 \text{ mm}^2$  und einer (geschätzten) Wärmeleitfähigkeit von  $\lambda_{Lack} \approx 5 \text{ W/mK}$  ein Kontaktwiderstand von  $R_K = 0,46 \text{ K/W}$ .

einordnen läßt (die Gruppierung von Modellparametern wird in Abschnitt 4.1 durchgeführt). Da die Schnittstellen der HKVE-Modellbausteine strukturell unverändert bleiben, lassen sich diese auch nach der Modifikation wie gewohnt verwenden, so daß eine Anpassung anderer Modellbausteine nicht erforderlich ist.

Die Stützstellen der 3-Punkt-Kennlinie werden analog wie bei der Implementierung der Kennlinienfelder für die Sensortemperaturen um einen Arbeitspunkt herum ( $AP \pm \Delta$ ) ausgewertet. Die entstehenden drei Wertepaare dienen zur Spezifikation der Kennlinie und werden in die jeweiligen Modellbausteine für die Parameter der Kennlinie eingesetzt.

### 3.6.2 *c*-Wert-Berechnung

Zur Ermittlung der Zielgröße *c*-Wert wird die Berechnungsvorschrift gemäß EN 834 nach Gleichung (2.7) als separater Modellbaustein in den virtuellen Prüfstand implementiert. Dieses Teilmodell besteht daher lediglich aus den beiden algebraischen Gleichungen:

$$1. \text{ } c\text{-Wert-Berechnung:} \quad c = 1 - \frac{T_{H,F} - T_{L,F}}{\Delta T_{\text{in}}} \quad (3.101)$$

$$2. \text{ Logarithmische Übertemperatur:} \quad \Delta T_{\text{in}} = \frac{T_V - T_R}{\ln \frac{T_V - T_L}{T_R - T_L}} \quad (3.102)$$

Als Schnittstellen (Koppeleingänge) dieses Modellbausteins treten die Systemtemperaturen des Heizkörpers (Vorlauftemperatur  $T_V$ , Rücklauftemperatur  $T_R$ ), die Raumlufttemperatur der Prüfumgebung  $T_L$  sowie die Sensortemperaturen des Heizkostenverteilers (Heizkörperfühler  $T_{H,F}$  und Raumluftfühler  $T_{L,F}$ ) auf. Diese Schnittstellen stehen als Koppelausgänge der Submodelle *Heizkörper* und *Heizkostenverteiler* sowie des Eingangsgrößenmodells *Prüfumgebung* zur Verfügung (Bild 3.5).

Der Modellbaustein *c*-Wert-Berechnung gilt für den allgemeinen Zweifühlerbetrieb eines entsprechend ausgestatteten Heizkostenverteilers (Zweifühlergerät). Für die Ermittlung von *c*-Werten im Einfühlerbetrieb bzw. für ein baugleiches Einfühlergerät wird bei der Verkopplung des Modellbausteins die Schnittstelle *Raumluftfühlertemperatur* mit der konstanten Raumlufttemperatur  $T_L$  des Eingangsgrößenmodells gleichgesetzt.

### 3.6.3 Strahlungsanteil

Als eine der physikalischen Einflußgrößen auf das thermische Verhalten eines Heizkostenverteilers (Abschnitt 3.5) ist die Kenntnis der Grenzschichtdicke  $\delta$  am Ort der Montage erforderlich. Diese läßt sich anhand der Gleichungen (3.39) und (3.41) aus der lokalen konvektiven Wärmeleistung zu

$$\delta(z) = \frac{2\lambda_L A_O}{\dot{Q}_{Konv}} (T_o - T_L) \quad (3.103)$$

bestimmen. Da der Potenzansatz die insgesamt (lokal) abgegebene Wärmeleistung liefert, muß der konvektive Anteil aus der Berechnung des (lokalen) Strahlungsanteils ermittelt werden. Der Strahlungsanteil selbst läßt sich über das Stefan-Boltzmann-Gesetz nach Gleichung (3.47) berechnen. Bei Gliederheizkörpern muß zusätzlich der strahlungswirksame Flächenanteil bekannt sein, der aus den verfügbaren Geometrieparametern *Säulenbreite* und *Gliedbaulänge* errechnet werden kann.

Ogleich nur als Zwischengröße erforderlich, stellt der so berechnete Strahlungsanteil eine zusätzliche interessante Ausgangsgröße des gesamten Prozeßmodells dar. Er kann z.B. für einen Vergleich mit Herstellerangaben (sofern verfügbar) herangezogen werden.

## 4 Parametrierung

Eine explizit interessierende Prozeßvariante (Ausprägung) wird erst durch die Festlegung eines bestimmten Satzes an Modellparametern spezifiziert. Ein derart festgelegter Prozeß wird dann als *Experiment* bezeichnet. Komplexe Prozeßmodelle, deren Verhaltensweisen durch sehr viele Differentialgleichungen und algebraische Systemgleichungen beschrieben werden, besitzen in der Folge häufig eine unüberschaubar große Anzahl an Modellparametern. Eine wichtige Aufgabe des Modellierers ist somit auch die Sicherstellung einer möglichst einfachen und transparenten Parameterstruktur, um eine anwenderfreundliche und sichere Parametrierbarkeit der Prozeßmodelle zu gewährleisten.

Die folgenden Abschnitte betrachten diesen Aspekt in bezug auf das Prozeßmodell des „Virtuellen *c*-Wert-Prüfstands“ und verdeutlichen die spezielle Vorgehensweise bei der Parametrierung.

### 4.1 Klassifikation von Modellparametern

Unabhängig vom modellierten Prozeß unterscheidet das objektorientierte Modellierungswerkzeug *CAMex* zwischen drei verschiedenen Parametertypen [JAH97]:

- Typ 0: *Konstanter Parameter*. Der Wert wird bereits bei der Modelldefinition festgelegt und kann ohne Manipulation eines Modellbausteins (bei der Vererbung) nicht mehr verändert werden (z.B. Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ).
- Typ 1: *Primärer Parameter*. Die Zahlenwerte dieser Modellparameter werden unmittelbar vor der Simulation vom Benutzer eingegeben, um ein bestimmtes Experiment zu spezifizieren (kalibrierbarer Parameter).
- Typ 2: *Sekundärer Parameter*. Diese Parameter errechnen sich mittels einer im Modellbaustein abgelegten Berechnungsvorschrift aus den Konstanten (Typ 0) und/oder den primären Parametern (Typ 1). Die Berechnung des Zahlenwertes findet unmittelbar nach der Parametereingabe statt, also noch vor der Simulation (*off-line*).

In einer Eingabemaske des Simulators (Bild 4.1) werden die Bezeichner und Zahlenwerte aller Parameter der ausgewählten Parametergruppe (s.u.) tabellarisch aufgelistet. Die primären Modellparameter sind editierbar, während alle Konstanten und sekundären Parameter zwar angezeigt werden, aber keine Dateneingabe zulassen (inaktive Darstellung). Das Beispiel in Bild 4.1 zeigt die *Anzahl der Segmente* (= 20) als konstanten Parameter, die *Mantelfläche des Segmentes* (=  $600 \text{ cm}^2$ ) errechnet sich als sekundärer Parameter aus den übrigen Geometrieparametern.

Für den Anwender sind also tatsächlich nur die *primären Modellparameter* (Parametertyp 1) relevant, die zur Festlegung einer virtuellen Prüfsituation in den Simulator eingegeben werden

müssen. Im Rahmen einer Parametrierung ist in erster Linie die Ermittlung dieser Modellparameter erforderlich.

Parameter	Wert
Wandstärke Platte [mm]	1.25
Bauhöhe Heizkörper [m]	0.6
Baulänge Heizkörper [m]	1
Minifläche des Segmentes [cm²]	600
Teilung [1/m]	33
Anzahl Segmente	20

**Bild 4.1:** Maske zur Eingabe von Geometrieparametern (Beispiel Plattenheizkörper)

Zur besseren Übersichtlichkeit und Handhabung werden die Parameter eines komplexen Prozeßmodells zunächst in Gruppen gegliedert. Diese Unterteilung kann sowohl anhand struktureller als auch phänomenologischer Gesichtspunkte erfolgen. *CAMex* unterstützt diese Gruppierung, indem ein Modellparameter zwingend einer Parametergruppe zugeordnet werden muß. Der Gruppenname kann dabei vom Modellierer vorgegeben oder auch automatisch festgelegt werden.

Bei der Modellbildung des Virtuellen *c*-Wert-Prüfstands wurden insgesamt fünf Parametergruppen definiert, um alle auftretenden Modellparameter strukturiert einordnen zu können. Es sind dies die Gruppen der *Geometrie*-, *Stoff*-, *Heizkörper*-, *Montage*- und *Strukturparameter*. Die Parameter der einzelnen Gruppen werden im folgenden kurz aufgeführt und der Weg ihrer Ermittlung (Identifikation) angegeben.

#### 4.1.1 Geometrieparameter

In dieser Zusammenstellung werden alle geometrischen Abmessungen und Eigenschaften des Teilmodells Heizkörper zusammengefaßt:

- $B_H$  - Bauhöhe des Heizkörpers
- $B_L$  - Baulänge des Heizkörpers (Plattenheizkörper)
- $p_T$  - Teilung (Plattenheizkörper)
- $qB_L$  - Strahlungswirksame Gliedbaulänge (Gliederheizkörper)
- $d$  - Dicke der Heizkörperwand (ggf. Mittelwert, z.B. bei Guß-Heizkörpern)
- $a, b$  - Abmessungen des Fließkanalquerschnitts (vgl. Abschnitt 3.4.3 zur Typisierung)

- $V_W$  - Wasserinhalt eines Gliedes (nur zur Typisierung erforderlich)  
 $N_S$  - Anzahl Säulen (Gliederheizkörper) bzw. Reihen (Plattenheizkörper)

Identifikation der Geometrieparameter:

- $B_H, B_L, N_S, d, V_W, p_T$  ← Hersteller-Datenblätter (alternativ: Messung)  
 $a, b$  ← Datenblätter, ggf. durch Typisierung (3.4.3)

In einigen Fällen (häufiger bei älteren Heizkörpern) kann es vorkommen, daß nicht alle Geometrieparameter aus den technischen Daten der Hersteller hervorgehen. Dann müssen Messungen an den betreffenden Heizkörpern vorgenommen oder Erfahrungswerte herangezogen werden.

Die Säulenzahl  $N_S$  stellt strenggenommen einen Strukturparameter dar, da sie aus der Topologie eines Gliederheizkörpers hervorgeht. Wie im Kapitel 3 zur Modellbildung erläutert, wird statt einzelner Säulen die Wärmeabgabe einer vollständigen Schicht eines Gliedes beschrieben, so daß die Säulenzahl nur phänomenologisch, nicht jedoch strukturell auf das Modell wirkt. Die Säulenzahl wird daher als primärer Modellparameter behandelt und der Gruppe der Geometrieparameter zugeordnet.

#### 4.1.2 Stoffparameter

In dieser Parametergruppe werden die Stoffwerte der beteiligten Medien spezifiziert. Es handelt sich dabei überwiegend um thermische Materialeigenschaften wie z.B. die Wärmeleitfähigkeit.

- $c_{p,W}$  - Spezifische Wärmekapazität des Heizmediums  
 $c_{p,H}$  - Spezifische Wärmekapazität des Heizkörpermaterials  
 $Pr$  - Prandtl-Zahl des Heizmediums  
 $\lambda_W$  - Wärmeleitfähigkeit des Heizmediums  
 $\lambda_H$  - Wärmeleitfähigkeit des Heizkörpermaterials  
 $\lambda_L$  - Wärmeleitfähigkeit der Umgebungsluft

Identifikation der Stoffparameter:

- (alle Stoffwerte) ← Literatur, Datenbanken

Die Ermittlung von Stoffwerten stellt dank umfangreicher Literaturstellen (z.B. VDI-Wärmeatlas [VDI97]; [BLA89]) und Datenbanken normalerweise kein Problem dar. Die in der Regel vorhandenen Temperaturabhängigkeiten der Stoffwerte können aufgrund der geringen Temperaturspreizungen im interessierenden Anwendungsbereich vernachlässigt werden. Die Zahlenwerte sollten allerdings im Hinblick auf den betrachteten Betriebszustand für geeignete Referenztemperaturen angegeben werden (im Basiszustand z.B. bezogen auf 50 °C für das Heizmedium).

### 4.1.3 Heizkörper-Parameter

Alle Parameter dieser Gruppe charakterisieren in Ergänzung zur Geometrie das *thermische Verhalten* eines Heizkörpers. Diese Parameter sind daher üblicherweise den Datenblättern der Hersteller entnehmbar.

$\dot{Q}_N$	- Norm-Wärmeleistung (je Glied bzw. je Meter Baulänge) bei Norm-Übertemperatur
$n$	- Heizkörper-Exponent
$\Delta T_N$	- Norm-Übertemperatur (legt Normzustand fest)
$\Delta T_S$	- Norm-Temperaturspreizung (legt Normzustand fest)
$\dot{m}_N$	- Norm-Heizmediumstrom
$S_A$	- Strahlungsanteil
$C_S$	- Strahlungsparameter (aus modifiziertem Potenzansatz)

Identifikation der Heizkörper-Parameter:

$\dot{Q}_N, n, \Delta T_N$	← Technische Daten des Herstellers
$\dot{m}_N$	← Direkt berechenbar aus $\dot{Q}_N$ und $\Delta T_S$
$S_A$	← z.T. Herstellerdaten, aber auch berechenbar (3.6.3)
$C_S$	← Klassifizierung in Verbindung mit einer Identifikation durch Meßwerte (Validierung, Parameterstudien)

Die Normdaten eines Heizkörpers sind bei nicht zu alten Ausführungen immer in den Hersteller-Datenblättern zu finden, da deren Messung nach der DIN bzw. EN vorgeschrieben wird. Anders verhält es sich mit dem Strahlungsanteil  $S_A$ . Da diese freiwillige Herstellerangabe<sup>20</sup> vergleichsweise selten zu finden ist, wird der Strahlungsanteil im Modell zusätzlich berechnet, wozu bei Gliederheizkörpern die strahlungswirksame Gliedbaulänge  $qB_L$  (s.o.) herangezogen wird. Die Berechenbarkeit des Strahlungsanteils hat sich bei entsprechenden Untersuchungen in Form von Parameterstudien gezeigt (siehe Abschnitt 3.6.3). Dazu wird wiederum das Stefan-Boltzmann-Gesetz nach Gleichung (3.47) herangezogen und der Strahlungsanteil als prozentuales Verhältnis der Strahlungs- zur Gesamtleistung berechnet. Benötigt wird der Strahlungsanteil zur Berechnung der Grenzschichtdicke als Koppelgröße zwischen den Teilmodellen Heizkörper und Heizkostenverteiler (weitere Details bei der Implementierung in Abschnitt 5.1).

Der Norm-Heizmittelstrom ist als Bezugsgröße für die Eingangsgröße *Heizmediumstrom* eingeführt worden. Er läßt sich mit der zugehörigen Norm-Temperaturspreizung  $\Delta T_S$  sehr leicht aus der Beziehung

<sup>20</sup> Der Strahlungsanteil von Heizkörpern spielt eine immer größer werdende Rolle. Bei modernen Niedertemperatur-Heizungsanlagen ist ein großer Strahlungsanteil wichtig für eine effektive Wärmeabgabe, er fördert zudem die sog. thermische Behaglichkeit (angenehmes Wärmeempfinden trotz geringerer Raumlufttemperatur).

$$\dot{Q}_N = \dot{m}_N c_p \Delta T_S \quad (4.1)$$

berechnen.

### Zur Vorgabe des Parameters $C_S$

Als zunächst unbekannter Modellparameter wurde der Heizkörper-Parameter  $C_S$  bei der Modellbildung über den modifizierten Potenzansatz eingeführt. Da es sich hierbei um einen abstrakten Parameter ohne direkte physikalische Bedeutung handelt, stellt seine Ermittlung im Rahmen der Parametrierung eine gewisse Besonderheit dar. Im Abschnitt 3.4.6 wurde der Parameter im Zusammenhang mit dem Verhältnis zwischen Strahlung und Konvektion charakterisiert, der jedoch nicht direkt mit dem Strahlungsanteil gleichgesetzt werden darf.

Bei der Parametrierung einer umfangreichen Heizkörperauswahl wurde der Parameter  $C_S$  in seinen physikalisch sinnvollen Grenzen zwischen 0 und 1 (vgl. 3.4.6) variiert und die Auswirkungen auf bestimmte Prozeßgrößen wie auch auf die Zielgröße  $c$ -Wert im Vergleich zu den gemessenen Werten bestimmt. Eine Analyse der validierten Parameterwerte läßt bestimmte Trends erkennen, die für die Festlegung des Modellparameters  $C_S$  bei der Parametrierung als Leitfaden dienen. Folgende Merkmale lassen sich dabei herausstellen:

- Bei der Heizkörperklasse *Plattenheizkörper* hängt die Wahl des Parameters hauptsächlich von der Ausführung<sup>21</sup> (Zweistellige Typenbezeichnung) ab. Beim Typ 10 (maximaler Strahlungsanteil) liegt der einzustellende Parameterwert im Bereich von etwa 0,7...1,0; bei den Ausführungen mit höherem konvektiven Anteil (Typen 11, 22, 33) dagegen im einem Bereich von 0,2...0,5.
- In Analogie zu den Plattenheizkörpern ist bei *Gliederheizkörpern* ein Zusammenhang mit der Anzahl der Säulen  $N_S$  erkennbar. Hier zeigt sich allerdings ein umgekehrter Trend: Für den DIN-Stahlradiator wurden bei einer Säulenanzahl von  $N_S = 2...4$  Parameterwerte im Bereich von  $C_S = 0,7...0,9$  eingestellt, beim DIN-Röhrenradiator für eine Säulenanzahl von  $N_S = 1...6$  Werte im Bereich von  $C_S = 0,2...0,5$ . Die insgesamt größeren Werte des Stahlradiators sind mit einem höheren Strahlungsanteil dieses Heizkörpers zu begründen (bei kleinerer Säulenzahl ist dieser Unterschied stärker ausgeprägt).

Als Ergebnis einer Studie zu möglichen Parameterempfindlichkeiten des Virtuellen  $c$ -Wert-Prüfstands hat sich herausgestellt, daß eine Unsicherheit des Parameters  $C_S$  von  $\Delta C_S = \pm 0,1$  eine Veränderung der  $c$ -Werte um etwa  $\Delta c_{1,F} = \pm 0,003$  und  $\Delta c_{2,F} = \pm 0,002$  bewirkt. Diese Abweichungen sind derart gering, daß eine Unsicherheit bei der Parameterfestlegung von  $\Delta C_S = \pm 0,1$  durchaus vertretbar ist. Damit können die zuvor herausgestellten Trends für Platten- und Gliederheizkörper als Leitfaden für die Festlegung dieses Parameters dienen.

<sup>21</sup> Die Ausführung eines Plattenheizkörpers wird üblicherweise durch eine zweistellige Typ-Nr. angegeben, wobei die erste Ziffer die Anzahl der Platten (Reihen) und die zweite Ziffer die Anzahl der Konvektorblechreihen angibt [REC95].

#### 4.1.4 Montage-Parameter

Die Parameter dieser Gruppe charakterisieren die Art der Ankopplung eines Heizkostenverteilers an einen Heizkörper.

$h_{HKV}$  - Montagehöhe des Heizkostenverteilers am Heizkörper (meist  $0,75 \cdot B_H$ )

$R_K$  - Thermischer Kontaktwiderstand zwischen Heizkörper und HKVE

Identifikation der Montage-Parameter:

$h_{HKV}$  ← Vorgabe nach Norm (Montage in 75% der Heizkörper-Bauhöhe)

$R_K$  ← Berechnung / Abschätzung über Lackschicht und Kontaktgüte

Strenggenommen müßte auch die Kontaktzone, die den geometrischen Ort der Berührung zwischen Heizkostenverteiler und Heizkörper kennzeichnet, dieser Gruppe zugeordnet werden. Da es jedoch für jede Kontaktzone einen eigenen Modellbaustein gibt, muß die Zone vor der Generierung eines Prozeßsimulators festgelegt werden, weshalb sie in die nächste Gruppe der Strukturparameter eingeordnet wird.

#### 4.1.5 Strukturparameter

Eine Besonderheit stellt die Gruppe der Strukturparameter dar. Da diese Modellparameter die *Gleichungsstruktur* des entstehenden mathematischen Prozeßmodells beeinflussen, müssen sie im Modellierungswerkzeug spezifiziert werden, bevor aus dem Gleichungssystem ein Prozeßsimulator generiert wird. Bei der anschließenden Verwendung dieses Simulators können die Strukturparameter nicht mehr variiert werden.

$TYP$  - Typ des Fließkanalquerschnitts

$HKTYP$  - Art des Heizkörpers (GHK = Gliederheizkörper, PHK = Plattenheizkörper)

$ZONE$  - Kontaktzone bzw. Berührungsort zwischen Heizkörper und Heizkostenverteiler

$N_A$  - Anzahl an Segmenten je Bauhöhe (vertikale Diskretisierung)

Identifikation der Strukturparameter:

$TYP$  ← Festlegung der besten Approximation durch Anwender / Monteur (Typisierung, vgl. Abschnitt 3.4.3)

$ZONE$  ← Resultiert geometrisch aus der Kontur des Heizkörperquerschnitts und der Kontur des Heizkostenverteiler-Unterteils

$N_A$  ← Vorgabe durch den Anwender (Genauigkeit / Rechenaufwand)

Bei der Bottom-Up-Synthese der objektorientierten Modellbildung werden in Abhängigkeit von der Wahl der Strukturparameter unterschiedliche Modellbausteine verwendet und dadurch verschiedene Gleichungs- und Parametersätze generiert und eingebunden (Querschnittstyp, Heizkörpertyp, Kontaktzone). Bei Variation der vertikalen Diskretisierung wird die Anzahl der Modellgleichungen des Prozeßsimulators manipuliert. Mit dem Ziel einer

feineren Auflösung der (vertikal) ortsverteilten Prozeßgrößen und damit einer höheren Genauigkeit der Lösung erhöht sich unmittelbar auch die Anzahl der automatisch generierten Systemgleichungen.

## 4.2 Implementierte Parameteridentifikation

### 4.2.1 Identifikation unbekannter Geometrieparameter

Für die Berechnung des inneren Wärmeübergangs in Abschnitt 3.4.3 werden zwei Geometrieparameter benötigt, die den jeweiligen Querschnittstyp charakterisieren. In der Praxis kommt es häufig vor, daß aus den Heizkörper-Datenblättern der Hersteller nur *einer* der beiden Geometrieparameter ( $a$  oder  $b$ ) als Halbmesser eindeutig hervorgeht. Folglich muß der fehlende zweite Parameter auf eine andere Art und Weise ermittelt werden, wozu sich generell zwei Möglichkeiten anbieten:

Sollte der zu parametrierende Heizkörper zugänglich sein (beim Vorhandensein eines Heizkörperlagers oder im Falle der Parameteraufnahme vor Ort), so können praktisch alle erforderlichen Geometrieparameter direkt am Heizkörper *gemessen* werden. Dies ist jedoch nur selten der Fall und bedeutet einen zusätzlichen Arbeitsaufwand im Ablauf der Parametrierung. Aus diesen Gründen kann die Messung als alleinige Möglichkeit zur Ermittlung der fehlenden Geometrieparameter ausgeschlossen werden.

Die folgende zweite Methode bedient sich einer Hilfsgröße, die als Parameter praktisch für jeden Heizkörper in den Herstellerangaben zu finden ist, nämlich dem *Wasserinhalt eines Gliedes*. Über dieses Volumen  $V_W$  eines Heizkörpergliedes kann zusammen mit der Bauhöhe  $B_H$  und der Anzahl an Säulen je Glied  $N_S$  zunächst die *Querschnittsfläche* des Fließkanals abgeschätzt werden:

$$A_i^* = \frac{V_W}{B_H \cdot N_S} = \frac{\text{Wasserinhalt je Glied [m}^3\text{]}}{\text{Bauhöhe [m]} \cdot \text{Säulenanzahl}} \quad (4.2)$$

Die so berechnete Fläche  $A_i^*$  stellt tatsächlich jedoch nur eine Art „durchschnittlichen Fließkanalquerschnitt“ des Gliedes dar. Durch die obere und untere Querverbindung („T-Stücke“) wird der tatsächliche Wert verfälscht, da diese T-Stücke immer einen größeren Querschnitt aufweisen. Der „wahre Fließkanalquerschnitt“ kann allerdings sehr einfach berechnet werden, sofern die *Differenz* zwischen zwei unterschiedlichen Bauhöhen betrachtet wird:

$$A_i = \frac{\Delta V_W}{\Delta B_H \cdot N_S} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \Delta B_H = B_{H,2} - B_{H,1} \\ \Delta V_W = V_{W,2} - V_{W,1} \end{array} \quad (4.3)$$

Vorzugsweise sollte bei dieser Vorgehensweise eine nicht zu kleine Differenz der Bauhöhe gewählt werden, um den wahren Fließkanalquerschnitt möglichst gut zu ermitteln (bedingt durch mögliche Ungenauigkeiten in den Herstellerdaten).

Andererseits läßt sich aus den Geometrieparametern  $a$ ,  $b$  und  $d$  die approximierte innere Querschnittsfläche  $A_i$  durch die allgemeine Funktion

$$A_i = f(a, b, d) \quad (4.4)$$

berechnen, als Beispiel für den Querschnittstyp 2 (rechteckig):  $A_i = 4(a - d)(b - d)$ . Sind also z.B. die absolute Tiefe  $2b$  und die Wandstärke  $d$  bekannt, so kann der fehlende Parameter  $a$  durch Auflösen von Gleichung (4.4) unter Verwendung der aus Gleichung (4.3) berechneten Fläche  $A_i$  zu

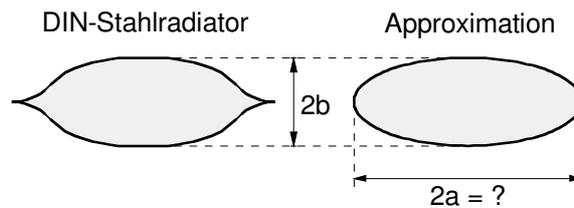
$$a = g(A_i, b, d) \quad (4.5)$$

bestimmt werden (im Beispiel für Typ 2:  $a = \frac{A_i}{4(b - d)} + d$ ).

#### 4.2.2 Approximation des Fließkanalquerschnitts

Die Berechnung des fehlenden Geometrieparameters über die innere Querschnittsfläche ist insbesondere auch dann vorteilhaft anwendbar, wenn bei der Parameteraufnahme ein vorliegender Fließkanalquerschnitt nicht genau mit einem der implementierten Querschnittstypen übereinstimmt. In diesem Fall ist die eindeutige Zuordnung des zweiten Parameters oft nicht möglich.

Als typisches Beispiel werde ein DIN-Stahlradiator betrachtet. Bei der Fertigung dieses Heizkörperstyps entsteht durch das Verschweißen zweier gezogener Halbschalen aus Stahlblech ein „spitzovaler“ Fließkanalquerschnitt (Bild 4.2). Für diese sehr spezielle Form ist in der Literatur keine experimentell ermittelte Nußeltzahl zu finden; eine theoretische Herleitung wäre, sofern überhaupt möglich, nur mit erheblichem Aufwand denkbar. Es liegt daher nahe, diese Querschnittsform durch eine der implementierten Querschnittsformen zu approximieren. Die spitzovale Querschnittsform läßt sich beispielsweise durch eine Ellipse geometrisch relativ gut annähern.



**Bild 4.2:** Approximation des Fließkanalquerschnitts am Beispiel eines DIN-Stahlradiators

Während die Tiefe  $2b$  als charakteristisches Maß vom Hersteller angegeben wird, kann über die Breite  $2a$  der „am besten approximierenden Ellipse“ zunächst keine Aussage gemacht werden. Dieser fehlende Geometrieparameter läßt sich nach der zuvor beschriebenen Methode über die Ermittlung der Querschnittsfläche bestimmen. Das Beispiel soll anhand einiger konkreten Zahlenwerte vervollständigt werden (Daten des Herstellers *Buderus* [BUD95]):

Herstellerdaten:  $b = 10 \text{ mm}$  ;  $d = 1,25 \text{ mm}$  (allgemeine Parameter)  
 $B_H = 1000 \text{ mm}$      $V_W = 1,72 \text{ l}$     ( $N_S = 3$ )    (bauhöhenabhängige  
 $B_H = 450 \text{ mm}$      $V_W = 0,98 \text{ l}$     ( $N_S = 3$ )    Parameter)

Der Fließkanalquerschnitt errechnet sich nach Gleichung 4.3 zu  $A_i = 448 \text{ mm}^2$ . Aus der geometrischen Beziehung für die Fläche einer Ellipse

$$A_i = \pi(a-d)(b-d) = \frac{\Delta V_W}{\Delta B_H} \Leftrightarrow a = \frac{A_i}{\pi(b-d)} + d \quad (4.6)$$

folgt nach Einsetzen obiger Zahlenwerte für die Parameter  $b$ ,  $d$  und  $A_i$  schließlich der fehlende Parameter  $a \approx 18 \text{ mm}$ .

### 4.2.3 Automatisierung der Parameteridentifikation

Die Typisierung – Approximation des Fließkanalquerschnitts und gegebenenfalls Ermittlung des unbekanntem Querschnittsparameters – läßt sich sehr gut automatisieren, indem die notwendigen Berechnungen gemäß obiger Gleichungen an passender Stelle in das Gesamtkonzept des „Virtuellen  $c$ -Wert-Prüfstands“ implementiert werden. Für die Verwaltung und Dokumentation aller Modellparameter wird ein Tabellen-Kalkulationsprogramm verwendet (siehe folgenden Abschnitt 4.3). Mit Hilfe eines solchen Werkzeugs können Parameterberechnungen wie die Identifikation bereits bei der Eingabe der Parameterwerte automatisiert durchgeführt werden.

### 4.3 Parameterverwaltung

Die Eingabe und Verwaltung aller Modellparameter läßt sich mit den Programmen *Microsoft<sup>®</sup> Excel* oder *StarCalc<sup>22</sup>* (Star Division) durchführen. Diese in der Anwendung sehr ähnlichen Tabellen-Kalkulationsprogramme eignen sich in mehrfacher Hinsicht recht gut für die bei der Parametrierung anstehenden Aufgaben. So können

- alle Modellparameter übersichtlich dargestellt, Eingabefelder erstellt und beschriftet sowie Kommentare, Grafiken oder ausführlichere Dokumentationen hinzugefügt werden;
- Berechnungen innerhalb eines Parameterblattes durchgeführt werden (z.B. Norm-Übertemperatur, Norm-Heizmediumstrom und insbesondere die Berechnungen zur Parameteridentifikation im Rahmen der Typisierung);
- Eingabewerte hinsichtlich Plausibilität und Wertebereiche überprüft werden.

Mittels einer implementierten Script-Sprache läßt sich bei beiden Programmen relativ problemlos ein komfortabler Parameterexport in das an *CAMex* angebundene Simulationstool *SimEx* realisieren. Bei diesem *Parameterexport* werden alle zu einem Experiment gehörenden Modellparameter und Eingangsgrößen in einem bestimmten Format in eine Parameterdatei geschrieben. Für den Anwender reduziert sich damit die manuelle Parametereingabe in den Simulator *SimEx* auf einen einfachen Import der zuvor generierten Parameterdatei, um ein Experiment vollständig zu parametrieren.

Da das Modellierungswerkzeug *CAMex* nur auf den Betriebssystemen *UNIX* oder *LINUX* lauffähig ist, wurde für die Realisierung das Star-Office-Produkt *StarCalc* gewählt.

---

<sup>22</sup> Bezeichnung des Tabellen-Kalkulationsprogrammes aus dem Star-Office-Paket der *Star Division*. Neuere Programmversionen mögen abweichende Namen besitzen.



Eine *Excel*- bzw. *StarCalc*-Arbeitsmappe setzt sich üblicherweise aus mehreren Arbeitsblättern zusammen. Diese Möglichkeit der Unterteilung wird dazu genutzt, um einzelne Parameterblätter innerhalb einer Arbeitsmappe (Datei) anzulegen. Ein einzelnes Datenblatt erlaubt die Aufnahme von maximal sechs Parametersätzen einer bestimmten Heizkörper-Art. Für den Fall der Parameteridentifikation bei der Typisierung (4.2.1) ist die Aufnahme zweier Parametersätze bei unterschiedlicher Bauhöhe zwingend erforderlich, andererseits können so simulierte  $c$ -Werte verschiedener Ausführungen einer Heizkörperart verglichen werden<sup>23</sup>.

Tabelle 4.1 zeigt exemplarisch ein solches *Excel*-Parameterblatt, dargestellt ist die Parametrierung eines DIN-Stahlradiators mit vier Parametersätzen für verschiedene Ausführungen des Herstellers Buderus [BUD95] (zwei verschiedene Bauhöhen, unterschiedliche Säulenzahl).

Die Parameter werden in die bekannten Parametergruppen eingeteilt (vgl. Abschnitt 4.1) und zusammen mit den Eingangsgrößen in der ersten Spalte aufgeführt. Einige Parameter weichen von der Auflistung der Modellparameter in Abschnitt 4.1 ab. So werden z.B. die *Norm-Übertemperatur*, die *Norm-Temperaturspreizung* sowie die Eingangsgröße *Raumlufttemperatur* automatisch aus der Angabe des Normzustandes im festgelegten Format  $T_V/T_R/T_L$  (z.B. 55/45/20) extrahiert und selbständig an den vorgesehenen Stellen in das Datenblatt eingetragen. Im Parameterblatt sind in einer leeren Vorlage (Maske) die Felder zwingend einzugebender Parameter eines Datensatzes schraffiert dargestellt (Tabelle 4.1).

Zusammen mit einem vollständigen Parametersatz können auch die  $c$ -Werte für den Ein- und Zweifühlerbetrieb angegeben werden, die mit dem Virtuellen  $c$ -Wert-Prüfstand simuliert wurden. Für einen Vergleich zwischen gemessenen und simulierten Werten lassen sich herkömmlich gemessene Werte zur Dokumentation in ein weiteres Feld aufnehmen. Weichen die simulierten Werte um mehr als  $\pm 0,02$  von diesen Meßwerten ab (Toleranz nach DIN bzw. EN, siehe  $c$ -Wert-Prüfung im Abschnitt 2.2.2), so werden sie automatisch in roter Farbe dargestellt, um auf diese Abweichung visuell hinzuweisen.

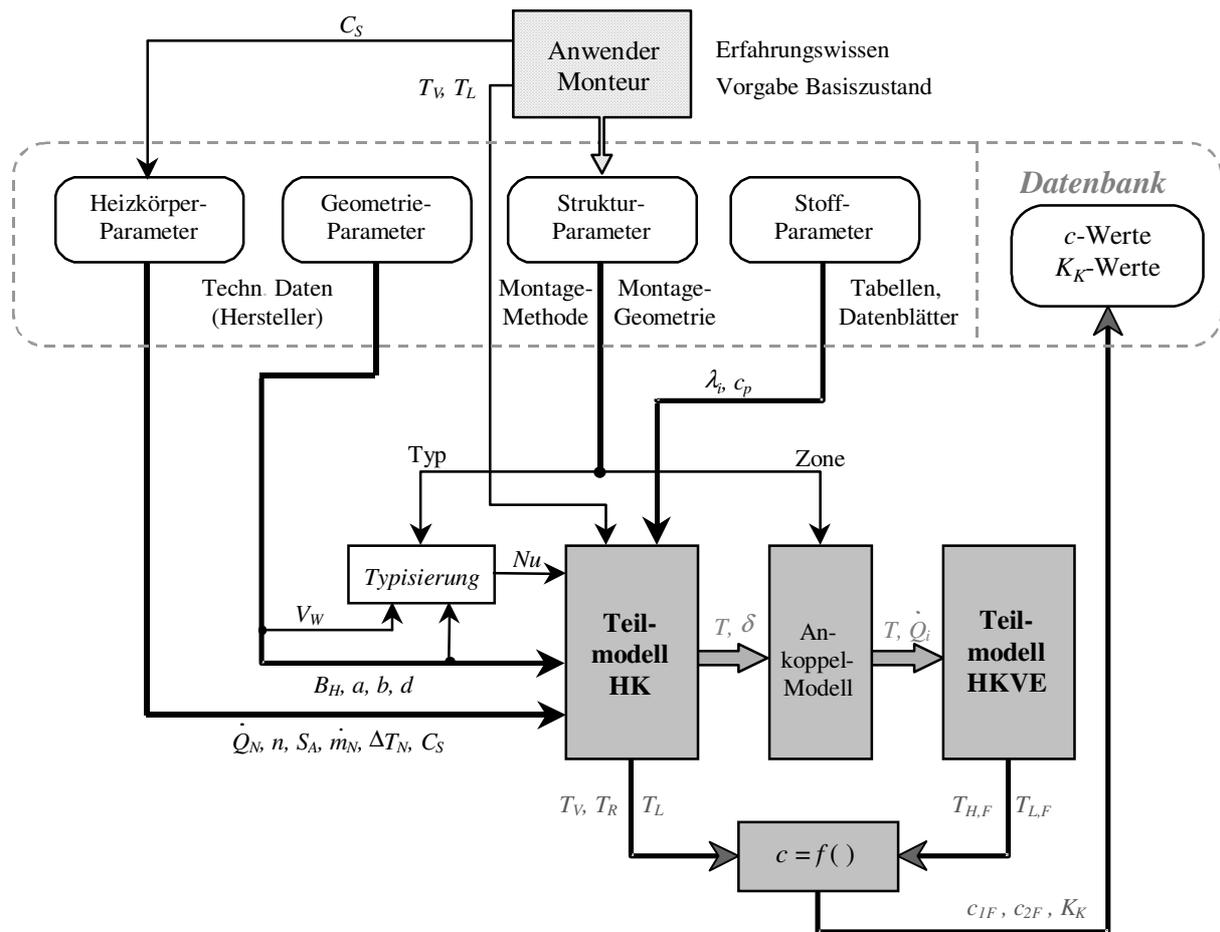
Im Umfeld der zum virtuellen  $c$ -Wert-Prüfstand entstandenen Dokumentation wird die allgemeine Vorgehensweise bei der Parametrierung einer Prüfsituation in Form eines leicht verständlichen „Standard-Rezepts“ für den Anwender Schritt für Schritt beschrieben.

## 4.4 Parameterwirkungsplan

Die folgende Abbildung verdeutlicht abschließend nochmals grafisch die Vorgehensweise der Parametrierung, die Parameterverwaltung in einer Datenbank sowie die Wirkungsweise der Modellparameter auf das Prozeßmodell.

---

<sup>23</sup> Die betreffende Norm [DIN4713 bzw. EN834] schreibt für die Ermittlung von  $c$ -Werten an den Grundheizkörpern keine feste Heizkörperausführung vor. Somit ist für die Simulation repräsentativer  $c$ -Werte sicherlich die Wahl einer Standard-Bauhöhe (z.B. 60cm) und -Reihenzahl (z.B. 2) sinnvoll. Andererseits kann der Einfluß unterschiedlicher Bauhöhen oder Säulenzahlen auf den  $c$ -Wert direkt analysiert und dokumentiert werden.



**Bild 4.3:** Struktur- und Wirkungsplan der Modellparameter

## 5 Simulation

Erst die (innere) Verifikation der Modellimplementierung und die (äußere) Validierung des Prozeßmodells ermöglichen eine Bewertung des Gesamtkonzeptes im Hinblick auf das Ziel einer möglichst universellen Verwendbarkeit. Das Kapitel verdeutlicht daher zunächst den Weg von der Aggregation der Modellbausteine zum Prozeßmodell bis hin zur Simulation des Prozesses. Anschließend werden die Simulationsergebnisse ganzheitlich betrachtet und validiert.

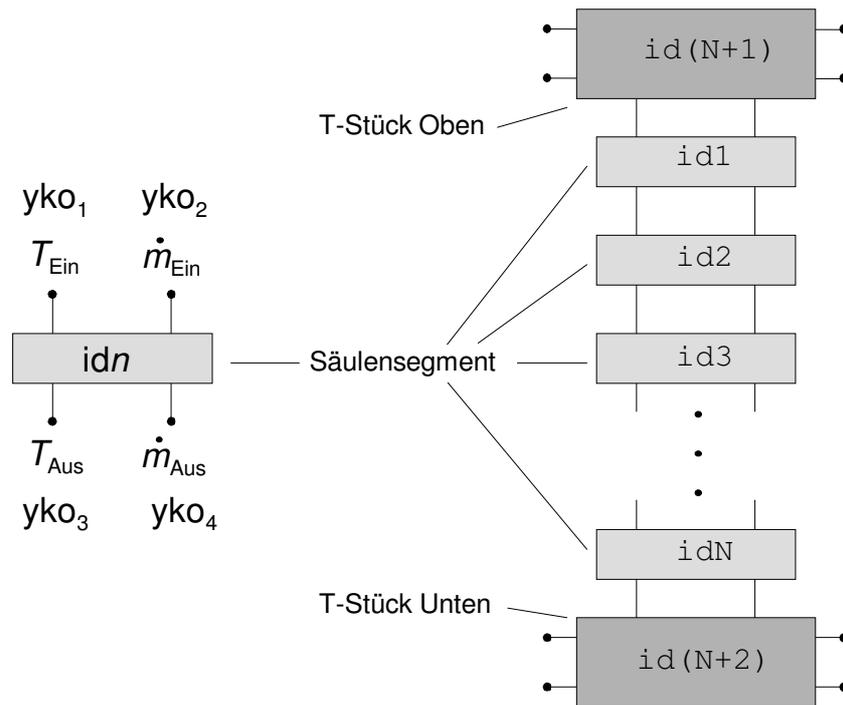
### 5.1 Aggregation zum Prozeßmodell

Die Verknüpfung einzelner Modellbausteine zu einem Prozeßmodell (Bottom-Up-Synthese) führt mit zunehmendem Abstraktionsgrad zu immer komplexeren Modellbausteinen (Oberklassen). Während bei der Top-Down-Analyse die hierarchische Zerlegung und anschließende Erzeugung elementarer Modellbausteine überwiegend „von Hand“ vorgenommen wird, läßt sich der Prozeß der Modellaggregation sehr gut rechnergestützt abarbeiten.

Diese Funktionalität stellt auch das objektorientierte Modellierungswerkzeug *CAMex* durch sein verkopplungsorientiertes Konzept zur Verfügung. Die Verkopplung findet dabei automatisiert im Rahmen einer *Vererbung* statt, wobei in jedem Aggregationsschritt generell ein neuer Modellbaustein als Oberklasse entsteht. Dabei kommen die beiden Vererbungsmechanismen *Spezifikation* (AKO-Vererbung) und *Aggregation* (APO-Vererbung) zur Anwendung, die bereits bei der Einführung in Abschnitt 3.1 vorgestellt wurden.

Für die Generierung des Prozeßmodells des *Virtuellen c-Wert-Prüfstands* wird überwiegend die Verkopplung einzelner Modellbausteine durch Aggregation durchgeführt. Im gleichen Schritt werden häufig zusätzliche Spezifikationen vorgenommen, indem z.B. die Schnittstellen des aggregierten Bausteins angepaßt und Bezeichner umbenannt werden. Entsprechend der Hierarchie des Gesamtprozesses werden so aus den elementaren Modellbausteinen der untersten Hierarchieebene sukzessive neue Oberklassen bis hin zum vollständigen Prozeßmodell gebildet.

Diese Vorgehensweise soll exemplarisch am Teilsystem *Heizkörperglied* verdeutlicht werden. Als elementare Modellbausteine wurden das *Säulensegment* und die *T-Stücke* durch Angabe aller Systemgleichungen und Schnittstellen explizit modelliert und implementiert. Aus diesen Grundbausteinen läßt sich gemäß der Struktur des zugehörigen Hierarchiebaums (Bild 3.9) das Modell eines vollständigen Heizkörpergliedes zusammensetzen. Das nachfolgende Bild 5.1 veranschaulicht die Verkopplung der physikalischen Schnittstellen *Temperatur des Heizmediums an der Segmentgrenze* und *Massenstrom durch das Segment*. Durch Aggregation von *N* Säulensegmenten zu einer Säule (erster Schritt) entsteht zusammen mit zwei T-Stücken (zweiter Schritt) das Modell eines *Einsäuler-Gliedes*.



**Bild 5.1:** Verkopplung elementarer Modellbausteine zu einem Heizkörperglied

Um mehrere Modellbausteine der Klasse *Segment* miteinander verknüpfen zu können, werden zunächst entsprechend viele Instanzen (Objekte) dieser Modellklasse erzeugt. Zur Individualisierung der einzelnen Instanzen werden sie mit einem eindeutigen Bezeichner (*Identifier*, Kürzel *id*) gekennzeichnet. Die Schnittstellengleichungen zur Beschreibung der Aggregation werden unter *CAMex* in der folgenden Schreibweise spezifiziert:

$$\begin{array}{lll}
 \text{yko.id1[3]} = \text{yko.id2[1]} & \text{Stetigkeit der Temperatur:} & T_{Aus}(\text{id1}) = T_{Ein}(\text{id2}) \\
 \text{yko.id1[4]} = \text{yko.id2[2]} & \text{Massenstrombilanz:} & \dot{m}_{Aus}(\text{id1}) = \dot{m}_{Ein}(\text{id2}) \\
 \text{yko.id2[3]} = \text{yko.id3[1]} & \text{Stetigkeit der Temperatur:} & T_{Aus}(\text{id2}) = T_{Ein}(\text{id3}) \\
 \text{yko.id2[4]} = \text{yko.id3[2]} & \text{Massenstrombilanz:} & \dot{m}_{Aus}(\text{id2}) = \dot{m}_{Ein}(\text{id3}) \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Mit diesen Anweisungen werden automatisch die physikalischen Per- und Transvariablen [DÖR98] der einzelnen Submodelle miteinander verknüpft. Schließlich müssen die verbleibenden Schnittstellen des neu entstandenen, abstrakteren Modellbausteins spezifiziert werden. Sie ergeben sich üblicherweise aus denjenigen Schnittstellen der beteiligten Submodelle, die bei der Aggregation nicht verknüpft wurden (im obigen Beispiel der *Säule*: Eingangstemperatur und Massenstrom des obersten Segmentes  $\text{yko.id1}[1..2]$  sowie Ausgangstemperatur und Massenstrom des untersten Segmentes  $\text{yko.idN}[3..4]$ ). Es können aber auch nicht mehr benötigte Schnittstellen ganz eliminiert oder neue geschaffen werden.

**Tabelle 5.1:** Klassendefinition einer Heizkörpersäule, Auszug aus der HTML-Dokumentation

:
<b>Es wird folgende aggregierte Klasse definiert:</b>
<pre>Class (   [ModSegment\$NA],          # NA Submodelle   APO,                      # Vererbungsattribut   `ModSaeule`,             # neue Elternklasse   cat(`Saeule`.NA),        # neue Klassenbezeichnung</pre>
<b>Definition der physikalischen Verkopplungen (Temperatur und Massenstrom):</b>
<pre>[cat(seq(`yko.id`.j.`[3..4]=yko.id`. (j+1)`.`[1..2]`,` , j=1..NA-2),       `yko.id`. (NA-1)`.`[3..4]=yko.id`.NA`.`[1..2]`)], [`uki.id1[1..2]`], [`yko.id1[1..2]`,`yko.id`.NA`.`[3..4]`],</pre>
<b>Modifizierungen an Parametern ("Einsetzen" der aktuellen Höhe z, hinzufügen von <math>N_A</math>):</b>
<pre>EliminateParameter = [   cat(seq(`zh.ch`.j.`=(`. (NA+1-j)`.`-1/2)*BH/N`,` , j=1..NA-1),       `zh.ch`.NA.`=BH/N/2`),   cat(seq(`N.ch`.j.`=`.NA`,` , j=1..NA-1),`N.ch`.NA.`=`.NA)],</pre> <pre>AddParameter = [[N,`Anzahl Segmente`,   `Heizkörper-Geometrien`, [1,50],1,0,N=NA]],</pre>
<b>Durchnumerieren und Ändern der Bezeichner der Ausgangsgrößen:</b>
<pre>AddOutput      = [[vout0],[vout0-uki[1]],   [`Temperatur Heizmittel 0 [°C]`]],</pre> <pre>EliminateOutput = [vout[1..NA]],</pre> <pre>AddOutput = [[seq(vout.j,j=1..NA)],   [seq(vout.j-x[5*j-4],j=1..NA)],   [seq(`Temperatur Heizmittel`.j.` [°C]`,` ,j=1..NA)]]],</pre>
<b>Neue Ausgangsgrößen (Oberflächentemperaturen, Wärmeleistung, Rücklauf­temperatur):</b>
<pre>AddOutput = [[seq(TO.j,j=1..NA)],   [seq(TO.j-x[5*j-3],j=1..NA)],   [seq(`Temperatur Oberfläche`.j.` [°C]`,` ,j=1..NA)]]],</pre> <pre>AddOutput = [[Qout,TR],   [cat(`Qout`,` ,seq(`-x[`. (5*j)`.`]`,` ,j=1..NA)),TR-x[5*NA-4]],   [`Wärmeleistung Säule [W]`,` ,Rücklauf­temperatur [°C]`]]</pre>
<b>Ende der Spezifikationsliste und der Klassendefinition:</b>
<pre>);          # end of Class()           :</pre>

Auf diese Weise entstehen durch wiederholte Aggregation zunächst die beiden relevanten Teilmodelle *Heizkörper* und *Heizkostenverteiler*. Das Prozeßmodell des gesamten *Virtuellen c-Wert-Prüfstands* wird schließlich durch Aggregation der Oberklassen *Heizkörper*, *Heizkostenverteiler* und *c-Wert-Berechnung* sowie Definition der *Prüfumgebung* als Eingangsgrößenmodell gebildet. Nach diesem Schritt noch vorhandene Schnittstellen besitzen entweder die Bedeutung von Eingangsgrößen und werden als solche spezifiziert oder sie tauchen bereits als Ausgangsgrößen auf und werden dann eliminiert.

Als Grundlage für die Simulation enthält das vollständige Prozeßmodell neben allen Zustandsgrößen und Modellparametern nur noch Ein- und Ausgangsgrößen.

Nebenstehende Tabelle 5.1 zeigt beispielhaft einen Auszug aus der Dokumentation zum Modellbaustein *Säule*. Abgebildet ist der Implementationsteil der Dokumentation, der neben erläuternden Kommentaren den eigentlichen Modellcode in Maple-Syntax enthält (präformatierter Text). In dem Beispiel wird die neue Modellklasse „ModSaeule“ aus  $N_A$  Instanzen der Klasse „ModSegment“ durch eine *A-Part-Of-Vererbung* aggregiert. Im Gegensatz zur einzelnen Indizierung der Instanzen wie im Beispiel zuvor werden als Basis für eine Automatisierung häufig Sequenzen verwendet (Syntax `seq()`), um z.B. die Diskretisierungsfeinheit ortsverteilter Größen variabel zu halten. Im *Class-Befehl*<sup>24</sup> zur Definition einer neuen Modellklasse schließen sich an die erforderlichen Klassen-Informationen die Listen der physikalischen Verkopplungen und Schnittstellen sowie optional beliebige Spezifikationsanweisungen an. Diese ermöglichen durch die Kombination aus *Methode* und *Spezifikation* (z.B. *AddParameter*, *EliminateOutput*) eine umfangreiche Spezifizierung der neuen Modellklasse bei zunehmender Abstraktion.

Diese Vorgehensweise der *Bottom-Up-Synthese* verdeutlicht nochmals die wesentlichen Vorteile der objektorientierten Modellbildung für den virtuellen Prüfstand und dessen angestrebten universellen Charakter:

- Alle Modellbausteine sind derart ausgelegt, daß sie sich beliebig wiederverwenden lassen (Modulverhalten, physikalische Schnittstellen, Modellparameter).
- Durch Spezifikation (Konkretisierung) eines bestehenden, verallgemeinerten Modellbausteins lassen sich bei der Vererbung ohne größeren Aufwand verschiedene Ausprägungen definieren.
- Nach der Erstellung neuer elementarer Modellbausteine (z.B. für das Säulensegment) kann die bereits festgelegte Hierarchie (z.B. die Topologie des Heizkörpers) durch Wiederverwendung bereits bestehender Oberklassen (*aggregierende* Modellbausteine) nachgebildet werden.

<sup>24</sup> Die spezielle Syntax des *Class*-Befehls mit den verschiedenen Spezifikationsanweisungen wird im *CAMex-Handbuch* detailliert beschrieben [JAH97].

- Bei gleicher Schnittstellentopologie lassen sich in jeder Hierarchieebene einzelne Komponenten problemlos austauschen (Modularität). Damit wird die Implementierung und Verwendung neuer Heizkörpertypen oder Heizkostenverteiler-Ausführungen erheblich vereinfacht.

## 5.2 Simulation des Prozeßverhaltens

Zur numerischen Lösung des aus einem komplexen Gleichungssystem bestehenden Prozeßmodells wird aus dem Werkzeug *CAMex* heraus ein an das Prozeßmodell angepaßter, eigenständig lauffähiger Simulator erzeugt. Dieser Vorgang vollzieht sich in mehreren Schritten:

- Auf der *Maple*-Ebene des Modellierungswerkzeugs werden zunächst alle Strukturparameter definiert. Mit dieser Information wird ein Objekt der Oberklasse *Prüfstand* instanziiert, welches die vollständige Information des Prozeßmodells enthält.
- Durch die objektorientierte Modellierung entstehen bei der Bottom-Up-Synthese einfache algebraische Koppelgleichungen. Diese oft trivialen Beziehungen lassen sich mittels Formelmanipulation eliminieren<sup>25</sup>, wodurch die Dimension des Modells deutlich reduziert werden kann.
- Nach dieser optionalen Optimierung und Analyse des Prozeßmodells werden die Modellgleichungen in *FORTRAN*-Code konvertiert und in speziellen Dateien abgelegt und zusammen mit den numerischen Algorithmen schließlich zu einem eigenständigen Simulator zusammengebunden.

Die einzelnen Stufen der Simulatorgenerierung werden über eine Skriptsprache automatisiert abgearbeitet. Bei dieser anwenderfreundlichen Vorgehensweise lassen sich die erforderlichen Strukturparameter über ein grafisches Eingabefenster spezifizieren, wodurch Eingabefehler – ähnlich wie beim Simulator selbst – durch Bereichsbegrenzungen und Plausibilitätskontrollen weitgehend vermieden werden.

### Anfangswertberechnung

Zur numerischen Lösung eines differential-algebraischen Gleichungssystems (DAE) wird für den Zeitpunkt  $t = t_0$  zunächst ein Startzustand  $[\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0]$  benötigt, der alle Systemgleichungen erfüllt und damit eine *konsistente Initialisierung* des DAE-Systems gewährleistet, wobei der Zustand der Systemänderung  $\dot{\mathbf{x}}_0$  von Null verschieden sein kann. Die klassische Problemstellung wird aber durch die Berechnung *stationärer Anfangswerte* mit  $\dot{\mathbf{x}}_0 = 0$  vorgegeben, um das System aus seinem Ruhezustand heraus zu simulieren. Diese

---

<sup>25</sup> *CAMex* stellt zur Eliminierung einfacher algebraischer Gleichungen eines Modells die Routine *MinDescriptor*( ) zur Verfügung.

Aufgabenstellung entspricht der Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems von häufig hoher Systemordnung.

Bei komplexen nichtlinearen Prozeßmodellen mit höherem Index-Problem<sup>26</sup> bereitet gerade das Auffinden konsistenter Anfangswerte häufig Schwierigkeiten und stellt eine erste Herausforderung an den verwendeten Simulator. *CAMex* bietet für die klassische Berechnung stationärer Anfangswerte ein modifiziertes Newtonverfahren an (Kopplung mit einem Bisektionsalgorithmus), zusätzlich ist auch eine konsistente Initialisierung sowie die Verwendung eines Homotopieverfahrens<sup>27</sup> möglich.

Die Indexanalyse des Prozeßmodells des virtuellen Prüfstands liefert (auch für die möglichen Varianten bei Verwendung verschiedener Modellbaustein-Spezifizierungen) einen differentiellen Index von Eins, so daß sowohl die Anfangswertberechnung als auch die Simulation mittels geeigneter Algorithmen problemlos durchführbar sein sollte.

Bei der direkten Anwendung des modifizierten Newton-Verfahrens zur Berechnung stationärer Anfangswerte stellte sich jedoch eine Divergenz des Verfahrens ein. Erst durch die Vorgabe geeigneter Startwerte in der Nähe der erwarteten Lösung konnte eine Konvergenz des Newton-Algorithmus sichergestellt werden. Diese Schwierigkeiten bei der Ermittlung stationärer Anfangswerte sind auf die ungeeigneten Default-Startwerte in Verbindung mit den in den Systemgleichungen des Prüfstandmodells vorhandenen Nichtlinearitäten zurückzuführen (Potenzansatz, lokale Nußeltzahl, Strahlungsanteil, logarithmische Übertemperatur).

## Simulation

Im Anschluß an die Anfangswertberechnung findet die dynamische Simulation des Systems mit dem berechneten Anfangszustandsvektor statt. Die Lösungsstrategie von *CAMex* basiert auf drei wahlweise und problemspezifisch einstellbaren Integrationsverfahren, wobei das Prozeßmodell des Prüfstands mit dem BDF-Verfahren problemlos simuliert werden konnte. Das Verfahren wird an Algorithmen gekoppelt, welche den Umgang mit steifen Systemen und dünn besetzter Jacobi-Matrix unterstützen, so daß sie das optimale Hilfsmittel für das vorliegende Prozeßmodell darstellen.

Der Lösungsvektor  $\mathbf{x}(t)$  wird in einem vorgegebenen Zeitintervall ermittelt (meist durch Schrittweitensteuerung, je nach Integrationsalgorithmus und optionalen Einstellungen). Die Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}$  des Systems werden dagegen mit einer vorgegebenen, äquidistanten

---

<sup>26</sup> Mit dem Begriff des Index von DAE-Systemen ist meist der differentielle Index gemeint. Er stellt ein Maß für den Aufwand dar, ein DAE-System auf Zustandsform zu transformieren. Die direkte Lösung höherer Index-Probleme mit einem Index  $> 1$  ist problematisch, als Abhilfe wird häufig eine Index-Reduktion durchgeführt [PAN02].

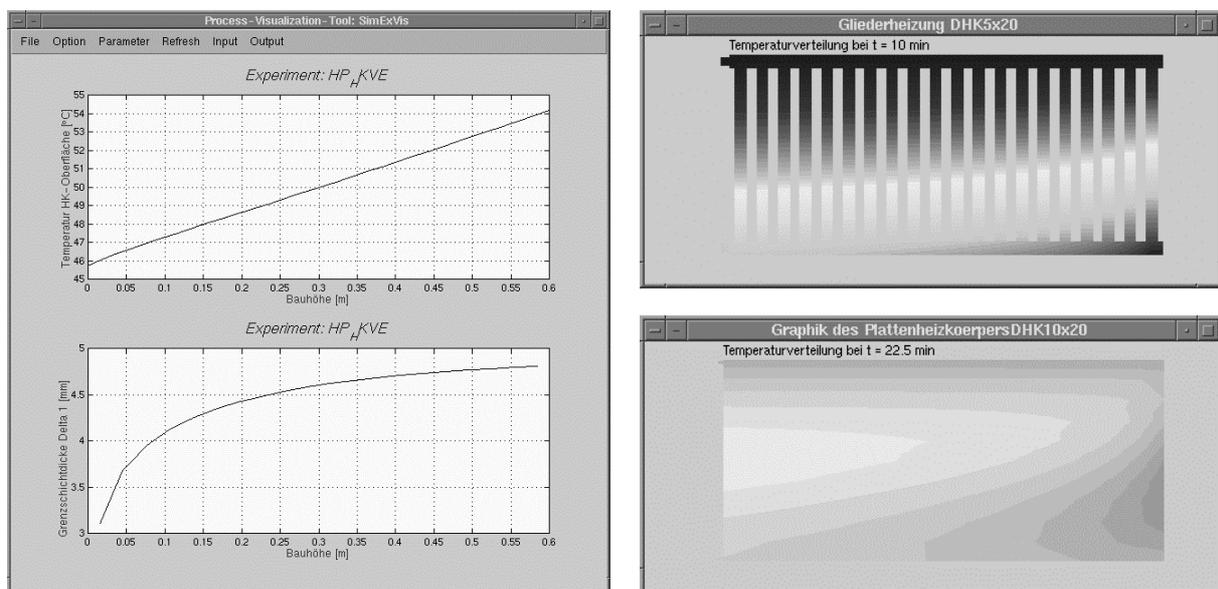
<sup>27</sup> Das Homotopieverfahren zur Berechnung stationärer Anfangswerte insbesondere nichtlinearer Systeme stand als *CAMex*-Erweiterung zum Abschluß der Projektarbeiten noch nicht vollständig zur Verfügung und konnte daher nicht durchgängig verwendet werden. Erste Anwendungen ließen aber bereits im Vorfeld die Eignung für nichtlineare Systeme erkennen.

Zeitschrittweite in eine Datei ausgegeben, indem die Lösung  $\mathbf{x}(t)$  zusammen mit Eingangs- und Parametervektor in das Ausgangsgleichungssystem  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p})$  eingesetzt wird.

Da die  $c$ -Wert-Prüfung im stationären Basiszustand des Systems erfolgt, genügt für die Ermittlung der  $c$ -Werte strenggenommen bereits die Berechnung stationärer Anfangswerte. In diesem Schritt werden jedoch nur die Systemgleichungen gelöst, das Einsetzen der Lösung in die Ausgangsgleichung erfolgt erst im zweiten Schritt, der Simulation. Aus diesem Grunde ist es auch für die  $c$ -Wert-Simulation erforderlich, wenigstens zwei Zeitschritte auszuführen, um die Ausgangsgrößen einmal vollständig zu berechnen.

### Ergebnisvisualisierung

Für die grafische Darstellung von Simulationsergebnissen stellt *CAMex* eine Toolbox für das Programmpaket *Matlab*<sup>®</sup> zur Verfügung. Neben üblichen Zeitverläufen lassen sich auch ein- oder zweidimensional ortsverteilte Größen als Kurven darstellen, letztere können zusätzlich als Konturplot visualisiert und zur Wiedergabe des Zeitverhaltens animiert werden [JAH97, FRI00].



**Bild 5.2:** Beispiele zur Ergebnisvisualisierung: Werteverlauf, Konturplot

Für das Projekt des *Virtuellen c-Wert-Prüfstands* wurde jeder eigenständig lauffähige Prozeßsimulator um eine eigene grafische (Zeitverläufe) und textuelle ( $c$ -Werte) Ergebnisdarstellung erweitert, um die anfallenden Lizenzkosten bei der Verwendung von *Matlab*<sup>®</sup> als Visualisierungs-Tool zu vermeiden.

### 5.3 Validierung des Prozeßmodells

Im Rahmen des Projektes wurden in erster Linie Heizkörper der Modellklasse „Radiator mit vertikaler Wasserführung“ modelliert und für die Verwendung im einem virtuellen Prüfstand implementiert. Für einen Vergleich der simulierten Daten dieser Heizkörperklasse wurden daher Meßdaten solcher Heizkörper herangezogen, die sich in diese Klasse einordnen lassen. Zu diesen Heizkörpertypen zählen beispielsweise glatte oder profilierte Plattenheizkörper (ein- oder mehrreihig, mit und ohne Konvektionsblechreihen), DIN-Stahl- und Gußradiatoren, Stahlröhrenradiatoren, Falwellenradiatoren und weitere bauähnliche Ausführungen.

Aus dieser Heizkörperklasse wurden für die Validierung 24 repräsentative Heizkörper ausgewählt und parametrisiert. Für diese Auswahl standen jeweils die  $c$ -Werte für drei unterschiedliche Heizkostenverteiler zur Verfügung. Für bestimmte Heizkörper aus der Reihe der sieben Grundheizkörper gemäß [EN 843] (vorgeschriebener Prüfumfang, siehe Abschnitt 2.2.2) konnte zusätzlich die Oberflächentemperatur am Montageort des Heizkostenverteilers für eine Validierung herangezogen werden.

Als Bewertungskriterium für die Validierung dient eine festgelegte *Toleranzgrenze* in Höhe von  $\Delta c = \pm 0,02$ . Eine Abweichung innerhalb dieser Toleranzgrenze bezeichnet eine *gute* Übereinstimmung, als *sehr gute* Übereinstimmung wird eine Abweichung bis zu  $\Delta c = \pm 0,01$  gewertet. Die Toleranzgrenze ist den betreffenden Normen entnommen [DIN4713, EN834] und besagt, daß bei einer stichprobenartigen Nachmessung vorgelegter  $c$ -Werte durch die bestätigende Prüfstelle keine unsystematischen Abweichungen größer als  $\pm 0,02$  auftreten dürfen. Dieser Toleranzbereich wird deshalb als Bewertungsmaßstab für den Vergleich zwischen Meßwerten und der Simulation herangezogen, da schließlich auch simulierte  $c$ -Werte diese Forderung erfüllen müssen.

Bei den drei betrachteten Heizkostenverteilern handelt es sich um ein Einfühler- und zwei Zweifühlergeräte. Letztere können grundsätzlich auch als Einfühlergerät betrieben werden (Abschnitt 2.1), so daß bei Zweifühlergeräten in der Regel für beide möglichen Betriebsarten die zugehörigen  $c$ -Werte ermittelt werden ( $c_{1,F}$ - und  $c_{2,F}$ -Wert).

Der Vergleich der simulierten  $c$ -Werte mit den Meßdaten der 24 ausgewählten Heizkörper liefert zusammengefaßt folgende Ergebnisse:

- In der Klasse der *Plattenheizkörper* werden überwiegend gute bis sehr gute Übereinstimmungen beobachtet. Sowohl bei profilierten wie auch bei glatten Oberflächen liegen die mittleren Abweichungen innerhalb der zulässigen Toleranzgrenze.
- Auch bei den *Gliederheizkörpern* wie den DIN-Stahl- und Stahlröhrenradiatoren lassen sich insgesamt zufriedenstellende Ergebnisse festhalten.
- Bei den Guß-Heizkörpern lassen sich tendenziell etwas größere Abweichungen außerhalb der Toleranzgrenze erkennen (höhere Meßwerte). Diese liegen in der Oberflächen-

rauhigkeit dieses Heizkörpertyps begründet, wodurch sich der thermische Kontakt zum Heizkostenverteiler verschlechtert und folglich der  $c$ -Wert vergrößert. Dieser Sachverhalt läßt sich jedoch im Modell durch einen zusätzlichen thermischen Kontaktwiderstand berücksichtigen (siehe Abschnitt 3.6.1), dessen Wert sich bei Gußradiatoren in der Größenordnung um  $R_K \approx 0,6$  K/W bewegt.

- Bei allen drei Heizkostenverteilern kommt es in der Klasse der sogenannten *Faltwellenradiatoren* zu größeren Abweichungen außerhalb der Toleranzgrenze<sup>28</sup>. Faltwellen- oder Lamellenheizkörper besitzen durch den Herstellungsprozeß (Faltung von Blechen) einen sehr schmalen Fließkanalquerschnitt. Bei der Modellbeschreibung mit konzentrierten Parametern führt nach [SHA78] ein solch ungleichmäßiges Seitenverhältnis zu einem besseren inneren Wärmeübergang zwischen Heizmedium und Heizkörper, was in der Simulation in kleineren  $c$ -Werten resultiert. Detaillierte Untersuchungen des thermischen Verhaltens eines Faltwellenradiators mittels CFD-Simulation [NOL99] haben jedoch gezeigt, daß es im äußeren Randbereich zu einem stärkeren Temperaturabfall kommt als bei eher gleichförmigen Fließkanalquerschnitten. Die Faltwellen wirken wie Rippen und kühlen sich daher nach außen hin im Luftstrom stärker ab. Am Montageort des Heizkostenverteilers (an der außenliegenden Längsseite) liegt dadurch eine niedrigere Temperatur an als die mittlere Heizmediumtemperatur, wodurch es bei der Messung zu höheren  $c$ -Werten kommt als in der Simulation. Um diesem Umstand gerecht zu werden, müßte eine deutlich komplexerer Modellansatz gewählt werden, der jedoch der geforderten Universalität des Modellkonzepts widerspricht. Als Abhilfe kann für die Klasse der Faltwellenradiatoren ein thermischer Ersatzwiderstand (Abschnitt 3.6.1) herangezogen werden, dessen Größenordnung von der Ausprägung der Faltwellen (Seitenverhältnis des Fließkanals) abhängt (für die betrachteten Radiatoren  $R_K \approx 2,3 \dots 3,1$  K/W).

Insgesamt zeigen die simulierten  $c$ -Werte mit Ausnahme der Klasse der Faltwellenradiatoren eine gute Übereinstimmung mit den Meßwerten, so daß die grundsätzliche Verwendbarkeit des virtuellen Prüfstands zur  $c$ -Wert-Simulation nachgewiesen werden konnte. Aufgrund der besonderen Geometrie- und Strömungsverhältnisse müssen die Faltwellenradiatoren aus der Klasse der parametrierbaren Heizkörper prinzipiell ausgeschlossen werden, sofern der besonderen Phänomenologie dieses Heizkörpertyps nicht durch einen thermischen Ersatzwiderstand Rechnung getragen wird.

---

<sup>28</sup> Innerhalb der Heizkörper-Auswahl wurden zwei Faltwellenradiatoren betrachtet.

## 5.4 Modellbeurteilung

### 5.4.1 Anwendungsbereich

Unter Berücksichtigung der zuvor diskutierten Ergebnisse und Anmerkungen bei der Validierung läßt sich der im Rahmen des Projektes entstandene „Virtuelle  $c$ -Wert-Prüfstand“ für solche Heizkörper verwenden, die in die Modellklasse „Radiator mit vertikaler Wasserführung“ eingeordnet werden können. Damit wird bereits ein überwiegender Anteil von in der Praxis eingesetzten Heizkörpertypen abgedeckt.

Der Trend moderner Heizkörper geht hin zu immer ausgefalleneren Designs und exklusiveren Bauformen. Trotzdem werden zur Gewichts- und Kostenreduktion sowie aus fertigungstechnischen Gründen meist einfache Strömungsquerschnitte für die Wasserführung gewählt, so daß bei vertikaler Wasserführung auch solche Heizkörpertypen berücksichtigt werden können.

Darüber hinaus gestattet das offene Modellkonzept des virtuellen Prüfstands in Verbindung mit der objektorientierten Modellbildung eine einfache Erweiterung um neue Heizkörperklassen (Modellbaustein *Heizkörper*) sowie neue Heizkostenverteiler-Gerätegenerationen (Modellbaustein *Heizkostenverteiler*).

### 5.4.2 Praktischer Nutzen des Virtuellen $c$ -Wert-Prüfstands

Die Ermittlung von  $c$ -Werten wird immer dann erforderlich, wenn auf der Grundlage der verbrauchsabhängigen Wärmekostenverrechnung die zentral versorgte Heizungsanlage einer Nutzergemeinschaft mit Heizkostenverteilern ausgestattet werden soll. Dies kann sowohl bei neu geschaffenem Wohnraum, nach einer Modernisierung (Austausch von Heizkörpern) oder auch bei der erstmaligen Ausrüstung bestehender Wohnanlagen mit Heizkostenverteilern der Fall sein.

Ein besonders großes Einsatzpotential bietet die Verwendung des virtuellen Prüfstands bei der Markteinführung neuer Heizkostenverteiler. Unumgänglich ist zunächst die bei jeder neuen Zertifizierung von Heizkostenverteilern erforderliche Messung der  $c$ -Werte an den sieben Grundheizkörpern gemäß [DIN4704], welche an einer amtlichen Meßstelle durchgeführt werden muß. Alle weiteren  $c$ -Werte werden der zulassenden Stelle vorgelegt und stichprobenartig nachgemessen. Dabei bleibt es dem Antragsteller überlassen, wie diese  $c$ -Werte ermittelt werden, so daß hier auch ein modellbasiertes Verfahren wie der virtuelle Prüfstand verwendet werden kann.

Auf diese Weise läßt sich der sonst übliche meßtechnische Aufwand bei der Einführung neuer Heizkostenverteiler durch den Einsatz des virtuellen Prüfstands erheblich reduzieren.

## 6 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit ist ein „Virtueller Prüfstand“ entstanden, mit dessen Hilfe sich bestimmte Bewertungsfaktoren im Bereich von Raumheizsystemen durch Simulation eines umfangreichen Prozeßmodells rechnerisch ermitteln lassen.

Die Motivation zu dieser Arbeit resultiert aus einem Forschungsprojekt zwischen der *Viterra Energy Services GmbH* (Essen) und dem Fachgebiet Regelungstechnik der Universität Paderborn. Im Vordergrund dieser Kooperation steht das Ziel, Kosten und Aufwand für die Ermittlung der zuvor erwähnten Bewertungsfaktoren im Bereich von Raumheizsystemen durch den intelligenten Einsatz von Simulationstechnik zu verringern und das Systemverständnis zu erweitern.

Den Schwerpunkt bildet die phänomenologische Analyse von Raumheizsystemen unter Verwendung neuer objektorientierter Methoden und Mechanismen der Modellbildung. Dabei wird zunächst im Rahmen einer *topologischen Abstraktion* der gesamte abzubildende Prozeß in eine Vielzahl kleinerer Modellbausteine strukturiert. Diese hierarchische Zerlegung charakterisiert als wesentliche Teilsysteme den *Heizkörper* als wärmeabgebendes Element und den *Heizkostenverteiler* als bewertende Systemkomponente des Gesamtprozesses. Im zweiten Schritt der *phänomenologischen Abstraktion* werden die fundamentalen Verhaltensweisen der beteiligten Phänomene und Prozeßeigenschaften auf der Grundlage einer physikalischen Modellbildung eingehend analysiert und mathematisch beschrieben.

Zur Charakterisierung des Prozeßverhaltens des Teilsystems *Heizkörper* wird ein physikalisch basierter Ansatz mit dem in der Heizungstechnik bekannten Potenzgesetz verglichen, woraus sich schließlich ein modifizierter Ansatz auf der Basis des Potenzgesetzes ableitet. Mittels dieses Ansatzes läßt sich das thermische Verhalten der Heizkörperklasse „Radiator mit vertikaler Wasserführung“ hinreichend genau nachbilden. Das System *Heizkörper* beeinflusst den *Heizkostenverteiler* durch die an der Montagestelle auftretende Kontaktfläche mit der dort vorliegenden Temperatur sowie durch eine auf dem Phänomen der freien Konvektion beruhenden Grenzschichtströmung.

Das Teilsystem des *Heizkostenverteilers* erfordert aufgrund seiner komplexen Geometrie und der Forderung nach einer eingehenden thermischen Analyse eine detaillierte Finite-Volumen-Modellierung und CFD-Simulation. Die letztlich interessierenden Systemgrößen hängen zusätzlich von äußeren Einflüssen wie Kontaktfläche, Kontakttemperatur, Luftströmung und Umgebungstemperatur ab. Um das Modellkonzept nicht an ein kommerzielles CFD-Werkzeug zu binden, werden die analysierten thermischen Verhaltensweisen durch geeignete Ersatzmodelle in Form von nichtlinearen Kennlinienfeldern beschrieben. Diese lassen sich auf der Modellbeschreibungsebene des Teilmodells *Heizkörper* in das Gesamtkonzept des Prüfstands implementieren.

Zusammen mit der *Prüfumgebung* als Eingangsgrößenmodell und der *Berechnungsvorschrift* für die Bewertungsfaktoren kann das Verhalten des gesamten Prüfstands durch ein komplexes mathematisches Modell beschrieben werden. Dieses ist in der vorliegenden Form in der Lage, die interessierenden Bewertungsfaktoren für drei implementierte Heizkostenverteiler an Heizkörpern der Klasse „Radiator mit vertikaler Wasserführung“ zu ermitteln.

Die Modellbausteine *Heizkörper* und *Heizkostenverteiler* sind durch die Verwendung des objektorientierten Modellierungswerkzeugs *CAMex* derart konzipiert, daß eine Erweiterung des virtuellen Prüfstands einfach vorgenommen werden kann. Unter Berücksichtigung der definierten Schnittstellenstruktur und des festgelegten Hierarchiebaumes lassen sich weitere Heizkörperklassen oder auch neue Heizkostenverteiler als Modellbaustein beschreiben und in das vorhandene Prozeßmodell implementieren.

## 7 Literatur

- [ADU83] **ADUNKA, F.:** „Zur Wärmeleistung des Plattenheizkörpers.“ *Gesundheits-Ingenieur* **104** (1983), S. 230-236.
- [ADU84-1] **ADUNKA, F.; KOLANCZIA, W.:** „Zur Anwendung des Potenzgesetzes und zum Einfluß der Umgebung auf die Wärmeleistung von Heizkörpern.“ *Gesundheits-Ingenieur* **105** (1984), S. 241-250.
- [ADU84-2] **ADUNKA, F.:** *Wärmemengenmessung*. Essen: Vulkan, 1984.
- [ADU87] **ADUNKA, F.:** *Meßtechnische Grundlagen der Heizkostenverteilung*. Fortschrittsberichte VDI, Reihe 19, Nr. 21. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1987.
- [ADU91] **ADUNKA, F.:** *Handbuch der Wärmeverbrauchserfassung*. Essen: Vulkan, 1991.
- [BLA89] **BLANKE, W. (Hrsg.):** *Thermophysikalische Stoffgrößen*. Berlin: Springer, 1989.
- [BÖT81] **BÖTTCHER, P.; MEMMERT, E.:** *Verbrauchsabhängige Wärmekostenabrechnung*. Kommentar zur Heizkostenverordnung und zu DIN-Normen. Berlin: Beuth, 1981.
- [BOS72] **BOSNJAKOVIC, F.:** *Technische Thermodynamik, I. Teil*. Dresden: Steinkopff, 1972.
- [BUD94] **BUDERUS HEIZTECHNIK GMBH (Hrsg.):** *Handbuch für Heizungstechnik*. Berlin: Beuth, 1994.
- [BUD95] **BUDERUS HEIZTECHNIK GMBH (Hrsg.):** *Preise und Technik für Heizkörper und Zubehör. Katalog 95/1*. Wetzlar, 1995.
- [DIN4704] *DIN 4704: Prüfung von Raumheizkörpern*. Deutsches Institut für Normung, 1988,  
Teil 1: *Prüfregeln*,  
Teil 2: *Offene Prüfkabine*,  
Teil 3: *Geschlossener Prüfraum*.
- [DIN4713] *DIN 4713: Verbrauchsabhängige Wärmekostenabrechnung*. Deutsches Institut für Normung, 1980,  
Teil 1: *Allgemeines, Begriffe*,  
Teil 3: *Heizkostenverteiler mit Hilfsenergie*.
- [DÖR98] **DÖRRSCHEIDT, F.:** *Modellierung technischer Prozesse*. Vorlesungsskript, Universität Paderborn, 1998.

- [EN442] *EN 442: Radiatoren und Konvektoren*. Europäische Norm, Teil 1: *Technische Spezifikationen und Anforderungen*, 1996, Teil 2: *Prüfverfahren und Leistungsangabe*, 1997.
- [EN834] *EN 834: Heizkostenverteiler für die Verbrauchswerterfassung von Raumheizflächen. Geräte mit elektrischer Energieversorgung*. Europäische Norm, 1994.
- [FRI00] **FRIGGE, M.; DÖRRSCHEIDT, F.:** „Automatische Generierung von Grafikmodellen zur Visualisierung und Animation“. In: MÖLLER, D.P.F. (Hrsg.): 14. Symposium Simulationstechnik (ASIM 2000) in Hamburg. Ghent: SCS, 2000.
- [FRI01] **FRIGGE, M.; MÜGGE, G.:** „Ein virtueller Prüfstand zur thermischen Bewertung von Heizkostenverteilern“. In: PANRECK, K.; DÖRRSCHEIDT, F. (Hrsg.): 15. Symposium Simulationstechnik (ASIM 2001) in Paderborn. Ghent: SCS, 2001.
- [GRÖ81] **GRÖBER, H.; ERK, S.; GRIGULL, U.:** *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*. Berlin: Springer, 1981.
- [HEL73] **HELL, F.:** *Grundlagen der Wärmeübertragung*. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1973.
- [JAH97] **JAHNICH, M.; ASMUTH, G.; PANRECK, K.; FRIGGE, M.:** *Handbuch zum Modellierungswerkzeug CAMex*. Interner Bericht des FG Regelungstechnik der Universität Paderborn, 1997.
- [JIS82] **JISCHA, M.:** *Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch*. Braunschweig: Vieweg, 1982.
- [KAY66] **KAYS, W. M.:** *Convective Heat and Mass Transfer*. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [MEC98] **MECKS, M.:** *Finite-Elemente-Modellierung eines Heizkostenverteilers und seiner Umgebung mit dem CFD-Programm STAR-CD*. Studienarbeit, Universität Paderborn, 1998.
- [MEC99] **MECKS, M.:** *Vergleichende thermische Analyse zweier bauähnlicher Heizkostenverteiler durch Finite-Elemente-Modellierung und Simulation*. Diplomarbeit, Universität Paderborn, 1999.
- [MER87] **MERKER, G. P.:** *Konvektive Wärmeübertragung*. Berlin: Springer, 1987.
- [NOL99] **NOLTE, S.:** *Analyse des Temperatur- und Strömungsverhaltens eines Faltwellenradiators mittels Finite-Elemente-Modellbildung und Simulation*. Studienarbeit, Universität Paderborn, 1999.
- [PAN98] **PANRECK, K.:** „Modellierungstool CAMex“. *at – Automatisierungstechnik* **46** (1998), S. 40-41.

- [PAN00] **PANRECK, K.; LICHTER, B.:** „Nutzung von kennzahl-basiertem Systemwissen bei Modellbildung und Simulation“. *at – Automatisierungstechnik* **48** (2000), S. 77-85.
- [PAN02] **PANRECK, K.:** *Rechnergestützte Modellbildung physikalisch-technischer Systeme*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 945. Düsseldorf: VDI-Verlag, 2002.
- [RAI66] **RAIB, W.; TÖPRITZ, E.:** „Über die Wärmeleistung von Plattenheizkörpern.“ *Heizung, Lüftung, Haustechnik (HLH)* **17** (1966), S. 1-7.
- [REC95] **RECKNAGEL, H.; SPRENGER, E.; SCHRAMECK, E.-R.:** *Taschenbuch für Heizung und Klimatechnik*. München: Oldenbourg, 1995.
- [SHA78] **SHAH, R. K.; LONDON, A. L.:** *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. New York: Academic Press, 1978.
- [SIE97] **SIEBERT, S.:** *Objektorientierte Modellierung eines Gliederheizkörpers zur Analyse örtlicher Temperaturverteilungen*. Studienarbeit, Universität Paderborn, 1997.
- [SPA96] **SPANG, B.:** „Influence of Thermal Boundary Condition on Laminar Heat Transfer in the Hydrodynamic Entrance Region of Circular Ducts.“ *Heat And Mass Transfer* **31** (1996), S. 199-204.
- [STA99] **N. N.:** *STAR-CD. User's Manual*. Handbücher zum CFD-Programm *STAR-CD* (Version 3.05) der Firma *Computational Dynamics Limited*. London, 1999.
- [VDI97] **VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE (Hrsg.):** *VDI-Wärmeatlas. Berechnungsblätter für den Wärmeübergang* (8. Auflage). Berlin: Springer, 1997.

## 8 Anhang

### Anhang A: Formelzeichen und Indizes

Zeichen	Bedeutung
$a, b, c, d$	Gleichungskoeffizienten, Querschnittsparameter
$a$	Temperaturleitfähigkeit
$A$	Fläche
$\bar{A}$	mittlere Mantelfläche (bzgl. Wärmeleitung)
$B_H$	Bauhöhe eines Heizkörpers
$c, c_m, c_o,$	$c$ -Wert (wärmeträgerseitig, oberflächenabhängig)
$c_p$	Spezifische Wärmekapazität
$C$	Konstante
$d$	Wandstärke
$D$	Rohrdurchmesser
$g$ ( <b>g</b> )	Erdbeschleunigung (Vektor)
$Gr$	Grashofzahl
$K, K_C, K_Q$	Bewertungsfaktoren (allg., bzgl. $c$ -Wert, bzgl. Wärmeleistung)
$L, l$	charakteristische Länge am Heizkörper
$m$	Masse
$\dot{m}, \dot{m}_H$	Massenstrom, Heizmedium-Massenstrom
$n$	Heizkörper-Exponent
$N_A, N_S, N_G$	Anzahl (Segmente, Säulen, Glieder)
$Nu$	Nußeltzahl
$p, p_T, \mathbf{p}$	Druck, Teilung, Parametervektor
$Pr$	Prandtlzahl
$q$	Strahlungswirksamer Flächenanteil
$\dot{q}$ ( <b>q</b> )	Wärmestromdichte (Vektor)
$\dot{Q}$	Wärmeleistung, Wärmestrom
$R$	Widerstand, thermischer Widerstand
$Re$	Reynoldszahl
$t$	Zeit
$T$	Temperatur (Kelvin)
<b>u</b>	Geschwindigkeitsvektor, Eingangsvektor
<b>uki</b>	Koppeleingangsvektor
$u$	Geschwindigkeit der Luft in $x$ -Richtung
$\bar{u}$	Mittlere Strömungsgeschwindigkeit
$v$	Geschwindigkeit der Luft in $y$ -Richtung
<b>x</b>	Zustandsvektor
$x$	Ortskoordinate senkrecht zur Heizkörperoberfläche
<b>yko</b>	Koppelausgangsvektor
$y, \mathbf{y}$	Ortskoordinate der Heizkörperlänge, Ausgangsvektor
$z$	Ortskoordinate der Heizkörperhöhe

$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient
$\beta$	isobarer Wärmeausdehnungskoeffizient
$\delta$	Grenzschichtdicke
$\varepsilon$	Emissionsverhältnis
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit
$\eta$	Viskosität
$\nu$	kinematische Viskosität
$\rho$	Dichte
$\tau_{i,j}$	Scherspannungstensor
$\Delta T$	Temperaturpreizung, Übertemperatur
$\Delta z$	Höhe eines Segmentes
$\Phi_{Diss}$	Energiedissipation

Index	Bedeutung
0	Referenz- / Bezugsgröße
75	in 75% der Bauhöhe
<i>ar</i>	arithmetisch
<i>A</i>	Ausgang
<i>C</i>	<i>c</i> -Wert-bezogen (Bewertungsfaktor)
<i>E</i>	Eingang
<i>F</i>	Fühler, Sensor
<i>G</i>	Glied
<i>H, HK</i>	Heizkörpermaterial, Heizkörper
<i>i, j</i>	Zählerindizes
<i>I</i>	Innenfläche
<i>kr</i>	kritisch
<i>K, Konv</i>	Kontakt, Konvektion
<i>ln</i>	logarithmisch
<i>L</i>	Luft
<i>m</i>	Mittelwert
<i>N</i>	Normzustand
<i>O</i>	Oberfläche
<i>Q</i>	leistungsbezogen, Querschnitt
<i>R</i>	Rücklauf
<i>S</i>	Säule, Segment, Strahlung, Strömung
<i>Sp</i>	Speicherung
<i>St</i>	Strahlung
<i>T</i>	Temperatur, Teilung
<i>V</i>	Vorlauf
<i>W</i>	Heizmedium (Wasser), umschließende Wand
<i>z</i>	<i>z</i> -Abhängig (örtliche Kennzahl)

## Anhang B: Modellparameter

Im Basiszustand liegen die Heizkörpertemperaturen (Heizmedium, Wandmaterial) aufgrund der geringen Temperaturspreizung bei Norm-Heizmediumstrom nur ca.  $\pm 5$  K neben dem mittleren Referenzwert. Wegen der meist geringen Temperaturabhängigkeit können die Stoffwerte daher in guter Näherung als konstant angesehen werden.

Die folgenden Tabellen geben die Stoffwerte der beteiligten Materialien für den mittleren Basiszustand ( $T_m = 50$  °C) an. Quellen: [BLA89], [REC95].

**Tabelle B.1:** *Wasser* (Heizmedium) bei  $\bar{T} \cong 50$  °C

Dichte	$\rho_W = 984 \text{ kg/m}^3$
Spezifische Wärmekapazität	$c_{p,W} = 4186 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_W = 0,66 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$
kinematische Viskosität	$\nu_W = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

**Tabelle B.2:** *Trockene Luft* bei  $p = 1013$  mbar und  $T_L = 40$  °C

Dichte	$\rho_L = 1,29 \text{ kg/m}^3$
Spezifische Wärmekapazität	$c_{p,L} = 10^3 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_L = 27,2 \cdot 10^{-3} \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$
Kinematische Viskosität	$\nu_L = 17,26 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
Isobare Wärmeausdehnung	$\beta = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}$

**Tabelle B.3:** *Stahl* (Heizkörpermaterial) bei  $\bar{T} \cong 50$  °C

Dichte	$\rho_H = 7,84 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Spezifische Wärmekapazität	$c_{p,H} = 480 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_H = 50 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$

**Tabelle B.4:** *Guß Eisen* (Heizkörpermaterial) bei  $\bar{T} \cong 50$  °C

Dichte	$\rho_H = 7,25 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Spezifische Wärmekapazität	$c_{p,H} = 540 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_H = 55 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$

**Tabelle B.5:** *Aluminium* (Heizkörpermaterial) bei  $\bar{T} \cong 50 \text{ }^\circ\text{C}$ 

Dichte	$\rho_H = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Spezifische Wärmekapazität	$c_{p,H} = 942 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_H = 215 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$

**Tabelle B.6:** Allgemeine Konstanten und sonstige Parameter

Erdbeschleunigung	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma_S = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$
Emissionskoeffizient technischer Heizkörperlacke	$\varepsilon_{o,H} = 0,93 \dots 0,95$