

Numerische Simulation aufsteigender Blasen mit und ohne Stoffaustausch mittels der Volume of Fluid (VOF) Methode

zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)
der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Paderborn

genehmigte
DISSERTATION

von

Dipl.-Ing Mario Koebe
aus Medebach

Tag des Kolloquiums: 26.08.2004

Referent: Prof. Dr.-Ing. H.-J. Warnecke

Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. M. Pahl
HD Dr. rer. nat. D. Bothe

17. September 2004

Die vorliegende Arbeit wurde in der Zeit von Januar 2000 bis Dezember 2003 während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Technische Chemie und Chemische Verfahrenstechnik der Universität Paderborn angefertigt.

In dieser Zeit sind zum Thema dieser Arbeit folgenden Veröffentlichungen entstanden:

KOEBE, M. ; BOTHE, D. ; PRÜSS, J. ; WARNECKE, H.-J.: 3D Direct Numerical Simulation of Air Bubbles in Water at High Reynolds-Numbers. In: *ASME FEDSM 2002, Montreal, Canada ASME (Veranst.)*, 2002, S. 1-8

KOEBE, M. ; BOTHE, D. ; WARNECKE, H.-J.: Direct Numerical Simulation of Air Bubbles in Water/Glycerol Mixtures: Shapes and Velocity Fields. In: *ASME FEDSM 2003, Honolulu, USA ASME (Veranst.)*, 2003, S. 1-7

BOTHE, D. ; KOEBE, M. ; WIELAGE, K. ; WARNECKE, H.-J.: VOF-Simulations of Mass Transfer from Bubbles and Bubble Chains Rising in Aqueous Solutions. In: *ASME FEDSM 2003, Honolulu, USA ASME (Veranst.)*, 2003, S. 1-7

BOTHE, D. ; KOEBE, M. ; WARNECKE, H.-J.: VOF Simulation of the Rise Behavior of Single Air Bubbles with Oxygen Transfer to the Ambient Liquid. In: F.-P. Schindler (Hrsg.): *2nd International Berlin Workshop - IBW2 on Transport Phenomena with Moving Boundaries*, 9th-10th October 2003, Berlin, Germany, VDI-Verlag, 2004, S. 134 -146

BOTHE, D. ; KOEBE, M. ; WIELAGE, K. ; PRÜSS, J. ; WARNECKE, H.-J.: Direct Numerical Simulation of Mass Transfer Between Rising Gas Bubbles and Water. In: Sommerfeld, M. (Hrsg.): *Bubbly Flows - Analysis, Modelling and Calculation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die durch ihre sowohl fachliche als auch moralische Unterstützung zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt

Herrn Prof. Dr.-Ing. Hans-Joachim Warnecke für die interessante, fachübergreifende Themenstellung, seine stete Diskussionsbereitschaft und insbesondere für sein Vertrauen, das mir die freiheitliche Gestaltung und Umsetzung der wissenschaftlichen Ziele dieser Arbeit ermöglichte,

Herrn PD Dr. rer. nat. Dieter Bothe für seinen großen Einsatz bei der intensiven Betreuung dieser Arbeit und für seine unverzichtbare Unterstützung bei allen mathematischen Problemstellungen,

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Manfred Pahl für die Übernahme des Korreferates, sowie Prof. Dr.-Ing. Roland Span und Prof. Dr.-Ing. Hans Jürgen Maier für die Mitwirkung in der Prüfungskommission,

Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernhard Weigand für die Bereitstellung des Programms *FS3D*,

Herrn Prof. Dr.-Ing. Norbert Rübiger für die Bereitstellung von Versuchsaparaturen und die Möglichkeit meines Aufenthalts am IUV, die diese Zeit sehr produktiv werden ließ.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Kollegin Frau Dipl.-Math. Kerstin Wielage. Sie war mir bei der Bedienung von *FS3D* und in allen numerischen Fragestellungen eine große Hilfe und hat sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Weiterhin gilt mein besonderer Dank meinen drei Kollegen vom IUV Herrn Dr.-Ing. Michael Schlüter für seine große Hilfsbereitschaft bei der Durchführung der Experimente, die fachlichen Diskussionen und seine Gastfreundschaft,

Herrn Dipl.-Ing. Olaf Bork und Herrn Dipl.-Ing. Sören Scheid für ihre Hilfe bei der Auswertung der Experimente und die fachlichen Diskussionen,

Herrn Dipl.-Inf. Axel Keller vom PC² für die Unterstützung bei der Bedienung des Parallelrechners,

dem Paderborn Center for Parallel Computing *PC*² für die bereitgestellte Rechenzeit,

sowie allen anderen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Arbeitskreises Technische Chemie und Chemische Verfahrenstechnik, die durch das hervorragende Arbeitsklima ihren Beitrag zum erfolgreichen Abschluß dieser Arbeit geleistet haben.

Meinen Eltern

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Aufgabenstellung	1
2. Stand des Wissens - Hydrodynamik	3
2.1. Das Bewegungsverhalten von starren Einzelpartikeln	4
2.1.1. Widerstandsgesetze für sphärische Einzelpartikel	4
2.1.2. Gleichförmige Bewegung	6
2.2. Form und Bewegungsverhalten von Einzelblasen	6
2.2.1. Aufstiegsgeschwindigkeit und Widerstandsbeiwerte	9
2.2.2. Beschleunigte Blasenbewegungen	18
2.2.3. Bewegungsbahnen	19
2.2.4. Korrelationen für die Blasenform	22
2.2.5. Blasenaufstieg in leicht und stark verschmutzten Systemen .	24
2.3. Form und Bewegungsverhalten von Blasenketten	26
2.4. Wirbelschleppenphänomene	27
2.4.1. Laminare Wirbelschleppen	28
2.4.2. Turbulente Wirbelschleppen	29
2.4.3. Formen der Wirbelschleppen	29
3. Stand des Wissens - Stofftransport	33
3.1. Stoffübergang durch die Grenzfläche von Blasen und Tropfen	34
3.2. Zweifilm-Theorie	36
3.3. Penetrations-Theorie	39
3.4. Sherwood Korrelationen	42

4. Versuchsaufbau und -durchführung	45
4.1. Versuchsaufbau zur Untersuchung des Blasenauftiegs	45
4.2. Kalibrierung der Kameras	46
4.3. Versuchsdurchführung	47
4.4. Methode zur Erfassung der Blasenbewegung	48
5. Experimente	53
6. Stand des Wissens - Simulation	67
6.1. Ansätze zur Simulation von Blasenströmungen	67
6.2. Simulationen aufsteigender Blasen mit Interface Tracking Methoden	73
6.2.1. Hydrodynamik	73
6.2.2. Stoffaustausch	76
7. Kontinuumsmechanische Modellierung	79
7.1. Bilanzierung von Zweiphasenströmungen	79
7.1.1. Integralen Bilanzen	79
7.1.2. Differentielle Bilanzen	83
7.1.3. Sprungbedingungen	85
7.1.4. Randbedingungen	85
7.2. Stoffaustausch	86
8. Numerische Verfahren	89
8.1. Die VOF-Methode	89
8.2. Parasitäre Strömungen	95
9. Numerische Simulation aufsteigender Blasen	99
9.1. Stoffwerte der verwendeten Systeme	99
9.2. Variationen der Stoffeigenschaften der dispersen Phase	101
9.3. Vergleich mit analytischen Lösungen	105
9.3.1. Blasenform	106
9.3.2. Geschwindigkeitsfelder	108
9.4. Einfluß von Gitterauflösung und Wandabstand	112
9.5. Einzelblasen	118

9.5.1. Aufstiegsgeschwindigkeiten	120
9.5.2. Aufstiegsbahnen	129
9.5.3. Bahnfrequenz	136
9.5.4. Blasenformen	138
9.6. Wirbelschleppenphänomene	145
9.6.1. Helikale Wirbelschleppe	146
9.6.2. Achsensymmetrische Wirbelschleppe	149
9.6.3. Wirbelschleppenlänge	150
9.6.4. Wirbelschleppenbildung und -ablösung	154
9.7. Blasenkoaleszenz	157
9.8. Stoffübergang	165
9.8.1. Validierung	167
9.8.2. Gitterabhängigkeit des Stofftransportes	169
9.8.3. Variation der Schmidt-Zahl	170
9.8.4. Vergleich mit experimentellen Daten	175
9.8.5. Blasketten	180
10. Zusammenfassung und Ausblick	189
11. Symbolverzeichnis	195
A. Anhang	199
A.1. Festlegung der Wirbelschleppenlänge nach Tsuchiya und Fan	199
A.2. Einfluß der Blasenenerzeugung	199
A.3. Koeffizienten der Geradengleichungen	201
Tabellenverzeichnis	203
Abbildungsverzeichnis	205
Literaturverzeichnis	211

1. Einleitung und Aufgabenstellung

Gas-Flüssig (G-L)-Reaktoren mit Auftriebsströmung wie Blasensäulen, Schlaufenreaktoren oder begaste Rührkessel, werden als Kontaktapparate in der chemischen Reaktionstechnik, der Bioverfahrenstechnik und der Lebensmitteltechnik eingesetzt. In der Regel liegt dabei eine kontinuierliche Flüssigphase mit darin dispergierter Gasphase vor, wobei zusätzlich suspendierter Feststoff z.B. als Katalysator vorhanden sein kann. Die prozeßrelevanten Wechselwirkungen zwischen den beteiligten Phasen finden insbesondere auf der Größenskala der Partikel (Blasen) statt. Einige Beispiele sind Kollision oder Koaleszenz von Blasen, Einfluß des Nachlaufs auf benachbarte Blasen bis hin zum Schwarmverhalten, Auswirkung von (blasen-induzierter) Turbulenz auf Blasenbewegung und -form sowie Dynamik der Phasengrenzflächen. Darüber hinaus finden meist Stoffaustausch und -transport sowie chemische Reaktion mit weiteren komplexen Wechselwirkungen statt. Um in diesem Zusammenhang ein sicheres Upscaling zu ermöglichen, besteht ein hoher Bedarf, die ablaufenden Teilprozesse besser zu verstehen.

Zu den grundlegenden Problemen in Zweiphasenströmungen gehört das Verständnis der Wechselwirkungen beider Phasen untereinander. Die Wechselwirkungen lassen sich aufteilen in

- (1) die Wirkung der Flüssigphase auf die Blase,
- (2) die Wirkung der Blase auf die Flüssigphase,
- (3) die Rolle der Wechselwirkungen der Blasen untereinander.

In diesem Kontext ist die Kenntnis der Hydrodynamik einzelner Blasen von besonderer Bedeutung, da auf diese Weise die Punkte (1) und (2) detailliert untersucht werden können. Ergänzend zu Experimenten bietet sich die numerische Simulation zur näheren Untersuchung der obigen Punkte an. Mit ihr können die wesentli-

chen Parameter kostengünstig untersucht werden. Gleichzeitig sind alle relevanten Größen wie z.B. Geschwindigkeit oder Konzentration innerhalb des betrachteten Gebiets vollständig zugänglich. Insbesondere im Bereich des Nachlaufgebiets einer Blase ist die genaue Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung von großem Interesse. Zur Untersuchung der Punkte (1) und (2) müssen die freien Ränder der aufsteigenden Blasen genau untersucht werden können. Zur numerischen Simulation bieten sich die sogenannten Interface Tracking Methoden an. In dieser Arbeit sollen ausführliche Untersuchungen an Einzelblasen vorgenommen werden, damit die Anwendbarkeit numerischer Simulationen auf die Punkte (1) und (2) beurteilt werden kann. Zur Erfassung von Punkt (3), also der Wechselwirkung der Blasen untereinander, müssen auch Blasenpaare und Blasketten näher betrachtet werden.

Von entscheidender technischer Bedeutung ist jedoch nicht nur die Hydrodynamik in Zweiphasenströmungen, sondern auch der Stoffaustausch zwischen den Phasen. Dazu existieren bisher im Wesentlichen experimentelle Untersuchungen. Publiizierte Resultate numerischer Simulationen beziehen sich hauptsächlich auf spezielle Situationen, wie z.B. sphärische Blasen/Tropfen oder achsensymmetrische Anordnungen, die letztlich auf zweidimensionale Probleme führen. Andererseits belegen aktuell durchgeführte Experimente, daß bei den in der Praxis oft auftretenden höheren Reynolds-Zahlen asymmetrische Konzentrationsprofile im Nachlauf der Blasen auftreten. Zum Stoffaustausch über die dann formdynamischen Phasengrenzflächen existieren nur wenige Arbeiten.

Daher soll das in das bereits bestehende Simulationsprogramm *FS3D* derart erweitert werden, daß nicht nur ein Dichtesprung an der Phasengrenze, sondern auch ein oftmals vorliegender Konzentrationssprung an der Grenzfläche durch die Simulationen wiedergegeben werden kann. Ziel dieser Erweiterung soll sein, den Stofftransport und -austausch über deformierbare und formdynamische Phasengrenzflächen in dreidimensional numerisch berechnen zu können.

2. Stand des Wissens - Hydrodynamik

In einer Vielzahl von verfahrenstechnischen Apparaten liegen Gas/Flüssig-Kontakte vor. Diese Kontaktapparate lassen sich anhand der Strömungsführung und des Energieeintrags klassifizieren. Die bei den Prozessen vorliegende große Austauschfläche zwischen Gas- und Flüssigphase ermöglicht einen guten Wärme- und Stoffaustausch bei gleichzeitig geringem Energieeintrag. Je nach Prozeßführung und vorliegender Geometrie des verfahrenstechnischen Apparates können durch die Strömungsführung implizit die zur Verfügung stehende Phasengrenzfläche und Kontaktzeit variiert werden.

Zur Auslegung von Gas/Flüssig-Kontaktapparaten kommen meist integrale Modelle zur Anwendung, denen in der Regel eine zeitliche Mittelung zugrunde liegt, wodurch die instationäre Hydrodynamik stark vereinfacht wird. Lokale Effekte, wie z.B. deformierte oder formdynamische Blasen oder Wirbelschleppen hinter den Blasen bleiben in diesen Modellen unberücksichtigt. Auch nach intensiver Forschung sind viele dieser Phänomene noch nicht vollständig verstanden. Dabei haben jüngste experimentelle Untersuchungen gezeigt, daß diese Phänomene einen großen Einfluß auf die Hydrodynamik und den Stofftransport in Zweiphasenströmungen haben (Schlüter 2002; Scheid u. a. 2003; Bork u. a. 2003). Die Vereinfachungen haben insbesondere zur Folge, daß Sicherheitszuschläge bei der Reaktorauslegung notwendig werden.

Mit Hilfe von stark verbesserten optischen Meßmethoden, wie z.B. der Partikel Tracking Velocimetry (PTV), der Particle Image Velocimetry (PIV) oder der Laser induzierten Fluoreszenz (LIF) ist es mittlerweile möglich, lokale Phänomene quantitativ zu untersuchen. Allerdings ist der Dispersphasenanteil bei diesen Methoden limitiert. Zusätzlich sind nicht alle relevanten Größen wie z.B. Geschwindigkeit, Konzentrationen und Temperatur immer zeitgleich in drei Dimensionen meßbar.

Hier bietet die hochauflösende numerische Simulation die Möglichkeit, ergänzend zu den Experimenten Einzelprozesse näher zu untersuchen und zu verstehen.

2.1. Das Bewegungsverhalten von starren Einzelpartikeln

Fluide Partikel, wie z.B. Gasblasen oder Tropfen, sind durch eine bewegliche Phasengrenzfläche gekennzeichnet. Starre Partikel hingegen besitzen eine feste und damit formstabile Phasengrenzfläche; somit eine strömungsunabhängige Form. In Gegenwart größerer Konzentrationen oberflächenaktiver Substanzen (Tenside), können sich auch Gasblasen und Flüssigkeitstropfen wie starre Partikel verhalten. Die Kenntnis von Widerstandsgesetzen ist von entscheidender Bedeutung, da sich damit die Bewegung der Partikel beschreiben läßt. Die Kugelform stellt hierbei die einfachste aller möglicher Formen dar. Die Widerstandsgesetze für andere Partikelformen basieren oft auf den Erkenntnissen für Kugeln.

2.1.1. Widerstandsgesetze für sphärische Einzelpartikel

Üblicherweise wird der Widerstand eines Partikels durch den Widerstandsbeiwert beschrieben. Dieser ist als Quotient aus der Widerstandskraft F_W und dem dynamischen Druck $\frac{1}{2}\rho w_P^2$ auf die Projektionsfläche A_q definiert

$$C_D = \frac{F_W}{\frac{1}{2}\rho w_P^2 A_q}. \quad (2.1)$$

Die Widerstandskraft F_W setzt sich aus einem Reibungs- und einem Druckanteil zusammen ([Brauer 1971a](#)). Der Reibungsanteil greift an der Oberfläche der Kugel an, während der Druckanteil aus der Wirbelschleppe der Kugel resultiert. Für schleichende Strömungen ($Re < 1$) können die Komponenten des Widerstandsbeiwertes explizit als Funktion der Reynolds-Zahl formuliert werden. Die Reynolds-Zahl gibt das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskraft an und ist für feste und fluide Partikel wie folgt definiert:

$$Re = \frac{w_P d \rho_L}{\eta_L}. \quad (2.2)$$

Die Anteile des Widerstandsbeiwertes teilen sich für feste und fluide Partikel auf in einen Anteil reduzierter Normalspannungen

$$C_{D,1} = \frac{32}{3Re(1 + \kappa)}, \quad (2.3)$$

einen Anteil der Schubspannungen

$$C_{D,2} = \frac{16}{Re} \frac{\kappa}{(1 + \kappa)}, \quad (2.4)$$

und den Anteil des Drucks (Clift u. a. 1978). Dieser folgt aus einer Integration des Drucks über die Oberfläche mit

$$C_{D,3} = \frac{8}{3Re} \frac{2 + 3\kappa}{(1 + \kappa)}. \quad (2.5)$$

Hierin stellt $\kappa = \eta_B/\eta_L$ den Quotienten der Viskositäten beider Phasen dar. Der gesamte Widerstandsbeiwert lautet

$$C_D = \frac{8}{Re} \frac{2 + 3\kappa}{(1 + \kappa)}. \quad (2.6)$$

Somit ist die Widerstandskraft und mit ihr auch der Widerstandsbeiwert C_D von den Umströmungsbedingungen abhängig, die durch die Reynolds-Zahl charakterisiert werden. Im Bereich der schleichenden Strömung, also für sehr kleine Reynolds-Zahlen, macht der Reibungswiderstand $C_{D,1,2}$ zwei Drittel und der Druckwiderstand $C_{D,3}$ ein Drittel des gesamten Strömungswiderstands aus (Brauer 1971a). Für feste Partikel geht $\eta_P \rightarrow \infty$ und damit auch κ . Die obige Gleichung geht damit in den nach Stokes berechneten Widerstandsbeiwert für eine Kugel über:

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad Re \leq 0,1. \quad (2.7)$$

Im Bereich sehr hoher Reynolds-Zahlen hingegen dominiert der Druckwiderstand derart, daß der Reibwiderstand vernachlässigt werden kann, da fast ausschließlich die Trägheitskräfte für das Bewegungsverhalten ausschlaggebend sind. Für höhere Reynolds-Zahlen lassen sich nur noch empirische Relationen für den Widerstandsbeiwert angeben. So hat z. B. das Näherungsgesetz von Martin (1980) einen hohen Gültigkeitsbereich mit

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{8}{\sqrt{2} Re} + \frac{1}{3} \quad 0,1 < Re \leq 3 \cdot 10^5. \quad (2.8)$$

Ab einem kritischen Reynoldswert von $Re_{krit} = 3 \cdot 10^5$, bei dem $C_D = 0,3$ ist, kommt es zu einem drastischen Abfall von C_D . Dies läßt sich damit begründen, daß die auf der strömungsabgewandten Seite der festen Kugel vorhandene Grenzschichtströmung vom laminaren in den turbulenten Zustand übergeht. Aufgrund des erhöhten Impulsaustausches haftet die turbulente Grenzschicht über einen weiten Bereich an der Kugel und es kommt zu einer späten Ablösung, wodurch das Wirbelgebiet hinter der Kugel verkleinert wird, was wiederum zu einer drastischen Reduzierung des Druckanteils im Widerstandsbeiwert führt ([Brauer 1971a](#)).

2.1.2. Gleichförmige Bewegung

Für einen festen, kugelförmigen Partikel mit stationärer Geschwindigkeit, sprich gleichförmiger Bewegung, läßt sich ein Kräftegleichgewicht für die Auftriebs-, Gewichtskraft und Widerstandskraft (F_A, F_G, F_W) aufstellen

$$F_W = F_A - F_G. \quad (2.9)$$

Für die Differenz von Auftriebs- und Gewichtskraft gilt:

$$F_A - F_G = \frac{\pi}{6} d_P^3 g (\rho_P - \rho_L). \quad (2.10)$$

Ein Gleichsetzen mit der Widerstandskraft F_W aus Gleichung (2.1)

$$F_W = \frac{\pi}{4} C_D d_P^2 \frac{\rho_L (w_P)^2}{2} \quad (2.11)$$

ergibt die Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit w_P für starre sphärische Einzelpartikel

$$w_P^2 = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\rho_P}{\rho_L} \right) \frac{g d_P}{C_D}. \quad (2.12)$$

2.2. Form und Bewegungsverhalten von Einzelblasen

Während bislang nur feste sphärische Partikel betrachtet wurden, sollen jetzt auch Blasen, sprich fluide Partikel berücksichtigt werden. Der Unterschied zu festen Partikeln besteht nicht nur darin, daß Blasen ihre Form verändern können, sondern auch darin, daß die bewegliche Phasengrenzfläche Zirkulationsbewegungen innerhalb der Blase induzieren kann, die wiederum Einfluß auf das Bewegungsverhalten

der Blase ausüben können. Zusätzlich können oberflächenaktive Substanzen das Verhalten der Blase mitbestimmen.

Die Form der Blase wird durch die physikalischen Eigenschaften der Flüssigphase (Dichte, Viskosität, Oberflächenspannung) und die daraus resultierende Aufstiegs- geschwindigkeit bestimmt. Die Blasenform läßt sich qualitativ gut aus experimen- tellen Beobachtungen abschätzen. Für frei aufsteigende Blasen und Tropfen in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit kann dann das Diagramm von [Grace u. a. \(1976\)](#) oder [Clift, Grace und Weber \(1978\)](#) herangezogen werden. Bei Kenntnis der Stoff- werte von Gas- und Flüssigphase (Dichte, Viskosität und Oberflächenspannung) läßt sich mit Hilfe der Eötvös- und Morton-Zahl die Form der Blasen qualitativ vorausbestimmen. Die Eötvös-Zahl (teilweise auch Bond-Zahl genannt) setzt die Gewichts-, bzw. Auftriebskraft ins Verhältnis zur Oberflächenkraft

$$Eö = \frac{g(\rho_L - \rho_G)d_B^2}{\sigma}, \quad (2.13)$$

mit dem Blasenäquivalentdurchmesser, der sich aus dem Blasenvolumen V_B berech- net zu $d_B = \sqrt[3]{6V_B/\pi}$. Die Morton-Zahl ist für einphasige Systeme der Kehrwert der Flüssigkeitskennzahl K_L

$$K_L = \frac{\rho_L \sigma^3}{g \eta_L^4} \quad (2.14)$$

und ist nur von den Stoffwerten des Systems abhängig. Für zweiphasige Systeme lautet sie

$$Mo = \frac{g \eta_L^4 (\rho_L - \rho_G)}{\rho_L^2 \sigma^3}. \quad (2.15)$$

Sie ist der Parameter in Abbildung [2.1](#). Hinzu kommt die Reynolds-Zahl, die als einzige von der Aufstiegs- geschwindigkeit abhängt. Abbildung [2.1](#) kann nur für eine *erste Abschätzung* der Aufstiegs- geschwindigkeit herangezogen werden ([Clift u. a. 1978](#)). Aus der Abbildung wird deutlich, daß sich die Blasenformen grob in drei Klassen einteilen lassen: Sphärisch, ellipsoid und schirm- bzw. kappenförmig.

[Peebles und Garber \(1953\)](#) schlugen für Luftblasen in Wasser eine heute weit ver- breitete und differenzierende Einteilung der Blasenform vor, wie sie in Abbildung [2.2](#)

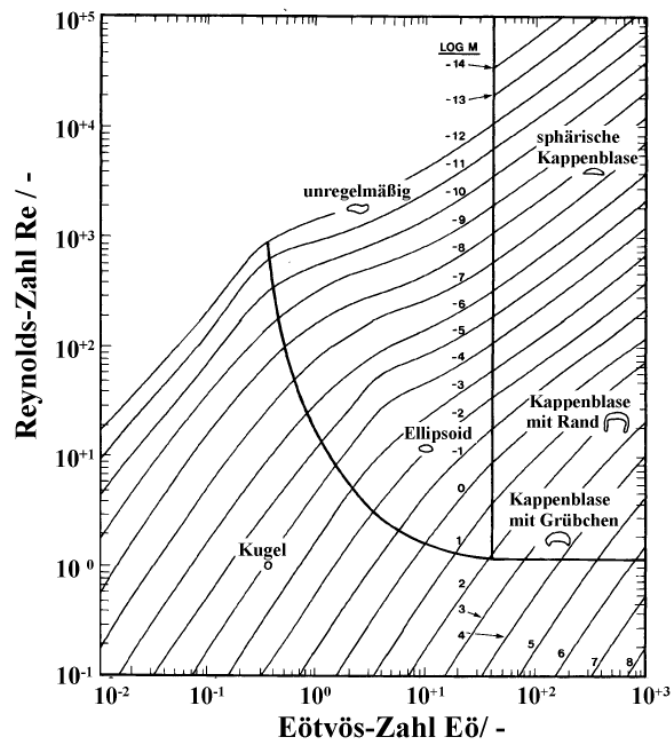


Abbildung 2.1.: Diagramm zur Abschätzung der Blasenform und Aufstiegsgeschwindigkeit (Grace u. a. 1976; Clift u. a. 1978)

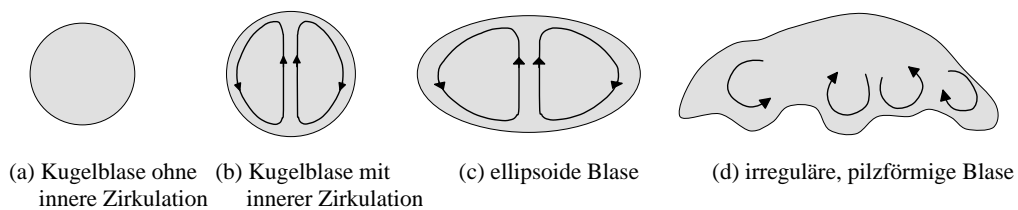


Abbildung 2.2.: Charakteristische Blasenformen nach Peebles und Garber (1953)

gezeigt wird. Mit steigendem Durchmesser der Blase erhöht sich die Auftriebskraft einer Blase und damit auch ihre Geschwindigkeit. Durch die erhöhte Geschwindigkeit kommt es zu einer Veränderung der Blasenform und der Blasenbahn. Geschwindigkeit, Form und Bahn sind also direkt miteinander verknüpft. Im Nachfolgenden

soll jedoch versucht werden, die drei Aspekte einzeln zu beschreiben.

2.2.1. Aufstiegsgeschwindigkeit und Widerstandsbeiwerte

In diesem Abschnitt sollen zunächst die experimentellen Beobachtungen beschrieben werden. Anschließend erfolgt eine Übersicht über die Modelle zu deren Beschreibung.

Basierend auf experimentellen Beobachtungen kommen Peebles und Garber zu dem Schluß, daß Blasen in Wasser mit einem Durchmesser kleiner als 0,2 mm sich in strömungstechnischer Hinsicht wie Feststoffpartikel verhalten, sprich die Phasengrenze ist starr. Somit ist auch keine Wirbelbildung im Innern der Blase möglich (Brauer 1971a) (s. Abbildung 2.2 (a)). Der Blasenauftstieg erfolgt im Stokesschen Bereich auf einer geradlinigen Bahn, dessen Gesetzmäßigkeiten bereits im Abschnitt 2.1.2 beschrieben wurden.

Mit steigendem Blasendurchmesser d_B sinkt der Einfluß der Grenzflächenspannung und die Phasengrenze wird zunehmend beweglicher. Im Inneren der Blase setzt eine Zirkulationsbewegung ein. Dies führt zu einer torusförmigen Wirbelwalze im Innern der Blase (Abbildung 2.2). Durch die bewegliche Oberfläche sinkt auch der Geschwindigkeitsgradient an der Phasengrenzfläche, was eine Reduzierung des Reibungswiderstandes mit sich bringt. Dementsprechend ist die Aufstiegsgeschwindigkeit einer Blase mit beweglicher Phasengrenzfläche größer als die eines formgleichen festen Partikels.

Die Aufstiegsgeschwindigkeit einer Blase in Wasser steigt stetig bis zu einem Durchmesser von $d_B = 1,3\text{mm}$. Für diese Blase beträgt die Aufstiegsgeschwindigkeit 34cm/s (Clift u. a. 1978; Fan und Tsuchiya 1990; Hong und Brauer 1984). Ab einem bestimmten Blasendurchmesser (für Wasser $d = 1,0\text{mm}$) verformen sich die Blasen zu Ellipsoiden (s. Bild (c) in Abbildung 2.2). Durch den ansteigenden Strömungsquerschnitt erhöht sich der Strömungswiderstand durch den steigenden Druckanteil. Zeitlich und räumlich transiente Strömungsablösungen auf der Blasenrückseite resultieren in einer taumelnden oder spiralförmigen Aufstiegsbewegung, die zusätzlich zur vertikalen noch eine horizontale Geschwindigkeitskomponente mit sich führt. Da jedoch nur die vertikale Komponente als Aufstiegsgeschwindigkeit bezeichnet wird

(Brauer 1971a) kommt es zu einer signifikanten Abnahme der Aufstiegsgeschwindigkeit.

Bei einer weiteren Erhöhung des Durchmessers verformt sich die Ellipse zu einer regellos geformten Blase. (s. Abbildung 2.2 (d)) Innerhalb der Blase treten mehrere gegensinnig rotierende kleinere Wirbel auf, die eine kontinuierliche Formänderung der Blase bewirken. Die Aufstiegsgeschwindigkeit nimmt jedoch wieder mit steigendem Durchmesser zu. Ab einem Durchmesser von ca. 20mm nehmen die Blasen eine schirmähnliche Form an. Man spricht hier von Schirm- oder Kappenblasen, die stockend auf einer geradlinigen Bahn aufsteigen. Ihre Aufstiegsgeschwindigkeit ist weitgehend unabhängig vom Grad der Verschmutzung (Clift u. a. 1978).

In der Literatur liegen viele Messungen über die Aufstiegsgeschwindigkeit einzelner Blasen in Wasser vor. Viele dieser Messungen sind in dem in Abbildung 2.3 vorgestellten Diagramm nach Clift, Grace und Weber (1978) zusammengefaßt. Darin

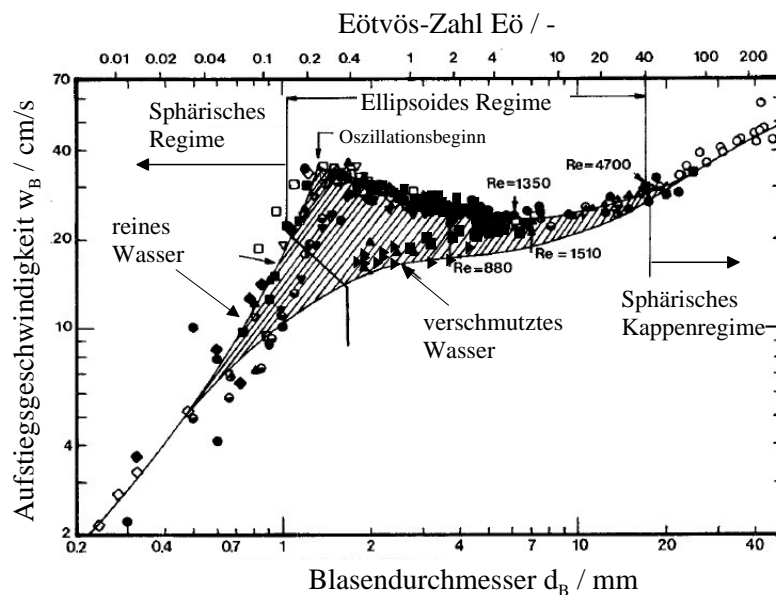


Abbildung 2.3.: Aufstiegsgeschwindigkeiten von Luftblasen in Wasser (Clift u. a. 1978)

stellt die obere Kurve die Blasenaufstiegsgeschwindigkeit von Luftblasen in hochreinem Wasser dar; die untere Kurve in stark kontaminiertem Wasser. Beide Kurven

basieren auf den Messungen von [Gaudin \(1957\)](#).

Selbst in vermeindlich reinem Wasser können geringste Mengen an Verunreinigungen nicht völlig ausgeschlossen werden. Kleine Blasen werden durch sie stark in ihrem Aufstiegsverhalten beeinflusst. Somit läßt sich erklären, daß für geringe Blasendurchmesser $d_B \lesssim 0,5\text{mm}$ beide Kurven übereinstimmen. Ein weiterer Aspekt ist, daß für kleine Blasendurchmesser die Viskosität der Flüssigphase zunehmend an Einfluß gewinnt ([Saffmann 1956](#); [Clift u. a. 1978](#)).

Ab einer gewissen Größe - im Bereich der Schirm- oder Kappenblasen - verschwindet der Einfluß der Verschmutzungen und beide Kurven laufen wiederum zusammen. Der grau schraffierte Bereich zwischen den beiden Kurven markiert alle möglichen Geschwindigkeiten für leichte bis starke Verschmutzungen nach Gaudin. Abbildung [2.3](#) ist zu entnehmen, daß die Messungen einzelner Autoren um diesen Bereich streuen, insbesondere um die obere Kurve. Weiterhin wird deutlich, daß die Kontamination des Systems mit oberflächenaktiven Substanzen einen großen Einfluß auf die Aufstiegsgeschwindigkeit hat.

Die bisherigen Ergebnisse galten für das System Wasser/Luft. Wasser weist eniedrige Viskosität auf. Die Viskosität hat jedoch einen großen Einfluß auf das Aufstiegsverhalten. Je höher die Viskosität η_L der Flüssigkeit, desto geringer ist bei gleichem Blasendurchmesser die stationäre Aufstiegsgeschwindigkeit w_B . Ein umfangreiche Übersicht über experimentell gewonnene Aufstiegsgeschwindigkeiten und Widerstandsbeiwerte in einem großen Wertebereich der Morton-Zahl bieten [Maxworthy u. a. \(1996\)](#).

Korrelationen zur Bestimmung der Aufstiegsgeschwindigkeit und des Widerstandsbeiwerts

Für viele ingenieurtechnische Anwendungen ist die Aufstiegsgeschwindigkeit einer einzelnen Blase als Funktion des Durchmessers von großem Interesse. Nachfolgend werden die gängigsten Korrelationen für newtonische Flüssigkeiten vorgestellt.

Wie schon in Kapitel [2.1.2](#) gezeigt, hängen Aufstiegsgeschwindigkeit der Blase w_B und ihr Widerstandsbeiwert voneinander ab. Analog zu [Peebles und Garber \(1953\)](#)

unterteilt [Brauer \(1971a\)](#) die Blasengrößen in vier Bereiche (a-d), für die er jeweils Gleichungen für Geschwindigkeit und Widerstandsbeiwerte angibt.

Blasen mit einem Durchmesser kleiner 0,2 mm, - sprich Kugelblasen ohne innere Zirkulation (s. Abschnitt (a) in Abbildung 2.2)- können als feste Partikel angesehen werden. Gemäß der Theorie für starre Kugeln ist ihr Widerstandsbeiwert durch $C_D^{St} = 24/Re$ festgelegt. Für Ihre Aufstiegsgeschwindigkeit gilt dann nach Stokes ([Brauer 1971a](#))

$$w_{(a)}^{St} = \frac{1}{18} \frac{g(\rho_L - \rho_G)}{\eta_L} d_B^2 \quad Re_B \leq 1, 4. \quad (2.16)$$

Hadamard und Rybczynski ([Sadhal u. a. 1997](#)) berechneten unabhängig voneinander unter der Annahme einer schleichenden Strömungen innerhalb und außerhalb der Kugeln den Einfluß der beweglichen Phasengrenzfläche. Dieser erhöht die Aufstiegsgeschwindigkeit der Kugelblasen in Gleichung (2.16) um den Faktor K_{HR} , der wie folgt definiert ist:

$$K_{HR} \equiv \frac{1 + \eta_G/\eta_L}{2/3 + \eta_G/\eta_L}. \quad (2.17)$$

Dieser Faktor nimmt für das System Wasser/Luft einen Wert von 1,46 an. Der Widerstand von Luftblasen in Wasser reduziert sich somit zu:

$$C_{D(a)}^{HR} = \frac{24}{Re_B} \frac{1}{K_{HR}} \approx \frac{16}{Re_B} \quad Re_B \leq 1, 4. \quad (2.18)$$

Diese Korrektur gilt jedoch erst ab einer bestimmten Reynolds-Zahl, ab der sich der Widerstand sprunghaft erniedrigt ([Brauer 1971a](#)). Darunter gilt das Stokessche Gesetz. Die Geschwindigkeit innerhalb dieses Bereiches läßt sich berechnen als:

$$w_{(a)}^{HR} = \frac{1}{12} \frac{g(\rho_L - \rho_G)}{\eta_L} d_B^2 \quad Re_B \leq 1, 4. \quad (2.19)$$

Die Berechnungen von Stokes, sowie Hadamard und Rybczynski vernachlässigen die Trägheitsglieder in den Bewegungsgleichungen. Erstmals ging [Levich \(1962\)](#) von einer Grenzschichtströmung um die Kugelblase aus. Der Geschwindigkeitsgradient verschwindet an der Blasenoberfläche. Der Widerstand erhöht sich folglich auf:

$$C_{D(a)}^L = \frac{48}{Re_B} \quad Re_B \leq 1, 4 \quad (2.20)$$

was dem doppelten Wert des Stokesschen Widerstandes für starre Kugeln entspricht. Für die Geschwindigkeit gilt dann

$$w_{(a)}^L = \frac{1}{36} \frac{g(\rho_L - \rho_G)}{\eta_L} d_B^2 \quad Re_B \leq 1,4. \quad (2.21)$$

Für schleichende Strömungen gibt es eine Vielzahl von Erweiterungen des Stokes'schen Gesetzes. [Clift u. a. \(1978\)](#) zeigt eine umfassende Übersicht über Korrelationen für den Widerstandsbeiwert.

Für Kugelblasen mit innerer Zirkulation (s. Abschnitt (b) in Abbildung 2.2) bestimmten [Peebles und Garber \(1953\)](#) die Aufstiegsgeschwindigkeit

$$w_{(b)} = 0,136 \frac{g^{0,76} d_B^{1,28} \rho_L^{0,52}}{\eta_L^{0,52}} \quad 2,2 \leq Re \leq 4,02 \cdot K_L^{0,214}. \quad (2.22)$$

Daraus ergibt sich ein Widerstandsgesetz von

$$C_{D(b)} = \frac{18,7}{Re_B^{0,68}} \quad 2,2 \leq Re \leq 4,02 \cdot K_L^{0,214}. \quad (2.23)$$

in dem K_{FL} die Flüssigkeitskennzahl (2.14) darstellt. Der obere Gültigkeitsbereich hängt also von den Eigenschaften der Flüssigkeit ab. Eine neuere Arbeit von [Maxworthy u. a. \(1996\)](#) zeigt, daß der Bereich (b) über einen weiten Bereich der Morton-Zahlen sehr gut durch

$$C_{D(b)} = \frac{11,1}{Re^{0,71}} \quad (2.24)$$

wiedergegeben werden kann. Für den Bereich (c) fanden Peebles und Garber die Beziehungen

$$w_{(c)} = 1,91 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_L d_B}} \quad 4,02 \cdot K_L^{0,214} < Re_B \leq 3,1 \cdot K_L^{0,25}, \quad (2.25)$$

deren Gültigkeitsbereich wiederum von den Eigenschaften der Flüssigphase abhängen. Zusammen mit Gleichung (2.12) ergibt sich:

$$C_{D(b)} = 0,366 \frac{g \rho d^2}{\sigma} = 0,366 \frac{We}{Fr} \quad 4,02 \cdot K_L^{0,214} < Re_B \leq 3,1 \cdot K_L^{0,25}. \quad (2.26)$$

Da die Weber-Zahl in dem Gebiet (c) konstant ist mit $We_{(c)} = 3,64$, hängt der Widerstand also lediglich von der Froude-Zahl

$$Fr = \frac{w_B^2}{g d_B} \quad (2.27)$$

ab (Brauer 1971a), die Trägheits- und Schwerkraft ins Verhältnis setzt

$$C_{D(c)} = \frac{1,332}{Fr} = \frac{1,322gd_B}{w_B^2}. \quad (2.28)$$

Während die Aufstiegsgeschwindigkeit in den Bereichen (a) und (b) von der Viskosität der Flüssigphase abhängt, wird sie im Bereich (c) von der Oberflächenspannung bestimmt.

Im Bereich (d) sind nur noch Auftriebs- und Trägheitskräfte bestimmend (Brauer 1971a). Innerhalb dieses Bereiches treten regellos geformte Blasen mit innerer Zirkulation auf. Aus der Gleichung von Davis und Taylor ($Fr = 0,51$) folgt daher

$$w_{(d)} = 0,714\sqrt{gd_B}. \quad (2.29)$$

mit einem *konstanten* Widerstandsbeiwert von

$$C_{D(d)} = 2,61, \quad (2.30)$$

der trotz beweglicher Phasengrenzfläche etwa dem 6-fachen Wert einer starren Kugel entspricht, was auf den großen Widerstand durch die Formänderung zurückzuführen ist.

In der Literatur existieren noch weitere Gleichungen für die Geschwindigkeit und den Widerstandsbeiwert für weite Bereiche der Reynolds-Zahl, auf die im Nachfolgenden näher eingegangen werden soll.

Ein weiterer Ansatz zur Modellierung nicht-sphärischer Blasen ist die sogenannte "Wellengleichung" nach Mendelson (1967). Unter Vernachlässigung der Reibungskräfte kann gemäß dieser Theorie die Existenz einer Blase als eine Art von Störung, angewandt auf eine freie Grenzfläche eines Gas-Flüssig Systems angesehen werden. Tomiyama u. a. (1998a) verwenden die erweiterte Version der Wellengleichung

$$w^2 = \frac{2\sigma}{\rho_L d} + \frac{(\rho_L - \rho_G)gd}{2\rho_L} \quad (2.31)$$

und geben erstmals eine physikalische Erklärung für diese oft verwendete Erweiterung. Die Autoren sind in der Lage, über den gesamten Durchmesserbereich die Aufstiegsgeschwindigkeit und den Widerstandsbeiwert für reine und kontaminierte Systeme zu bestimmen. Der Widerstandsbeiwert lautet für *reine* Systeme:

$$C_D = \max \left\{ \min \left[\frac{16}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}), \frac{48}{Re} \right], \frac{8}{3} \frac{E\ddot{o}}{E\ddot{o} + 4} \right\}, \quad (2.32)$$

für *leicht kontaminierte* Systeme:

$$C_D = \max \left\{ \min \left[\frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}), \frac{72}{Re} \right], \frac{8}{3} \frac{E\ddot{o}}{E\ddot{o} + 4} \right\} \quad (2.33)$$

und für *vollständig kontaminierte* Systeme:

$$C_D = \max \left\{ \frac{16}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}), \frac{8}{3} \frac{E\ddot{o}}{E\ddot{o} + 4} \right\}. \quad (2.34)$$

Diese Korrelationen sind über einen weiten Bereich der Morton- und Eötvös-Zahlen validiert und geben die Reynolds-Zahlen besser wieder als z.B. das Modell von [Peebles und Garber \(1953\)](#). Die zugehörigen Herleitungen dieser Gleichungen finden sich in der Originalarbeit von Tomiyama u.a. Die entsprechenden Geschwindigkeiten lassen sich durch eine Multiplikation von Gleichung (2.31) mit $(\rho_L d_B / \eta_L)^2$ und nachfolgender Kombination mit den Gleichungen (2.33-2.34) bestimmen. Das obige Modell ist für eine sehr große Anzahl von Stoffen in sehr guter Näherung gültig und ist daher empfehlenswert.

Ein weiterer Ansatz, um die Aufstiegsgeschwindigkeiten von Blasen in reinem und kontaminiertem Wasser zu beschreiben ist eine Variation der Mendelson'schen Gleichung nach [Fan und Tsuchiya \(1990\)](#).

$$w_B^* = \left[\left(\frac{Mo^{-0,25}}{K_1} d_B^{*2} \right)^{-n} + \left(\frac{2K_2}{d_B^*} + \frac{d_B^*}{2} \right)^{-n/2} \right]^{1/n} \quad \text{mit} \quad (2.35)$$

$$w_B^* = w_B \left(\frac{\rho_L}{\sigma g} \right)^{0,25} \quad \text{und} \quad d_B^* = d_B \left(\frac{\rho_L g}{\sigma} \right)^{0,5} = E\ddot{o}^{0,5}.$$

Der Exponent n stellt hierin einen empirischen Parameter dar, mit dessen Hilfe die Gleichung an reine und kontaminierte System angepaßt werden kann. Aus der

Gleichung wird deutlich, daß für kleine Blasendurchmesser der viskose Term ausschlaggebend ist. Für große Durchmesser hingegen dominiert der von den Stoffeigenschaften unabhängige Trägheitsterm. Zusammen mit dem Parameter n werden K_1 und K_2 derart bestimmt, daß sie die experimentellen Daten am besten wiedergeben. Dabei werden K_1 und K_2 unabhängig voneinander für spezifische Bereiche des Durchmessers festgelegt, während n bei fixierten Werten für K_1 und K_2 über den gesamten Durchmesserbereich bestimmt sind. Eine ausführliche Übersicht über die Werte n , K_1 und K_2 für eine große Anzahl von Flüssigkeiten findet sich bei [Fan und Tsuchiya \(1990\)](#). Darin wird vorgeschlagen, den Parameter K_2 für reine Flüssigkeiten auf $K_2 = 1, 2$ zu setzen und für Flüssigkeitsgemische auf $K_2 = 1, 7$. Dies spiegelt die unterschiedlichen Oberflächenspannungen der zwei Typen von Flüssigkeitssystemen wieder. Abhängig von der Reinheit der Flüssigphase variiert n von 0,8 bis 1,6. Der Faktor K_1 variiert von Flüssigkeit zu Flüssigkeit innerhalb eines Wertebereiches von 12-40. Er kann korreliert werden durch

$$K_1 = K'_1 Mo^{-0,038} \quad (K_0 > 12). \quad (2.36)$$

Für Wasser und wäßrige Lösungen gilt $K'_1 = 14,7$ und für organische Lösungsmittel/Mischungen $K'_1 = 10,2$. Ist der Wert $K'_1 \leq 12$, dann wird er auf $K'_1 = 12$ gesetzt.

Durch geeignete Wahl der Parameter kann Gleichung (2.35) über einen weiten Bereich der Morton-Zahl ($10^{-12} < Mo < 10^5$) mit einer Genauigkeit von -6 bis 9 % für 20 verschiedene newtonische Flüssigkeiten angewendet werden.

[Jamialahmadi u. a. \(1994\)](#) liefern für den Bereich von $\rho_L = 720 - 1040 \text{ kg/m}^3$ und $\eta_L = 0,244 - 59 \text{ mPas}$ eine Gleichung, die die Geschwindigkeit gemäß der Wellengleichung nach [Mendelson \(1967\)](#) w^{Me} mit einem Ansatz für die Geschwindigkeit gemäß einer schleichenden Strömung w^{SS} nach Stokes (vgl. Gleichung (2.16)) oder Hadamard und Rybczynski (vgl. Gleichung (2.19)) verknüpft.

$$w_B = \frac{w^{Me} w^{SS}}{\sqrt{(w^{Me})^2 + (w^{SS})^2}}. \quad (2.37)$$

Ein weiterer Ansatz zur Beschreibung der Aufstiegsgeschwindigkeit über alle Bereiche liefert [Churchill \(1989\)](#). Dabei kombiniert er eine große Anzahl von bekannten

theoretischen Ansätzen für die einzelnen Bereiche in einer Korrelation, die durch empirische Parameter die jeweiligen Bereiche der Theorien stetig miteinander verbindet. Für die dimensionslose Geschwindigkeit w_B^* gilt

$$w_B^* = \left\{ \left[\frac{12}{(D_V^*)^2} \frac{1 + 0,01720(D_V^*)^{\frac{9}{4}}}{1 + 0,00573(D_V^*)^{\frac{9}{4}}} \right]^3 + \frac{(2/D_V^*)^{\frac{2}{3}}}{1 + 6^{\frac{2}{3}}/(D_V^*)^3 Mo^{\frac{1}{2}}} \right\}^{-\frac{1}{3}}. \quad (2.38)$$

Die dimensionslose Geschwindigkeit w_B^* und der dimensionslosen Äquivalentdurchmesser D_V^* werden berechnet aus:

$$w_B^* = w_B \left(\frac{\rho_L^2}{\eta_L g \Delta \rho} \right)^{1/3} \quad \text{und} \quad D_V^* = d_B \left(\frac{\rho_L g \Delta \rho}{\eta_L^2} \right)^{1/3}.$$

Für den Widerstandsbeiwert liefert Churchill die Gleichung

$$C_D = \left\{ \left[\frac{8}{Re C_D^{\frac{1}{2}}} \frac{1 + 0,0233(Re^2 C_D)^{\frac{3}{4}}}{1 + 0,00777(Re^2 C_D)^{\frac{3}{4}}} \right]^3 + \frac{(4/3)^{\frac{2}{3}}}{1 + 96^{\frac{1}{2}}/Re^2 C_D Mo^{\frac{1}{2}}} \right\}^{-\frac{1}{3}}, \quad (2.39)$$

die jedoch nicht explizit nach C_D auflösbar ist.

In dem durch die Oberflächenspannung dominierten Bereich (vgl. Bereich (c) in Abbildung 2.2) streuen die gemessenen Aufstiegsgeschwindigkeiten vieler Autoren. Tomiyama u. a. (2002) geben als Ursache hierfür die anfängliche Blasenform zum Zeitpunkt der Blasenerzeugung in den Experimenten an.

Zur Validierung dieser These führten die Autoren eine Reihe von Experimenten in reinem und kontaminiertem Wasser mit variablen Anfangsdeformationen der Blase durch, die eine Reihe von interessanten Ergebnissen lieferten. So wies z.B. eine 3 mm Blase mit *geringer* Anfangsdeformation eine *geringere* Aufstiegsgeschwindigkeit, ein *hohes* Durchmesser Verhältnis und eine durchgängige Zickzack Bewegung auf. Eine 3mm Blase mit *starker* Anfangsdeformation hingegen stieg wesentlich *schneller* mit einem *geringeren* Durchmesser Verhältnis auf. Ihre Bewegungsbahn änderte sich von einer Zickzack zu einer spiralförmigen Bahn. Auch waren die Werte der Endgeschwindigkeit für geringe Anfangsdeformationen weniger gestreut als für starke. Als mögliche Ursache nennen die Autoren die freie Oberflächenenergie

σA . Eine Blase mit starker Anfangsdeformation weist somit eine größere Oberflächenenergie auf. Eine ad Hoc Abschätzung der Oberflächenenergie und der kinetischen Energien in Luft und Wasser zeigt jedoch, daß die Oberflächenenergie in der Größenordnungen der kinetischen Energie der Luft, aber weit unterhalb der kinetischen Energie des umgebenden Wassers liegt.

[Tomiyama u. a. \(2002\)](#) liefern einen Ansatz, der auf verzerrte, sphäroide, abgeflachte Blasen bei hoher Reynolds-Zahl beruht. Dem Modell liegen eine Potentialströmung um einen abgeflachten Sphäroiden und Sprungbedingungen an der Phasengrenzfläche zugrunde. Mit Hilfe dieses Modells kann gezeigt werden, daß Blasen mit identischem Äquivalentdurchmesser, abhängig von ihrer Anfangsdeformation, *unterschiedliche* Aufstiegsgeschwindigkeiten haben können. Das Modell liefert eine modifizierte Version von Gleichung (2.31) mit der Exzentrizität $E = b/h$, einem Störungsfaktor γ :

$$w_B = F(\gamma E) \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho_L d_B} \gamma E^{3/4} + \frac{\Delta \rho g d_B}{2\rho_L} \cdot \frac{\gamma E^{2/3}}{1 - \gamma^2 E^2}} \quad (2.40)$$

mit

$$F(\gamma E) = \frac{\sin^{-1} \sqrt{1 - (\gamma E)^2} - (\gamma E) \sqrt{1 - (\gamma E)^2}}{1 - (\gamma E)^2}. \quad (2.41)$$

Diese Gleichungen verdeutlichen, daß die Aufstiegsgeschwindigkeit w nicht nur vom Blasendurchmesser d_B und den Stoffeigenschaften der Flüssigphase abhängt, sondern auch mit der Blasenform variiert.

2.2.2. Beschleunigte Blasenbewegungen

Für eine beschleunigte Bewegung gilt nach dem 2. Newtonischen Gesetz folgender Ansatz:

$$M \frac{dw}{dt} = F_A - F_G - F_W. \quad (2.42)$$

Im stationären Bereich ist der linke Term der Gleichung gleich null. Wie schon für feste Partikel erwähnt liegen auch für Blasen gravierende Abweichungen der aus

Gleichung (2.42) bestimmten Masse der Blasen und der aus

$$M_B = \rho_G \frac{\pi}{6} d_B^3 \quad (2.43)$$

bestimmten Masse vor. Erklärt werden kann dies durch die zusätzliche Flüssigkeit, die bei der Blasenbewegung mit beschleunigt wird. Diese Masse wird als virtuelle Masse bezeichnet

$$M_{VM} = M - M_B. \quad (2.44)$$

Ausdruck findet sie im Koeffizienten c_{VM} , der sich bestimmten läßt aus

$$M = M_B + M_{VM} = V_B(\rho_G + c_{VM} \cdot \rho_L) \quad (2.45)$$

In der Literatur liegen nur sehr wenige experimentelle Daten über beschleunigte Blasen vor. Für einzelne sphärische Blasen in einem unendlich ausgedehnten Gefäß liefert die Potentialströmung $c_{VM} = 0,5$. Die virtuelle Masse hängt zusätzlich vom Gasgehalt ϵ des Systems ab ([van Wijngaarden 1976](#)).

$$c_{VM} \approx \frac{1}{2} + \frac{3,32}{2} \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (2.46)$$

Eine Erweiterung dieser Gleichung für Gasgehalte bis zu 35 % liefern [Niemann und Laurien \(2000\)](#) durch direkte numerische Simulation.

$$c_{VM} \approx \frac{1}{2} + \frac{3,32}{2} \epsilon + \frac{7,66}{2} \epsilon^2 \quad 0 \leq \epsilon \leq 0,35 \quad (2.47)$$

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Abhängigkeit der virtuellen Masse von der Anströmfläche. Je größer die Anströmfläche, desto größer auch die virtuelle Masse. Dies illustriert, daß die virtuelle Massenkraft eine Druckkraft ist, die auf die Anströmfläche wirkt ([Niemann und Laurien 2000](#)).

2.2.3. Bewegungsbahnen

Eine aufsteigende Blase verrichtet in einem kontinuierlichen Medium Arbeit die dem Produkt aus Aufstiegsgeschwindigkeit und der Auftriebskraft proportional ist. In einem viskosen Medium kann diese verrichtete Arbeit, d.h. die durch den Blasenanstieg in der Flüssigphase erzeugte kinetische Energie, schnell vollständig durch

die Viskosität, sprich innere Reibung, laminar dissipiert werden (Fan und Tsuchiya 1990). Somit finden keine Wirbelablösungen statt, die für die horizontale Auslenkung aus der Bewegungsbahn verantwortlich sind. Daher steigen die Blasen in viskosen Medien geradlinig auf. In Wasser-Glycerin Gemischen ist dies ab einer Viskosität von $\eta_L = 0,007 \text{ Pas}$ der Fall (Schlüter 2002). In weniger viskosen Medien kann die kinetische Energie nicht sofort vollständig dissipiert werden; einiges an Energie wird durch Wirbelablösungen freigesetzt (turbulente Dissipation). Nach dem Ablösen der Wirbel dissipieren diese allmählich in der Flüssigkeit. Die Wirbelablösungen induzieren Oszillationen der Blasenbewegung, auch bekannt als *sekundäre Bewegung* (Fan und Tsuchiya 1990). Oszillationen der Bewegungsbahnen starten also mit dem Beginn der Wirbelablösungen auf der Blasenrückseite (Fan und Tsuchiya 1990).

Prinzipiell können Blasen auf geradlinigen, zickzackförmigen, helikalen oder geradlinig stockenden Bahnen aufsteigen. Über die zugehörigen Bereiche gibt es in der Literatur unterschiedliche und teilweise widersprüchliche Angaben.

Die Aufstiegsbahnen hängen stark von der umgebenden Flüssigkeit und von der Reinheit des Systems ab (Fan und Tsuchiya 1990; Garner und Hammerton 1954; Kubota u. a. 1967; Tsuge und Hibino 1971; Duineveld und Fdhila 1996). Während in schon geringfügig verschmutzten Flüssigkeiten die Blasen lediglich auf einer zickzack Bahn aufstiegen, lagen in reiner Flüssigkeit zickzack und helikale Bahnen vor. In reinen Systemen hängt die Bahnen zusätzlich noch von der Art der Blasenenerzeugung ab. (Saffmann 1956; Tomiyama u. a. 2002).

Für Luftblasen in Wasser beobachten Aybers und Tapucu (1969) für $d_B < 1,3 \text{ mm}$ einen geradlinigen Aufstieg und für $1,3 < d_B < 2,0 \text{ mm}$ einen helikalen. Im Bereich von $2,0 < d_B < 3,6 \text{ mm}$ liegt zuerst ein zickzackförmiger Aufstieg vor, der in einen spiralförmigen übergeht und ein lediglich zickzackförmiger im Bereich von $3,6 < d_B < 4,2 \text{ mm}$. Darüber findet ein geradlinig, stockender Aufstieg statt. Garner und Hammerton (1954), Kubota u. a. (1967) und Tsuge und Hibino (1971) stellen für $1,5 \leq d_B \leq 3 - 5 \text{ mm}$ einen spiralförmigen Aufstieg und für $3 - 5 \leq d_B \leq 10 - 15 \text{ mm}$ einen zickzackförmigen Aufstieg fest. Duineveld

(1995) beobachtet in ultra-gereinigtem Wasser Bahninstabilitäten jedoch erst ab einem Durchmesser von $d_B = 1,82\text{mm}$ ($We = 3,3$) und Forminstabilitäten ab $d_B > 3,5\text{mm}$ ($We = 4,2$).

Während der Einfluß der umgebenden Flüssigkeit und der Tenside umfangreich untersucht wurde, sind wenig Messungen über den Einfluß der Anfangsdeformation bekannt. Neben Tomiyama u. a. (2002) führt auch Saffmann (1956) umfangreiche Untersuchungen zum Einfluß der Anfangsdeformation durch. Seine, den obigen Autoren widersprechenden Ergebnisse für $1,0 - 4,6\text{mm}$ Blasen lassen sich zusammenfassen zu:

1. Für $d_B < 1,4\text{mm}$ steigen Blasen senkrecht ohne Oszillationen auf.
2. Für $1,4 < d_B < 2,0\text{mm}$ liegt immer eine zickzack Bahn vor.
3. Für $d_B > 2,0\text{mm}$ liegt eine zickzack Bewegung vor, sofern die Blasen mit minimaler Anfangsdeformation injiziert werden. Diese Bahn ist jedoch äußerst instabil. Schon kleinste Störungen oder Hindernisse in der Bahn führen zu einer vertikalen Bahn. Dies deckt sich auch mit den Beobachtungen von Schlüter (2002). Wenn eine größere Blase bei der Blasenerzeugung zerbricht, steigen die Fragmente mit $d_B > 2,6\text{mm}$ helikal auf, da die Defragmentierung zu Störungen auf der Oberfläche führen.
4. Eine zickzack Bewegung kann in eine vertikale umschlagen. Das umgekehrte ist jedoch nicht der Fall.

Der letzte Punkt bestätigt auch die gängige Beobachtung vieler Autoren (Tomiyama u. a. 2002; Lunde und Perkins 1997; Saffmann 1956; Ellingsen und Risso 2001), daß nur ein Übergang einer Zickzack-Bewegung hin zur spiralförmigen festgestellt werden kann, nicht umgekehrt. Diese Ergebnisse bestätigen die Schlußfolgerungen von Ellingsen u. a. (1997), die den Aufstieg von $2,5\text{mm}$ Blasen systematisch untersuchen. Ausgelöst von kleinen Störungen kommt es zu einer seitlichen Auslenkung aus der geradlinigen Bahn. Diese Störungen können von der Blasenerzeugung oder von Störungen in der Flüssigphase kommen. Die Amplitude der seitlichen Auslenkungen wächst kontinuierlich an. Ab einem gewissen Punkt ist die maximale

Schwingungsamplitude der zickzack Bahn erreicht. Dieses Stadium wiederum ist ebenfalls instabil und anfällig gegenüber weiteren Störungen. Es kommt zu Auslenkungen aus der Schwingungsebene, deren Amplitude weiter anwächst. Die Blase erhält langsam eine spiralförmige Bahn. Diese Beobachtung deckt sich mit der von [Saffmann \(1956\)](#). Anders ausgedrückt beschleunigt die starke Anfangsdeformation das Anwachsen der sekundären Bewegungen ([Tomiya u. a. 2002](#)). Dies wiederum bestätigt die zuvor geäußerte Feststellung der Autoren, daß es nicht möglich ist, die Aufstiegsbahn anhand des Blasendurchmessers und der Stoffwerte eines Systems vorherzusagen. Die Art der Blasenherzeugung ist also verantwortlich für die Bewegungsbahn. Auf diese Weise lassen sich auch die obigen Klassifizierungen erklären, die den anderen experimentellen Beobachtungen in der Literatur widersprechen ([Tomiya u. a. 2002](#)).

2.2.4. Korrelationen für die Blasenform

Viele existierende Theorien zum Blasenauftstieg gelten nur für sphärische Blasen. In der Literatur existiert eine Vielzahl von empirischen Korrelationen zur Vorhersage der Blasenform, von denen die drei geläufigsten nachfolgend kurz vorgestellt werden sollen. Die Blasenform kann von der Blasengröße, der Aufstiegs geschwindigkeit oder von den physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeit abhängig sein.

Für niedrigviskose Flüssigkeiten ($Mo < 2,5 \cdot 10^{-4}$), frei von Verunreinigungen, finden [Tadaki und Maeda \(1963\)](#) eine empirische Abhängigkeit der Blasenabmessungen d_B/b von einer Kombination der Reynolds-Zahl Re und Morton-Zahl Mo . Diese Kombination der Form $Ta = ReMo^{0,23}$ wird auch als Tadaki-Zahl bezeichnet.

Für ellipsoide Blasen ist die Exzentrizität d_B/b gleich $(h/b)^{1/3}$. Gleiches gilt für sphärische Kappenblasen. Anhand der Tadaki-Zahl kann für $Mo < 2,5 \cdot 10^{-4}$ gemäß nachfolgender Übersicht die Blasenform und ihre Exzentrizität vorherbestimmt werden.

$$\frac{d_B}{b} = \begin{cases} 1 & Ta < 2 & (sphärisch) \\ 1,14Ta^{-0,176} & 2 < Ta < 6 & (ellipsoid) \\ 1,36Ta^{-0,28} & 6 < Ta < 16,5 & (ellipsoid) \\ 0,62 & 16,5 < Ta & (sphärische Kappe) \end{cases} \quad (2.48)$$

Diese am weitesten akzeptierte Korrelation wird von [Vakhrushev und Efremov \(1970\)](#) erweitert. Für das Verhältnis von vertikalem zu horizontalem Blasendurchmesser h/b gilt für $Mo < 10^{-3}$

$$\frac{h}{b} = \begin{cases} 1 & Ta \leq 1 \\ \{0,81 + 0,206 \tanh[2(0,8 - \log Ta)]\}^3 & 1 \leq Ta < 39,8 \\ 0,24 & 39,8 \leq Ta \end{cases} \quad (2.49)$$

Ein Vergleich beider Korrelation mit experimentell ermittelten Durchmesserhältnissen zeigt jedoch, daß beiden obigen Gleichungen besser die Daten innerhalb verschmutzter oder teilverschmutzter Systemen wiedergeben, als die Werte innerhalb reiner Systeme ([Fan und Tsuchiya 1990](#)).

Zur Erfassung von reinen bis hin zu verschmutzten Systemen erweiterten [Fan und Tsuchiya \(1990\)](#) die Korrelation von Vakhrushev und Efremov um vier Parameter $c_1 - c_4$.

$$\frac{h}{b} = \begin{cases} 1 & Ta \leq Ta_1 \\ \{c_1 + c_2 \tanh[c_3(c_4 - \log Ta)]\}^m & Ta_1 \leq Ta < Ta_2 \\ \left(\frac{h}{b}\right)_{Kappe} & Ta_2 \leq Ta \end{cases} \quad (2.50)$$

Voraussetzung für die Anwendung dieser Korrelation ist die Kenntnis

1. des Übergangs vom sphärischen zum ellipsoiden Regime (Ta_1) und vom ellipsoiden zum sphärischen Kappenregime (Ta_2)
2. des Durchmesserhältnisses der sphärischen Kappenregime $(h/b)_{Kappe}$

erforderlich. Die numerischen Werte für die Parameter $c_1 - c_4$ und m können Tabelle 2.1 entnommen werden. Weitere Korrelationen für die Blasenform werden von [Fan und Tsuchiya \(1990\)](#) vorgestellt.

Tabelle 2.1.: Numerische Werte für die Parameter in Gleichung (2.50)

System	m	$(h/b)_{Kappe}$	Ta_1	Ta_2	c_1	c_2	c_2	c_4
3D verunreinigt *	3	0,24	1,0	40	0,81	0,20	2,0	0,80
3D rein	3	0,24	0,3	20	0,81	0,20	1,8	0,40
2D verunreinigt	2	0,30	1,0	40	0,77	0,24	2,1	0,80
2D rein	2	0,30	0,3	20	0,77	0,24	1,9	0,40

* vgl. Gleichung (2.49)

2.2.5. Blasenaufstieg in leicht und stark verschmutzten Systemen

In technischen Anwendungen liegen in den seltensten Fällen reine Stoffsysteme vor. Die Gegenwart von oberflächenaktiven Substanzen hat einen großen Einfluß auf die Beweglichkeit der Phasengrenzfläche und soll nun näher betrachtet werden.

Oberflächenaktive Substanzen, wie z.B. Tenside können schon in geringsten Mengen einen großen Effekt auf das Verhalten von Blasen haben. Auch wenn die Tensidmenge so gering ist, daß die physikalischen Eigenschaften der Kernphase unbeeinflußt bleiben, können Tenside z.B. die innere Zirkulation in Blasen unterdrücken und somit einen entscheidenden Einfluß auf das Aufstiegsverhalten, oder Stoff- und Wärmeaustausch haben. Die Aufstiegs geschwindigkeit nimmt mit steigender Tensidkonzentration bis auf einem Minimalwert ab. Höhere Tensidkonzentration führen dann zu keiner weiteren Reduktion der Aufstiegs geschwindigkeit. Die dem Phänomen zugrunde liegenden physikalischen Mechanismen lassen sich wie folgt erklären:

Die Tenside lagern sich an der Blasenoberfläche an. Durch die Aufstiegsbewegung der Blase liegt an der Grenzfläche eine Schubspannung an, die die Tenside auf die Blasenunterseite transportiert. Dort kommt es zu einer Akkumulation der Tensidmoleküle, während es an der Stirnfläche zu einer Verarmung kommt. Es bildet sich also ein Gradient der Flächenkonzentration des Tensids entlang der Phasengrenzfläche aus. Dadurch entsteht ein Gradient der Oberflächenspannung. Dies wird als

Marangoni-Effekt bezeichnet. In Flüssigkeiten, in denen der Marangoni-Effekt auftritt, werden Strömungen von Orten niedriger zu Orten hoher Oberflächenspannung beobachtet. Somit kommt es zu einer Reduktion der Aufstiegsgeschwindigkeit der Blase. Die Akkumulation der Tenside immobilisiert die Grenzfläche. Diese verhält sich oberhalb einer bestimmten Konzentration wie ein rigider Partikel. Dieser rigide Bereich wird durch den Kappenwinkel Φ (vgl. Abbildung 2.4) gekennzeichnet. Innerhalb dieses Bereiches sind Stoff- und Wärmeaustausch über die immobile Pha-

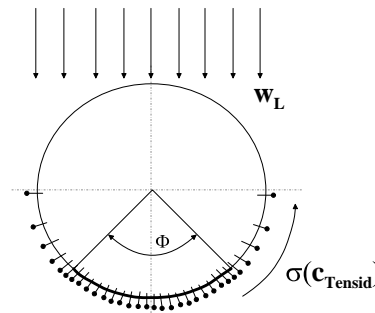


Abbildung 2.4.: Schematische Darstellung einer teilweise mit Tensiden kontaminierten Blase

sengrenzfläche hinweg stark reduziert. Mit steigender Tensidkonzentration wächst der immobile Bereich an, bis zu einer Konzentration, bei der die gesamte Oberfläche immobilisiert ist. Die Blase verhält sich dann annähernd wie ein rigider Partikel. Durch die vollständig oder teilweise immobilisierte Blasenoberfläche gelten andere Widerstandsgesetze als für reine Systeme.

Ein neuer, interessanter Beitrag zum Thema der kontaminierten Blasen stammt von [Tomiya u. a. \(2002\)](#). Die Autoren untersuchen das Aufstiegsverhalten von Einzelblasen in Abhängigkeit von der Anfangsdeformation in kontaminierten Flüssigkeiten. In dem Bereich, in dem die Oberflächenspannung dominiert, weisen kontaminierte Blasen die gleiche Aufstiegsgeschwindigkeit auf, wie Blasen in *reiner* Flüssigkeit mit *geringer* Anfangsdeformation. Auch steigen kontaminierte Blasen nicht auf helikalen Bahnen auf; selbst bei großen Anfangsdeformationen nicht.

Daraus läßt sich schlußfolgern, daß sich kontaminierte Blasen wie reine Blasen mit geringer Anfangsdeformation verhalten. Als Erklärung kann hierfür die weit bekannte Tatsache herangezogen werden, daß Tenside Oberflächenspannungswellen oder Kapillarwellen dämpfen ([Landau und Lifschitz 1987](#)). Tomiyama u. a. fassen die Rolle von Tensiden auf die Dynamik aufsteigender Blasen wie folgt zusammen.

(I) Bereich dominierender Reibungskräfte (sphärische Blasen)

Die Anhäufung von Tensiden auf der Phasengrenzfläche induziert den sogenannten Marangoni-Effekt. Die Oberfläche wird immobilisiert und verhält sich wie ein Festkörper. Die Randbedingung an der Oberfläche ändern sich also von reibungsfrei zu reibungsbehaftet, was einen Anstieg des Reibungswiderstandes und eine Reduzierung der Aufstiegsgeschwindigkeit mit sich führt.

(II) Bereich dominierender Oberflächenspannung (ellipsoide Blasen)

Hier dämpfen die Tenside die Volumenschwankungen. Die Aufstiegsgeschwindigkeit ist annähernd identisch mit der von Blasen mit geringer Anfangsdeformation in reiner Flüssigkeit. Die Streuung der Geschwindigkeiten ist hier viel geringer als in reinen Systemen.

(III) Bereich dominierender Auftriebskräfte Bereich (Kappenblasen)

Aufgrund der großen Trägheit spielt die Oberflächenspannung eine untergeordnete Rolle auf die Blasenbewegung und -form.

2.3. Form und Bewegungsverhalten von Blasketten

Aus experimentellen Arbeiten ist bekannt, daß die Aufstiegsgeschwindigkeit von Blasen innerhalb einer Kette im Vergleich zu Einzelblasen zunimmt ([Miyahara u. a. 1991](#); [Starke 1998](#)). Je geringer dabei der Abstand zwischen den Blasen ist, desto größer ist folglich auch die Beeinflussung durch die Anströmung der vorauslaufenden Blase. Für die Beschreibung der Aufstiegsgeschwindigkeiten in Ketten kann das Modell von [Crabtree und Bridgwater \(1971\)](#) herangezogen werden. Danach kann die Geschwindigkeit als Summe der Aufstiegsgeschwindigkeit einer un-

gestörten Einzelblase in einem unendlichen Gefäß und der aus der Strömung der Wirbelschleppe der vorauslaufenden Blase berechnet werden. Für geringe Reynolds-Zahlen ($Re < 30$) ist dies

$$\frac{w_{abs,BK}^G}{w_B} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\pi \cdot g \cdot d_B^3 \cdot f_B}{6 \cdot \nu_L \cdot w_B^2}}\right) \quad (2.51)$$

und für $Re > 30$

$$\left(\frac{w_{abs,BK}}{w_B}\right)^{5/3} - \left(\frac{w_{abs,BK}}{w_B}\right)^{2/3} = K_W \left(\frac{g}{w_B \cdot f_B}\right)^{1/3} \left(\frac{d_B \cdot f}{w_B}\right) \quad (2.52)$$

Hierin ist f_B die Blasenbildungsfrequenz und K_W ein experimentell bestimmter Anpassungsfaktor. Für Wasser und gering viskose Flüssigkeiten sowie Blasendurchmesser $d_B < 10$ mm gilt $K_W = 1,425$, im Bereich von $10^{-7} < Mo < 10$ gilt $K_W = 2,250$ ([Miyahara u. a. 1984](#)).

Für geringe Blasenabstände weisen Blasen ein konstantes Durchmesser Verhältnis h/b auf, d.h. der Reibungsanteil des Widerstands bleibt konstant. Der Widerstand wird somit durch den Druckanteil bestimmt. In Ketten reduziert sich der Druckanteil aber, sobald sich die Blase im Wirbelgebiet einer vorauslaufenden Blase befindet, was zu einer Erhöhung der Geschwindigkeit führt.

Aus den Erkenntnissen für Blasenketten wird deutlich, daß die Wirbelschleppe einen großen Einfluß auf die Hydrodynamik hat. Daher soll im Nachfolgenden näher auf diese Phänomene eingegangen werden.

2.4. Wirbelschleppenphänomene

Jüngste experimentelle Ergebnisse haben erneut vor Augen geführt, daß Wirbelschleppenphänomene einen großen Einfluß auf die Hydrodynamik und den Stofftransport in Zweiphasenströmungen haben ([Brücker 1999](#); [Lindken und Merzkirch 2001](#); [Bork u. a. 2001, 2002](#); [Scheid u. a. 2002](#); [Schlüter 2002](#); [Bork u. a. 2003](#)). Bei der Umströmung von festen oder fluiden Körpern löst sich ab einer hinreichend hohen Reynolds-Zahl die Strömung im Nachlaufgebiet ab und es bildet sich eine Wirbelschleppe (engl. wake) aus. In der Literatur existiert eine Vielzahl von

Untersuchungen zu Wirbelschleppenphänomenen hinter Festkörpern, auf die hier allerdings nicht weiter eingegangen werden soll. Eine ausführliche Beschreibung findet sich bei [Fan und Tsuchiya \(1990\)](#).

Für fluide Partikel/Blasen wird die Form der Wirbelschleppe von verschiedenen Faktoren beeinflusst. Neben den Stoffwerten der Flüssigphase haben auch Verunreinigungen wie z.B. Tracer Einfluß auf die Blasenform und -bewegung und folglich auch auf die Wirbelschleppe. Bisher wurden in der Literatur hauptsächlich formstabile Kappenblasen untersucht (s. [Fan und Tsuchiya \(1990\)](#) und die darin angegebene Literatur). Über formdynamische Blasen im praxisrelevanten Bereich ($d = 2 - 8\text{mm}$) liegen nur wenig Informationen vor. Allgemein lassen sich die Wirbelschleppen in laminar und turbulent klassifizieren. Letztere können wiederum eine geschlossene oder offene Struktur aufweisen. Weiterhin können sie stationär oder instationär ausgebildet sein. Diese Formen der Wirbelschleppen werden auf den nächsten Seiten näher beschrieben.

2.4.1. Laminare Wirbelschleppen

Laminare Wirbelschleppen werden oft hinter Kappenblasen in viskosen Medien beobachtet. Ihre Schleppe ist hydrodynamisch stabil. Modellhaft kann eine solche Schleppe wie folgt beschrieben werden:

1. wirbelfreie reibungslose Strömung (Potentialströmung) vor der Blase und um die Blasenschleppe
2. reibungsfreie Wirbelströmung innerhalb der geschlossenen Schleppe
3. dünne Grenzschicht um die Blase *und* um die Wirbelschleppe
4. externes Nachlaufgebiet entlang der Symmetrieachse.

Die interne und externe Wirbelschleppe, d.h. der Wirbel unmittelbar auf der Blasenrückseite und das Nachlaufgebiet werden durch die Grenzschicht voneinander getrennt. Fluidelemente, die von der inneren Grenzschicht am rückwärtigen Stagnationspunkt in die innere Schleppe wandern, werden dort von Wirbeln aufwärts

transportiert, um auf der Blasenrückseite wieder in die Grenzschicht zu gelangen. Fluidelemente auf der äußeren Seite der Grenzschicht bewegen sich mit der Strömung und verlassen die Region der geschlossenen Wirbelschleppe in die externe Schleppe (Fan und Tsuchiya 1990). Es erfolgt somit kein *konvektiver* Flüssigkeitsaustausch zwischen der äußeren Strömung und der Wirbelschleppe (Fan und Tsuchiya 1990; Bhaga und Weber 1981). Daher wird die Schleppe als geschlossen bezeichnet. Die erforderliche Stabilität wird durch eine hohe Viskosität oder Wandeffekte erreicht. Bei erhöhter Reynolds-Zahl konnten Bhaga und Weber (1981) für konstante Blasen volumina eine abnehmende Stabilität der Wirbelschleppe und ein Einsetzen von Wirbelablösungen beobachten - den Übergang zu einer offenen Struktur der Schleppe.

2.4.2. Turbulente Wirbelschleppen

Eine Reduzierung der Viskosität der Flüssigphase führt bei großen Blasen zu turbulenten Schleppen. Ob diese als offen oder geschlossen bezeichnet werden können wird in der Literatur kontrovers diskutiert. Jedoch scheint eine offene Struktur sinnvoller für die Beschreibung turbulenter Schleppen (Fan und Tsuchiya 1990). Mit Hilfe der Schlierenphotographie gelang es Wegener und Parlange (1973) für eine Blase (mit $Re > 3000$) eine Schleppe bis weit hinter der Blase zu visualisieren. Innerhalb der Schleppe erschien die Strömung chaotisch, jedoch mit erkennbaren Wirbelbewegungen nahe der Blase.

2.4.3. Formen der Wirbelschleppen

Die allgemeine Schleppenstruktur liegt zwischen den beiden Extremen der laminaren und der turbulenten Wirbelschleppe. Fan und Tsuchiya (1990) schlagen eine Einteilung in zwei Bereiche vor:

1. Die primäre Wirbelschleppe, die sich unmittelbar hinter der Blase befindet, sich mit ihr bewegt und meist geschlossen ist,
2. Die sekundäre Wirbelschleppe, die sich bis weit hinter die Blase erstreckt.-

Schematisch ist diese Einteilung in Abbildung 2.5 dargestellt. Innerhalb der primären

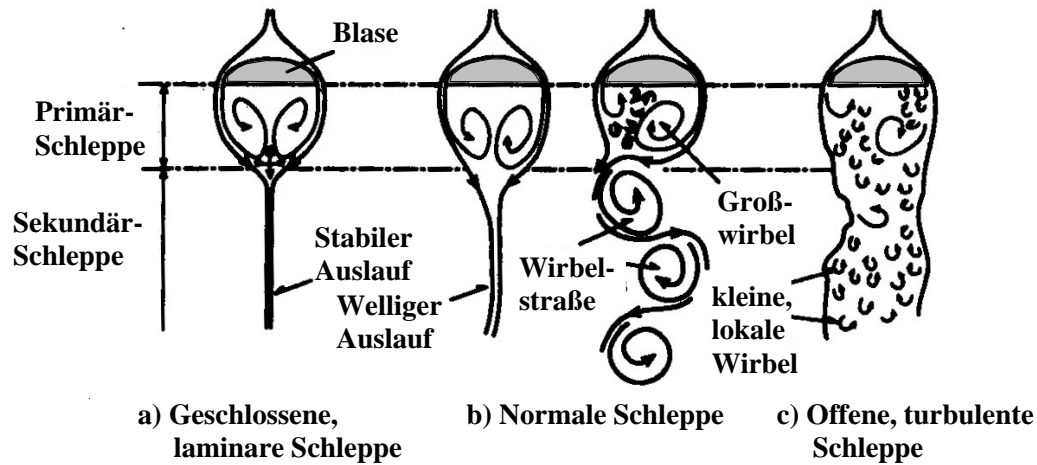


Abbildung 2.5.: Charakteristische Formen der Wirbelschleppe hinter Kugelhappenblasen (Fan und Tsuchiya 1990).

Schleppe kann eine weitere Wirbelstruktur entstehen. Jedoch kann ihre exakte Grenzschicht nicht immer genau definiert werden. Die sekundäre Schleppe hingegen hat eine offene Struktur und repräsentiert eine weniger definierte Region. Hier hinein können auch abgelöste Wirbel aus der primären Schleppe gelangen. Für geringe Reynolds-Zahlen kann die Sekundärschleppe ein stabiler oder welliger Auslauf der primären Schleppe sein. Mit steigender Reynolds-Zahl kann sich daraus eine Wirbelstraße entwickeln (Fan und Tsuchiya 1990).

Die möglichen Formen der Wirbelschleppen lassen sich in fünf Bereiche einteilen, die durch steigende Reynolds-Zahlen charakterisiert werden:

1. Im ersten Bereich ($Re < Re_1$; in Abbildung 2.5 nicht dargestellt) existiert ein stetiger Nachlauf mit einer vernachlässigbaren Region, in der Zirkulation auftritt.
2. Im zweiten Bereich (s. Abbildung 2.5 a) bildet sich ein stetiger Nachlauf ($Re_1 < Re < Re_2$) gefolgt von einem stabilen Auslauf.

3. Eine unstetige Schleppe mit welligem Auslauf ($Re_2 < Re < Re_3$) (Abbildung [2.5 b](#))
4. Eine unstetige Schleppe mit einem hohen Grad an Turbulenz und sich ablösenden Wirbeln ($Re_3 < Re < Re_4$) (Abbildung [2.5 b](#)).
5. Eine hochturbulente, offene Schleppe ($Re > Re_4$) (Abbildung [2.5 c](#)).

Konkrete Zahlenwerte für die begrenzenden Reynolds-Zahlen sind für eine Reihe von festen Partikeln in einer Übersicht bei [Fan und Tsuchiya \(1990\)](#) angegeben.

Experimentell untersucht wurden Wirbelschleppenphänomene für Blasen sowohl in zweidimensionalen Flachapparaturen als auch in dreidimensionalen Apparaten. So beobachtete [Lindt \(1971\)](#) in einer Flachapparatur für ellipsoide Blasen mit $Re = 2000 - 5000$ eine Zickzack Bewegung, bei der sich Wirbel ablösten. Die Anordnung der Wirbel entsprach der einer Wirbelstraße hinter einem Zylinder. Eine ähnliche Wirbelstraße stellten [Crabtree und Bridgwater \(1971\)](#) in einer anderen Flachapparatur für $Re = 1020 - 24700$ und $\nu = 1,02 - 27 \text{ mm}^2/\text{s}$ fest. [Hill \(1894\)](#) beobachtete eine unregelmäßige Wirbelstraße in zweidimensionalen Experimenten. Diese entstand aber erst, nachdem die Blase eine gewisse Strecke nach ihrer Bildung aufgestiegen war. Trotz der unregelmäßigen Wirbelstruktur lag um die Blase und in der unmittelbaren Schleppe eine stabile Strömung vor. Eine umfassende Übersicht über weitere Experimente in Flachapparaturen liefert [Fan und Tsuchiya \(1990\)](#). Während für Festkörper Wirbelschleppen bis zu einer Reynolds-Zahl von ca. $Re = 100.000$ untersucht werden können, ist der Bereich für zwei- und dreidimensionale Blasen stark eingeschränkt, da in einem festgelegten System die Geschwindigkeit fest an den Durchmesser gekoppelt ist. Für niedrigviskose Flüssigkeiten ist die minimale Reynolds-Zahl ab der sich Wirbelschleppen ausbilden durch die Blasengröße auf etwa 100 limitiert. Die obere Grenze ist durch die Blasenstabilität und die zugehörige Aufstiegeschwindigkeit begrenzt (vgl. Kapitel [2.2.4](#)). Der Großteil der Beobachtungen wurde bis zu einer Reynolds-Zahl von etwa Re_3 (s.o.) gemacht. Auf die typischen Formen der Wirbelschleppen - helikal und achsensymmetrisch - wird in Kapitel [9.6](#) näher eingegangen.

Die Schleppe einer Blase beeinflußt natürlich auch nachlaufende Blasen. So können nachlaufende Blasen durch den reduzierten Widerstand in der Blase angezogen werden und es kann zur Koaleszenz kommen, oder abgelöste Wirbel können nachlaufende Blasen hin bis zum Zerfall beeinflussen.

3. Stand des Wissens - Stofftransport

In diesem Abschnitt soll näher auf die Mechanismen des stationären und instationären Stofftransports eingegangen werden. Der Stofftransport erfolgt dabei über eine Phasengrenze A eines Gas-Flüssig Systems hinweg. Dabei ist der Stoffübergang in entscheidender Weise von den Eigenschaften der Phasengrenzfläche und von den innerhalb der Phasen ablaufenden Vorgängen abhängig ([Brauer 1971b](#)).

Oberflächenaktive Substanzen können zusätzlich zur Hydrodynamik auch den Stofftransport beeinflussen. Auf der Phasengrenzfläche kann es zu einem Diffusionsstrom der angelagerten Tenside kommen (s. Kap. 2.2.5). Zusätzlich verringern die Tenside die Oberflächenspannung. Dabei breiten sich Gebiete geringer Oberflächenspannung aus und solche mit hoher Oberflächenspannung ziehen sich zusammen. Somit entsteht auf der Phasengrenzfläche eine Bewegung, die sich auf die umgebenden Phasen überträgt. Dabei können sich Wirbelzellen ausbilden, die den Stoff von der Phasengrenzfläche in die umgebende Phase transportieren. Diese mitunter sehr dynamischen und heftigen Vorgänge werden auch als Grenzflächenturbulenz bezeichnet.

Bereits hier wird deutlich, daß der Stofftransport durch eine Phasengrenzfläche ein äußerst komplexen Prozeß darstellt. In der Literatur existieren vereinfachte Modelle, um den Stoffübergang beschreiben zu können. Die geläufigsten sollen nachfolgend vorgestellt werden. Der Grad der Vereinfachung nimmt dabei stets zu.

3.1. Stoffübergang durch die Grenzfläche von Blasen und Tropfen

Im allgemein ist der Stoffübergang von Blasen (oder Tropfen) mit einer umgebende Phase instationär. Mit Erreichen der homogenen Gleichgewichtskonzentration kommt der Stofftransport zum Erliegen.

Sind die Gleichgewichtswerte an der Phasengrenze zeitlich konstant, so liegt ein stationärer Stoffaustausch vor. Dies ist aber nur möglich, wenn die Blase nur aus der austauschenden Komponente besteht und eine Änderung des Durchmessers vernachlässigt werden kann. Dies ist in guter Näherung bei der Absorption eines Gases von der umgebenden Flüssigkeit erfüllt ([Brauer 1971b](#)). Der zugehörige Konzentrationsverlauf dazu ist in Abbildung 3.1 ersichtlich. Besteht die Blase nur aus der

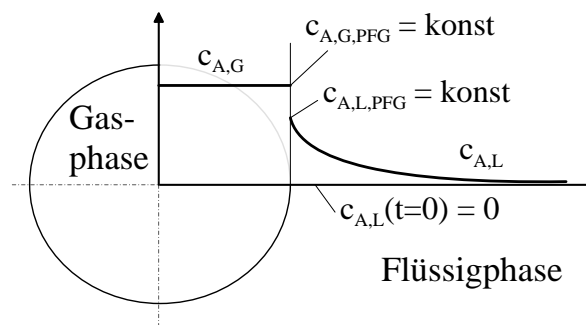


Abbildung 3.1.: Konzentrationsprofil für den stationären Stofftransport aus einer nur aus Komponente A bestehenden Blase

Komponente A, ist die Konzentration von A im Inneren konstant. Ein Gradient bildet sich also nur in der umgebenden Phase aus. Im allgemeinen Fall ist der Stofftransport an Blasen instationär. Befinden sich zusätzlich weitere Komponenten in der Blase, so bildet sich auch im Inneren ein Konzentrationsprofil aus. Abbildung 3.2 zeigt den Konzentrationsverlauf zu Beginn ($t = t_0$) und zu einem beliebigem Zeitpunkt $t_1 > t_0$.

Wie bereits oben erwähnt, ist das Phänomen des Stofftransports äußerst komplex

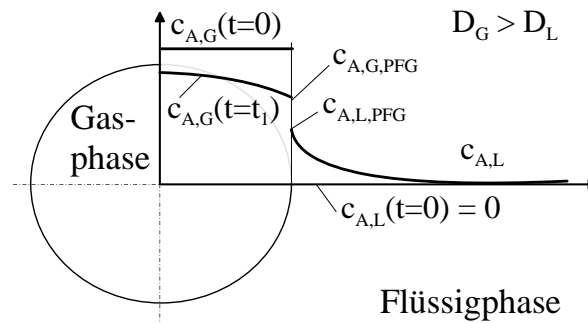


Abbildung 3.2.: Konzentrationsprofil für den instationären Stofftransport aus einer aus mehreren Komponenten bestehenden Blase

und die zugehörigen Modellgleichungen sind im allgemeinen Fall nicht analytisch lösbar. Unter den vereinfachenden Annahmen, daß

- eine sphärische Blase vorliegt
- Stoffgrößen, Blasenvolumen und Durchmesser konstant bleiben,
- keine weiteren Stoffquellen in der Flüssigkeit vorhanden sind,
- die Dichte des Gemisches als konstant angesehen werden kann und die Strömung nicht durch den Stoffübergang beeinflusst wird,
- der molekulare Transport durch Fick'sche Diffusion erfolgt und
- das Geschwindigkeitsfeld um die Blase zeitlich konstant und bekannt ist,

kann der instationäre Stofftransport durch die Theorie nach [Brauer \(1971b\)](#) beschrieben werden. Durch die Annahme der sehr kleinen Stoffstromdichte wird die Strömung durch den Stofftransport nicht beeinflusst. Daher kann zur Berechnung des Stofftransports das bekannte Strömungsfeld verwendet werden. Das Strömungsfeld läßt sich beispielsweise für schleichende Strömungen mit dem Ansatz von Hadamard und Rybczynski (s. Kapitel [9.3.2](#)) bestimmen. Brauer gibt für beide Phasen die Diffusionsgleichungen für die übergehende Spezies an. Das Konzentrationsfeld

wird für beide Phasen getrennt bestimmt. Dabei werden die dimensionslosen Konzentrationen ξ in den Phasen derart gewählt, daß an der Phasengrenzfläche kein Konzentrationssprung auftritt. Die ausführliche Herleitung dieser Gleichungen und Hinweise zu deren Lösungen findet sich bei [Brauer \(1971b\)](#) und [Hong und Brauer \(1984\)](#).

Unter der Voraussetzung, daß die lokale Massenstromdichte $\dot{m}_{A,L,\theta}$ mit dem lokalen Stoffübergangskoeffizient $\beta_{L,\theta}$ gleich dem äquivalenten molaren Diffusionsstrom gemäß des Fick'schen Gesetzes ist, lassen sich die lokalen Stoffübergangskoeffizienten und die lokale Sherwood-Zahl berechnen ([Brauer 1971b](#)). Nach Gleichsetzen der lokalen Massenstromdichte

$$\dot{m}_{A,L,\theta} = \beta_{L,\theta}(\rho_{A,L,PGF} - \rho_{A,L,\infty}) \quad (3.1)$$

mit dem äquimolaren Diffusionsstrom,

$$\dot{m}_{A,L,\theta} = -D_L \left(\frac{\partial \rho_{A,L}}{\partial r} \right)_{PGF} \quad (3.2)$$

ergibt sich die örtliche Sh-Zahl zu

$$Sh_{L,\theta} = \frac{\beta_{L,\theta} \cdot d}{D_L} = -2 \left(\frac{\partial \xi_L}{\partial r^*} \right)_{PGF} \quad (3.3)$$

Durch Integration über die gesamte Kugeloberfläche ergibt sich die mittlere Sh-Zahlen zu:

$$Sh_L = \frac{1}{2} \int_0^\pi Sh_{L,\theta} \sin\theta \, d\theta \quad (3.4)$$

Hieraus wird leicht ersichtlich, daß sich Sherwood-Zahlen und mit ihnen die Stoffübergangskoeffizienten nur sehr aufwändig und nur für einfache Fälle direkt berechnen lassen. Daher wurden eine Reihe von Theorien entwickelt, mit deren Hilfe der Stofftransport über eine Phasengrenze vereinfachend beschrieben werden kann.

3.2. Zweifilm-Theorie

Die Zweifilm-Theorie oder auch Zweischichtenhypothese geht auf die Arbeit von [Lewis und Whitman \(1924\)](#) zurück. Sie geht von stark vereinfachenden Konzentrationsverläufen in beiden Phasen aus. In den Kernphasen ist die Konzentration,

bedingt durch die Turbulenz, als homogen anzusehen. Auf beiden Seiten der Phasengrenzfläche existieren sehr dünne laminare Grenzschichten der Dicke δ_i , in der (ohne chemische Reaktion) jeweils ein linearer Konzentrationsverlauf vorliegt. Dieser Ansatz ist mit laminaren Unterschichten an festen Wänden bei turbulenten Einphasenströmungen vergleichbar (Brauer 1971b).

In den Grenzschichten erfolgt Stofftransport lediglich durch Diffusion. Die Stoffübergangskoeffizienten β_i sind daher festgelegt durch

$$\beta_i = \frac{D_i}{\delta_i} \quad \text{mit} \quad i = G, L \quad (3.5)$$

mit den Diffusionskoeffizienten D_i . Ein typischer Konzentrationsverlauf für einen gelösten Stoff A ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Die Stoffstromdichte lässt sich also

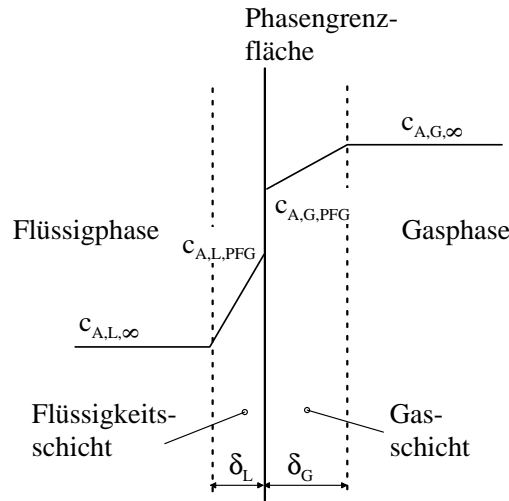


Abbildung 3.3.: Konzentrationsverlauf für einen gelösten Stoff A nach der Zwei-Film-Theorie.

in beiden Phasen bestimmen durch:

$$\dot{n}_{A,L} = \frac{D_L}{\delta} (c_{A,L,PFG} - c_{A,L}), \quad (3.6)$$

$$\dot{n}_{A,G} = \frac{D_G}{\delta} (c_{A,G} - c_{A,G,PFG}). \quad (3.7)$$

Aus Kontinuitätsgründen ist der Stoffstrom aus der Gasphase gleich dem in die Flüssigphase:

$$\dot{n}_{A,G} = \dot{n}_{A,L} = \dot{n}_A \quad (3.8)$$

und somit

$$\beta_{A,G}(c_{A,G} - c_{A,G,PGF}) = \beta_{A,L}(c_{A,L,PGF} - c_{A,L}) \quad (3.9)$$

Die Bestimmung der Stoffübergangskoeffizienten β_G und β_L erweist sich durch die unbekannten Grenzsichtdicken δ_G und δ_L als schwierig. Diese Problematik wird durch die Verwendung des Stoffdurchgangskoeffizienten k_L bzw. k_G umgangen. Dazu muß allerdings die Konzentration in der einen Phase derart umgerechnet werden, daß sie der Konzentration in der anderen Phase entspricht. Für verdünnte Lösungen, d.h. mit einer geringen Konzentration der Komponente A in der Flüssigkeit ist der Partialdruck von A an der Phasengrenze $p_{A,G,PGF}$ dem Molbruch von A in der Flüssigkeit $\tilde{x}_{A,PGF}$ proportional. Gemäß experimenteller Untersuchungen läßt sich diese Gesetzmäßigkeit ausdrücken durch ([Brauer 1971b](#)):

$$He = \frac{p_{G,A,PGF}}{\tilde{x}_{A,L,PGF}} \quad (3.10)$$

Die Henry Konstante He hängt von der Temperatur T , der Art der Komponente A und der Flüssigkeit ab. Sie ist jedoch weitgehend unabhängig von Gesamtdruck und der Konzentration weiterer Gemischkomponenten, sofern diese gering ist ([Brauer 1971b](#)). Das Henry Gesetz besagt, daß an der Phasengrenzfläche ein Konzentrationssprung von $c_{A,G,PGF}$ nach $c_{A,L,PGF}$ auftritt (vgl. Abbildung 3.3). Dieser wird durch die Henry Zahl H beschrieben:

$$H = \frac{c_{A,G,PGF}}{c_{A,L,PGF}} \quad (3.11)$$

In der Literatur existieren eine Reihe von weiteren Definitionen für die Henry-Zahlen, so daß diese ggf. umgerechnet werden müssen. So definiert Brauer ([Brauer 1971b](#)) die Henry-Zahl beispielsweise als,

$$H = \frac{(\rho_A/\rho)_{G,PGF}}{(\rho_A/\rho)_{L,PGF}} \quad (3.12)$$

Unter Zuhilfenahme der Henry-Zahl kann nun eine Umrechnung der Konzentrationen innerhalb einer Phase erfolgen. So läßt sich der aus einer Blase in die Flüssigkeit übertretende spezifischen Stoffstrom \dot{n}_A mit Hilfe des flüssigkeitseitigen Stoffdurchgangskoeffizienten k_L berechnen zu:

$$\dot{n}_A = k_L \left(\frac{c_{A,G}}{H} - c_{A,L} \right) \quad (3.13)$$

Für den gasseitigen Stoffdurchgangskoeffizienten gilt:

$$\dot{n}_A = k_G (c_{A,G} - H \cdot c_{A,L}) \quad (3.14)$$

Aus einfachen Umrechnungen ergibt sich k_L zu

$$\frac{1}{k_L} = \frac{1}{\beta_L} + \frac{1}{H \cdot \beta_G} \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{k_G} = \frac{1}{\beta_G} + \frac{H}{\beta_L} \quad (3.16)$$

Die Annahme der laminaren Grenzschicht ist jedoch nicht immer gerechtfertigt. So können in turbulenten Strömungen turbulente Strömungsballen bis an die Phasengrenzfläche transportiert werden und somit die Bildung einer laminaren Grenzschicht verhindern. Ebenfalls kann die laminare Grenzschicht durch Grenzflächenturbulenz verhindert werden ([Brauer 1971b](#)). Problematisch erweisen sich auch die Bestimmung der Grenzschichtdicken δ_i . Experimentelle Untersuchungen zeigen, daß der übergehende Stoffstrom nicht proportional zu dem Diffusionskoeffizient ist. Diese Tatsache wird in neueren Theorien berücksichtigt. Eine davon ist die Penetrations-Theorie.

3.3. Penetrations-Theorie

Die Penetrationshypothese basiert auf der Arbeit von [Higbie \(1935\)](#). Ihr liegt die Vorstellung kurzer Kontaktzeiten zwischen Gas- und Flüssigkeitsballen zugrunde. Danach gelangen Fluidballen aufgrund von Turbulenz aus dem Phaseninneren an die Phasengrenze, verweilen dort für eine kurze Zeit und werden durch andere

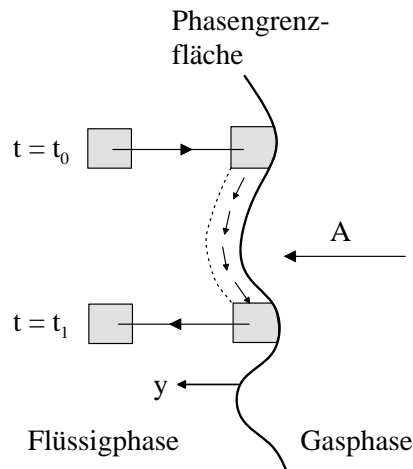


Abbildung 3.4.: Prinzip der Penetrationshypothese an einer welligen Phasengrenzfläche.

Turbulenzballen in die Kernphase verdrängt. Der Diffusionsprozeß während des Kontakts mit der Phasengrenzfläche ist instationär. Verdeutlicht wird das Prinzip der Penetrationshypothese anhand von Abbildung 3.4. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ gelangt ein Flüssigkeitselement an die Grenzfläche. Es hat die Konzentration $c_{A,\infty}$, die in hinreichend großem Abstand zur Phasengrenzfläche vorliegt. Bis zum Zeitpunkt $t = t_1$ bleibt das Element an der Phasengrenzfläche, wo Komponente A durch instationäre Diffusion in das Element eindringt. Danach gelangt das Element wieder in die tieferen Bereiche der Flüssigkeit. Die Verweilzeit ist für jedes Flüssigkeitselement identisch. Daher wird die Penetrationshypothese häufig nur für die Beschreibung laminarer Strömungen herangezogen (Brauer 1971b). Der Stofftransport in die zur Phasengrenzfläche normale Richtung y kann mit dem 2. Fick'schen Gesetz beschrieben werden:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (3.17)$$

mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen:

$$\begin{aligned} c_A &= c_{A,\infty} & \text{für } y > 0 & \text{ und } t = t_0 \\ c_A &= c_{A,PGF} & \text{für } y = 0 \\ c_A &= c_{A,\infty} & \text{für } y = \infty \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich für die örtliche Konzentration:

$$\frac{c_A - c_{A,\infty}}{c_{A,PGF} - c_{A,\infty}} = \operatorname{erfc} \left(\frac{y^2}{4D \Delta t_{PGF}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

mit der Verweilzeit an der Phasengrenzfläche Δt_{PGF} und dem Komplement der Fehlerfunktion erfc . Sie lautet für ein beliebiges Argument F

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^F e^{-x^2} dx \quad (3.19)$$

Unter Verwendung des 1. Fick'schen Gesetzes und Gleichung (3.18) ergibt sich nach Integration über die Verweilzeit t_0 bis t_1 :

$$\dot{n}_A = \left(\frac{4D}{\pi \Delta t_{PGF}} \right) (c_{A,PGF} - c_{A,\infty}), \quad (3.20)$$

bzw.

$$\beta_L = \sqrt{\frac{4D}{\pi \Delta t_{PGF}}} \quad (3.21)$$

Während in der Zwei-Film Theorie der Stoffstrom proportional zum Diffusionskoeffizienten ist, ist er nach der Penetrations-Theorie proportional zu dessen Wurzel. Häufig bewährt hat sich die Penetrations-Theorie bei der Beschreibung der Stoffübertragung in Rieselfilmen, Blasen und Tropfen (Mersmann 1985). Für aufsteigende Blasen berechnet sich die Verweilzeit aus $\Delta t_{PGF} = d_B/w_B$. Eine wesentliche Voraussetzung für die Penetrations-Theorie ist das Vorhandensein geringer Penetrationstiefen im Bereich konstanter Fluidgeschwindigkeit. Dies ist bei der Anreicherung der Flüssigkeit mit übergehendem Stoff jedoch nicht mehr gegeben. Liegt zusätzlich zum Stoffübergang noch eine schnelle chemische Reaktion vor, so nimmt die Penetrationstiefe ab und die physikalischen Vorgänge können i.A. gut mit der Penetrations-Theorie beschrieben werden (Mersmann 1985).

Oberflächenenerneuerungs-Theorie

Mittlerweile existieren in der Literatur eine Reihe von Erweiterungen der Penetrations-Theorie. In der sogenannten Oberflächenenerneuerungs-Theorie geht Dankwerts (1951) von unterschiedlichen Verweilzeiten der an der Phasengrenzfläche in Kontakt tretenden Fluidelementen aus. Eine ausführliche mathematische Untersuchung

dieses Modells findet sich bei [Desch und Prüß \(1994\)](#). Berücksichtigt werden die unterschiedlichen Verweilzeiten mit einer exponentiellen Verteilungsfunktion ψ :

$$\psi = s \cdot e^{(-s \cdot \Delta t_{PGF})} \quad (3.22)$$

Mit dem Grenzflächenenerneuerungsfaktor s ergibt sich für den flüssigkeitseitigen Stoffübergangskoeffizient β_L :

$$\beta_L = \sqrt{D_L \cdot s} \quad (3.23)$$

Der Faktor s setzt die pro Zeiteinheit erneuerte Fläche zur gesamten Phasengrenzfläche ins Verhältnis, sein Wertebereich liegt zwischen 0 und 1. Aussagen über den Grenzflächenenerneuerungsfaktor s können aus Experimenten oder aus diversen Turbulenzmodellen gewonnen werden, z.B. dem Makrowirbelmodell von [Pearson und Fortescue \(1967\)](#), dem Mikrowirbelmodell von [Lamont und Scott \(1970\)](#) oder dem Wirbeldiffusionsmodell von [Levich \(1962\)](#).

In der Film-Penetrationstheorie kombinierten [Torr und Marchello \(1958\)](#) die Filmtheorie nach Lewis und die Oberflächenenerneuerungs-Theorie von [Dankwerts \(1951\)](#). Danach gilt

$$\beta_L = \left(\frac{D_L}{\pi \Delta t_{PGF}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \delta_L}{D_L \cdot \Delta t_{PGF}}\right) \right] \quad (3.24)$$

Für kurze Verweilzeiten geht Gleichung(3.24) in Gleichung (3.21) und für lange Verweilzeiten in Gleichung (3.5) über.

3.4. Sherwood Korrelationen

Für praktische Anwendungen sind diese Theorien jedoch nicht immer geeignet, da sie z.T. unbekannte Variablen enthalten, die abgeschätzt oder angepaßt werden müssen. Daher wird zur Beschreibung des Stoffübergangs aus einer Blase oder einem Tropfen häufig die Sherwood-Zahl durch empirische Gleichungen, beispielsweise von der Form $Sh = 2 + C_1 \cdot Re^m Sc^n$ wiedergegeben. Nachfolgend sollen hier einige geläufige Ansätze vorgestellt werden, die auf analytischen oder experimentellen Untersuchungen basieren.

Für den Bereich der schleichenden Strömung ($Re < 1$) gilt für Sphären mit starrer Oberfläche nach [Brauer \(1971b\)](#)

$$Sh = 2 + \frac{0,33(Re \cdot Sc)^{0,84}}{1 + 0,331(Re \cdot Sc)^{0,507}} \quad (3.25)$$

und nach [Glaeser und Brauer \(1977\)](#)

$$Sh = 2 + \frac{0,651(Re \cdot Sc)^{1,72}}{1 + (Re \cdot Sc)^{1,22}} \quad (3.26)$$

Für $ReSc \rightarrow 0$ ergibt sich der theoretische Grenzwert von $Sh = 2$. Für $ReSc \rightarrow \infty$ (d.h. $Sc \rightarrow \infty$ da $Re < 1$) liefert Gleichung (3.26) den theoretischen Grenzwert von [Levich \(1962\)](#)

$$Sh = 0,65(Re \cdot Sc)^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

Für den Fall der Potentialströmung um eine Kugelblase gilt nach [Oellrich u. a. \(1973\)](#)

$$Sh = 2 + \frac{0,232(Re \cdot Sc)^{1,72}}{1 + 0,205(Re \cdot Sc)^{1,22}} \quad (3.28)$$

Für formdynamische Blasen gilt nach [Hong und Brauer \(1984\)](#)

$$Sh = 2 + 1,5 \cdot 10^{-2} Re^{0,89} Sc^{0,7}. \quad (3.29)$$

Durch Anpassung an eine große Zahl von Meßwerten erhält [Brauer \(1971b\)](#) eine empirische Gleichung für den Bereich von $1 \leq Re \leq 5000$ und $480 \leq Sc \leq 1,37 \cdot 10^7$:

$$Sh = 2 + 9,45 \cdot 10^{-4} Re^{1,07} Sc^{0,888}. \quad (3.30)$$

Einen guten Überblick über weitere Korrelationen für die Stofftransportkoeffizienten für einzelne Tropfen liefern [Kumar und Hartland \(1999\)](#).

4. Versuchsaufbau und -durchführung

Zur Validierung der Simulationen von aufsteigenden Blasen dienen Experimente an Einzelblasen, die in einer Blasensäule in ruhender Flüssigkeit aufsteigen. Durchgeführt wurden die Experimente am Institut für Umweltverfahrenstechnik (IUV) der Universität Bremen.

4.1. Versuchsaufbau zur Untersuchung des Blasenauftiegs

Ziel der Versuche ist jeweils die Bestimmung der Aufstiegsgeschwindigkeit, der Blasenbahn und der Exzentrizität von verschiedenen Blasen in ruhender Flüssigkeit. Die verwendete Anlage in Abbildung 4.1 besteht aus der Blasensäule (B1) aus Acrylglas, den Kapillaren zur Blasenenerzeugung (D1 und D2) und zweier Schlauchpumpen (P1 und P2). Die zylindrische Blasensäule hat einen Innendurchmesser von 190 mm und ist von einem quadratischen Temperiermantel umgeben. Dieser verhindert zusätzlich eine optische Verzerrung. Ein Deckel auf der Blasensäule sorgt dafür, daß Staub und andere Verschmutzungen nicht in das Wasser gelangen können. Die Versuchsflüssigkeit kann über das Ventil V1 abgelassen werden. In der Blasensäule sind Verschraubungen für die beiden Kapillaren angebracht. Die Zuleitungen der Kapillaren werden mit zwei Dreiwegeventilen versehen, über die das Wasser entweder in die Blasensäule oder in den Abfluß geleitet werden kann. Die Aufnahmen der Blasen und deren Bewegungen erfolgt über zwei zueinander senkrecht angeordneten CCD-Kameras (K1 und K2), die über einen Computer angesteuert werden. Das Auslösen der CCD-Kameras erfolgt manuell. Die Beleuchtung der Versuchsanlage wird mit dem Durchlichtverfahren realisiert, d.h. zwei zueinander senkrecht angeordneten Lichtplatten (L1 und L2) befinden sich jeweils hinter der Blasensäule

4. Versuchsaufbau und -durchführung

und gewährleisten eine homogene Durchleuchtung der Blasensäule.

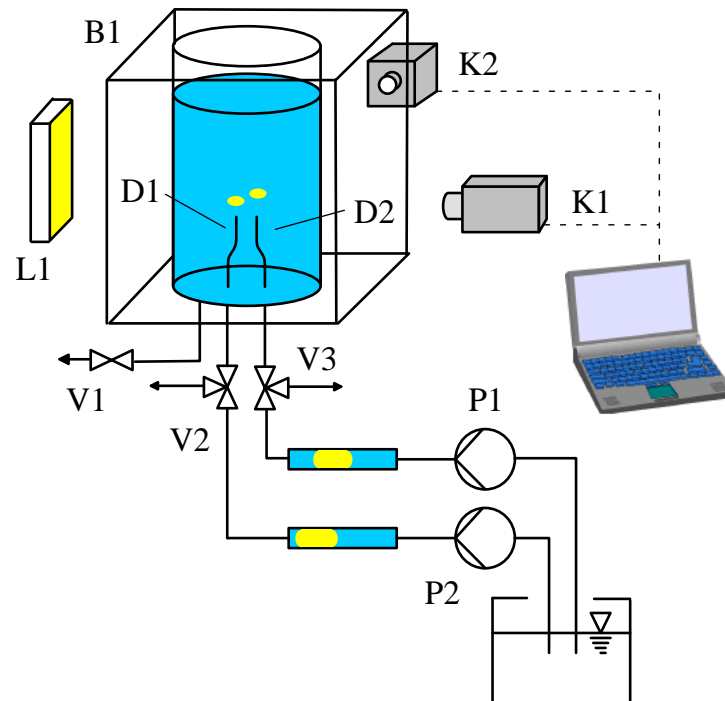


Abbildung 4.1.: Versuchsanlage zur Untersuchung aufsteigender Luftblasen

4.2. Kalibrierung der Kameras

Um einen möglichst großen Bildbereich beider Kameras sicherzustellen, werden die CCD-Kameras in einem Abstand von jeweils 92cm von den Kapillaren angeordnet. Zur eigentlichen Kalibrierung wird eine aus zwei Meßleisten bestehende Vorrichtung (s. Abbildung 4.2) in die Blasensäule gehängt. Die Meßleisten sind um 1cm gegeneinander in der Tiefe versetzt. Sie werden im Winkel von jeweils 45° zu den Kameras positioniert, so daß sie von beiden Kameras simultan erfaßt werden können. Der Bildausschnitt der Meßleisten, den die beiden Kameras liefern, soll möglichst identisch eingestellt werden, um einen maximalen gemeinsamen Meßbereich zu gewährleisten.

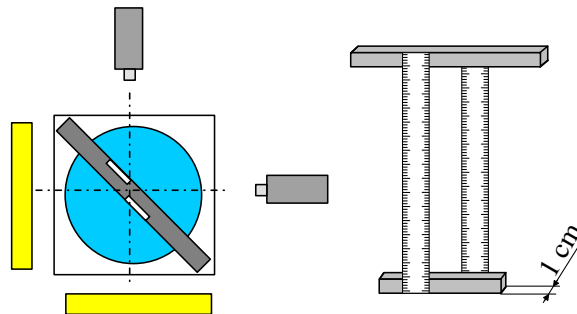


Abbildung 4.2.: Meßbleite und deren Positionierung

4.3. Versuchsdurchführung

Nach gründlicher, mehrmaliger Reinigung der gesamten Anlage erfolgt das langsame Auffüllen der Blasensäule und der Leitungen mit bidestilliertem Wasser. Dieser Vorgang dauert ca. 15 Minuten. Zum einen wird somit die durch das Befüllen entstehende Turbulenz im Wasser gering gehalten, zum anderen wird das Wasser mit Luft gesättigt. Zusätzlich wird das Wasser einige Minuten mit Luft begast. Da eine Kontaminierung des Wassers durch Schmutzpartikel in der Luft und die Versuchsdurchführung (z.B. durch die Temperaturmessung im Wasser) nicht auszuschließen ist, wird das Wasser alle zwei Tage ausgetauscht. Für die eigentlichen Versuche wird die Luft direkt über der Wasseroberfläche eines Vorratsbehälters derart angesaugt, daß abwechselnd große Mengen an Wasser und kleine Mengen an Luft durch die Schlauchpumpen gefördert werden. Die Pumpen transportieren die Luft bis in die Nähe der Dreiwegeventile V1 und V2. Das Wasser gelangt dabei nicht in die Blasensäule, sondern in den Abfluß. Dies hat den Vorteil, daß das Wasser nicht in die Blasensäule gelangt und somit dort keine Flüssigkeitsbewegungen induziert. Nach Umstellen der Ventile fördern die Pumpen die Luft bis in die Kapillaren. Da es sich hierbei nur um kleine Luftmengen handelte und der Zeitraum zwischen Luftansaugung und der Auslösung der Blase ca. 5 Minuten beträgt, kann hier von einer Sättigung der Luft mit Wasserdampf ausgegangen werden. Die Steuerung der Schlauchpumpen erfolgt derart, daß sie die Luft so weit fördern, daß eine Luftblase auf den Kapillaren entsteht, die sich jedoch nicht ablöst. Die Ablösung der Luft-

blase geschieht durch einen mechanischen Impuls. Gleichzeitig werden die Kameras manuell aktiviert.

4.4. Methode zur Erfassung der Blasenbewegung

Der Aufstieg von Blasen ist ein transients Vorgang, in dem lokale Phänomene eine starke Rolle spielen. Die Untersuchung erfordert ein berührungsloses Meßverfahren mit hoher zeitlicher und räumlicher Auflösung. Folgende Größen müssen durch die Meßtechnik erfaßt werden:

- Blasengröße und Blasenform,
- Position und Bahnen der Blasen,
- Absolut- und Relativgeschwindigkeiten.

Für geringe Gasgehalte und für die hier durchgeführten Untersuchungen mit Einzelblasen bieten sich optische Meßverfahren an. Zeitlich und örtlich hochauflösende Kameras bieten den Vorteil, daß die Blasenform und physikalische Zusammenhänge qualitativ und Geschwindigkeitsvektoren quantitativ wiedergegeben werden können. Das hier verwendete Meßverfahren beruht auf dem Prinzip der 3D-Particle Tracking Velocimetry (3D-PTV) und erfüllt alle obigen Anforderungen.

Prinzip der 3D-Particle Tracking Velocimetry (3D-PTV)

Alle hier untersuchten Blasen haben einen Durchmesser von über 2mm. Folglich kann nicht mehr von sphärischen oder rotationssymmetrischen Formen ausgegangen werden. Die Aufstiegsbahnen variierten zwischen spiralförmigen, zickzackförmigen Bewegungen oder einer Mischung aus beiden Bewegungsbahnen. Diese Tatsachen erfordern eine räumlich und zeitlich hohe Auflösung. Die Erfassung der Blasenbewegung erfolgt durch zwei zueinander senkrecht zur Meßstrecke angeordnete CCD-Kameras vom Typ TM 6701 der Firma Pulnix, die an einen MVFG-Inspecta Grabber der Firma MIKROTRON, Echingen, angeschlossen sind (vgl. Abbildung [4.2](#)).

Die Kameras zeichnen Bilder von jeweils 648x484 Pixeln mit 60 Aufnahmen pro Sekunde auf. Durch ein in der Programmiersprache C verfaßtes Hilfsprogramm werden die aufgenommenen Bilder in den Bildspeicher geschachtelt. Dabei werden die CCD-Chips der beiden Kameras abwechselnd ausgelesen und zwei Bilder synchron in den Bildspeicher geschachtelt. Dadurch können die Bilder abwechselnd chronologisch aufgerufen werden. Eine besondere Implementierung zweier unabhängiger Bildspeicher ermöglicht eine hohe Aufnahmegeschwindigkeit bei 60 Bildern pro Sekunde. Die CPU des Rechners verfügt ständig über uneingeschränkten, wahlfreien Zugriff auf die Bilddaten in einem der beiden Speicherblöcke, während in dem anderen neue Bilddaten aufgenommen werden. Nachdem aus dem lokalen Bildspeicher von 32 MB die Daten in den Arbeitsspeicher von ebenfalls 32 MB übertragen worden, können die Doppelbilder zur weiteren Verarbeitung abgespeichert werden. Die Aufnahmezeit von ca. 25 Millisekunden reicht aus, um die Blasen durch den Bildausschnitt vollständig zu verfolgen.

Bildanalytische Auswertung

Das verwendete System zeichnete pro Kamera jeweils 25 Bilder pro beobachteter Blase auf. Unter Verwendung des halbautomatischen Programms OPTIMAS der Firma Bio Scan Incorporation zur Bildanalyse werden folgende Charakteristika der Blasen ausgewertet:

- Blasenäquivalentdurchmesser,
- Blasenform,
- Blasenauftstiegsgeschwindigkeit,
- Flächenschwerpunkte.

Das Programm liest die zuvor für die Kalibrierung gemachten Aufnahmen der Meßleisten ein und vermißt diese bildanalytisch. Das Programm rechnet dann Pixelgrößen in Längenmaße um. Bedingt durch die Tatsache, daß die beiden Meßleisten um 1cm versetzt angeordnet sind und aus zwei Perspektiven aufgenommen werden, ist der Meßbereich pro Meßleiste unterschiedlich groß auf den Kalibrierbildern dargestellt. So entspricht auf dem Bild der Meßleiste eine reale Distanz von 8cm

4. Versuchsaufbau und -durchführung

auf der vorderen 9,432 und auf der hinteren 9,591 Längeneinheiten. Da eine nicht geradlinig aufsteigende Blase sich innerhalb eines größeren Bereichs bewegt ist es nicht möglich, diesen Fehler zu korrigieren. Folglich sind alle Auswertungen mit einem Fehler von 1,7% behaftet.

Nach der Kalibrierung wird in einem zuvor festgelegten Bereich in OPTIMAS anhand eines Grauwertgradienten die Blasenkontur automatisch ermittelt. Ggf. müssen falsch erkannte Blasen manuell eingezeichnet oder gelöscht werden. Anhand der erkannten Blasenform und Position können dann obige Blasencharakteristika bestimmt und in eine Datei geschrieben werden. Die Auswertungen der Versuche basieren auf den nachfolgende Grundlagen.

Bestimmung des Äquivalentdurchmessers

Der Äquivalentdurchmesser d_B gibt den Durchmesser einer volumengleichen Kugel wieder. Die besondere Problematik der Bestimmung des Äquivalentdurchmessers liegt darin, daß sich die Blasen ständig regellos verformen und somit permanent eine veränderliche Projektionsfläche liefern. Unter der Annahme der Rotationssymmetrie kann mit Hilfe der Projektionsflächen und der 2. Guldinschen Regel das Volumen bestimmt werden:

Die 2. Guldinsche Regel besagt, daß das Volumen eines Rotationskörpers aus dem Produkt des Flächeninhaltes A_F der durch die Rotationsachse halbierten Fläche und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Fläche S_F bei einer vollen Umdrehung beschreibt, berechnet werden kann (s. Abbildung 4.3) (Beitz und Küttner 1995). Die Rotationsachse verläuft dabei durch das Volumen.

Das Programm OPTIMAS bestimmt den Flächeninhalt A_F durch Aufsummierung der Pixel innerhalb der zuvor bestimmten Blasenkontur. Die Bestimmung des Abstandes r zwischen dem Flächenschwerpunkt S_F der halbierten Fläche und der Rotationsachse erfolgt durch Subtraktion der vertikalen Schwerpunktkoordinaten von der Gesamtfläche und der halbierten Fläche (vgl. Abbildung 4.3).

Mit Hilfe der 2. Guldinschen Regel

$$V = A_F 2\pi r \tag{4.1}$$

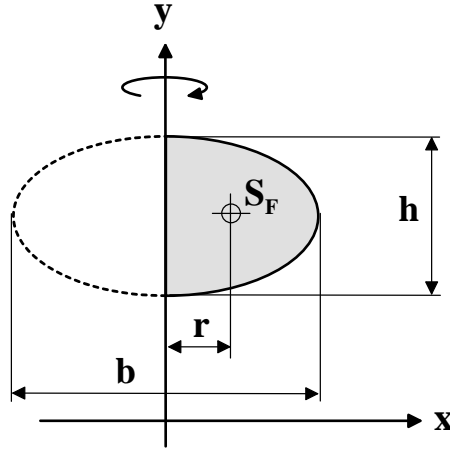


Abbildung 4.3.: Volumenberechnung eines rotationssymmetrischen Körpers aus einer 2D-Ansicht mit Hilfe der 2. Guldinschen Regel

kann der äquivalente Durchmesser einer volumengleichen Kugel wie folgt berechnet werden:

$$d_B = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} = \sqrt[3]{12 A_F r} \quad (4.2)$$

Bedingt durch die Tatsache, daß Wasser eine geringe Viskosität aufweist, weisen Blasen ab einer bestimmten Größe formdynamische Oberflächen auf. Die Guldinsche Regel ist hier nur noch beschränkt anwendbar. Charakterisiert wird die 2D Projektion der Blasenform durch die Exzentrizität E , die das Verhältnis der maximalen Blasenbreite b zur maximalen Höhe h angibt:

$$E = \frac{b}{h} \quad (4.3)$$

Die Differenz zwischen den Absolutwerten der horizontalen Blasendurchmesser bei der Kameraansichten liefert die Abweichung x_{rot} von der Rotationssymmetrie gemäß folgendem Zusammenhang:

$$x_{rot} = |d_{hor,A} - d_{hor,B}| \quad (4.4)$$

Je kleiner die Abweichung, desto besser greift die 2. Guldinsche Regel.

4. Versuchsaufbau und -durchführung

Ermittlung der Blasenkoordinaten und der Blasenauftiegs geschwindigkeit

Die senkrechte Anordnung der beiden Kameras und die Kenntnis der Flächenschwerpunktkoordinaten ermöglichen aufgrund der identischen z-Koordinate eine eindeutige räumliche Zuordnung für jedes Bilderpaar einer Aufnahmesequenz. Durch die Kenntnis des Blasen volumenschwerpunktes können somit die Blasenbewegungsbahnen innerhalb einer Sequenz rekonstruiert werden. Da die Aufnahme frequenz der Kamera mit $f_{BWF} = 60 \text{ Hz}$ bekannt ist, lassen sich aus den bekannten räumlichen Koordinatendifferenzen $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ die Absolutgeschwindigkeiten in allen drei Raumrichtungen nach folgenden einfachen Beziehungen $w_x = f_{BWF} \Delta x$, $w_y = f_{BWF} \Delta y$ und $w_z = f_{BWF} \Delta z$ errechnen. Die mit der Versuchsanlage durchgeführten Experimente werden im anschließenden Kapitel vorgestellt. Die Auswertungen beruhen auf den obigen Grundlagen.

5. Experimente

Mit der zuvor beschriebenen Versuchsanlage werden die Blasen zunächst mit einer dünnen Glaskapillare ($d_i = 0,38\text{mm}$) erzeugt. Die so erzeugten Blasen weisen eine sehr enge Größenverteilung von $d_B = 3,0 - 3,5\text{mm}$ auf. Ihre Aufstiegsgeschwindigkeit ist zwar hoch, doch liegen die Werte unterhalb der für reines Wasser zu erwartenden Werte. Nach einer Reihe von Durchläufen wird ein größerer Düsendurchmesser ($d_i = 3,1\text{mm}$) für die Blasenenerzeugung gewählt, um eine weitere Größenverteilung zu gewährleisten. Die mit der dickeren Düse erzeugten Blasen zeigen eine viel breiteres Durchmesserpektrum. Dieser variiert zwischen $d_B = 2,7 - 6,5\text{mm}$. Auch liegt eine viel größere Streuung der Aufstiegsgeschwindigkeit vor (s. Abbildung 5.1). Ein direkter Vergleich der Geschwindigkeiten für Blasen mit einem Durch-

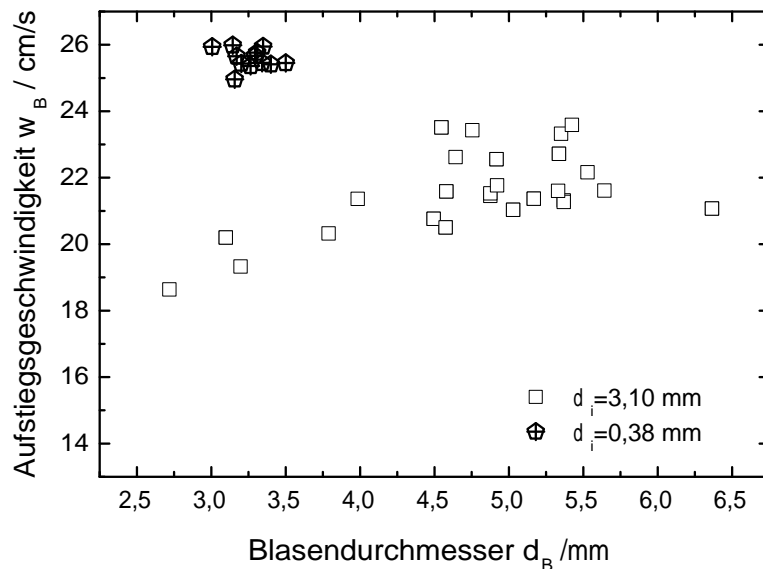


Abbildung 5.1.: Aufstiegsgeschwindigkeiten von Einzelblasen in reinem Wassers

messer von $d_B = 3\text{mm}$ zeigt stark unterschiedliche Werte in direkter Abhängigkeit des Düsendurchmessers d_i . Die Bestimmung der Aufstiegsgeschwindigkeit erfolgt in einem Bereich von $8 - 18\text{cm}$ oberhalb der Düse; in diesem Bereich haben alle untersuchten Blasen ihre stationäre Geschwindigkeit in guter Näherung erreicht. Der Unterschied muß folglich mit der Blasenerzeugung verbunden sein. Die schematische Darstellung in Abbildung 5.2 zeigt die Blasenform kurz vor dem Ablösen von der Düse. Bei der dünnen Düse ist die Blase stark deformiert und gestreckt.

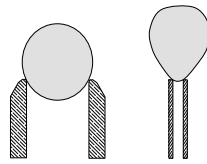


Abbildung 5.2.: Blasenform unmittelbar vor dem Ablösen von den zwei unterschiedlichen Düsen.

Nach unten bildet sich ein langgestreckter Bereich aus. Hingegen weist die Blase bei größerem Düsendurchmesser eine wesentlich rundere Anfangsform auf. Eine stärkere Anfangsdeformation führt also zu höheren Aufstiegsgeschwindigkeiten.

Geringere Aufstiegsgeschwindigkeiten werden typischerweise auf Verschmutzungen im System zurückgeführt. Die hier gezeigten Ergebnisse sind jedoch teilweise am gleichen Tag in identischer Flüssigkeit durchgeführt worden, so daß das unterschiedliche Verhalten nicht auf Verschmutzungen zurückzuführen ist.

Diese Beobachtungen decken sich mit denen von Tomiyama u. a. (2002) gemachten. Schlüter (2002) führte an einer ähnlichen Anlage mit identischer Meßtechnik Messungen zur Aufstiegsgeschwindigkeit in *Leitungswasser* durch. Das Bremer Leitungswasser hat einen hohen Reinheitsgrad (1 Grad dt. Härte). Demnach müßten die Aufstiegsgeschwindigkeiten nahe denen von reinem Wasser sein. Die Ergebnisse von Schlüter sind zusammen mit eigenen Meßwerten in das Diagramm nach Clift u. a. (1978) eingefügt. Dargestellt sind nur die beiden Berandungskurven nach Gaudin (1957). Die experimentellen Werte für reines Wasser streuen um die obere Kurve (vgl. Abbildung 2.3). Wie aus Abbildung 5.3 zu entnehmen ist, liegen Schlüters Meßwerte noch über denen von Clift u. a. für reines Wasser. Messungen

Schlüters in tensidhaltigem Wasser ($\sigma = 0,033\text{N/m}$) liegen im Bereich der eigenen Messungen für destilliertes Wasser. Da die Luftblasen von Schlüter mit Schnell-

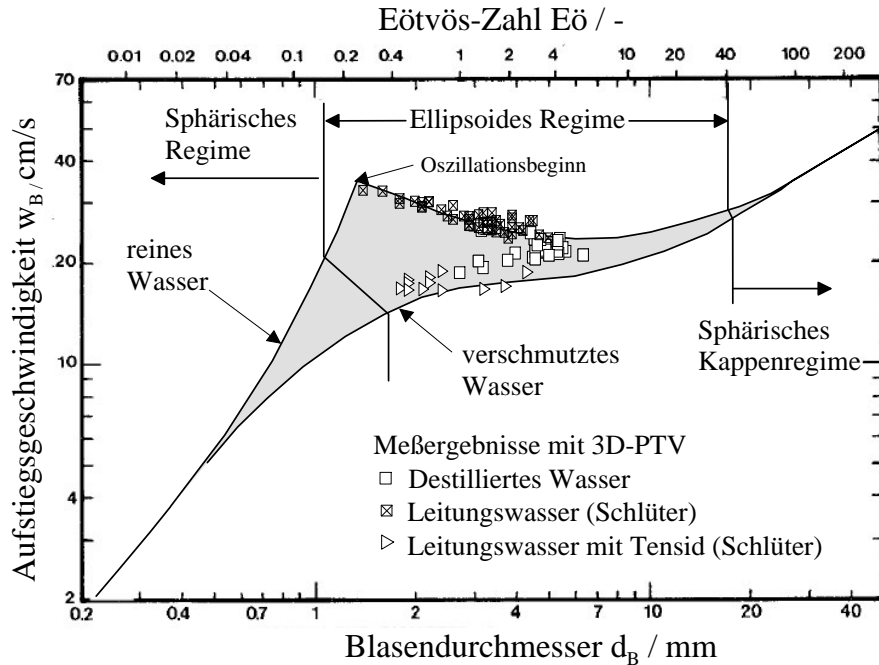


Abbildung 5.3.: Experimentell ermittelte Aufstiegs geschwindigkeiten für Luftblasen in reinem und verschmutzten Wasser.

schlußventilen erzeugt werden, ist anzunehmen, daß beim Schließen der Ventile die Blasen einer starken Deformation unterworfen werden, was zu diesen für Leitungswasser sehr hohen Geschwindigkeiten führt. Diesen Ergebnissen zufolge, hat die Art der Blasenerzeugung einen wesentlich größeren Einfluß als bisher angenommen. Er liegt in der Größenordnung des Einflusses der Verschmutzung des Wassers.

Die gemessenen Werte sollen nun mit den Modellen zur Vorausbestimmung der Aufstiegs geschwindigkeit verglichen werden. Dazu werden zusätzlich Meßergebnisse der Aufstiegs geschwindigkeiten von Einzelblasen für unterschiedliche Durchmesser von Duineveld (1995) in hochreinem Wasser in den drei folgenden Abbildungen eingefügt. Zusätzlich sind noch Messungen von Schlüter in wäßriger Tensidlösung eingezeichnet ($\sigma = 0,033\text{N/m}$). Die Abbildungen 5.4 bis 5.6 zeigen die in Kapitel 2.2.1 beschriebenen Modelle zur Bestimmung der Aufstiegs geschwindigkeit. Hierin

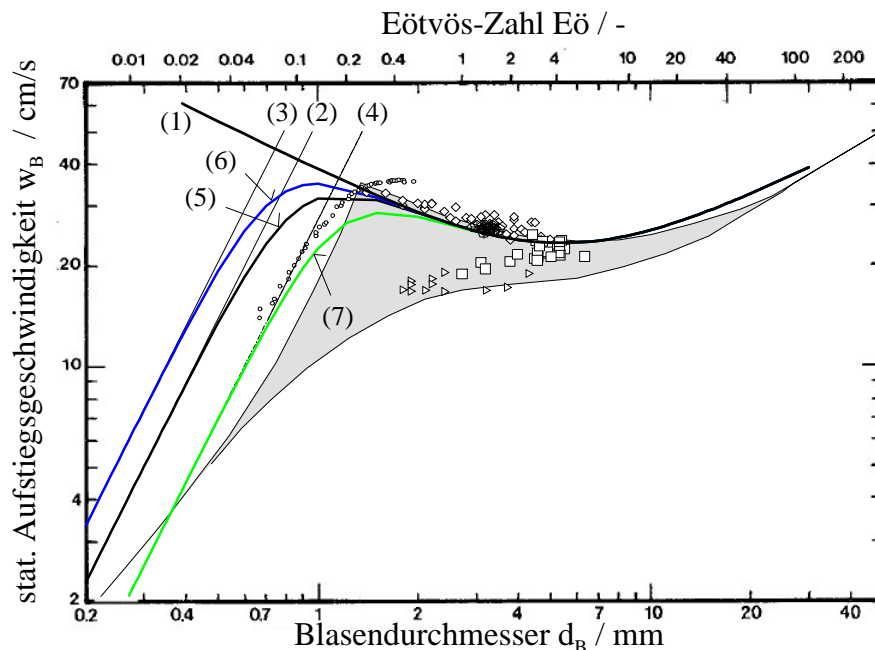


Abbildung 5.4.: Vergleich zwischen experimentell ermittelten Aufstiegsgeschwindigkeiten und Modellen zu deren Vorausbestimmung.

stellt wiederum die obere Begrenzungskurve des grauen Bereichs die Aufstiegs geschwindigkeiten in reinem Wasser dar, während die untere Begrenzungskurve bei stark kontaminierten Systemen Anwendung findet. Die obere Begrenzungskurve kann sehr gut für den Bereich $d_B > 1,3\text{mm}$ durch die Wellengleichung nach Tomiyama u. a. (Gleichung 2.31) mit Kurve (1) wiedergegeben werden (s. Abbildung 5.4). Für schleichende Strömungen ($Re < 1$) gelten die Modelle nach Stokes (Gleichung 2.16) (Kurve 2), Hadamard und Rybczynski (Gleichung 2.19) (Kurve 3) und Levich (Gleichung 2.21) (Kurve 4). Für den dargestellten Bereich ($d_B > 0,2\text{mm}$) haben diese Modelle keine Gültigkeit mehr. Jamialahmadi u. a. verknüpfen in ihren beiden Ansätzen (Gleichung 2.37) die Wellengleichung und die Modelle von Stokes und Hadamard und Rybszynski (s. Kurven 5 und 6). Es wird jedoch deutlich, daß die gute Übereinstimmung zwischen Modell und Meßverwerten bei Jamialahmadi u. a. auf die Art der Skalierung der Diagramme der Autoren zurückzuführen ist. Die maximale Geschwindigkeit wird bei beiden Ansätzen für viel zu kleine Durch-

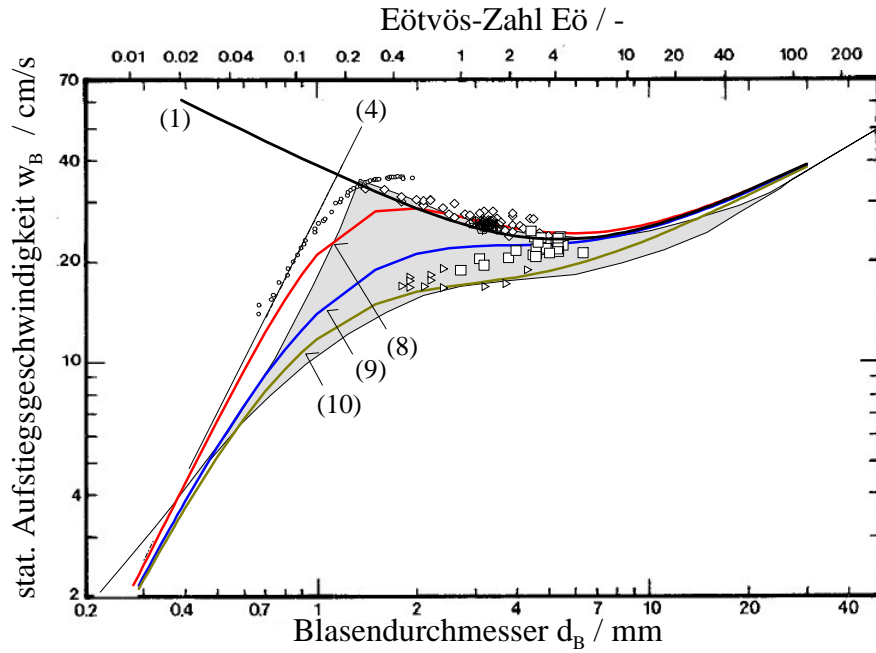


Abbildung 5.5.: Vergleich zwischen experimentell ermittelten Aufstiegsgeschwindigkeiten und Modellen zu deren Vorausbestimmung.

messer vorhergesagt. Auch liegen die Geschwindigkeiten für sphärische Blasen weit oberhalb der Meßwerte. Ein eigener Vorschlag (Kurve 7), die Verknüpfung der Wellengleichung mit dem Modell von Levich (Gleichung 2.21) liefert über weite Bereiche wesentlich bessere Ergebnisse. Jedoch sind alle drei Modelle kaum in der Lage, die Geschwindigkeiten der Experimente von Duineveld und Clift et al. für Durchmesser $d_B < 2\text{ mm}$ gut anzunähern.

Ähnliche Ergebnisse wie in dem letztgenannten Modell liefert das Modell nach Fan (Gleichung 2.35) für destilliertes Wasser (Kurve 8) in Abbildung 5.5. Durch die verschiedenen Anpassungsparameter in diesem Modell können zusätzlich die Geschwindigkeiten für Leitungswasser (Kurve 9) und kontaminiertes Wasser (Kurve 10) beschrieben werden. Wie der Abbildung zu entnehmen ist, können die Meßwerte von Schlüter für *Leitungswasser* und die eigenen Messungen in reinem Wasser mit starker Anfangsdeformation gut mit dem Ansatz von Fan für reines Wasser wiedergegeben werden. Der einzige Schwachpunkt des Modells liegt darin, daß im Bereich

von $d_B = 0,7 - 2,0 \text{ mm}$ größeren Abweichungen bis zu 10 cm/s in den Experimenten von Duineveld und Clift in hochreinem Wasser vorliegen. Der große Vorteil dieses Ansatzes ist aber, daß tensidhaltige Lösungen gut wiedergegeben werden können (vgl. Experiment Schlüter und Kurve (10) in Abbildung 5.5). Die eigenen Messungen mit geringen Anfangsdeformationen liegen z.T. unterhalb des Ansatzes von Fan für Leitungswasser (Kurve 9). Abbildung 5.6 zeigt weitere Modelle zur Bestimmung

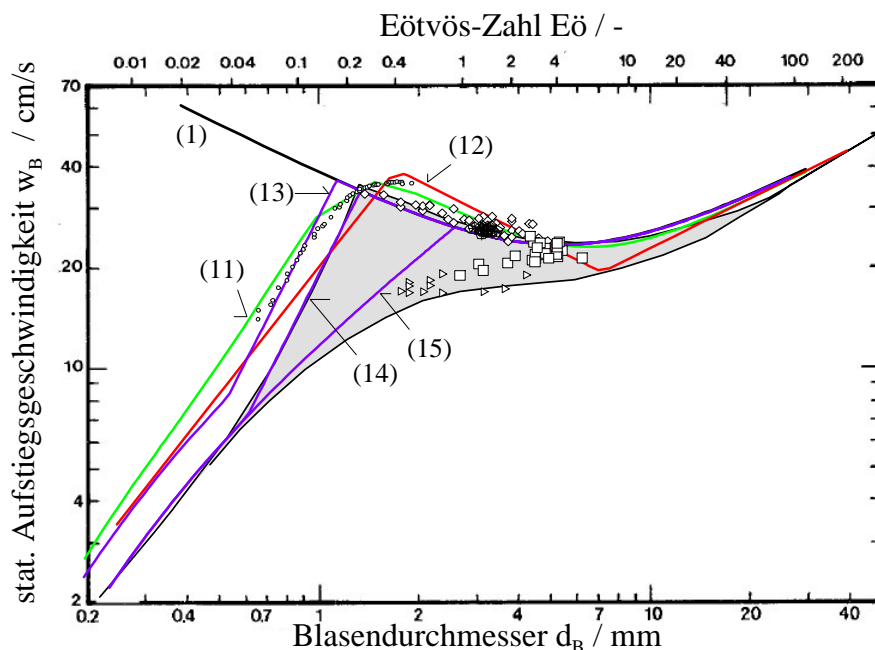


Abbildung 5.6.: Vergleich zwischen experimentell ermittelten Aufstiegsgeschwindigkeiten und Modellen zur Vorausbestimmung.

der Aufstiegsgeschwindigkeit. Kurve (11) stellt den Ansatz von Churchill (Gleichung 2.38) dar. Dieses Modell ist als einziges in der Lage, die angegebenen Aufstiegsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit des Durchmessers von Duineveld, Schlüter, Clift u. a. und aus eigenen Messungen annähernd korrekt wiederzugeben. Allerdings weist auch dieses Modell für kleinere Blasen Abweichungen zu den Experimenten auf. Gleiches gilt für das abschnittsweise definierte Modell nach Brauer (Kurve 12). Das Modell ist in der Lage, die Geschwindigkeiten in einem Bereich von $d_B B = 2 - 4 \text{ mm}$ gut wiederzugeben.

Im Bereich von $d_B = 0,5 - 2 \text{ mm}$ und $4 - 20 \text{ mm}$ sagt das Modell zu geringe Ge-

schwindigkeiten voraus. Die Kurven (13)-(15) entsprechen den aus den Modellen von Tomiyama u. a. berechneten Geschwindigkeiten für sauberes (Gleichung 2.32), leicht (Gleichung 2.33) und stark kontaminiertes Wasser (Gleichung 2.34). Abbildung 5.6 ist zu entnehmen, daß der Ansatz für reines Wasser für $d_B < 1\text{mm}$ die Meßwerte von Duineveld gut wiedergeben. Die Kurve (14) gibt den von Clift u. a. angegebenen Verlauf der Aufstiegsgeschwindigkeiten für reines Wasser sehr gut wieder, obwohl sie für leicht kontaminiertes Wasser gültig ist. Ist das Wasser stark kontaminiert, lassen sich die Geschwindigkeiten bis zu einem Durchmesser von etwa 1mm sehr gut mit dem Modell für stark verschmutzte Systeme bestimmen (Kurve 15). Durchmesser größer als 1mm werden zu hoch vorausgesagt. Ab einem Durchmesser von ca. 2,5mm sagt das Modell die nach der Wellengleichung berechneten Geschwindigkeiten voraus.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Aufstiegsgeschwindigkeiten sich sehr gut über den gesamten Bereich mit dem Ansatz von Churchill (Gleichung 2.38) vorhersagen lassen. Ebenfalls gute Ergebnisse liefert das Modell von Tomiyama u. a. vor allem für saubere Systeme. Als nachteilhaft erweist sich die Tatsache, daß die Geschwindigkeiten erst aufwendig aus den abschnittsweise deformierten Widerstandsbewegungen berechnet werden müssen, während die Gleichung von Churchill direkt anwendbar ist.

Eng an die Geschwindigkeiten gekoppelt sind die Widerstandsbeiwerte C_D der Blasen. Abbildung 5.7 gibt die Widerstandsbeiwerte als Funktion der Reynolds-Zahl Re wieder. Zusätzlich sind noch die Meßwerte von Duineveld, Schlüter und eigene Messungen dargestellt. Im Gegensatz zur Bestimmung der Aufstiegsgeschwindigkeiten liegen hierfür in der Literatur nur wenig Ansätze vor. Das abschnittsweise definierte Modell von Brauer (Kurve 1) ist in der Lage die experimentellen Widerstandsbeiwerte sehr gut wiederzugeben. Lediglich im Bereich von $Re = 400 - 700$ liegen die vorhergesagten Werte unter den experimentellen. Das Modell von Tomiyama u. a. (Kurve 2) für reine Systeme ist in der Lage für $Re < 500$ die Widerstandsbeiwerte korrekt wiederzugeben. Für größere Reynolds-Zahlen weichen Experiment und Modell z.T. stark voneinander ab, obwohl der Trend qualitativ gut wiedergegeben

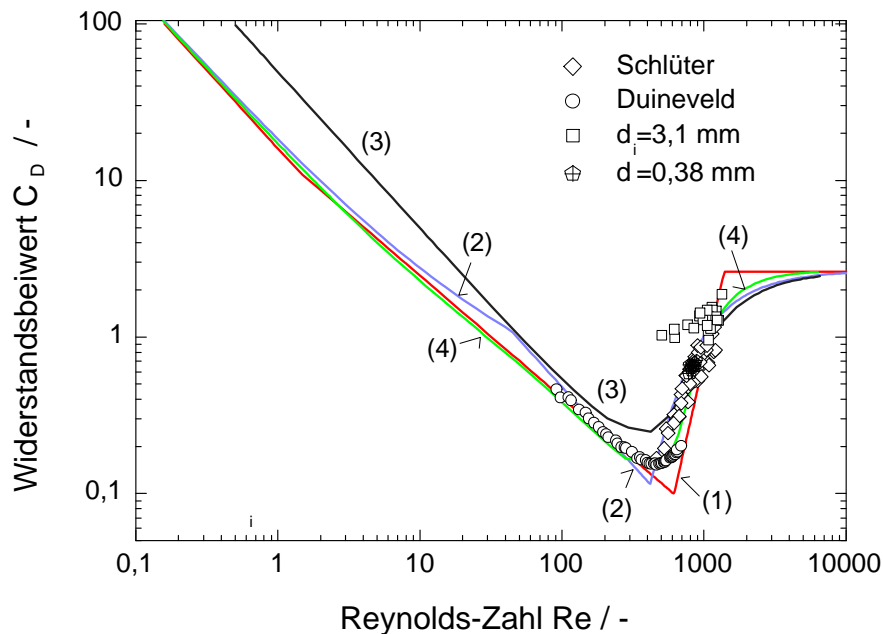


Abbildung 5.7.: Vergleich zwischen experimentell ermittelten Widerstandsbeiwerten und Modellen zu deren Vorausbestimmung.

wird. Mit dem Modell von Fan und Tsuchiya (Kurve 3) werden die Widerstandsbeiwerte bis zu einer Reynolds-Zahl von $Re \approx 700$ zu hoch vorhergesagt. Für höhere Reynolds-Zahlen kann eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten festgestellt werden. Kurve (4) stellt das Modell von Churchill dar. Als sehr nachteilhaft erweist sich die Tatsache, daß die von Churchill angegebene Gleichung nicht explizit nach dem Widerstandsbeiwert auflösbar ist. Wie auch schon für Kurve (3) stellen die dargestellten Werte nur die mit Hilfe der Gleichungen (2.12) berechneten Werte dar.

Der Einfluß der Blasenenerzeugung erstreckt sich jedoch nicht nur auf die Geschwindigkeiten, sondern auch auf die Bewegungsbahnen und Blasenform, was aus Abbildung 5.8 ersichtlich wird. Die Abbildung zeigt eine Sequenz der mit den CCD-Kameras gemachten Aufnahmen für nahezu identische Blasenäquivalentdurchmesser. Aus der Abbildung wird nicht nur ersichtlich, daß die Blase mit stärkerer Anfangsdeformation schneller aufsteigt, sondern auch größere, horizontale Auslenkungen zeigt. Zusätzlich zu der größeren vertikalen Geschwindigkeit kommt also noch eine größere horizontale Geschwindigkeit. Die Blase hat also eine viel größere ki-

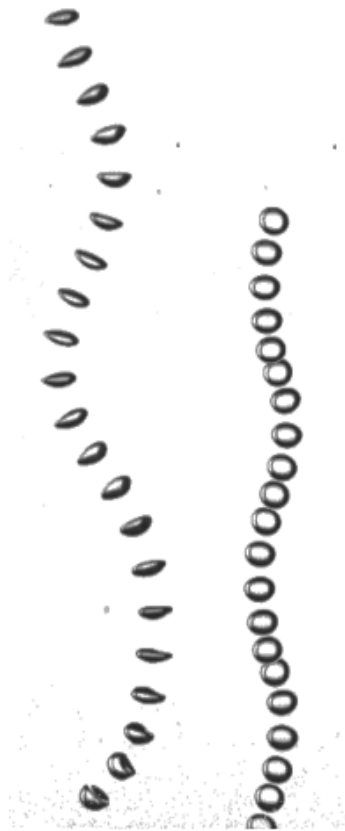


Abbildung 5.8.: Auswirkungen der Anfangsdeformation auf Blasenbahn und Blasenform einer 3mm Blase. links: starke Anfangsformation, ($w_B = 25,94 \text{ cm/s}$; $h/b = 0,53$), rechts: geringe Anfangsdeformation ($w_B = 20,16 \text{ cm/s}$; $h/b = 0,89$).

netische Energie als eine anfangs gering verformte. Eine mögliche Ursache könnte die größere Oberflächenenergie bei der Blasenzeugung sein. Weiterhin ist gut zu erkennen, daß die Blase mit anfangs geringer Deformation eine wesentlich rundere Form während des Aufstiegs vorweist, während die starke Anfangsdeformation sich in einer abgeflachteren Blasenform äußert.

Die Beobachtung der größeren horizontalen Auslenkung kann auch für die anderen Blasen vergleichbaren Durchmessers bestätigt werden. Abbildung 5.9 zeigt in einer Draufsicht exemplarische Bewegungsbahnen von gemessenen Blasen im Bereich

von $d_B = 2,7 - 3,8\text{mm}$. Alle Blasen werden in der Mitte der Säule erzeugt. Zur besseren Unterscheidung werden die Trajektorien jeweils in der Abbildung verschoben. Im rechten Teil befinden sich die Blasen mit stärkeren Anfangsdeformationen.

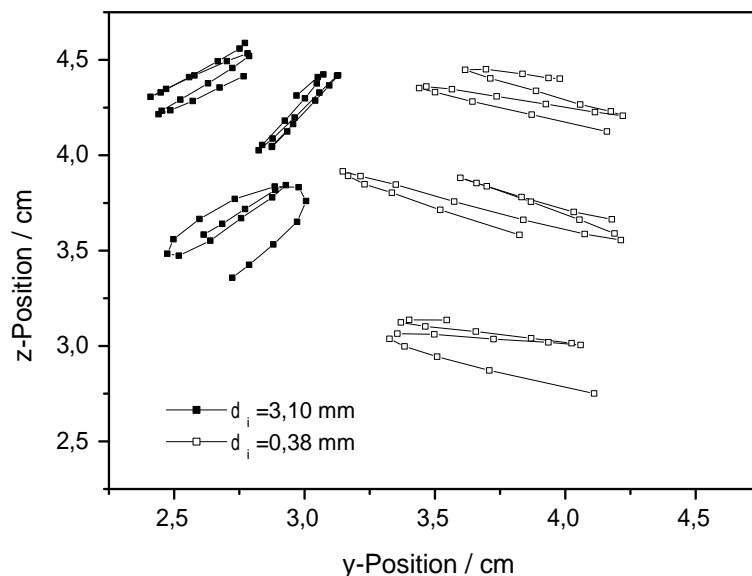


Abbildung 5.9.: Bewegungsbahnen der Blasen von $d_B = 2 - 4\text{mm}$ für zwei unterschiedliche Düsendurchmesser d_i . Links: $d_i = 0,38\text{mm}$, rechts $d_i = 3,1\text{mm}$.

Der Abbildung ist zu entnehmen, daß alle anfangs stärker deformierten Blasen eine stärkere horizontale Auslenkungen erfahren. Alle Blasen bewegen sich auf dem für diesen Bereich üblichen Zickzack Bahnen. (vgl. Kapitel 2.2.3). Bei einer Blase $d_B = 3,8\text{mm}$ kann jedoch bereits der Übergang von der Zickzack- zu der helikalen Aufstiegsbahn beobachtet werden.

Ein weiterer interessanter Aspekt ist die Exzentrizität der erzeugten Blasen. Nachfolgend soll dazu der Kehrwert der Exzentrizität - das Verhältnis von maximaler Blasenhöhe zum maximalen Blasenbreite - betrachtet werden. Wie bereits in der Abbildung 5.8 ersichtlich, behalten die anfangs stärker deformierten Blasen ihre Deformation bei.

Ein Vergleich der Durchmesserhältnisse der Blasen im Bereich von $d_B = 2,4 -$

3,8 mm zeigt einen signifikanten Einfluß der Blasenenerzeugung auf die Blasenform. Eine tabellarische Übersicht über Aufstiegsgeschwindigkeit und Form der jeweiligen Blasen findet sich im Anhang. Wie aus der Tabelle A.1 zu entnehmen ist, steigen die Blasen aus Düse 1 ($d_i = 0,38\text{ mm}$), d.h. mit einer größeren Anfangsdeformation nicht nur schneller auf, sondern haben auch ein wesentlich geringeres Durchmesser-Verhältnis h/b . Diese Beobachtung deckt sich auch mit experimentellen Ergebnissen von Tomiyama u. a. (2002). Sie ist insofern verwunderlich, weil die Blasen breiter sind und somit einen größeren Anströmquerschnitt, bzw. Strömungswiderstand darstellen. Demnach müßten sie langsamer aufsteigen. In Abbildung 5.10 sind

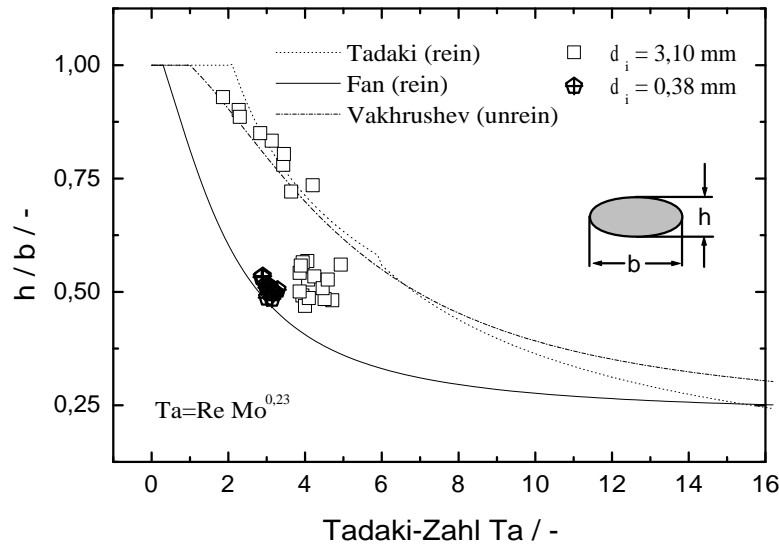


Abbildung 5.10.: Vergleich zwischen experimentell ermittelten Durchmesser-Verhältnissen und Modellen zu deren Vorausbestimmung.

die Durchmesser-Verhältnisse Korrelationen aus der Literatur gegenübergestellt. Die Tadaki-Zahl berechnet sich gemäß $Ta = Re \cdot Mo^{0,23}$. Der Abbildung ist zu entnehmen, daß anfangs stärker deformierte Blasen ($d_i = 0,38\text{ mm}$) sich nicht nur in der Aufstiegsgeschwindigkeit, sondern auch im Durchmesser-Verhältnis wie Blasen in reinem Wasser verhalten. Die h/b -Werte sind in guter Übereinstimmung mit der Korrelation von Fan und Tsuchiya (Gleichung 2.50), die für reines Wasser gilt. Viele der Werte der anfangs geringer deformierten Blase können sehr gut mit den Kor-

relationen nach Tadaki (Gleichung 2.48) und Vakhrysev und Efremov (Gleichung 2.49) beschrieben werden. Laut Fan und Tsuchiya gelten diese Korrelationen für verschmutztes Wasser. Die Werte, die auf den oberen beiden Kurven liegen entsprechen den geringeren Geschwindigkeiten in Abbildung 5.1. Der stark gestreute Bereich innerhalb von $Ta \approx 4 - 5$ in Abbildung 5.10 entspricht dem ebenfalls stark gestreuten Bereich der schnelleren aufsteigenden Blasen in Abbildung 5.1. Demnach müssen diese Blasen bei ihrer Erzeugung stärker deformiert gewesen sein, was mit den höheren Aufstiegsgeschwindigkeiten und den geringeren Durchmesser-Verhältnissen zu erklären ist.

Ein weiterer interessanter Aspekt beim Aufstieg von größeren Blasen ist das Auftreten von Oberfläche- bzw. Kapillarwellen. Ihre Entstehung lässt sich nach Tsuchiya u. a. (2001) wie folgt erklären: Wird der untere Rand der Blase von der Strömung stark nach unten gezogen, wird die Blase dort sehr dünn. Dies geht mit einer starken Erhöhung der lokalen Krümmung ($1/r$) und somit auch der Oberflächenspannungskräfte (σ/r) einher. Reduziert sich die durch die Strömung ausgeübte Kraft auf diesen Bereich der Blase, schnellt der zuvor gestreckte Bereich zurück und löst damit die Oberflächenwellen aus, die sich entlang der Blase bis zum obersten Punkt der Blase ausbreiten. Der kritische Radius lässt sich aus $r_{krit} = \sigma/\rho w^2$ abschätzen (Tsuchiya u. a. 2003). Für den Fall einer Luftblase in Wasser beträgt er etwa 1mm .

Die Wellenlänge beträgt etwa $1/4 - 1/3$ der Blasenlänge und breitet sich mit etwa $1/4 - 3/4$ der Blasenlänge entlang der Blasenoberfläche aus. Diese Wellen werden nur bei Blasendurchmesser größer 4mm beobachtet. Für eine $6,5\text{mm}$ Blase konnten diese Wellen in den Experimenten beobachtet werden, wie aus Abbildung 5.11 hervorgeht. Dort ist in einer Bildsequenz die aufsteigende $6,5\text{mm}$ Blase zu sehen. Im untersten Teil der Abbildung ist die Blase stark deformiert zu sehen. In diesem Zustand bildet sich beim Zurückschnellen der starken Deformation die Oberflächenwelle (gekennzeichnet durch den Pfeil). Diese bewegt sich entlang der Blasenoberfläche zum obersten Punkt der Blase, wo sie schließlich abgedämpft wird. Zu diesem Zeitpunkt ist die Blase durch die Strömung an der gegenüberliegenden Seite wiederum stark gestreckt. Das Fortschreiten der Oberflächenwelle auf der Blasenvorderseite führt zur Bildung von kleinen Wirbeln in der Flüssigphase,

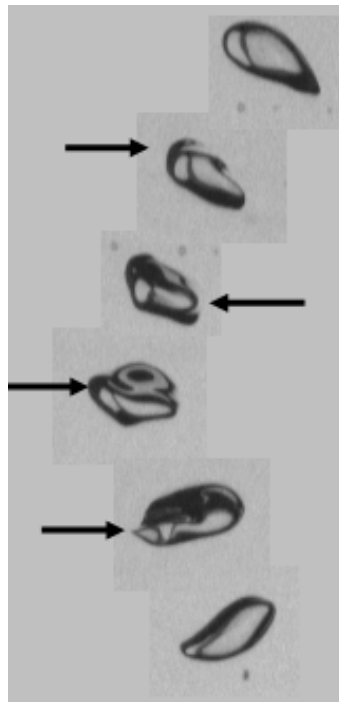


Abbildung 5.11.: Fortschreiten einer Oberflächenwelle auf einer 6,5mm Blase.

die zur Verbesserung des Stofftransports beitragen. Mit Hilfe von detaillierten Beobachtungen durch eine Hochgeschwindigkeitskamera konnten Tsuchiya u. a. eine lose Kopplung der Oberflächenwellenentstehung mit den Bahnzyklen der Blasen feststellen.

6. Stand des Wissens - Simulation

Für die numerische Simulation zur Berechnung von Zweiphasenströmungen mit dispergierten Blasen gibt es eine Reihe von verschiedenen Ansätzen, von denen die vier gängigsten nachfolgend kurz vorgestellt werden sollen. Auf die Resultate der Simulation aufsteigender Blasen wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels näher eingegangen.

6.1. Ansätze zur Simulation von Blasenströmungen

[Tomiyaama \(1998\)](#) schlägt vier unterschiedliche Ansätze bzw. Strategien von numerischen Methoden für "Computational Bubble Dynamics" vor. Als Unterscheidungs- und Bewertungskriterien gelten die räumliche Auflösung und die Anwendbarkeit auf praktische Probleme. Jede dieser Methoden hat ihre eigenen Vor- und Nachteile und muß als Ergänzung zu den jeweils anderen Methoden betrachtet werden.

Gemittelte Methoden

Die größte Anwendbarkeit auf praktische ingenieurtechnische Probleme bieten die gemittelten Methoden. Ihre Genauigkeit hingegen hängt stark von den verwendeten empirischen konstituierenden Gleichungen ab. Typische Vertreter dieser Methoden sind beispielsweise das Two Fluid, das Euler-Euler oder $(N+1)$ Fluid Modell. Diese Modelle ermöglichen die Berücksichtigung von Grenzflächen-Kopplungen, Blasen-größenverteilungen und die Anwendbarkeit auf komplexen Geometrien ([Tomiyaama 1998](#)). Schwierig ist die Beschreibung der zweiphasigen Turbulenz. Das Euler-Euler Modell ist ein Spezialfall des Two Fluid Modells. Hier wird von monodispersen sphärischen Blase mit vorgegebenem Durchmesser ausgegangen.

Die Modelle resultieren aus geeigneten Mittelungen der lokalen, kontinuumsme-

chanischen zweiphasigen Gleichungen und der zugehörigen Sprungbedingungen. Im Rahmen der Mittelung wird das Verhalten einer physikalischen Größe durch einen Mittelwert und eine die Fluktuationen beschreibende Größe ersetzt. Die gemittelten Gleichungen bestehen dann aus Korrelationen, die die Fluktuationen der verschiedenen physikalischen Größen wiedergeben. Der genaue Wert der Fluktuationen ist bekannt. Daher muß der Einfluß der Korrelationen auf die Gleichungen abgeschätzt und durch entsprechende statistische Modellterme angenähert werden. Bedingt durch die Tatsache, daß nur sehr wenige experimentelle Informationen über das transiente Verhalten der Flüssigphase innerhalb von Zweiphasenströmungen vorliegen, gestaltet sich die Bestimmung dieser Modellterme als äußerst schwierig ([Eigenberger und Sokolichin 1997](#)).

Mit Hilfe der angepaßten Modelltherme können experimentelle Messungen in Blasensäulen und Schlaufenreaktoren gut reproduziert werden (s. z.B. [Eigenberger und Sokolichin 1996, 1997](#); [Gerigk 2002](#)). Eine allgemeine Vorhersage der Hydrodynamik ist nicht möglich. Ein weiterer Nachteil dieser Modelle ist die Tatsache, daß *lokale* Phänomene wie z.B. Blasendeformationen oder Wirbelschleppenausbildungen unberücksichtigt bleiben. Diese haben jedoch einen großen Einfluß auf Bewegungsbahnen, das Schwarmverhalten und Stoffaustausch in Zweiphasenströmungen ([Schlüter u. a. 2001](#); [Bork u. a. 2001, 2002](#); [Schlüter 2002](#); [Scheid u. a. 2003](#)). Die Zellgrößen $\Delta x_{i,j,k}$ je Raumrichtung ist bei diesen Methoden wesentlich größer als der Blasendurchmesser.

Bubble Tracking Methode

Eine nur mittelmäßige Anwendbarkeit auf praktische Probleme besitzt die Bubble Tracking Methode. Zusätzlich zu den Bewegungsgleichungen für die Blasen sind noch konstituierende Gleichungen für die Kräfte auf die Blasen berücksichtigt. Die Größe einer Rechenzelle liegt in der Größenordnung des Blasendurchmessers oder darunter. Dadurch kann in größeren Gebieten noch eine relativ hohe Auflösung erreicht werden. Für die meisten Bubble-Tracking Methoden ist das Verhältnis $d_B/\Delta x \ll 1$. Die Blasen werden auf diese Weise zu Punkten reduziert (Dieser Ansatz ist auch als Euler-Lagrange Verfahren bekannt). Diese punktförmigen Blasen werden entlang des zuvor für die Flüssigphase berechneten Strömungsfeldes

transportiert, ohne eine Rückwirkung auf die Flüssigphase zu haben.

Mittlerweile ist es jedoch bereits möglich, für Verhältnisse von $d_B/\Delta x \geq 1$ mit der Bubble-Tracking Methode die Rückwirkung der Blasen auf die Flüssigphase zu simulieren und dabei physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erhalten (Tomiyama u. a. 1997). Dabei können drei mögliche Blasenformen Verwendung finden: Sphärische, ellipsoide oder kappenförmige Blasen. Ein Vergleich einer ellipsoiden deformierten Blase in einer VOF-Simulation mit einer sphärischen Blase in der Bubble-Tracking Simulation zeigt, daß die Geschwindigkeiten im Nachlauf der Blase für $d/\Delta x = 2$ qualitativ gut wiedergegeben werden können (Tomiyama 1998; Tomiyama u. a. 1997). Mit dieser Methode ist es auch möglich, die offene Wirbelstrecke hinter großen Kappenblasen zu erfassen. In einer Studie gelang es Tomiyama u. a. (1998b) zu zeigen, daß sich eine große Anzahl von Blasen (9, bzw. 18) in der Wirbelschleppe einer Kappenblase $d_B/\Delta x = 2$ ansammeln.

Interface Tracking Methode

In einer weiteren Methode wird die freie Phasengrenze der Blasen betrachtet und direkt verfolgt. Tomiyama bezeichnet dies als Interface Tracking Methode. Die Methode läßt sich weiter in zwei Kategorien unterteilen: Zum einen in Verfahren zur direkten Verfolgung der Phasengrenzfläche (u.a. Front Capturing, Front Tracking) und zum anderen in Verfahren zur Verfolgung des Phasenvolumens, den sog. Volume Tracking Verfahren (z.B. VOF- oder Level Set Methode).

Aufgrund der hohen notwendigen Auflösung des betrachteten Gebiets (der Blasendurchmesser wird mit ca. 14 bis 60 Zellen aufgelöst) ist ihre Anwendbarkeit auf praktische Probleme jedoch gering. Den Modellen liegen die Navier-Stokes Gleichungen zugrunde. Die Sprungbedingungen an der Phasengrenzfläche berücksichtigen den Einfluß der Oberflächenspannung. Als vorteilhaft erweist sich, daß für die Simulationen keine empirischen, konstituierenden Gleichungen notwendig sind und genaue Informationen über die Umströmung der Blase gewonnen werden können. Diese Informationen können von großem Nutzen für die Entwicklung konstituierender Gleichungen für gemittelten Modelle sein.

Front Capturing Methode

Bei der Front Capturing Methode wird das Gitter an die Kontur der Blase angepaßt. Erstmals vorgestellt wurde dieses Prinzip von [Ryskin und Leal \(1984a, b, c\)](#). Dabei wird innerhalb jedes Zeitschritts das Gitter orthogonal an die Grenzfläche konstruiert (s. Abbildung 6.1). Die Grenzfläche wird dadurch besser als bei der z.B. VOF Methode erfaßt, weil sie geometrisch explizit verfolgt wird. Dieses Verfahren

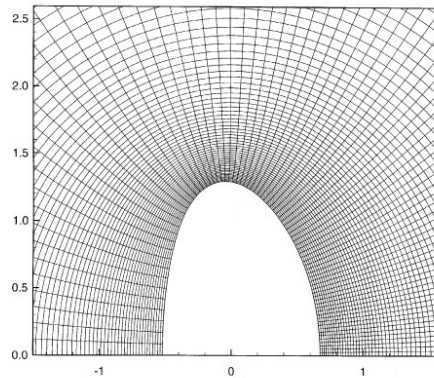


Abbildung 6.1.: Konturangepaßtes Gitter einer aufsteigenden Blase ([Ponoth und McLaughlin 2000](#))

erlaubt die Berechnung deformierter Grenzflächen. Bisher wurden nur rotations-symmetrische oder zweidimensionale Simulationen von Einzelblasen durchgeführt. Vorteilhaft an diesem Verfahren ist die Tatsache, daß über die Wahl der Randbedin-gungen an der Grenzfläche (Schlupf oder Haftung) auf einfache Weise eine kontami-nierte Oberfläche angenähert werden kann ([Ellingsen und Risso 2001](#); [Takagi und Matsumoto 2000](#)). Trotz der bisherigen Einschränkungen ist diese Methode in der Lage, experimentellen Messungen gut wiederzugeben ([Takagi u. a. 1997](#); [Ellingsen und Risso 2001](#)).

Front Tracking Methode

Eine Weiterentwicklung des Front Capturing ist das Front Tracking, bei dem die Grenzfläche durch ein explizites Netz verfolgt wird. Bei dieser Methode wird für das gesamte Rechengebiet die Navier-Stokes Transportgleichungen auf einem fe-sten Euler'schen Gitter gelöst. In dieses Gitter wird ein Lagrange'sches Netz (Linie für 2D und Fläche für 3D Simulationen) eingefügt, um die Grenzfläche zwischen

den beiden Fluiden zu verfolgen. Das Netz - auch Front genannt - besteht aus von der Strömung mitbewegten Punkten. Eine Verbindung dieser Punkte ergibt Elemente, die die Krümmung und Oberfläche der dispersen Phase festlegen. Während der Bewegung der Blase werden Punkte und Elemente hinzugefügt oder entfernt, um eine gute Auflösung zu gewährleisten. Zur Veranschaulichung ist ein solches Gitter in Abbildung 6.2 dargestellt. Bei dieser Methode kann ein scharfer Über-

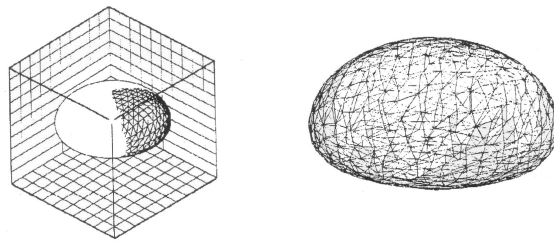


Abbildung 6.2.: Ortsfestes (Euler'sches) kartesisches, äquidistantes Gitter des Berechnungsgebietes mit separatem, unstrukturiertem, zweidimensionalen, triangulärem bewegtem (Lagrange'schem) Gitter ([Unverdi und Tryggvason 1992](#))

gang von Dichte und Viskosität zwischen beiden Phasen gewährleistet werden. Aus Gründen der numerischen Stabilität wird der Dichtesprung demnach über zwei bis drei Zellen verschmiert ([Unverdi und Tryggvason 1992](#)). Eine sehr ausführliche Beschreibung des Modells findet sich bei [Tryggvason u. a. \(1998a\)](#). Durch diese Art der Beschreibung der Grenzfläche ist jedoch eine Koaleszenz zwischen zwei Blasen ausgeschlossen: Zwei Grenzflächen können sich beliebig nahe kommen und sich beliebig lange berühren, ohne jemals aufzureißen. Um in einer Simulation eines Tropfenzusammenstoßes die Koaleszenz wiedergeben zu können, muß die Überlappungszone der Grenzflächen *künstlich* entfernt werden ([Tryggvason u. a. 1998b](#)). Die genaue Kenntnis der Phasengrenzfläche hat jedoch den Vorteil, daß sie mit unterschiedlichen Konzentrationen eines Tensids, bzw. unterschiedlicher Grenzflächenspannung belegt werden kann. So gelang es [Jan und Tryggvason \(1991\)](#), die Beeinflussung der inneren Zirkulation durch die Oberflächenbelegung numerisch zu zeigen.

Wie bereits oben erwähnt, wird bei der Volume of Fluid Methode nicht explizit die Phasengrenzfläche, sondern der Volumenanteil der dispersen Phase innerhalb eines fixierten Gitters verfolgt. Die Phasengrenze läßt sich dann aus dem Volumenanteil rekonstruieren. Das Verfahren wird in Kapitel 8.1 näher erläutert. Ein großer Vorteil ist die Möglichkeit, stark deformierte Oberflächen oder Blasenzerfall simulieren zu können. Der Nachteil dieser Methode ist die Tatsache, daß ein Aufeinandertreffen zweier Grenzflächen immer eine numerisch bedingte Koaleszenz mit sich führt.

Molekulardynamische Methode

Der aktuellste Ansatz zur Berechnung aufsteigender Blasen ist nach der Notation von Tomiyama die molekulardynamische Methode. Hierzu gehören die Lattice Gas und Lattice Boltzmann Methoden (LBM). Die Auflösung ist noch feiner als bei der Interface Tracking Methode, wodurch ihre Anwendbarkeit auf praktische Probleme stark begrenzt ist. Der Methode liegt die statistisch-thermodynamisch motivierte Annahme zugrunde, daß das Fluid aus einer Reihe von virtuellen Partikeln oder Pseudo-Molekülen besteht, die Translationen und Kollisionen ausführen. Der Vorteil liegt in der einfachen numerischen Umsetzung dieser Methode und Parallelisierbarkeit eines entsprechenden Programms. Die Beschreibung von Randbedingungen gestaltet sich als schwierig. Bisher sind nur Simulationen mit geringen Dichteunterschieden zwischen beiden Phasen durchgeführt worden ([Takada u. a. 2001](#); [Sankaranarayanan u. a. 2003](#)). Zusätzlich werden *beide* Phasen als kompressibel betrachtet, was den möglichen Druckabfall bzw. eine maximale Höhe der Flüssigkeitssäule in der Flüssigphase stark einschränkt ([Sankaranarayanan u. a. 2003](#)).

Der Vergleich zwischen LBM-Simulationen und VOF-Simulationen zeigt für diverse Vergleichsrechnungen (freier Aufstieg, Einzelblasen im Gegenstrom oder Einzelblasen in Scherströmungen) ähnliche Ergebnisse für die Blasenform und das Strömungsfeld und fast identische Resultate für die Aufstiegsgeschwindigkeit ([Takada u. a. 2001](#)).

Auch im direkten Vergleich zur Front Tracking Methode liefert die LBM fast identische Ergebnisse bezüglich Aufstiegsgeschwindigkeit, Bahnradien oder Blasenform ([Sankaranarayanan u. a. 2003](#)). Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß die LBM-Methoden nicht besser als die Interface Tracking Methoden sind, sondern le-

diglich eine mögliche Alternative mit anderen Vor- und Nachteilen darstellen ([Sankaranarayanan u. a. 2003](#)).

6.2. Simulationen aufsteigender Blasen mit Interface Tracking Methoden

Der Großteil der in der Literatur verfügbaren numerischen Simulationen über Einzelblasen oder kleine Blasenschwärme basiert auf den Interface Tracking Methoden. Im Folgenden wird eine Übersicht über den Stand der bisherigen Simulationen aufsteigender Blasen mit Interface Tracking Methoden vorgestellt. Dabei wird zuerst nur die reine Hydrodynamik betrachtet, bevor auf die komplexeren Simulationen des Stoffaustauschs eingegangen wird.

6.2.1. Hydrodynamik

Abgesehen von einigen Simulationen rotationssymmetrischer Probleme mit der Front Capturing Methode sind fast alle publizierten Ergebnisse mit der Front Tracking oder der VOF Methode erzielt worden.

Front Tracking Methode

In der Literatur existieren eine Vielzahl von Simulationen mit der Front Tracking Methode, die fast ausschließlich mit dem Programm von Prof. Tryggvason durchgeführt wurden. Dabei sind allerdings die Dichte- und Viskositätsverhältnisse γ und κ sehr klein im Vergleich zu Gas-Flüssig Systemen. So benutzte [Bunner und Tryggvason \(1997\)](#); [Tryggvason u. a. \(1998b\)](#) und [Esmaeeli und Tryggvason \(1999\)](#) Dichteverhältnisse von 10, [Esmaeeli und Tryggvason \(1998\)](#) von 20 und [Bunner und Tryggvason \(2000\)](#) Verhältnisse von 50. Bei so geringen Dichteverhältnissen bleiben die Reynolds-Zahlen auf Werte von $Re < 30$ beschränkt; die Simulationen können also eher als Tropfen in Flüssigkeit (wie z.B. in Extraktionskolonnen) denn als Blasen in Flüssigkeit angesehen werden. Validiert wurde das Programm anhand von Berechnungen aus Potentialströmungen und schleichenden Strömungen. Ein Vergleich von 16 aufsteigenden Blasen zwischen Front Tracking Simulation und

einer auf Stokes'scher Strömung basierender Berechnung zeigte für Geschwindigkeiten und Bewegungsbahnen große Differenzen ([Esmaeeli und Tryggvason 1998](#)). In den zuvor erwähnten Simulationen sind die Blasen jedoch ausschließlich sphärisch oder nur leicht ellipsoid. Mit der Front Tracking Methode ist die Mikrostruktur in einem bidispersen Schwarm aus sphärischen Blasen untersucht worden ([Göz u. a. 2002](#)).

Als Begründung für die Tatsache, daß bisher keine Front Tracking Simulationen mit starken Oberflächendeformationen gezeigt worden sind, vermuten [Sato u. a. \(2000\)](#) das Auftreten numerischer Instabilitäten bei größeren Krümmungsschwankungen der Grenzfläche. In einer aktuellen Arbeit ([Sankaranarayanan u. a. 2003](#)) sind für eine einzelne Blase in 2D dynamisch deformierbare Oberflächen möglich.

Die oben erwähnten Arbeiten umfassen jeweils eine große Anzahl von Blasen (bis 216 Blasen in [Bunner und Tryggvason \(2000\)](#)) und deren Schwarmverhalten. Für kleine Reynold-Zahlen $Re=O(1)$ tendieren die Blasen zur horizontalen Anordnung ([Tryggvason u. a. 1997, 1998b; Esmaeeli und Tryggvason 1999; Bunner und Tryggvason 2000](#)). Dadurch reduzieren sich die Aufstiegesgeschwindigkeit und damit die Reynolds-Zahl des Schwarms. ([Tryggvason u. a. 1997; Bunner und Tryggvason 2000](#)). Steigt der Gasgehalt, so bedingt dies einen weiteren Abfall der Reynolds-Zahl ([Bunner und Tryggvason 2000](#)).

In praxisrelevanten Zweiphasenströmungen mit hohen Reynolds-Zahlen hat [Schlüter \(2002\)](#) abweichende Beobachtungen gemacht. In den experimentell untersuchten Schwärmen ordneten sich die Blasen nicht horizontal, sondern *regellos* im Schwarm an. Die Nachläufe der Blasen reduzieren den Widerstand der nachfolgenden Blasen, was zu einer *Erhöhung* der Schwarm-Reynolds-Zahl führte. Zusätzlich stieg die Reynolds-Zahl mit wachsendem Gasgehalt bis zu einem gewissen Wert an, bevor sie leicht absinkt. Auch zeigen die Blasen für diese Strömungsform starke Oberflächendeformationen.

VOF Methode

Schwerpunkt der Simulationen mit der VOF Methode bilden Untersuchungen über den Aufstieg von Einzelblasen. [Tomiya u. a. \(1993b\)](#) zeigten die Bewegungsbah-

nen von 2D Blasen und deren deformierte Oberflächen über einen weiten Bereich der Morton-Zahlen ($Mo = 10^1 - 10^{-6}$) für den freien Aufstieg, Gegenstrom und in Scherströmungen. Die numerisch bestimmten Strouhal-Zahlen lagen jedoch weit über den experimentell gemessenen. In einer weiteren Arbeit konnten Tomiyama u. a. (1993a) für symmetrische 3D Simulationen die Form und die Geschwindigkeit von Einzelblasen in einem großen Bereich der Morton-Zahl bestimmen ($\log(Mo) = -9.26 - 2.36$). Der Vergleich des Achsenverhältnisses aus einer Simulation mit der empirischen Korrelation nach Tadaki (Fan und Tsuchiya 1990) zeigte eine gute Übereinstimmung. Der experimentelle Vergleich der Aufstiegsgeschwindigkeiten und Blasenform zeigte in den beiden Artikeln von Tomiyama u. a. gute Übereinstimmung mit dem Diagramm nach Grace u. a. (1976), bzw. Clift, Grace und Weber (1978).

Chen u. a. untersuchten den Zerfall von 2D und symmetrischen 3D Blasen ($\gamma = 80; 1000, \kappa = 80, Re < 50, Eö = 5$) sowie das Annähern einer Blase an eine feste Oberfläche (Chen u. a. 1996a). Die Untersuchungen erfolgten bei geringen Wandabständen von $d_W/d_B = 2$. Delnoij u. a. (1997) zeigten die Blasenbildung von 2D Einzelblasen an einer Düse und das weitere Aufstiegsverhalten der Blasen auf geradlinigen und zickzack-Bahnen ($Mo = 2, 5 \cdot 10^{-11}$).

Mit Hilfe eines kommerziellen VOF-Programms (CFX 4.1) simulierten Krishna u. a. (1999a) den Aufstieg von Kappenblasen in Wasser. Der experimentell ermittelte Korrekturfaktor, der den Wandabstand berücksichtigt, konnte dabei in Berechnungen mit Rotationssymmetrie in 2D bestätigt werden, obwohl während der Simulation bis zu 10% Massenverluste auftraten. Während VOF-Simulationen in 2D ($d_B = 2 - 20mm$) noch gut mit experimentell ermittelten Aufstiegsgeschwindigkeiten in 2D Flachsäulen übereinstimmen (Krishna und van Baten 1999; van Wachem und Schouten 2002), liegen im Vergleich zwischen 2D Simulationen und Blasenanstieg in einer 3D Säule die experimentellen Aufstiegsgeschwindigkeiten um 100-150% höher (Krishna und van Baten 1999).

Mit Hilfe der VOF-Methode kann auch ein Blasenzerfall erfolgreich simuliert werden. So gelingt es Lawson u. a. (1999) mit einer 2D Simulation den experimentellen Zerfall einer 90 mm Blase wiederzugeben. Der zeitliche Verlauf und die Blasenform werden qualitativ sehr gut wiedergegeben.

Um numerische Schwierigkeiten bei hohen Dichteverhältnissen zu vermeiden, fix-

ierten Sabisch u. a. (Sabisch 2000; Sabisch u. a. 2001) die Eötvös- und Morton-Zahlen einiger realer Stoffsysteme und rechneten mit stark reduzierten Dichte- und Viskositätsverhältnissen ($\gamma = 2, \kappa = 1$). Diese "künstlichen" Stoffsysteme liefern qualitativ gute Ergebnisse, verglichen mit den Werten aus dem Diagramm zur Abschätzung der Aufstiegsgeschwindigkeit für verschiedene Morton-Zahlen nach Grace u. a. (1976) oder Clift, Grace und Weber (1978). Die schraubenförmige Aufstiegsbahn stimmt qualitativ gut mit Experimenten überein; die Bahnradien liegen aber um mehr als eine Größenordnung unter den experimentell ermittelten. In einer aktuellen Arbeit gelingt es Rusche (2003) mit einem mitbewegten Koordinatensystem die Bahnradien und die Aufstiegsgeschwindigkeiten von Luftblasen in Wasser durch Simulationen korrekt wiederzugeben. In den Simulationen ist das Rechengebiet um die Blase herum lokal verfeinert.

Da die VOF-Simulationen eine hohe Auflösung benötigen, beschränken sich die meisten Autoren auf zumeist Einzelblasen oder Blasenpaare. Während Delnoij u. a. (1998) zwei nebeneinander aus einer Düse aufsteigende Blasen simulieren, berechnen andere Autoren (Chen u. a. 1996b; Chen und Chou 1998; Delnoij u. a. 1998; Krishna u. a. 1999a) die Koaleszenz zweier Blasen, die in Reihe aufsteigen. In ersten Studien sind auch kleine Schwärme von fünf Blasen simuliert worden (Tomiya 1998; Sabisch 2000).

Bisher liegen noch keine umfangreichen und umfassenden numerischen Untersuchungen von Einzelblasen über einen weiten Bereich der Eötvös- und Morton-Zahlen vor. Es bedarf daher einer ausführlichen Überprüfung der Ergebnisse der Simulationen anhand von Aufstiegsgeschwindigkeiten, Bahnradien, Blasenformen und Wirbelschleppenphänomenen, bevor aus numerischen Strömungssimulationen fundierte und verlässliche Ergebnisse entnommen werden können.

6.2.2. Stoffaustausch

Die Mehrzahl der in den letzten Jahren veröffentlichten numerischen Simulationen beschäftigen sich mit der Hydrodynamik. Simulationen des Stoffübergangs hingegen sind erst seit wenigen Jahren zu finden.

Der Effekt von Tensiden auf die Aufstiegsgeschwindigkeit und die Stoffübergang aus Blasen wurde von [Ponoth und McLaughlin \(2000\)](#) untersucht. Die in der Flüssigphase vorliegenden Tenside lagern sich an die Grenzfläche an und reduzieren zunehmend die Aufstiegsgeschwindigkeit bis ein unterer Grenzwert erreicht wird ([Zhang u. a. 2001](#)). [Paschedag u. a. \(2001\)](#) simulierten das Strömungs- und Konzentrationsfeld eines Tropfens in einer schleichenden Strömung und verglichen es mit analytischen Lösungen. Die beobachteten Differenzen führen sie auf numerische Ungenauigkeiten zurück. [Piarah u. a. \(2001\)](#) stellen für hohe Fourier-Zahlen eine gute Übereinstimmung zwischen der simulierten Sherwood-Zahl und experimentellen Daten fest. [Waheed u. a. \(2002\)](#) untersuchten den Einfluß der äußeren Strömung auf den Stoffübergang einzelner Tropfen. Alle oben genannten Publikationen gehen von sphärischen Partikeln aus. Leicht abgeflachte Ellipsoide sind in den Simulationen von [Mao u. a. \(2001\)](#) zu finden. In zweidimensionalen Simulationen gelingt es den Autoren, die stationären Konzentrationsprofile für unterschiedliche Peclet-Zahl zu bestimmen. Der Vergleich der Sherwood-Zahlen von Tropfen in Versuchen in organischer Lösung und numerischer Simulation zeigt befriedigende Ergebnisse. Bei den oben erwähnten Simulationen liegt jeweils Rotationssymmetrie vor bzw. die Systeme können auf zweidimensionale Probleme reduziert werden. Die Berechnungen basieren auf der Front Capturing Methode, d.h. einer exakt durch das Gitter erfaßten Phasengrenzfläche.

Nur wenige Autoren simulieren den Stoffaustausch mit einer Volume Tracking Methode. So gelingt es [Davidson und Rudmann \(2000\)](#) in einem zweidimensionalen Gebiet mit der VOF-Methode den Stofftransport aus einer Flüssigkeit in eine Gasphase bestimmen. Die Ergebnisse stimmen qualitativ gut mit experimentellen Daten überein.

In weiteren Arbeiten konnten Sato u. a. ([Sato u. a. 2000](#); [Jung und Sato 2001](#)) den Stoffübergang von flüssigem LCO_2 in Wasser für aufsteigende Tropfen mit den realen Dichte- und Viskositätsverhältnissen nahe 1 in 3D Rechnungen bestimmen. Im Nachlaufgebiet des aufsteigenden Tropfens konnten die Autoren den von [Yabe und Kunii \(1978\)](#) beschriebenen hufeisenförmigen Wirbel beobachten.

Alle zuvor erwähnten Arbeiten nehmen eine stetige Konzentrationsverteilung der Species an der Phasengrenze an, d.h. einen Verteilungskoeffizienten (in diesem Fall

den Henry Koeffizienten) von 1. Dies ist in sehr guter Näherung nur für CO_2 in Wasser/ LCO_2 der Fall. In den meisten anderen Systemen liegt an der Grenzfläche ein Verteilungskoeffizient vor, der sich z.T. erheblich von $H = 1$ unterscheidet. Für Sauerstoff in Luft beträgt der Henry Koeffizient beispielsweise $H = 33$.

Zusätzlich zu dem Stoffaustausch sind auch chemische Reaktionen von großem technischen Interesse. Mit Hilfe der Front Capturing Methode gelingt es Khinast (2001; 2003) in einer 2D Simulation erstmals Stofftransport bei gleichzeitig ablaufender chemischer Reaktion zu berechnen.

7. Kontinuumsmechanische Modellierung

7.1. Bilanzierung von Zweiphasenströmungen

Die betrachteten Gas-Flüssigkeits-Systeme werden mathematisch auf kontinuumsmechanischer Ebene modelliert. Die Bilanzierung erfolgt über extensiven Größen, die sich massenadditiv verhalten. In dem betrachteten Volumenelement sei eine hinreichend große Anzahl von Molekülen enthalten, so daß die makroskopischen Größen durch örtlich stückweise stetige Funktionen beschreibbar sind. Innerhalb jeder Phase sind alle betrachteten physikalischen Größen stetig. An der Phasengrenze springt mindestens eine dieser Größen, z.B. Dichte oder Konzentration. Die Phasengrenze wird für die Modellierung als unendlich dünne, massenlose Übergangsschicht angenommen und für die mathematischer Betrachtung als stückweise glatte Fläche betrachtet. Nachfolgend werden die integralen und differentiellen Bilanzen für Zweiphasenströmungen in Anlehnung an ([Bothe 2002](#)) zusammengestellt.

7.1.1. Integralen Bilanzen

Für zweiphasige Strömungen lassen sich integrale Bilanzgleichungen für die extensiven Größen Masse, Impuls und Energie aufstellen. Ihre Gültigkeit erstreckt sich über die Phasengrenze hinweg.

Gegeben seien zwei auf molekularer Ebene nicht vermischbare Fluide in den Bereichen $\Omega^-(t)$ und $\Omega^+(t)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$, die durch die Phasengrenzfläche $\Gamma(t)$ voneinander getrennt werden (s. Abbildung 7.1). Diese bewegt sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{u}_Γ . Ihre Normale \mathbf{n}_Γ zeigt in Richtung von $\Omega^+(t)$. Der Kontrollraum für die Bilanzierung sei eine Kugel $B_r := B_r(\mathbf{x}_0)$.

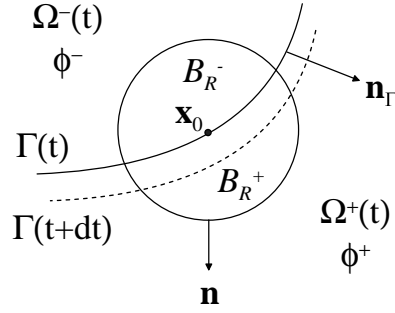


Abbildung 7.1.: Kontrollraum für eine Kugel B_r im Aufenthaltsort $\Omega^-(t)$ und $\Omega^+(t)$ zweier durch die Phasengrenzfläche $\Gamma(t)$ getrennter Phasen.

Massenbilanz

Es sei V ein festes Teilvolumen von G mit der Masse $\int_V \rho dV$ und der Dichte ρ . Durch ein Flächenelement dA auf dessen Oberfläche fließt pro Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA$. Für eine massenlose Phasengrenzfläche ändert sich die Masse im Volumen V gemäß

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \quad (7.1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{u}. \quad (7.2)$$

Der Vektor der Stoffstromdichte zeigt in Richtung der Bewegung der Flüssigkeit. Die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch eine senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor stehende Fläche tritt, wird durch den Betrag von \mathbf{J} festgelegt.

Impulsbilanz

Für ein von der Strömung mitbewegtes Volumen $V(t)$ lautet der Impuls

$$\mathbf{I}(t) = \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV. \quad (7.3)$$

Seine zeitliche Änderung ist nach dem 2. Newtonschen Gesetz gleich der auf das

Fluid wirkenden Kraft

$$\frac{d}{dt}\mathbf{I}(t) = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad (7.4)$$

wobei zwei Arten von Kräften unterschieden werden:

1. Volumenkräfte durch äußere Felder der Kraftdichte \mathbf{f} (z.B. Gravitation, elektrische oder magnetische Felder),
2. Flächen- oder Spannungskräfte $\mathbf{S}_{\partial V(t)}$ (z.B. Druck oder innere Reibung).

Somit gilt für die Änderung des Impulses:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{S}_{\partial V(t)} + \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV. \quad (7.5)$$

$\mathbf{S}_{\partial V(t)}$ kann nur über konstituierende Gleichungen mit den übrigen Größen des Fluids in Zusammenhang gebracht werden. So ist beispielsweise für ideale Fluide in einem einphasigen System die Spannung auf V einzig durch den Druck $p(\mathbf{x}, t)$ festgelegt. Auf die Oberfläche dA des Volumens dV wirkt dann die Kraft $p \mathbf{n} dA$:

$$\mathbf{S}_{\partial V(t)} = - \int_{\partial V(t)} p \mathbf{n} dA. \quad (7.6)$$

Werden die Einflüsse von Spannungen und Grenzflächenkräften in der Impulsbilanz mitberücksichtigt, gilt für zweiphasige Systeme viskoser Fluide:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\partial V(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA + \mathbf{F}_\Gamma(t). \quad (7.7)$$

In dieser Gleichung stellt $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$ den Spannungstensor und \mathbf{I} den Einheits-tensor dar. Der Zähigkeitsspannungstensor \mathbf{S} verkörpert die Spannungen aufgrund innere Reibung im Fluid. Auf die Grenzfläche $\Gamma(t) \cap V(t)$ wirkt die Kraft $\mathbf{F}_{\Gamma(t)}$ durch die Grenzflächenspannung. Im Nachfolgenden soll eine Herleitung der Kraft \mathbf{F}_A durch die umgebende Grenzfläche auf ein aus V ausgeschnittenes Flächenstück der Phasengrenze $A = V \cap \Gamma(t)$ erfolgen (vgl. Abbildung 7.2).

Auf der Grenzfläche $\Gamma(t)$ befinde sich eine Fläche A mit der Berandungskurve C . Auf ein Linienelement ds von C wirkt durch die umgebende Grenzfläche die Kraft $d\mathbf{F}$ tangential an die Fläche $\Gamma(t)$. Sie ist senkrecht auf ds , zeigt in Gegenrichtung

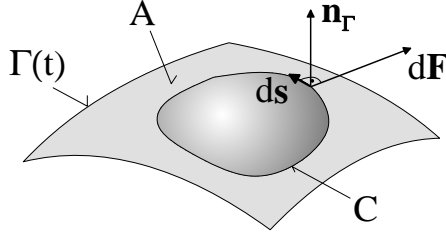


Abbildung 7.2.: Kraft auf ein Linienelement ds auf der Grenzfläche $\Gamma(t)$

zu A und hat den Betrag $|\sigma ds|$. Für sie gilt: $d\mathbf{F}_A = \sigma ds \times \mathbf{n}_\Gamma$. Eine Integration über die Berandungskurve ergibt,

$$\mathbf{F}_A(t) = \oint_C \sigma(ds \times \mathbf{n}_\Gamma) = \oint_C ds \times \sigma \mathbf{n}_\Gamma. \quad (7.8)$$

Diese Gleichung kann unter Zuhilfenahme des Stokesschen Satzes von einem Linienintegral für den Spezialfall des Vektorprodukts in eine Flächenkraft umgeformt werden:

$$\mathbf{F}_A = \int_A (\mathbf{n}_\Gamma \times \nabla) \times \sigma \mathbf{n}_\Gamma dA. \quad (7.9)$$

Der Integrand in diesem Ausdruck ist die Flächendichte der Grenzflächenspannung \mathbf{f}_Γ . Umgeformt geschrieben lautet er:

$$\mathbf{f}_\Gamma = \nabla \sigma - \mathbf{n}_\Gamma (\mathbf{n}_\Gamma \cdot \nabla \sigma) + \sigma \mathbf{n}_\Gamma \cdot \nabla \mathbf{n}_\Gamma - \sigma \mathbf{n}_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{n}_\Gamma). \quad (7.10)$$

Hierin liefern die ersten beiden Terme durch Subtraktion des Normalenanteils vom Gradienten der Grenzflächenspannung den Flächengradienten $\nabla_\Gamma \sigma$ von σ . Diese tangential wirkende Komponente ist für einen konstanten Wert von σ gleich Null. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, da die Grenzflächenspannung u.a. von der Temperatur oder der Konzentration oberflächenaktiver Substanzen abhängt. Eine Veränderung von σ durch Temperatur- oder Konzentrationsschwankungen bewirkt den sogenannten Marangoni-Effekt. Da der dritte Summand in (7.10) gleich Null ist, vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$\mathbf{f}_\Gamma = \nabla_\Gamma \sigma - \sigma \mathbf{n}_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{n}_\Gamma). \quad (7.11)$$

Mit der Krümmung

$$\kappa_\Gamma = -\nabla \cdot \mathbf{n}_\Gamma \quad (7.12)$$

ergibt sich als Kraft auf die Grenzfläche

$$\mathbf{F}_\Gamma = \int_A \mathbf{f}_\Gamma dA \quad \text{mit} \quad \mathbf{f}_\Gamma = \nabla_\Gamma \sigma + \sigma \kappa_\Gamma \mathbf{n}_\Gamma. \quad (7.13)$$

Für die Impulsbilanz für ein ortsfestes Volumenelement V gilt somit:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_{V \cap \Gamma(t)} \mathbf{f}_\Gamma dA \quad (7.14)$$

mit dem Fluß $\mathbf{J} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{T}$.

7.1.2. Differentielle Bilanzen

Die integrale Bilanzen an ortsfesten Volumenelementen können durch Lokalisierung in differentiellen Bilanzen mit den zugehörigen Sprungbedingungen überführt werden. Es ist dazu erforderlich, die Oberflächenintegrale über ∂V in Volumenintegrale umzuformen. Dann wird für das Phaseninnere durch den Betrag $|V|$ des Bilanzvolumens $V = B_r(\mathbf{x}_0)$ dividiert und die Kugel B_r zum Punkt \mathbf{x}_0 zusammengezogen ($r \rightarrow 0+$). Die Herleitung der Sprungbedingungen an $\Gamma(t)$ erfolgt durch Aufspaltung des jeweiligen Volumenintegrals in Phasenanteile und Ergänzung um die entsprechende fehlende Fläche der Phasengrenzfläche. Die differentiellen Bilanzgleichungen werden nun im Inneren beider Phasen verwendet. Eine Division durch die Fläche $|\Gamma_r|$ im Bilanzraum und Kontraktion der Kugel um den Punkt \mathbf{x}_0 , $r \rightarrow 0+$ liefert die Sprungbedingungen. Innerhalb jeder Phase gelten die differentiellen Bilanzgleichungen. Die Sprungbedingungen geben die Verhältnisse an der Grenzfläche wieder. Diese sind durch konstituierende Gleichungen zu ergänzen.

Massenbilanz

Durch Anwendung des Divergenztheorems auf die rechte Seite der Gleichung (7.1) kann das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral überführt werden. Daraus folgt die differentielle Form der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (7.15)$$

Für inkompressible Fluide ergibt sich folgende Formulierung:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (7.16)$$

Diese vereinfacht sich für Fluide konstanter Dichte zu:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (7.17)$$

Impulsbilanz

Ein analoges Vorgehen liefert die differentielle Form der Impulsbilanz. Wirkt als einzige Körperkraft lediglich die Gravitation (in Richtung der negativen z-Achse), so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{T}) = -\rho g \mathbf{e}_z \quad (7.18)$$

mit dem Spannungstensor $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$. Für newtonische Fluide läßt sich der Zähigkeitsspannungstensor \mathbf{S} durch folgende konstituierende Gleichung ausdrücken:

$$\mathbf{S} = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{I} + \eta(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (7.19)$$

mit der Viskosität in der Kernphase λ und der dynamischen Viskosität η . Für dichtebeständige Fluide läßt sich die Impulsbilanz vereinfachen zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{u}. \quad (7.20)$$

Der Quotient $\eta/\rho = \nu$ wird auch als kinematische Viskosität bezeichnet. Die Gleichungen (7.20) und (7.17) werden als Navier-Stokes Gleichungen bezeichnet. Für reibungsfreie Fluide, d.h. ohne innere Reibung (Zähigkeit) und damit verbundener Energiedissipation, ergeben sich aus den Navier-Stokes Gleichungen die Euler Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (7.21)$$

7.1.3. Sprungbedingungen

Der Sprung einer beliebigen Größe Ψ an der Phasengrenze $\Gamma(t)$ wird als $[\Psi] := \Psi^+ - \Psi^-$ abgekürzt. Sofern kein Phasenübergang vorliegt, sind die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten an der Grenzfläche identisch, d.h. es gilt $\mathbf{u}^\pm \cdot \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{u}_\Gamma \cdot \mathbf{n}_\Gamma$. Ohne konstituierende Gleichungen sind die Bedingungen an der Grenzfläche jedoch unvollständig, da Informationen über die Tangentialkomponente fehlen. Für viskose Systeme wird Haftbedingung an der Phasengrenze herangezogen. Für jeden Tangentialvektor $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}_\Gamma$ folgt somit: $\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{t} = \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{t}$. Hierdurch ist allerdings die Tangentialkomponente des Geschwindigkeitsvektors der Grenzfläche noch nicht festgelegt, da durch die Tangentialkomponenten die massenlose Grenzfläche lediglich in sich verschoben wird. Durch die Festlegung $\mathbf{u}_\Gamma \cdot \mathbf{t} := \mathbf{u}^\pm \cdot \mathbf{t}$ ergibt sich $\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^- = \mathbf{u}_\Gamma$ auf $\Gamma(t)$. Für den Impulserhalt lautet die Sprungbedingung

$$[\rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\Gamma) - \mathbf{T}] \cdot \mathbf{n}_\Gamma = \nabla_\Gamma \sigma + \sigma \kappa_\Gamma \mathbf{n}_\Gamma. \quad (7.22)$$

Für eine räumlich konstante Grenzflächenspannung σ vereinfacht sie sich zu:

$$(p^+ - p^-) \mathbf{n}_\Gamma - [\mathbf{S}] \cdot \mathbf{n}_\Gamma = \sigma \kappa_\Gamma \mathbf{n}_\Gamma. \quad (7.23)$$

Darin stellt der Drucksprung den dominierenden Term an der Grenzfläche dar. Unter Vernachlässigung der Zähigkeitsspannungen \mathbf{S} wird aus Gleichung (7.23) die Young-Laplace-Gleichung:

$$(p^+ - p^-) = \sigma \kappa_\Gamma = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (7.24)$$

In ruhenden Fluiden ist $\mathbf{u} = 0$ und somit auch $\mathbf{S} = \mathbf{0}$. Hier ist diese Gleichung exakt. Eine ausführliche Herleitung der Sprungbilanzen findet sich bei [Ishii \(1975\)](#); [Slattery \(1999\)](#)

7.1.4. Randbedingungen

Die eindeutige Lösung eines Systems von Differentialgleichungen ist erst durch die Randbedingungen festgelegt. Differentialgleichungen und Randbedingungen zusammen werden als Randwertproblem bezeichnet. Unterschieden wird zwischen Dirichlet-Bedingungen, bei denen ein fester Wert von Strömungsgrößen am Rand

vorgegeben wird und Neumann-Bedingungen, die einen Gradient von Strömungsgrößen senkrecht zum Rand vorgeben. Für die Geschwindigkeiten an den Rändern des Gebiets gibt es sowohl Schlupf- als auch Haftbedingungen.

Schlupf-Randbedingungen: Die Wand ist für das Fluid undurchdringlich. An der Wand gibt es keine Haftung und somit keinen Gradienten der Tangentialgeschwindigkeit u_τ :

$$u_n(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_\tau(x, y)}{\partial n} = 0.$$

Die Tangentialgeschwindigkeit berechnet sich aus

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}.$$

Haft-Randbedingungen: Die Wand ist wiederum für das Fluid undurchdringlich. An der Wand haftet das Fluid, d.h.

$$u_n(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad u_\tau(x, y) = 0.$$

7.2. Stoffaustausch

Für die molare Konzentration einer verdünnten Komponente gilt die Bilanz:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (7.25)$$

Läßt sich die molekulare Stoffstromdichte \mathbf{J} durch das Fick'sche Gesetz $\mathbf{J} = -D\nabla c$ mit konstantem Diffusionskoeffizienten D ausdrücken, so kann die obige Gleichung für inkompressible Strömungen in die Advektions-Diffusions-Gleichung,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D\Delta c \quad (7.26)$$

überführt werden. Diese gilt jeweils innerhalb der Phasen. An der Phasengrenze sind die übergehenden Stoffströme gleich:

$$[-D\nabla c] \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0. \quad (7.27)$$

Zur Bestimmung der Konzentrationsprofile ist eine weitere konstituierende Gleichung notwendig. Zu diesem Zweck wird angenommen, daß auch an der Phasengrenzfläche lokal ein thermodynamisches Gleichgewicht vorliegt. Dies bedeutet stetige chemische Potentiale. Für geringe Konzentrationen der übergehende Komponente läßt sich dann das Gleichgewicht durch das Henry Gesetz ausdrücken:

$$H = \frac{c_G}{c_L}. \quad (7.28)$$

Darin ist H der feste Henry Koeffizient. Durch den Konzentrationssprung an der Grenzfläche für $H \neq 1$ liegt kein stetiges Konzentrationsfeld vor.

8. Numerische Verfahren

Bei dem Aufstieg von Blasen in niedrigviskosen Medien, z.B. Wasser, kann es zu starken und dynamischen Verformungen der Phasengrenzfläche kommen. Treffen zwei Blasen aufeinander, so können sie zu einer einzigen verschmelzen, d.h. koaleszieren. Übersteigt die Blasengröße einen kritischen Wert können sich kleine Fragmente von der Blase abtrennen, bis hin zum kompletten Zerfall der Blase. Das numerische Verfahren muß daher insbesondere die in ihrer Lage und Form veränderliche Phasengrenze wiedergeben können. Diese Anforderung wird von den Interface Tracking Methoden erfüllt. Mit den Lagrange'schen Methoden, d.h. einem mitbewegtem, konturangepaßten Gitter (Front Capturing) lassen sich nur einzelne Blasen simulieren. Daher wird auf die Euler'schen Methoden mit fixiertem Gitter, in dem sich die Phasengrenze bewegt, zurückgegriffen. Da starke und dynamische Oberflächendeformationen und Koaleszenzen Gegenstand der Untersuchungen sein sollen, stellt die Volume of Fluid Methode den geeignetsten Typ dar.

8.1. Die VOF-Methode

Erstmals vorgestellt wurde das VOF-Modell von [Hirt und Nichols \(1981\)](#). Seither wurde es kontinuierlich weiterentwickelt und verbessert ([Kothe und Mjolsness 1992](#); [Rider und Kothe 1998](#)). Die dem Modell zugrunde liegenden Annahmen sind zwei nicht mischbare, fluide Phasen, die als inkompressibel betrachtet werden. Basierend auf der phasenbezogenen Bilanzierung des Gebiets wird bei dem VOF-Verfahren eine Bilanzgleichung für eine Marker- oder Volumenanteilsfunktion f gelöst. Diese Bilanzgleichung beschreibt die zeitliche Ausbreitung der Phasen abhängig vom Strömungsfeld. Die Transportgleichung für f lautet:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) = 0. \quad (8.1)$$

Zusätzlich zu der Volumenanteilsfunktion werden die Bilanzgleichungen für Masse und Impuls für beide Phasen gemeinsam gelöst. Die Volumenanteilsfunktion kann auch als Phasenindikator angesehen werden. Innerhalb jeder Zelle nimmt der Volumenanteil diskrete Werte zwischen 0 und 1 an. Daraus ergeben sich für eine Rechenzelle folgende potentielle Zustände:

- $f = 0$ die Zelle enthält nur die kontinuierliche Phase.
- $f = 1$ die Zelle enthält nur die disperse Phase.
- $0 < f < 1$ die Zelle enthält beide Phasen.

Eine Zelle mit beiden Phasen, sprich mit $0 < f < 1$, enthält also einen Teil der Phasengrenze. Für den Fall von Luftblasen in einer Flüssigkeit ist für $f = 0$ eine Zelle mit Flüssigkeit und für $f = 1$ eine Zelle mit Luft gefüllt. Abbildung 8.1 verdeutlicht noch einmal diesen Zusammenhang:

Bestimmt wird der Volumenanteil f des aktuellen Zeitschritts aus Konvektion

0,15	0,02	0	0	0	0
1	0,76	0,29	0	0	0
1	1	0,87	0,14	0	0
1	1	1	0,38	0	0
1	1	1	0,56	0	0

Abbildung 8.1.: Zellenbelegung des Rechengitters für eine Luftblase ($f = 1$) in Flüssigkeit ($f = 0$) nach der VOF-Methode und Rekonstruktion der Phasengrenze nach der PLIC-Methode.

der f -Werte des vorherigen Zeitschritts durch das aktuellen Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} . Die Diskretisierung der Transportgleichungen für Masse, Impuls und Spezies beruht auf dem Finite Volumen Verfahren. In dem verwendeten Simulationsprogramm FS3D werden die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{u} auf den Zellflächen versetzt abgespeichert. Das Lösen der Impulsbilanz erfolgt

auf der Basis eines konservativen Godunov-Projektionsverfahrens zweiter Ordnung (Tau 1994). Der auf den Zellmitten abgespeicherte Druck wird aus der Druck-Poisson-Gleichung errechnet. Dazu wird ein Mehrgitterverfahren (Wesseling 1992) verwendet, daß die benötigte Robustheit für die Behandlung von großen Dichteunterschieden aufweist. Eine ausführliche Beschreibung der im Programm FS3D verwendeten numerischen Verfahren findet sich bei Frohn (1999).

Die Rekonstruktion der Phasengrenzfläche einer Zelle erfolgt anhand des Volumenanteils f innerhalb dieser Zelle, sowie deren Nachbarzellen. Die wohl einfachste Methode ist die "Simple Line Interface Construction" (SLIC) Methode, wie sie von Hirt und Nichols (1981) angewandt wird. Dabei liegt die rekonstruierte Phasengrenzfläche jeweils parallel zum Rechengitter (vgl. Abbildung 8.2 Mitte).

Die Lage der Fläche wird durch den Volumenanteil f festgelegt. Wie aus Abbil-

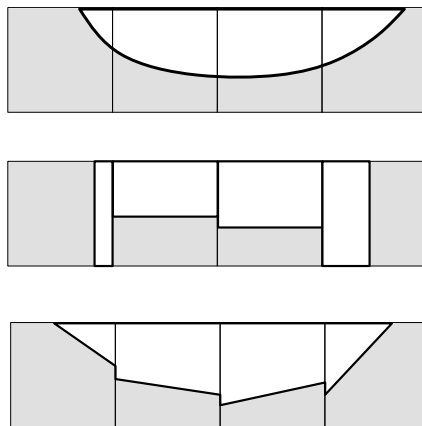


Abbildung 8.2.: Vergleich zwischen realer (oben) und nach SLIC (Mitte) und PLIC (unten) rekonstruierten Phasengrenzfläche.

dung 8.2 deutlich wird, ist diese Methode relativ grob und führt schnell zu einer starken Verschmierung der Phasengrenzfläche. Eine wesentliche Verbesserung stellt die "Piecewise Linear Interface Construction" (PLIC) Methode nach Puckett und Saltzman (1992) (vgl. Abbildung 8.2 unten). Aus dem Gradienten von f läßt sich die Normale \mathbf{n} der Grenzfläche bestimmen. Die Grenzfläche wird nun iterativ derart innerhalb der jeweiligen Rechenzelle entlang der Normalen verschoben, daß der Volumenanteil der dispersen Phase dem f -Wert genügt. Diese Art der Rekonstruktion

ermöglicht es, Flüsse über die Zellflächen genauer zu berechnen. Hierdurch wird eine Verschmierung der Phasengrenzfläche durch numerische Diffusion verhindert.

Grenzflächenspannung

In der VOF-Methode wirkt die Grenzflächenspannungskraft im Bereich der Phasengrenze als eine Volumenkraft. Dies erweist sich als notwendig, da bei der numerischen Umsetzung der VOF-Methode keine scharfe Phasengrenzfläche vorliegt, sondern ein kontinuierlicher Übergangsbereich der Dicke l . Diese Dicke ist auflösungsabhängig. Für die korrekte Wiedergabe des Drucksprungs zwischen den beiden Phasen muß die Krümmung der Phasengrenzfläche berechnet werden. Diese Anforderung wird von dem sogenannte Continuum Surface Force (CSF) - Modell nach [Brackbill u. a. \(1992\)](#) erfüllt. Dieses nichtkonservative Modell drückt die flächenbezogene Grenzflächenkraft $\mathbf{f}_\Gamma(\mathbf{x}_\Gamma)$ auf der Grenzfläche Γ durch eine volumenbezogene Kraft $\mathbf{f}_{\Gamma,V}(\mathbf{x})$ innerhalb eines kleinen Übergangsbereiches um die Grenzfläche Γ herum aus. Geht die Dicke l des Übergangsbereiches gegen Null, können beide Kräfte gleichgesetzt werden zu:

$$\int_A \mathbf{f}_\Gamma(\mathbf{x}_\Gamma) dA = \lim_{l \rightarrow 0} \int_V \mathbf{f}_{\Gamma,V}(\mathbf{x}) dV \quad (8.2)$$

Mit Hilfe der Dirac'schen Deltafunktion δ kann das Flächenintegral in ein Volumenintegral umgeformt werden.

$$\int_A \mathbf{f}_\Gamma(\mathbf{x}_\Gamma) dA = \int_V \mathbf{f}_\Gamma(\mathbf{x}) \delta[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma) \cdot \hat{\mathbf{n}}_\Gamma] dV \quad (8.3)$$

Für eine Filmdicke $l \rightarrow 0$ läßt sich formal die Deltafunktion durch den Betrag des Gradienten der VOF-Funktion f beschreiben zu:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= H[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma) \cdot \hat{\mathbf{n}}_\Gamma] \\ \nabla f(\mathbf{x}) &= \delta[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma) \cdot \hat{\mathbf{n}}_\Gamma] \hat{\mathbf{n}}_\Gamma \\ |\nabla f(\mathbf{x})| &= \delta[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma) \cdot \hat{\mathbf{n}}_\Gamma]. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Darin ist H die Heaviside'sche Sprungfunktion. Der Sprung der f -Funktion wird bei der Diskretisierung automatisch über mehrere Zellen verschmiert, damit die f -Funktion im Übergangsbereich l eine endliche Steigung aufweist. Daraus folgt für

die Volumenkraft,

$$\int_A \mathbf{f}_{\Gamma,V} dA = \sigma \kappa_\Gamma \nabla f(\mathbf{x}) \quad (8.5)$$

mit der Krümmung der Phasengrenzfläche $\kappa_\Gamma = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}_\Gamma$. Der Einheitsnormalenvektor berechnet sich aus:

$$\hat{\mathbf{n}}_\Gamma = \frac{\mathbf{n}_\Gamma}{|\mathbf{n}_\Gamma|}. \quad (8.6)$$

Durch die Verschmierung der f -Funktion über mehrere Zellen liefert die Finite-Differenzen-Diskretisierung von Gleichung (8.5) Beiträge von den Rändern des Übergangsbereiches der Grenzfläche. Da die Dichtewerte in den Zellzentren gespeichert werden, liefert eine indirekte Differentiation der Normalenvektoren durch eine Umformulierung der Berechnung der Krümmung eine Verbesserung der numerischen Annäherung (mit $\mathbf{n} = \mathbf{n}_\Gamma$):

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \left[\left(\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \cdot \nabla \right) |\mathbf{n}| - \nabla \cdot \mathbf{n} \right] \quad (8.7)$$

Der Schwachpunkt des CSF-Modells liegt in seinem nicht-konservativen Charakter. Dadurch kann eine Impulserhaltung nicht sichergestellt werden, was unphysikalische Effekte bewirken kann. Eine Verbesserung stellt das konservative Modell von [Lafaurie u. a. \(1994\)](#) dar. Darin ergibt sich die diskrete Form der konservativen Grenzflächenkraft durch die Berechnung des Normalenvektors und der Grenzflächendichte nach derselben Approximation von ∇f . Die volumenspezifische Grenzflächenkraft \mathbf{f}_{st} läßt sich somit formulieren als:

$$\mathbf{f}_{st} = -\sigma \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} - \mathbf{I} |\mathbf{n}| \right]. \quad (8.8)$$

Die Anwendung der Quotientenregel hierauf liefert die Gleichung:

$$\mathbf{f}_{st} = -\sigma \left[\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} (\nabla \cdot \mathbf{n} - \left(\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \cdot \nabla \right) |\mathbf{n}|) + \left(\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \cdot \nabla \right) \mathbf{n} - \nabla |\mathbf{n}| \right], \quad (8.9)$$

die sich durch die letzten beiden Terme von der nichtkonservativen Form unterscheidet. Alle in dieser Arbeit vorgestellten Simulationen erfolgten nach der konservativen Methode nach [Lafaurie u. a. \(1994\)](#)

Numerische Implementierung der Grenzflächenkraft

Wie bereits oben erwähnt, liegen nicht alle Strömungsvariablen bei den Berechnungen auf den Zellmitten. Innerhalb einer Zelle erfolgt die Berechnung entsprechend der *Marker and Cell (MAC)*-Diskretisierung auf einem versetzten Gitter. In einem diskreten Volumenelement $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ werden Druck und die VOF-Funktion f in dem Zentrum der jeweiligen Zelle abgespeichert, die Geschwindigkeiten u, v, w auf den Zentren der jeweils zugehörigen Zellflächen und die Normalenvektoren \mathbf{n} auf den zur Berechnung des Impulsflusses jeweils sinnvollen Zellecken (vgl. Abbildung 8.3). Die Grenzflächenkraft $\mathbf{f}_{st,i,j,k}$ wird ebenfalls in den Zellzentren für alle

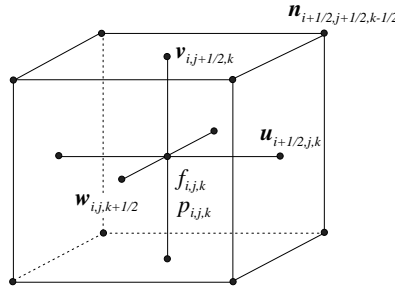


Abbildung 8.3.: Versetzte Anordnung der verwendeten Strömungsvariablen nach den Marker und Cell-Verfahren in FS3D.

drei Raumrichtungen berechnet. Die Diskretisierung des verwendeten Modells von Lafaurie u. a. (1994) erfolgt nach der Methode der zentralen Differenzen. Eine Mittelung der Normalenvektoren aus den Zellecken liefert die benötigten Normalenvektoren. Diese bestimmen sich gemäß $\mathbf{n} = \nabla f$ aus 27 benachbarten Zellen. Für die Flächenmitten werden die Normalenvektoren der Ecken arithmetisch gemittelt.

Numerische Implementierung des Stofftransportes

Wie schon in Kapitel 7.2 erwähnt, liegt an der Phasengrenze bedingt durch den Konzentrationssprung für $H \neq 1$ ein unstetiges Konzentrationsfeld vor. Unter Ausnutzung der linearen Struktur der Gleichungen (7.26), (7.27) und (7.28) wird unter

Einbeziehung des Henry'schen Gesetzes eine neue Konzentration \tilde{c} eingeführt:

$$\tilde{c} = \left\{ \begin{array}{ll} c_L & \text{in der Flüssigphase} \\ c_G/H & \text{in der Gasphase} \end{array} \right\}. \quad (8.10)$$

Damit können der Konzentrationssprung und die damit verbundenen numerischen Schwierigkeiten bei der Umsetzung von Gleichung (7.26) abgemildert werden. Diese neue Funktion ist stetig und der Sprung ist in die Ableitung verschoben. Analog zu Gleichung (7.26) gilt dann innerhalb jeder Phase

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{c} = D \Delta \tilde{c}, \quad (8.11)$$

mit den zugehörigen Sprungbedingungen:

$$[\tilde{c}] = 0 \quad (8.12)$$

$$D_L \nabla \tilde{c}_L \cdot \mathbf{n}_\Gamma = H D_G \cdot \nabla \tilde{c}_G \cdot \mathbf{n}_\Gamma \quad (8.13)$$

Wie schon bei der Massen- und Impulsbilanz so basiert auch die numerische Lösung der Stoffbilanzen auf der Finiten Volumen Methode. Ergänzend dazu wird innerhalb jedes Zeitschritts folgende Prozedur durchgeführt: Innerhalb jeder Zelle die ein Stück der Grenzfläche enthält werden vor die Berechnung der Diffusion die Werte von \tilde{c} derart berechnet, daß die resultierenden diffusiven Ströme über die Grenzfläche die beiden obigen Sprungbedingungen erfüllen.

8.2. Parasitäre Strömungen

Eine große Schwierigkeit bei der Simulation von zweiphasigen Strömungen mit freien Grenzflächen sind die sogenannten parasitären Strömungen. Sie resultieren aus Ungenauigkeiten in der Berechnung der Krümmung κ_Γ und der Normalen \mathbf{n}_Γ . Diese Strömungen induzieren in der Nähe der Phasengrenzfläche Wirbel (s. Abbildung 8.4). Parasitäre Strömungen können einen Tropfen oder eine Blase deformieren oder sogar zerreißen. Diese Probleme treten insbesondere bei geringen Geschwindigkeiten und dem Fehlen äußerer Kräfte auf. Besonders stark ist das Problem bei einer Blase in Schwerelosigkeit. In einer Simulation wird dazu der zeitliche Verlauf des Geschwindigkeitsfeldes einer 2mm Blase betrachtet. Das Geschwindigkeitsfeld ist

zum Zeitpunkt $t = 0$ vollständig gleich null. Entgegen den Erwartungen bleibt das Geschwindigkeitsfeld nicht null, wie in Abbildung 8.4 zu erkennen ist. Statt dessen entwickeln sich ausgeprägte Wirbel im Berechnungsgebiet. Eine Betrachtung

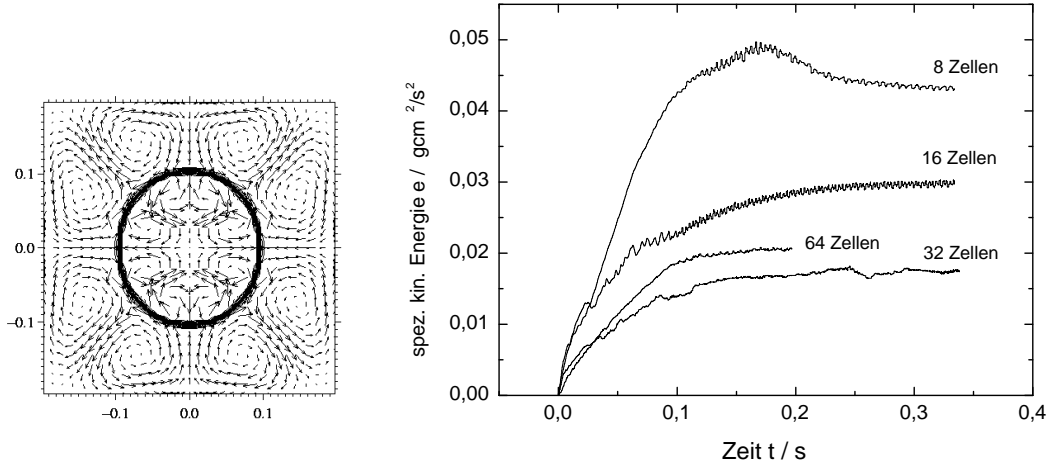


Abbildung 8.4.: Durch parasitäre Strömungen induziertes Strömungsfeld um eine 2mm Luftblase (2D) in Wasser in Schwerelosigkeit (links). Zeitlicher Verlauf der spezifischen kinetischen Energie für unterschiedliche Diskretisierungen des Blasendurchmessers (rechts).

der zeitlichen Änderung der Blasenform für eine 2D Simulation verdeutlicht, daß die Blase durch das künstliche Strömungsfeld kontinuierlich deformiert wird. Zum dargestellten Zeitpunkt ist die Blase leicht abgeflacht ($h/b = 0,92$). Die maximale Geschwindigkeit innerhalb des Rechengebiets beträgt in etwa 25cm/s, liegt also im Bereich der Aufstiegsgeschwindigkeit der Blase im Gravitationsfeld. Sie kann nach einem auf numerischen Experimenten beruhenden empirischen Ansatz von Scardovelli und Zaleski (1999) im Vorfeld abgeschätzt werden zu:

$$|\mathbf{u}_{\text{paras}}| \simeq 0,01\sigma/\eta_L. \quad (8.14)$$

Durch Glätten der f -Verteilung kann die Amplitude der parasitären Strömungen um einen Faktor von 2 bis 4 reduziert werden Lafaurie u. a. (1994). In FS3D wird eine quadratischen Glättung verwendet. Die Intensität der parasitären Strömungen ist zusätzlich von der Auflösung des Rechengebietes abhängig. Im rechten Teil

von Abbildung 8.4 ist die spezifische kinetische Energie innerhalb des gesamten Rechengebietes dargestellt. Variiert wird die Anzahl der Rechenzellen pro Blasen-durchmesser. Mit steigender Auflösung sinkt die durch die parasitären Strömungen hervorgerufene kinetische Energie im System zunächst ab. Während für 8 Zellen pro Durchmesser eine sehr hohe kinetische Energie zu verzeichnen ist, ist sie für 32 Zellen stark reduziert. Ab einer Auflösung von 64 Zellen pro Durchmesser nimmt die Intensität der parasitären Strömungen wieder zu.

Prinzipiell treten parasitäre Strömungen bei hohen Oberflächenspannungen und hohen Dichteunterschieden auf, insbesondere bei Blasen mit kleinem Durchmesser wenn die Oberflächenspannungskräfte im Vergleich zur Viskosität groß ist ([Scardovelli und Zaleski 1999](#)). Dann liegt entweder eine kleine Kapillar-Zahl

$$Ca = \frac{\eta |\mathbf{u}|}{\sigma}, \quad (8.15)$$

oder eine hohe Laplace-Zahl

$$La = \frac{\sigma \rho d_B}{2\eta^2} \quad (8.16)$$

vor. Aus numerischen Experimenten geht hervor, daß für geringe Kapillar-Zahlen und moderaten Laplace-Zahlen keine zerstörerischen Instabilitäten, aber signifikante Beeinflussungen durch parasitäre Strömungen auftreten. Wenn die Laplace-Zahl groß genug wird ($La \approx 100000$), kann es zur Zerstörung einer Blase oder eines Tropfens kommen. Weitere Probleme mit parasitären Strömungen treten laut [Scardovelli und Zaleski \(1999\)](#) auch bei kleinen Weber-Zahlen auf .

9. Numerische Simulation aufsteigender Blasen

Die nachfolgend aufgeführten Ergebnisse numerischer Simulationen wurden mit dem VOF-Programm *FS3D* durchgeführt. [Rieber und Frohn \(1997\)](#) entwickelten und validierten das Programm für die numerische Simulation von Tropfenkollisionen. Nähere Einzelheiten zu *FS3D* finden sich bei [Frohn \(1999\)](#). Das Rechengebiet besteht aus einem Quader mit kartesischem Gitter. Das Programm ist hochgradig parallelisiert, was hochauflösende Simulationen ermöglicht. Die Simulationen erfolgten für kleinere Rechengitter auf Einzelprozessormaschinen. Für größere Rechengitter konnte auf einem Siemens hpcLine Parallelrechner im Paderborn Center for Parallel Computing (*PC²*) zurückgegriffen werden. Dieser Parallelrechner besteht aus 96 Knoten mit jeweils zwei 850 MHz Pentium III Prozessoren mit 512 MB Arbeitsspeicher und ermöglicht Berechnungen auf extrem großen Rechengittern von bis zu 16 Mio. Zellen im Vergleich zu 1 Mio. Zellen auf Einzelprozessormaschinen.

9.1. Stoffwerte der verwendeten Systeme

In der Literatur existiert eine Vielzahl von Messungen des Aufstiegsverhaltens von Luftblasen in Wasser, z.B. von [Clift u. a. \(1978\)](#), [Duineveld \(1995\)](#), [Schlüter \(2002\)](#), [Ötzkurt \(2000\)](#) oder [Scheid u. a. \(2003\)](#). Diese sind eine gute Grundlage für den Vergleich mit eigenen numerischen Simulationen. Zusätzlich zu den Simulationen von Einzelblasen in Wasser (System S1) sollen auch andere newtonische Stoffsysteme, in diesem Fall Wasser/Glycerin Mischungen, betrachtet werden. Auch für diese Systeme gibt es in der Literatur Messungen, mit denen die numerischen Simulationen verglichen werden können. Um die Anzahl freier Parameter zu reduzieren, wurde meistens nur Luft als disperse Phase verwendet. Die Luft hat eine Dichte

von $\rho_G = 1,12 \text{ kg/m}^3$ und eine dynamische Viskosität von $\eta_G = 18,24 \cdot 10^{-4} \text{ kg/ms}$.

Tabelle 9.1.: Stoffwerte der verwendeten Flüssigkeiten.

Glycerin- anteil	Oberflächen- spannung $\sigma [N/m]$	Dichte $\rho [kg/m^3]$	Viskosität $\eta [Pa \cdot s]$	Morton- Zahl Mo -	System -
00,0 Gew-%	0,0720	1000,0	0,001000	$2,651 \cdot 10^{-11}$	S1
20,0 Gew-%	0,0709	1046,9	0,001775	$2,605 \cdot 10^{-10}$	S2
40,0 Gew-%	0,0696	1099,3	0,003840	$5,749 \cdot 10^{-09}$	S3
60,0 Gew-%	0,0678	1153,8	0,009450	$2,174 \cdot 10^{-07}$	S4
80,0 Gew-%	0,0655	1208,5	0,060100	$3,769 \cdot 10^{-04}$	S5
82,0 Vol-%	0,064	1205,0	0,075	$9,0 \cdot 10^{-04}$	S6
88,0 Vol-%	0,063	1222,0	0,160	$2,3 \cdot 10^{-02}$	S7
93,0 Vol-%	0,063	1230,0	0,240	$1,1 \cdot 10^{-01}$	S8
98,0 Vol-%	0,063	1245,0	0,460	$1,4 \cdot 10^{+00}$	S9
H ₂ O/CMC	0,072	1000,0	0,015	$1,331 \cdot 10^{-06}$	S10
H ₂ O/CMC	0,072	1000,0	0,025	$1,027 \cdot 10^{-05}$	S11

In der Literatur liegen umfangreiche Messungen für Wasser/Glycerin Mischungen in unterschiedlichen Mischungsverhältnissen vor. So führten [Maxworthy u. a. \(1996\)](#) aufwendige Messungen in hochreinen Systemen durch. Der Anteil des Glycerins variierte zwischen 1 und annähernd 100 Gewichtsprozent (Gew-%) bzw. Massenprozent, was Morton-Zahlen von $Mo = 7,71 \cdot 10^{-12}$ bis $2,97 \cdot 10^0$ entspricht. Für den Vergleich mit den Simulationen dienen die Systeme mit jeweils 20, 40, 60 und 80 Massenprozent Glycerin (S2-S5). Weitere Messungen von Glycerin/Wasser Gemischen führten [Raymond und Rosant \(2000\)](#) durch. Die Autoren variierten den Glycerinanteil von 60 auf annähernd 100 *Volumenprozent* (Vol-%). Die zugehörigen Morton-Zahlen variieren zwischen $9,0 \cdot 10^{-7}$ und $7,0 \cdot 10^0$. Zum Vergleich mit den Simulationen dienen Glyceringehalte von jeweils 82, 88, 93 und 98 Vol-% (Systeme S6-S9). Tabelle 9.1 faßt alle Stoffdaten der für die Simulationen verwendeten Flüssigkeiten zusammen. Zusätzlich sind die Systeme S10 und S11 aufgeführt, das

aus einer Wasser/CMC (Carboxylmethycellulose) Mischung besteht. Diese Systeme werden ausschließlich bei den Simulationen des Stoffaustauschs verwendet.

Das System S1 (ausgefülltes Symbol) besteht aus reinem Wasser. Die Systeme nach Maxworthy u. a. S2-S5 sind mit offenen Symbolen gekennzeichnet, während die Systeme nach Raymond und Rosant (S6-S9) mit halboffenen Symbolen gekennzeichnet sind.

9.2. Variationen der Stoffeigenschaften der dispersen Phase

In einer ersten Studie wurde untersucht, welche Auswirkung eine Veränderung der Stoffeigenschaften der *dispersen* Phase auf die Aufstiegsgeschwindigkeit einer 2mm Blase in Wasser hat. Parameter sind die Viskosität und die Dichte der Gasphase sowie die Grenzflächenspannung.

Je höher der Dichtesprung von der kontinuierlichen zur dispersen Phase ist, desto schwieriger wird dessen numerische Handhabung mittels des VOF-Codes. Nur wenige CFD-Werkzeuge sind in der Lage, das reale Dichteverhältnis $\gamma = \rho_L/\rho_G$ von 1000 für Wasser/Luft zu bewältigen. Daher ist es interessant, wie stark sich eine Erhöhung der Dichte der Gasphase, bzw. eine Reduzierung des Dichteverhältnisses γ auf die Aufstiegsgeschwindigkeit auswirkt, um ggf. das Dichteverhältnis reduzieren zu können.

Der linke Teil der Abbildung 9.1 zeigt die Aufstiegsgeschwindigkeiten für Dichteverhältnisse von 10-1000. Für ein reales Stoffsystem ($\gamma = 1000$) beträgt die simulierte Aufstiegsgeschwindigkeit $w_B = 24,84\text{cm/s}$. Eine Erhöhung der Dichte der Gasphase um den Faktor 10 ($\gamma = 100$) reduziert die Geschwindigkeit auf $24,45\text{cm/s}$. Eine weitere Erhöhung reduziert sie auf $23,71\text{cm/s}$ ($\gamma = 50$), $23,12\text{cm/s}$ ($\gamma = 25$) und $22,42\text{cm/s}$ ($\gamma = 10$). Dies verdeutlicht, daß eine Dichteerhöhung in der Gasphase um den Faktor 10 noch physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefert. Weitere Erhöhungen führen zu unphysikalischen Werten.

Im rechten Teil der Abbildung 9.1 sind die Aufstiegsgeschwindigkeiten für ver-

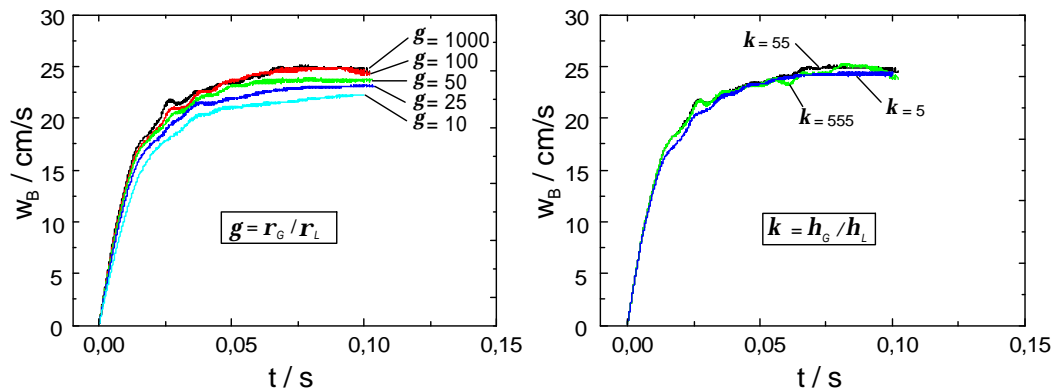


Abbildung 9.1.: Einfluß des Dichte- und Viskositätsverhältnis auf die Aufstiegs-
geschwindigkeit einer 2mm Blase.

Tabelle 9.2.: Aufstiegs-
geschwindigkeit einer 2,0mm Luftblase bei Variation der Dichte-
und Viskositätsverhältnisse und der Oberflächenspannung.

Blasen- durchmesser d_B [mm]	Dichte- verhältnis $\gamma = \rho_G / \rho_L$ [-]	Viskositäts- verhältnis $\kappa = \eta_L / \eta_G$ [-]	Oberflächen- spannung σ [N/m]	Aufstiegs- geschwindigkeit w_B [cm/s]
2,0	1000	55	0,073	24,84
2,0	100	55	0,073	24,45
2,0	50	55	0,073	23,71
2,0	25	55	0,073	23,12
2,0	10	55	0,073	22,42
2,0	1000	555	0,073	23,79
2,0	1000	5	0,073	24,42
1,0	1000	55	0,400	28,97
1,0	1000	55	0,200	21,84
1,0	1000	55	0,073	20,13
1,0	1000	55	0,050	17,33
1,0	1000	55	0,001	6,52

schiedene Viskositätsverhältnisse $\kappa = \eta_L/\eta_G$ gezeigt. Für das reale Stoffsystem gilt $\kappa = 55$ mit der zugehörigen Aufstiegsgeschwindigkeit von $w_B = 24,84\text{cm/s}$. Eine Veränderung von κ auf die Werte von 5 und 555 verändert die Geschwindigkeit nur gering ($w_B = 24,42\text{cm/s}$, bzw. $23,79\text{cm/s}$).

Einen wesentlich stärkeren Einfluß auf die Aufstiegsgeschwindigkeit hat eine Änderung der Oberflächenspannung σ , wie Tabelle 9.2 zeigt. Schon eine leichte Reduzierung der Oberflächenspannung von $0,073\text{N/m}$ auf $0,050$ führt zu einer starken Verringerung der Aufstiegsgeschwindigkeit. Durch die geringere Oberflächenkraft wird die Blase breiter und stellt der Strömung einen größeren Widerstand durch den vergrößerten Anströmungsquerschnitt entgegen. Besonders stark ausgeprägt ist dieser Effekt bei $\sigma = 0,001\text{N/m}$. Eine höhere Oberflächenspannung wiederum reduziert den Anströmungsquerschnitt und bringt höhere Aufstiegsgeschwindigkeiten mit sich.

In der Literatur werden in einigen Fällen Stoffsysteme nicht durch reale Stoffwerte, sondern lediglich durch die sie charakterisierenden Kennzahlen (Morton, Reynolds, Eötvös) beschrieben (Sabisch u. a. 2001). Dies hat den Vorteil, daß Dichteverhältnisse von $\gamma = 1000$ und Viskositätsverhältnisse von $\kappa = 55$ umgangen werden können, sofern die relevanten Kennzahlen fixiert bleiben. Diese Vereinfachung bringt erhebliche Vorteile für die Numerik. Daher soll untersucht werden, ob diese Vereinfachung dieselben Ergebnisse liefert, wie eine Rechnung mit realen Stoffwerten. Zunächst muß ein fiktives Stoffsystem festgelegt werden, das dieselbe Morton-Zahl von $\log(Mo) = -10,59$ aufweist wie Wasser/Luft. Wie bei Sabisch soll das Dichteverhältnis $\gamma = 0,5$ betragen. Die Oberflächenspannung, die Dichte des Wassers und die in der Morton-Zahl nicht erfaßte Viskosität der dispersen Phase (hier Luft) sollen den realen Stoffwerten entsprechen. Die Stoffwerte von Wasser werden für Fluid 1 übernommen, die für Fluid 2 werden so gewählt, daß die Morton-Zahl identisch bleibt. Somit ergeben sich für das Stoffsystem Fluid 1/Fluid 2 folgende Stoffwerte:

<i>Fluid1</i>	$\rho_L^* = 998,2\text{kg/m}^3$	$\eta_L^* = 1191 \cdot 10^{-6}\text{kg/ms}$	$\sigma = 0,073\text{N/m}$
<i>Fluid2</i>	$\rho_G^* = 0,5 \cdot \rho_L^*$	$\eta_L^* = 18,24 \cdot 10^{-6}\text{kg/ms}$	

Anhand von zwei verschiedenen Blasengrößen sollen nun die beiden "identischen"

Stoffsysteme verglichen werden. Als Bezugswerte gelten die Ergebnisse des Aufstiegs zweier Luftblasen in Wasser. Ihre Durchmesser betragen jeweils 1 und 2mm, was Eötvös-Zahlen von 0,13 bzw. 0,53 entspricht. Daraus folgen Blasen des fiktiven Systems Fluid1/Fluid2 mit Durchmessern von 1,4 und 2,8mm.

Die Ergebnisse der vier Simulationen sind in Tabelle 9.3 dargestellt. Daraus wird deutlich, daß trotz identischer Morton- und Eötvös-Zahlen stark unterschiedliche Reynolds-Zahlen für die Aufstiegsgeschwindigkeit simuliert werden.

Tabelle 9.3.: Vergleich von simulierten Blasen mit identischen Morton- und Eötvös-Zahlen aber unterschiedlichen Stoffwerten.

log Mo= -10.59				
	Wasser/Luft	Fluid 1/Fluid 2	Wasser/Luft	Fluid 1/Fluid 2
Eö / -	0,13	0,13	0,53	0,53
d_B / mm	1,0	1,4	2,0	2,8
w_B / cm/s	20,13	12,88	22,15	12,51
Re / -	201	151	441	294
c_{VM} / -	0,549	0,628	0,579	0,641

Während für reale Stoffwerte die experimentell gewonnenen Reynolds-Zahlen von $Re_{exp}(1mm) \approx 270$ und $Re_{exp}(2mm) \approx 640$ noch annähernd wiedergegeben werden können, liefern die Simulationen mit fiktiven Stoffwerten unphysikalische Ergebnisse.

Ein weiterer Aspekt ist das Beschleunigungsverhalten der Blase. In Zweiphasenströmungen kommt es immer wieder zu Beschleunigungen einer Blase, z.B. in der Wirbelschlepe einer weiteren Blase.

Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 erwähnt, wird bei der Beschleunigung der Blase auch die umgebende Flüssigkeit mitbeschleunigt. Dieser Effekt wird durch den virtuellen Massenkoeffizient c_{VM} berücksichtigt. Dieser berechnet sich aus der maximalen anfänglichen Beschleunigung der Blase. Mit Hilfe der Auftriebskraft $F_A = \Delta\rho V_B g$, Gleichung (2.45) und des ersten Newton'schen Gesetzes kann der virtuelle Massen-

koeffizient unter Vernachlässigung der Widerstandskraft berechnet werden gemäß:

$$c_{VM} = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_L} \right) \frac{g}{a} - \frac{\rho_G}{\rho_L}. \quad (9.1)$$

In dieser Gleichung ist a die maximale Beschleunigung zu Beginn in Bewegungsrichtung. Sie berechnet sich für nicht äquidistante Zeitschritte aus folgender Gleichung (Ferziger und Peric 2002):

$$a_x(t) = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right)_i = \frac{x_{i+1}(t_i - t_{i-1}) + x_{i-1}(t_{i+1} - t_i) - x_i(t_{i+1} - t_{i-1})}{(t_{i+1} - t_i)^2(t_i - t_{i-1})}. \quad (9.2)$$

Für das hohe Dichteverhältnis von Luft zu Wasser wird aus Gleichung (9.1) $c_{VM} \approx g/a$.

Die aus den Simulationen gewonnenen Koeffizienten sind ebenfalls in Tabelle 9.3 aufgeführt. Die Abweichungen der virtuellen Massenkoeffizienten c_{VM} der fiktiven Systeme von den realen betragen 14,4% (Eö=0,13) bzw. 9,7% (Eö=0,53). Dieser Vergleich zeigt, daß weder für die Endgeschwindigkeit noch für das Beschleunigungsverhalten der Blasen möglich ist, den realen physikalischen Zusammenhang nur durch die Fixierung der Kennzahlen korrekt wiederzugeben. Daher werden den Simulationen in dieser Arbeit ausschließlich reale Stoffwerte zugrunde gelegt.

9.3. Vergleich mit analytischen Lösungen

Bedingt durch die hohen Viskositäten in der Flüssigphase und die damit verbundenen niedrigen Aufstiegsgeschwindigkeiten in den Systemen (S6-S9) nach Raymond und Rosant (2000) sinken die Reynolds-Zahlen für kleinere Durchmesser auf sehr kleine Werte. Dies ermöglicht den Vergleich der Blasenform und der Geschwindigkeitsfelder mit analytischen Lösungen, die im Bereich $Re \ll 1$ gültig sind. Während für Wasser bei kleinen Reynolds-Zahlen parasitäre Strömungen die numerischen Ergebnisse stark verfälschen, spielen sie für hohe Viskositäten kaum eine Rolle. Die Amplitude der parasitären Strömungen kann im Vorfeld nach dem Ansatz von Scardovelli und Zaleski (1999) abgeschätzt werden (vgl. Gleichung 8.14). Auch sind die Laplace und Kapillar-Zahlen weit von den kritischen Werten entfernt.

Für eine 4mm Blase des Systems S9 betragen sie beispielsweise $La(4mm) = 0,18$ und $Ca(4mm) = 0,74$. Diese sind weit außerhalb des kritischen Bereiches, so daß eine starke Beeinflussung durch die parasitären Strömungen ausgeschlossen werden kann. Die Größenordnung der parasitären Strömungen beträgt mit 0,16cm/s etwa 6% der Aufstiegsgeschwindigkeit der Blase. Die folgenden Ergebnisse wurden bereits z.T. in (Koebe u. a. 2003) veröffentlicht.

9.3.1. Blasenform

Für geringe Deformationen und kleine Reynolds-Zahlen kann die Kontur einer Blase in Kugelkoordinaten mit dem Ansatz von Taylor und Acrivos (1964) analytisch berechnet werden:

$$\zeta(\theta) = -\frac{1}{2}\lambda We P_2(\cos\theta) - \frac{3\lambda(11\kappa + 10)}{70(\kappa + 1)}\frac{We^2}{4\epsilon}P_3(\cos\theta) + \dots \quad (9.3)$$

mit

$$\lambda = \frac{1}{4(1 + \kappa)^3} \left[\left(\frac{81}{80}\kappa^3 + \frac{57}{20}\kappa^2 + \frac{103}{40}\kappa + \frac{3}{4} \right) - \frac{(\gamma - 1)}{12}(\kappa + 1) \right], \quad (9.4)$$

mit $\zeta = -1 + r(\theta)/r_B$, dem Winkel θ , dem Viskositätsverhältnis $\kappa = \eta_L/\eta_G$, dem Dichteverhältnis $\gamma = \rho_L/\rho_G$ und den Legendre Polynomen $P_2(X) = (3x^2 - 1)/2$ und $P_3(X) = (5x^3 - 3x)/2$. Unter Verwendung der aus den numerischen Simulationen gewonnenen Reynolds- und Weber-Zahlen können mit Hilfe von Gleichung 9.3 die analytischen Durchmesserhältnisse bestimmt werden. Abbildung 9.2 stellt diese Durchmesserhältnisse den numerisch gewonnenen gegenüber. Der Abbildung ist zu entnehmen, daß oberhalb eines Durchmesserhältnisses von etwa 0,8 die Abweichung zwischen numerischer und analytischer Lösung kleiner als 5% ist. Die numerischen Werte sind also in gutem Einklang mit den analytischen Lösungen. Einzige Ausnahme innerhalb dieses Bereiches ist eine Simulation des Systems S9 ($h/b_{numerisch} = 0,84$). Für diese Simulation sind die numerisch und analytisch gewonnenen Blasenkonturen in Abbildung 9.2 explizit dargestellt. Trotz der Abweichungen im Durchmesserhältnis ist eine sehr gute qualitative Übereinstimmung zu erkennen. Für Durchmesserhältnisse kleiner als 0,8 ist die Abweichung zu

den analytischen Lösungen wesentlich größer, insbesondere für die niedrigviskosen Systeme S1 und S2. Allerdings ist es auch fraglich, ob für die relativ hohen Reynolds-Zahlen innerhalb dieser Systemen ($Re > 300$) die Gleichung nach Taylor und Acrivos noch gültig ist.

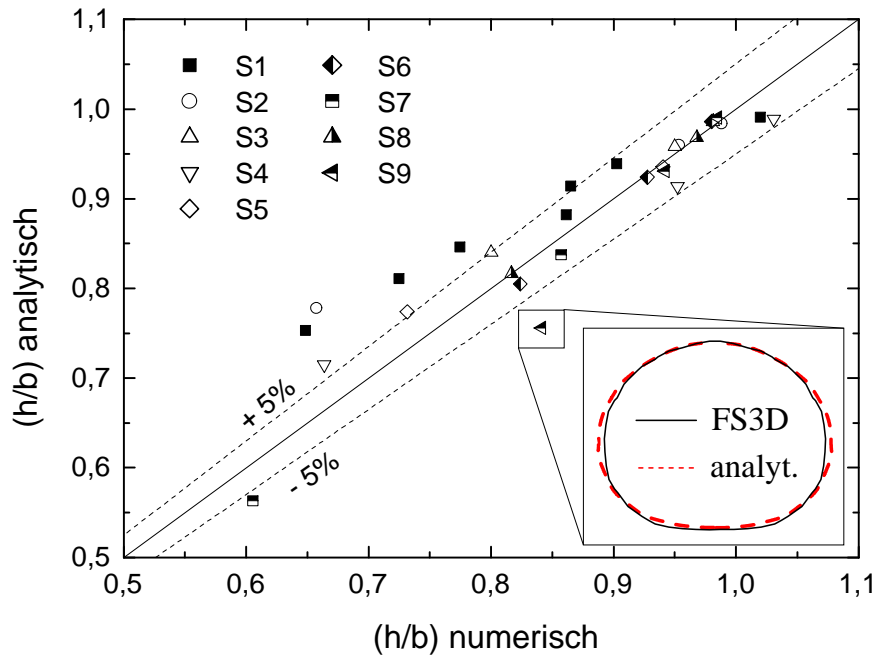


Abbildung 9.2.: Vergleich der numerischen mit analytisch bestimmten Durchmesser- verhältnissen für geringe Reynolds-Zahlen und kleine Deformationen. Kleines Bild: Vergleich zwischen numerischen und analytischen Blasenkontur.

Bei der Betrachtung der Durchmesser- verhältnisse der Blasen des Systems S1 wird deutlich, daß die numerisch gewonnenen Durchmesser- verhältnisse systematisch zu klein im Vergleich zu den analytischen sind. Die Blasen sind also zu flach bzw. zu breit. Dies wiederum bedeutet, daß die Blasen in den Simulationen einen zu großen Strömungsquerschnitt aufweisen und somit auch einen größeren Widerstand, der die Geschwindigkeit der Blasen reduziert. Für die Stoffsysteme der in [Abbildung 9.2](#) nicht dargestellten Simulationen lieferte Gleichung (9.3) unphysikalische Blasenformen in Form einer liegenden Acht.

9.3.2. Geschwindigkeitsfelder

Analytische Lösungen der nichtlinearen Navier-Stokes Gleichungen existieren nur in wenigen Fällen. Im Bereich der schleichenden oder Stokes'schen Strömung ($Re \rightarrow 0$) kann der Beschleunigungsterm in den Navier-Stokes Gleichungen vernachlässigt werden. Hadamard und Rybczynski leiteten unabhängig voneinander die Lösung der Navier-Stokes Gleichungen für eine fluide Sphäre her ([Clift u. a. 1978](#); [Sadhal u. a. 1997](#)). Daraus folgen die Stromfunktionen ψ in Polarkoordinaten für die äußere Umströmung der Kugel

$$\psi_{H,R}(r, \theta) = \frac{1}{2} u R^2 \sin^2 \theta \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{(2 + 3\kappa)}{2(1 + \kappa)} \left(\frac{r}{R} \right) + \frac{\kappa}{2(1 + \kappa)} \left(\frac{R}{r} \right) \right], \quad (9.5)$$

und für die Strömung innerhalb der Kugel

$$\hat{\psi}_{H,R}(r, \theta) = \frac{1}{4} u R^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{1 + \kappa} \right) \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right]. \quad (9.6)$$

Diese Gleichungen gelten für den rotationssymmetrischen Fall. Darin stellt $\kappa = \eta_B/\eta_L$ das Viskositätsverhältnis und R den Blasenradius dar. Die Geschwindigkeiten in axialer und radialer Richtung u_r und u_θ lassen sich berechnen aus:

$$u_r(r, \theta) = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial \theta} \quad (9.7)$$

$$u_\theta(r, \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r}. \quad (9.8)$$

Der Ansatz nach Hadamard und Rybczynski wurde von [Taylor und Acrivos \(1964\)](#) aufgegriffen und erweitert. Taylor und Acrivos berücksichtigen Trägheitseffekte in den Navier-Stokes Gleichungen durch eine singuläre Störung mit dem Parameter $\epsilon = 0,5Re$ ([Sadhal u. a. 1997](#)). Für die Stromfunktionen gilt:

$$\psi_{T,A}(r, \theta) = \psi_{H,R} + \epsilon \psi_1(r, \theta), \quad (9.9)$$

$$\hat{\psi}_{T,A}(r, \theta) = \hat{\psi}_{H,R} + \epsilon \hat{\psi}_1(r, \theta). \quad (9.10)$$

Die Korrekturterme ψ_1 und $\hat{\psi}_1$ können der Literatur entnommen werden (z.B. [Taylor und Acrivos 1964](#); [Sadhal u. a. 1997](#)). Mit Hilfe dieses Ansatzes können auch die Strömungsfelder um leicht deformierte Blasen berechnet werden.

Mit Gleichung (9.6) wird ein Hill'schen Wirbel beschrieben. Darin wird der konvektive Anteil der Navier-Stokes Gleichungen mitberücksichtigt. Durch Berücksichtigung der Zustände an der Phasengrenzfläche kann der Hill'sche Wirbel, der normalerweise eine reibungsfreie Strömung beschreibt, auch für eine viskose Strömung im Inneren der Blase angewandt werden ([Sadhal u. a. 1997](#)). Durch die Reibung reduziert sich die maximale Stärke des Hill'schen Wirbels.

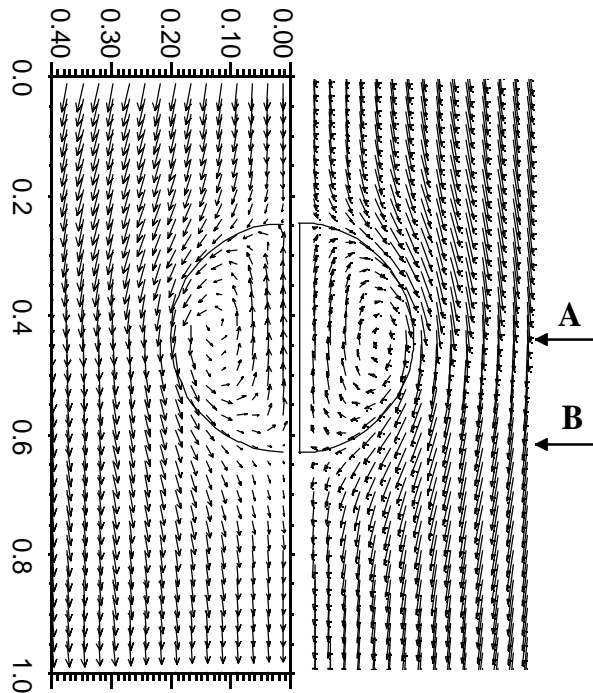


Abbildung 9.3.: Vergleich zwischen dem numerisch (links) und analytisch (rechts) bestimmten Strömungsfeldes einer 4mm Blase im Gegenstrom.

Die aus diesen Gleichungen gewonnenen Strömungsfelder innerhalb und außerhalb der Blase bieten eine gute Validierungsmöglichkeit für die Ergebnisse der nume-

rischen Simulation. Gewählt wird eine 4mm Blase des Systems S9, die mit einer Geschwindigkeit von 2,71cm/s aufsteigt. Die zugehörige Reynolds-Zahl beträgt $Re = 0,29$ und die Blasenform kann mit $h/b = 0,985$ als kugelförmig angenommen werden. Der qualitative Vergleich des numerisch und analytisch bestimmten Strömungsfeldes in Abbildung 9.3 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Strömungsstruktur und der Richtung der Geschwindigkeitsvektoren. Eine nähere Betrachtung zeigt jedoch, daß die jeweiligen Wirbelzentren im Innern der Blase leicht gegeneinander verschoben sind. Für einen quantitativen Vergleich werden zwei Schnitte durch das Strömungsfeld näher betrachtet. Schnitt A geht durch das Zentrum der Blase, und Schnitt B liegt am unteren Ende der Blase. Die axialen und normalen Geschwindigkeitskomponenten innerhalb dieser Schnitte werden in Abbildung 9.4 gegenübergestellt. Die Symbole kennzeichnen die numerischen Werten, während die Linien die analytischen Lösungen wiedergeben.

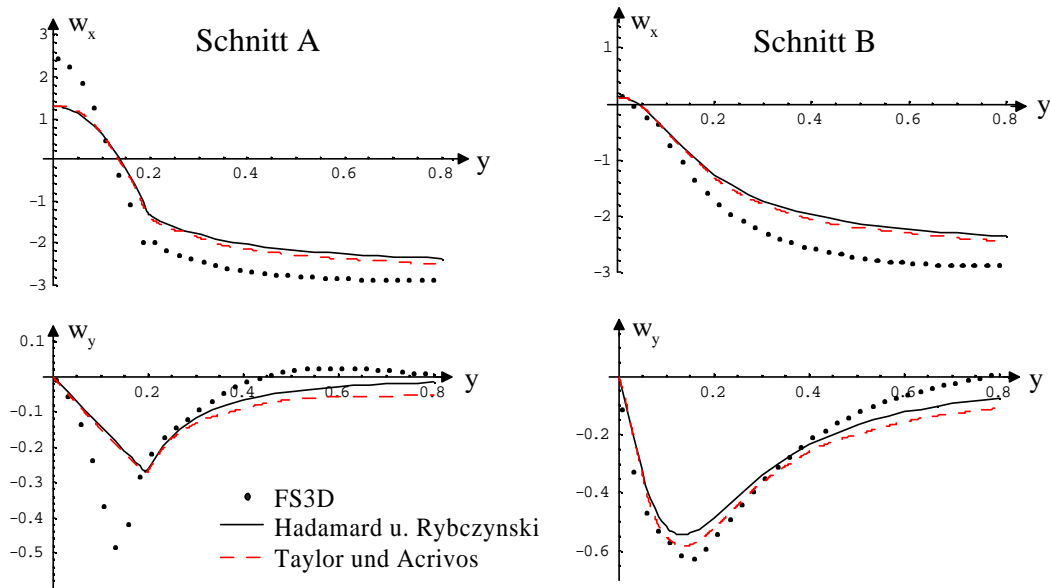


Abbildung 9.4.: Vergleich zwischen numerisch (Punkte) und analytisch (Linien) bestimmten Geschwindigkeiten in axialer (w_x , oben) und radialer (w_y , unten) Richtung.

Bei der Betrachtung der Geschwindigkeitsprofile kann nur eine semiquantitative

Übereinstimmung festgestellt werden. Die axialen und radialen Profile sind vom selben Typ. Bedingt durch die unterschiedlichen Zentren der Wirbel liegen Differenzen von bis zu 100% der radialen und axialen Geschwindigkeit im Schnitt A vor. Im Schnitt B kann noch von einer befriedigenden Wiedergabe der Geschwindigkeitsprofile gesprochen werden. Außerhalb der Blase werden die Differenzen zwischen numerisch und analytisch bestimmten Geschwindigkeiten zunehmend kleiner. Generell sind nur kleine Differenzen zwischen den beiden analytischen Ansätzen feststellbar. Bei den axialen Geschwindigkeitsprofilen kann eine bessere Übereinstimmung mit dem Ansatz von Taylor und Acrivos festgestellt werden. Innerhalb der Blase und in ihrer unmittelbaren Nähe liegt für den Ansatz von Taylor und Acrivos eine geringfügig bessere Übereinstimmung der radialen Geschwindigkeit mit den numerischen Werten vor. Mit zunehmendem Abstand von der Blase stimmen die numerischen Werte besser mit dem Ansatz von Hadamard und Rybczynski überein.

Innerhalb eines Blocks von zwei Blasendurchmessern um das Blasenzentrum herum beträgt die mittlere Abweichung zwischen den numerisch und analytisch bestimmten Geschwindigkeiten 0,61cm/s, was einem Wert von 23% der Aufstiegsgeschwindigkeit entspricht. Bedingt durch die geringere Viskosität der Gasphase beträgt die Reynolds-Zahl dort etwa $Re = 10$. Daher kann in der Gasphase nicht mehr von einer schleichenden Strömung ausgegangen werden. Sie liegt also außerhalb des Geltungsbereiches der analytischen Lösungen. Eine Erhöhung der Viskosität der Gasphase um den Faktor 100 reduziert die mittlere Abweichung zwischen beiden Ansätzen auf einen Wert von 0,53cm/s, also auf weniger als 20% der Aufstiegsgeschwindigkeit.

Für diese Differenzen gibt es eine Reihe von Erklärungen. Mögliche Fehlerquellen sind der Geschwindigkeitseinlaß und die Randbedingungen in den Simulationen, die nur Näherungen der wahren Physik wiedergeben. Die analytischen Lösungen sind nur Näherungslösungen der Navier-Stokes Gleichungen. Sie gelten für ein unendlich ausgedehntes Gebiet, während die Simulationen innerhalb eines quaderförmigen Bereiches mit einem Wandabstand von vier Blasendurchmessern erfolgen. Daher bedarf es noch weiterer Untersuchungen mit erhöhtem Wandabstand, um diesen möglichen Fehler zu minimieren. Weiterhin ist eine Beeinflussung durch parasitäre

Strömungen nicht völlig auszuschließen.

9.4. Einfluß von Gitterauflösung und Wandabstand

Die Aufstiegsgeschwindigkeiten und das Aufstiegsverhalten von Blasen in Flüssigkeiten hängt bei numerischen Simulationen von der Auflösung des Rechengebiets und dem Wandabstand ab. Bei der sogenannten Direkten Numerischen Simulation (DNS) wird eine räumlich und zeitlich diskretisierte Form der relevanten Bilanzgleichungen gelöst, wobei keine zusätzliche Modellierung der vom Gitter nicht mehr aufgelösten Skalen erfolgt. Um alle relevanten Größen erfassen zu können, müssen die jeweiligen Längenskalen durch die Diskretisierung aufgelöst werden. In der Wirbelschleppe hinter der Blase befindet sich die Strömung im Übergangsbereich zur turbulenten Strömung. Daher ist zu erwarten, daß die Kolmogorov'sche Längenskala λ_K eine Rolle spielt. Sie ist definiert als:

$$\lambda_K = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon_D} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (9.11)$$

mit der auf die Masse bezogenen Rate der Energiedissipation ε_D . Für den Fall der aufsteigenden Blasen kann sie abgeschätzt werden zu $\varepsilon_D = w_B g$. Um eine wahre Direkte Numerische Simulation durchzuführen muß die Kolmogorov'sche Längenskala fein genug aufgelöst werden. Dies erweist sich bei niedrigviskosen Systemen als problematisch, da die Längenskala dort sehr klein wird. Auf den folgenden Seiten soll untersucht werden, ob auch eine weniger feine Auflösung des Rechengebietes physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefern kann. Weiterhin soll der Einfluß des Wandabstandes näher untersucht werden.

Auflösung des Blasendurchmessers und des Rechengebietes

Erste Richtwerte für die Auflösung des Blasendurchmessers und damit auch des Rechengebietes können der Literatur entnommen werden. [Tomiya u. a. \(1998a\)](#) löste den Blasendurchmesser für dreidimensionale Simulationen mit wenigstens 14 Zellen auf, um physikalisch sinnvolle Aufstiegsgeschwindigkeiten zu erreichen. [Unverdi und Tryggvason \(1992\)](#) sowie [Sabisch u. a. \(2001\)](#) nahmen 16 Zellen zur

Auflösung des Durchmessers.

In einer weiteren Studie sollen die Auflösungen für zwei unterschiedliche Durchmesser variiert und die zugehörige Aufstiegsgeschwindigkeit der Blase bestimmt werden. Der Wandabstand beträgt wie bei Sabisch u. a. vier Blasendurchmesser. Der Durchmesser der Luftblasen in Wasser ist auf $d_B = 1,3\text{mm}$ festgelegt. Aus Experimenten ist bekannt, daß eine Blase diesen Durchmessers mit etwa 35cm/s geradlinig aufsteigt. Daher kann das Rechengbiet durch 2 Symmetrieebenen verkleinert werden. Als Randbedingungen werden Schlupfbedingungen an der Unterseite und den Wänden, sowie eine Druckrandbedingung am Auslaß gewählt. Die Blase steigt in ruhender Flüssigkeit auf. Zu Beginn der Simulation ist sie sphärisch. Bis zum Erreichen ihrer stationären Aufstiegsgeschwindigkeit muß die Blase eine ausreichende Strecke zurücklegen, das Gebiet muß also hinreichend lang gewählt werden. Im vorliegenden Fall erweist sich ein Gebiet von $2,08\text{cm} \times 0,26\text{cm} \times 0,26\text{cm}$ als ausreichend groß. Tabelle 9.4 faßt alle Auflösungen und Einstellungen der Simulationen für die $1,3\text{mm}$ Blase zusammen.

Beträgt die Auflösung des Durchmessers lediglich 8 Zellen, so ist die Aufstiegsgeschwindigkeit mit $w_B(8\text{Zellen}) = 19,0\text{cm/s}$ verglichen mit der experimentellen Geschwindigkeit von 35cm/s viel zu klein. Daher wird die Auflösung nun sukzessive so lange erhöht, bis eine Gitterunabhängigkeit vorliegt. Der Mehrgitterlöser des verwendeten Programmes läßt nur eine Verdoppelung der Zellenzahl pro Raumrichtung zu. Daher wird der Durchmesser nun mit 16 Zellen aufgelöst. Die Aufstiegsgeschwindigkeit erhöht sich auf diese Weise auf $w_B(16\text{Zellen}) = 23,95\text{cm/s}$. Eine weitere Erhöhung auf 32 und 64 Zellen pro Durchmesser bringt Geschwindigkeiten von $w_B(32\text{Zellen}) = 25,48\text{cm/s}$ und $w_B(64\text{Zellen}) = 30,58\text{cm/s}$ mit sich. Zu diesem Zeitpunkt ist noch keine Gitterunabhängigkeit zu erkennen. Die Zellgröße ist jetzt erstmals mit $0,02\text{mm}$ Kantenlänge geringfügig unterhalb der Kolomogorov'sche Längenskala mit $\lambda_K = 0,027\text{mm}$. Es liegt also noch keine hinreichend hohe Auflösung vor. Für diese größte maximale Auflösung in 3D befinden sich 256^3 Zellen im Rechengbiet. Die Rechenzeit beträgt auf einem Parallelrechner mit 128 Prozessoren mehrere Tage. Für den dreidimensionalen Fall ist daher keine weitere

Erhöhung der Zellenzahl möglich.

Tabelle 9.4.: Aufstiegs-*geschwindigkeit* einer 1,3mm Luftblase in Wasser in Abhängig-
keit von der Auflösung des Rechengebiets.

Blasen- durchmesser d_B [mm]	Auflösung des Rechengebiets [-]	Dimen- sionen [-]	Zellen pro Durchmesser [-]	Aufstiegs- geschwindigkeit w_B [cm/s]
1,3	128x16x16	3D	8	19,04
1,3	256x32x32	3D	16	23,95
1,3	512x64x64	3D	32	25,48
1,3	1024x128x128	3D	64	30,58
1,3	256x64x1	2D	16	18,30
1,3	512x128x1	2D	32	20,40
1,3	1024x256x1	2D	64	22,36
1,3	2048x512x1	2D	128	23,29

Im zweidimensionalen Fall kann eine weitere Gitterverfeinerung vorgenommen werden. Wie aus der Tabelle ersichtlich wird, ist selbst für eine Auflösung von 128 Zellen pro Durchmesser noch keine Gitterinvarianz zu erkennen. Zwar ist die Kolmogorov Längenskala hier mit etwa 2,5 Zellen aufgelöst, aber es ist völlig unklar, ob die Kriterien für den 3D auf den 2D Fall übertragbar sind. Da die Zeitschrittweite in den Simulationen quadratisch proportional zur Zellgröße ist, beträgt die Rechenzeit für diesen Fall fast eine Woche, so daß auf eine weitere Verfeinerung verzichtet wurde. Auch ist aus Tabelle 9.4 erkennbar, daß die Geschwindigkeiten im zweidimensionalen Fall weit unter den Werten in 3D liegen, so daß eine vereinfachende Reduzierung der Raumdimensionen nicht sinnvoll ist. Die starke Abhängigkeit von der Diskretisierung ist nur bei kleineren Blasendurchmessern gegeben. Bei einer 8mm Blase erhöht sich die Aufstiegs-*geschwindigkeit* bei einer Erhöhung der Diskretisierung von 16 auf 32, bzw. 64 Zellen pro Durchmesser nur um ca. 6% von 20,69cm/s auf 21,91cm/s, bzw. um 11% auf 23,06cm/s. Warum sich die Aufstiegs-*geschwindigkeit* der 8mm Blase nur sehr gering im Vergleich zu der 1,3mm Blase erhöht hat, konnte

nicht geklärt werden und bedarf noch weiterer Untersuchungen.

Im zweiten Teil der Studie wird der Aufstieg einer 4mm Blase in einer viskosen CMC-Lösung (S10) untersucht ($\eta_L = 15 \text{ mPas}$). Die Auflösungen und die zugehörigen Geschwindigkeiten können Tabelle 9.5 entnommen werden. Für dieses System liegt bereits ab einer Auflösung von 64 Zellen pro Durchmesser praktisch Gitterinvarianz vor. Bei einer Auflösung von 32 Zellen pro Blasendurchmesser ist die Kolmogorov'sche Skala bereits mit 2 Zellen aufgelöst.

Tabelle 9.5.: Aufstiegsgeschwindigkeit einer 4,0mm Luftblase in einer CMC-Lösung in Abhängigkeit von der Auflösung des Rechengebiets.

Blasen- durchmesser d_B [mm]	Auflösung des Rechengebiets [-]	Dimen- sionen [-]	Zellen pro Durchmesser [-]	Aufstiegs- geschwindigkeit w_B [cm/s]
4,0	256x64x1	2D	16	14,90
4,0	512x128x1	2D	32	15,92
4,0	1024x256x1	2D	64	16,36
4,0	2048x512x1	2D	128	16,43

Obwohl das Ergebnis für höhere Auflösungen das physikalisch sinnvollste ist, muß aufgrund der limitierten Rechenkapazität und -zeit ein sinnvoller Kompromiß gewählt werden. Die Kolmogorov'sche Längenskala kann nur für höherviskose Systeme hinreichend genau aufgelöst werden. Solange nichts anderes angegeben ist, wird die Auflösung des Blasendurchmessers für alle nachfolgenden Simulationen auf 16 Zellen limitiert. Dies reduziert die Dauer der Simulation insbesondere bei langen Rechengebieten auf ein erträgliches Maß und liefert trotzdem physikalisch durchaus sinnvolle Resultate, insbesondere bei größeren Blasendurchmessern (s.o.).

Variation der Wandabstände

Aus der Anschauung ist klar, daß ein geringer Wandabstand Einfluß auf die Aufstiegsgeschwindigkeiten einer Blase hat. Während in Experimenten der Wandabstand fast ausschließlich deutlich größer als der Blasendurchmesser ist ($d_W \gg d_B$), so ist

er in den Simulationen auf wenige Blasendurchmesser begrenzt.

Tabelle 9.6 zeigt den Einfluß des Wandabstandes auf die Aufstiegs-
geschwindigkeit einer 4, 5 und 8 mm Luftblase in Wasser. Der Aufstieg der Blase erfolgt in diesem
Fall ohne Symmetriebedingungen in einem Gebiet mit Schlupfrandbedingungen an
den Wänden und wiederum einer Druckrandbedingung. Ein Wandabstand von nur
2 Blasendurchmessern führt für eine 4mm Blase zu einer Aufstiegs-
geschwindigkeit von lediglich 17,47cm/s (Experiment etwa 25cm/s). Dieser Wert steigt bei einer
Verdopplung des Abstandes auf 22,79cm/s. Eine weitere Verdoppelung erhöht die-
sen Wert um 2,0% auf 23,24cm/s und eine Vervierfachung um 2,5% auf 23,35cm/s.
Für die 5 und 8mm Blase ergeben sich ähnliche Ergebnisse. Somit läßt sich fest-
stellen, daß bei einem Wandabstand von vier Blasendurchmessern die Aufstiegs-
geschwindigkeit sinnvoll wiedergeben wird.

Tabelle 9.6.: Einfluß des Wandabstandes auf die Aufstiegs-
geschwindigkeit. (Schlupf-
Randbedingungen, 16 Zellen pro Durchmesser).

Blasen- durchmesser d_B [mm]	Wand- abstand d_W/d_B [—]	Aufstiegs- geschwindigkeit w_B [cm/s]
4,0	2	18,31
4,0	4	22,79
4,0	8	23,24
4,0	16	23,35
5,0	2	17,01
5,0	4	22,20
5,0	8	22,69
8,0	2	14,33
8,0	4	20,69
8,0	8	21,13

Durch die Wahl der Schlupf-Randbedingungen liegt an den Wänden kein Geschwin-

digkeitsgradient der tangentialen Geschwindigkeitskomponente vor. Diese Konstellation entspricht einem sehr großen Wandabstand. Reale Wandungen sind jedoch an der Oberfläche rau, so daß das Fluid dort haftet. Um diese Tatsache in den Simulationen wiederzugeben, müssen Haftbedingungen an den Wänden gewählt werden. Die Simulationen entsprechen dann einem engen Rechteckkanälen in denen die Blasen aufsteigen.

Zur Untersuchung des Einflusses des Wandabstands von rauhen Wänden wird der Aufstieg von Blasen mit 4 bzw. 5mm Durchmesser untersucht. Die Wandabstände betragen 2 und 4 Blasendurchmesser für die 5 mm Blase und 2, 4 und 8 Blasendurchmesser für die 4mm Blase. Der Vergleich von Tabelle 9.6 und 9.7 zeigt, daß die Aufstiegsgeschwindigkeit erwartungsgemäß signifikant durch die Haftungsbedingungen an der Wand reduziert wird. Die Herabsetzung der Aufstiegsgeschwindigkeit mit sinkendem Wandabstand ist allerdings geringer als bei Schlupfbedingungen. Die Reduzierung der Aufstiegsgeschwindigkeit läßt sich auch anhand *experimentell* gewonnener Reduzierungsfaktoren vorausbestimmen, mit denen die Aufstiegs geschwindigkeiten multipliziert werden. Krishna u. a. (1999b) geben folgende Faktoren SF an, mit der die Geschwindigkeiten in engen Gefäßen reduziert werden:

$$\begin{aligned} SF &= 1 & d_B/d_W < 0,125 \\ SF &= 1,13 \exp(-d_B/d_W) & 0,125 < d_B/d_W < 0,6 \\ SF &= 0,496 \sqrt{d_W/d_B} & d_B/d_W > 0,6. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Ein weiterer Ansatz findet sich bei Clift u. a. (1978):

$$\frac{w_B}{w_{B,\infty}} = \left[1 - \left(\frac{d_B}{d_W} \right)^2 \right]^{3/2}. \quad (9.13)$$

In Tabelle 9.7 sind die vorrausberechneten Geschwindigkeiten nach den beiden Ansätzen aufgeführt. Als Bezugsgeschwindigkeit gilt die numerisch ermittelte Geschwindigkeit für einen Wandabstand von 4 Blasendurchmessern mit Schlupfbedingungen. Der Tabelle ist zu entnehmen, daß sich die Reduzierung der Geschwindigkeit für Abstände von 4 und 8 Durchmessern geringfügig besser mit dem Ansatz von Clift u. a. (1978) wiedergeben läßt als mit dem Ansatz von Krishna u. a. (1999b). Für einen Wandabstand von nur 2 Durchmessern liegen die vorhergesagten Werte

Tabelle 9.7.: Einfluß des Wandabstandes auf die Aufstiegeschwindigkeit. (Haft-Randbedingungen, 16 Zellen pro Durchmesser).

Blasen- durchmesser d_B [mm]	Wandabstand / Blasendurchm. d_W/d_B [-]	Durchmesser- verhältnis h/b [-]	Aufstiegs- geschwindigkeit $w_{B,rauh}$ [cm/s]	skalierte Geschwindigkeit	
				Krishna u. a. $w_{B,glatt}SF_K$	Clift u. a. $w_{B,glatt}SF_{CGW}$
4,0	2	0,40	17,96	15,52	14,71
4,0	4	0,47	20,14	19,92	20,53
4,0	8	0,46	21,64	22,58	22,11
5,0	2	0,38	16,91	15,01	14,25
5,0	4	0,46	19,33	19,87	19,28

für beide Blasendurchmesser unterhalb der numerischen Werte für raue Wände. Hier erweist sich jedoch der Ansatz nach Krishna u. a. als der bessere.

Die Betrachtung des Durchmesserverhältnisses h/b in Tabelle 9.7 zeigt, daß für geringe Wandabstände ($d_W/d_B = 2$) eine andere Blasenform vorliegt; die Blasen sind insgesamt flacher als für größere Wandabstände. Oberhalb eines Wandabstands von $d_W/d_B > 4$ kann kein Einfluß des Wandabstands auf das Durchmesserverhältnis festgestellt werden. Die hier untersuchten Blasen sind alle formstabil. Ob diese Aussage auch für formdynamische Blasen gilt, wird in Kapitel 9.5.4 näher untersucht.

9.5. Einzelblasen

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Simulation von einzelnen Blasen. Die Resultate sind auf den nachfolgenden Seiten dargestellt. Sofern nichts anderes erwähnt ist, sind die Randbedingungen bei den Simulationen stets Schlupfbedingungen mit einer Druckrandbedingung am Auslaß. Der Wandabstand beträgt 4 Blasendurchmesser. Obwohl feine Auflösungen des Blasendurchmessers physikalisch sinnvolle Ergebnissen liefern, wird dessen Auflösung auf 16 Zellen begrenzt, da bei größeren Blasendurchmessern als 1,3 mm für Blasen in Wasser kein geradliniger

Aufstieg mehr vorliegt und somit eine komplette 3D Simulation ohne Symmetrie notwendig ist. Eine Auflösung mit 32 Zellen pro Durchmesser wäre aufgrund sehr langer Rechenzeiten nicht praktikabel. Ab einer Viskosität von $\eta_L > 7mPas$ steigen die Blasen nur noch senkrecht auf (Schlüter 2002), so daß für die Simulationen wiederum 2 Symmetriebedingungen gewählt werden können.

Anfangsbedingungen

In den Experimenten ist die Flüssigkeit bei freiem Aufstieg der Blase nie vollständig in Ruhe. Durch die Blasenerzeugung, Temperaturdifferenzen oder leichte Erschütterungen können geringe Flüssigkeitsbewegungen verursacht werden, die das Aufstiegsverhalten der Blase beeinflussen können. In den numerischen Simulationen hingegen fehlen diese Einflüsse. Um die Simulation daher realistisch zu gestalten, wird dem Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit ein anfängliches Grundrauschen überlagert. Die Werte des Rauschens unterliegen einer Gauß'schen Normalverteilung. Verdeutlicht wird der Einfluß des Grundrauschens in Abbildung 9.5.

Dort sind zwei $6mm$ Blasen in einem anfänglichen vertikalen Abstand von $4d_B$ dargestellt. Der linke Teil der Abbildung zeigt die Blasen ohne verrauschte Anfangsbedingungen. Der Verlauf der Geschwindigkeitskonturen ist absolut symmetrisch. Dieser Fall ist jedoch, verglichen mit Experimenten, eher unrealistisch. Bei einem leichten Anfangsrauschen von $0,5cm/s$ verlieren die Geschwindigkeitsfelder ihre Symmetrie, wie im rechten Teil der Abbildung zu erkennen ist. Diese Asymmetrie beeinflusst auch die nachlaufende Blase. Während sie ohne Grundrauschen noch in Linie mit gleicher Ausrichtung zu ersten Blase aufsteigt, ist sie im Fall mit Rauschen leicht aus der Horizontalen geneigt, was wesentlich realistischer ist. In einer Studie wird die Standardabweichung des anfänglichen Grundrauschens von $0,25 - 1,0cm/s$ variiert.

Abbildung 9.6 zeigt die mittlere Geschwindigkeit \bar{w}_L in der Flüssigphase. Hieraus wird deutlich, daß bereits nach wenigen Millisekunden kaum noch ein Einfluß des Anfangsrauschens erkennbar ist, da die überlagerte, stark anwachsende mittlere Geschwindigkeit im System durch den Blasenauftstieg auf wesentlich höhere Werte ansteigt. Allerdings entstehen in Simulationen mit Anfangsrauschen von mehr als $0,5cm/s$ teilweise unphysikalische Ergebnisse, wie z.B. eine zu starke Beeinflussung

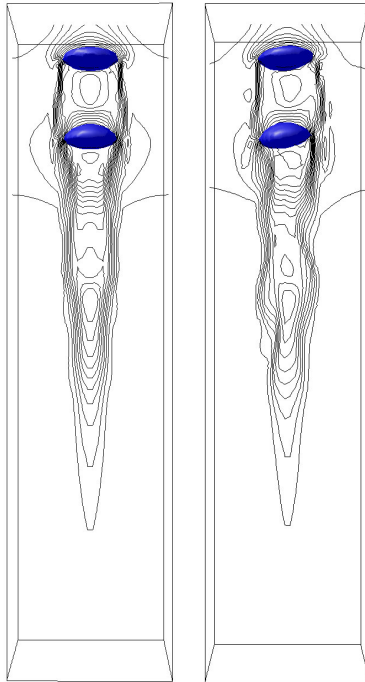


Abbildung 9.5.: Einfluß des überlagerten Grundrauschens innerhalb der Flüssigphase auf das Aufstiegsverhalten zweier $6mm$ Blasen in Wasser. links: $w_{L,SD}(t=0) = 0,0cm/s$, rechts: $w_{L,SD}(t=0) = 0,5cm/s$.

der zweiten Blase in ihrem Aufstiegsverhalten. Daher ist das Rauschen auf $0,5cm/s$ begrenzt. Allen in dieser Arbeit vorgestellten Simulationen von Luftblasen in Wasser liegt ein Rauschen von $0,5cm/s$ zugrunde.

9.5.1. Aufstiegeschwindigkeiten

In dieser Arbeit sind eine Reihe von Stoffsystemen untersucht worden. Zunächst sollen die Ergebnisse für das System Wasser/Luft (S1) vorgestellt werden. Den Simulationen von Luftblasen in Wasser (S1) schließen sich solche in Wasser/Glycerin Gemischen (S2-S9) an.

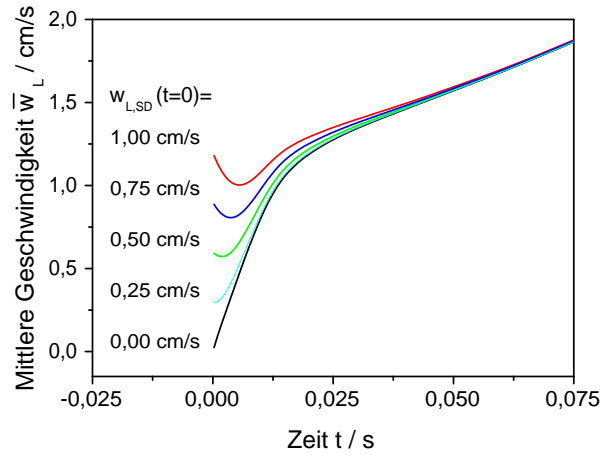


Abbildung 9.6.: Zeitlicher Verlauf der mittleren Geschwindigkeit in der Flüssigphase in Abhängigkeit des Anfangsrauschens.

Luftblasen in Wasser

In diesem Abschnitt wird für eine Reihe von Blasengrößen das Aufstiegsverhalten und die Aufstiegeschwindigkeit näher betrachtet. Der Durchmesser der Blase variiert zwischen 0,2-18mm. Die Blasen mit einem Durchmesser von 0,2 und 0,5mm steigen mit sehr geringer Aufstiegeschwindigkeit von $w_B < 15 \text{ cm/s}$ auf. Die geringen Geschwindigkeiten, in Kombination mit der geringen Viskosität und der hohen Oberflächenspannung des Wassers führen dazu, daß verstärkt parasitäre Strömungen (vgl. Kapitel 8.2) auftreten, die zu unphysikalischen Resultaten führen. Für diese beiden Blasengrößen liegen Kapillar-Zahlen von $Ca(0,2\text{mm}) = 3,48 \cdot 10^{-4}$ und $Ca(0,5\text{mm}) = 1,23 \cdot 10^{-3}$, sowie Laplace-Zahlen von $La(0,2\text{mm}) = 7,5 \cdot 10^4$ bzw. $La(0,5\text{mm}) = 1,83 \cdot 10^5$ vor. Innerhalb dieses Bereiches der Kennzahlen ist mit starken Beeinflussungen der Blasen durch parasitäre Strömungen zu rechnen (Scardovelli und Zaleski 1999). So wandert die 0,5mm Blase in einer vollen 3D Simulation nach einem anfänglichen Aufstieg teilweise wieder seitlich nach unten entgegen ihrer Aufstiegsrichtung. Wird die Blase jedoch durch die Verwendung von zwei Symmetrieebenen auf eine geradlinige Aufstiegsbahn gezwungen, kann noch ein physikalisch sinnvolles Ergebnis erreicht werden.

Abbildung 9.7 zeigt die numerisch bestimmten Aufstiegsgeschwindigkeiten in dem Diagramm nach Gaudin (Gaudin 1957; Clift u. a. 1978). Zusätzlich sind noch die in Kapitel 5 bereits erwähnten Meßwerte nach Duineveld, Schlüter und eigenen Messungen in die Abbildung eingezeichnet. Der Abbildung ist zu entnehmen, daß der Verlauf für reines Wasser (obere Begrenzungskurve des grau hinterlegten Bereichs) in den Simulationen qualitativ gut wiedergegeben wird. Blasen mit einem Durchmesser kleiner als $1 - 3\text{ mm}$ steigen in den Simulationen zu langsam auf. Wie schon in Tabelle 9.4 gezeigt, ist dies auf die zu geringe Auflösung des Rechengitters zurückzuführen. Für Blasen größer als 3 mm können die Geschwindigkeiten auch quantitativ gut wiedergegeben werden. Die gemessenen Blasengeschwindigkeiten mit geringer Anfangsdeformation liegen jedoch teilweise unterhalb denen der Simulationen.

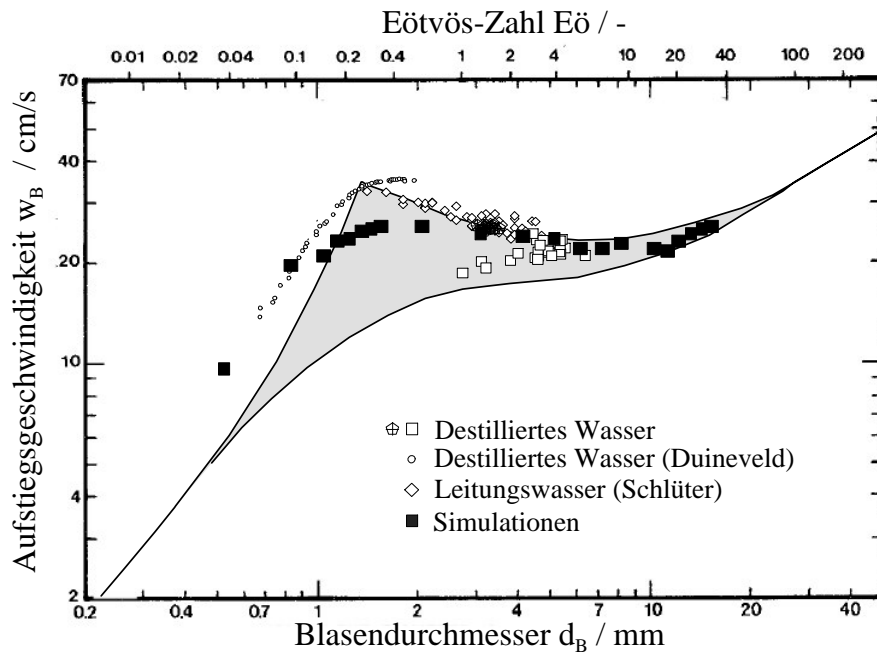


Abbildung 9.7.: Vergleich zwischen simulierten Aufstiegsgeschwindigkeiten und experimentellen Werten.

Tomiya *u. a.* (2002) geben als Grund für die z.T. großen Abweichungen zwischen Experiment und Simulation die anfänglich sphärische Form der Blasen in den Si-

mulationen an. Dem gegenüber stehen anfänglich unterschiedlich stark deformierte Blasen in den Experimenten. Die aus den Simulationen gewonnenen Geschwindigkeiten sind oft viel niedriger als im Vergleich mit reinen Systemen zu erwarten wäre. Sie liegen oft im Bereich von kontaminierten Systemen, obwohl in den Simulationen "reinste" Flüssigkeiten vorliegen. Daher soll nun untersucht werden, ob eine anfänglich stark deformierte Blase in den Simulationen eine höhere Aufstiegs geschwindigkeit liefert als eine sphärische. Um eine möglichst gute Vergleichbarkeit mit den Experimenten von Tomiyama u. a. zu gewährleisten, wird ebenfalls eine 3mm Blase gewählt. Der Erfassungsbereich der Autoren liegt etwa 20cm oberhalb der Düse. Als Simulationsbereich dient ein $38,2\text{cm} \times 1,2\text{cm} \times 1,2\text{cm}$ langes Gebiet ($2048 \times 64 \times 64$ Zellen). Als Referenz diente die Simulation einer anfänglich sphärischen Blase mit $h/b(t=0) = 1$. Die Blase erreicht schnell ihre konstante Aufstiegs geschwindigkeit von $23,7\text{cm/s}$. Die zweite Blase ist zu Beginn länglich stark deformiert mit $h/b(t=0) = 3,0$. Wie dem zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeiten in Abbildung 9.8 zu entnehmen ist, erreichen beide Blasen - trotz stark unterschiedlicher Anfangsform - nnähernd die gleiche Endgeschwindigkeit. Die anfangs deformierte Blase zeigt jedoch in den ersten 0,08s eine stark schwankende Geschwindigkeit, was mit ihren Formschwankungen zu erklären ist. Auch sind die Deformationen nach Erreichen der Endgeschwindigkeit annähernd identisch mit $(h/b)_{\text{sphärisch}} = 0,47$ und $(h/b)_{\text{deformiert}} = 0,46$.

Es läßt sich also festhalten, daß im Gegensatz zu Experimenten die Anfangsdeformation so gut wie keinen Einfluß auf das Aufstiegsverhalten der Blase hat. Dies legt die Schlußfolgerung nahe, daß einige physikalische Effekte mit der VOF-Methode nicht erfaßt werden. Da die Phasengrenzfläche im Gegensatz zur Front Tracking Methode nicht explizit erfaßt wird, sondern nur aus der Verteilung der VOF-Variablen f berechnet wird, können auch leichte Störungen auf der Oberfläche nicht verfolgt werden. Es wäre daher interessant, ob die Front Tracking Methode auch für unterschiedliche Anfangsformen ähnliche Ergebnisse liefert.

Einteilung in Blasenregime nach Maxworthy u.a.

Brauer (1971a) schlägt für die Blasenform und das Aufstiegsverhalten vier typische

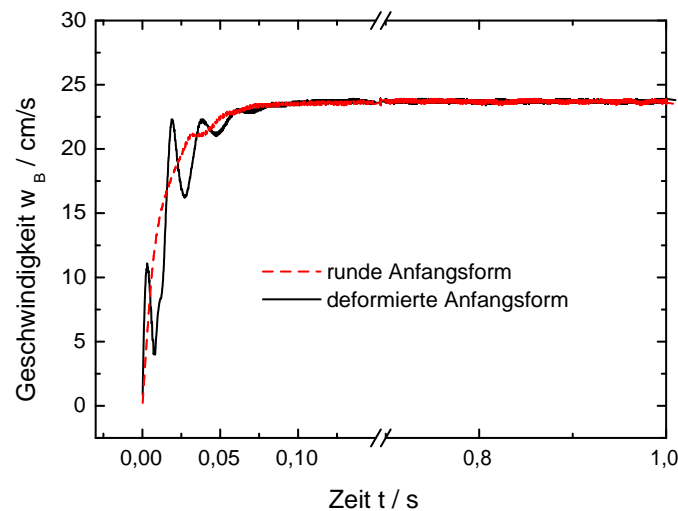


Abbildung 9.8.: Aufstiegs- und Abstiegsgeschwindigkeiten von zwei 3mm Luftblasen in Wasser mit unterschiedlicher Anfangsdeformation.

Regime vor (vgl. Kapitel 2.2.1). Maxworthy u. a. (1996) hingegen liefern eine differenziertere Einteilung für das Aufstiegsverhalten, das sich nicht nur anhand der Blasenform, sondern auch mit Hilfe der Weber- und Froude-Zahlen charakterisieren lässt (s. Abbildung 9.9). Maxworthy u. a. teilen die Blasengrößen in 6 verschiedene Bereiche, bzw. Regime ein, die anhand der Weber- und Froude-Zahl charakterisiert werden können. Die Froude-Zahl setzt die Trägheits- und die Schwerkraft ins Verhältnis ($Fr = w_B^2 / g d_B$). Blasen kleinen Durchmessers verhalten sich wie feste Partikel. Dieser Bereich (B1) ist in Abbildung 9.9 nicht dargestellt. Mit steigendem Durchmesser erfolgt eine Mobilisierung der Grenzfläche. Der Bereich innerhalb dem die zuvor immobile Grenzfläche der Blase mobil wird, bezeichnen Maxworthy u.a. als Übergangsbereich (B2). Die Aufstiegs- und Abstiegsgeschwindigkeit in den Regimen (B1) und (B2) hängt lediglich von der Viskosität der Flüssigkeit und der Erdbeschleunigung ab. Dem Übergangsbereich (B2) schließt sich ein Regime konstanter Weber-Zahl an (B3). Die trennende Bereichsgrenze zwischen (B2) und (B3) wird durch das Maximum der Froude-Zahl festgelegt (vgl. Abbildung 9.9). Die konstante Weber-Zahl innerhalb des Bereiches (B3) hängt für beliebige Systeme nur schwach von

der Morton-Zahl, sprich der Viskosität der Flüssigphase ab, jedoch stark von der Oberflächenspannung σ . Der darin dominierende Einfluß der Oberflächenspannung nimmt mit steigender Eötvös-Zahl immer stärker ab. An diesen Bereich schließt sich ein mittleres Übergangsregime (B4) bis zu einer Eötvös-Zahl von $Eö \approx 7$ an. Darin lassen sich alle experimentellen Daten gut durch

$$We = 2,5Eö^{1/3} \quad (9.14)$$

wiedergeben. Danach erfolgt ein weiteres Übergangsregime (B5) hin zu dem Bereich der Schirmblasen (B6), die ab $Eö = 40$ auftreten. Die Froude-Zahl nähert sich hier dem aus der Literatur bekannten asymptotischen Wert von 0,5 für Schirmblasen an. Für die Weber-Zahl gilt hier

$$We = 1,25 + 0,5Eö \quad 7 \lesssim Eö \lesssim 40 \quad (9.15)$$

Der Einfluß der Oberflächenspannung kann hier als gering eingeschätzt werden. Der Bereich der Schirmblasen kann als unabhängig von den Stoffeigenschaften angesehen werden. Hier gilt $Fr = 0,5$ und $C_D = 8/3$ (Clift u. a. 1978). Mit dieser Einteilung in 6 Regime gehen Maxworthy u. a. (1996) über die in der Literatur häufig anzutreffende Einteilung in 3 oder 4 Bereiche (Haberman und Morton 1956; Clift u. a. 1978) bzw. (Brauer 1971a) hinaus.

Abbildung 9.9 zeigt die experimentell und numerisch bestimmten Weber- und Froude-Zahlen als Funktion der Eötvös-Zahl. Daraus wird deutlich, daß im Übergangsbereich (B2) ($Eö < 0,2$) die Weber-Zahl quantitativ gut wiedergegeben wird. Der Bereich konstanter Weber-Zahl ($0,2 < Eö \lesssim 1,3$) läßt sich jedoch in den Simulationen nicht wiederfinden. Innerhalb dieses Bereiches fällt die Geschwindigkeit in den Experimenten quadratisch mit steigendem Durchmesser ab. In den Simulationen ist der Abfall der Geschwindigkeit nicht so stark ausgeprägt. In dem sich anschließenden mittleren Übergangsbereich (B4) ($1,3 \lesssim Eö \lesssim 7$) stimmen die numerischen Werte sowohl mit den experimentellen als auch mit denen aus Gleichung (9.14) gut überein.

Im Übergangsbereich zu den Kappenblasen ($7 \lesssim Eö \lesssim 40$) liegt qualitativ wiederum eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment sowie mit Gleichung (9.15) vor. Quantitativ liegen die Werte unterhalb der experimentellen Werte.

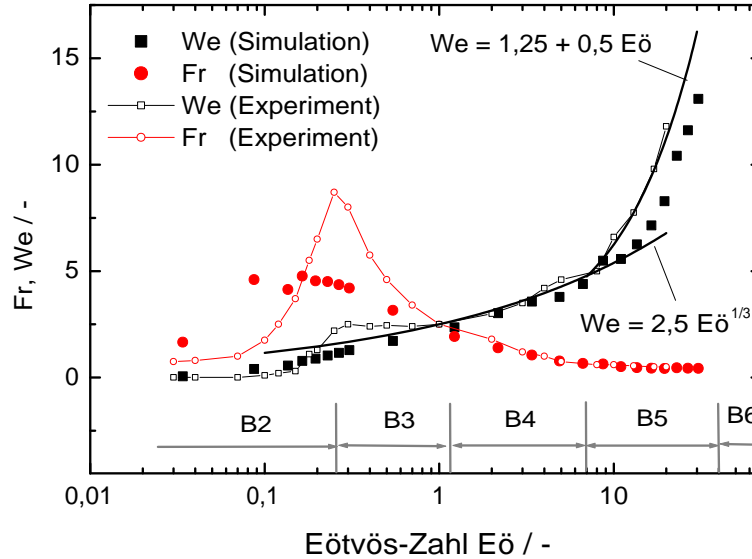


Abbildung 9.9.: Weber- und Froude-Zahl als Funktion der Eötvös-Zahl. Vergleich zwischen Experiment ([Maxworthy u. a. 1996](#)) und Simulation.

Der Vergleich mit dem Quadrat der Froude-Zahl zeigt z.T. erhebliche Differenzen zwischen Experiment und Simulation für die ersten beiden Regime ($1 \lesssim Eö$), die sich wiederum mit den numerisch zu gering bestimmten Aufstiegsgeschwindigkeiten innerhalb dieses Bereichs erklären lassen. Für höhere Eötvös-Zahlen ($Eö > 1$) hingegen kann eine gute Übereinkunft zwischen Experiment und Simulationen festgestellt werden.

Zusammenfassend läßt sich aus der Betrachtung des Verlaufs der Weber- und der Froude-Zahl feststellen, daß die experimentellen Daten für $1 \lesssim Eö \lesssim 8$ gut mit den Simulationen wiedergegeben werden können. Während für größere Eötvös-Zahlen die Froude-Zahl immer noch in guter Übereinstimmung mit den Experimenten ist, zeigen sich systematische Differenzen zwischen numerisch und experimentell bestimmten Weber-Zahlen. Die Froude-Zahl beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Gewichtskraft. Daraus geht hervor, daß die Trägheitskräfte gut wiedergegeben werden können. Da die Weber-Zahl das Verhältnis von Trägheitskraft zu Ober-

flächenspannungskraft angibt, läßt sich vermuten, daß die Oberflächenspannungskraft für $Eö \gtrsim 8$ nicht korrekt wiedergegeben wird.

Luftblasen in Wasser/Glycerin Gemischen

In den Simulationen der von [Maxworthy u. a. \(1996\)](#) untersuchten Systeme variierte der Blasendurchmesser zwischen 0,8 und 10 mm. Da Blasen ab einer Viskosität der Flüssigkeit von $\eta_L > 7 \text{ mPas}$ geradlinig aufsteigen ([Schlüter 2002](#)), konnte das Rechengebiet für höhere Viskositäten durch zwei Symmetrieebenen reduziert werden. Der geradlinige Aufstieg kann auch durch Simulationen ohne Symmetrie in 3D bestätigt werden. Der linke Teil der Abbildung 9.10 zeigt die berechneten Aufstiegsgeschwindigkeiten (Symbole) im Vergleich zu den Messungen nach Maxworthy u. a., die durch die durchgezogenen Anpassungskurven repräsentiert sind. Die Abbil-

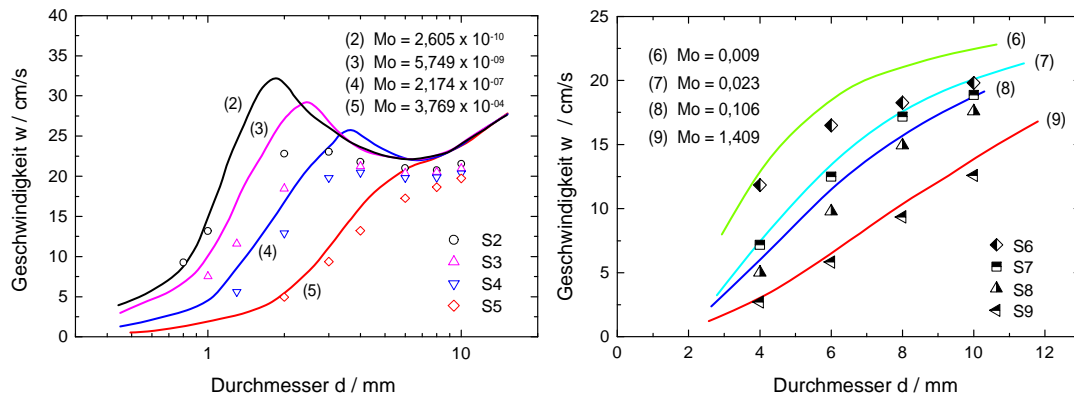


Abbildung 9.10.: Vergleich zwischen experimentell bestimmten Aufstiegsgeschwindigkeiten (Linien) und numerischen Simulationen für Wasser/Glycerin Gemische (Symbole); links: nach ([Maxworthy u. a. 1996](#)); rechts nach ([Raymond und Rosant 2000](#)).

dung zeigt, daß die bereits beim System Wasser/Luft gemachten Beobachtungen für die Differenzen der Aufstiegsgeschwindigkeit zwischen Experiment und Simulation auch für höhere Viskositäten der Flüssigphase zutreffen: Im Bereich kleiner Blasendurchmesser $d \leq 1,2 \text{ mm}$ und für größere Durchmesser $d_B \gtrsim 4 \text{ mm}$ können die experimentellen Aufstiegsgeschwindigkeiten für Systeme mit 20-60 Gew-% Glycerin (S2-S4) zufriedenstellend wiedergegeben werden. In dem Bereich zwischen

1,2mm und 4mm, in dem die experimentellen Werte ein deutliches lokales Maximum annehmen, liegen z.T. Abweichungen von bis 35% vor. Dies ist auf die zu geringe Auflösung zurückzuführen. Dennoch können in den Simulationen sowohl das lokale Maximum als auch das lokale Minimum der Aufstiegsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit vom Durchmesser wiedergefunden werden.

Für höhere Viskositäten ($\eta_L = 60mPas$, 80 Gew-% Glycerin) weist der Verlauf der experimentellen Aufstiegsgeschwindigkeiten mit zunehmendem Durchmesser keine lokalen Extrema mehr auf, sondern wächst monoton. Qualitativ kann auch dieser Verlauf gut durch die Simulation wiedergegeben werden. Der quantitative Vergleich zeigt jedoch, daß die Geschwindigkeiten für kleinere Durchmesser ($2 - 3mm$) fast exakt wiedergegeben werden können, es aber für größere Durchmesser eine steigende Abweichung zwischen Experiment und Simulation gibt. (Die Differenz steigt von 0,5 auf $5cm/s$.) Diese Abweichungen lassen sich wiederum mit der zu geringen Auflösung des Rechengebietes erklären. Die Zellengröße beträgt innerhalb dieses Bereiches für große Blasendurchmesser bis zu einem fünffachen der Kolmogorov'schen Skala. Diese Abweichungen können auch in weiteren Simulationen mit höheren Viskositäten beobachtet werden. Der rechte Teil der Abbildung 9.10 zeigt die berechneten Aufstiegsgeschwindigkeiten für 4, 6, 8 und $10mm$ Blasen im Vergleich zu Messungen von [Raymond und Rosant \(2000\)](#) für vier verschiedene Glyceringehalte (82, 88, 93 und 98 Volumenprozent). Die Glyceringehalte entsprechen den Systemen S5-S9 in Tabelle 9.1. Auch hier wird deutlich, daß für höhere Viskositäten bzw. Glyceringehalte für kleine Blasendurchmesser Experiment und Simulation sehr gut übereinstimmen. Mit steigendem Blasendurchmesser hingegen nimmt die Differenz zwischen Experiment und Simulation stetig zu. Mit steigender Viskosität der Flüssigphase wird die Differenz zunehmend kleiner, so daß die experimentellen Geschwindigkeiten für Viskositäten $\eta_L > 160mPas$ (S7-S9) annähernd korrekt wiedergegeben werden.

Je höher die Viskosität, desto langsamer steigen die Blase auf. Höhere Viskosität und geringere Aufstiegsgeschwindigkeit führen zu einer starken Vergrößerung der hydrodynamisch relevanten Längenskala, so daß diese mit der vorliegenden Gitterauflösung hinreichend erfaßt wird.

Bei den im rechten Teil von Abbildung 9.10 gezeigten Systemen ist bereits mit 16 Zellen pro Durchmesser eine Gitterinvarianz bzgl. der Geschwindigkeit erreicht. Somit läßt sich die Differenz zwischen Experiment und Simulation nicht auf zu grobe Diskretisierung des Gebietes zurückführen.

In einem Bereich von $Mo = 9 \cdot 10^{-7} - 7 \cdot 10^0$ fanden Raymond und Rosant eine direkte Abhängigkeit der Reynolds- und Weber-Zahl, die sich durch folgende Korrelation ausdrücken läßt:

$$We = 0,42 Mo^{0,35} Re^{5/3}. \quad (9.16)$$

Wie aus Abbildung 9.11 ersichtlich ist, lassen sich mit dieser, aus *experimentellen* Daten gewonnenen Korrelation, die Simulationen für hohe Morton-Zahlen (S6-S9) gut wiedergeben. Oberhalb einer Morton-Zahl von etwa $Mo = 9,0 \cdot 10^{-4}$ (S6) werden die Weber-Zahlen zunehmend schlechter wiedergegeben.

9.5.2. Aufstiegsbahnen

Neben den Aufstiegeschwindigkeiten sind auch die Blasenbahnen von großem Interesse. Allerdings liegen in der Literatur so gut wie keine Informationen über die Bahnradien vor. Die hier vorgestellten Blasenbahnen zeigen entweder eigene Messungen oder Meßwerte des Instituts für Umweltverfahrenstechnik IUW der Universität Bremen. Da Blasen für Viskositäten innerhalb der Flüssigphase von mehr als 7mPas geradlinig aufsteigen, werden hier nur Luftblasen in Wasser betrachtet.

Wie schon in Kapitel 2.2.3 erwähnt, führen Störungen zu Auslenkungen aus der geradlinigen Bahn hin zu zickzack Bahnen, die wiederum in spiralförmige Bahnen übergehen können. Anfangs steigen die Blasen geradlinig auf, bevor sie durch anwachsende Störungen aus der Bahn ausgelenkt werden.

Während die Abmaße der experimentellen Vorrichtungen ein Vielfaches der Blasendurchmesser betragen, ist die Länge des Rechengebietes in den Simulationen stark eingeschränkt. Zur Reduzierung der Gebietsgröße in den Simulationen und der

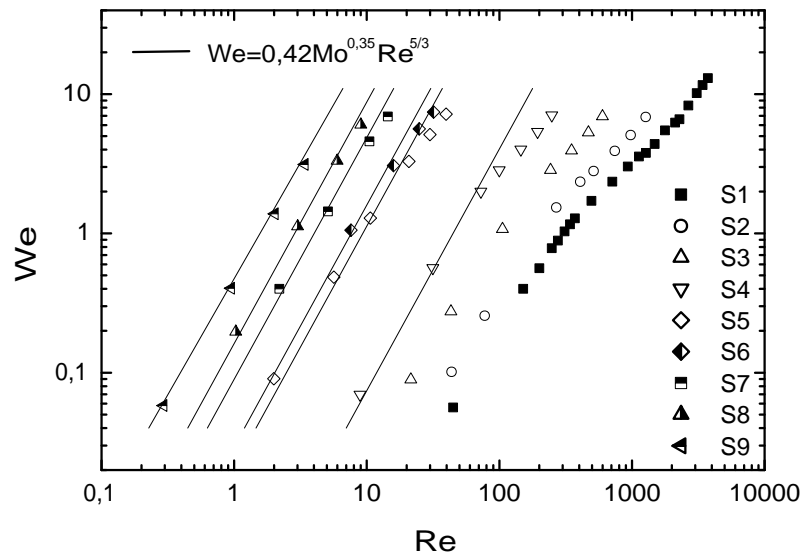


Abbildung 9.11.: Weber-Zahl als Funktion der Reynolds-Zahl für verschiedene Werte der Morton-Zahl.

damit großen Rechenzeit werden die Blasen im Gegenstrom gehalten. Als Gegenstromgeschwindigkeit wird die stationäre Endgeschwindigkeit der Blasen im freien Aufstieg verwendet, die zuvor separat ermittelt wurde. Da das Rechenggebiet nur einen Ausschnitt aus einem sehr großen Flüssigkeitsvolumen darstellt, gelten an den seitlichen Rändern Schlupf-Randbedingungen.

Nachfolgend soll die Aufstiegsbahn einer $4mm$ Blase näher beschrieben werden. Für eine physikalisch sinnvolle Wiedergabe der Aufstiegs geschwindigkeit hat sich ein Wandabstand von 4 Blasendurchmessern als ausreichend erwiesen. Die Länge des Rechengebiets beträgt hier 16 Blasendurchmesser (256 Zellen) mit einer Grundfläche von 64×64 Zellen. Die Aufstiegszeit beträgt 1,0 Sekunden, was einer Strecke von etwa $21cm$ entspricht. Innerhalb dieser Strecke können in den Experimenten schon signifikante Auslenkungen aus der geradlinigen Aufstiegsbahn beobachtet werden. [Abbildung 9.12](#) zeigt, daß die Blase in der numerischen Simulation nur

eine leichte seitliche Bewegung ausführt. Der geringe Wandabstand unterdrückt

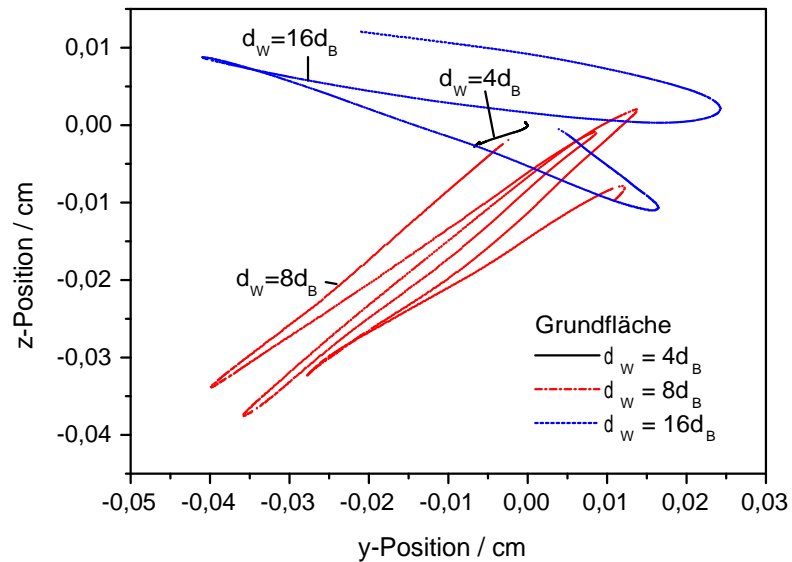


Abbildung 9.12.: Bewegungsbahnen einer 4 mm Blase in Wasser für unterschiedliche Wandabstände mit *Schlupfbedingungen* an der Wand (Draufsicht).

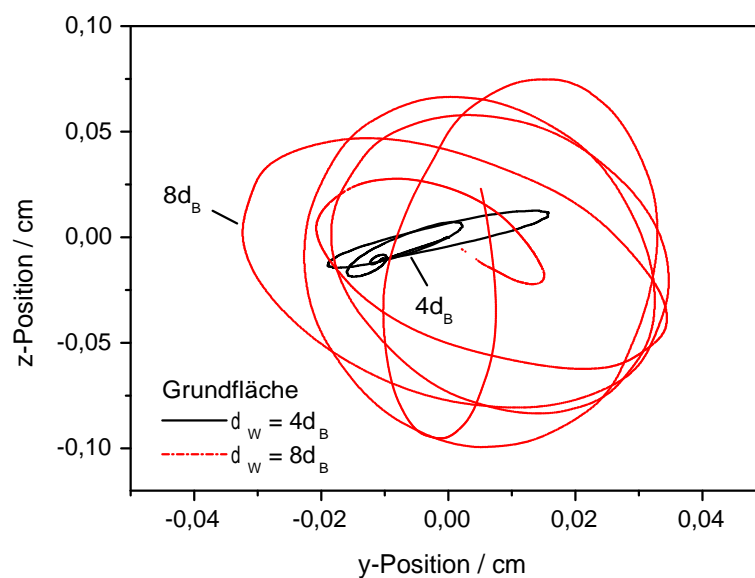


Abbildung 9.13.: Bewegungsbahnen einer 4 mm Blase in Wasser für unterschiedliche Wandabstände mit *Haftbedingungen* an der Wand (Draufsicht).

die seitlichen Bewegungen der Blase. Eine Verdoppelung des Wandabstandes auf 8 Blasendurchmesser (128×128 Zellen Grundfläche) bestätigt diese Beobachtung. Die Blase bewegt sich auf einer Zickzack Bahn diagonal zum Rechengitter. Die Auslenkungen sind um ein Vielfaches höher als bei dem geringeren Wandabstand. Es zeigt sich also eine starke Abhängigkeit der Bewegungsbahn vom Wandabstand. Daher stellt die Frage, ob sich eine zusätzliche Erhöhung des Wandabstands noch Auswirkungen auf die Bewegungsbahn hat.

Wie aus Abbildung 9.12 ersichtlich ist, unterscheidet sich die Bewegungsbahn für einen Wandabstand von 16 Blasendurchmessern stark von einem Abstand von nur 8 Durchmessern. Die Blase bewegt sich erst auf einer zickzack Bahn und geht dann in eine helikale Bahn über. Experimentelle Beobachtungen ergeben für eine 4 mm Blase sowohl eine reine zickzack als auch eine zickzack Bahn, die in eine helikale übergeht (vgl. Kapitel 2.2.3). Der Übergang zur helikalen Bahn ist in den Experimenten am häufigsten zu beobachten. Bei dieser Simulation erweist sich die Größe des Rechengebietes als problematisch. Mit einer Größe von $256 \times 256 \times 256$ Zellen ist es die maximal mögliche Auflösung des Gebietes, die mit dem zur Verfügung stehenden Parallelrechner möglich ist. Die hier gezeigte Simulation benötigt mehr als 5 Tage Rechenzeit auf dem oben beschriebenen Parallelrechner, was intensive Studien mit derartigen Auflösungen in ihrer Anzahl stark begrenzt.

Durch das Festlegen von Schlupfbedingungen an den seitlichen Wänden liegt dort nicht zwangsläufig eine Tangentialgeschwindigkeit von null wie an realen Wänden vor. Durch die Wahl von Haftbedingungen an den Wänden sollen nachfolgend die Bewegungsbahnen einer 4mm Blase in einem verengten realen Kanal untersucht werden. In der Nähe der Wände bildet sich durch den Gegenstrom ein Geschwindigkeitsprofil aus, welches zusätzlich die Blasen beeinflusst. Für einen Wandabstand von lediglich 4 Durchmessern ist auch in diesem Fall die Blase stark in ihrer horizontalen Bewegung gehemmt, wie aus Abbildung 9.13 ersichtlich wird. Bei einem Wandabstand von nur 4 Durchmessern bewegt sich die Blase auf einer spiralförmigen Bahn. Der Vergleich mit Abbildung 9.12 verdeutlicht den starken Einfluß der Randbedingungen auf die Aufstiegsbahn. Während bei *Schlupfbedingungen* die Blase nach dem geraden Aufstieg in eine zickzack Bewegung übergeht, bewegt sie sich

bei *Haftbedingungen* auf einer Spiralbahn. Der Bahnradius ist für den geringen Wandabstand ($d_W = 4d_B$) sehr klein. Wie schon bei Schlupfbedingungen bringt eine Verdopplung des Wandabstandes auf 8 Blasendurchmesser einen wesentlich größeren Bahnradius mit sich, wie aus Abbildung 9.13 ersichtlich wird. Eine weitere Verdoppelung des Wandabstandes auf 16 Blasendurchmesser bei Schlupfbedingungen führte zu einem Umschlag von einer Zickzack- zu einer Spiralbahn, nicht aber zu einer Erhöhung des Bahnradius. Da sich eine einmal entwickelte Spiralbahn nicht in eine Zickzack Bahn verändern kann (vgl. Kapitel 2.2.3), wird für diesen Fall auf eine weitere Verdopplung des Wandabstandes verzichtet.

Qualitativ kann bisher eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Aufstiegsbahnen festgestellt werden. Im nächsten Schritt sollen die Bahnen auch quantitativ verglichen werden. Als problematisch erweist sich hier die Tatsache, daß die experimentellen Daten in sehr großen Behältnissen gewonnen werden, während den Simulationen wesentlich kleinere Wandabstände zugrunde liegen ($d_W/d_B = 2, 4, 8$ u. 16). Aus den eigenen Experimenten sind für eine 4mm Blase Zickzack und spiralförmige Bahnen bekannt. Dabei ergab sich als halbe Amplitude der Zickzack Bahn ein Wert von 2mm und als Bahnradius für die Spiralbahn ein Wert von 2,7mm. Diese Werte liegen wesentlich höher als die numerisch gewonnenen Daten, sind allerdings auch für wesentlich größere Wandabstände gemessen worden. Um mit den Simulationen vergleichbare Meßwerte zu erlangen, wurden für diesen Zweck Experimente an einem Rechteckkanal ($20 \times 20 \text{ mm}$) am Institut für Umweltverfahrenstechnik der Universität Bremen (IUV) durchgeführt ¹. Die Auswertung der Experimente erfolgt nach dem in Kapitel 4.4 beschriebenen Verfahren der PTV. Die Blasengröße variiert zwischen 4 und 5mm. Auch für diese Blasengröße können sowohl Zickzack als auch spiralförmige Bahnen beobachtet werden. In den Abbildungen 9.14 und 9.15 sind zwei Simulationen für einen Wandabstand von 8 Durchmessern (32mm) mit jeweils Haft- oder Schlupfrandbedingungen zwei exemplarische Bahnen einer 4,09mm, bzw. 4,13mm Blase (Wandabstand Experiment 20mm) gegenübergestellt. Wie den beiden Abbildungen zu entnehmen ist, unterscheiden sich die Bahnradien,

¹An dieser Stelle meinen herzlichen Dank an Herrn Dipl.-Ing. S. Scheid für die Durchführung der Experimente

bzw. Auslenkungen um etwa einen Faktor 4 für die Spiralbahn und etwa einen Faktor 8 für die Zickzackbahn. So beträgt das Verhältnis der maximalen Auslenkung zum Blasendurchmesser für die Zickzack Bahn im Experiment $2r_{Bahn}/d_B = 1,43$ und in der Simulation 0,175. Für eine Spiralbahn beträgt das Verhältnis 1,08 verglichen mit 0,32. Solch geringe Auslenkungen für numerische Simulationen sind auch aus der Literatur bekannt. So ist für einen geringen Wandabstand von $d_W/d_B = 4$ die Auslenkung einer von [Sabisch u. a. \(2001\)](#) in 3D simulierten Blase ähnlich den hier gezeigten Werten.

In einer aktuellen Arbeit werden die Auslenkungen einer aufsteigenden Blase in 2D in einem direkten Vergleich zwischen der Front Tracking und der Lattice Boltzmann Methode untersucht ([Sankaranarayanan u. a. 2003](#)). Dabei zeigt sich, daß beide Methoden Verhältnisse von maximaler Auslenkung zu Blasendurchmesser von jeweils 0,5 liefern. Allerdings sei hier angemerkt, daß die maximale horizontale Auslenkung in 2D Simulationen wesentlich größer ist als in 3D Simulationen. Für eine 4mm Blase erhöht sich die maximale relative Auslenkung von 0,175 in 3D auf 0,82 in 2D. Der Grund für diese großen Differenzen zwischen Experiment und Simulation ist noch nicht geklärt und bedarf weiterer Untersuchungen. Es ergeben sich einige mögliche Ursachen. Gemäß Gleichung (9.11) ergibt für die obige Simulation ein Wert von $\lambda_K = 0,13mm$ für die Kolmogorov Skala. In den Simulationen beträgt die Zellgröße jedoch 0,25mm. Folglich können lokale Turbulenzphänomene in der Nähe der Phasengrenzfläche nicht richtig erfaßt werden. Ein weiterer möglicher Grund könnte die Tatsache sein, daß bei der VOF-Methode die Phasengrenzfläche nicht explizit erfaßt wird, somit auch im Gegensatz zu den Experimenten nicht in scharfer Form vorliegt. Dem widersprechen aber die mit der Front Tracking Methode bestimmten Bahnradien, die in der gleichen Größenordnung wie die mit der VOF- oder Lattice Boltzmann-Methode bestimmten Werte liegen (s. Kapitel 6).

Sowohl für die Schlupf- als auch für die Haft-Randbedingungen ist die Wand für beide Phasen undurchdringlich. Eine seitliche Bewegung der Blase wird dadurch gehemmt. Auch die Verwendung von periodischen Randbedingungen an den seitlichen Wänden führt zu keiner nennenswerten Erhöhung der maximalen seitlichen

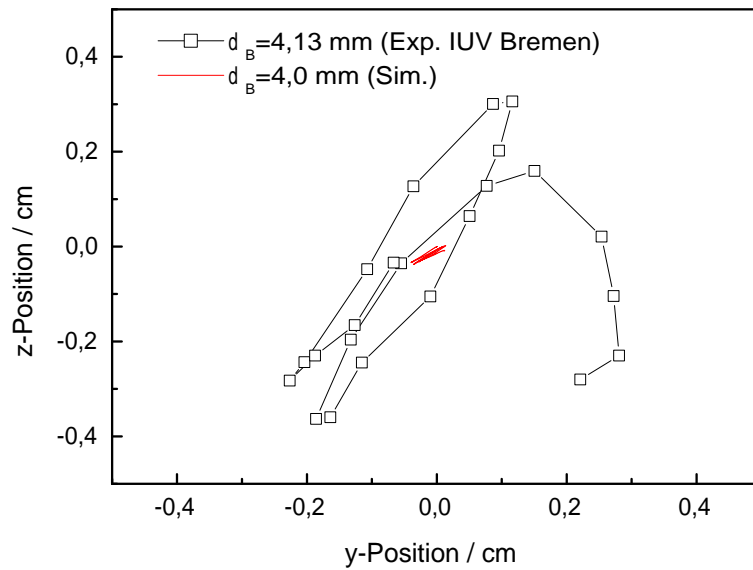


Abbildung 9.14.: Vergleich der Trajektorie einer 4mm Blase in Experiment und Simulation mit *Schlupfbedingungen* an der Wand (Draufsicht).

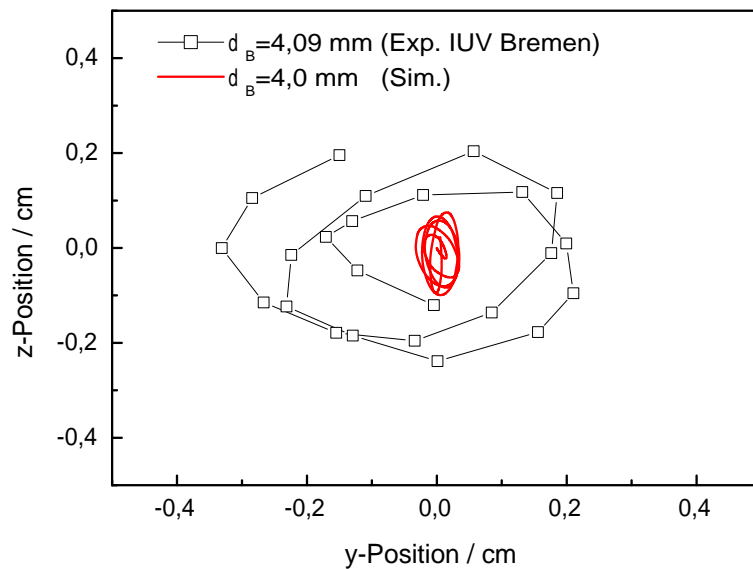


Abbildung 9.15.: Vergleich der Trajektorie einer 4mm Blase in Experiment und Simulation mit *Haftbedingungen* an der Wand (Draufsicht).

Auslenkung.

Ein weiterer Aspekt ist die Kompressibilität der Gasphase, die in der VOF-Methode nicht berücksichtigt wird. Folglich treten in den Simulationen keine Volumenschwingungen auf, die in den Experimenten vorhanden sind. Darauf wird im nachfolgenden Kapitel noch näher eingegangen. Dies kann ausgeschlossen werden, denn es ist mit einer Interface Tracking Methode möglich ist, die Bahnradien in ihrer realen Größe korrekt wiederzugeben, wie in den Simulationen von [Rusche \(2003\)](#) deutlich wird. Dort ist der Blasendurchmesser mit lediglich 15 Zellen diskretisiert. Die Zellgröße ist also auch weit oberhalb der Kolmogorov'sche Längenskala. Weiter von der Blase entfernt ist die Auflösung noch gröber. Der wesentliche Unterschied zu den eigenen Simulationen ist ein mitbewegtes Rechengitter. Das Gitter wird dabei so verschoben, daß die Blase stets an einem bestimmten Punkt fixiert ist, um den das Gitter lokal verfeinert ist. Dieser Unterschied scheint einen großen Einfluß auf die Bewegungsbahn zu haben. Nähere Details zu dem Verfahren finden sich bei [Rusche \(2003\)](#).

9.5.3. Bahnfrequenz

Ein weiterer Aspekt ist die Bahnfrequenz f_B der Blase. Die Bahnfrequenz gibt den Kehrwert der Zeit an, die die Blase für eine vollständige Taumelbewegung bei einer zickzack Bewegung oder einen vollständigen Umlauf auf der helikalen Bahn benötigt. Charakterisiert werden kann sie wiederum durch die Strouhal-Zahl Sr

$$Sr = \frac{f_B d_B}{w_B}. \quad (9.17)$$

Für dreidimensionale Systeme liegen nur wenige experimentelle Informationen über die Strouhal-Zahl vor. Im Bereich von $1800 < Re < 2700$ fand [Lindt \(1972\)](#) eine starke Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl. Für höhere Reynolds-Zahlen $2700 < Re < 6200$ ist die Strouhal-Zahl nur eine schwache Funktion von Re mit dem mittleren Wert von $Sr = 0,3$. Für Luftblasen in Wasser, Glycerin und CMC Lösungen gilt über einen weiten Viskositätsbereich der Ansatz von [Miyahara und Yamanaka \(1993\)](#)

$$Sr = 2,29(Re' Mo^{0,26})^{2,18} - 0,3821 \ln(Re' Mo^{0,26}) \quad (9.18)$$

mit der modifizierten Reynolds-Zahl

$$Re' = \frac{b w_B \rho_L}{\eta_L}. \quad (9.19)$$

In den Simulationen sind nichtlineare Aufstiegsbewegungen erst ab einem Blasendurchmesser von $d_B = 3mm$ zu finden. Der Vergleich der numerischen Strouhal-Zahlen mit denen aus Gleichung (9.18) nach Miyahara u. a. zeigt z.T. relative Unterschiede bis 50% zwischen Korrelation und Simulation für Blasendurchmesser zwischen 3 und 10mm.

Tabelle 9.8.: Vergleich der Strouhal-Zahlen Sr für die Bahnfrequenzen nach Miyahara und Yamanaka (1993) mit numerisch gewonnenen Werten.

Blasen- durchmesser $d_B [mm]$	Strouhal- Zahl $Sr_{Miy} [-]$	Strouhal- Zahl $Sr_{Sim} [-]$	Abweichung $\frac{Sr_{Sim} - Sr_{Miy}}{Sr_{Miy}}$ [%]
3	0,06	0,09	+48,6
4	0,10	0,12	+24,3
5	0,13	0,16	+28,4
6	0,15	0,18	+16,1
8	0,26	0,20	-22,3
10	0,33	0,25	-26,5

Da innerhalb dieses Bereiches für die gegebenen Blasendurchmesser die Aufstiegs-geschwindigkeiten gut mit den experimentellen Werten übereinstimmen (vgl. Ab-bildung 9.7), bleibt als einzige Fehlerquelle der Bahnradius. Wie schon in den Ab-bildungen 9.14 und 9.15 gesehen, sind die simulierten Bahnradien für kleine Blasen-durchmesser geringer als die realen. Dies bringt eine zu hohe Umlauffrequenz und somit auch zu hohe Strouhal-Zahlen mit sich. In den Experimenten steigen Bla-sen ab einer Größe von etwa 6mm laut Clift u. a. geradlinig, bzw. mit einem sehr geringen Bahnradius auf, der mit wachsendem Blasendurchmesser stetig abnimmt. Durch die Reduktion des Bahnradius vergrößert sich auch die Bahnfrequenz. In den Simulationen führen Blasen mit einem Durchmesser von 10mm noch einen

ausgeprägten helikalen Aufstieg aus. Daher sind hier die numerisch bestimmte Umlauffrequenzen größer als die experimentellen. Trotz dieser Differenzen wird jedoch erkennbar, daß sich Korrelation und Simulation dem von Lindt angegebenen Wert von $Sr = 0,3$ annähern.

9.5.4. Blasenformen

Zusätzlich zu den Aufstiegsgeschwindigkeiten und den Bewegungsbahnen sollen auch die Formen der Blasen mit experimentellen Ergebnissen verglichen werden. Charakterisiert werden die Blasen oft mit Hilfe ihrer Durchmesserhältnisse h/b . Dazu liegen aber in der Literatur nur wenig Informationen vor.

Wie bereits oben erwähnt ist ein großer Unterschied der Simulationen zu den Experimenten die Inkompressibilität der Gasphase. Starke Formschwankungen wie in den Experimenten können in den Simulationen nicht beobachtet werden. Daher sollen im folgenden die transienten Blasenformen von Blasen in Wasser näher betrachtet werden. Die oben beschriebene 4mm Blase wird nun hinsichtlich ihres Anstellwinkels und des Durchmesserverhältnisses näher untersucht (s. Abbildung 9.16). Während die Blase in der Simulation ein konstantes Durchmesserverhältnis von ca. 0,46 annimmt, führt die Blase im Experiment starke Volumenschwankungen durch, die mit zwischen 0,46 und 0,87 schwankenden Werten des Durchmesserverhältnisses einhergehen.

Eng mit den Bahnraden verknüpft sind auch die Bahnfrequenz und der Anstellwinkel Θ der Blase. In Abbildung 9.16 ist der Winkel der ersten Hauptachse der Blase zur Horizontalen für die 4mm Blase dargestellt, die auf einer Spiralbahn aufsteigt ($d_W/d_B = 8$). Nach etwa 0,3 Sekunden des ungestörten Aufstiegs beginnt die Blase mit dem spiralförmigen Aufstieg. Nach etwa 0,5 Sekunden erreicht die Blase ihre endgültige helikale Bewegungsbahn. In der Schnittdarstellung äußert sich dies dem in der Abbildung dargestellten sinusförmigen zeitlichen Verlauf des Anstellwinkels. Da in der Abbildung jedoch nur ein Schnitt durch diese Bewegungsbahnen gezeigt ist, schwingt der Winkel. Die Schwingungsfrequenz ist gleich der Bahnfrequenz mit $f_{Bahn} = 1/T_{Bahn} = 6,25 \text{ Hz}$ bei einer Umlaufzeit von 0,16s. Ebenfalls dargestellt in Abbildung 9.16 ist der Anstellwinkel zur Horizontalen der in Abbildung 9.15 dar-

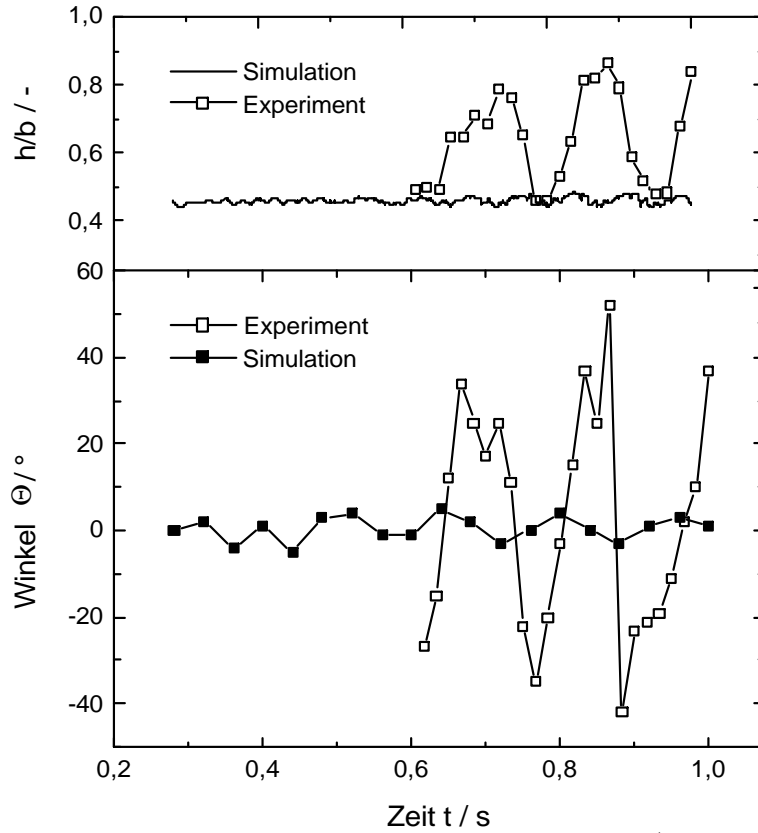


Abbildung 9.16.: Aufstieg einer 4mm Blase in Experiment ($d_W = 20\text{mm}$) und Simulation ($d_W = 32\text{mm}$), oben: Durchmesser Verhältnis h/b , unten: Anstellwinkel Θ zur Horizontalen.

gestellten $4,1\text{mm}$ Blase. Es wird deutlich, daß die experimentelle Umlaufzeit mit $T_{\text{Bahn}} = 0,1\text{s}$ nicht korrekt durch die Simulation wiedergegeben wird. Zusätzlich hat die Blase im Experiment einen wesentlich steileren Anstellwinkel Θ . Während der Winkel in den Simulationen zwischen $\pm 5^\circ$ schwankt, beträgt er in den Experimenten bis zu 40° . (Der steile Abfall von $+50^\circ$ auf -45° resultiert aus einer Wandkollision.)

In den Experimenten zeigen Blasen mit einem Durchmesser von 4mm bereits formdynamisches Verhalten. In den Simulationen hingegen liegen erst ab einem Durchmesser von 8mm realistische Formschwankungen vor, die im linken Teil von Abbildung 9.17 für eine 8mm Blase im freien Aufstieg gezeigt sind. Im rechten Teil der

Abbildung sind experimentelle Aufnahmen einer $6,5\text{mm}$ Blase zu sehen. Hier wird ersichtlich, daß die Simulation in der Lage ist, die Formdynamik der Blasenoberfläche realistisch wiederzugeben.



Abbildung 9.17.: Fotosequenzen einer aufsteigenden Blase mit formdynamischer Oberfläche; links: Simulation $d_B = 8,0\text{mm}$, rechts: Experiment $d_B = 6,5\text{mm}$.

Ein großer Unterschied zu den Experimenten ist das Fehlen von Oberflächenwellen bzw. Kapillarwellen, wie sie nach [Tsuchiya u. a. \(2001\)](#) bei Blasen größer 4mm zu beobachten sind. Sie bilden sich an den unteren Rändern der Blase wenn dort die lokale Krümmung sehr stark ist und breiten sich entlang der Blasenoberfläche bis zur Blasenspitze aus (vgl. Kapitel 5). Diese Wellenbewegung korrespondiert grob mit der Zickzack- oder Helixbewegung der aufsteigenden Blasen.

Die starken Deformationen in der Simulation liegen allerdings nur bei einem geringen Wandabstand von 2 Blasendurchmessern vor. Bei größeren Wandabständen zeigen die Blasen wesentlich weniger Formschwankungen während ihres taumelnden Aufstiegs. Verdeutlicht wird dies durch [Abbildung 9.18](#). Dort wird der Einfluß des Wandabstands auf das Verhalten der 8mm Blase näher betrachtet. Für den Anstellwinkel Θ ist für Wandabstände von 2, 4, und 8 Blasendurchmessern so gut wie kein Einfluß zu erkennen. Gleiches gilt für die Bahnfrequenz. Anders

hingegen beim Durchmesser Verhältnis h/b ; hier wird deutlich, daß die Blase mit dem geringsten Wandabstand die größten Formschwankungen aufweist. Auch der mittlere Wert des Durchmesser Verhältnisses ist mit $(\overline{h/b})_{d_W=2d_B} = 0,42$ größer als für den vierfachen und achtfachen Wandabstand mit jeweils $(\overline{h/b})_{d_W=4d_B} = 0,38$ bzw. $(\overline{h/b})_{d_W=8d_B} = 0,35$. Diese Tendenz läßt sich durch die Abwärtsströmung der Flüssigphase zwischen der Blase und der Wand erklären.

Wie aus Tabelle 9.9 hervorgeht, ist das gemittelte Durchmesser Verhältnis und seine Standardabweichung für die 8mm für die beiden größeren Wandabstände ähnlich. Für den geringen Wandabstand von 2 Durchmessern beträgt die Standardabweichung des Durchmesser Verhältnisses $\sigma_{SD}(2d_B) = 0,047$. Eine Verdoppelung bzw. Vervierfachung des Wandabstandes reduziert die Standardabweichung auf $\sigma_{SD}(4d_B) = 0,030$ und $\sigma_{SD}(8d_B) = 0,035$.

Die Auslenkung der Blase senkrecht zur Aufstiegsrichtung unterscheidet sich auch in Abhängigkeit des Wandabstandes wie aus dem rechten Teil der Abbildung 9.18 hervorgeht. So betragen die Bahnradien 1,5mm für einen Wandabstand von 2 Durchmessern, 1,3mm für 4 Durchmesser und 0,65mm für 8 Durchmesser. Somit wird der Radius der Blasenbahn mit zunehmendem Wandabstand geringer.

Für den geringen Wandabstand beschreibt die Blase nach ihrem Start kurz eine Zickzack Bahn, die sofort in eine helikale Bahn übergeht. Nach ca. 4 Umläufen ist die helikale Bahn vollständig ausgeprägt. Bei einem Wandabstand von 4 Durchmessern kann eine ausgeprägte helikale Bahn erst nach etwa 12 Umläufen festgestellt werden. Für den maximalen Wandabstand bewegt sich die Blase nach 12 Umläufen immer noch auf der stark abgeflachten helikalen Bahn. Für die Charakterisierung der Bahn bietet sich die Verwindungszahl ξ an, welche die Gesamtlänge der Bewegungsbahn, angenähert durch Polygonzüge $(x_i, y_i, z_i)_{i=0,\dots,n}$, ins Verhältnis zu ihrem vertikalen Anteil (x-Richtung) setzt. Schlüter und Rübiger (1998) verwenden die Verwindungszahl für dreidimensionale Bewegungsbahnen:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}}{x_i - x_{i-1}} \quad (9.20)$$

Bei der Verwindungszahl ξ wird die räumliche Aufstiegsbahn in Einzelvektoren

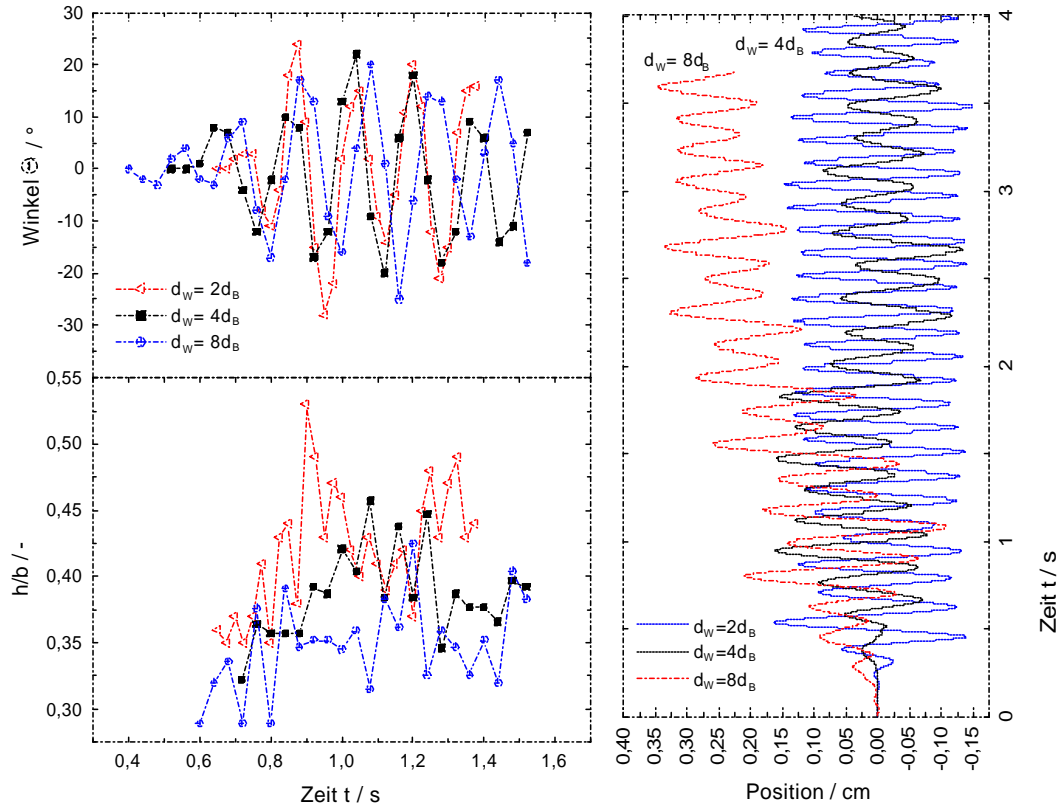


Abbildung 9.18.: Einfluß des Wandabstandes auf den Anstellwinkel (links oben), das Durchmesser Verhältnis (links unten) und die Bewegungsbahn einer $8mm$ Blase.

zerlegt und deren Länge bestimmt. Die Summe aller Vektorlängen wird auf die vertikale Aufstiegsbahn bezogen. Je geringer die horizontale Auslenkung der Blase desto mehr nähert sich die Verwindungszahl dem Wert 1 an. Für eine geradlinige Aufstiegsbahn gilt $\xi = 1$.

Wie aus Tabelle 9.9 zu erkennen ist, sinkt die Verwindungszahl mit steigendem Wandabstand von 1,0638 auf 1,0053. Gemäß Clift u. a. (1978) steigt eine $8mm$ Blase stockend auf einer geradlinigen Bahn auf. Ein großer Wandabstand gibt somit die Experimente am realistischsten wieder. Dies deckt sich mit den zuvor gemachten Beobachtungen für eine $4mm$ Blase.

Tabelle 9.9.: Einfluß des Wandabstandes auf den Aufstieg einer 8mm Blase.

Wandabstand d_W	$2d_B$	$4d_B$	$8d_B$
Geschwindigkeit w_B	14,33cm/s	20,69cm/s	21,13cm/s
Durchmesser Verhältnis h/b	0,420	0,385	0,348
Standardabw. $\sigma_{SD,h/b}$	0,047	0,030	0,035
Bahnradius r_{Bahn}	1,5mm	1,3mm	0,65mm
Verwindungszahl ξ	1,0638	1,0057	1,0053

Zeitlich gemittelte Durchmesser Verhältnisse

Die zeitlich gemittelten Durchmesser Verhältnisse können auch mit experimentellen Werten aus den eigenen Messungen und der Literatur nach [Raymond und Rosant \(2000\)](#) verglichen werden. Abbildung 9.19 zeigt die Durchmesser Verhältnisse der Simulationen als Funktion des Blasendurchmessers. Die Ergebnisse der Simulationen für Luft/Wasser im linken Teil der Abbildung stimmen sehr gut mit den experimentellen Werten für die anfangs stark deformierten Blasen überein, obwohl die Blasen in den Simulationen sphärisch vorgegeben waren.

Der Verlauf der Durchmesser Verhältnisse für die Systeme S6-S9 ähnelt bezüglich der Abweichungen zu den Experimenten dem der Aufstiegsgeschwindigkeiten. Für hohe Viskositäten liegt eine sehr gute Übereinstimmung mit den Meßwerten vor. Mit abnehmender Viskosität (S6) weichen Experiment und Simulation zunehmend voneinander ab. Die Blasen sind verglichen mit den Experimenten zu schmal und haben einen zu geringen Anströmquerschnitt. Folglich müßten sie zu hohe Aufstiegsgeschwindigkeiten aufweisen. Trotz dieser Tatsache sind die Aufstiegsgeschwindigkeiten zu gering (vgl. Abbildung 9.10). Dies legt die Schlußfolgerung nahe, daß die numerische Umsetzung noch verbessert werden muß und eventuell physikalische Phänomene noch nicht erfaßt sind.

Abbildung 9.20 zeigt noch einmal die Durchmesser Verhältnisse aller berechneten Blasen der Systeme S1-S9 als Funktion der Tadaki-Zahl. Zusätzlich sind die drei in Abschnitt 2.2.4 beschriebenen Korrelationen für die Vorhersage der Durchmes-

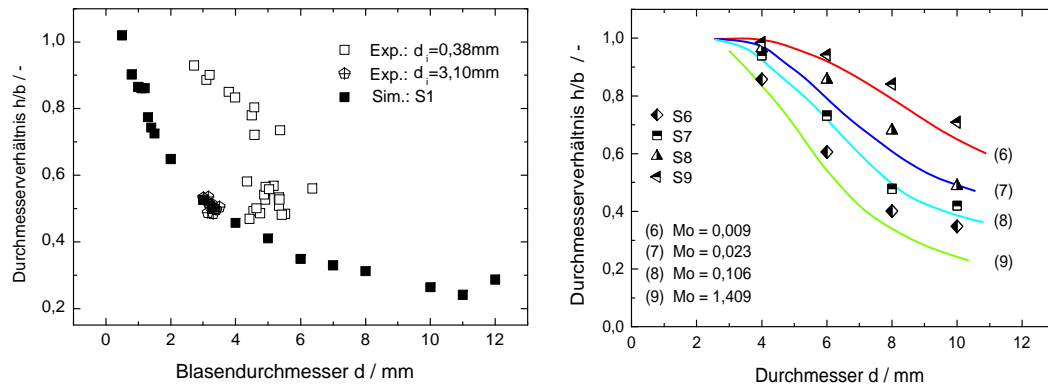


Abbildung 9.19.: Vergleich zwischen experimentellen Durchmesser-Verhältnissen und numerischen Werten (Systeme S1, S5-S9). links: eigene Messungen in Wasser (offene Symbole); rechts: Wasser/Glycerin Gemische nach (Raymond und Rosant 2000) (Linien).

serverhältnisse nach Tadaki und Maeda (1963), Vakhrushev und Efremov (1970) sowie Fan und Tsuchiya (1990) dargestellt. Fast alle Werte können sehr gut mit dem Ansatz von Fan und Tsuchiya (1990) für reines Wasser beschrieben werden. Hier wird deutlich, daß die simulierten Durchmesser-Verhältnisse für die Systeme S6-S9 oberhalb der Werte aus dem Ansatz von Fan und Tsuchiya liegen und sich in einigen Fällen den Werten von kontaminierten Systemen (Tadaki und Maeda, Vakhrushev und Efremov) annähern. Ähnliches gilt für das System S5 nach Maxworthy u. a. (1996) In diesem System steigt die Aufstiegsgeschwindigkeit monoton als Funktion des Durchmessers an. In den Systemen S2-S4, in denen der Verlauf der Aufstiegsgeschwindigkeit dem von Wasser ähnelt, liegen die Werte für größere Reynolds-Zahlen, sprich größere Blasendurchmesser unterhalb deren von Fan vorhergesagten.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die starke Formdynamik und die großen Anstellwinkel, wie sie bei Luftblasen in Wasser festzustellen sind, nicht mit der numerischen Simulation wiedergegeben werden können. Das zeitliche Mittel der Durchmesser-Verhältnisse ist in sehr gutem Einklang mit dem Ansatz von Fan und

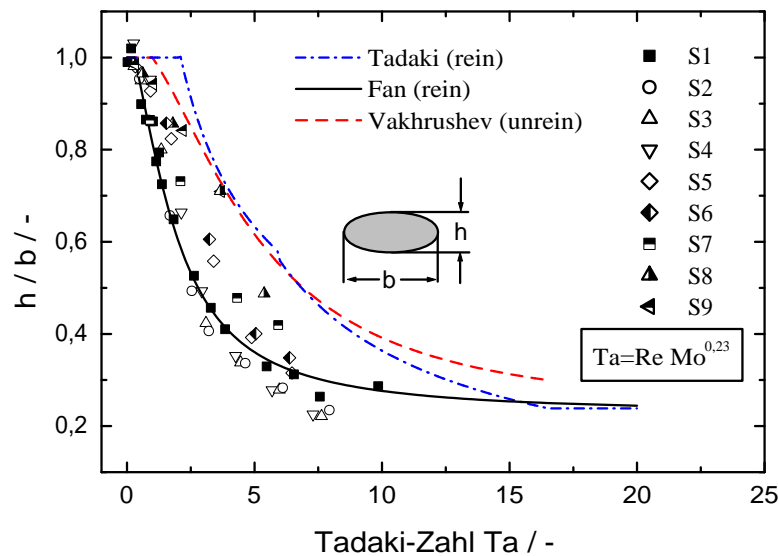


Abbildung 9.20.: Vergleich der Durchmesserhältnisse der System S1-S9 als Funktion der Tadaki-Zahlen mit Korrelationen aus der Literatur.

Tsuchiya. Die Durchmesserhältnisse für formstabile Blasen lassen sich ebenfalls in guter Näherung mit diesem Ansatz wiedergeben. Für die Vorhersage des Durchmesserhältnisses bei bekannter Reynolds-Zahl bzw. Tadaki-Zahl ist also Gleichung (2.50) zu empfehlen.

9.6. Wirbelschleppenphänomene

Während bisher nur die Blasen selbst betrachtet wurden (Geschwindigkeit, Form und Bahn) sollen jetzt auch die Einflüsse der Blasen auf die umgebende Flüssigkeit näher untersucht werden. Wie schon in Kapitel 2.4 beschrieben, bilden sich hinter Blasen Wirbelschleppen aus. Diese können laminar oder turbulent, offen oder geschlossen sein. Für geringe Reynolds-Zahlen ist die Blase noch laminar umströmt, ohne daß sich eine Wirbelschlepe hinter der Blase ausbildet. In den Simulationen für Luftblasen in Wasser ist dies z.B. bis etwa zu einem Durchmesser von $d_B = 2\text{mm}$ ($\text{Re}=496$) der Fall. In den turbulenten Schleppen können sich Wir-

bel von der Rückseite oder dem tiefegelegenen "Rand", bzw. "Kanten" der Blase ablösen. Diese abgelösten Wirbel erzeugen lokal turbulenzartige Strömungen in der Flüssigphase und können die Bewegung anderer Blasen beeinflussen. Diese großskalige Turbulenz (die Skala liegt in der Größenordnung des Blasendurchmessers) wird auch als "Pseudo-Turbulenz" bezeichnet ([Lance und Bataille 1991](#); [Lindken und Merzkirch 2001](#)). Für höhere Reynolds-Zahlen können in den Simulationen sowohl helikale als auch achsensymmetrische Wirbelschleppen beobachtet werden. Im nachfolgenden werden diese beiden Schleppenformen näher untersucht. Da eine hohe Viskosität der Flüssigphase für eine schnelle Dissipation der kinetischen Energie sorgt, sind Wirbelschleppenphänomene hauptsächlich in niedrigviskosen Flüssigkeiten zu beobachten. Daher sind die nachfolgenden Untersuchungen zum großen Teil für das System Wasser/Luft gemacht worden. Sofern nicht anders erwähnt, beziehen sich die Ergebnisse auf das letztgenannte System.

9.6.1. Helikale Wirbelschleppe

Eine helikale Wirbelschleppe kann bei ellipsoiden oder kappenförmigen Blasen, die auf Schraubenbahnen aufsteigen in ruhender Flüssigkeit für $Re < 5000$ beobachtet werden ([Miyahara u. a. 1988](#)). Aus experimentellen Beobachtungen geht hervor, daß der helikale Wirbel eine Zeit lang stabil bleibt bevor er sich ablöst ([Lindt 1972](#); [Lindt und de Groot 1974](#); [Miyahara u. a. 1988](#)). Der helikale Wirbel stellt das Gegenstück zu der zweidimensionalen von Kármán'schen Wirbelstraße dar. In Abbildung 9.21 sind die experimentellen Beobachtungen von [Miyahara u. a. \(1988\)](#) schematisch dargestellt. Zusätzlich ist in einem zweidimensionalen Schnitt die Wirbelschleppe hinter einer simulierten 10mm Blase ($Re=2147$) dargestellt. Die Blase ist im Gegenstrom gehalten. Aus der Abbildung wird die starke Asymmetrie der Schleppe deutlich, sowohl im Experiment als auch in der Simulation. Zusätzlich liegen innerhalb dieses Strömungsregimes noch starke Formänderungen der Blase vor. Diese und die periodisch wechselnde Orientierung der Blase können zu unregelmäßigen Strömungsablösungen an dem Rand der Blase führen. Diese wiederum führen zu einer starken Wirbelbildung, die eventuell einen Wirbelfaden bildet, der sich kontinuierlich von dem am stärksten umströmten Rand der Blase ablöst ([Fan](#)

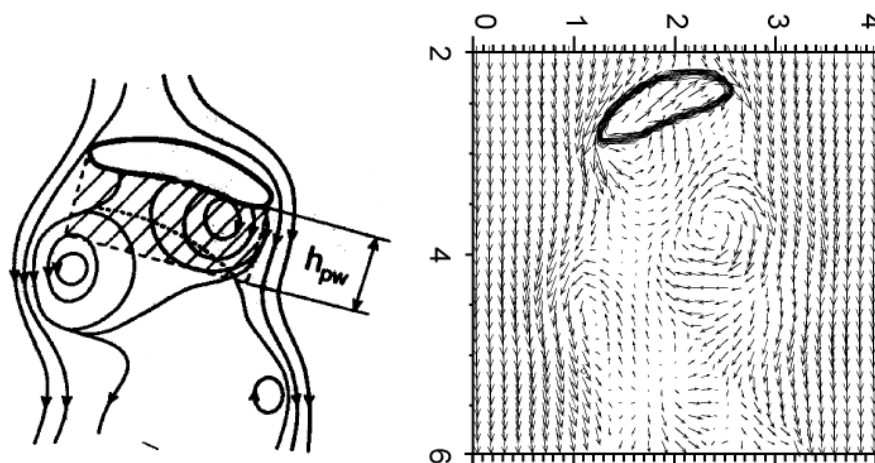


Abbildung 9.21.: links: Schematische Darstellung der Strömung in der helikalen Wirbelschleppe und der Länge h_{PW} der primären Wirbelschleppe einer sphärischen Kappenblase (Miyahara u. a. 1988); rechts: Helikale Wirbelschleppe hinter einer 10mm Blase.

und Tsuchiya 1990). Aus experimentellen Beobachtungen der Ablöseregionen wird deutlich, daß diese um die Blase rotieren. Die Ablösefrequenz stimmt mit der Bahnfrequenz der Blase überein (Miyahara u. a. 1988).

Für hohe Reynolds-Zahlen besteht das Nachlaufgebiet aus einem kurzen helikalen Wirbel in Blasennähe und unregelmäßigen Wirbeln im entfernten Bereich. Die Wirbel, die sich aus der Blasennähe gelöst haben, werden als Zerfallsprodukte einer instabilen helikalen Konfiguration betrachtet (Lindt 1972; Lindt und de Groot 1974). Auch diese experimentelle Beobachtung kann in den Simulationen wiedergefunden werden (s. Abbildung 9.21). Physikalisch kann diese Schleppenstruktur nach Fan und Tsuchiya folgendermaßen beschrieben werden: Vor der Blase bildet sich eine Grenzschicht aus. Diese löst sich entlang des Randes der Blase ab und formt einen Wirbel. Dieser dort entstandene Wirbel bewegt sich auf einem Wirbelfaden stromabwärts. Infolge des Druckminimums in der Schleppe tendiert der Wirbel hin zur zentralen Achse der Schleppe. Durch die Rotation der Ablösung entlang des Blasenrands formt der Wirbelfaden gleichzeitig eine Spirale. Die resultierende Schleppenstruktur ist ein kontinuierlicher Wirbelfaden um die vertika-

len Aufstiegsachse, dessen Neigung durch die Rotationsfrequenz der Blase und die Aufstiegsgeschwindigkeit der Blase bestimmt wird. Das periodische Ablösen von Wirbeln von den Blasenrändern einer helikal aufsteigenden Blase wird auch von [Schlüter \(2002\)](#) für Luftblasen in Wasser und von [Miyahara u. a. \(1988\)](#) in einem fest/flüssig fluidisiertem Bett bestätigt.

Aus den Simulationen für eine 8 bzw. 10mm Blase ist erkennbar, daß sich eine große Anzahl von Wirbeln auf der Blasenunterseite von den Rändern bzw. "Kanten" der Blasen ablöst. Da in den Simulationen das komplette dreidimensionale Strömungsfeld berechnet wird, ist ein einfacher Vergleich mit den experimentellen Beobachtungen möglich. Zur Erfassung der Position der Wirbel werden vier

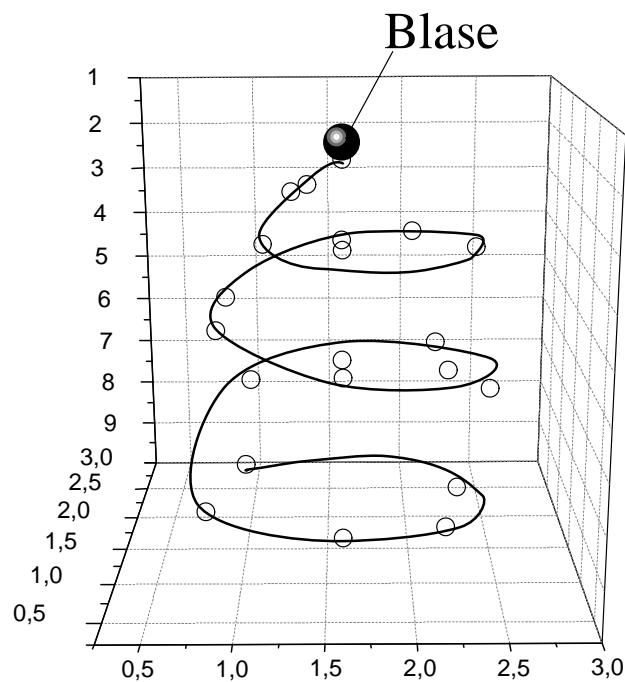


Abbildung 9.22.: Position der abgelösten Wirbel einer 8mm Blase.

Ebenen durch das Simulationsgebiet gelegt. Die Ebenen schneiden sich in der vertikale Aufstiegsachse und sind zueinander in einem Winkel von 45° angeordnet.

Innerhalb jeder Ebene kann die Position der einzelnen Wirbel bestimmt werden. Abbildung 9.22 zeigt diese Positionen für eine 8mm Blase zum Zeitpunkt $t = 1,46s$. Die in der Abbildung dargestellte Blase ist stark verkleinert dargestellt, um eine Verdeckung der Wirbelpositionen zu vermeiden. Wie der Abbildung zu entnehmen ist, liegen die Wirbel auf einer helikalen Bahn mit einem Radius von ungefähr von etwa $r_{Wirbel} = 9mm$. Dieser ist wesentlich größer als der vorliegende Bahnradius von $r_{Bahn} = 1,5mm$. Da die experimentellen Bahnradien höher liegen, kann hiermit die Beobachtung von Schlüter und Mayahara qualitativ bestätigt werden.

9.6.2. Achsensymmetrische Wirbelschleppe

Für geradlinig aufsteigende Kappenblasen bildet sich eine andere charakteristische Wirbelform aus - der achsensymmetrische Wirbel, der gemäß den Experimenten von Miyahara u. a. (1988) schematisch in Abbildung 9.23 dargestellt ist. Daneben ist die Simulation einer 13mm Luftblase in Wasser zu sehen. Aus der Abbildung wird

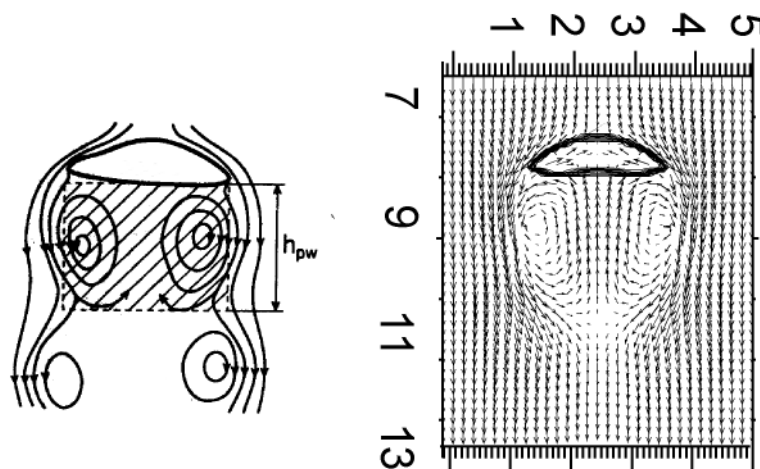


Abbildung 9.23.: Links: Schematische Darstellung der Strömung in einer achsensymmetrischen Wirbelschleppe einer sphärischen Kappenblase (Miyahara u. a. 1988); rechts: Achsensymmetrische Wirbelschleppe hinter einer 13mm Blase.

deutlich, daß die Strömung bezüglich der Aufstiegsachse als symmetrisch betrachtet

werden kann. Während in der Abbildung von Miyahara eine offenen Wirbelschleppe zu sehen ist, ist die Schleppe in der Simulation geschlossen. In der Simulation hat sich hinter der Blase ein rotationssymmetrischer Wirbelring ausgebildet. In Experimenten sind sowohl rotationssymmetrische Wirbelringe als auch zwei kontinuierliche helikale Wirbel beobachtet worden.

9.6.3. Wirbelschleppenlänge

Ein weiterer interessanter Aspekt ist die Länge der Wirbelschleppe. Abbildung 9.24 zeigt die auf den Blasendurchmesser normierte Wirbelschleppenlänge h_{PW} des primären Wirbels in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl für die Systeme S1-S6. Bedingt durch die höhere Viskosität der Flüssigphase sind für Wasser/Glycerin Gemische andere Wirbelschleppen zu erwarten als für reines Wasser. In den Systemen S7-S9 mit hoher Viskosität werden die Blasen bis zu einem Durchmesser von 10mm vollständig laminar umströmt und es bildet sich keine Wirbelschleppe aus. Ab Viskositäten von $\eta_L \leq 75Pas$ bilden sich Wirbel hinter den Blasen, allerdings erst oberhalb eines Durchmessers von 10mm für die Systeme S5 und S6. Je weiter die Viskosität abnimmt, desto kleiner wird der Blasendurchmesser, bei dem sich eine Wirbelschleppe ausbildet. Wie der Kurve für reines Wasser (S1) zu entnehmen ist, wächst die normierte Schleppenlänge bis zu einer Reynolds-Zahl von $Re \approx 2100$ ($d_B = 10mm$) annähernd linear an. Für größere Reynolds-Zahlen sinkt die bezogene Schleppenlänge von 2,64 zunächst wieder bis auf 2,21 ab ($d_B = 12mm$, $Re = 2667$). Danach steigt sie weiter an, nähert sich asymptotisch aber einem Wert von etwa 3 an ($d_B = 15mm$, $Re = 3749$). Bei Blasen mit $d_B > 15mm$ tritt ein zunehmender Zerfall während des Aufstieges auf, so daß die exakte Länge der Schleppe kaum noch zu bestimmen ist, da die einzelnen Fragmente in der Schleppe starke Verwirbelungen verursachen.

Die 8, 9 und 10mm Blasen ($Re=1773, 1895, 2116$) steigen helikal auf. Hinter ihnen bildet sich eine offene und turbulente Schleppe aus. Durch die fortlaufenden Oberflächendeformationen und die Pendelbewegung kommt es zu kontinuierlichen und unregelmäßigen Wirbelablösungen und stark variierenden Schleppenlängen. Daher

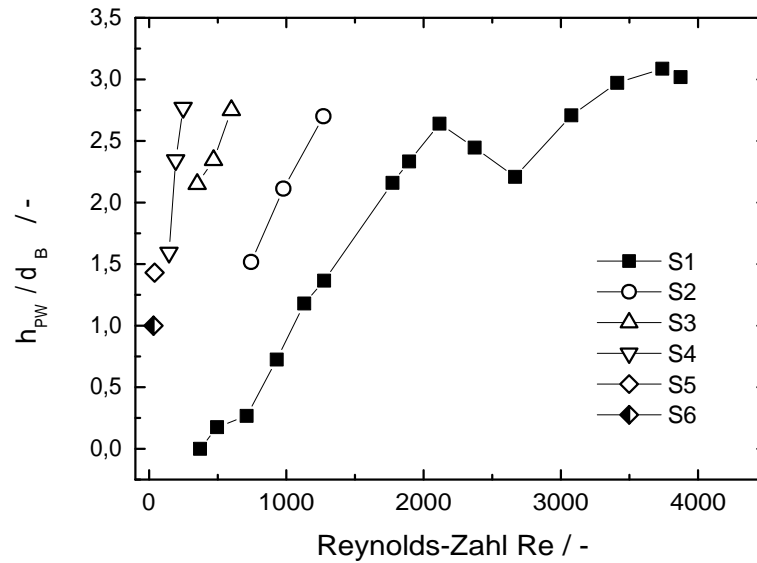


Abbildung 9.24.: Normierte Länge der primären Wirbelschleppe als Funktion der Reynoldszahl

sind in Abbildung 9.24 die *maximalen* Schleppenlängen bei noch geradlinigem Aufstieg eingezeichnet. Ein typisches Beispiel für solch eine turbulente Schleppe ist in Abbildung 9.25 zu erkennen. Dort sind für zwei verschiedene Zeitpunkte zweidimensionale Schnitte durch das dreidimensionale Geschwindigkeitsfeld einer 8mm Blase dargestellt. Deutlich zu sehen ist die stark deformierte Blasenoberfläche und die offene, stark turbulente Schleppe, in der ein abgelöster Wirbel zu erkennen ist. Die Bestimmung der Wirbelschleppenlänge der primären Schleppe für diese turbulenten Nachlaufgebiete erfolgt in Anlehnung an die Definition nach Fan und Tsuchiya (s. Anhang). Zur Auswertung ihrer Versuche in einer Flachapparatur verwendeten die Autoren das Verhältnis von Blasen- zu Schleppenvolumen. Wie aber aus den Abbildungen 9.25 und 9.21 hervorgeht, ist das Schleppenvolumen nur sehr schwer zu bestimmen. Daher wird im Nachfolgenden nur das Verhältnis des Äquivalentdurchmessers d_B zur Höhe der primären Schleppe h_{PW} verwendet.

Die auf d_B bezogenen Schleppenlängen für eine 10 mm Blase sind in Abbildung 9.26 zu sehen. Zusätzlich ist der Anstellwinkel Θ zur Horizontalen aufgeführt. Der Abbil-

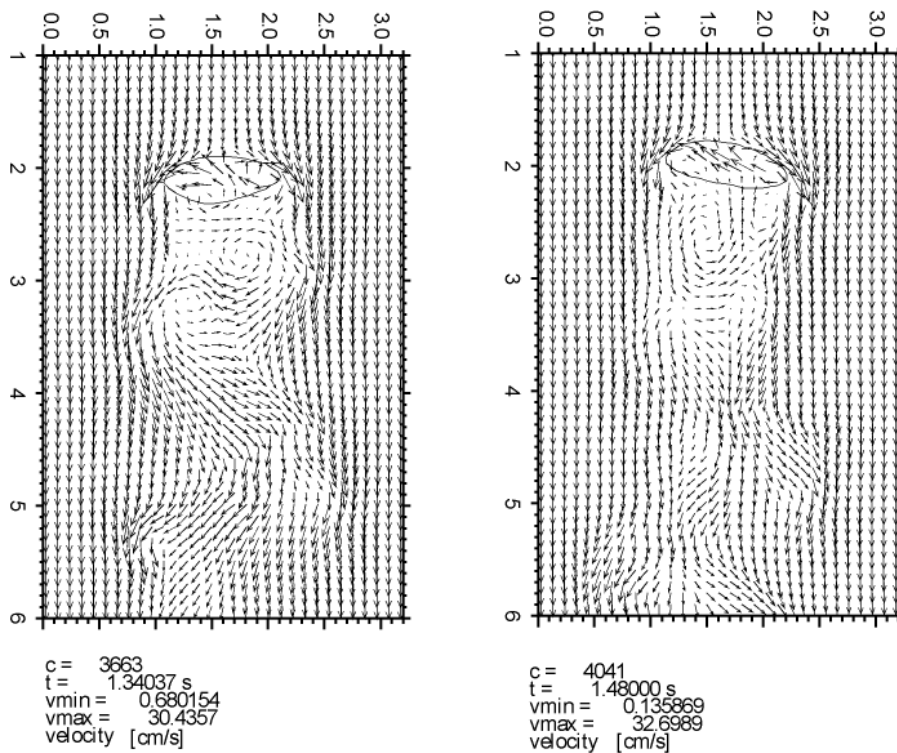


Abbildung 9.25.: 2D Schnitte durch einen Ausschnitt aus dem Geschwindigkeitsfeld einer 8 mm Blase im Gegenstrom.

Es ist zu entnehmen, daß die Länge des primären Wirbels der Blase unmittelbar nach ihrer Entstehung bis auf einen Wert von 2,64 kontinuierlich anwächst. Die Blase steigt noch geradlinig auf und es bildet sich ein torusförmiger Wirbel entlang der Blasenunterseite. Nach 0,5 Sekunden erfolgt der Übergang vom geradlinigen zum helikalen Aufstieg, d.h. der Übergang von symmetrischer zu asymmetrischer Schleppe. Mit dem Einsetzen der helikalen Bewegung nach etwa 0,5 Sekunden beginnt die Blase mit einer taumelnden Bewegung in der Schnittebene, was sich durch einen kontinuierlichen Wechsel des Anstellwinkels Θ bemerkbar macht (s. Abbildung 9.26 oben). Durch die helikale Bewegung kann sich die primäre Wirbelschleppe nicht mehr so weit ausbilden und es kommt zu Wirbelablösungen durch die externe Umströmung der Blase, was sich durch abrupte Verkürzungen der Länge der primären Wirbelschleppe äußert (s. Abbildung 9.26 unten). Das Nachlaufgebiet der Blase nimmt stark asymmetrische Formen an (vgl. Abbildung 9.25) und weist

einen hohen Grad an Turbulenz auf. Durch das permanente Ablösen von einzelnen Wirbeln auf der Blasenrückseite unterliegt die Länge des primären Wirbels schnellen Schwankungen. Zusätzlich sind in der Abbildung die Ergebnisse zu ei-

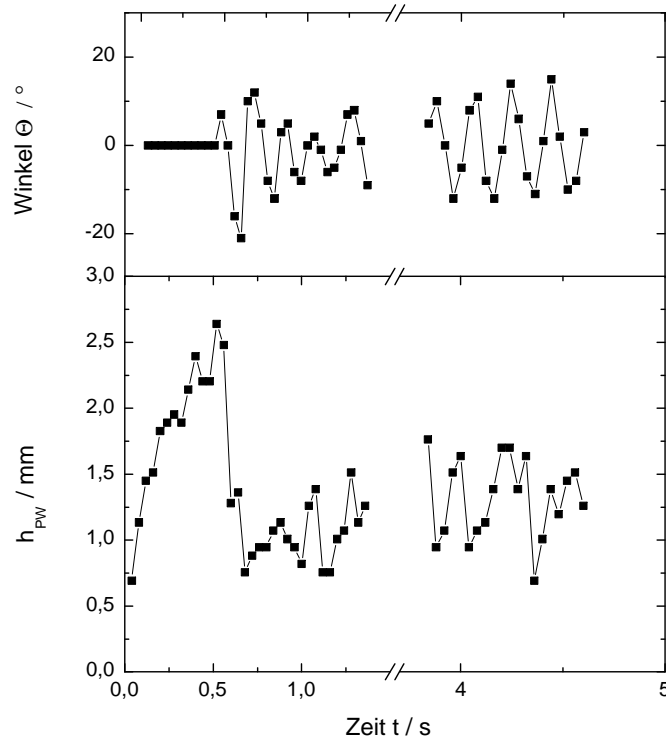


Abbildung 9.26.: Unten: auf den Blasendurchmesser bezogene Höhe der primären Schlepe einer 10 mm Luftblase in Wasser; oben: Anstellwinkel Θ Blase.

nem späteren Zeitintervall ($\approx 3,75 - 4,75$ s) dargestellt. Die Blase steigt auf einer gleichmäßigen Spiralbahn auf, wie der Anstellwinkel erkennen läßt. Trotz dieser gleichmäßigen Bewegung ist die Lage der primären Schlepe noch starken, unregelmäßigen Schwankungen unterworfen, die einer sägezahnförmigen Kurve ähneln.

Die obigen Beobachtungen wurden auch schon von [Tsuchiya und Fan \(1988\)](#) bei der experimentellen Untersuchung aufsteigender Luftblasen in einem fest/flüssig fluidisierten Bett gemacht. Allerdings benutzten die Autoren eine Flachapparatur, um die Wirbelschlepe besser visualisieren zu können. Wie aus [Abbildung 9.27](#) hervorgeht, liegt eine sehr gute qualitative Übereinstimmung zwischen Experiment und

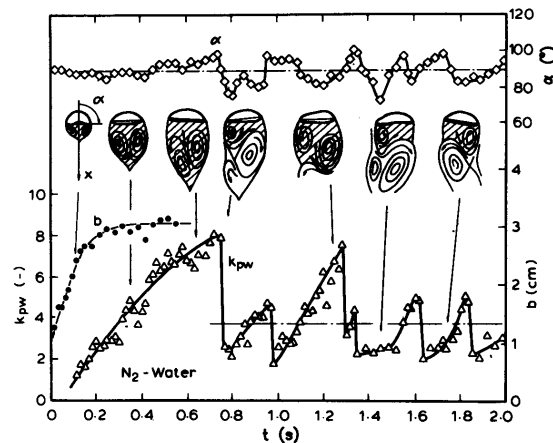


Abbildung 9.27.: Auf das Blasenvolumen bezogenes Volumen der primären Wirbelschleife in einem fest/flüssig fluidisierten Bett einer aufsteigenden Blase in einer Flachapparatur (Tsuchiya und Fan 1988).

Simulation vor. Ein quantitativer Vergleich ist nicht möglich, da die Autoren das Verhältnis von Blasenvolumen zu Schleppenvolumen angeben. Letzteres ist in den Simulationen aufgrund der komplexen, unregelmäßigen Form der Wirbelschleife nicht bestimmbar.

9.6.4. Wirbelschleppenbildung und -ablösung

Die Mechanismen der Wirbelschleppenbildung und -ablösung lassen sich gut anhand des Modells von Fan und Tsuchiya erklären. Demnach können zweidimensionale Wirbelschleppen näherungsweise als Schnitte durch dreidimensionale Schleppen betrachtet werden. Das Entstehen der Wirbelschleife und der Ablösephänomene lassen sich nach Fan und Tsuchiya durch zwei Faktoren erklären:

1. Hinter der Blase liegt ein geringer Druck vor. Dies führt zu einer Aufwärtsströmung an der Blasenunterseite für hinreichend große Reynolds-Zahlen.
2. Nach der Blasenbildung durchläuft die Blase große Formschwankungen. Dies führt zu einem hohen Geschwindigkeitsgradienten an den Blasenkanten und damit verbundener Wirbelbildung.

Diese Wirbel und die darin teilweise nach außen gerichtete Strömung können zu Ablöseerscheinungen der externen Strömung führen. Der gesamte Prozeß ist innerhalb kurzer Zeit nach der Blasenbildung abgeschlossen. Wirbelablösungen können symmetrisch oder asymmetrisch erfolgen, wobei der letztere Fall häufiger auftritt. Dies kann durch nichtlineare Wechselwirkungen zwischen den gegenläufigen Wirbeln auf der Blasenrückseite und durch asymmetrische Störungen des externen Strömungsfeldes erklärt werden. Abbildung 9.28 beschreibt phänomenologisch die periodische, asymmetrische Wirbelbildung und -ablösung hinter einer Kappenblase. Ausgangspunkt für die Wirbelablösung ist die Ablösung der externen Strömung an den Blasenkanten. Dort bilden sich kleine Verwirbelungen. Durch die Strömungsablösung bildet sich nach Fan und Tsuchiya eine freie Scherschicht aus. Infolge der unterschiedlichen charakteristischen Geschwindigkeiten an dem inneren und äußeren Rand der Scherschicht und des Druckdefektes in der Wirbelschleppe kommt es zu einem spiralförmigen Aufrollen der Scherschicht an der Blasenrückseite bis hin zu einem Wirbel. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich der Wirbel immer noch an der Blasenkante. Durch die Scherung wächst er stetig. Ab einer bestimmten Größe und Wirbelstärke beginnt er die externe Strömung und Scherschicht von der gegenüberliegenden Blasenseite anzuziehen. Wenn dies eintritt, schneidet die angezogene Strömung die Versorgung des Wirbels ab, so daß sein Wachstum beendet wird und er sich von der Kante ablöst. Die Strömung transportiert den Wirbel stromabwärts wo er durch Reibung zunehmend an Energie verliert. Jetzt beginnt die zweite Hälfte des Wirbelbildungsprozesses auf der gegenüberliegenden Seite der Blase. Findet im Fall eines geradlinigen Aufstiegs die Wirbelbildung nicht nur an einer, sondern an beiden Blasenkanten gleichzeitig statt, kommt es zum symmetrischen oder simultanen Ablösen von Wirbeln.

Eine nähere Betrachtung der in den Simulationen vorliegenden Strömung um eine Blasenkante und im Nachlaufgebiet zeigt, daß die zeitliche Entwicklung der Strömung und die Wirbelablösungen gut mit dem in Abbildung 9.28 gezeigten, schematischen, zeitlichen Strömungsverlauf für eine Kappenblase übereinstimmt. Im linken Teil der Abbildung sind in einer Schnittebene Ausschnitte aus den Geschwindigkeitsfeldern für eine 10 mm Blase dargestellt.

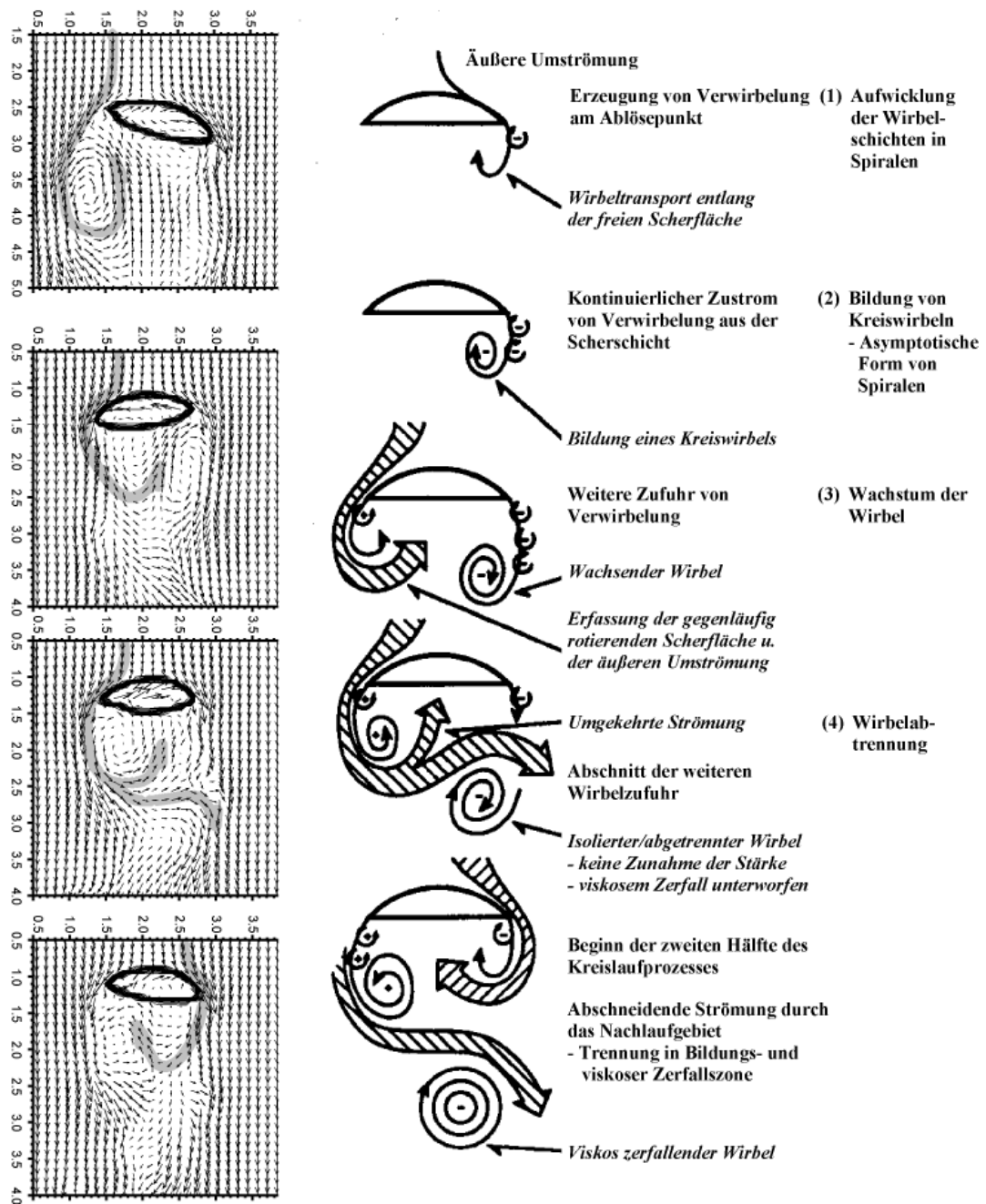


Abbildung 9.28.: Modell für die instationäre Wirbelablösung hinter Kappenblasen (Fan und Tsuchiya 1990) im Vergleich mit numerischer Simulation.

Modellvorstellung und Simulation unterscheiden sich jedoch in der Blasenform (Kappenblase gegenüber stark abgeflachtem Ellipsoid) und in der Anfangsphase der Instationaritäten. In der Simulation ist die Wirbelschlepe während des geradlinigen Aufstiegs in der Anfangsphase der Simulation noch völlig symmetrisch. Die Schlepe wächst an, ggf. lösen sich Wirbelringe ab, bevor die Blase ihre geradlinige Bahn verläßt und durch die beginnende helikale Bewegung Asymmetrien in der Schlepe auftreten. Diese treten bei Fan und Tsuchiya bereits zu Beginn auf (vgl. Abbildung 9.28). Nachdem die Blase ihre geradlinige Bahn verlassen hat und helikal aufsteigt, liegt eine gute Übereinstimmung zwischen Modell und Simulation vor: Es kommt ebenfalls zur Wirbelbildung, dessen Abtrennung und zum viskosen Zerfall abgetrennter Wirbel.

9.7. Blasenkoaleszenz

Die bisher gezeigten Ergebnisse beschränken sich auf die Simulation von Einzelblasen. In anwendungsrelevanten Zweiphasenströmungen liegen fast ausschließlich mehrere Blasen vor. Als ersten Schritt zum Verständnis von Blasen-Blasen-Wechselwirkungen wird hier im folgenden Abschnitt der Aufstieg von Blasenpaaren betrachtet. Koaleszenz ist ein in flüssig-flüssig oder gas-flüssig Strömungen auftretendes Phänomen und bezeichnet die Vereinigung zweier fluider Partikel. Hierbei finden Wechselwirkungen zwischen der kontinuierlichen Phase und den beiden fluiden Partikeln statt. Nähern sich zwei aufsteigende Blasen an, steigt der Druck zwischen ihnen. Die Druckerhöhung bewirkt eine abstoßende Kraft zwischen den beiden Blasen. Gleichzeitig kommt es zu einer Abplattung der Oberflächen. Diese Erhöhung der freien Energie durch Oberflächenvergrößerung des Systems geht mit der Reduzierung der Annäherungsgeschwindigkeit der Blasen einher. Der sich zwischen den Blasen bildende Film beginnt auszufließen und wird dadurch dünner. Ist die Annäherungsgeschwindigkeit der Blasen auf null reduziert bevor der Film seine Reißdicke unterschritten hat, werden die Blasen durch den erhöhten Druck innerhalb des Films auseinandergetrieben, d.h. sie prallen voneinander ab; andernfalls koaleszieren sie (Chesters und Hofman 1982; Duineveld 1998). Dieser Vorgang ist hauptsächlich durch die Annäherungsgeschwindigkeit und die Kontaktzeit charakterisiert. Für

hohe Weber-Zahlen $We = \rho_L w_B^2 r_B / \sigma$ bezogen auf die Annäherungsgeschwindigkeit $w_{B,H}$ ist die Wahrscheinlichkeit einer Koaleszenz klein und die Blasen prallen voneinander ab, bevor der sich zwischen den beiden Blasen ausbildende Film komplett drainiert ist (Chesters 1991; Duineveld 1998). Je höher die Viskosität der kontinuierlichen Phase, umso geringer ist die Annäherungsgeschwindigkeit, bzw. umso länger sind auch die Kontaktzeiten der Blasen und umso höher ist auch die Wahrscheinlichkeit einer Koaleszenz (Otake u. a. 1976).

Wird der Film hinreichend dünn, wirken intermolekulare Kräfte, die zum Aufriß des Films und somit zur Koaleszenz führen (Chesters 1991). Für reine Flüssigkeiten bestehen die intermolekulare Kräfte nur aus der van der Waals-Kraft. Die van der Waals-Kraft hat eine anziehende Wirkung, die den Film destabilisiert und die Koaleszenz beschleunigt (Chesters 1991). Liegen an der Phasengrenze elektrisch geladene Teilchen vor, so ziehen sie entgegengesetzt geladene Teilchen aus der umgebenden Phase an und bilden eine elektrische Doppelladungsschicht an der Phasengrenze. Treffen zwei derart "belegte" Grenzflächen aufeinander, so verlangsamen die elektrischen Kräfte durch ihre Abstoßung die Koaleszenz (Chen u. a. 1988; Yiangtsios und Davis 1991). Die abstoßenden elektrischen Kräfte durch die Doppelladungsschicht sind jedoch nur bei geringer Oberflächenspannung signifikant (Li 1994). In der Gegenwart von Tensiden kann der Marangoni Effekt die van der Waals-Kraft kompensieren und zu einer Stabilisierung des dünnen Films führen (Rubinstein und Leshansky 2000).

In der Literatur existieren sowohl experimentelle als auch theoretische Untersuchungen zur Koaleszenz von in Linie aufsteigenden Blasen (Crabtree und Bridgwater 1971; de Nevers und Wu 1971; Narayanan u. a. 1974; Bhaga und Weber 1980; Komasa u. a. 1980), nebeneinander (Duineveld 1998) aufsteigenden Blasen oder für Blasketten (de Nevers und Wu 1971). Gemäß den Beobachtungen der meisten dieser Autoren läßt sich der Koaleszenzprozeß von nacheinander aufsteigenden Blasen in folgenden Schritten beschreiben:

1. Beide Blasen ordnen sich vertikal an,

2. Beschleunigung und Strecken der nachlaufenden Blase in Richtung der vorauslaufenden,
3. Die nachlaufende Blase holt die vorauslaufende ein,
4. Drainage und Riß des dünnen Films zwischen den beiden Blasen, was zur Koaleszenz führt.

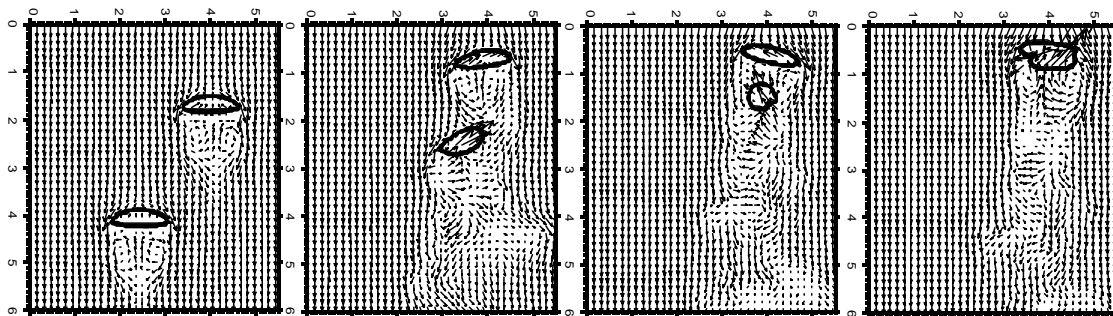


Abbildung 9.29.: Schnittdarstellung der Koaleszenz zweier 8mm Luftblasen in Wasser.

Dieser Prozeß kann auch in den Simulationen beobachtet werden. In [Abbildung 9.29](#) sind zwei 8mm Blasen zu verschiedenen Zeitpunkten zu sehen. Die Blasen haben einen anfänglichen Abstand von 3 Blasendurchmessern (24mm) in vertikaler und von 2 Durchmessern (16mm) in horizontaler Richtung. Die Blasen sind im Gegenstrom fixiert. Zu sehen ist ein zweidimensionaler Schnitt durch das Berechnungsgebiet. In der Abbildung finden sich die o.g. Schritte wieder.

In den in der Literatur vorliegenden Simulationen wurde bisher ausschließlich die Koaleszenz von nacheinander aufsteigenden Blasen untersucht (s. [Kapitel 6](#)). In Blasensäulen kommt es aber auch zur Koaleszenz von Blasen, die nebeneinander oder vertikal versetzt aufsteigen. In diesem Abschnitt soll daher die Koaleszenz von nebeneinander aufsteigenden Blasen näher untersucht werden.

Versuche zur Dynamik zweier nebeneinander aufsteigenden sphärischen Gasblasen ($d_B = 0,5\text{mm}$) von [Kok \(1993\)](#) in hyperfiltriertem Wasser (spez. Widerstand

18,2M Ω , weniger als 10ppb. organische Partikel) zeigten, daß die Blasen bei jedem Aufeinandertreffen koaleszieren. Duineveld (1998) führte zu diesem Thema detaillierte Experimente mit Luftblasen von 1-2 mm Durchmesser durch. Als Versuchsflüssigkeit wählte Duineveld ebenfalls hyperfiltriertes Wasser. Die Verwendung des hochreinen Wassers ermöglicht den sinnvollen Vergleich mit VOF Simulationen, da Oberflächeneffekte etwa durch Tenside nahezu auszuschließen sind. Als Kriterium für die Koaleszenz zweier Blasen fand Duineveld eine kritische Weber-Zahl $We_{H,krit} = \rho_L w_{B,H}^2 r_B / \sigma = 0,18$ die auf der horizontalen Annäherungsgeschwindigkeit $w_{B,H}$ der Blase basiert. Liegt die Weber-Zahl unterhalb des kritischen Wertes so koaleszieren die Blasen, andernfalls prallen sie voneinander ab.

Die Hochgeschwindigkeitsaufnahmen von Duineveld erlauben zusätzlich eine gute qualitative Vergleichsmöglichkeit. Als erste Vergleichsrechnung wird die Koaleszenz von zwei 1,8 mm großen Luftblasen gewählt. Die Simulationen erfolgen in einem 1,6cm \times 1,8cm \times 0,4cm (H \times B \times T) großen Rechengbiet mit Auflösungen von 128 \times 64 \times 32, 256 \times 128 \times 64 und 512 \times 256 \times 128 Zellen, so daß der Blasendurchmesser mit ca. 15, 29 und 58 Zellen aufgelöst wird.

Die Position der Blasen zum Ausgangszeitpunkt wird aus den Photographien von Duineveld (1998) übernommen. Zu Beginn der Simulation sind die Blasen in Ruhe und haben eine sphärische Form. Während des Aufstiegs nähern sich die Blasen wie im Experiment einander an. Nach 16ms berühren sich die Blasenoberflächen und es kommt zur Koaleszenz. Abbildung 9.30 zeigt die Koaleszenz der beiden Blasen als Vergleich zwischen Simulation und Experiment. Deutlich zu erkennen ist die sehr gute qualitative Übereinstimmung. Die während der Koaleszenz auftretenden Formen der einzelnen Blasen und des Koaleszenzkomplexes können mit der Simulation gut wiedergegeben werden. Der Vergleich der Zeitskalen ergibt jedoch leichte Differenzen zwischen Experiment und Simulation. Durch die Blasenerzeugung in den Experimenten ist die umgebende Flüssigkeit im Gegensatz zu der Simulation nicht vollständig in Ruhe. Dadurch unterscheidet sich der Zeitpunkt des Aufeinandertreffens der Blasen. Für einen quantitativen Vergleich wird die Zeit t^* eingeführt, indem das zweite Bild aus der Sequenz in Abbildung 9.30 als identischer Bezugspunkt gewählt wird. Daraus wird ersichtlich, daß die Simulation in den ersten 6ms ein fast identisches Resultat liefert. Im weiteren Verlauf der Sequenz ergeben sich leichte

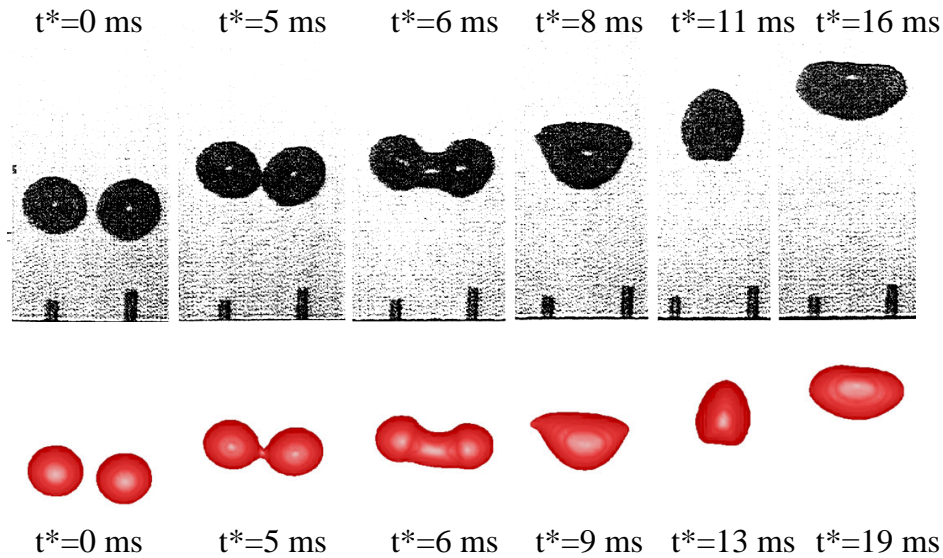


Abbildung 9.30.: Koaleszenz zweier 1,8 mm Luftblasen in Wasser, Vergleich zwischen Experiment ([Duineveld 1998](#)) und Simulation.

zeitliche Differenzen von bis zu 3ms . Da dieser hochdynamische Prozeß innerhalb weniger Millisekunden abläuft, können schon leichte Störungen in der Flüssigphase Auswirkungen auf die Koaleszenz haben. So läßt sich diese zeitliche Differenz zumindest teilweise erklären. Aus den Abbildungen von Duineveld läßt sich eine Weber Zahl für die Annäherungsgeschwindigkeit von $We_{H,exp} = 0,038$ abschätzen. Die Simulation liefert eine Weber Zahl von $We_{H,sim} = 0,056$. Beide Werte liegen unter der von Duineveld angegebenen kritischen Weber Zahl von 0,18 bis zu der Koaleszenz auftritt. Eine genaue Betrachtung der Phasengrenzen der beiden Blasen in der Simulation kurz vor dem Einsetzen der Koaleszenz zeigt jedoch nicht die von Duineveld beschriebenen Oberflächenabplattung. Folglich wird die Auflösung des Rechengebietes sukzessive gemäß den oben aufgeführten Werten verdoppelt. Selbst bei einer Auflösung von $512 \times 256 \times 128$ Zellen konnte eine Abflachung der Blasenoberfläche nicht beobachtet werden. Lediglich der Beginn der Koaleszenz verschob sich bei jeweils feinerer Auflösung von 15 auf 16 bzw. 19ms .

Sind die Grenzflächen der sich annähernden Blasen noch ausreichend voneinander entfernt, so wird die Phasengrenze mit dem PLIC Algorithmus physikalisch korrekt wiedergegeben. Befinden sich hingegen die Grenzflächen von zwei Blasen innerhalb einer einzigen Zelle, so können die beiden Grenzflächen von der Numerik nicht mehr separat erfaßt werden und werden zu einer einzigen neuen Grenzfläche kombiniert (vgl. Abbildung 9.31). Somit läßt sich festhalten, daß bei der vorliegenden Auflösung die realen Vorgänge im Film nicht wiedergegeben werden, sondern die Koaleszenz lediglich aufgrund der Berührung der numerischen Phasengrenzflächen erfolgt. Zur Bestätigung dieser Vermutung wird ein weiteres Experiment von [Dui-](#)

0,15	0,81	1	1	0,64	0
0	0,09	0,28	0,32	0,24	0,42
0	0	0	0,37	0,85	1
0	0	0	0,60	1	1

0,15	0,81	1	1	0,64	0
0	0,09	0,28	0,32	0,24	0,42
0	0	0	0,37	0,85	1
0	0	0	0,60	1	1

Abbildung 9.31.: Links: Zellenbelegung des Rechengitters nach der VOF-Methode; Rechts: Numerische Koaleszenz durch die PLIC-Rekonstruktion der Phasengrenze.

neveld ([1998](#)) numerisch nachgestellt - ein Abprallen zweier parallel aufsteigender Blasen mit nachfolgender Koaleszenz beim erneuten Zusammentreffen. Die geometrische Anordnung des Experiments wurde wiederum der Abbildung entnommen. Die Größe des Berechnungsgebiets beträgt $1,92cm \times 0,96cm \times 0,96cm$ bei einer Auflösung von $256 \times 128 \times 128$ Zellen. Der Abstand der Blasen in seitlicher Richtung beträgt 3,9 mm bei einer Höhendifferenz von 0,15 mm. Der Vergleich zwischen Experiment und Simulation in Abbildung 9.32 zeigt hier deutliche Differenzen. Die Blasen koaleszieren sofort beim ersten Berühren ohne - wie im Experiment - erst voneinander abzuprallen und beim zweiten Aufeinandertreffen zu koaleszieren. Die sich aus der Simulation ergebende Weber-Zahl beträgt $We_{H,sim} = 0,493$. Sie liegt also deutlich oberhalb des von Duinveld angegebenen kritischen von 0,18, bis zu

dem eine Koaleszenz eintritt.

Zur Klärung der Frage, ob eine Koaleszenz mit der VOF Methode korrekt wie-

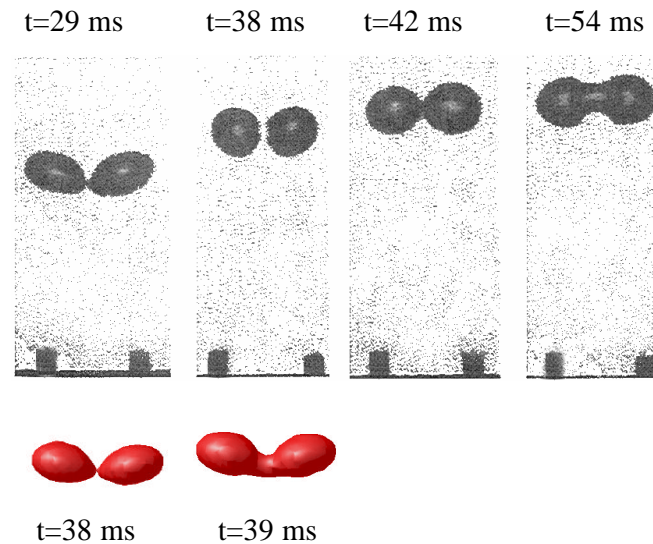


Abbildung 9.32.: Abprall und nachfolgende Koaleszenz zweier 2,4 mm Luftblasen in Wasser, Vergleich zwischen Experiment ([Duineveld 1998](#)) und Simulation.

dergegeben werden kann, bedarf es einer genauen Untersuchung der beteiligten physikalischen Prozesse: Wie eingangs bereits erwähnt, ist die Filmdrainage und das Aufreißen des Films der entscheidende Prozeß für die Koaleszenz ([Chesters 1991](#)). Für den Reißmechanismus gibt es in der Literatur zwei unterschiedliche Erklärungsansätze.

1. Intermolekulare Kräfte

Bei Unterschreitung einer gewissen Filmdicke kommen intermolekulare Kräfte zum Tragen, die einen Filmaufriß herbeiführen können ([Chesters und Hofman 1982](#); [Duineveld 1998](#)). Über die kritische Filmdicke, ab der molekulare Kräfte dominieren, gibt es in der Literatur unterschiedliche Angaben. Während Chesters und Hofman sowie Duineveld von einer Reichweite in der Größenordnung von 10nm sprechen, geben [Runowski \(2002\)](#), [Witelski und Bernoff \(2000\)](#), und [Goodall u. a. \(1998\)](#) hin-

gegen eine Reichweite von mehr als 100 nm an.

2. Fluktuationen

[Doublier \(1991\)](#) untersuchte die Drainage und den Filmaufriß beim Aufprall einer Blase auf eine freie Oberfläche. Gemäß dieser Beobachtungen erfolgt die Koaleszenz in drei aufeinanderfolgenden Stufen: einer schnellen Filmausdünnung, einer Verlangsamung bis hin zu einer kurzzeitig gleichbleibenden Filmdicke und schließlich eine Filmverdickung. In den meisten Fällen reißt der Film während der letzten Phase, d.h. während der Filmverdickung. Die Filmdicke während des Filmaufrisses variierte für eine 0,1 mm Blase zwischen 110 und 435 nm, lag also deutlich oberhalb der in der Literatur angegebenen Bereiche, in denen die van der Waals-Kräfte ihre anziehende Wirkung zeigen. Die beobachtete Filmdicke für destilliertes Wasser oder alkoholische Lösungen unterschritt niemals 80nm. Ein Auftreten von hydrodynamischen Instabilitäten, das oftmals als Erklärung für das Aufreißen herangezogen wird, wurde nicht beobachtet.

Ähnliche Untersuchungen, jedoch für ein flüssig/flüssig System, wurden von [Goodall u. a. \(1998\)](#) durchgeführt. Auch hier wurden kritische Filmdicken von 195nm bis 395,5nm in Abhängigkeit von der Filmviskosität beobachtet. Bei diesen Filmdicken wurde ein Filmriß durch van der Waals-Kräfte ausgeschlossen. Als Rißmechanismus wird der Kontakt von Kapillarwellen von zwei gegenüberliegenden Phasengrenzen aufgeführt. Mit abnehmendem Abstand der beiden Grenzflächen führen van der Waals-Kräfte zu einer Verstärkung dieser Kapillarwellen. Ohne signifikante abstoßende Kraft zwischen den beiden Tropfen kommt es zu einer Drainage des Films und zur Koaleszenz beim Kontakt der Kapillarwellen.

[Runowski \(2002\)](#) untersuchte die Strömung drainierender, dicker Lamellen ($d > 1\mu m$). Als Rißursache stellte er wachsende hydrodynamische und thermische Fluktuationen fest. Die Brownsche Molekularbewegung gilt als Ursache für die Fluktuationen und führt zu makroskopischen Auslenkungen der Grenzfläche.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß es zumindest prinzipiell möglich ist, die

oben genannten Phänomene auf der Basis der VOF Methode zu berechnen, wenn von hydrodynamischen oder thermischen Fluktuationen ausgelöste Störungen als Reißursache des Filmes zwischen den Blasen angenommen werden. Dies würde allerdings eine hinreichend genaue Auflösung des ca. 100nm dicken Filmes voraussetzen. Bei den oben aufgeführten numerische Simulationen betrug die Zellgröße aber 31000nm. Eine dreidimensionale Simulation der Koaleszenz ist selbst mit heutigen Hochleistungsparallelrechnern nicht realisierbar. Auch würde bei so feinen Gittern die Zeitschrittweite so klein, daß von sehr langen Rechenzeiten ausgegangen werden muß. Mit der VOF-Methode tritt also bei noch sinnvollen Auflösungen des Rechengebiets Koaleszenz bei jedem Aufeinandertreffen von zwei Grenzflächen sich annähernder Blasen innerhalb einer Rechenzelle auf. Diese Koaleszenz ist daher lediglich auf die numerische Kombination zweier Grenzflächen innerhalb einer einzigen Zelle zurückzuführen. Eine real vorliegende Koaleszenz kann somit durch eine Simulation reproduziert werden, ein Abprallen jedoch nicht.

Werden mehr als nur eine Blase in dem Simulationsgebiet betrachtet, so muß der Abstand zwischen den Blasen während der Simulation hinreichend groß bleiben, um Koaleszenz zu vermeiden. Dadurch ist auch der Gasgehalt im Rechenggebiet stark begrenzt, was eine Simulation von z.B. Ausschnitten aus Blasensäulen mit hohen Gasgehalten nahezu unmöglich macht. Aus experimentellen Beobachtungen ist bekannt, daß es dort fast ausschließlich zum Abprallen der Blasen kommt ([Otake u. a. 1976](#); [Jamialahmadi und Steinhagen 1989](#)).

9.8. Stoffübergang

Die der Simulation zugrunde liegenden Gleichungen sind in Abschnitt [7.2](#) angegeben. Der Stoffübergang hat keine Einfluß auf die Hydrodynamik. An der Phasengrenze soll jeweils thermodynamisches Gleichgewicht herrschen. Der dortige Konzentrationssprung läßt sich durch das Henry'schen Gesetz $H = c_G/c_L$ ausdrücken. Die übergehende Spezies liegt nur in einer verdünnten Konzentration vor. Das Blasenvolumen bleibt trotz Stoffaustausch konstant.

Die für die Simulationen verwendeten Stoffdaten der Flüssigkeiten sind in Tabelle 9.1 angegeben. Der Diffusionskoeffizient einer Komponente A in einem binären Gasmisch aus den Komponenten A und B berechnet sich nach dem empirischen Ansatz von Fuller und Giddings (s. Weiss 1986) zu

$$D_{A,B} = \frac{0,1013 \cdot 10^{-7} T^{1,75} \left[(\tilde{M}_A + \tilde{M}_B) / (\tilde{M}_A \cdot \tilde{M}_B) \right]^{1/2}}{p \left[(\sum \nu)_A^{1/3} + (\sum \nu)_B^{1/3} \right]^2}, \quad (9.21)$$

mit den Inkrementen zur Berechnung der Diffusionsvolumina $\sum \nu$. Sie geben das Volumen (in cm^3) pro Mol des Gases an. Diese Werte sind in der gängigen Literatur zu finden, z.B. in Weiss (1986). Für Sauerstoff betragen die Diffusionsvolumina 16,6, für Luft 20,1 und für Helium 2,88. Die verwendeten Diffusionskoeffizienten sind in Tabelle 9.10 aufgelistet. Für die Diffusion einer gelösten Spezies in einer Flüssigkeit gilt für unendlich verdünnte Lösungen nach Wilke und Chang (s. Weiss 1986)

$$D_{A,L} = \frac{7,4 \cdot 10^{-15} (\Phi \tilde{M}_L)^{0,5} T}{\eta_L \tilde{V}_A^{0,6}}. \quad (9.22)$$

Die daraus errechneten Diffusionskoeffizienten sind ebenfalls in der Tabelle aufgeführt. Da bereits geringe Konzentrationen von CMC ausreichen, um die Viskosität des Wassers deutlich zu erhöhen, wird auch in den Simulationen für die Systeme S1, S10 und S11 von einem konstanten Henry-Koeffizienten von $H = 33$ ausgegangen.

Tabelle 9.10.: Diffusionskoeffizienten.

Diffusionskoeffizient von O ₂ in	$D[m^2/s]$
Luft	$1,92 \cdot 10^{-5}$
Helium	$6,97 \cdot 10^{-5}$
Wasser (S1)	$2,01 \cdot 10^{-9}$
Wasser/CMC (S10)	$1,34 \cdot 10^{-10}$
Wasser/CMC (S11)	$8,04 \cdot 10^{-11}$

9.8.1. Validierung

Nachfolgend werden die Validierung des Modells und eine Studie zur Gitterabhängigkeit vorgestellt. Die Validierung soll anhand von einfachen Problemstellungen erfolgen. In den ersten beiden Fällen werden die Simulationen mit analytischen Näherungslösungen verglichen. Zur Vereinfachung wird jeweils von einem ein- bzw. zweidimensionalen symmetrischen Problem mit ruhender Flüssigphase ausgegangen. Die Simulationen der reinen Diffusion zeigten sehr gute Übereinstimmung mit analytischen Lösungen für beide Fälle. Weitere Details zu diesen beiden Testfällen finden sich in [Bothe u. a. \(2003b\)](#).

In einem weiteren Schritt werden die Simulationsergebnisse mit experimentellen Daten verglichen. Mit einer Mikroelektrode bestimmten [Riethues u. a. \(1986\)](#) die lokale Sauerstoffkonzentration in der Nähe der Phasengrenzfläche einzelner Blasen. Dazu wurde eine einzelne Sauerstoffblase mit einem Platindraht fixierten. Die Messungen erfolgten in ruhendem oder strömendem Wasser oberhalb der Blase in definierten Abständen. Die Validierung des Stofftransportes erfolgt anhand einer $3,94\text{mm}$ Blase in ruhendem, mit Stickstoff gesättigtem Wasser. Auch hier wurden zur Vermeidung parasitärer Strömungen die Geschwindigkeiten auf Null gesetzt. Die Simulation erfolgte unter Verwendung zweier Symmetrieebenen in einem Gebiet mit $128 \times 128 \times 128$ Zellen. Der Blasendurchmesser ist mit 32 Zellen aufgelöst. Die auf die Grenzflächenkonzentration normierten Werte der Konzentrationen innerhalb der Flüssigphase sind in [Abbildung 9.33](#) im senkrechten Abstand zur Grenzfläche gezeigt. Aus der zeitlichen Entwicklung des Konzentrationsverlaufs ist ersichtlich, daß nach 0,8 Sekunden der experimentelle Verlauf durch die Simulation sehr gut wiedergegeben wird. Beide Verläufe sind jedoch steiler als [Riethues u. a. \(1986\)](#) für reine Diffusion berechnet haben. Erst für höhere Viskositäten der Flüssigphase konnten die Autoren eine gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen und dem nach dem Fick'schen Diffusionsgesetz berechneten Konzentrationen feststellen.

Unter dem Mikroskop war während der Experimente eine Konvektionsströmung zu beobachten - möglicherweise Marangoni Konvektion - die zu einer Erhöhung des Stofftransportes führt. Die gemessenen Strömungsgeschwindigkeiten lagen zwi-

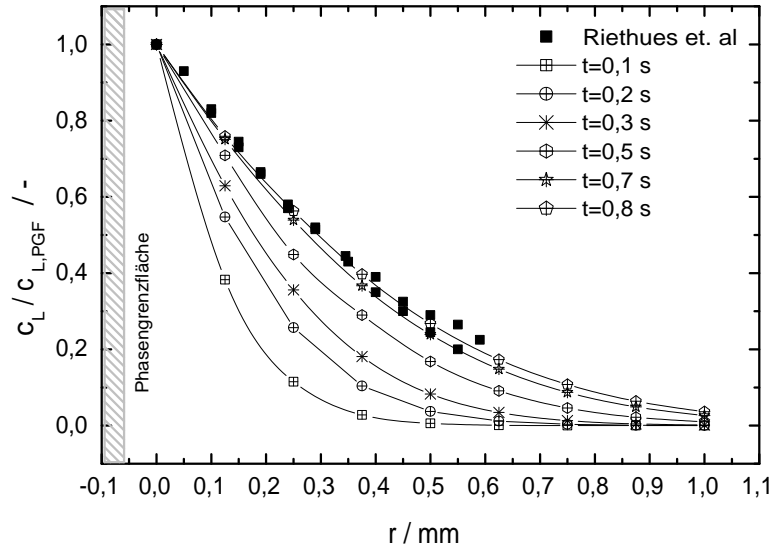


Abbildung 9.33.: Normierte Sauerstoff-Konzentration normal zur Phasengrenzfläche einer fixierten 4mm Blase.

schen 0,1 und 0,3 mm/s. Da die Abbildung 9.33 nur Konzentrationsverhältnisse angibt, ist ein quantitativer Vergleich der Konzentrationen oder der sich daraus berechnenden übergehenden Stoffströme hier schlecht möglich. Dazu kann jedoch der flüssigkeitsseitige Stoffübergangskoeffizient β_L herangezogen werden. Dieser berechnet sich gemäß der Filmtheorie aus $\beta_L = D_L / \delta_L$. Die Filmdicke der Grenzschicht kann gemäß der Autoren durch der Tangente an den normierten Konzentrationsverlauf an der Stelle $r = 0$ abgeschätzt werden. Da die Autoren dazu die normierten Konzentrationen verwenden, müßten sich demnach für Experiment und Simulation identische Übergangskoeffizienten ergeben. Für verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten der Flüssigphase werden in dem Artikel zusätzlich Werte für die Übergangskoeffizienten angegeben. Eine Extrapolation dieser Werte auf den fehlenden Wert für eine ruhende Blase in stagnanter Flüssigphase liefert für eine 2,8 mm Blase etwa $2 \cdot 10^{-3} \text{ cm/s}$ und für eine 4,9 mm Blase etwa $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ cm/s}$. Aus den numerischen Simulationen lasse sich die Stoffübergangskoeffizienten direkt berechnen:

$$\beta_L = \frac{\dot{N}_L}{A} (c_{A,L,PGF} - c_{A,L}). \quad (9.23)$$

Da der Diffusionskoeffizient in der Gasphase wesentlich größer ist als in der Flüssigphase, ist der Konzentrationsgradient in der Gasphase, bedingt durch die gleichen Stoffstromdichten über die Grenzfläche, wesentlich kleiner als in der Flüssigphase (Brauer 1971b). Die explizite Betrachtung der numerisch bestimmten Konzentrationswerte innerhalb der Blase zeigt, daß hier in guter Näherung eine konstante Konzentration angenommen werden kann. Aus dem Henry'schen Gesetz folgt damit:

$$c_{A,L,PGF} = \frac{c_{A,G,PGF}}{H} = \frac{\bar{c}_{A,G}}{H}. \quad (9.24)$$

Das Programm liefert die mittleren Konzentrationen $\bar{c}_{A,L}$ und $\bar{c}_{A,G}$, sowie den Stoffstrom \dot{N}_L und die Fläche A . Zu dem Zeitpunkt $t=0,85s$ ergibt sich gemäß Gleichung (9.23) ein flüssigkeitsseitiger Stoffübergangskoeffizient von $\beta_L = 1,77 \cdot 10^{-2} cm/s$, der somit eine Größenordnung oberhalb des experimentell bestimmten Werts liegt. Hierzu kommt weiterhin, daß in den Experimenten eine leichte Konvektion vorlag, die den experimentellen Wert zusätzlich erhöhte. Folglich muß davon ausgegangen werden, daß die Differenz zwischen experimentell und numerisch bestimmtem flüssigkeitsseitigen Stoffübergangskoeffizient noch größer ist. Bei wesentlich feinerer Auflösung des Gebietes reduziert sich der Stoffstrom und damit auch der Stoffübergangskoeffizient um mehr als 50 % (vgl. Tabelle 9.11).

9.8.2. Gitterabhängigkeit des Stofftransportes

Wie bei der Hydrodynamik, so muß auch beim Stoffübergang von einer starken Gitterabhängigkeit der numerischen Simulationen ausgegangen werden. Betrachtet wird eine 4mm Luftblase, die in einem Wasser/CMC-Gemisch (System S10) aufsteigt. Die zur Hydrodynamik gehörigen Stoffdaten sind in Tabelle 9.1 angegeben. Für eine physikalisch sinnvolle Beschreibung der Hydrodynamik in dreidimensionalen Simulationen ist eine minimale Auflösung 16 Zellen pro Durchmesser notwendig. Die Auflösung wird in den Simulationen sukzessiv erhöht. Für die Auflösung von

16, 32, 64 und 128 Zellen sind die zugehörigen Aufstiegsgeschwindigkeiten und sich ergebenden Stoffströme in Tabelle 9.11 zusammengefaßt. Die Rechnungen erfolgten für den zweidimensionalen Fall. Wie aus der Tabelle hervorgeht, ist die Aufstiegs-

Tabelle 9.11.: Aufstiegsgeschwindigkeit und übergehender, Stoffstrom einer 4,0mm Luftblase in einer CMC-Lösung in Abhängigkeit von der Auflösung des Rechengebiets.

Blasen- durchm. d_B [mm]	Gebiets- auflösung [-]	Dimen- sionen [-]	Zellen pro Durchmesser [-]	Aufstiegs- geschwind. w_B [cm/s]	Stoff- strom \dot{N}_L [mol/s]
4,0	256x64x1	2D	16	14,90	$7,15 \cdot 10^{-9}$
4,0	512x128x1	2D	32	15,92	$4,25 \cdot 10^{-9}$
4,0	1024x256x1	2D	64	16,36	$3,14 \cdot 10^{-9}$
4,0	2048x512x1	2D	128	16,43	$1,95 \cdot 10^{-9}$

geschwindigkeit ab einer Auflösung von 64 Zellen pro Durchmesser gitterinvariant. Der Stoffstrom sinkt jedoch weiter mit steigender Auflösung. Für eine Auflösung von 128 Zellen pro Durchmesser ist der übergehende Stoffstrom auf fast 25% des Wertes reduziert, der bei 16 Zellen pro Durchmesser vorliegt. Eine weitere Verfeinerung der Auflösung war aufgrund der zu hohen Rechenzeit nicht möglich.

Die Verringerung des Stoffstromes bei steigender Auflösung und auch steigender Aufstiegsgeschwindigkeit (somit auch besserem Abtransport der Spezies von der Grenzfläche) läßt sich physikalisch nicht erklären. Die Ursachen müssen numerisch bedingt sein. Durch die feinere Diskretisierung wird der Film besser aufgelöst und die Gradienten zwischen den benachbarten Zellen werden geringer. Dies hat großen Einfluß auf den Stofftransport und bedarf weiterer Untersuchungen.

9.8.3. Variation der Schmidt-Zahl

An der Blasenoberfläche liegen beim Stoffübergang flüssigseitig sehr dünne Konzentrationsfilme vor. Zunächst wird untersucht, ob diese Filme durch praktikable Gitter

genau genug aufgelöst werden können. Eine entscheidende Größe dabei ist der Diffusionskoeffizient in der Flüssigphase. Für konstante hydrodynamische Bedingungen wird deshalb der Diffusionskoeffizient systematisch variiert. Charakterisiert wird das System durch die Schmidt-Zahl $Sc = \nu/D$, die pro Phase das Verhältnis der Diffusivitäten von Impuls zu Stoff angibt. Je kleiner die Schmidt-Zahl, desto stärker ist der diffusive Stofftransport. Per Simulation wird der Einfluß der Schmidt-Zahl näher untersucht. Gewählt wird dazu eine formstabile Blase ($d_B = 4mm$), die in einer Wasser/Glycerin-Mischung (S6, $\eta_L = 0,075Pas$) aufsteigt. Als Henry Koeffizienten für dieses System wird $H = 33$ angenommen. Der Diffusionskoeffizient innerhalb der Flüssigphase wird gemäß $D_L = \nu_L/Sc$ festgesetzt. Die Auflösung des Blasendurchmessers beträgt 32 Zellen. Die Simulation erfolgt in drei Dimensionen. Aufgrund der hohen Viskosität der Flüssigphase sind die für die Hydrodynamik relevanten Längenskalen hinreichend genau aufgelöst. In insgesamt 13 Simulationen wird die Schmidt-Zahl zwischen 1 und 100000 variiert. Abbildung 9.34 zeigt drei typische Konzentrationsfelder um die Blase. Zu dem gezeigten Zeitpunkt liegt eine stationäre Strömung mit $Re = 7,61$ vor. Aus der Abbildung wird deutlich,

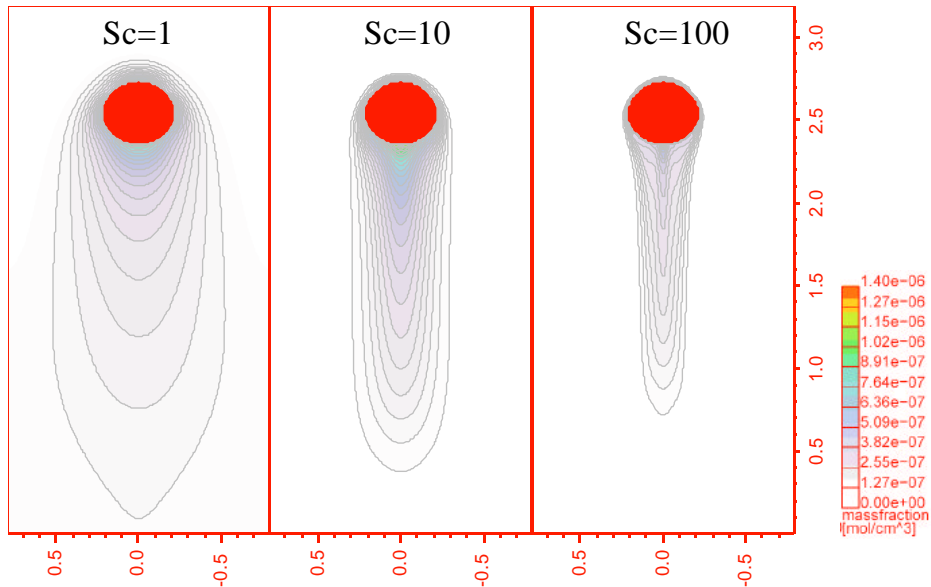


Abbildung 9.34.: Konzentrationsfeld des übergegangenen Sauerstoff aus einer 4mm Blase (freier Aufstieg) in Abhängigkeit der Schmidt-Zahl Sc .

daß sich für $Sc = 1$ zu dem dargestellten Zeitpunkt eine sehr lange und auch breite Konzentrationsschleppe der übergegangenen Species hinter der Blase ausgebildet hat. Selbst vor dem vorderen Staupunkt der Blase hat sich ein Film von etwa der Dicke des Blasenradius gebildet.

Für eine Schmidt-Zahl von 10 ist das Konzentrationsfeld der Spezies weniger stark ausgeprägt im Vergleich zu $Sc = 1$. Die sich vor und neben der Blase ausgebildeten Filme sind schmaler. Auch die Konzentrationsschleppe der Blase ist schmaler und kürzer geworden. Diese Effekte verstärken sich mit zunehmender Schmidt-Zahl. So bildet sich für Schmidt-Zahlen größer 100 ein typisches Nachlaufgebiet aus, wie es aus Experimenten für Flüssigkeiten mit erhöhter Viskosität, z.B. Wasser/CMC-Gemische, bekannt ist (z.B. [Bork u. a. 2001](#)). Die sich ausbildenden Konzentrationsfilme werden mit steigender Schmidt-Zahl zunehmend dünner. Daher stellt sich die Frage, ob diese Filme noch fein genug durch das vorhandene Gitter aufgelöst sind.

Dieser Frage wird im folgenden nachgegangen. Dazu sind in Abbildung [9.35](#) die simulierten flüssigkeitsseitigen Sauerstoffprofile an der Phasengrenzfläche für verschiedene Winkel Θ dargestellt. Dabei wird deutlich, daß am vorderen Staupunkt der Blase ($\Theta = 0^\circ$) die Profile den stärksten Gradienten aufweisen. Mit steigender Schmidt-Zahl wächst der Gradient an. Es stellt sich heraus, daß der Konzentrationsfilm bei der verwendeten Auflösung am vorderen Staupunkt für $Sc > 50$ mit nur noch 1-2 Zellen nicht mehr hinreichend aufgelöst wird. Bei ansteigenden Winkeln ($\Theta = 45^\circ$ und 90°) ist ein Zuwachs der Filmdicke d_F zu verzeichnen, da die Strömung hier zusätzliche Spezies von der Vorderseite der Blase mit sich führt. Die Werte an der Position 180° befinden sich innerhalb der Konzentrationsschleppe der Blase. Hier kann nicht mehr von Konzentrationsfilmen gesprochen werden.

Eine Betrachtung der Konzentrationsprofile für 0° , 45° und 90° legt nahe, daß hier ein exponentieller Abfall vom Typ $\exp(-x_n/d_F)$ der Konzentration vorliegt. Daher wird versucht, die Konzentrationsprofile für unterschiedliche Winkel Θ und Schmidt-Zahlen durch exponentielle Kurven anzupassen. Oberhalb von $\Theta = 90^\circ$ ist eine Anpassung für Schmidt-Zahlen von $Sc > 5$ nicht mehr befriedigend möglich. Die aus den Anpassungen erhaltenen Filmdicken d_F sind in Abbildung [9.36](#) dargestellt. Die Abnahme der Filmdicke mit steigender Schmidt-Zahl variiert außerhalb

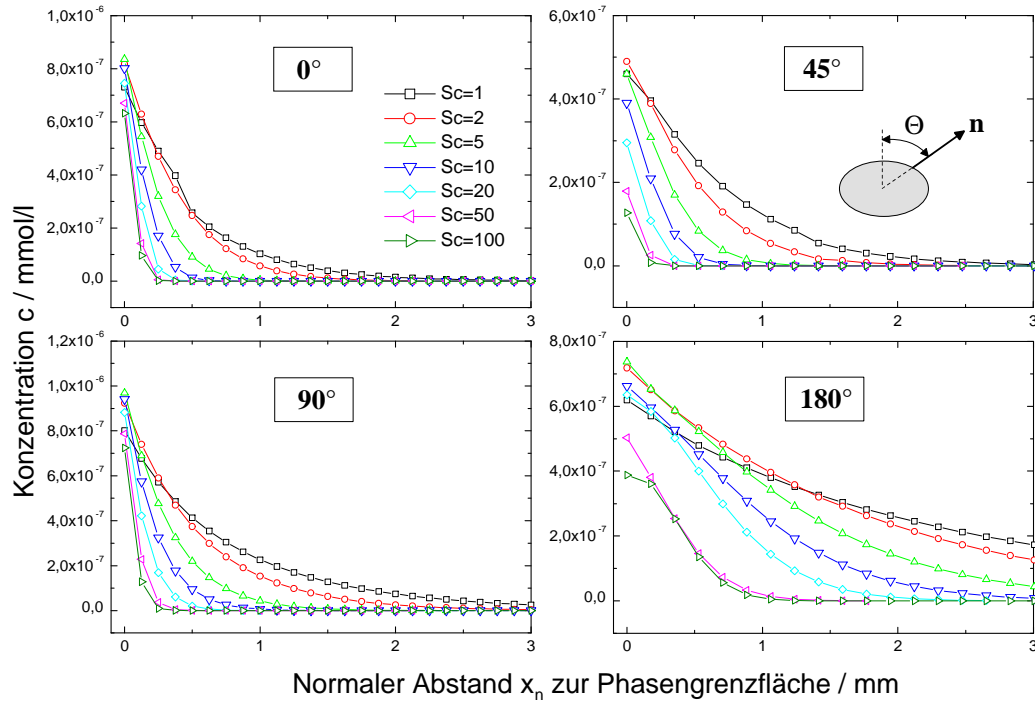


Abbildung 9.35.: Sauerstoffprofile innerhalb der Flüssigphase in Abhängigkeit des Winkels Θ und der Schmidt-Zahl.

der Wirbelschleife zwischen $-0,65$ und $-0,67$. Lediglich innerhalb der Schleife reduziert sich die Abnahme erwartungsgemäß auf einen deutlich geringeren Wert von $-0,07$. Für die Äquatorialebene der Blase läßt sich die Filmdicke in Abhängigkeit der Schmidt-Zahl ausdrücken:

$$d_{F,Sc} = d_{F,Sc=1} \cdot Sc^{-0,65} \quad \text{für} \quad 1 \leq Sc \leq 100. \quad (9.25)$$

Mit den Gleichungen (9.23) und (9.24) lassen sich Stoffübergangskoeffizienten und Sherwood-Zahlen der Blase für die verschiedenen Schmidt-Zahlen bestimmen. Bis zu einer Schmidt-Zahl von 100 kann in der logarithmischen Darstellung der flüssigkeitsseitige Stoffübergangskoeffizient β_L in Abhängigkeit der Schmidt-Zahl durch die Funktion $\beta_L = konst(Re) Sc^{-0,74}$ approximiert werden. Für hohe Schmidt-Zahlen ($Sc > 2000$) nähert sich β_L asymptotisch einem Wert von $0,3 \text{ cm/s}$ an. Aus den Stoffübergangskoeffizienten lassen sich die Sherwood-Zahlen bestimmen.

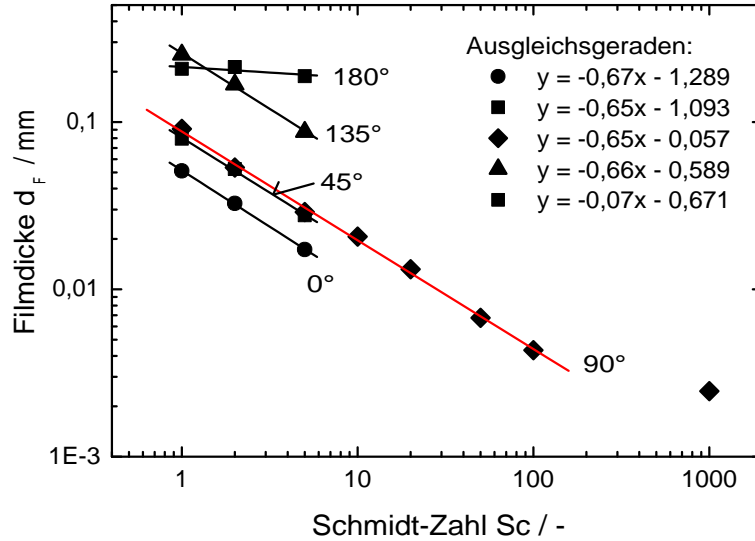


Abbildung 9.36.: Filmdicke d_F für unterschiedliche Winkel Θ in Abhängigkeit der Schmidt-Zahl Sc .

Der dazugehörige Verlauf in Abhängigkeit der Schmidt-Zahl ist in Abbildung 9.37 dargestellt. Bis zu einer Schmidt-Zahl von 100 kann in der logarithmischen Darstellung die Sherwood-Zahl als Funktion der Schmidt-Zahl durch die Gerade $y = 0,22x + 0,229$ approximiert werden. Daraus folgt für die integrale Sherwood-Zahl:

$$Sh_L = 1,69 Sc^{0,22} = konst(Re) Sc^{0,22} \quad \text{für} \quad 1 \leq Sc \leq 100. \quad (9.26)$$

Im Bereich des konstanten Stoffübergangskoeffizienten ($Sc > 2000$) kann folgende Ausgleichsgerade verwendet werden: $y = 0,91x - 1,300$. Dies wiederum kann in die Gleichung

$$Sh_L = 0,05 Sc^{0,94} = konst(Re) Sc^{0,94} \quad \text{für} \quad Sc > 2000 \quad (9.27)$$

überführt werden. Diese Gleichungen gelten nur für die vorliegende Reynolds-Zahl ($Re=7,61$) und einem Henry Koeffizienten von $H=33$. Sinnvoll für zukünftige Arbeiten sind weitere Simulationen unter Variation der Reynolds-Zahlen an, um eine allgemein gültige Korrelation zu erhalten.

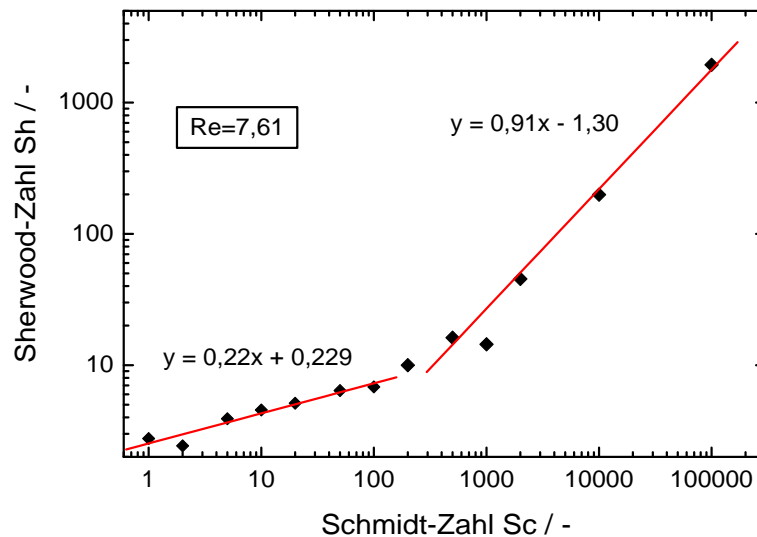


Abbildung 9.37.: Sherwood-Zahl in Abhängigkeit der Schmidt-Zahl Sc .

9.8.4. Vergleich mit experimentellen Daten

Da nur für Spezialfälle analytische Lösungen existieren, erfolgt die Bewertung des simulierten Stoffübergangs anhand experimenteller Daten. Zunächst soll ein qualitativer Vergleich mit experimentell bestimmten Konzentrationsschleppen erfolgen, bevor ein quantitativer Vergleich mit integralen Größen wie z.B. der Sherwood-Zahl erfolgt. Dank der Fortschritte in der Lasermeßtechnik ist es mittlerweile möglich, mit Hilfe der laserinduzierten Fluoreszenz (LIF) die Konzentration des in die Flüssigphase übergegangenen Sauerstoffs zu visualisieren. Vertikale Lichtschnitte zeigen den qualitativen Konzentrationsverlauf innerhalb der Wirbelschlepe. Mit Hilfe von horizontalen Lichtschnitten kann das komplette Konzentrationsfeld innerhalb der Wirbelschlepe für formstabile Blasen quantitativ erfaßt werden. Nähere Details zu dem Verfahren finden sich bei [Bork u. a. \(2003\)](#).

In der Abbildung 9.38 ist die experimentell und numerisch bestimmte Konzentrationsschlepe hinter einer formdynamischen Blase gegenübergestellt. (Eine dunkle Färbung innerhalb der Flüssigphase entspricht einer hohen Sauerstoffkonzentration).

on). Die Abbildung verdeutlicht, daß der Stoffaustausch in Wasser ein hochdynamisches

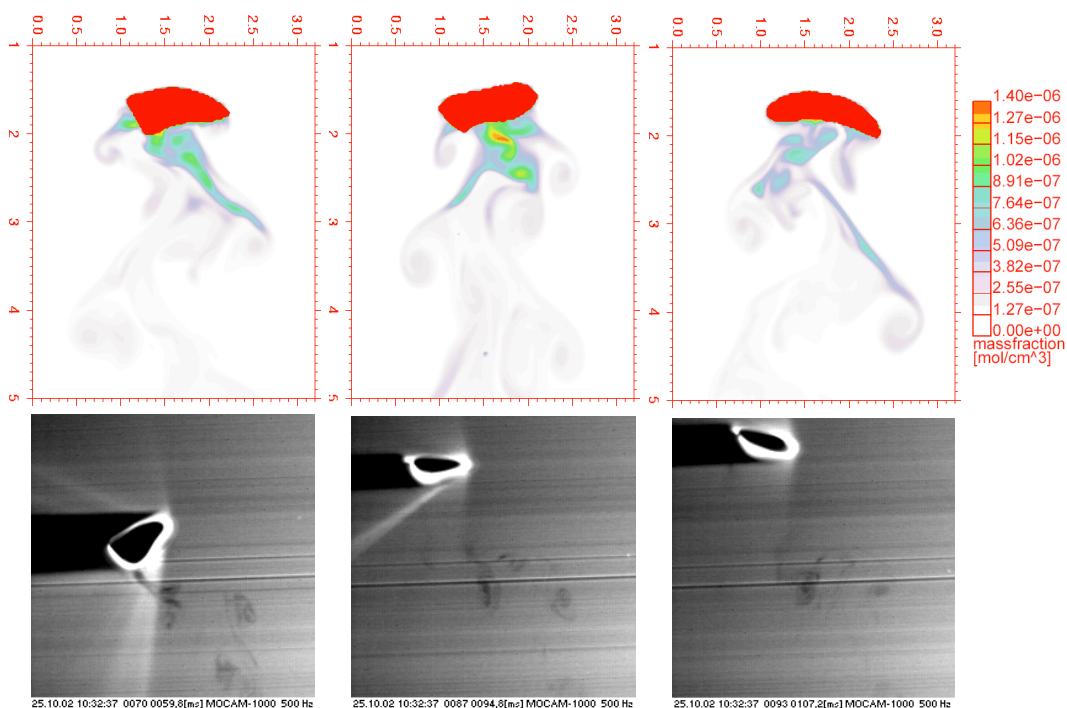


Abbildung 9.38.: Konzentrationsfeld des übergegangenen Sauerstoffs hinter einer formdynamischen Blase. oben: Simulation, unten: Experiment ([Bork u. a. 2003](#)).

mischer Prozeß ist. Die Blase steigt auf einer nichtlinearen Bahn auf und unterliegt großen Formschwankungen. Dies verursacht Wirbel in der Flüssigphase, die zu einem guten konvektiven Abtransport des Sauerstoffs von der Phasengrenze und aus der unmittelbaren Blasennähe führen. Aus der Abbildung ist eine gute qualitative Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation zu erkennen. Ein quantitativer Vergleich wird durch die große Formdynamik des Systems erschwert. Daher sollen in einem ersten Schritt formstabile Blasen betrachtet werden. Dazu bietet sich das Stoffsystem Wasser/CMC (S11) an (vgl. Tabelle 9.1), da für dieses System umfangreiche LIF Messungen von [Bork u. a. \(2003\)](#) vorliegen. Für dieses Stoffsystem ist der Henry Koeffizient bekannt ($H=33$). Neben qualitativen Visualisierungen der Konzentrationsverteilung innerhalb der Konzentrationsschleppe bestimmte

Bork auch die hydrodynamischen Kenngrößen und die integralen Sherwood-Zahlen in Abhängigkeit der Fourier-Zahl $Fo = 4D \cdot t/d_B^2$. In den Simulationen ist der Blasendurchmesser mit 32 Zellen aufgelöst, so daß für dieses höherviskose System ($\eta_L = 0,025 Pas$) die relevanten Längenskalen bezüglich der Hydrodynamik hinreichend aufgelöst werden. Die Blasen sind unter diesen Bedingungen formstabil.

Die horizontalen Laserschnitte durch die Schleppe der Blasen ermöglichen einen guten qualitativen Vergleich. Für die 4,5mm Blase in Abbildung 9.39 läßt sich eine gute Übereinstimmung feststellen. Bei der 5,6mm Blase zeigen sich jedoch deut-

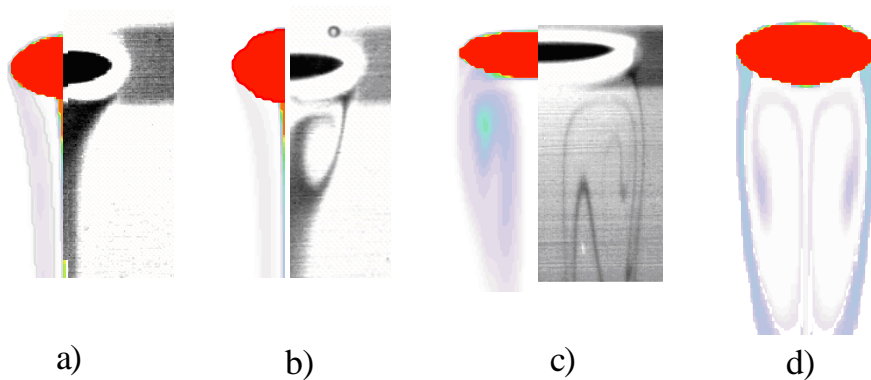


Abbildung 9.39.: Vergleich des Konzentrationsfeldes des gelösten Sauerstoffs zwischen Experiment (Bork 1999) und Simulation. a) $d_B = 4,5mm$, b) $d_B = 5,6mm$, c) Exp.: $d_B = 7,2mm$, Sim.: $d_B = 8,0mm$, d) $d_B = 10,0mm$,

liche Differenzen. Während in der Simulation das Nachlaufgebiet noch eine Form aufweist, die einem Ast einer Hyperbel ähnelt, ist in dem zugehörigen Experiment bereits eine wirbelförmige Struktur hinter der Blase zu erkennen. Diese Form kann in Simulationen erst ab einem Durchmesser von 8,0mm beobachtet werden (Abbildung 9.39 c). Bei dieser Blasengröße hat sich in den Experimenten bereits ein komplexes Konzentrationsprofil innerhalb der Wirbelschleppe gebildet. Mit Hilfe der Simulationen ist es möglich, diese Konzentrationsprofil qualitativ wiederzugeben, jedoch erst für einen größeren Blasendurchmesser von 10mm. Neben diesem qualitativen Vergleich erfolgt auch ein quantitativer Vergleich. Tabelle 9.12 stellt die wichtigsten Größen aus Experiment und Simulation gegenüber. Wie aus der Tabelle deutlich wird, liegen die numerisch bestimmten Aufstiegsgeschwindigkeiten ca. 20%

Tabelle 9.12.: Vergleich der Simulationen mit experimentellen Daten ([Bork 1999](#)).

d_B/mm	4,5		5,6		8,0	7,2
	Sim.	Exp.	Sim.	Exp.	Sim.	Exp.
$w_B/cm/s$	20,2	24,9	21,7	27,2	22,1	28,1
b/mm	5,1	5,8	7,0	8,2	11,5	12,9
h/mm	3,5	3,4	3,6	2,8	3,8	2,8
$\alpha/^\circ$	120	120	118	112	91	95
$Sh/-$	37520	3843	59475	10757	103130	37148
$Fo/-$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$8,1 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$4,9 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$

unter den experimentellen Werten. Da der Blasendurchmesser hier bereits mit 32 Zellen aufgelöst ist, kann diese Differenz nicht nur auf einer zu geringen Auflösung beruhen. Zusätzlich haben die Blasen eine rundere Form und somit auch einen geringeren Strömungswiderstand. Ein wichtiger Unterschied zu den Simulationen ist das nicht-newtonische Fließverhalten der Wasser/CMC-Lösung in den Experimenten. Dies wird in den Simulationen nicht berücksichtigt. Trotz dieser Differenzen bzgl. der Hydrodynamik ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung für den Ablösewinkel der Konzentrationsschlepe α . Die aus den Simulationen gewonnen Sherwood-Zahlen liegen jedoch um bis zu einem Faktor 10 oberhalb der Meßwerte. Ein Grund ist der bereits in Kapitel [9.8.1](#) erwähnte flüssigkeitsseite Stoffübergangskoeffizient, der in den Simulationen für reine Diffusion um ca. einen Faktor 10 oberhalb der Meßwerte liegt.

Die 4,5mm Blase wurde in einer Langzeitrechnung im Gegenstrom fixiert, um vergleichbare Fourier-Zahlen zu erhalten, aber Sherwood-Zahl ist während der gesamten Simulation konstant, so daß auch die unterschiedlichen Aufstiegszeiten zwischen Experiment und Simulation als mögliche Ursache auszuschließen sind. Die in [Tabelle 9.12](#) aufgeführten Sherwood-Zahlen aus Experiment und Simulation werden in [Abbildung 9.40](#) einigen in [Abschnitt 3.4](#) aufgeführten Korrelationen für die Vorhersage der Sherwood-Zahl gegenübergestellt. Zusätzlich sind aus weiteren Simulationen bestimmte Sherwood-Zahlen für ein zweites Stoffsystem hinzugefügt. Aus der [Abbildung](#) wird deutlich, daß für die 1mm Blase ($Re=0,75$) die berech-

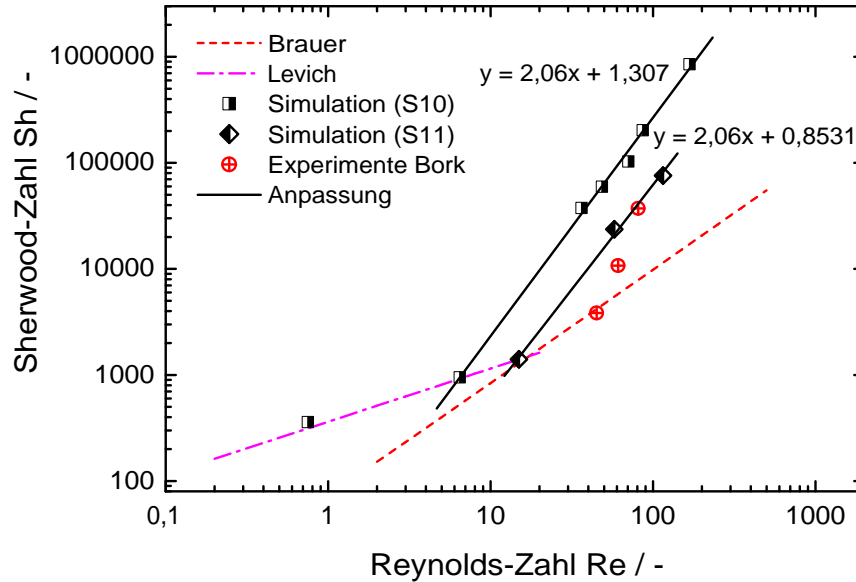


Abbildung 9.40.: Vergleich der numerisch berechneten Sherwood-Zahlen aus den Simulationen (S10, S11) als Funktion der Reynolds-Zahl mit experimentellen Werten (S11) und Korrelationen aus der Literatur für ein Wasser/CMC Gemisch (S11).

nete Sherwood-Zahl sehr gut mit der Korrelation nach Levich übereinstimmt. Diese Korrelation gilt für sphärische Blasen in schleicher Strömung. Die ebenfalls annähernd sphärische 2mm Blase ($Re=8,01$) kann recht gut mit dieser Korrelation wiedergegeben werden. Die an Meßwerte angepaßte Korrelation nach Brauer verläuft wesentlich flacher als die numerischen und experimentellen Werte. Im Bereich von $6 < Re < 170$ lassen sich Sherwood-Zahlen für das System S11 gut durch die Gerade $y = 2,06x + 1,307$ approximieren. Dies führt wiederum zu einer Beziehung vom Typ $Sh_L = 20,28 Re^{2,06}$ bzw. $Sh_L = konst(Sc) Re^{2,06}$.

Durch Variation der Viskosität der Flüssigkeit lassen sich in weiteren Simulationen auch nähere Informationen über den Vorfaktor $konst(Sc)$ erhalten. Dazu wird das System S10 herangezogen. Während das System S11 eine Schmidt-Zahl von $Sc = 312810$ hat, so reduziert sich die Schmidt-Zahl im System S10 auf einen Wert

von $Sc = 112610$. Hier sei angemerkt, daß für diese hohen Schmidt-Zahlen die Filmdicken in den Simulationen nicht fein genug durch das Gitter aufgelöst werden. Wie aus Abbildung 9.40 hervorgeht, lassen sich die Simulationen des Systems S10 ebenfalls mit einer Gerade der Steigung 2,06 wiedergeben. Aus den unterschiedlichen Schnittpunkten der angepaßten Geraden mit der Ordinate läßt sich berechnen, daß die Sherwood-Zahl durch eine Korrelation vom Typ $Sh = konst Sc Re^{2,06}$ beschrieben werden kann. Die Differenz des hier bestimmten Exponenten der Schmidt-Zahl von 1,0 zu dem Exponenten von 0,94, der aus den Simulationen mit variierten Schmidt-Zahl in Abschnitt 9.8.3 folgt, ist relativ gering. Dies läßt vermuten, daß sich möglicherweise beide Korrelationen mit einem gemeinsamen Exponenten für die Schmidt-Zahl beschreiben lassen. Zur Klärung dieser Vermutung bedarf es noch weiterer Simulationen in zukünftigen Arbeiten.

9.8.5. Blasenketten

Von großem technischen Interesse ist das Schwarmverhalten von Blasen. Ein Zwischenschritt hin zur Simulation von Schwärmen sind Blasenketten. Bei der Begasung von höherviskosen Flüssigkeiten bilden sich Blasenketten, in denen die Blasen geradlinig aufsteigen. Eine mögliche Anwendung ist beispielsweise das Einbringen von Sauerstoff in Bioreaktoren. Daher sollen hier hydrodynamisches Verhalten und Stoffübergang für Blasenketten näher untersucht werden. Die sinnvollste Herangehensweise wäre die Simulation einer einzelnen Blase in einem periodischen Gebiet. Hat die neu in das Gebiet eintretende Blase die gleiche Konzentration der das Gebiet verlassende Blase, so ließe sich die Abreicherung der übergehenden Spezies aus einer einzelnen Blase verfolgen. Tritt allerdings stets eine Blase mit gleichbleibender Eingangskonzentration an Species in das Gebiet ein, so ließe sich die Anreicherung der übergehenden Spezies in einem bestimmten Bereich der Flüssigphase beobachten. Das Programm *FS3D* erlaubt diese Form der Randbedingungen nicht, so daß ein sehr langes Rechengebiet oberhalb der Düse betrachtet werden muß. Da für den Stofftransport eine sehr hohe Diskretisierung erforderlich ist, lassen sich solche Simulationen bis auf wenige Ausnahmen nur in 2D durchführen.

Nur für ein in der Länge stark begrenztes Rechengebiet ist es möglich, eine 3D

Simulation eines Gebiets oberhalb einer Düse durchzuführen. Exemplarisch wird eine 2mm Düse betrachtet. Die Düse ragt $0,3\text{cm}$ in das Rechengebiet hinein. Der Düsendurchmesser ist mit 16 Zellen diskretisiert. Aus der Düse strömt Luft mit einer Geschwindigkeit von $5,5\text{cm/s}$. Die Höhe des Rechengebiets beträgt $6,4\text{cm}$. Das Gebiet ist ab einer Höhe von $5,8\text{cm}$ mit Luft gefüllt. Der Wandabstand beträgt $0,8\text{cm}$. Als Flüssigphase dient eine Wasser/CMC-Lösung (System S11).

Abbildung 9.41 zeigt einen 2D-Schnitt durch das 3D-Konzentrationsfeld um eine der Blasen. Die Blase steigt in der Schleppe einer vorauslaufenden Blase auf. Im rechten Teil der Abbildung ist in einer LIF-Aufnahme von Bork u. a. (2002) das Konzentrationsprofil einer Blase in einer Blasenketten zu sehen. Qualitativ kann hier eine gute Übereinstimmung festgestellt werden. Da die Blase in der Simulation nur wenige Zentimeter aufsteigt, ist hier kein quantitativer Vergleich mit den Werten von Bork u.a. möglich. Dieselbe Simulation wird auch in 2D durchgeführt. Tabel-

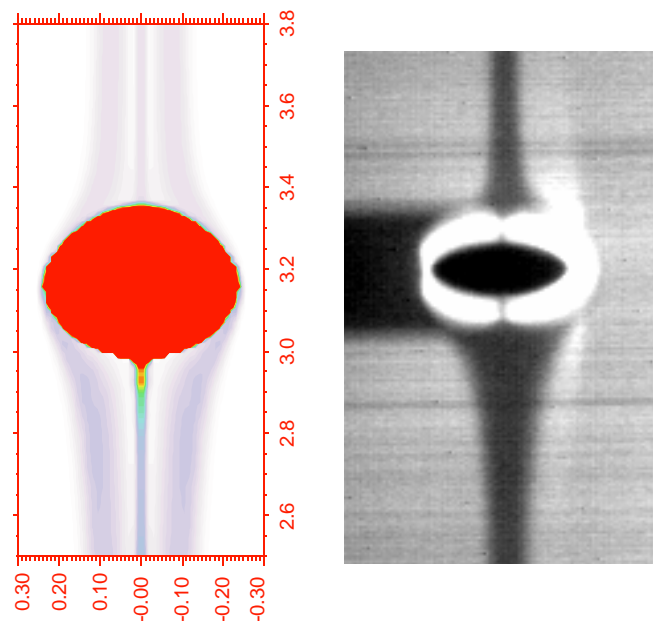


Abbildung 9.41.: Gelöster Sauerstoff um eine aufsteigende Blase innerhalb einer Blasenketten. Links: Simulation, Rechts: Experiment (Bork u. a. 2002).

le 9.13 stellt die Ergebnisse der beiden Simulationen gegenüber. Aus der Tabelle wird deutlich, daß sich die 2D Resultate sehr stark von denen in 3D unterscheiden.

Tabelle 9.13.: Vergleich der Blasenbildung und des Blasenanstiegs an einer 2mm Düse in 2D und 3D.

	2D	3D
Blasendurchmesser d_B/mm	5,9	4,1
Blasenbildungsfrequenz f_B/Hz	2,6	0,82
Blasengeschwindigkeit $w_B/cm/s$	4,8	15,8
Änderung Konz. Blase 1 $\Delta c_B/\Delta t / g/mol s$	$-9,21 \cdot 10^{-8}$	$-8,36 \cdot 10^{-7}$
Änderung Konz. Blase 2 $\Delta c_B/\Delta t / g/mol s$	$-7,77 \cdot 10^{-8}$	$-7,24 \cdot 10^{-7}$

Der Unterschied fällt wesentlich stärker aus als für den Aufstieg einzelner Blasen. Im 2D Fall liegt eine wesentlich höhere Blasenbildungsfrequenz vor. Die umgebende Flüssigkeit kann die Blasen nur an zwei Seiten umströmen, vergleichbar mit einem unendlich langem aufsteigenden zylinderförmigen Objekt. Im 3D Fall kann die Flüssigkeit rund um die gesamte Blase strömen. Durch die höhere Aufstiegs- geschwindigkeit ist auch der zugehörige Stoffstrom über die Grenzfläche und die damit verbundene zeitliche Änderung der Konzentration $\Delta c_B/\Delta t$ der jeweiligen Blasen größer. Da die Länge des Rechengebiets in den 3D Simulationen, erfolgen die weiteren Simulationen in 2D. Nur in einem ausreichend langen Gebiet kann eine Anreicherung der Spezies in der Flüssigphase und der damit verbundene Einfluß auf den Stoffaustausch der Blasen untersucht werden.

Hydrodynamik

Simuliert wird wieder eine 2mm Düse in einem 25,6cm langen Gebiet mit drei unterschiedlichen Wandabständen von jeweils 0,8, 1,6 und 3,2cm. Der Düsendurchmesser ist mit 8 Zellen diskretisiert. Als Flüssigkeit wird eine Wasser/CMC Lösung (S11) verwendet. Die Einstömgeschwindigkeit beträgt 5cm/s.

Wie bereits in Abschnitt 9.4 gezeigt, hat der Wandabstand einen starken Einfluß auf die Aufstiegs- geschwindigkeit. Dies wirkt sich am meisten bei dem kleinen Wandabstand von 0,8cm bemerkbar. Die Geschwindigkeit der ersten, ungestört aufsteigenden Blase beträgt hier lediglich 4,97cm/s im Vergleich zu 12,3cm/s bzw. 16,5cm/s für Wandabstände von 1,6cm bzw. 3,2cm. Allerdings ist die Blasenbil-

dungsfrequenz für alle drei Wandabstände etwa gleich groß ($2,3 - 2,5 Hz$). Auch der Blasenäquivalentdurchmesser ist mit etwa $5,5 mm$ unabhängig vom Wandabstand. Der unterschiedliche Wandabstand hat jedoch einen großen Einfluß auf die sich ausbildende Blasenform. Diese ist für die beiden größeren Wandabstände ($1,6$ bzw. $3,2 cm$) mit einer Höhe von $3,6 mm$ und einer Breite von $8,3 mm$ annähernd identisch. Für den geringen Wandabstand kann sich die Blase aufgrund der an den Wänden vorliegenden Abwärtsströmung nicht so weit seitlich ausdehnen, so daß ihre Form weniger abgeplattet ist ($h = 4,5 mm$, $b = 6,8 mm$): Dies ist in Abbildung 9.42 zu erkennen. Die Abbildung zeigt die Blasen zusammen mit der Konzentration der übergehenden Spezies. Bedingt durch das Nachlaufgebiet der vorherigen Blasen

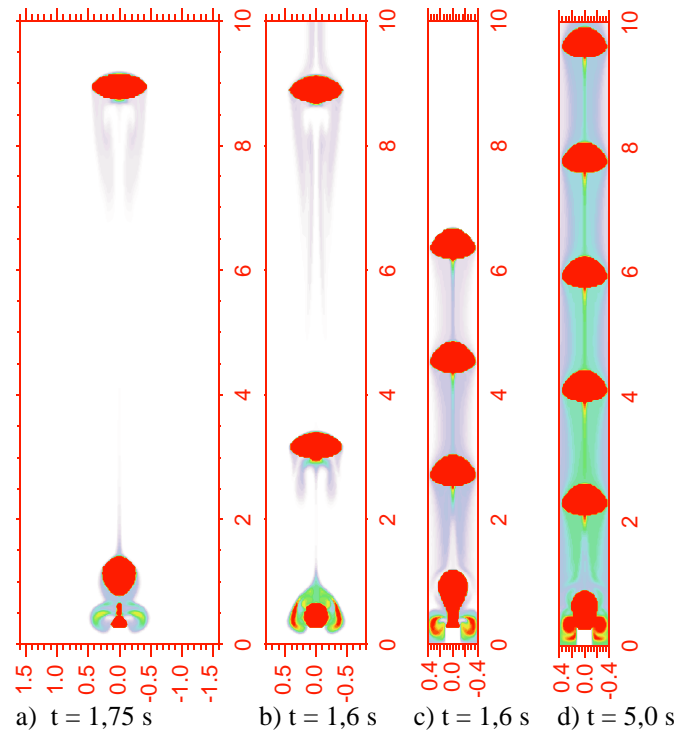


Abbildung 9.42.: Einfluß des Wandabstandes auf das Aufstiegsverhalten und den Stoffaustausch in einer Blasenkeine. a) $d_W = 3,2 cm$, b) $d_W = 1,6 cm$, c,d) $d_W = 0,8 cm$.

steigen die Blasen innerhalb einer Kette schneller auf als Einzelblasen. Der starke Wandeinfluß für $d_W = 0,8 cm$ kompensiert diese Geschwindigkeitserhöhung fast

völlig. Die Geschwindigkeit der Blasen innerhalb der Kette liegt nur 1-2 % höher als die der ersten Blase. Bei einer Verdoppelung des Wandabstandes auf $1,6\text{cm}$ kann der Ketteneinfluß auf die Geschwindigkeit beobachtet werden, wie aus Abbildung 9.43 hervorgeht. Dort sind auf die Geschwindigkeit der ersten Blase bezogene Ge-

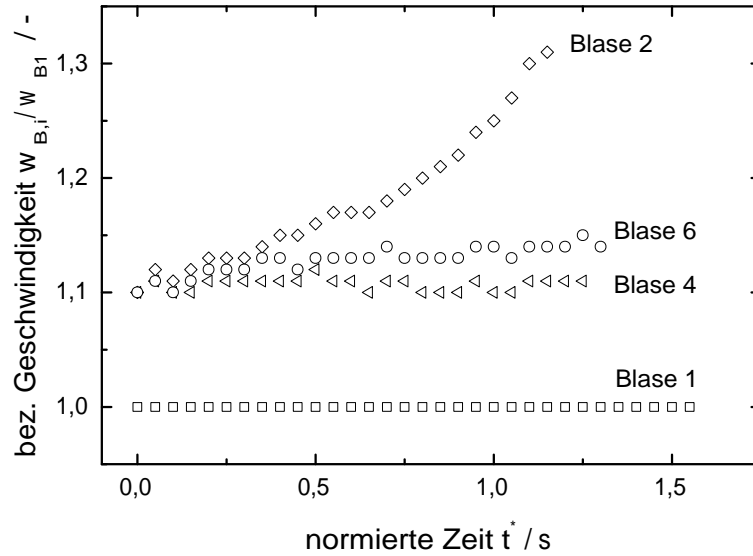


Abbildung 9.43.: Auf die Geschwindigkeit der ersten Blase bezogene Aufstiegs- und Geschwindigkeit der Blasen innerhalb einer Kette.

schwindigkeiten für verschiedene Blasen innerhalb der Kette als Funktion der auf den Zeitpunkt der Blasenzeugung normierten Zeit t^* dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die starke Beschleunigung der 2. Blase in Richtung der ersten Blase, bis es zu einer Koaleszenz zum Zeitpunkt $t^* = 1,15\text{s}$ kommt. Durch die aufsteigenden Blasen wird die umgebende Flüssigkeit ebenfalls beschleunigt. Die Geschwindigkeit der vierten Blase liegt im Mittel bereits um ca. 11% höher als die der Ersten. Ab der sechsten Blase ist die Geschwindigkeit der Blasen innerhalb der Kette stationär. Die durchschnittliche Blasengeschwindigkeit ist um ca. 14% erhöht. Für den Wandabstand von $3,2\text{cm}$ ist eine Untersuchung über so einen längeren Zeitraum nicht möglich, da es beim Aufeinandertreffen zweier Blasen zu numerischen Instabilitäten kommt.

Die Geschwindigkeit der Blasen innerhalb der Kette läßt sich auch mittels Gleichung (2.52) bestimmen. Als Bezugsgröße gilt die Geschwindigkeit der ungestört aufsteigenden ersten Blase. Für den Wandabstand von $1,6\text{cm}$ sind dies $12,3\text{cm/s}$. Der Durchmesser der zweidimensionalen Blase errechnet sich aus dem Zusammenhang $\pi d_B^2 = \pi b h^2$ für eine volumengleiche Ellipse zu $5,5\text{mm}$. Daraus resultiert eine Reynolds-Zahl von 27,1. Aus Gleichung (2.52) ergibt sich hiermit eine theoretische Blasengeschwindigkeit innerhalb der Kette von $19,5\text{cm/s}$. Die Geschwindigkeit innerhalb der Kette beträgt nur etwa $13,5\text{cm/s}$. Die Differenz könnte daran liegen, daß Gleichung (2.52) aus Experimenten gewonnen wurde, während die Simulationen nur in 2D vorliegen.

Stoffaustausch

Wie schon aus Abbildung 9.42 hervorgeht, hat der Wandabstand einen deutlichen Einfluß auf den Stofftransport. Ein geringer Wandabstand bringt eine schnellere Aufkonzentrierung der übergehenden Spezies in der Flüssigphase mit sich. In Abbildung 9.44 sind die zeitlichen Konzentrationsverläufe innerhalb der einzelnen Blasen für Wandabstände von $0,8$ und $1,6\text{cm}$ gegenübergestellt. Für den Wandabstand

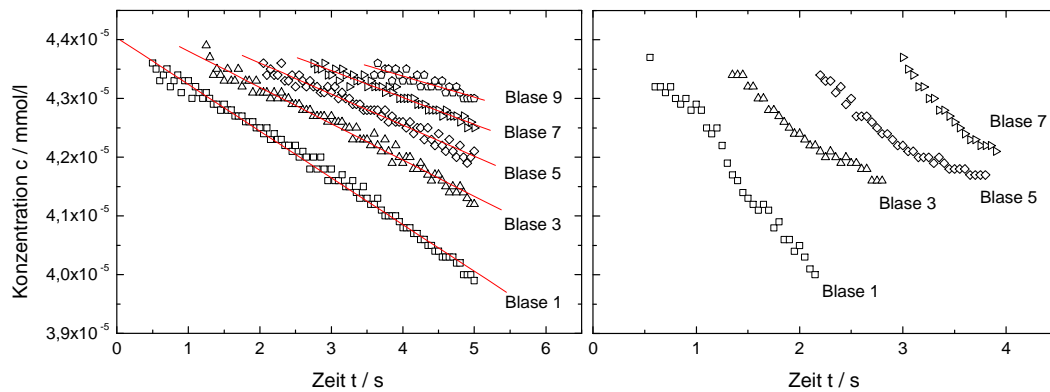


Abbildung 9.44.: Zeitlicher Konzentrationsverlauf der Blasen innerhalb einer Kette.
Links: $d_W = 0,8\text{cm}$, rechts: $d_W = 1,6\text{cm}$.

von $0,8\text{cm}$ ist eine lineare Abnahme der Konzentration der einzelnen Blasen mit der Zeit erkennbar. Durch die Aufkonzentrierung innerhalb der Flüssigphase ver-

schlechtert sich der Stoffübergang für die jeweils nachfolgende Blase. Während die zeitliche Abnahme für die erste Blase noch $7,95 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l s}$ beträgt, ist es bei der Neunten nur noch etwa $3,57 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l s}$. Die Koeffizienten der Ausgleichsgeraden sind im Anhang A.3 aufgeführt.

Der erwartungsgemäß andere Verlauf für den Wandabstand von $1,6 \text{ cm}$ ist im rechten Teil von Abbildung 9.44 zu erkennen. Bedingt durch die größere Aufstiegs geschwindigkeit liegt ein besserer konvektiver Abtransport der übergegangenen Species von der Phasengrenzfläche vor. Während für den geringen Wandabstand die zeitliche Abnahme für die erste Blase noch $7,95 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l s}$ beträgt, hat sich dieser Wert jetzt auf $22,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l s}$ erhöht. Die zeitliche Abnahme der Konzentration der nachfolgenden Blasen verläuft nicht mehr linear, sondern näherungsweise exponentiell. Eine systematische Veränderung der zeitlichen Abnahme ist für einzelnen der Blasen nicht erkennbar.

Der zeitliche Verlauf des flüssigkeitsseitigen Stoffübergangskoeffizient β_L ist in Abbildung 9.45 für die beiden Wandabstände dargestellt. In erster Näherung kann die Blasenkette als ein Ausschnitt aus einer Blasensäule betrachtet werden. Darin läßt sich der flüssigkeitsseitige Stoffübergangswiderstand k_L für Blasen größer als $2,5 \text{ mm}$ mit dem Ansatz nach Calderbank und Moo-Young (Deckwer 1992) berechnen:

$$k_L = 0,42 \left(\frac{\eta_L}{\rho_L D_L} \right)^{-1/2} \left(\frac{(\rho_L - \rho_G) \eta_L g}{\rho_L^2} \right)^{1/3}. \quad (9.28)$$

Einen weiteren Ansatz liefern Akita und Yoshida (Deckwer 1992) mit

$$k_L = 0,5 \frac{D_L}{d_B} \left(\frac{\nu_L}{D_L} \right)^{1/2} \left(\frac{g d_B^3}{\nu_L^2} \right)^{1/4} \left(\frac{g d_B^2 \rho_L}{\sigma} \right)^{3/8}. \quad (9.29)$$

Diese beiden Ansätze ergeben zeitlich konstante Werte von $k_L = 0,4 \text{ cm/s}$ bzw. $k_L = 0,24 \text{ cm/s}$. Ein Vergleich mit den Werten für die beiden Simulationen zeigt, daß sich für den geringen Wandabstand die numerischen Werte dem Wert von $k_L = 0,24 \text{ cm/s}$ nach Akita und Yoshida annähern. Die lokalen Minima im Verlauf des k_L Wertes entstehen durch jeweils einen Blasenabriß an der Düse. Bedingt durch die geringeren Aufstiegs geschwindigkeiten sind die Blasen zum Zeitpunkt

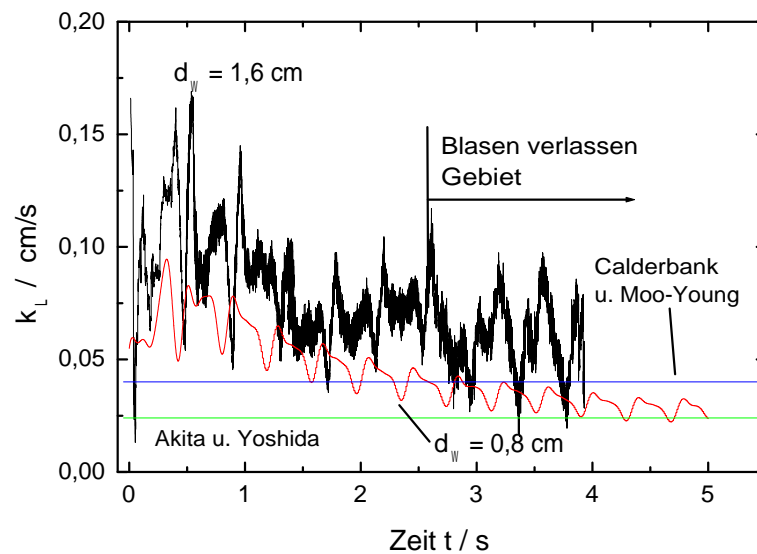


Abbildung 9.45.: Flüssigkeitsseitiger Stoffübergangskoeffizient k_L als Funktion der Zeit.

$t = 5\text{ s}$ noch nicht am Ende des Rechengebietes angelangt. Daher wird der Wert von k_L noch weiter sinken. Für den Wandabstand von $1,6\text{ cm}$ erreichen die Blasen bereits nach $2,6\text{ s}$ das Ende des Rechengebietes. Für diesen Wandabstand läßt sich der k_L Wert besser mit dem Ansatz von Calderbank und Moo-Young wiedergeben. Diese zweidimensionalen Ergebnisse über den Stofftransport in Blasenketten können nur zum Aufzeigen erster Tendenzen dienen. Erst Simulationen in 3D in einem periodischen Gebiet können physikalisch sinnvolle Resultate liefern.

10. Zusammenfassung und Ausblick

In vielen technischen Apparaten wie z. B. Blasensäulen, Schlaufenreaktoren oder begasten Rührkesseln liegen Gas-Flüssig-Strömungen vor. Zur Auslegung solcher Kontaktapparate werden oftmals vereinfachende Modelle herangezogen. In diesen Modellen bleiben lokale Phänomene wie z.B. formdynamische Grenzflächen oder Wirbelschleppen unberücksichtigt. Andererseits haben jüngste experimentelle Ergebnisse gezeigt, daß diese Phänomene einen großen Einfluß auf die Hydrodynamik und den Stofftransport in Mehrphasenströmungen haben ([Schlüter 2002](#); [Bork u. a. 2003](#); [Scheid u. a. 2003](#)). Komplementär zu den experimentellen Untersuchungen lokaler Phänomene mit optischen Methoden bietet sich die numerische Simulation als Werkzeug an. In den Simulationen können die gewünschten Parameter gezielt festgelegt und variiert werden.

Die in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Simulationen wurden mit dem CFD-Programm *FS3D* ([Rieber und Frohn 1997](#)) auf einem Parallelrechner durchgeführt. *FS3D* basiert auf der Volume of Fluid (VOF) Methode und kann reale Dichteverhältnisse von bis zu 1300 numerisch handhaben. Eine Validierung anhand von analytischen Lösungen im Bereich der schleichenden Strömung zeigt eine sehr gute quantitative Übereinstimmung der simulierten Blasenformen mit den analytisch vorhergesagten. Ein Vergleich der numerisch und analytisch bestimmten Geschwindigkeitsfelder zeigt eine befriedigende quantitative Übereinstimmung.

Zur Erfassung aller Phänomene müssen die relevanten Längenskalen durch das Gitter hinreichend fein genug aufgelöst werden. Für die Hydrodynamik ist dies für die Berechnung turbulenten Strömungsverhaltens die Kolmogorov Längenskala. Diese ist für niedrigviskose Fluide wie beispielsweise Wasser aufgrund der begrenzten Rechnerkapazität des Parallelrechners nur schwer aufzulösen. In Simulationen wird gezeigt, daß sich die Aufstiegsgeschwindigkeit für eine kleine Luftblase in Wasser um

über 50% erhöhen kann, wenn die Auflösung des Rechengitters stark erhöht wird. Um einen dreidimensionalen Blasenanstieg simulieren zu können, muß ein Kompromiß zwischen hoher Auflösung und limitierter Rechenkapazität gewählt werden. Für die physikalisch sinnvolle Wiedergabe der Aufstiegsgeschwindigkeit hat sich ein Wandabstand von vier Blasendurchmessern innerhalb des Rechenggebietes als ausreichend erwiesen. Der Blasendurchmesser sollte dabei mit mindestens 16 Zellen diskretisiert werden.

Der Verlauf der simulierten Aufstiegsgeschwindigkeiten von Luftblasen für verschiedene Blasendurchmesser in Wasser zeigt im Bereich von $0,8 - 15\text{mm}$ eine gute qualitative Übereinstimmung mit eigenen Experimenten und Daten aus der Literatur. Blasen größer als 3mm zeigen zusätzlich eine gute quantitative Übereinstimmung mit den Experimenten. Die Differenzen zu den Experimenten sind auf die zu geringe Auflösung des Rechengitters zurückführbar. Die simulierten Bahntrajektorien geben ebenfalls die experimentell beobachteten (geradlinig, zickzack, helikal und geradlinig stockend) qualitativ gut wieder. Allerdings zeigt sich hier der große Einfluß des Wandabstandes auf die Bahnen. Um möglichst realistische Resultate zu erhalten, sollte der Wandabstand mindestens 8 Blasendurchmesser betragen. Ein Vergleich mit experimentellen Bahnraden zeigt, daß die numerisch bestimmten Bahnen um bis zu einer Größenordnung zu gering ausfallen. Das für Blasen größer 4mm beobachtete stark formdynamische Verhalten kann in den Simulationen erst ab einem Blasendurchmesser von 8mm wiedergefunden werden.

Zusätzlich zu den Simulationen in Wasser werden auch Blasen in diversen, viskosen Glycerin/Wasser Mischungen betrachtet. Für Viskositäten $\eta_L > 0,075\text{Pas}$ liegt eine sehr gute Übereinstimmung der simulierten Geschwindigkeiten mit den experimentellen Werten aus der Literatur vor. Die numerisch erhaltenen Werte sind innerhalb dieses Viskositätsbereiches Gitterinvariant. Eine Betrachtung der für die Hydrodynamik relevanten Längenskala zeigt, daß diese für die höherviskosen Fluide hinreichend durch das Gitter aufgelöst wird.

Oberhalb einer bestimmten Blasengröße bilden sich hinter den Blasen in niedrig-

viskosen Flüssigkeiten Wirbelschleppen aus. In Übereinstimmung mit den Experimenten können sowohl symmetrische als auch asymmetrische Wirbelschleppen beobachtet werden. Die Wirbelbildung und Ablösung stimmen sehr gut mit der mechanistischen Beschreibung nach [Fan und Tsuchiya \(1990\)](#) überein. Durch das Ablösen von Wirbeln aus der Schleppe ändert sich die Länge der primären Wirbelschleppe kontinuierlich. Der zeitliche Verlauf der Länge einer asymmetrischen Schleppe in den Simulationen kann durch eine Sägezahnkurve angenähert werden. Dies ist in guter, qualitativer Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen.

Die Simulation von Blasenpaaren zeigt, daß es bei jedem Aufeinandertreffen von zwei Blasen zu einer Koaleszenz kommt, die lediglich auf die Rekonstruktion der Phasengrenzfläche zurückzuführen ist. Auf diese Weise können zwar in Experimenten vorliegende Koaleszenzen sehr gut durch die Simulation wiedergegeben werden, ein Abprallen zweier Blasen ist jedoch mit der VOF-Methode mit heutigen Rechnerkapazitäten nicht machbar.

Mit Hilfe einer Erweiterung des Simulationsprogramms *FS3D* ist es möglich, den Stofftransport für formdynamische Blasen qualitativ erfolgreich zu simulieren. Ein Vergleich mit dem flüssigkeitsseitigen Stoffübergangskoeffizienten β_L für reine Diffusion zeigt jedoch, daß die numerischen Werte ca. eine Größenordnung oberhalb der experimentellen Werte liegen. Trotz dieser Einschränkung kann eine gute prinzipielle Übereinstimmung der Konzentrationsverteilung in der Wirbelschleppe mit den Experimenten nach [Bork \(1999\)](#) festgestellt werden. Ein quantitativer Vergleich offenbart größere Differenzen der numerisch bestimmten Sherwood-Zahlen der Blasen im Vergleich zu den Werten nach Bork. Dies kann zum Teil mit der zu groben Diskretisierung des Gitters erklärt werden, da die für den Stofftransport relevante Batchelor Skala, je nach Schmidt-Zahl, noch weit unterhalb der Kolmogorov'schen Skala liegt.

Für geringe Reynolds-Zahlen und sphärische Blasen kann eine gute Übereinstimmung der Sherwood-Zahl mit Korrelationen aus der Literatur festgestellt werden. Für ellipsoide Blasen kann ein eigener, empirischer Ansatz die numerisch bestimm-

ten Sherwood-Zahlen gut wiedergeben. In ersten Studien können in zweidimensionalen Rechnungen die Tendenzen des Stofftransportes in Blasenketten gezeigt werden.

Ausblick

Das große Problem bei den bisherigen Simulationen ist die oftmals zu geringe Auflösung des Rechengebietes. Mit feinerer Auflösung lassen sich Ergebnisse erzielen, die die Physik noch besser wiedergeben. Da die Kapazität des vorhandenen Parallelrechners begrenzt ist, müssen andere Ansätze verwendet werden:

Durch die Implementierung periodischer Randbedingungen läßt sich das Rechengebiet verkürzen. Damit kann die Auflösung innerhalb des Gebiets weiter erhöht werden. Dadurch lassen sich auch für höhere Schmidt-Zahlen die an der Grenzfläche vorliegenden Filmprofile noch ausreichend auflösen. Gleichzeitig bieten die periodischen Randbedingungen die Möglichkeit, die Abreicherung der Spezies in einer einzelnen Blase aus einer Kette oder alternativ die Anreicherung innerhalb eines gewissen Bereichs der Flüssigphase zu untersuchen. Weiterhin bieten periodische Randbedingungen die Möglichkeit, das Schwarmverhalten mehrerer Blasen zu untersuchen, besonders vor dem Hintergrund, daß die bisherigen in der Literatur bekannten Simulationen nur geringe Reynolds-Zahlen und kleine Deformationen beinhalten. Mit *FS3D* lassen sich hingegen starke Oberflächendeformationen bei hohen Reynolds-Zahlen und hohen Dichteunterschieden simulieren.

Ein weiterer Aspekt ist die Implementierung des mitbewegten Koordinatensystems, wie es von [Rusche \(2003\)](#) vorgestellt wird. Durch die ortsfeste Fixierung der Blase kann das Gitter dort mit bestehenden Möglichkeiten von *FS3D* lokal verfeinert werden. Somit ließe sich auch untersuchen, ob sich durch das mitbewegte Koordinatensystem realistischere Bahnradialen mit *FS3D* simulieren lassen.

Ebenfalls von Interesse sind veränderte Einströmbedingungen für aufsteigende Blasen im Gegenstrom. Bisher liegt am Einlaß nur eine homogene Geschwindigkeitsverteilung vor. In realen Zweiphasenströmungen sind aber fast ausschließlich inhomogene Geschwindigkeitsverteilungen zu finden. Daher können beispielsweise Scherströmungen, oder die von [Schlüter \(2002\)](#) beschriebene ungeordnete Strömungsformen hinter einem Partikelgitter als Einlaß gewählt werden.

In Bezug auf die Simulation des Stofftransportes besteht noch großer Bedarf an Verbesserungen der Simulationsmethoden und -werkzeuge, um die im Vergleich mit den Experimenten zu hoch simulierten Stoffströme über die Phasengrenze zu reduzieren. Für eine weitere Validierung des implementierten Modells bieten die von ([Brauer 1971b](#)) vorgestellten Gleichungen zur analytischen Bestimmung des Stofftransportes für schleichende Strömungen eine gute Möglichkeit. Die Untersuchung der Filmdicke in Abhängigkeit von der Schmidt-Zahl erfordert noch weitere Simulationen mit veränderten Reynolds-Zahlen, sprich anderen Blasendurchmessern und Stoffsystemen, um die bisher erhaltenen Informationen zu untermauern. Gleiches gilt für die Abhängigkeit der Sherwood-Zahl von der Reynolds- und Schmidt-Zahl für deformierte, formstabile Blasen.

11. Symbolverzeichnis

<i>Symbol</i>	Einheit	Bedeutung
A	$[m^2]$	Fläche
b	$[m]$	Blasenbreite
B_r	$[m^3]$	Kugelvolumen
c	$[kmol/m^3]$	Konzentration
c_{VM}	$[-]$	Virtueller Massenkoeffizient
C_D	$[-]$	Widerstandsbeiwert
D	$[m^2/s]$	Diffusionskoeffizient
d_B	$[m]$	Blasenäquivalentdurchmesser
d_P	$[m]$	Partikeläquivalentdurchmesser
d_i	$[m]$	Düsendurchmesser
E	$[-]$	Exzentrizität
f	$[-]$	Volumenanteilsfunktion
f	$[1/s]$	Frequenz
D_V^*	$[-]$	Dimensionsloser Äquivalentdurchmesser
\mathbf{f}	$[N]$	Kraftdichte
F	$[-]$	Argument
\mathbf{F}	$[N]$	Kraft
g	$[m/s^2]$	Erdbeschleunigung
G	$[-]$	Gebiet
h	$[m]$	Blasenhöhe
H	$[-]$	Heaviside'sche Sprungfunktion
H, H^*	$[-]$	Henry Zahl

11. Symbolverzeichnis

He	$[bar]$	Henry-Konstante
\mathbf{I}	$[-]$	Einheitstensor
\mathbf{J}	$[kg/m^2s]$	Fluß
K	$[-]$	Faktor
\dot{m}	$[kg/m^3s]$	Massenstromdichte
\tilde{M}	$[kg/kmol]$	Molmasse
\mathbf{n}	$[m]$	Oberflächennormale
\dot{n}	$[mol/m^3s]$	Stoffstromdichte
p	$[N/m^2]$	Druck
r	$[m]$	Radius
R	$[-]$	Blasenradius
r_{Bahn}	$[m]$	Bahnradius
s	$[-]$	Grenzflächenenerneuerungsfaktor
S_F	$[-]$	Flächenschwerpunkt
\mathbf{S}	$[-]$	Zähigkeitsspannungstensor
t	$[s]$	Zeit
\mathbf{T}	$[-]$	Spannungstensor
\mathbf{u}	$[m/s]$	Geschwindigkeitsvektor
w_B	$[m/s]$	Aufstiegsgeschwindigkeit
w_B^*	$[-]$	normierte Aufstiegsgeschwindigkeit
\tilde{x}	$[-]$	Molbruch
x, y, z	$[m]$	Koordinate

Griechische Symbole

<i>Symbol</i>	Einheit	Bedeutung
α	[°]	Ablösewinkel der Strömung
β	[m/s]	Stoffübergangskoeffizient
γ	[−]	Dichteverhältnis, Störungsfaktor
Γ	[m ²]	Grenzfläche
δ	[−]	Dirac'sche Deltafunktion
δ_i	[m]	Filmdicke
ϵ	[−]	Gasgehalt
ζ	[−]	Verwindungszahl
η	[kg/ms]	Dynamische Viskosität
λ_K	[m]	Kolmogorov Längenskala
μ	[−]	Chemisches Potential
ν	[m ² /s]	Kinematische Viskosität
ξ	[−]	Verwindungszahl
ρ	[kg/m ³]	Dichte
σ	[N/m]	Oberflächenspannung
σ_{SD}	[−]	Standardabweichung
Θ, θ	[°]	Winkel
ϕ	[−]	Strömungsvariable
φ	[°]	Winkel
κ	[1/m]	Krümmung, Viskositätsverhältnis
ψ	[−]	Strömungsfunktion, Verteilungsfunktion
Ω	[−]	Phasenraum, Bilanzraum

Indices und Symbole

+, -	Phasenindex
*	Dimensionslos
A _q	Fläche
A	Auftrieb
B	Blase
BK	Blasenkette
eq	Äquivalent
G	Gas
G	Gewichtskraft
H	Horizontal
HR	Hadamard u. Rybczynski
i, j, k	Zellindizierung in (x, y, z)-Richtung
P	Partikel
PGF	Phasengrenzfläche
PW	Primäre Wirbelschleppe
st	Grenzflächenspannung
V	Volumen
VM	Virtuelle Masse
W	Widerstand
Γ	Grenzfläche

A. Anhang

A.1. Festlegung der Wirbelschleppenlänge nach Tsuchiya und Fan

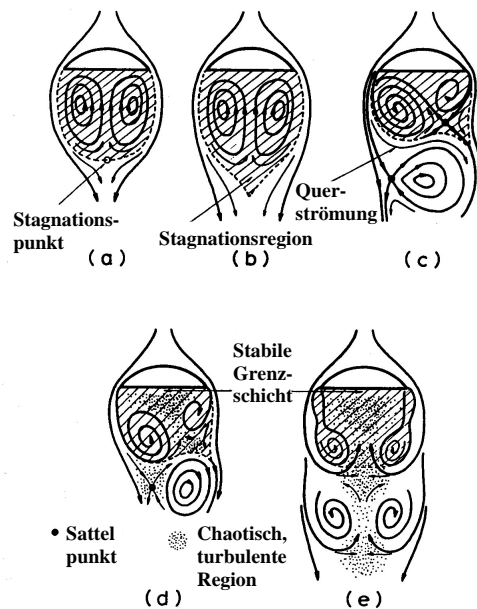


Abbildung A.1.: Schematische Festlegung der Grenze der primären Wirbelschleppe (Tsuchiya und Fan 1988).

A.2. Einfluß der Blasenerzeugung

Tabelle A.1.: Aufstiegs geschwindigkeit und Durchmesser verhältnis h/b für Blasen von $d_B = 2,7 - 3,8\text{ mm}$ für zwei unterschiedliche Düsendurchmesser.

Düsen- durchmesser d_i/mm	Blasen- durchmesser d_B/mm	Geschwin- digkeit $w_B/\text{cm/s}$	h/b -
3,1	0,31	20,20	0,89
3,1	3,8	20,32	0,85
3,1	3,2	19,33	0,90
3,1	3,1	20,20	0,89
3,1	2,7	18,64	0,93
0,38	3,4	25,41	0,50
0,38	3,2	24,96	0,53
0,38	3,0	25,94	0,53
0,38	3,3	25,36	0,51
0,38	3,5	25,45	0,50
0,38	3,3	25,76	0,48
0,38	3,2	25,66	0,52
0,38	3,2	25,43	0,51
0,38	3,3	25,94	0,50
0,38	3,1	25,98	0,49
0,38	3,3	25,67	0,50

A.3. Koeffizienten der Geradengleichungen

Tabelle A.2.: Koeffizienten der Geradengleichungen der einzelnen Blasen für die Bestimmung des Stoffübergangs aus einer 2mm Düse; Wandabstand $d_W = 0,8\text{cm}$.

Blasen- nummer $n_B[-]$	Steigung $/10^{-7} \text{ [mmol/l s]}$	Achsen- abschnitt $/10^{-5} \text{ [mmol/l]}$
1	-7,948	4,403
2	-6,740	4,423
3	-6,179	4,442
4	-5,601	4,452
5	-5,285	4,466
6	-4,932	4,478
7	-4,576	4,485
8	-4,163	4,489
9	-3,567	4,481

Tabellenverzeichnis

2.1. Numerische Werte für die Parameter in Gleichung (2.50)	24
9.1. Stoffwerte der verwendeten Flüssigkeiten.	100
9.2. Aufstiegsgeschwindigkeit einer 2,0mm Luftblase bei Variation der Dichte- und Viskositätsverhältnisse und der Oberflächenspannung. .	102
9.3. Vergleich von simulierten Blasen mit identischen Morton- und Eötvös- Zahlen aber unterschiedlichen Stoffwerten.	104
9.4. Aufstiegsgeschwindigkeit einer 1,3mm Luftblase in Wasser in Abhängig- keit von der Auflösung des Rechengebiets.	114
9.5. Aufstiegsgeschwindigkeit einer 4,0mm Luftblase in einer CMC-Lösung in Abhängigkeit von der Auflösung des Rechengebiets.	115
9.6. Einfluß des Wandabstandes auf die Aufstiegsgeschwindigkeit. (Schlupf- Randbedingungen, 16 Zellen pro Durchmesser).	116
9.7. Einfluß des Wandabstandes auf die Aufstiegsgeschwindigkeit. (Haft- Randbedingungen, 16 Zellen pro Durchmesser).	118
9.8. Vergleich der Strouhal-Zahlen Sr für die Bahnfrequenzen nach Miya- hara und Yamanaka (1993) mit numerisch gewonnenen Werten. . .	137
9.9. Einfluß des Wandabstandes auf den Aufstieg einer 8mm Blase. . . .	143
9.10. Diffusionskoeffizienten.	166
9.11. Aufstiegsgeschwindigkeit und übergehender, Stoffstrom einer 4,0mm Luftblase in einer CMC-Lösung in Abhängigkeit von der Auflösung des Rechengebiets.	170
9.12. Vergleich der Simulationen mit experimentellen Daten (Bork 1999). .	178
9.13. Vergleich der Blasenbildung und des Blasenanstiegs an einer 2mm Düse in 2D und 3D.	182

A.1. Aufstiegsgeschwindigkeit und Durchmesser Verhältnis h/b für Blasen von $d_B = 2,7 - 3,8mm$ für zwei unterschiedliche Düsendurchmesser.	200
A.2. Koeffizienten der Geradengleichungen der einzelnen Blasen für die Bestimmung des Stoffübergangs aus einer 2mm Düse; Wandabstand $d_W = 0,8cm$	201

Abbildungsverzeichnis

2.1. Diagramm zur Abschätzung der Blasenform und Aufstiegsgeschwindigkeit (Grace u. a. 1976; Clift u. a. 1978)	8
2.2. Charakteristische Blasenformen nach Peebles und Garber (1953) . .	8
2.3. Aufstiegsgeschwindigkeiten von Luftblasen in Wasser (Clift u. a. 1978)	10
2.4. Schematische Darstellung einer teilweise mit Tensiden kontaminierter Blase	25
2.5. Charakteristische Formen der Wirbelschleppe hinter Kugelkappenblasen (Fan und Tsuchiya 1990).	30
3.1. Konzentrationsprofil für den stationären Stofftransport aus einer nur aus Komponente A bestehenden Blase	34
3.2. Konzentrationsprofil für den instationären Stofftransport aus einer aus mehreren Komponenten bestehenden Blase	35
3.3. Konzentrationsverlauf für einen gelösten Stoff A nach der Zwei-Film-Theorie.	37
3.4. Prinzip der Penetrationshypothese an einer welligen Phasengrenzfläche.	40
4.1. Versuchsanlage zur Untersuchung aufsteigender Luftblasen	46
4.2. Meßleiste und deren Positionierung	47
4.3. Volumenberechnung eines rotationssymmetrischen Körpers aus einer 2D-Ansicht mit Hilfe der 2. Guldinschen Regel	51
5.1. Aufstiegsgeschwindigkeiten von Einzelblasen in reinem Wassers . . .	53
5.2. Blasenform unmittelbar vor dem Ablösen von den zwei unterschiedlichen Düsen.	54

5.3. Experimentell ermittelte Aufstiegsgeschwindigkeiten für Luftblasen in reinem und verschmutzten Wasser.	55
5.4. Vergleich zwischen experimentell ermittelten Aufstiegsgeschwindigkeiten und Modellen zu deren Vorausbestimmung.	56
5.5. Vergleich zwischen experimentell ermittelten Aufstiegsgeschwindigkeiten und Modellen zu deren Vorausbestimmung.	57
5.6. Vergleich zwischen experimentell ermittelten Aufstiegsgeschwindigkeiten und Modellen zu deren Vorausbestimmung.	58
5.7. Vergleich zwischen experimentell ermittelten Widerstandsbeiwerten und Modellen zu deren Vorausbestimmung.	60
5.8. Auswirkungen der Anfangsdeformation auf Blasenbahn und Blasenform einer 3mm Blase. links: starke Anfangsformation, ($w_B = 25,94\text{cm/s}$; $h/b = 0,53$), rechts: geringe Anfangsdeformation ($w_B = 20,16\text{cm/s}$; $h/b = 0,89$).	61
5.9. Bewegungsbahnen der Blasen von $d_B = 2 - 4\text{mm}$ für zwei unterschiedliche Düsendurchmesser d_i . Links: $d_i = 0,38\text{mm}$, rechts $d_i = 3,1\text{mm}$	62
5.10. Vergleich zwischen experimentell ermittelten Durchmesserbeziehungen und Modellen zu deren Vorausbestimmung.	63
5.11. Fortschreiten einer Oberflächenwelle auf einer 6,5mm Blase.	65
6.1. Konturangepaßtes Gitter einer aufsteigenden Blase (Ponoth und McLaughlin 2000)	70
6.2. Ortsfestes (Euler'sches) kartesisches, äquidistantes Gitter des Berechnungsgebietes mit separatem, unstrukturiertem, zweidimensionalen, triangulärem bewegtem (Lagrange'schem) Gitter (Unverdi und Tryggvason 1992)	71
7.1. Kontrollraum für eine Kugel B_r im Aufenthaltsort $\Omega^-(t)$ und $\Omega^+(t)$ zweier durch die Phasengrenzfläche $\Gamma(t)$ getrennter Phasen.	80
7.2. Kraft auf ein Linienelement ds auf der Grenzfläche $\Gamma(t)$	82

8.1. Zellenbelegung des Rechengitters für eine Luftblase ($f = 1$) in Flüssigkeit ($f = 0$) nach der VOF-Methode und Rekonstruktion der Phasengrenze nach der PLIC-Methode.	90
8.2. Vergleich zwischen realer (oben) und nach SLIC (Mitte) und PLIC (unten) rekonstruierten Phasengrenzfläche.	91
8.3. Versetzte Anordnung der verwendeten Strömungsvariablen nach den Marker und Cell-Verfahren in FS3D.	94
8.4. Durch parasitäre Strömungen induziertes Strömungsfeld um eine 2mm Luftblase (2D) in Wasser in Schwerelosigkeit (links). Zeitlicher Verlauf der spezifischen kinetischen Energie für unterschiedliche Diskretisierungen des Blasendurchmessers (rechts).	96
9.1. Einfluß des Dichte- und Viskositätsverhältnis auf die Aufstiegs- geschwindigkeit einer 2mm Blase.	102
9.2. Vergleich der numerischen mit analytisch bestimmten Durchmesser- verhältnissen für geringe Reynolds-Zahlen und kleine Deformationen. Kleines Bild: Vergleich zwischen numerischen und analytischen Bla- senkontur.	107
9.3. Vergleich zwischen dem numerisch (links) und analytisch (rechts) bestimmten Strömungsfeldes einer 4mm Blase im Gegenstrom. . . .	109
9.4. Vergleich zwischen numerisch (Punkte) und analytisch (Linien) be- stimmten Geschwindigkeiten in axialer (w_x , oben) und radialer (w_y , unten) Richtung.	110
9.5. Einfluß des überlagerten Grundrauschens innerhalb der Flüssigpha- se auf das Aufstiegsverhalten zweier 6mm Blasen in Wasser. links: $w_{L,SD}(t = 0) = 0,0cm/s$, rechts: $w_{L,SD}(t = 0) = 0,5cm/s$	120
9.6. Zeitlicher Verlauf der mittleren Geschwindigkeit in der Flüssigphase in Abhängigkeit des Anfangsrauschens.	121
9.7. Vergleich zwischen simulierten Aufstiegsgeschwindigkeiten und ex- perimentellen Werte.	122
9.8. Aufstiegsgeschwindigkeiten von zwei 3mm Luftblasen in Wasser mit unterschiedlicher Anfangsdeformation.	124

9.9. Weber- und Froude-Zahl als Funktion der Eötvös-Zahl. Vergleich zwischen Experiment (Maxworthy u. a. 1996) und Simulation.	126
9.10. Vergleich zwischen experimentell bestimmten Aufstiegsgeschwindigkeiten (Linien) und numerischen Simulationen für Wasser/Glycerin Gemische (Symbole); links: nach (Maxworthy u. a. 1996); rechts nach (Raymond und Rosant 2000).	127
9.11. Weber-Zahl als Funktion der Reynolds-Zahl für verschiedene Werte der Morton-Zahl.	130
9.12. Bewegungsbahnen einer 4 mm Blase in Wasser für unterschiedliche Wandabstände mit <i>Schlupfbedingungen</i> an der Wand (Draufsicht). .	131
9.13. Bewegungsbahnen einer 4 mm Blase in Wasser für unterschiedliche Wandabstände mit <i>Haftbedingungen</i> an der Wand (Draufsicht).	131
9.14. Vergleich der Trajektorie einer 4mm Blase in Experiment und Simulation mit <i>Schlupfbedingungen</i> an der Wand (Draufsicht).	135
9.15. Vergleich der Trajektorie einer 4mm Blase in Experiment und Simulation mit <i>Haftbedingungen</i> an der Wand (Draufsicht).	135
9.16. Aufstieg einer 4mm Blase in Experiment ($d_W = 20mm$) und Simulation ($d_W = 32mm$), oben: Durchmesser Verhältnis h/b , unten: Anstellwinkel Θ zur Horizontalen.	139
9.17. Fotosequenzen einer aufsteigenden Blase mit formdynamischer Oberfläche; links: Simulation $d_B = 8,0mm$, rechts: Experiment $d_B = 6,5mm$	140
9.18. Einfluß des Wandabstandes auf den Anstellwinkel (links oben), das Durchmesser Verhältnis (links unten) und die Bewegungsbahn einer 8mm Blase.	142
9.19. Vergleich zwischen experimentellen Durchmesser Verhältnissen und numerischen Werten (Systeme S1, S5-S9). links: eigene Messungen in Wasser (offene Symbole); rechts: Wasser/Glycerin Gemische nach (Raymond und Rosant 2000) (Linien).	144
9.20. Vergleich der Durchmesser Verhältnisse der System S1-S9 als Funktion der Tadaki-Zahlen mit Korrelationen aus der Literatur.	145

9.21. links: Schematische Darstellung der Strömung in der helikalen Wirbelschleppe und der Länge h_{PW} der primären Wirbelschleppe einer sphärischen Kappenblase (Miyahara u. a. 1988); rechts: Helikale Wirbelschleppe hinter einer 10mm Blase.	147
9.22. Position der abgelösten Wirbel einer 8mm Blase.	148
9.23. Links: Schematische Darstellung der Strömung in einer achsensymmetrischen Wirbelschleppe einer sphärischen Kappenblase (Miyahara u. a. 1988); rechts: Achsensymmetrische Wirbelschleppe hinter einer 13mm Blase.	149
9.24. Normierte Länge der primären Wirbelschleppe als Funktion der Reynoldszahl	151
9.25. 2D Schnitte durch einen Ausschnitt aus dem Geschwindigkeitsfeld einer 8 mm Blase im Gegenstrom.	152
9.26. Unten: auf den Blasendurchmesser bezogene Höhe der primären Schleppe einer 10 mm Luftblase in Wasser; oben: Anstellwinkel Θ Blase. .	153
9.27. Auf das Blasenvolumen bezogenes Volumen der primären Wirbelschleppe in einem fest/flüssig fluidisierten Bett einer aufsteigenden Blase in einer Flachapparatur (Tsuchiya und Fan 1988).	154
9.28. Modell für die instationäre Wirbelablösung hinter Kappenblasen (Fan und Tsuchiya 1990) im Vergleich mit numerischer Simulation. . . .	156
9.29. Schnittdarstellung der Koaleszenz zweier 8mm Luftblasen in Wasser.	159
9.30. Koaleszenz zweier 1,8 mm Luftblasen in Wasser, Vergleich zwischen Experiment (Duineveld 1998) und Simulation.	161
9.31. Links: Zellenbelegung des Rechengitters nach der VOF-Methode; Rechts: Numerische Koaleszenz durch die PLIC-Rekonstruktion der Phasengrenze.	162
9.32. Abprall und nachfolgende Koaleszenz zweier 2,4 mm Luftblasen in Wasser, Vergleich zwischen Experiment (Duineveld 1998) und Simulation.	163
9.33. Normierte Sauerstoff-Konzentration normal zur Phasengrenzfläche einer fixierten 4mm Blase.	168

9.34. Konzentrationsfeld des übergegangenen Sauerstoff aus einer 4mm Blase (freier Aufstieg) in Abhängigkeit der Schmidt-Zahl Sc	171
9.35. Sauerstoffprofile innerhalb der Flüssigphase in Abhängigkeit des Winkels Θ und der Schmidt-Zahl.	173
9.36. Filmdicke d_F für unterschiedliche Winkel Θ in Abhängigkeit der Schmidt-Zahl Sc	174
9.37. Sherwood-Zahl in Abhängigkeit der Schmidt-Zahl Sc	175
9.38. Konzentrationsfeld des übergegangenen Sauerstoffs hinter einer formdynamischen Blase. oben: Simulation, unten: Experiment (Bork u. a. 2003).	176
9.39. Vergleich des Konzentrationsfeldes des gelösten Sauerstoffs zwischen Experiment (Bork 1999) und Simulation. a) $d_B = 4,5mm$, b) $d_B = 5,6mm$, c) Exp.: $d_B = 7,2mm$, Sim.: $d_B = 8,0mm$, d) $d_B = 10,0mm$,	177
9.40. Vergleich der numerisch berechneten Sherwood-Zahlen aus den Simulationen (S10, S11) als Funktion der Reynolds-Zahl mit experimentellen Werten (S11) und Korrelationen aus der Literatur für ein Wasser/CMC Gemisch (S11).	179
9.41. Gelöster Sauerstoff um eine aufsteigende Blase innerhalb einer Blasenkette. Links: Simulation, Rechts: Experiment (Bork u. a. 2002).	181
9.42. Einfluß des Wandabstandes auf das Aufstiegsverhalten und den Stoffaustausch in einer Blasenkette. a) $d_W = 3,2cm$, b) $d_W = 1,6cm$, c,d) $d_W = 0,8cm$	183
9.43. Auf die Geschwindigkeit der ersten Blase bezogene Aufstiegs geschwindigkeit der Blasen innerhalb einer Kette.	184
9.44. Zeitlicher Konzentrationsverlauf der Blasen innerhalb einer Kette. Links: $d_W = 0,8cm$, rechts: $d_W = 1,6cm$	185
9.45. Flüssigkeitsseitiger Stoffübergangskoeffizient k_L als Funktion der Zeit.	187
A.1. Schematische Festlegung der Grenze der primären Wirbelschleppe (Tsuchiya und Fan 1988).	199

Literaturverzeichnis

- Aybers und Tapucu 1969** AYBERS, N. M. ; TAPUCU, A.: Studies on the Drag and Shape of Gas Bubbles Rising Through a Stagnant Liquid. In: *Wärme- und Stoffübertragung* 2 (1969), S. 171–177
- Beitz und Küttner 1995** BEITZ, W. ; KÜTTNER, G. H.: *Doppel-Taschenbuch für den Maschinenbau*, 18. Auflage. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995
- Bhaga und Weber 1980** BHAGA, D. ; WEBER, M. E.: In-Line Interaction of a Pair of Bubbles in a Viscous Liquid. In: *Chemical Engineering Science* 35 (1980), S. 2467–2474
- Bhaga und Weber 1981** BHAGA, D. ; WEBER, M. E.: Bubbles in Viscous Liquids: Shapes, Wakes and Velocities. In: *Journal of Fluid Mechanics* 105 (1981), S. 61–85
- Bork 1999** BORK, O.: *Untersuchung zum lokalen Stoffaustausch in praxis-relevanten Zweiphasenströmungen durch Visualisierung des Konzentrations- und Strömungsfeldes*, IUV Universität Bremen, Diplomarbeit, 1999
- Bork u. a. 2001** BORK, O. ; SCHLÜTER, M. ; SCHEID, S. ; RÄBIGER, N.: New Phenomena of Mass Transfer in Gas/Liquid Flows. In: *Proceedings of ASME HTD, Fluid-Physics and Heat transfer for Macro- and Micro-Scale Gas-Liquid and Phase Change Flows* ASME HTD (Veranst.), 2001, S. 1–6
- Bork u. a. 2002** BORK, O. ; SCHLÜTER, M. ; SCHEID, S. ; RÄBIGER, N.: Influence of wake mixing on mass transfer in gas-liquid reactors. In: *15th International Congress of Chemical and Process Engineering* CHISA (Veranst.), 2002

- Bork u. a. 2003** BORK, O. ; SCHLÜTER, M. ; SCHEID, S. ; RÄBIGER, N.: Analysis of the Effect of Local Hydrodynamics on Mass Transfer from Bubbles by Laser Induced Fluorescence. In: *ASME FEDSM 2003, Honolulu, USA*, 2003, S. 1–6
- Bothe 2002** BOTHE, D.: *Vorlesungsskript: Computational Fluid Dynamics, Modellierung und Anwendung*. Universität Paderborn, Technische Chemie, 2002
- Bothe u. a. 2004** BOTHE, D. ; KOEBE, M. ; WARNECKE, H.-J.: VOF Simulation of the Rise Behavior of Single Air Bubbles with Oxygen Transfer to the Ambient Liquid. In: SCHINDLER, F.-P. (Hrsg.): *2nd International Berlin Workshop - IBW2 on Transport Phenomena with Moving Boundaries, 9th-10th October*, VDI-Verlag, 2004, S. 134–146
- Bothe u. a. 2003a** BOTHE, D. ; KOEBE, M. ; WIELAGE, K. ; PRÜSS, J. ; WARNECKE, H.-J.: Direct Numerical Simulation of Mass Transfer Between Rising Gas Bubbles and Water. In: SOMMERFELD, M. (Hrsg.): *Bubbly Flows - Analysis, Modelling and Calculation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003
- Bothe u. a. 2003b** BOTHE, D. ; KOEBE, M. ; WIELAGE, K. ; PRÜSS, J. ; WARNECKE, H.-J. ; SOMMERFELD, M. (Hrsg.): *Direct Numerical Simulation of Mass Transfer Between Rising Gas Bubbles and Water*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003
- Bothe u. a. 2003c** BOTHE, D. ; KOEBE, M. ; WIELAGE, K. ; WARNECKE, H.-J.: VOF-Simulations of Mass Transfer from Bubbles and Bubble Chains Rising in Aqueous Solutions. In: *ASME FEDSM 2003, Honolulu, USA* ASME (Veranst.), 2003, S. 1–7
- Brackbill u. a. 1992** BRACKBILL, J. U. ; KOTHE, D. B. ; ZEMACH, C.: A Continuum Method for Modeling Surface Tension. In: *Journal of Computational Physics* 100 (1992), S. 335–354
- Brauer 1971a** BRAUER, H.: *Grundlagen der Ein- und Mehrphasenströmungen*. Verlag Sauerländer, AArau und Frankfurt am Main, 1971
- Brauer 1971b** BRAUER, H.: *Stoffaustausch einschließlich chemischer Reaktion*. Verlag Sauerländer, AArau und Frankfurt am Main, 1971

- Brücker 1999** BRÜCKER, C.: Structure and Dynamics of the Wake of Bubbles and its Relevance for Bubble Interaction. In: *Physics of Fluids* 11 (1999), Nr. 7, S. 1781–1796
- Bunner und Tryggvason 1997** BUNNER, B. ; TRYGGVASON, G.: Simulation of Large Bubble Systems. In: *ASME Fluid Engineering Division Summer Meeting* ASME (Veranst.), 1997, S. 1–5
- Bunner und Tryggvason 2000** BUNNER, B. ; TRYGGVASON, G.: Dynamics of Homogeneous Bubbly Flows, Part I: Rise Velocity and Microstructure of the Bubbles. In: *Journal of Fluid Mechanics* 466 (2000), S. 17–52
- Chen u. a. 1988** CHEN, J. D. ; HAHN, P. S. ; SLATTERY, J. C.: Effects of Electrostatic Double-Layer Forces on Coalescence. In: *AIChE Journal* 34 (1988), Nr. 1, S. 140–143
- Chen u. a. 1996a** CHEN, L. ; REIZES, J. A. ; LEONARDI, E. ; GARIMELLA, S. V.: Analysis of Bubble Rise Using the VOF Method: I Isolated Bubbles. In: *Proc. 31st National Heat Transfer Conference, Houston, Vol. 4* ASME (Veranst.), 1996
- Chen u. a. 1996b** CHEN, L. ; REIZES, J. R. ; GARIMELLA, S. V. ; LEONARDI, E.: Analysis of Bubble Rise Using the VOF Method: II. Bubble Interactions, Wall Effects and Evaporation. In: *ASME 31st National Heat Transfer Conference, HTD-Vol.326* ASME (Veranst.), 1996, S. 175–181
- Chen und Chou 1998** CHEN, R. C. ; CHOU, I. S.: Wake Structure of a Single Bubble Rising in a Two-Dimensional Column. In: *Experimental Thermal and Fluid Science* 17 (1998), S. 165–178
- Chesters 1991** CHESTERS, A. K.: The Modelling of Coalescence Processes in Fluid-Liquid Dispersions: A Review of Current Understanding. In: *Transaction of the Institution of Chemical Engineers* 69, A (1991), S. 259–270
- Chesters und Hofman 1982** CHESTERS, A. K. ; HOFMAN, G.: Bubble Coalescence in Pure Liquids. In: *Applied Scientific Research* 38 (1982), S. 353–361

- Churchill 1989** CHURCHILL, S. W.: A Theoretical Structure and Correlating Equation for the Motion of Single Bubbles. In: *Chemical Engineering and Processing* 26 (1989), S. 269–279
- Clift u. a. 1978** CLIFT, R. ; GRACE, J. R. ; WEBER, M. E.: *Bubbles, Drops, and Particles*. Academic Press, 1978
- Crabtree und Bridgwater 1971** CRABTREE, J. R. ; BRIDGWATER, J.: Bubble Coalescence in Viscous Water. In: *Chemical Engineering Science* 26 (1971), S. 839–851
- Dankwerts 1951** DANKWERTS, P. V.: Significance of Liquid-Film Coefficients in Gas Absorption. In: *Industrial and Engineering Chemistry* 43 (1951), Nr. 6, S. 1460–1467
- Davidson und Rudmann 2000** DAVIDSON, M. R. ; RUDMANN, M. J.: A Numerical Method for Mass Transfer in Two-Fluid Flow with Interfaces. In: *Proceedings of the 7th Australasian Heat and Mass Transfer Conference - 7AHMTC*, 2000
- Deckwer 1992** DECKWER, W.-D. ; FIELD, R. W. (Hrsg.): *Bubble Column Reactors*. J. Wiley and Sons, 1992
- Delnoij u. a. 1998** DELNOIJ, E. ; KUIPERS, J. A. M. ; SWAAIJ, W. P. M.: Numerical Simulation of Bubble Coalescence Using a Volume of Fluid (VOF) Model. In: *3rd International Conference on Multiphase Flow, ICMF'98*, 1998
- Delnoij u. a. 1997** DELNOIJ, E. ; KUIPERS, J. A. M. ; SWAAIJ, W. P. M. van: Dynamic Simulation of Gas-Liquid Two-Phase Flow: Effect of Column aspect Ratio on the Flow Structure. In: *Chemical Engineering Science* 52 (1997), Nr. 21/22, S. 3759–3772
- Desch und Prüß1994** DESCH, W. ; PRÜSS, J.: Dynamical Behavior of a Two-Phase Chemical Reacting System Including Mass Transfer. In: *Differential and Integral Equations* 7 (1994), Nr. 3-4, S. 767–793

- Doubliez 1991** DOUBLIEZ, L.: The Drainage and Rupture of a Non-Foaming Liquid Film Formed Upon Bubble Impact with a Free Surface. In: *International Journal of Multiphase Flow* 17 (1991), Nr. 6, S. 783–803
- Duineveld 1995** DUINEVELD, P. C.: The Rise Velocity and Shape of Bubbles in Pure Water at High Reynolds Number. In: *Journal of Fluid Mechanics* 292 (1995), S. 325–332
- Duineveld 1998** DUINEVELD, P. C.: Bouncing and Coalescence of Bubble Pairs Rising at High Reynolds Number in Pure Water or Aqueous Surfactant Solutions. In: *Applied Scientific Research* 58 (1998), S. 409–439
- Duinveld und Fdhila 1996** DUINVELD, P. C. ; FDHILA, R. B.: The Effect of Surfactant on the Rise of Spherical Bubbles at High Reynolds and Peclet Numbers. In: *Physics of Fluids* 8 (1996), Nr. 2, S. 310–321
- Eigenberger und Sokolichin 1996** EIGENBERGER, G. ; SOKOLICHIN, A.: Modellierung und effiziente numerische Simulation von Gas-Flüssigkeits-Reaktoren mit Blasenströmungen nach dem Euler-Euler Konzept, Zwischenbericht / Universität Stuttgart. 1996. – Forschungsbericht
- Eigenberger und Sokolichin 1997** EIGENBERGER, G. ; SOKOLICHIN, A.: Modellierung und effiziente numerische Simulation von Gas-Flüssigkeits-Reaktoren mit Blasenströmungen nach dem Euler-Euler Konzept, Zwischenbericht / Universität Stuttgart. 1997. – Forschungsbericht
- Ellingsen und Risso 2001** ELLINGSEN, K. ; RISSO, F.: On the Rise of an Ellipsoidal Bubble in Water: Oscillatory Paths and Liquid Induced Velocity. In: *Journal of Fluid Mechanics* 440 (2001), S. 235–268
- Ellingsen u. a. 1997** ELLINGSEN, K. ; ROIG, V. ; RISSO, F. ; SUZANNE, C.: Improvements fo Velocity Measurements in Bubbly Flows by Comparison of Simultaneous Hot-Film and Laser Doppler Anemometry Signals. In: *ASME Fluids Engineering Summer Division meeting, FEDSM'97* ASME (Veranst.), 1997, S. 1–6

- Esmaeeli und Tryggvason 1998** ESMAEELI, A. ; TRYGGVASON, G.: Direct Numerical Simulation of Bubbly Flows. Part 1. Low Reynolds Number Arrays. In: *Journal of Fluid Mechanics* 377 (1998), S. 313–345
- Esmaeeli und Tryggvason 1999** ESMAEELI, A. ; TRYGGVASON, G.: Direct Numerical Simulation of Bubbly Flows. Part 1. Moderate Reynolds Number. In: *Journal of Fluid Mechanics* 385 (1999), S. 325–358
- Fan und Tsuchiya 1990** FAN, L. S. ; TSUCHIYA, K.: *Bubble Wake Dynamics in Liquids and Liquid-Solid Suspensions*. Butterworth-Heinemann, 1990
- Ferziger und Peric 2002** FERZIGER, J. H. ; PERIC, M.: *Computational Methods for Fluid Mechanics*. 3rd Edition. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002
- Frohn 1999** FROHN, A.: Numerische Modellierung der Dynamik freier Oberflächen in Zweiphasenströmungen / DFG - Bericht zum Forschungsvorhaben Fr-235/43-1. 1999. – Forschungsbericht
- Garner und Hammerton 1954** GARNER, F. H. ; HAMMERTON, D.: Circulation Inside Gas Bubbles. In: *Chemical Engineering Science* 3 (1954), S. 1–11
- Gaudin 1957** GAUDIN, A. M.: *Flotation, 2nd Edition*. McGraw-Hill, New York, 1957
- Gerigk 2002** GERIGK, U.: *Zur numerischen Simulation des Mischungsverhaltens einer zweiphasigen Blasensäule*. TC-Schriftenreihe. Shaker Verlag, 2002 (Band 13)
- Glaeser und Brauer 1977** GLAESER, H. ; BRAUER, H.: Berechnung des Impuls- und Stoffaustausch durch die Grenzfläche einer formveränderlichen Blase. In: *VDI-Forschungsheft* (1977), Nr. 581
- Goodall u. a. 1998** GOODALL, D. G. ; LEE, M. L. ; STEVENS, G. ; PERA, J. ; BEAGLEHOLE, D.: An Investigation of the Critical Thickness of Film Ruptures and Drainage Phenomena Using Dual Wavelength Ellipsometry. In: *Colloids and Surfaces* 143 (1998), S. 41–51

- Göz u. a. 2002** GÖZ, M. F. ; SOMMERFELD, M. ; BUNNER, B. ; TRYGGVASON, G.: Microstructure of a Bidisperse Swarm of Spherical Bubbles. In: *ASME FEDSM 2002, Montreal, Kanada*, 2002
- Grace u. a. 1976** GRACE, J. R. ; WAIREGI, T. ; NGUYEN, T. H.: Shapes and Velocities of Single Drops and Bubbles Moving Freely Through Immiscible Liquids. In: *Transaction of the Institution of Chemical Engineers* 54 (1976), S. 167–173
- Haberman und Morton 1956** HABERMAN, W. L. ; MORTON, R. K.: An Experimental Study of Bubbles Moving in Liquid. In: *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 121 (1956), S. 227–251
- Higbie 1935** HIGBIE, R.: The Rate of Absorption of a Pure Gas into a Still Liquid During Short Periods of Exposure. In: *Transaction of the Institution of Chemical Engineers* 31 (1935), S. 365–389
- Hill 1894** HILL, M. J. M.: On a Spherical Vortex. In: *Phil. Transactions Roy. Soc. London* 185 (1894), S. 213–245
- Hirt und Nichols 1981** HIRT, C. W. ; NICHOLS, B. D.: Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries. In: *Journal of Computational Physics* 39 (1981), S. 201–225
- Hong und Brauer 1984** HONG, W.-H. ; BRAUER, H.: Stoffaustausch zwischen Gas und Flüssigkeit in Blasensäulen. In: *VDI-Forschungsheft* (1984), Nr. 624
- Ishii 1975** ISHII, M.: *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two Phase Flow*. Eyrolles, Paris, 1975
- Jamialahmadi u. a. 1994** JAMIALAHMADI, M. ; BRANCH, C. ; STEINHAGEN, H. M.: Terminal Bubble Rise Velocity in Liquids. In: *Transaction of the Institution of Chemical Engineers* 72 (1994), Nr. A, S. 119–122
- Jamialahmadi und Steinhagen 1989** JAMIALAHMADI, M. ; STEINHAGEN, H. M.: Bubble Formation and Coalescence in Bubble Columns. In: *Chemie Ingenieur Technik* 61 (1989), Nr. 9, S. 715–718

- Jan und Tryggvason 1991** JAN, Y. J. ; TRYGGVASON, G.: Computational Studies of Contaminated Bubbles. In: *Dynamics of Bubble and Vortices Near a Free Surface* ASME (Veranst.), AMD, 1991
- Jung und Sato 2001** JUNG, R.-T. ; SATO, T.: Direct Numerical Simulation of Single-Droplet Flow with Mass Transfer. In: *Chemical Engineering Technology* 24 (2001), Nr. 10, S. 1071–1075
- Khinast 2001** KHINAST, J. G.: Impact of 2-D Bubble Dynamics on the Selectivity fo Fast Gas-Liquid Reactions. In: *AIChE Journal* 47 (2001), Nr. 10, S. 2304–2319
- Khinast u. a. 2003** KHINAST, J. G. ; KOYNOV, A. A. ; LEIB, T. M.: Reactive Mass Transfer at Gas-Liquid Interfaces: Impact of Micro Scale Fluid Dynamics on Yield and Selectivity of Liquid Phase Cyclohexane Oxidation. In: *Chemical Engineering Science* 58 (2003), S. 3961–3971
- Koebe u. a. 2002** KOEBE, M. ; BOTHE, D. ; PRÜSS, J. ; WARNECKE, H.-J.: 3D Direct Numerical Simulation of Air Bubbles in Water at High Reynolds-Numbers. In: *ASME FEDSM 2002, Montreal, Canada* ASME (Veranst.), 2002, S. 1–8
- Koebe u. a. 2003** KOEBE, M. ; BOTHE, D. ; WARNECKE, H.-J.: Direct Numerical Simulation of Air Bubbles in Water/Glycerol Mixtures: Shapes and Velocity Fields. In: *ASME FEDSM 2003, Honolulu, USA* ASME (Veranst.), 2003, S. 1–7
- Kok 1993** KOK, J. B. W.: Dynamics of a Pair of Gas Bubbles Moving Through a Liquid; Part II. Experiment. In: *European Journal of Mechanics, B/Fluids* 12 (1993), Nr. 4, S. 541–560
- Komasawa u. a. 1980** KOMASAWA, I. ; OTAKE, T. ; KOMOJIMA, M.: Wake Behavior and its Effects on Interaction Between Spherical-Cap Bubbles. In: *Journal of Chemical Engineering of Japan* 13 (1980), Nr. 2, S. 103–109
- Kothe und Mjolsness 1992** KOTHE, D. B. ; MJOLSNESS, R. C.: RIPPLE: A New Model for Incompressible Flows with Free Surfaces. In: *AIAA Journal* 30 (1992), Nr. 11, S. 2694–2700

- Krishna und van Baten 1999** KRISHNA, R. ; BATEN, J. M. van: Rise Characteristics of Gas Bubbles in a 2D Rectangular Column: VOF Simulation vs. Experiment. In: *International Communications in Heat and Mass Transfer* 26 (1999), Nr. 7, S. 965–974
- Krishna u. a. 1999a** KRISHNA, R. ; URSEANU, M. I. ; BATEN, J. M. van ; ELLENBERGER, J.: Rise Velocity of Swarm of Large Gas Bubbles in Liquids. In: *Chemical Engineering Science* 54 (1999), S. 171–183
- Krishna u. a. 1999b** KRISHNA, R. ; URSEANU, M. I. ; BATEN, J. M. van ; ELLENBERGER, J.: Wall Effects on the Rise Velocity of Single Gas Bubbles in Liquids. In: *International Communications in Heat and Mass Transfer* 26 (1999), Nr. 6, S. 781–790
- Kubota u. a. 1967** KUBOTA, M. ; AKEHATA, T. ; SHIRAI, T.: The Rise Behavior of Single Air Bubbles in Liquids of Small Viscosities. In: *Kagaku Kogaku* 31 (1967), S. 1074–1080
- Kumar und Hartland 1999** KUMAR, A. ; HARTLAND, S.: Correlations for Prediction of Mass Transfer Coefficients in Single Drop Systems and Liquid-Liquid Extraction Columns. In: *Transaction of the Institution of Chemical Engineers, Part A* 77 (1999), S. 372–384
- Lafaurie u. a. 1994** LAFAURIE, B. ; SCARDOVELLI, C. N. ; SCARDOVELLI, R. ; ZALESKI, S. ; ZANETTI, G.: Modelling Merging and Fragmentation in Multiphase Flows with SURFER. In: *Journal of Computational Physics* 113 (1994), S. 134–147
- Lamont und Scott 1970** LAMONT, J. C. ; SCOTT, D. S.: An Edd Cell Model Mass Transfer into the Surface of a Turbulent Liquid. In: *American Institute of Chemical Engineers Journal* 16 (1970), S. 513–519
- Lance und Bataille 1991** LANCE, M. ; BATAILLE, J.: Turbulence in the Liquid Phase of a Uniform Bubbly Air-Water Flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 222 (1991), S. 95–118

- Landau und Lifschitz 1987** LANDAU, L. D. ; LIFSCHITZ, E. M.: *Fluid Mechanics, 2nd Edition*. Pergamon Press, Oxford, 1987
- Lawson u. a. 1999** LAWSON, N. J. ; RUDMAN, M ; GUERRA, A. ; LIOW, J. L.: Experimental and Numerical Comparison of the Break-Up of a Large Bubble. In: *Experiments in Fluids* 26 (1999), S. 254–534
- Levich 1962** LEVICH, V. G.: *Physicochemical Hydrodynamics*. N. J. Enlewood Cliffs: Prentice Hall, 1962
- Lewis und Whitman 1924** LEWIS, W. K. ; WHITMAN, W. G.: Principles of Gas Absorption. In: *Industrial and Engineering Chemistry* 16 (1924), Nr. 12, S. 1215–1220
- Li 1994** LI, D.: Coalescence Between Two Small Bubbles or Drops. In: *Journal of Colloid and Interface Science* 163 (1994), S. 108–119
- Lindken und Merzkirch 2001** LINDKEN, R. ; MERZKIRCH, W.: Velocity Measurements of Liquid and Gaseous Phase for a System of Bubbles Rising in Water. In: *Experiments in Fluids* 29 (Suppl.) (2001), S. 194–201
- Lindt 1971** LINDT, J. T.: Note on the Wake Behind a Two-Dimensional Bubble. In: *Chemical Engineering Science* 26 (1971), Nr. 1776–1777
- Lindt 1972** LINDT, J. T.: On the Periodic Nature of the Drag of a Rising Bubble. In: *Chemical Engineering Science* 27 (1972), S. 1775–1781
- Lindt und de Groot 1974** LINDT, J. T. ; GROOT, R. G. F. de: The Drag of a Single Bubble Accompanied by a Periodic Wake. In: *Chemical Engineering Science* 29 (1974), S. 957–962
- Lunde und Perkins 1997** LUNDE, K. ; PERKINS, R. J.: Observations on Wakes Behind Spheroidal Bubbles and Particles. In: *Proceedings of the ASME FEDSM*, 1997, S. 1–8
- Mao u. a. 2001** MAO, Z. S. ; LI, T. ; CHEN, J.: Numerical Simulation of Steady and Transient Mass Transfer to a Single Drop Dominated by External Resistance. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44 (2001), S. 1235–1247

- Martin 1980** MARTIN, H.: Wärme- und Stoffübertragung in der Wirbelschicht. In: *Chemie Ingenieur Technik* 52 (1980), Nr. 3, S. 199–209
- Maxworthy u. a. 1996** MAXWORTHY, T. ; GNANN, C. ; KÜRTEEN, M. ; DURST, F.: Experiments on the Rise of Air Bubbles in Clean Viscous Liquids. In: *Journal of Fluid Mechanics* 321 (1996), Nr. 421–441
- Mendelson 1967** MENDELSON, H. D.: The Prediction of Bubble Terminal Velocities from Wave Theory. In: *AIChE* 13 (1967), Nr. 2, S. 250–253
- Mersmann 1985** MERSMANN, A. ; GRIGULL, U. (Hrsg.): *Stoffübertragung*. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985
- Miyahara u. a. 1984** MIYAHARA, T. ; KASENO, S. ; TAKAHASI, T.: Studies on chains of bubbles rising through quiescent liquids. In: *Canadian Journal of Chemical Engineering* 62 (1984), S. 186–193
- Miyahara u. a. 1988** MIYAHARA, T. ; TSUCHIYA, K. ; FAN, L. S.: Wake Properties of a Single Gas Bubble in a Three-Dimensional Liquid-Solid Fluidized Bed. In: *International Journal of Multiphase Flows* 14 (1988), Nr. 6, S. 749–763
- Miyahara u. a. 1991** MIYAHARA, T. ; TSUCHIYA, K. ; FAN, L. S.: Effect of Turbulent Wake on Bubble-Bubble Interaction in a Gas-Liquid-Solid Fluidized Bed. In: *Chemical Engineering Science* 46 (1991), Nr. 9, S. 2368–2373
- Miyahara und Yamanaka 1993** MIYAHARA, T. ; YAMANAKA, S.: Mechanics of Motion and Deformation of a single Bubble Rising Through Quiescent Highly Viscous Newtonian and Non-Newtonian Media. In: *Journal of Chemical Engineering of Japan* 26 (1993), Nr. 3, S. 297–302
- Narayanan u. a. 1974** NARAYANAN, S. ; GOOSSENS, L. H. J. ; KOSSEN, N. W. F.: Coalescence of Two Bubbles Rising in Line at Low Reynolds Numbers. In: *Chemical Engineering Science* 29 (1974), S. 2071–2082
- de Nevers und Wu 1971** NEVERS, N. de ; WU, J. L.: Bubble Coalescence in Viscous Fluids. In: *AIChE Journal* 17 (1971), Nr. 1, S. 182–186

- Niemann und Laurien 2000** NIEMANN, J. ; LAURIEN, E.: The Virtual Mass of Gas-Bubbles in a Liquid at High Void Fractions. In: *ERCRAFTAC Conference on Dynamics of Particle-Laden Flows, Switzerland*, 2000
- Oellrich u. a. 1973** OELLRICH, L. ; SCHMIDT-TRAUB, H. ; BRAUER, H.: Theoretische Berechnung des Stofftransports in der Umgebung einer Einzelblas. In: *Chemical Engineering Science* 28 (1973), S. 711–721
- Otake u. a. 1976** OTAKE, T. ; TONE, S. ; NAKAO, N. ; MITSUHASHI, Y.: Coalescence and Breakup of Bubbles in Liquids. In: *Chemical Engineering Science* 32 (1976), S. 377–383
- Ötzkurt 2000** ÖTZKURT, M.: *Blasenaufstieg mit Stoffaustausch unter Betriebsbedingungen der Getränkeindustrie*, Universität Paderborn, Dissertation, 2000
- Paschedag u. a. 2001** PASCHEDAG, A. ; PIARAH, W. Y. ; KRAUME, M.: Grenz-betrachtung zum Stofftransport am Einzeltropfen - Validierung numerischer Ergebnisse. In: *Chemie Ingenieur Technik* 73 (2001), Nr. 11, S. 1431–1435
- Pearson und Fortescue 1967** PEARSON, J. R. ; FORTESCUE, G. E.: On Gas Absorption into a Turbulent Liquid. In: *Chemical Engineering Science* 22 (1967), S. 1163–1176
- Peebles und Garber 1953** PEEBLES, F. N. ; GARBER, H. J.: Studies on the Motion of Gas Bubbles in Liquids. In: *Chemical Engineering Progress* 49 (1953), Nr. 2, S. 88–99
- Piarah u. a. 2001** PIARAH, W. H. ; PASCHEDAG, A. ; KRAUME, M.: Numerical Simulation of Mass Transfer between a Single Drop and an Ambient Flow. In: *AIChE Journal* 45 (2001), S. 1701–1704
- Ponoth und McLaughlin 2000** PONOTH, S. S. ; MCLAUGHLIN, J. B.: Numerical Simulation of Mass Transfer for Bubbles in Water. In: *Chemical Engineering Science* 55 (2000), S. 1237–1255

- Raymond und Rosant 2000** RAYMOND, F. ; ROSANT, J. M.: A numerical and experimental study of the terminal velocity and shape of bubbles in viscous liquid. In: *Chemical Engineering Science* 55 (2000), S. 943–955
- Rider und Kothe 1998** RIDER, W. J. ; KOTHE, D. B.: Reconstructing Volume Tracking. In: *Journal of Computational Physics* 141 (1998), S. 112–152
- Rieber und Frohn 1997** RIEBER, M. ; FROHN, A.: Navier-Stokes Simulation of Droplet Collision Dynamics. In: ZHUANG, F. G. (Hrsg.): *Proc. 7th Int. Symp. on Comp. Fluid Dynamics, Beijing, China*, 1997, S. 520–525
- Riethues u. a. 1986** RIETHUES, M. ; BUCHHOLZ, R. ; ONKEN, U. ; BUAMGÄRTL, H. ; LÜBBERS, D. W.: Determination of Oxygen Transfer from Single Air Bubbles to Liquids by Oxygen Microelectrodes. In: *Chemical Engineering* 20 (1986), S. 331–337
- Rubinstein und Leshansky 2000** RUBINSTEIN, B. Y. ; LESHANSKY, A. M.: Dynamic of Thin Liquid Films with Nonsoluble Surfactants: Weakly Nonlinear Analysis. In: *Langmuir* 16 (2000), Nr. 5, S. 2049–2051
- Runowski 2002** RUNOWSKI, T.: *Lineare Stabilitätsanalyse der Strömung einer drainierenden Schaumlamelle*, Universität Paderborn, Dissertation, 2002
- Rusche 2003** RUSCHE, H.: *Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions*, University of London, Dissertation, 2003
- Ryskin und Leal 1984a** RYSKIN, G. ; LEAL, G.: Numerical Solution of Free-Boundary Problems in Fluid Mechanics. Part 1. The Finite Difference Technique. In: *Journal of Fluid Mechanics* 148 (1984), S. 1–17
- Ryskin und Leal 1984b** RYSKIN, G. ; LEAL, G.: Numerical Solution of Free-Boundary Problems in Fluid Mechanics. Part 2. Buoyancy-Driven Motion of a Gas Bubble through a Quiescent Liquid. In: *Journal of Fluid Mechanics* 148 (1984), S. 19–35

- Ryskin und Leal 1984c** RYSKIN, G. ; LEAL, G.: Numerical Solution of Free-Boundary Problems in Fluid Mechanics. Part 3. Bubble Deformation in an Axisymmetric Straining Flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 148 (1984), S. 37–43
- Sabisch 2000** SABISCH, W.: *Dreidimensionale numerische Simulation der Dynamik von aufsteigenden Einzelblasen und Blasenschwärmen mit einer Volume-of-Fluid Methode*, Forschungszentrum Karlsruhe, Dissertation, 2000
- Sabisch u. a. 2001** SABISCH, W. ; WÖRNER, M. ; GRÖTZBACH, G. ; CACCUCI, D. G.: Dreidimensionale numerische Simulation von aufsteigenden Einzelblasen und Blasenschwärmen mit einer Volume-of-Fluid-Methode. In: *Chemie Ingenieur Technik* 73 (2001), Nr. 4, S. 368–373
- Sadhal u. a. 1997** SADHAL, S. S. ; AYYASWAMY, P. S. ; CHUNG, J. N.: *Transport Phenomena with Drops and Bubbles*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997
- Saffmann 1956** SAFFMANN, P. G.: On the Rise of Small Air Bubbles in Water. In: *Journal of Fluid Mechanics* 1 (1956), S. 249–275
- Sankaranarayanan u. a. 2003** SANKARANARAYANAN, K. ; KEVREKIDIS, I. G. ; SUNDARESAN, S. ; LU, J. ; TRYGGVASON, G.: A Comparative Study of Lattice Boltzmann and Front-Tracking Finite-Difference Methods for Bubble Simulations. In: *International Journal of Multiphase Flow* 29 (2003), S. 109–116
- Sato u. a. 2000** SATO, T. ; JUNG, R. T. ; ABE, S.: Direct Simulation of Droplet Flow with Mass Transfer at Interface. In: *Transaction of the ASME* 122 (2000), S. 510–516
- Scardovelli und Zaleski 1999** SCARDOVELLI, R. ; ZALESKI, S.: Direct Numerical Simulation of Free-Surface Flow and Interfacial Flow. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 31 (1999), S. 567–603
- Scheid u. a. 2003** SCHEID, S. ; JOHN, S. ; BORK, O. ; PARCHMANN, H. ; SCHLÜTER, M. ; RÄBIGER, N. ; SOMMERFELD, M. (Hrsg.): *Improved Model for the Calculation of Homogeneous Gas-Liquid Flows*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003

- Scheid u. a. 2002** SCHEID, S. ; SCHLÜTER, M. ; RÄBIGER, N.: Improved model for homogeneous bubble flow. In: *15th International Congress of Chemical and Process Engineering* CHISA (Veranst.), 2002
- Schlüter 2002** SCHLÜTER, M.: *Blasenbewegung in praxisrelevanten Zweiphasenströmungen*. Fortschritt-Bericht VDI, Nr. 432, 2002
- Schlüter u. a. 2001** SCHLÜTER, M. ; JOHN, S. ; SCHEID, S. ; PARCHMANN, H. ; BORK, O. ; RÄBIGER, N.: Local Effects of Hydrodynamics and Mass Transfer in Multiphase Flows. In: *Chemie Ingenieur Technik, Sonderausgabe ECCE 2001* 73 (2001), Nr. 6, S. 747–751
- Schlüter und Rübiger 1998** SCHLÜTER, M. ; RÄBIGER, N.: Bubble swarm velocity in two phase flows. In: *HTD-Vol. 361, Proceedings of the ASME Heat Transfer Division* ASME (Veranst.), 1998
- Slattery 1999** SLATTERY, J. C.: *Advanced Transport Phenomena*. Cambridge University Press, 1999
- Starke 1998** STARKE, J.: *Blasenbewegung in Ketten und viskoelastischen Flüssigkeiten*, Universität Bremen, Dissertation, 1998
- Tadaki und Maeda 1963** TADAKI, T. ; MAEDA, S.: On the Shape and Velocity of Single Air Bubbles in Various Liquids. In: *Chemical Engineering of Japan* 25 (1963), S. 254–264
- Takada u. a. 2001** TAKADA, N. ; MISAWA, M. ; TOMIYAMA, A. ; HOSOKAWA, S.: Simulation of Bubble Motion Under Gravity by Lattice Boltzmann Method. In: *Journal of Nuclear Science and Technology* 38 (2001), Nr. 5, S. 330–341
- Takagi und Matsumoto 2000** TAKAGI, S. ; MATSUMOTO, Y.: Contaminant Effekt on the Motion of a Rising Bubble. In: *Proceedings of the ASME FEDSM'00*, 2000, S. 667–672
- Takagi u. a. 1997** TAKAGI, S. ; MATSUMOTO, Y. ; HUANG, H.: Numerical Analysis of a Single Rising Bubble Using Boundary-Fitted Coordinate System. In: *JSME International Journal* 40 (1997), Nr. 1, S. 42–50

- Tau 1994** TAU, E. Y.: A Second-Order Projection Method for Incompressible Navier-Stokes Equations in Arbitrary Domains. In: *Journal of Computational Physics* 115 (1994), Nr. 147-152
- Taylor und Acrivos 1964** TAYLOR, T. D. ; ACRIVOS, A.: On the Deformation and Drag of a Falling Viscous Drop at Low Reynolds Number. In: *Journal of Fluid Mechanics* 18 (1964), S. 466-476
- Tomiyama 1998** TOMIYAMA, A.: Struggle with Computational Bubble Dynamics. In: *3rd International Conference on Multiphase Flow, ICMF'98*, 1998, S. 1-18
- Tomiyama u. a. 2002** TOMIYAMA, A. ; CELATA, G. P. ; HOSOKAWA, S. ; YOSHIDA, S.: Terminal Velocity of Single Bubbles in Surface Tension Force Dominated Regime. In: *International Journal of Multiphase Flow* 28 (2002), S. 1497-1519
- Tomiyama u. a. 1998a** TOMIYAMA, A. ; KATAOKA, I. ; ZUN, I. ; SAKAGUCHI, T.: Drag Coefficient of Single Bubbles under Normal and Micro Gravity Conditions. In: *JSME International Journal Series B*, 41 (1998), Nr. 2, S. 472-479
- Tomiyama u. a. 1998b** TOMIYAMA, A. ; MAKINO, Y. ; ZUN, I. ; SAKAHUCHI, T.: Bubble Shape Modelling for a 3D Two-Way Bubble Tracking Method. In: *3rd International Conference on Multiphase Flow, ICMF'98*, 1998
- Tomiyama u. a. 1993a** TOMIYAMA, A. ; SOU, A. ; MINAGAWA, H. ; SAKAGUCHI, T.: Numerical Analysis of a Single Bubble by VOF Method. In: *JSME International Journal* 36 (1993), Nr. 1, S. 51-56
- Tomiyama u. a. 1997** TOMIYAMA, A. ; ZUN, I. ; HIGAKI, H. ; MAKINO, Y. ; SAKAGUCHI, T.: A Three-Dimensional Particle Tracking Method for Bubbly Flow Simulation. In: *Nuclear Engineering and Design* 175 (1997), S. 77-86
- Tomiyama u. a. 1993b** TOMIYAMA, A. ; ZUN, I. ; SOU, A. ; SAKAGUCHI, T.: Numerical Analysis of Bubble Motion with VOF Method. In: *Nuclear Engineering and Design* 141 (1993), S. 69-82

- Torr und Marchello 1958** TORR, H. ; MARCHELLO, I. M.: Film-Penetration for Mass and Heat Transfer. In: *American Institute of Chemical Engineers Journal* 5 (1958), S. 97–101
- Tryggvason u. a. 1998a** TRYGGVASON, G. ; BUNNER, B. ; EBRAT, O. ; TAUBER, W.: Computations of Multiphase Flows by a Finite Difference/Front Tracking Method: I Multi-Fluid Flows. In: *29th Computational Fluid Dynamics. Lecture Series 1998-03*, 1998, S. 1–44
- Tryggvason u. a. 1997** TRYGGVASON, G. ; BUNNER, B. ; MORTAZAVI, S. ; ESMAEELI, A.: Direct Numerical Simulation of Dispersed Multiphase Flows. In: *JSME Conference*, December 1997
- Tryggvason u. a. 1998b** TRYGGVASON, G. ; ESMAEELI, A. ; MORTANZAVI, S. ; HAN, J. ; HOMMA, S.: Computations of Multiphase Flows by a Finite Difference/Front Tracking Method: II. Applications. In: *29th Computational Fluid Dynamics. Lecture Series 1998-03*, 1998, S. 1–18
- Tsuchiya und Fan 1988** TSUCHIYA, K. ; FAN, L.-S.: Near Wake Structure of a Single Gas Bubble in a Two-Dimensional Liquid Solid Fluidized Bed: Vortex Shedding and Wake Size Variation. In: *Chemical Engineering Science* 43 (1988), S. 1167–1181
- Tsuchiya u. a. 2003** TSUCHIYA, K. ; ISHIDA, T. ; SAITO, T. ; KAJISHIMA, T.: Dynamics of Interfacial Mass Transfer in a Gas-Dispersed System. In: *Canadian Journal of Chemical Engineering* 81 (2003), Nr. 3, S. 647–654
- Tsuchiya u. a. 2001** TSUCHIYA, K. ; SAITO, T. ; KAJISHIMA, T. ; KOSUGI, S.: Coupling between Mass Transfer from Dissolving Bubbles and Formation of Bubble-Surface Wave. In: *Chemical Engineering Science* 56 (2001), S. 6411–6417
- Tsuge und Hibino 1971** TSUGE, H. ; HIBINO, S. I.: The Motion of Gas Bubbles in Rising in Various Liquids. In: *Kagaku Kogaku* 35 (1971), S. 66–71
- Unverdi und Tryggvason 1992** UNVERDI, S. O. ; TRYGGVASON, G.: A Front-Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multi-Fluid Flows. In: *Journal of Computational Physics* 100 (1992), S. 25–37

- Vakhrushev und Efremov 1970** VAKHRUSHEV, I. A. ; EFREMOV, G. I.: Interpolation Formula for Computing the Velocities of Single Gas Bubbles in Liquids. In: *Chemistry and Technology of Fuels and Oils* 5/6 (1970), S. 376–379
- van Wachem und Schouten 2002** WACHEM, B. G. M. van ; SCHOUTEN, J. C.: Experimental Validation of 3-D Lagrangian VOF Model: Bubble Shape and Rise Velocity. In: *AIChE Journal* 48 (2002), Nr. 12, S. 2744–2753
- Waheed u. a. 2002** WAHEED, M. A. ; HENSCHKE, M. ; PFENNIG, A.: Mass Transfer by Free and Forced Convection from Single Spherical Liquid Drops. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 45 (2002), S. 4507–4514
- Wegener und Parlange 1973** WEGENER, P. P. ; PARLANGE, J.-P.: Spherical Cap Bubbles. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 5 (1973), S. 79–100
- Weiss 1986** WEISS, S.: *Verfahrenstechnische Berechnungsmethoden, Teil 7, Stoffwerte*. VCH, 1986
- Wesseling 1992** WESSELING, P. ; WILEY, John (Hrsg.) ; SONS, Chichester (Hrsg.): *An Introduction to Multigrid Methods*. 1992
- van Wijngaarden 1976** WIJNGAARDEN, L. van: Hydrodynamic Interaction Between Gas Bubbles in Liquid. In: *Journal of Fluid Mechanics* 44 (1976), S. 27–44
- Witelski und Bernoff 2000** WITELSKI, T. P. ; BERNOFF, A. J.: Dynamics of Three-Dimensional Thin Film Rupture. In: *Physica D* 147 (2000), S. 155–176
- Yabe und Kunii 1978** YABE, K. ; KUNII, D.: Dispersion of Molecules Diffusing from a Gas Bubble into a Liquid. In: *Journal of Chemical Engineering of Japan* 18 (1978), Nr. 4, S. 666–671
- Yiangtsios und Davis 1991** YIANGTSIOS, S. G. ; DAVIS, R. H.: Close Approach and Deformation of Two Viscous Drops Due to Gravity and van der Waals Forces. In: *Journal of Colloid and Interface Science* 144 (1991), Nr. 2, S. 412–433

Zhang u. a. 2001 ZHANG, Y. ; McLAUGHLIN, J. B. ; J.A.FINCH: Bubble Velocity Profile and Model of Surfactant Mass Transfer to Bubble Surface. In: *Chemical Engineering Science* 56 (2001), S. 6605–6616