Über numerische Invarianten in der algebraischen Komplexitätstheorie

Zusammenfassung

Es ist in der Mathematik üblich, mathematische Objekte mit Hilfe numerischer Invarianten zu klassifizieren. Numerische Invarianten können im Zusammenhang mit der Komplexitätstheorie auf zwei Arten auftreten. Auf der einen Seite werden mathematische Invarianten benutzt, um *untere Komplexitätsschranken* zu beweisen: sie fungieren als Obstruktionen für die Existenz schneller Algorithmen zur Lösung gewisser Probleme. Andererseits ist es oft auch interessant, die Berechnungskomplexität solcher Invarianten selbst zu untersuchen. Im ersten Teil dieser Arbeit geht es darum, untere Komplexitätsschranken für die Berechnung von linearen und bilinearen Abbildungen zu finden. Die dabei benutzten Invarianten, nämlich das *mittlere quadratische Volumen*, *Singulärwerte* und *Rigidität*, gehören zum Gebiet der linearen Algebra. Eines der Hauptresultate ist eine scharfe untere Schranke der Ordnung $O(n \log n)$ für das Problem der Polynommultiplikation im Modell der Schaltkreise mit beschränken Koeffizienten. Dieses Resultat wird auf Schaltkreise mit einer begrenzten Anzahl unbeschränkter Koeffizienten (Hilfsgatter) erweitert. Im zweiten Teil dieser Arbeit geht es um die Komplexität der Berechnung von numerischen Invarianten. Die untersuchten Objekte sind zwei der prominentesten Invarianten der algebraischen Geometrie und Topologie: die *Eulercharakteristik* und das *Hilbertpolynom* von komplex-projektiven Varietäten. Diese Probleme werden im Rahmen der Zählkomplexitätstheorie untersucht. Es wird gezeigt, dass das Problem, die Eulercharakteristik zu berechnen, im wesentlichen genauso schwierig ist, wie das Problem, die Anzahl Lösungen eines Systems von Polynomgleichungen zu berechnen. Ein ähnliches Resultat wird für das Hilbertpolynom gezeigt, allerdings unter der Voraussetzung, dass die Eingabevarietät glatt und äquidimensional ist.