# Zusammenfassung


Die lineare Programmierung (LP) ist heute die vermutlich meist genutzte Optimierungstechnik in Wirtschaft und Wissenschaft. Während der letzten fünfzehn Jahre hat sich die duale Simplexmethode zu einem der wichtigsten Lösungsverfahren für große LP Probleme entwickelt. Sie ist außerdem ein unverzichtbarer Bestandteil von Branch-and-Cut-Verfahren, die zur Lösung von gemischt-ganzzahligen Problemen eingesetzt werden.

Trotz ihres erfolgreichen Einsatzes und ihrer Bedeutung für die zukünftige Forschung im Bereich der linearen Programmierung gibt es bis heute relativ wenige wissenschaftliche Veröffentlichungen zum dualen Simplexverfahren. Insbesondere wurden mathematische und numerische Verbesserungen des dualen Simplexalgorithmus bisher kaum aus Implementierungssicht diskutiert. Das Fehlen von Veröffentlichungen über wichtige Implementierungsdetails hat zu einem großen Leistungsvorsprung von kommerziellen LP-Systemen im Vergleich zu Open-Source- und Forschungscodes geführt.

In dieser Arbeit präsentieren wir die mathematischen Algorithmen, numerischen Techniken und Implementierungsdetails, die die Schlüsselfaktoren bei der Entwicklung unseres dualen Simplexcodes waren, um diesen Vorsprung wettzumachen. Drei Bereiche werden dabei besonders ausführlich behandelt: 1. Die duale Phase I. 2. Die Ausnutzung von Hypersparsity. 3. Die Implementierung des dualen Pricingschrittes und des dualen Quotiententests.

In unserer Untersuchung von Verfahren der dualen Phase I zeigen wir, dass die Aufgabe der Minimierung der dualen Unzulässigkeiten explizit als Unterproblem modelliert und direkt mit der dualen Phase II gelöst werden kann. Dieser Unterproblemansatz ist wesentlich einfacher zu implementieren und dabei ebenso leistungsfähig wie der bekannte algorithmische Ansatz. Weiterhin schlagen wir eine neue Methode vor, die das duale Phase I Verfahren von Pan mit dem Unterproblemansatz kombiniert und den anderen Verfahren in unseren numerischen Tests überlegen ist. Außerdem diskutieren wir den Einfluss des LP-Preprocessing auf die duale Zulässigkeit der Startbasis.

Unsere Verfahren zur Lösung der benötigten linearen Gleichungssysteme basieren auf einer LU-Faktorisierung der Basismatrix, die in den FTran und BTran Operationen nur eine statt zwei Permutationsmatrizen benötigt. In diesem Rahmen liefern wir die erste ausführliche Beschreibung von Verfahren zur Ausnutzung von Hypersparsity im dualen Simplexalgorithmus.

Die Arbeit enthält mehrere Techniken, die der Lösung von numerisch schwierigen LP Problemen und der Reduzierung der Anzahl degenerierter Iterationen dienen. In diesem Bereich besteht der Hauptbeitrag in der konzeptionellen Integration und ausgefeilten Implementierung der dualen Version von Harris' Quotiententest und Techniken zum Schrankentausch und zur dynamischen Veränderung von Zielfunktionskoeffizienten. Desweiteren sprechen wir wichtige Implementierungsaspekte des dualen Steepest-Edge Pricings an und zeigen, wie die primalen Unzulässigkeiten effizient in einem Vektor verwaltet werden können.

Schließlich weisen wir in einer umfangreichen numerischen Studie nach, dass unser dualer Simplexcode den besten existierenden Open-Source- und Forschungscodes überlegen ist und bei der Lösung unserer schwierigsten Testprobleme mit den führenden kommerziellen Codes mithalten kann.