

Über die Komplexität des Zählens irreduzibler Komponenten und der Berechnung von Bettizahlen algebraischer Varietäten

Zusammenfassung

Im ersten Teil dieser Dissertation stellen wir eine einheitliche Methode für die beiden Probleme $\#CC_{\mathbb{C}}$ und $\#IC_{\mathbb{C}}$ des Zählens der Zusammenhangs- bzw. irreduziblen Komponenten komplexer algebraischer Varietäten vor. Unsere Algorithmen sind rein algebraisch und arbeiten in parallel polynomieller Zeit, d.h. sie können durch algebraische Schaltkreise polynomieller Tiefe implementiert werden.

Der zweite Teil enthält untere Schranken in Form von Schwierigkeitsresultaten. Insbesondere zeigen wir, dass folgendes Problem PSPACE-schwer ist: Entscheide, ob eine über den rationalen Zahlen gegebene affine oder projektive Varietät zusammenhängend ist. Dieses Resultat verallgemeinern wir auch auf höhere Bettizahlen.

Im dritten Teil untersuchen wir die Abhängigkeit der Komplexität von $\#IC_{\mathbb{C}}$ von seinen kombinatorischen Parametern. Es stellt sich heraus, dass der entscheidende Komplexitätsparameter die Anzahl der Gleichungen ist. Diese Tatsache wird illustriert durch unser Resultat, dass man die absolut irreduziblen Faktoren eines multivariaten Polynoms in parallel polylogarithmischer Zeit zählen kann.

Darüber hinaus zeigen wir, dass man $\#IC_{\mathbb{C}}$ für eine feste Anzahl von Gleichungen im BSS-Modell in polynomieller und im Turing-Modell randomisiert in parallel polylogarithmischer Zeit lösen kann. Diese Resultate gelten auch für Polynome, die durch Straight-Line-Programme gegeben sind, wenn man deren Länge und Grad als Eingabeparameter betrachtet.