# Zusammenfassung

Ist $X$ ein Messraum und $f : X \to X$ eine messbare Abbildung, so ist der Transferoperator zu $f$ eine lineare Abbildung $P_f : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$, wobei $\mathcal{M}(X)$ ein geeignet gewählter Vektorraum von Maßen über $X$ ist und $P_f$ durch die Vorschrift $P_f\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ für alle messbaren Mengen $A$ und alle Maße $\mu \in \mathcal{M}(X)$ definiert wird.

In dieser Dissertation werden Transferoperatoren für eine spezielle Klasse von Abbildungen betrachtet, nämlich jene, die ein *coupled cell system*[3] beschreiben. Ein solches ist ein auf einem *coupled cell network* zulässiges dynamisches System. Dieses Konzept wird in anwendungsorientierten wie in theoretischen Arbeiten verwendet, um dynamische Systeme zu beschreiben, die aus einzelnen Teilen (genannt Zellen) aufgebaut sind, die sich gegenseitig in der zeitlichen Entwicklung ihrer inneren Zustände beeinflussen. Der Zustandsraum $X$ des *coupled cell system* ist damit das kartesische Produkt der Zustandsräume $X_c$ der einzelnen Zellen, und jede einzelne Komponentenabbildung $f_c$ kann von $c$ und mehreren anderen Zellen abhängen.

Die Struktur des einem *coupled cell system* unterliegenden Kopplungsnetzwerks kann mit Hilfe seines sogenannten Symmetriegruppoiden algebraisch beschrieben werden. Die Zulässigkeit einer Abbildung $f$ auf einem Netzwerk lässt sich dann als Äquivarianz der Abbildung in Bezug auf eine bestimmte Wirkung des Gruppoiden ausdrücken. Im Falle eines dynamischen Systems mit "klassischen", durch die Äquivarianz in Bezug auf die Wirkung einer Gruppe ausgedrückten Symmetrien ziehen die Ergebnisse der linearen Darstellungstheorie Implikationen für ein System nach sich, die weit reichende Beschreibungen seiner Dynamik erlauben. Insbesondere lässt sich zeigen, dass der Transferoperator aufgrund der Symmetrie bestimmte Unterräume invariant lässt.

Im Hinblick auf diese Ergebnisse ist es das Ziel dieser Dissertation, die strukturellen Konsequenzen zu beschreiben, die die Äquivarianz in Bezug auf die Wirkung des Symmetriegruppoiden für den Transferoperator eines *coupled cell system* nach sich zieht. Wie lassen sich strukturelle Eigenschaften der Abbildung $f$ in Eigenschaften von $P_f$ übersetzen? Zur Beantwortung dieser Fragen wird eine Zerlegung des Maßraumes $\mathcal{M}(X)$ in eine direkte Summe von durch die Teilmengen $\mathcal{D}$ der Menge der Zellen parametrisierten Unterräumen $U_{\mathcal{D}}$ eingeführt, die es erlaubt, die Kopplungsstruktur des Netzes in der zugehörigen Blockzerlegung des Transferoperators wiederzufinden.

Weiterhin wird zur Analyse der Symmetriebeziehungen dem Symmetriegruppoiden des Netzwerks eine Familie von Symmetriegruppen $\Gamma_{\mathcal{D}}$ für Teilmengen von Zellen zugeordnet, die es erlauben, klassische Ergebnisse der Darstellungstheorie

[3] Der Autor hat auch nach längerer Suche keinen Beleg für eine Verwendung deutschsprachiger Äquivalente der Begriffe *coupled cell network* und *coupled cell system* in deutschsprachigen Texten gefunden, und zieht es daher vor, die in der Originalliteratur verwendeten Termini für die Zwecke dieser Zusammenfassung unübersetzt zu belassen.

von Gruppen zu nutzen, um weitere Strukturmerkmale des Transferoperators zu bestimmen.
Der direkten Verwendung der theoretischen Ergebnisse in einem numerischen Verfahren zur Berechnung einer Näherung an den Transferoperator steht die Tatsache entgegen, dass übliche Methoden für eine solche Berechnung die Verwendung von Basen von $\mathcal{M}(X)$ voraussetzen, die auf eine bestimmte Weise aus Diskretisierungen des Zustandsraumes $X$ hervorgehen. Diese Basen scheinen unverträglich mit der Zerlegung von $\mathcal{M}(X)$ zu sein. Die diesem Problem zu Grunde liegenden Ursachen werden detailliert erklärt; weiterhin wird eine alternative Methode für die effiziente Berechnung von $P_f$ skizziert.