



UNIVERSITÄT PADERBORN

Dissertation

**Optimierung von Wasserbehältern in einem  
Wasserversorgungssystem mittels einer Kombination  
aus Netzreduktion, mathematischer Optimierung und  
hydraulischer Simulation**

Dipl.-Math. Corinna Hallmann

Schriftliche Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades  
Doctor rerum politicarum (Dr. rer. pol.)  
im Fach Wirtschaftsinformatik eingereicht an der

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der  
Universität Paderborn

Paderborn, September 2015

Gutachter:

1. Prof. Dr. Leena Suhl
2. Prof. Dr. Achim Koberstein



## Danksagung

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am DS&OR Lab der Universität Paderborn. An dieser Stelle möchte ich den Personen danken, die mich bei der Fertigstellung dieser Dissertation unterstützt haben.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Betreuerin Prof. Dr. Leena Suhl für die Ermöglichung der Promotion und die kontinuierliche Unterstützung in jeglicher Hinsicht sowie für die überaus angenehme und kreative Arbeitsatmosphäre. Auch danken möchte ich Prof. Dr. Achim Koberstein für die Übernahme des Zweitgutachtens sowie für die Unterstützung auch schon während der Anfertigung meiner Diplomarbeit.

Bedanken möchte ich mich außerdem bei dem Team vom Rechenzentrum für Versorgungsnetze Wehr GmbH für die spannenden Einblicke in die Welt des Wassers sowie für die Versorgung mit Praxisdaten. Insbesondere danken möchte ich hier Dr. Dirk König, Dr. Peter Ingerfeld und Dr. Piet Hensel für die angenehme Zusammenarbeit.

Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei den aktuellen und ehemaligen Kollegen und Mitarbeitern des DS&OR Labs für das sehr freundschaftliche Arbeitsklima und die tolle Zeit. Insbesondere möchte ich hierbei meinen Bürokollegen danken, Stefan Kramkowski für die wertvollen Diskussionen und die Gründung des Chocolate Wednesdays und Florian Isenberg für die vielen interessanten Gespräche und die stets positive Atmosphäre im Büro. Weiterhin danken möchte ich Florian Stapel für die freundschaftliche Zusammenarbeit schon seit dem gemeinsamen Mathematik-Studium und Lars Beckmann für die wertvolle Hilfestellung bei der Implementierung.

Ein großes Dankeschön geht auch an die Studierenden, die mir bei der Umsetzung vieler Ideen behilflich waren. Stellvertretend dafür möchte ich mich insbesondere bei Michaela Beckschäfer, Sascha Burmeister und Andreas Hübner für die kreative Unterstützung bedanken.

Ich danke meiner Familie und meinen Freunden für die liebevolle Unterstützung nicht nur während der Zeit der Promotion. Abschließend möchte ich natürlich nicht vergessen, ganz besonders meinem Mann Tobias zu danken. Danke, dass du immer für mich da bist!

Corinna Hallmann  
Paderborn, September 2015



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Inhalt und Aufbau dieser Arbeit . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Trinkwasserversorgungssysteme . . . . .	7
2.1.1	Wassergewinnung . . . . .	8
2.1.2	Wasserspeicherung . . . . .	8
2.1.3	Wasserverteilung . . . . .	13
2.1.4	Wassergebrauch . . . . .	16
2.2	Wasserversorgungssystem als Graph . . . . .	20
2.2.1	Grundlegende Begriffe der Graphentheorie . . . . .	20
2.2.2	Wassernetzkomponenten im Graphen . . . . .	20
2.2.3	Netzarten . . . . .	21
2.3	Hydraulik . . . . .	22
2.4	Grundbegriffe der mathematischen Optimierung . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Stand der Forschung und Handlungsbedarf</b>	<b>29</b>
3.1	Optimierungsmodelle im Bereich von Wasserversorgungssystemen in der Forschungsliteratur . . . . .	29
3.1.1	Operative Entscheidungsprobleme . . . . .	29
3.1.2	Strategische Entscheidungsprobleme . . . . .	31
3.1.3	Kombination aus operativen und strategischen Entscheidungsproblemen . . . . .	33
3.1.4	Zusammenfassung . . . . .	35
3.2	Lösungsansätze für Optimierungsmodelle im Bereich von Wasserversorgungssystemen in der Forschungsliteratur . . . . .	37
3.2.1	LP- und NLP-basierte Lösungsverfahren . . . . .	37
3.2.2	Heuristische Lösungsverfahren . . . . .	45
3.2.3	Zusammenfassung . . . . .	50
3.3	Handlungsbedarf und Ziele dieser Arbeit . . . . .	53
3.3.1	Handlungsbedarf . . . . .	53
3.3.2	Ziele dieser Arbeit . . . . .	55

<b>4</b>	<b>Optimierung</b>	<b>59</b>
4.1	Optimierungsmodell zur Planung von Trinkwasserbehältern . . . . .	59
4.2	Testinstanzen . . . . .	68
4.3	Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung eines Simulated Annealing-Algorithmus . . . . .	72
4.4	Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung von Linearisierungs- techniken . . . . .	76
4.4.1	Konvexkombinations-Methode . . . . .	77
4.4.2	Inkrementelle Methode . . . . .	79
4.4.3	Vergleich der beiden Methoden . . . . .	81
4.4.4	Wahl des Definitionsbereichs und der Stützstellen . . . . .	82
4.5	Fazit und Zusammenfassung . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Netzreduktion</b>	<b>99</b>
5.1	Netzreduktionstechniken . . . . .	99
5.1.1	Eliminierung von Endknoten . . . . .	100
5.1.2	Eliminierung von Rohrsequenzen . . . . .	103
5.1.3	Eliminierung von parallelen Rohren . . . . .	110
5.2	Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken . . . . .	112
5.2.1	Anwendung der Netzreduktionstechniken auf Netzmodelle mit Endknoten und Rohrsequenzen . . . . .	113
5.2.2	Anwendung der Reduktionstechniken auf Netzmodelle mit Rohr- sequenzen . . . . .	117
5.2.3	Anwendung der Reduktionstechniken auf ein vermaschtes Netz- modell . . . . .	119
5.2.4	Ergebnisse der restlichen Netze . . . . .	121
5.3	Ergebnisse der Kombination aus Netzreduktion und Optimierung . . .	126
5.4	Fazit und Zusammenfassung . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Simulation und Modifikation</b>	<b>133</b>
6.1	Simulation . . . . .	133
6.1.1	Beschreibung des hydraulischen Simulators . . . . .	133
6.1.2	Verwendung des hydraulischen Simulators . . . . .	136
6.2	Modifikation . . . . .	139
6.2.1	Ergebnisse der Netzmodelle, bei denen durch den Einsatz des Modifikationsschrittes ein zeitlicher Vorteil erreicht werden konnte	140
6.2.2	Ergebnisse der Netzmodelle, bei denen durch den Einsatz des Modifikationsschrittes kein zeitlicher Vorteil erreicht werden konnte . . . . .	143
6.2.3	Zusammenfassung der Ergebnisse nach Einsatz des Modifika- tionsschrittes . . . . .	147

6.3	Auswirkungen von Linearisierungsschranke und Reduktionsschranke . .	148
6.3.1	Ergebnisse der Auswirkungen der Linearisierungsschranke . . . .	148
6.3.2	Ergebnisse der Auswirkungen der Linearisierungsschranke und der Reduktionsschranke . . . . .	149
6.4	Fazit und Zusammenfassung . . . . .	153
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>155</b>
7.1	Zusammenfassung . . . . .	155
7.2	Ausblick . . . . .	158
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>161</b>





# Abbildungsverzeichnis

1.1	Entwicklung des Haushaltswassergebrauchs in Deutschland in den Jahren 1990 bis 2012, in Litern pro Einwohner und Tag, Quelle: BDEW . . .	2
1.2	Prognose und tatsächliche Entwicklung des Haushaltswassergebrauchs in Deutschland, in Litern pro Einwohner und Tag, Quelle: BDEW . . .	2
1.3	Wasservorkommen und Wassernutzung in Deutschland im Jahr 2010, nach [Baumgarten, 2014] . . . . .	3
2.1	Schematische Abbildung eines Wasserversorgungsnetzes . . . . .	8
2.2	Grundformen von Wassertürmen, nach DVGW-Merkblatt W 315 . . . .	11
2.3	Schematische Aufteilung des Speicherinhalts eines Wasserbehälters, nach [Rautenberg et al., 2014] . . . . .	14
2.4	Übersicht verschiedener Leitungen in einem Wasserversorgungssystem, vgl. [DVGW, 2004], S. 18 . . . . .	15
2.5	Verteilung der Trinkwasserabgabe in Deutschland nach Kundengruppen im Jahresvergleich 1990 und 2011, Quelle: BDEW . . . . .	17
2.6	Prozentualer Anteil des Wassergebrauchs eines jeden Monats vom Gesamtjahresverbrauch in Stuttgart im Jahr 2006, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 23 . . . . .	18
2.7	Wassernachfrage in Paderborn am Tag des Aufstiegsspiels des SC Paderborn 07 in die 1. Bundesliga am 11.05.2014, Quelle: Wasserwerke Paderborn GmbH . . . . .	19
2.8	Wassernachfrage in Paderborn am Tag des Fußball-WM-Finales Deutschland gegen Argentinien am 13.07.2014, Quelle: Wasserwerke Paderborn GmbH . . . . .	19
2.9	Beispiel für ein Verästelungsnetz, ein Ringnetz und ein Ringnetz mit Vermaschung, nach [Karger et al., 2008] . . . . .	21
2.10	Beispiel für eine Pumpenkennlinie . . . . .	27
3.1	Schematischer Ablauf des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Verfahrens . . . . .	58
4.1	Grafische Darstellung von Netz S09 . . . . .	69
4.2	Grafische Darstellung von Netz M02 . . . . .	70
4.3	Grafische Darstellung von Netz L05 . . . . .	71
4.4	Screenshot des entwickelten Prototyps . . . . .	71

4.5	Stückweise Linearisierung einer Funktion $f$ . . . . .	77
4.6	Stückweise Linearisierung einer Funktion $f$ mit der Konvexkombinations-Methode . . . . .	80
4.7	Stückweise Linearisierung einer Funktion $f$ mit der inkrementellen Methode . . . . .	82
4.8	Gleichmäßige Verteilung der Stützstellen der Approximation an die Funktion $f$ . . . . .	85
4.9	Maximaler Unterschätzer $\varepsilon_u$ und maximaler Überschätzer $\varepsilon_o$ einer Funktion $f$ mit Approximation $\phi$ , nach [Geißler, 2011] . . . . .	86
4.10	Ungleichmäßige Verteilung der Stützstellen der Approximation der Funktion $f$ . . . . .	87
4.11	Vergleich der Lösungszeit der verschiedenen Lösungstechniken anhand der Testnetze . . . . .	96
5.1	Ein Endknoten $m$ und die zugehörigen Flüsse und Fließrichtungen . . . . .	101
5.2	Eliminierung von Endknoten . . . . .	102
5.3	Beispiel: Eliminierung von Endknoten . . . . .	103
5.4	Verschiedene Rohrsequenzen der Rohre $(i, m)$ und $(m, j)$ und die zugehörigen Flüsse und Fließrichtungen . . . . .	104
5.5	Eliminierung einer Rohrsequenz mit $D_m = 0$ . . . . .	105
5.6	Beispiel: Eliminierung einer Rohrsequenz mit $D_m = 0$ . . . . .	106
5.7	Eliminierung einer Rohrsequenz mit $D_m > 0$ und gleichmäßiger Fließrichtung . . . . .	108
5.8	Beispiel: Eliminierung einer Rohrsequenz mit $D_m > 0$ und gleichbleibender Fließrichtung . . . . .	108
5.9	Eliminierung einer Rohrsequenz mit $D_m > 0$ und beidseitigem Zufluss . . . . .	109
5.10	Beispiel: Eliminierung einer Rohrsequenz mit $D_m > 0$ und beidseitigem Zufluss . . . . .	110
5.11	Eliminierung von parallelen Rohren . . . . .	111
5.12	Beispiel: Eliminierung von parallelen Rohren . . . . .	111
5.13	Anwendung der Reduktionstechniken auf das Netzmodell S09 . . . . .	114
5.14	Anwendung der Reduktionstechniken auf das Netzmodell L01 . . . . .	116
5.15	Anwendung der Reduktionstechniken auf das Netzmodell M02 . . . . .	118
5.16	Anwendung der Reduktionstechniken auf das Netzmodell L02 . . . . .	119
5.17	Anwendung der Reduktionstechniken auf das Netzmodell M07 . . . . .	120
5.18	Nicht reduzierbarer Anteil der Kanten nach Anwendung aller Reduktionstechniken auf die Netzmodelle . . . . .	124
5.19	Nicht reduzierbarer Anteil der Kanten nach Anwendung einer einzelnen Reduktionstechnik auf die Netzmodelle . . . . .	125
5.20	Nicht reduzierbarer Anteil der Kanten nach Anwendung einer Kombination aus zwei Reduktionstechniken auf die Netzmodelle . . . . .	126

5.21 Benötigte Lösungszeit der reduzierten Netzmodelle im Vergleich zur  
Lösungszeit der originalen Netzmodelle . . . . . 129



## Tabellenverzeichnis

2.1	Vor- und Nachteile der Behälterarten . . . . .	12
2.2	Parameter der Darcy-Weisbach-Gleichung . . . . .	23
3.1	Übersicht über die Literatur, die operative Fragestellungen behandelt .	35
3.2	Übersicht über die Literatur, die strategische Fragestellungen behandelt	36
3.3	Übersicht über die Literatur, die eine Kombination aus operativen und strategischen Fragestellungen behandelt . . . . .	36
3.4	Übersicht über die in der Literatur verwendeten Lösungsansätze . . . .	52
4.1	Mengen des Optimierungsmodells . . . . .	65
4.2	Parameter des Optimierungsmodells . . . . .	65
4.3	Variablen des Optimierungsmodells . . . . .	66
4.4	Eigenschaften der Testinstanzen . . . . .	68
4.5	Ergebnisse nach Anwendung des Simulated Annealing-Algorithmus . .	76
4.6	Untersuchung der Wahl des Definitionsbereichs und der Stützstellen bei Netz S09 . . . . .	88
4.7	Untersuchung der Wahl des Definitionsbereichs und der Stützstellen bei Netz M02 . . . . .	90
4.8	Untersuchung der Wahl des Definitionsbereichs und der Stützstellen bei Netz L01 . . . . .	91
4.9	Untersuchung der Wahl der Stützstellen . . . . .	95
5.1	Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf das Netzmodell S09 . . . . .	114
5.2	Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf das Netzmodell L01 . . . . .	115
5.3	Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf das Netzmodell M02 . . . . .	117
5.4	Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf das Netzmodell L02 . . . . .	118
5.5	Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf das Netzmodell M07 . . . . .	120
5.6	Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf die Netzmodelle . . . . .	123

5.7	Ergebnisse der Netzmodelle, bei denen eine deutliche Verbesserung der Lösungszeit nach Anwendung der Kombination aus Netzreduktion und Optimierung erzielt werden konnte . . . . .	128
5.8	Ergebnisse der Netzmodelle, bei denen keine Verbesserung der Lösungszeit nach Anwendung der Kombination aus Netzreduktion und Optimierung erzielt werden konnte . . . . .	131
6.1	Ergebnisse aller Netzmodelle nach Integration der Simulation . . . . .	139
6.2	Ergebnisse aus Reduktion, Optimierung, Simulation und Modifikation am Beispiel von M02 . . . . .	141
6.3	Ergebnisse aus Reduktion, Optimierung, Simulation und Modifikation am Beispiel von Netz L02 . . . . .	142
6.4	Ergebnisse aus Reduktion, Optimierung, Simulation und Modifikation am Beispiel von Netz S06 . . . . .	144
6.5	Ergebnisse aus Reduktion, Optimierung, Simulation und Modifikation am Beispiel von Netz S08 . . . . .	145
6.6	Ergebnisse aus Reduktion, Optimierung, Simulation und Modifikation am Beispiel von Netz S09 . . . . .	146
6.7	Auswirkung der Linearisierungsschranke am Beispiel von Netz S08 . . . . .	149
6.8	Auswirkung der Reduktionsschranke am Beispiel von Netz M02 mit einer Linearisierungsschranke von 3,0 . . . . .	150
6.9	Auswirkung der Reduktionsschranke am Beispiel von Netz M02 mit einer Linearisierungsschranke von 0,3 . . . . .	150
6.10	Auswirkung der Reduktionsschranke am Beispiel von Netz M02 mit einer Linearisierungsschranke von 0,03 . . . . .	151
6.11	Auswirkung der Reduktionsschranke am Beispiel von Netz M02 mit einer Linearisierungsschranke von 0,003 . . . . .	152

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

„Wasser ist die unverzichtbare Grundlage allen Lebens und insbesondere der menschlichen Zivilisation. Trinkwasser spielt dabei eine besondere Rolle, da es als Lebensmittel durch nichts ersetzt werden kann.“, [Rautenberg et al., 2014], S. 3. „Die Bereitstellung von Trinkwasser in der erforderlichen Qualität und Menge ist Grundlage für menschliche Gesundheit, wirtschaftliche Entwicklung und Wohlstand.“, [Mutschmann und Stimmelmayer, 2007], S. 4. Aus diesem Grund ist eine funktionierende Trinkwasserversorgung ein wichtiger Bestandteil einer modernen Industriegesellschaft, vgl. [Mutschmann und Stimmelmayer, 2007], S. 4. Für die Wasserversorgung und Abwasserentsorgung in den ca. 2300 Wasserversorgungsgebieten in Deutschland sind die Kommunen verantwortlich. Die damit verbundenen Aufgaben übernehmen hauptsächlich kommunale oder privatwirtschaftliche Wasserversorgungsunternehmen, die sich in den letzten Jahren einem wachsenden Kostendruck gegenüber gestellt sehen, vgl. [Nickel et al., 2013], S. 1 oder [Scheele, 2006], S. 5.

Dieser zunehmende Kostendruck hat verschiedene Ursachen. Zum einen leiden die Kommunen unter Finanzproblemen, was sich auch auf die Wasserversorgung auswirken kann, vgl. [Scheele, 2006], S. 5 oder [Brackemann et al., 2000], S. 6. Zum anderen ist auch die anhaltende öffentliche Diskussion über die Angemessenheit von Wasserpreisen ein entscheidender Faktor. Damit zusammenhängend ist die Anwendbarkeit des Kartellrechts auf die Wasserversorger und damit die Rechtfertigung für überhöhte Entgelte zu nennen, was für zusätzlichen Kostendruck sorgt, vgl. [Nickel et al., 2013], S. 1. Eine Liberalisierung des Wassermarktes, über die seit Jahren diskutiert wird, kann ebenfalls zu einem höheren Kostendruck führen. Eine Liberalisierung hätte eine Aufhebung der heutigen Gebietsmonopole zur Folge und damit würde ein unmittelbarer Wettbewerb auf dem Wassermarkt ermöglicht werden. Zwar könnten dadurch Aufgaben effektiver und wirtschaftlicher erledigt werden sowie Kapital einfacher zur Verfügung stehen, vgl. [Brackemann et al., 2000], S. 6. Jedoch steht zu befürchten, dass langfristig eine Beeinträchtigung der Qualität des Trinkwassers auftritt, die durch den erhöhten Preisdruck entsteht, vgl. [Brackemann et al., 2000], S. 6 und S. 60. Eine wichtige Rolle spielt auch der sinkende Wassergebrauch in Deutschland. Wie in Abbildung 1.1 zu sehen, ist der Wassergebrauch in Deutschland seit 1990 von 147 Litern pro Einwohner und Tag auf 121 Liter pro Einwohner und Tag im Jahre 2012 gesunken.

## 1 Einleitung

Im Gegensatz dazu erwarteten verschiedene Prognosen aus den Jahren 1972, 1976 und 1980 einen zunehmenden Wassergebrauch von 193-219 Litern pro Einwohner und Tag im Jahre 2000, siehe Abbildung 1.2 und [Baumgarten, 2014], S. 23.

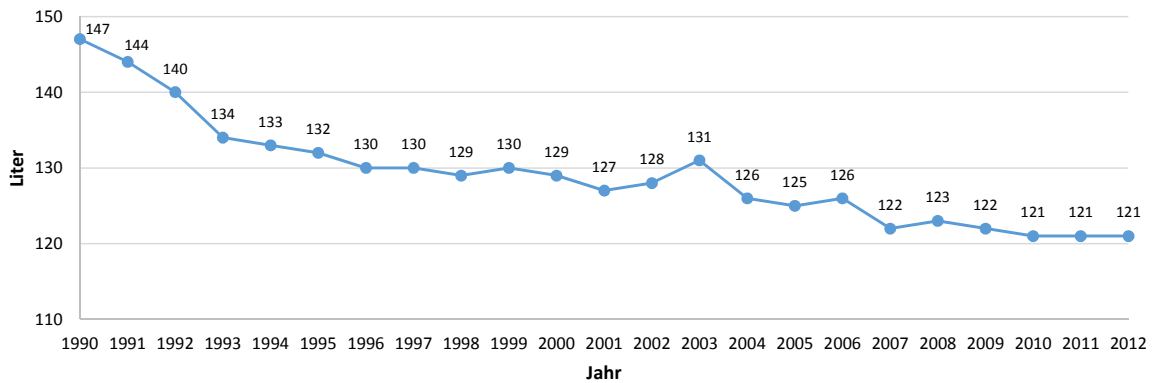


Abbildung 1.1: Entwicklung des Haushaltswassergebrauchs in Deutschland in den Jahren 1990 bis 2012, in Litern pro Einwohner und Tag, Quelle: BDEW

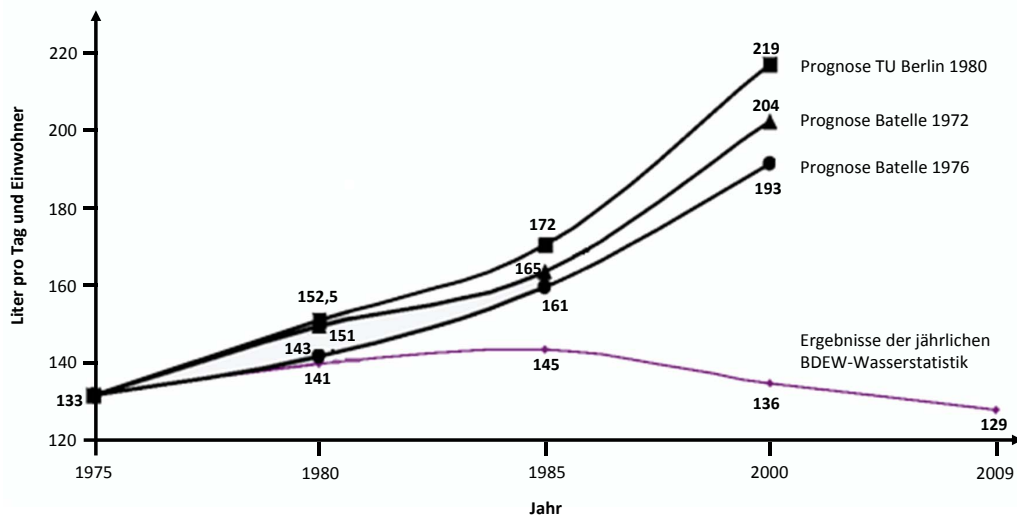


Abbildung 1.2: Prognose und tatsächliche Entwicklung des Haushaltswassergebrauchs in Deutschland, in Litern pro Einwohner und Tag, Quelle: BDEW

Aus diesem Grund wurden Wasserversorgungssysteme so ausgelegt, dass sie auch diese steigenden Gebrauchswerte bedienen können. In vielen Fällen sind daher viele Komponenten wie zum Beispiel Trinkwasserbehälter oder Rohre für die heutigen Gebrauchswerte überdimensioniert, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 13. In manchen, insbesondere ländlichen Regionen wird diese Tatsache auch durch demographische Verschiebungen verschärft, vgl. [Baumgarten, 2014], S. 23. In vielen Fällen kann es daher zu



Qualitätsbeeinträchtigungen als Folge von zu langen Aufenthaltszeiten des Wassers in den verschiedenen Anlagen kommen, vgl. [DIN2000, 2000], S. 7. Es gibt prinzipiell zwei Möglichkeiten, hygienische und technische Probleme durch zu geringe Auslastung zu vermeiden. Langfristig können die betroffenen Komponenten ausgetauscht werden, was mit erheblichen Kosten verbunden ist. Kurzfristig müssen die Wasserversorgungsunternehmen Spülungen der Rohre vornehmen, um Ablagerungen in den Rohren zu vermeiden und den regelmäßigen Wasseraustausch in den Behältern zu gewährleisten. Insgesamt bedeutet dies aber einen erhöhten Aufwand im operativen Betrieb, vgl. [VKU, 2011], S. 7. Aus diesem Grund vertreten viele Wasserversorgungsunternehmen in Bezug auf Wassersparmaßnahmen die Auffassung, dass ausreichend Wasser gespart würde und weitere Sparmaßnahmen sogar kontraproduktiv seien, vgl. [Baumgarten, 2014], S. 4. Zudem seien die Einsparpotenziale der öffentlichen Wasserversorgung bezogen auf das verfügbare Wasservorkommen in Deutschland relativ gering, vgl. [Baumgarten, 2014], S. 15. So werden in Deutschland von den verfügbaren 188 Mrd.  $m^3$  Wasser lediglich 2,7 % für die öffentliche Wasserversorgung genutzt, was in Abbildung 1.3 zu erkennen ist.

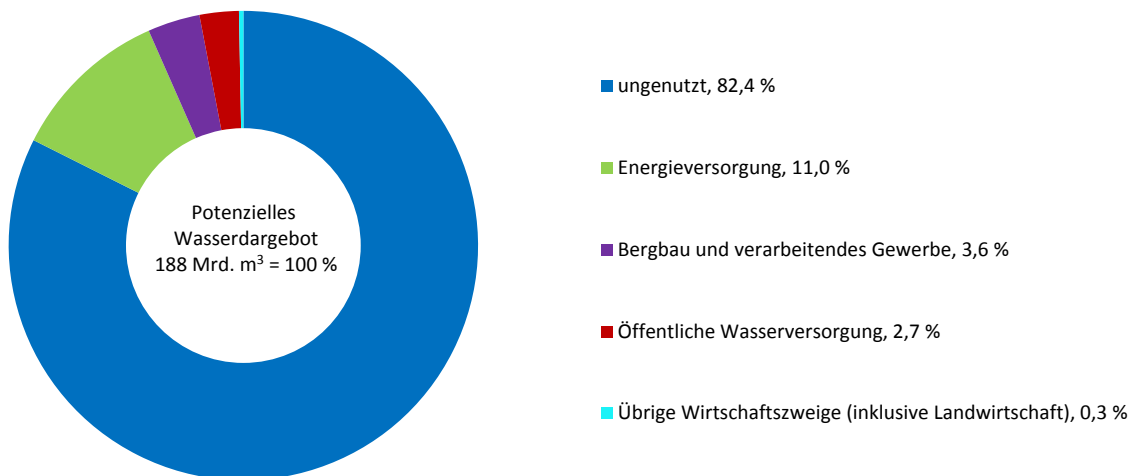


Abbildung 1.3: Wasservorkommen und Wassernutzung in Deutschland im Jahr 2010, nach [Baumgarten, 2014]

Zusammenfassend stehen die Wasserversorgungsunternehmen also vor der Aufgabe, die Kosten zu senken und die Effizienz der Komponenten der Wasserversorgungssysteme zu steigern. Eine Möglichkeit, die Wasserversorgungsunternehmen bei dieser Aufgabe zu unterstützen, stellt der Einsatz mathematischer Optimierungsmethoden dar. In der Forschungsliteratur lassen sich viele verschiedene Optimierungsfragestellungen und Lösungsansätze im Bereich der Wasserversorgungssysteme finden. Eine detaillierte Übersicht darüber ist beispielsweise in [D'Ambrosio et al., 2014] zu finden. Im Wesentlichen werden in der Literatur Fragestellungen im operativen Bereich und Fra-

gestellungen im strategischen Bereich betrachtet. Im operativen Bereich wird dabei beispielsweise der Einsatz und die Steuerung von Pumpen und Pumpenanlagen oder die Wasserqualität optimiert. Die Fragestellungen im strategischen Bereich fokussieren hingegen die Planung des Layouts eines Netzes oder die Dimensionierung und Auslegung von Rohren innerhalb eines Wasserversorgungssystems. Die Planung von Trinkwasserbehältern findet dabei eher wenig Beachtung.

Der Fokus dieser Arbeit soll daher auf der strategischen Fragestellung der Planung von Trinkwasserbehältern liegen. Die Wasserspeicherung macht einen Anteil von 5-15 % der Gesamtbaukosten eines Wasserversorgungssystems aus. Im Vergleich dazu hat die Wasserverteilung einen Anteil von 60-83 %. Aufgrund der sehr hohen Investitionskosten beim Bau eines neuen Behälters ist jedoch eine detaillierte Planung unabdingbar, siehe dazu [Mutschmann und Stimmelmayer, 2007], S. 11. Bei der Planung müssen verschiedene Entscheidungen getroffen werden, wie beispielsweise an welchem Standort ein Behälter stehen sollte, welche Speicherkapazität er besitzen sollte oder aus welchem Material er gebaut werden sollte. Weiterhin muss aufgrund demographischer Änderungen oder Alterungserscheinungen der Behälter sowie der sich in vielen Regionen geänderten Wassernachfrage auch entschieden werden, ob bestehende Trinkwasserbehälter geschlossen werden oder durch neue ersetzt werden sollten. Um den Planer eines Wasserversorgungssystem bei diesen komplexen Entscheidungen zu unterstützen, soll in dieser Arbeit die strategische Fragestellung der Behälterplanung im Rahmen eines mathematischen Optimierungsmodells abgebildet werden und ein geeigneter Lösungsprozess entwickelt werden.

### 1.2 Inhalt und Aufbau dieser Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in insgesamt sieben Kapitel. Kapitel 2 führt grundlegende Begriffe der Trinkwasserversorgungsnetze, der Hydraulik sowie der mathematischen Optimierung ein. In Kapitel 3 wird der aktuelle Stand der Forschung im Bereich der Optimierung von Trinkwasserversorgungsnetzen dargestellt und anschließend der daraus entstehende Forschungsbedarf abgeleitet sowie die Ziele dieser Arbeit definiert. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Entwicklung und Lösung eines Optimierungsmodells, das den Bau eines Trinkwasserbehälters optimal planen soll. Dabei wird zum einen entschieden, an welchen Standorten im Wasserversorgungssystem ein Behälter gebaut werden soll. Jedoch kann ebenso bestimmt werden, an welchen Standorten ein Behälter ersetzt oder geschlossen werden soll. Zum anderen werden ebenfalls die Dimensionen der Behälter bestimmt. In dem Kapitel werden weiterhin verschiedene Lösungstechniken präsentiert und anschließend anhand von numerischen Ergebnissen analysiert. In Kapitel 5 werden verschiedene Reduktionstechniken für Netzmodelle vorgestellt und die Anwendung auf Wassernetzmodelle dargelegt. Im Anschluss daran werden Ergeb-

nisse dieser Techniken sowie Ergebnisse aus der Kombination von Reduktionstechniken und Optimierungstechniken vorgestellt. Kapitel 6 stellt einen hydraulischen Simulator vor und beschreibt den Einsatz dieses Simulators in Kombination mit den vorgestellten mathematischen Optimierungsmethoden und Reduktionstechniken. Weiterhin werden in diesem Kapitel Ergebnisse dieser Kombination vorgestellt und diskutiert sowie die Effizienz dieser Kombination dargestellt. Die Arbeit endet mit Kapitel 7 mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick für weiteres Forschungspotential.



## 2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden zunächst die wichtigsten Bestandteile eines Wasserversorgungssystems vorgestellt. Dazu gehören Komponenten der Wassergewinnung, der Wasserspeicherung und der Wasserverteilung. Bei der Wasserspeicherung werden Talsperren, Wasserbehälter, Wassertürme sowie die Planung und der Bau dieser Komponenten beschrieben. Bei der Wasserverteilung werden insbesondere Rohre, Pumpen und Ventile vorgestellt. Ein wichtiger Aspekt bei der Planung von Wasserversorgungssystemen ist die Nachfrage nach Wasser, die ebenfalls in diesem Kapitel beschrieben wird. Anschließend werden Konzepte dargestellt, wie ein Wasserversorgungsnetz als mathematischer Graph formuliert werden kann. Weiterhin werden die hydraulischen Eigenschaften innerhalb eines Wasserversorgungssystems erläutert sowie eine kurze Einführung in die mathematische Optimierung gegeben.

### 2.1 Trinkwasserversorgungssysteme

In dieser Arbeit werden Trinkwasserversorgungssysteme betrachtet. Diese haben die Aufgabe, sowohl Firmen als auch Privathaushalte mit Trinkwasser zu versorgen. In Deutschland werden gewisse Anforderungen an das Trinkwasser gestellt. Trinkwasser muss in ausreichender Menge und genügend Druck zur Verfügung stehen, [DIN2000, 2000], S. 4. Zusätzlich sollte Trinkwasser „appetitlich sein und zum Genuss anregen. Es muss farblos, klar, kühl sowie geruchlich und geschmacklich einwandfrei sein“, [DIN2000, 2000], S. 6. Weiterhin soll Trinkwasser mikrobiologisch so beschaffen sein, dass keine Erkrankungen des Menschen zu erwarten sind. Die zulässigen Grenzwerte einzelner Stoffe sind in der Trinkwasserverordnung, [TrinkwV, 2001], S. 19 ff., zu finden.

Um Menschen mit Trinkwasser zu versorgen, sind verschiedene Komponenten in einem Trinkwasserversorgungssystem notwendig. In Abbildung 2.1 ist eine schematische Abbildung eines solchen Versorgungssystems als Netzgraph zu sehen, in dem die einzelnen Bestandteile innerhalb des Versorgungsgebiet gekennzeichnet sind. Dies sind Reservoirs, Wasserbehälter bzw. -tanks, Entnahmestellen, Rohre, Pumpen und Ventile. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Elemente detaillierter vorgestellt.

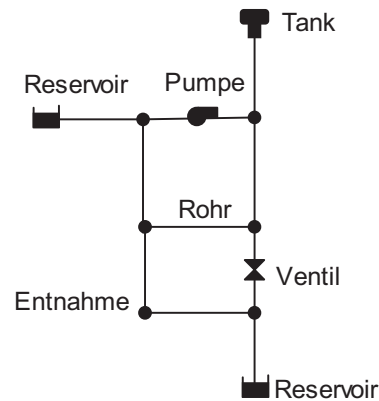


Abbildung 2.1: Schematische Abbildung eines Wasserversorgungsnetzes

### 2.1.1 Wassergewinnung

Wie schon in Kapitel 1 beschrieben, werden in Deutschland von den verfügbaren 188 Mrd.  $m^3$  Wasser nur 2,7 % für die öffentliche Wasserversorgung genutzt. Die Herkunftsart dieses Wassers kann in Oberflächenwasser sowie Grund- und Quellwasser unterschieden werden. In Deutschland wurden im Jahre 2007 ca. 30 % des genutzten Wassers aus Oberflächenwasser gewonnen, während ca. 70 % aus Grund- und Quellwasser gewonnen werden, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 116. Als nutzbare Oberflächengewässer kommen in Deutschland hauptsächlich Trinkwassertalsperren und Seen in Frage. In seltenen Fällen wird auch Flusswasser genutzt, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 168.

### 2.1.2 Wasserspeicherung

Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Wasserspeicherung. So gibt es beispielsweise Trinkwassertalsperren, Hochbehälter, Tiefbehälter oder Wassertürme. Bevor die verschiedenen Speicherarten vorgestellt werden, werden zunächst einige Anforderungen an diese beschrieben. Diese sind hauptsächlich für Behälter und Wassertürme bestimmt.

Die wichtigste Aufgabe der Trinkwasserbehälter ist es, eine ausreichende Menge an Wasser in einwandfreier Qualität vorrätig zu halten, um das Versorgungsgebiet zu jedem Zeitpunkt mit Wasser versorgen zu können. Um dies zu erreichen, sind nach [DVGW, 2005a], S. 14, die folgenden vier Aufgaben unablässig:

1. Es muss so viel Wasser im Behälter vorrätig sein, dass der Wasserbedarf jederzeit befriedigt werden kann. Da der Bedarf sehr stark schwanken kann, siehe

Abschnitt 2.1.4, ist daher eine wesentliche Aufgabe eines Behälters, den Wasserzufluss und die ungleichmäßige Wasserentnahme auszugleichen.

2. Die Behälter müssen dafür sorgen, dass der erforderliche Versorgungsdruck im gesamten Versorgungsgebiet vorhanden ist. Dies kann entweder durch eine im Vergleich zum Versorgungsgebiet erhöhte Lage des Behälters erreicht werden oder durch eine Druckerhöhungsanlage, die an den Behälter angeschlossen ist.
3. Kommt es innerhalb des Versorgungssystems zu unerwarteten Störungen, wie beispielsweise das Ausfallen von Anlagen, Stromunterbrechungen oder Unterbrechungen im Wasserversorgungssystem, so müssen die Behälter dennoch genug Wasser bereitstellen, damit die Versorgungssicherheit gewährleistet ist. Aus diesem Grund müssen die Behälter gewisse Betriebsreserven vorhalten sowie gegebenenfalls Notstromaggregate besitzen.
4. In den meisten Fällen sind die Behälter eines Versorgungssystems auch für die Bereitstellung von Löschwasser zuständig. Löschwasser muss zur Brandbekämpfung innerhalb des Versorgungsgebietes zu jeder Zeit in ausreichender Menge zur Verfügung stehen.

Als Nächstes werden verschiedene Arten der Wasserspeicherung vorgestellt. Dabei werden als Quellen hauptsächlich [Rautenberg et al., 2014], [Karger et al., 2008] und [DVGW, 2005a] verwendet.

### Talsperren

Trinkwassertalsperren werden zur Speicherung großer Mengen an Wasser genutzt. Dieses wird verwendet, um den stark schwankenden Wasserbedarf innerhalb eines Jahres auszugleichen. Eine unmittelbare Wasserentnahme aus einer Talsperre ist aufgrund der schwankenden Beschaffenheit des Wassers nicht möglich. Bevor das Wasser in das Versorgungsgebiet eingespeist werden kann, muss es daher aufbereitet werden. Da der Fokus dieser Arbeit nicht auf der Betrachtung von Talsperren liegt, werden diese hier nicht näher beschrieben. Weitere Informationen zu Talsperren lassen sich in [Rautenberg et al., 2014] oder [Karger et al., 2008] finden.

### Hochbehälter

Ein Hochbehälter ist ein Trinkwasserbehälter, der verglichen mit dem Versorgungsgebiet in einer größeren Höhe liegt. Dadurch kann das gespeicherte Wasser auf natürliche Weise in das Versorgungsgebiet fließen. Zusätzlich wird damit für die Aufrechterhal-

tung des erforderlichen Versorgungsdruckes gesorgt. Dies ist ein großer Vorteil dieser Behälterart, da auf diese Weise das Wasser selbst bei Störungen wie Stromausfall in das Versorgungsgebiet gelangen kann. Somit bietet diese Behälterart eine hohe Versorgungssicherheit. Bei der Planung eines Hochbehälters ist zu beachten, dass dieser so hoch über dem Versorgungsgebiet liegt, dass selbst bei sehr niedrigem Wasserstand innerhalb des Behälters ein ausreichender Druck vorhanden ist, um das Versorgungsgebiet zu beliefern. Weiterhin muss bei der Planung beachtet werden, ob der Hochbehälter in der Nähe des Verbrauchsschwerpunkts errichtet werden kann. Falls dem nicht so ist, müssen hohe Investitionen für eine lange Zuleitung zum Versorgungsgebiet berücksichtigt werden, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 496. Die Kammern eines Hochbehälters werden niveaugleich mit dem Gelände gebaut, wobei der Behälter sowohl freistehend als auch unter Gelände gebaut werden kann. Sollte der Wasserbedarf eines Versorgungsgebietes zukünftig steigen, können zusätzlich weitere Kammern angebaut werden. Diese Erweiterungsmöglichkeit ist ein weiterer Vorteil dieser Behälterart gegenüber anderen, wie beispielsweise dem Wasserturm.

### **Tiefbehälter**

Der Hauptunterschied zwischen einem Hoch- und einem Tiefbehälter besteht darin, dass der Wasserspiegel eines Tiefbehälters tiefer liegt als es für den geforderten Versorgungsdruck nötig wäre. Daher wird ein Tiefbehälter meist nur in Kombination mit einem Pumpwerk und einer Druckerhöhungsanlage gebaut, um das Wasser in das Versorgungsgebiet mit dem notwendigen Druck einspeisen zu können, vgl. dazu [DVGW, 2005a], S. 13 oder [Karger et al., 2008], S. 194. Dies ist ein wesentlicher Nachteil eines Tiefbehälters, da er störanfälliger gegenüber Maschinenschäden oder Stromausfällen ist und in solch einem Fall die Versorgungssicherheit nicht gewährleistet werden kann, vgl. [Karger et al., 2008], S. 194. Daher wird nach [DVGW, 2005a], S. 15, ein Tiefbehälter nur empfohlen, wenn „Maßnahmen zur Sicherung einer kontinuierlichen Energieversorgung getroffen sind.“ Vorteile bietet ein Tiefbehälter bei der Wahl des Standortes, da er in der Nähe des Versorgungsschwerpunktes errichtet werden kann und die Lage nicht von der geodätischen Höhe abhängig ist. Ähnlich wie bei einem Hochbehälter können weitere Kammern an einen Tiefbehälter angebaut werden, was einen weiteren Vorteil dieser Behälterart darstellt.

### **Wassertürme**

Der Bau eines Wasserturmes ist dann sinnvoll, wenn in dem Versorgungsgebiet keine ausreichende Geländeerhöhung vorhanden ist, um einen Hochbehälter zu bauen, vgl. [DVGW, 2005a], S. 15. Die Wasserkammern befinden sich im oberen Teil des



Turmes und sind so angelegt, dass sie oberhalb des Versorgungsgebietes liegen. Auf diese Weise können die gleichen Vorteile wie bei einem Hochbehälter erreicht werden: der erforderliche Versorgungsdruck wird auf natürliche Weise erzeugt und dadurch eine hohe Versorgungssicherheit gewährleistet. Ähnlich wie bei Hochbehältern muss bei der Planung eines Wasserturmes beachtet werden, dass auch bei niedrigem Wasserstand ein ausreichender Versorgungsdruck im gesamten Versorgungsgebiet vorhanden ist. Da der Bau eines Wasserturmes im Vergleich zu einem Erdbehälter drei- bis fünffach höhere spezifische Baukosten (EUR/ $m^3$  Nutzinhalt) verursacht, sollte der benötigte Speicherinhalt auf ein Mindestmaß beschränkt werden, vgl. [DVGW, 2005a], S. 17. Jedoch sollte der Speicherinhalt auch nicht zu klein gewählt sein, da eine nachträgliche Erweiterung nur schwer bis gar nicht möglich ist, was einen wesentlichen Nachteil dieser Behälterart darstellt. Ein weiterer Unterschied zu Hoch- und Tiefbehältern besteht darin, dass Wassertürme architektonisch sehr auffallend sind und daher sorgfältig gestaltet werden müssen, vgl. [Karger et al., 2008], S. 207. Hinzu kommt, dass Wassertürme vergleichsweise zeitaufwändig und teuer zu warten sind, weswegen eine genau geplante Konstruktion erforderlich ist, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 563. In Abbildung 2.2 sind einige Beispiele für verschiedene Wasserturmformen zu sehen.

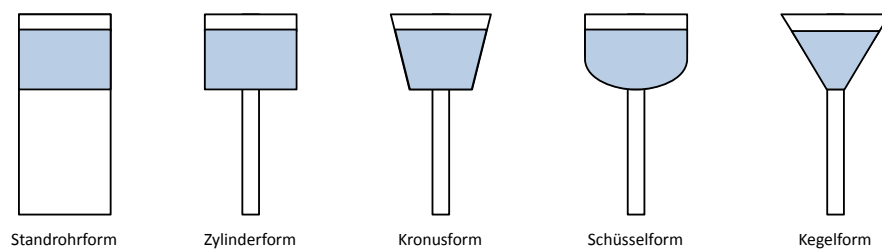


Abbildung 2.2: Grundformen von Wassertürmen, nach DVGW-Merkblatt W 315

Nachdem die drei wesentlichen Behälterarten vorgestellt wurden, sind in Tabelle 2.1 zusammenfassend die wesentlichen Vor- und Nachteile der Behälterarten aufgeführt.

Im Folgenden werden einige Details zur Planung und zum Bau von Behältern beschrieben.

### Planung und Bau von Trinkwasserbehältern

Bei der Planung und beim Bau von Trinkwasserbehältern gibt es einige Anforderungen, die die Wasserversorgungsunternehmen beachten müssen. Zunächst muss ein geeigneter Bauplatz gefunden werden. Dabei ist darauf zu achten, dass der Baugrund eine ausreichende Tragfähigkeit besitzt, damit der Behälter dort sicher stehen kann. Weiterhin muss für Wartungen sowie Kontrollgänge gewährleistet sein, dass der Behälter

	<b>Vorteile</b>	<b>Nachteile</b>
Hochbehälter	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Hohe Versorgungssicherheit</li> <li>· Natürlicher Versorgungsdruck</li> <li>· Einfache Erweiterungsmöglichkeit</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Standortabhängigkeit</li> </ul>
Tiefbehälter	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Standortunabhängigkeit</li> <li>· Einfache Erweiterungsmöglichkeit</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Verminderte Versorgungssicherheit</li> </ul>
Wasserturm	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Hohe Versorgungssicherheit</li> <li>· Natürlicher Versorgungsdruck</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Hohe Investitions- und Wartungskosten</li> <li>· Kaum Erweiterungsmöglichkeiten</li> <li>· Architektonisch auffallend</li> </ul>

Tabelle 2.1: Vor- und Nachteile der Behälterarten

zu jedem Zeitpunkt gut erreicht werden kann, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 516. Bei Hoch- und Tiefbehältern ist zusätzlich darauf zu achten, dass der Behälter bei Bedarf zu einem späteren Zeitpunkt relativ einfach erweitert werden kann, vgl. [DIN2000, 2000], S. 7. Grundsätzlich sollte bei der Konzeption und Planung der Behälter der zukünftige Bedarf an Wasser jedoch so genau wie möglich berücksichtigt werden. Eine spätere Erweiterung eines Behälters ist meist sehr kostenintensiv, während ein zu groß dimensionierter Behälter sich negativ auf die Qualität des Wassers auswirken kann, da das Wasser in diesem eventuell zu lange verweilt, vgl. [DIN2000, 2000], S. 7.

Im Allgemeinen besitzen Behälter zwei Wasserkammern, in denen das Wasser gespeichert ist. Dadurch ist bei Reparaturen und Instandhaltungsarbeiten die Versorgungssicherheit stets gewährleistet. In manchen Fällen werden Behälter auch mit nur einer Kammer gebaut. Dann ist jedoch meistens ein anderer Behälter in dem Versorgungsgebiet vorhanden, sodass auch hier stets die Versorgung gesichert ist, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 517. Der Grundriss einer Wasserkammer spielt ebenfalls eine entscheidende Rolle. Im Allgemeinen besitzen die Kammern rechteckige oder kreisförmige Grundrisse, selten auch Sonderformen. Grundsätzlich sollte dabei die wasserbenetzte Innenfläche im Verhältnis zum Behälterinhalt klein gehalten werden, damit u.a. Reinigungsarbeiten erleichtert werden, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 511. Wie oben bereits erwähnt, darf das Wasser innerhalb einer Kammer nicht zu lange verweilen, da sonst Keimvermehrungen oder Geschmacksbeeinträchtigungen auftreten könnten. Daher sollten die Wasserkammern so konstruiert sein, dass das Wasser gleichmäßig ausgetauscht wird, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 519. Zusätzlich sollte in den Wasserkammern für eine ausreichende Be- und Entlüftung gesorgt werden, um die Qualität des Wassers zu sichern, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 544.

Weiterhin müssen Behälter gegen Beschädigungen geschützt werden sowie einfach

überwachbar sein, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 511. Bei der Wahl von Bauform, Proportionen, Material, Fassaden und Außenanlagen beim Bau neuer Behälter sollte zudem darauf geachtet werden, dass sie sich landschaftsgerecht in den vorgesehenen Standort eingliedern, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 511. Dies gilt insbesondere für Wassertürme, vgl. [DVGW, 2005a], S. 15. Eine der wichtigsten Entscheidungen beim Bau eines Behälters ist die Bemessung des Speicherinhaltes, da, wie oben erwähnt, eine Erweiterung des Behälters sehr kostenintensiv ist, während ein zu groß dimensionierter Behälter unwirtschaftlich sein kann und sich negativ auf die Qualität des Wassers auswirken kann. Für die Bemessung des Speicherinhaltes müssen einige Anforderungen beachtet werden. In Abbildung 2.3 ist eine schematische Aufteilung des Speicherinhaltes eines Behälters zu sehen. Es ist zu erkennen, dass der Speicherinhalt das Volumen zwischen dem maximalen Wasserspiegel und der Behältersohle ist. Er setzt sich zusammen aus dem Löschwasservorrat, dem Sicherheitsvorrat sowie dem fluktuierendem Wasservolumen. Das fluktuierende Wasservolumen ist dabei das Volumen, das für die Befriedigung der Nachfrage an Wasser im Versorgungsgebiet benötigt wird. Um dieses zu bestimmen, muss der Wassergebrauch möglichst genau abgeschätzt werden. Der Löschwasservorrat ist für den Einsatz bei Brandfällen bestimmt. Im gesamten Versorgungsgebiet muss eine ausreichende Menge an Löschwasser zur Verfügung stehen, jedoch muss nicht jeder Behälter über einen Löschwasservorrat verfügen. Der Sicherheitsvorrat ist insbesondere für die Überbrückung betrieblicher Störfälle gedacht. Nach [Rautenberg et al., 2014], S. 505, ist dieser abhängig von Dauer und Wahrscheinlichkeit von Störfällen sowie vom System der Zubringerleitungen. Weitere Details zur Bemessung des Speicherinhaltes eines Behälters können in [Rautenberg et al., 2014], S. 499-508, nachgelesen werden.

### 2.1.3 Wasserverteilung

#### Rohre

Rohre sind die wichtigsten Bestandteile eines Wasserversorgungssystems, da durch sie das Wasser transportiert wird. Es gibt verschiedene Arten von Rohren, die sich im Wesentlichen in folgende Arten kategorisieren lassen: Zubringerleitungen, Fernleitungen, Hauptleitungen, Versorgungsleitungen, Anschlussleitungen und Verbrauchsleitungen. In Abbildung 2.4 ist ein Überblick dieser Leitungen eines Wasserversorgungssystems zu sehen. Diese werden im Folgenden kurz erläutert.

*Zubringerleitungen* sind Wasserleitungen, die Wassergewinnungsanlagen, Wasseraufbereitungsanlagen, Wasserbehälter und das Versorgungsgebiet miteinander verbinden. Dabei haben Zubringerleitungen keine direkte Verbindung zum Verbraucher, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 589. Zubringerleitungen, durch die das Wasser über große Ent-

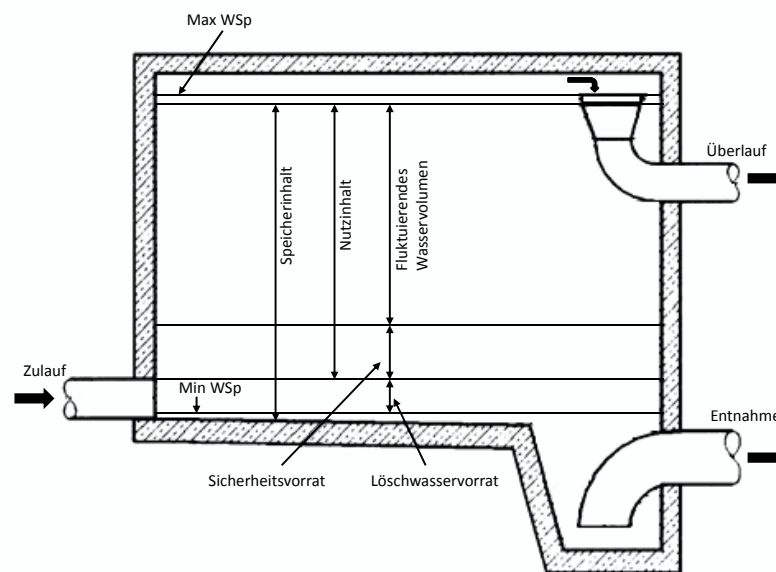


Abbildung 2.3: Schematische Aufteilung des Speicherinhalts eines Wasserbehälters, nach [Rautenberg et al., 2014]

fernungen hinweg transportiert wird, werden *Fernleitungen* genannt, vgl. [DIN4046, 1983], S. 19. Diese können Gemeinde- und Versorgungsgebietsgrenzen überschreiten. Innerhalb des Wasserversorgungsgebietes haben die *Hauptleitungen* die Aufgabe, das Wasser im gesamten Gebiet zu verteilen. Dazu geben sie das Wasser an die *Versorgungsleitungen* weiter, haben aber im Allgemeinen selbst keine direkte Verbindung zum Verbraucher, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 589. Von den Versorgungsleitungen wiederum zweigen die *Anschlussleitungen* ab, durch die das Wasser bis zur Übergabestelle zum Verbraucher transportiert wird. Die Übergabestelle besteht in der Regel aus einem Wasserzähler oder einer Hauptabsperrearmatur, vgl. [DIN4046, 1983], S. 19. Die Gesamtheit der Anlagenteile, die sich hinter der Übergabestelle beim Verbraucher befinden, werden *Verbrauchsleitungen* genannt, vgl. [DIN4046, 1983], S. 22.

Bei der Planung von Rohrleitungen müssen verschiedene Anforderungen berücksichtigt werden. So muss beispielsweise gewährleistet sein, dass durch die Wahl des Materials keine hygienischen und gesundheitlichen Beeinträchtigungen entstehen, vgl. [DVGW, 2004], S. 46. Weiterhin müssen innere und äußere Belastungen berücksichtigt werden sowie Frost- und Wärmeeinwirkungen, der Instandhaltungsaufwand, die Betriebskosten und die Möglichkeit zur nachträglichen Anbindung anderer Anschlüsse und Abzweigungen. Diese und weitere Anforderungen können in [DVGW, 2004], S. 46 f., nachgelesen werden. Die wesentlichen zu bestimmenden Eigenschaften des Rohres sind das Material, die Länge und der Durchmesser des Rohres. Diese haben einen wesentlichen Einfluss auf die Qualität des Wassers und die Hydraulik des gesamten Netzes und

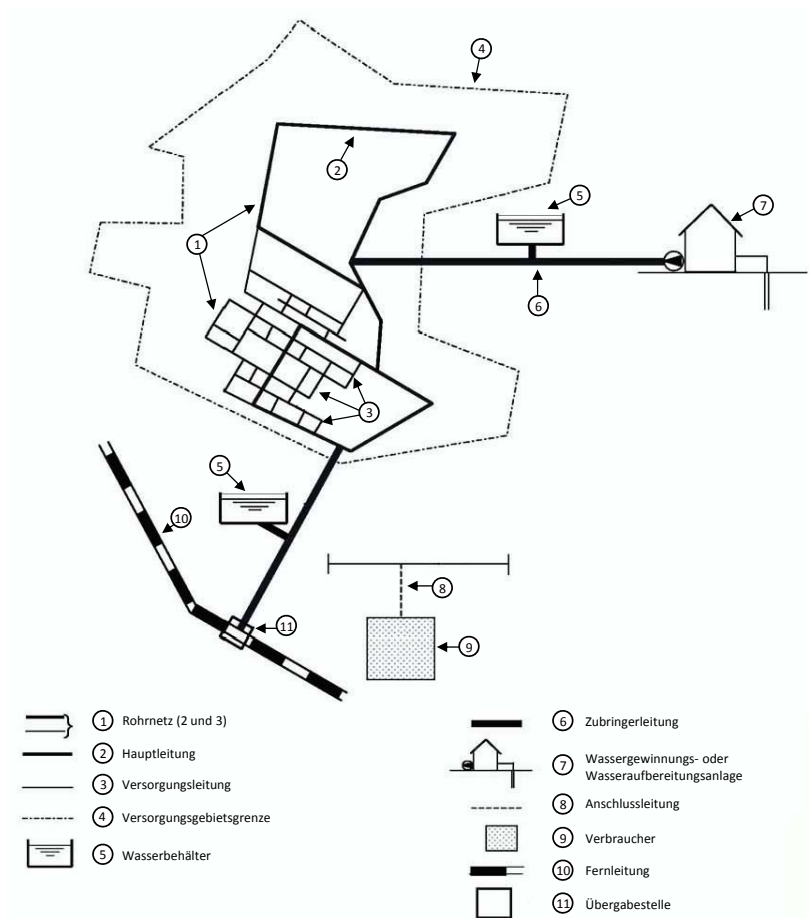


Abbildung 2.4: Übersicht verschiedener Leitungen in einem Wasserversorgungssystem, vgl. [DVGW, 2004], S. 18

müssen daher sorgfältig geplant werden. Einen Überblick über mögliche Werkstoffe beim Bau von Rohren bietet z. B. [Rautenberg et al., 2014], S. 590 ff.

## Pumpen und Druckerhöhungsanlagen

Innerhalb eines Versorgungsgebietes werden oft Pumpen benötigt, um Wasser von einem bestimmten Punkt zu einem geodätisch höher gelegenen Punkt zu fördern. Je größer der zu überwindende Höhenunterschied ist, desto mehr Energie muss aufgebracht werden, um das Wasser zu transportieren. Dadurch werden auch die Betriebskosten einer Pumpe maßgeblich bestimmt, vgl. [Karger et al., 2008], S. 160. Im Bereich der Wasserversorgung haben sich Kreiselpumpen betrieblich sowie wirtschaftlich bewährt und sind daher die am meisten verwendeten Pumpen, vgl. [Rautenberg et al.,

2014], S. 425. Reicht der Versorgungsdruck an einer Stelle im Versorgungsgebiet nicht aus, um das Wasser zu jedem Zeitpunkt für die Verbraucher zugänglich zu machen, können auch Druckerhöhungsanlagen mit Druckerhöhungspumpen installiert werden, vgl. [Karger et al., 2008], S. 183 und [DIN4046, 1983], S. 18. Bei der Planung von Druckerhöhungsanlagen muss insbesondere beachtet werden, dass die Betriebssicherheit wichtiger als die Wirtschaftlichkeit ist, vgl. [Karger et al., 2008], S. 178. Daher müssen Vorkehrungen getroffen werden, damit eine kontinuierliche Wasserversorgung gewährleistet ist.

### Ventile

In manchen Fällen ist es notwendig, den Druck oder den Volumenstrom innerhalb eines Rohres zu regulieren. Zu diesem Zweck können verschiedene Absperr- oder Regelventile installiert werden, die im Folgenden kurz vorgestellt werden. Ein *Schieber* dient zur Absperrung einer Rohrleitung und verhindert damit den Durchfluss durch das Rohr, vgl. [Karger et al., 2008], S. 266. Um den Fluss innerhalb eines Rohres zu regulieren, können *Durchflusssteuerventile* (engl. Flow Control Valve (FCV)) eingesetzt werden, die dafür sorgen, dass nur eine festgelegte Menge an Wasser durch das Rohr fließt. Zur Kontrolle des Druckes innerhalb der Rohrleitung existieren verschiedene Ventile. So gibt es *Druckerhaltungsventile* (engl. Pressure Sustaining Valve (PSV)), die den Druck innerhalb eines Rohres auf einem bestimmten Niveau halten können. Weiterhin gibt es *Druckminderungsventile* (engl. Pressure Reducing Valve (PRV)), die den Druck innerhalb des Rohres auf einen vorher bestimmten Wert reduzieren können und *Druckunterbrechungsventile* (engl. Pressure Breaker Valve (PBV)), die einen bestimmten Druckverlust in einem Rohr erzwingen können. Weitere Details zu diesen und anderen Ventilen lassen sich beispielsweise in [DVGW, 2000] finden.

#### 2.1.4 Wassergebrauch

Für die Planung, den Bau sowie die Sanierung aller vorgestellten Komponenten eines Wasserversorgungssystems ist der Wassergebrauch im gesamten System ein entscheidender Faktor. Denn zu jedem Zeitpunkt muss die nachgefragte Menge an Wasser mit dem benötigten Versorgungsdruck zur Verfügung stehen und die Komponenten dementsprechend dimensioniert sein. Die Trinkwasserabgabe setzt sich zusammen aus der Abgabe an Haushalte und Kleingewerbe, Industrie sowie sonstige Verbraucher. In Abbildung 2.5 ist die prozentuale Verteilung der Wasserabgabe nach diesen Verbrauchergruppen in den Jahren 1990 und 2011 zu erkennen. Demnach sind die Haushalte und Kleingewerbe die größten Abnehmer des Trinkwassers. Gerade in der Industrie hat sich die Trinkwasserabgabe durch Wassersparmaßnahmen und dem Einsatz von

effizienteren Maschinen in den letzten Jahren deutlich verringert.

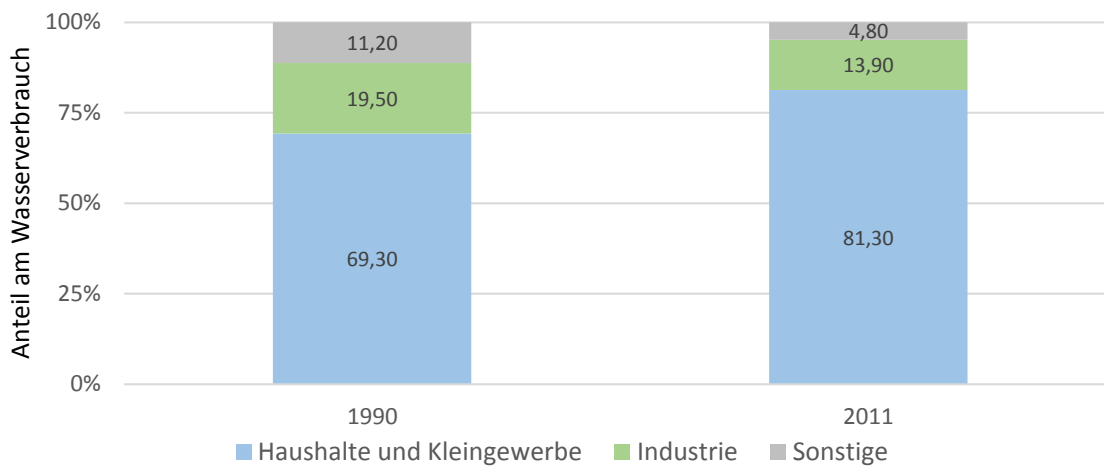


Abbildung 2.5: Verteilung der Trinkwasserabgabe in Deutschland nach Kundengruppen im Jahresvergleich 1990 und 2011, Quelle: BDEW

Es ist zu beachten, dass die Wasserabgabe eines Systems sowohl innerhalb eines Jahres als auch innerhalb eines Tages erheblich schwanken kann. Die Schwankungen innerhalb eines Jahres entstehen durch die unterschiedlichen klimatischen Bedingungen, die während eines Jahres herrschen. In den Sommermonaten wird beispielsweise mehr Wasser für Gartenbewässerungen genutzt, vgl. [Karger et al., 2008], S. 16. Ebenso müssen jedoch auch Schulferien berücksichtigt werden, die sich in den meisten Fällen mit einem Nachfragerückgang auswirken. Gegensätzlich verhält es sich in touristischen Orten, in denen in dieser Zeit die Nachfrage steigt. Weiterhin müssen auch Werksferien großer Betriebe beachtet werden, da auch in diesem Fall mit einem Nachfragerückgang zu rechnen ist, vgl. [Karger et al., 2008], S. 16. In Abbildung 2.6 ist als Beispiel der prozentuale Wassergebrauch eines jeden Monats vom Gesamtjahresgebrauch der Stadt Stuttgart im Jahre 2006 abgebildet. Dort ist zu erkennen, dass in den Sommermonaten, insbesondere im Juli, deutlich mehr Wasser nachgefragt wurde als in den Wintermonaten. Die erhöhte Nachfrage in den Sommermonaten wird im August durch die Sommerferien überlagert, sodass hier eine vergleichsweise geringe Nachfrage zu verzeichnen ist.

Auch innerhalb einer Woche schwankt die Nachfrage an den einzelnen Tagen deutlich. So ist an den Sonn- und Feiertagen üblicherweise ein geringerer Verbrauch als an den übrigen Wochentagen zu verzeichnen. Die Tage mit den höchsten Nachfragewerte sind in der Regel der Montag oder der Freitag, vgl. [Karger et al., 2008], S. 16. Die Wassernachfrage schwankt ebenfalls deutlich innerhalb eines Tages. Dabei können die stündlichen Verbrauchsschwankungen auch erheblich durch besondere Ereignisse, wie z. B. Fußballfernsehübertragungen, beeinflusst werden, vgl. [Rautenberg et al., 2014],

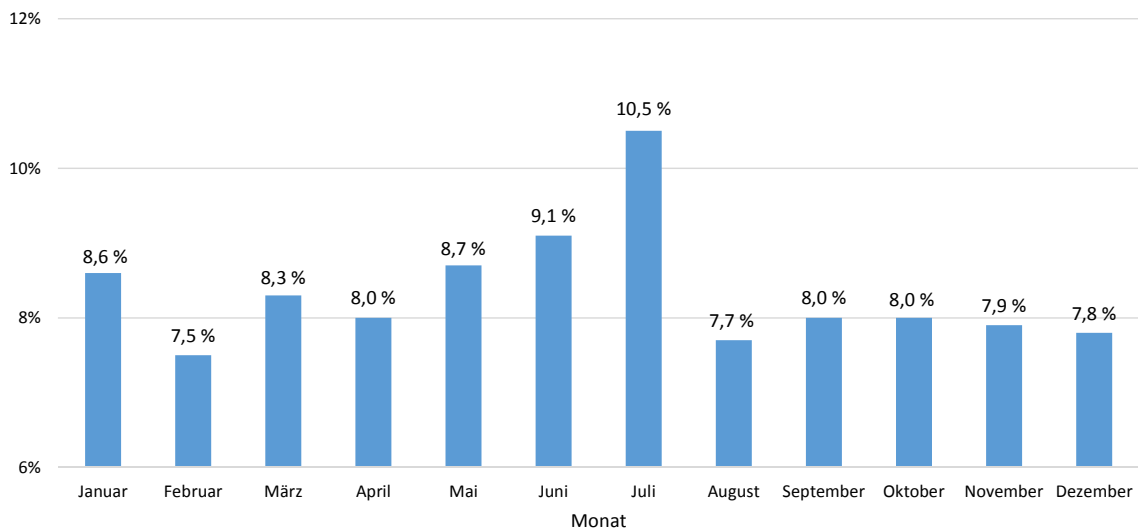


Abbildung 2.6: Prozentualer Anteil des Wassergebrauchs eines jeden Monats vom Gesamtjahresverbrauch in Stuttgart im Jahr 2006, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 23

S. 33. So zeigt beispielsweise die Abbildung 2.7 den Wasserverbrauch am 11.05.2014 der Wasserwerke Paderborn GmbH. Dabei ist der Verbrauch in  $m^3/h$  angegeben. In diesem Diagramm sind die täglichen Schwankungen der Wassernachfrage innerhalb eines Tages abzulesen. Zudem lässt sich in diesem Diagramm erkennen, dass in dem Zeitfenster von 15:30 Uhr bis 17:15 Uhr das Aufstiegsspiel des SC Paderborn 07 in die erste Bundesliga stattgefunden hat. Dies wird durch den plötzlichen Nachfrageanstieg gegen 16:15 Uhr deutlich, da zu diesem Zeitpunkt die Halbzeitpause des Spiels war. Noch deutlichere Bedarfsspitzen lassen sich in Abbildung 2.8 erkennen, die die Wassernachfrage in Paderborn am 13.07.2014 zeigt. An diesem Tag fand von 21:00 Uhr bis 23:30 Uhr das Fußball-WM-Finale Deutschland gegen Argentinien statt, das Deutschland mit 1:0 für sich entscheiden konnte. Die Halbzeitpause sowie die Pause zwischen den ersten 90 Minuten und der Verlängerung sind hier um ca. 21:50 Uhr bzw. um ca. 22:55 Uhr deutlich zu erkennen.

Es zeigt sich also, dass die Wassernachfrage einen wesentlichen Einfluss auf die Dimensionierung der Komponenten hat, da sowohl jährliche als auch tägliche Schwankungen berücksichtigt werden müssen.



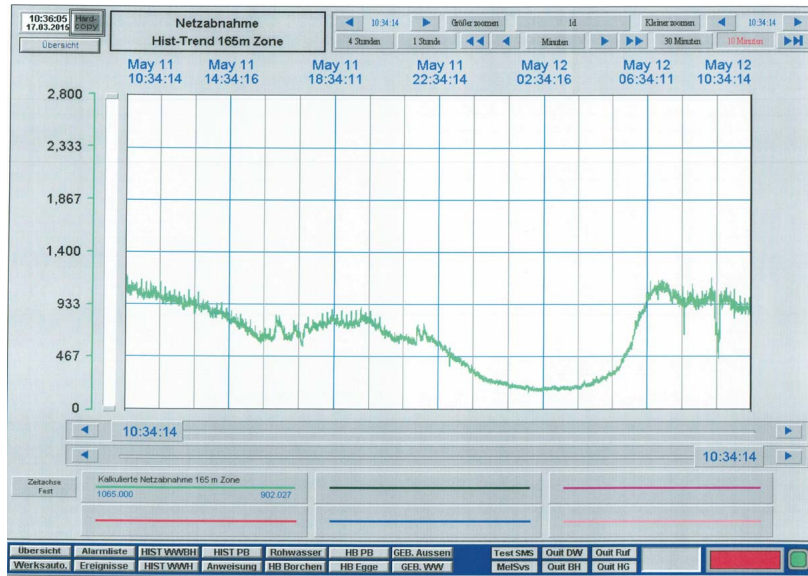


Abbildung 2.7: Wassernachfrage in Paderborn am Tag des Aufstiegsspiels des SC Paderborn 07 in die 1. Bundesliga am 11.05.2014, Quelle: Wasserwerke Paderborn GmbH

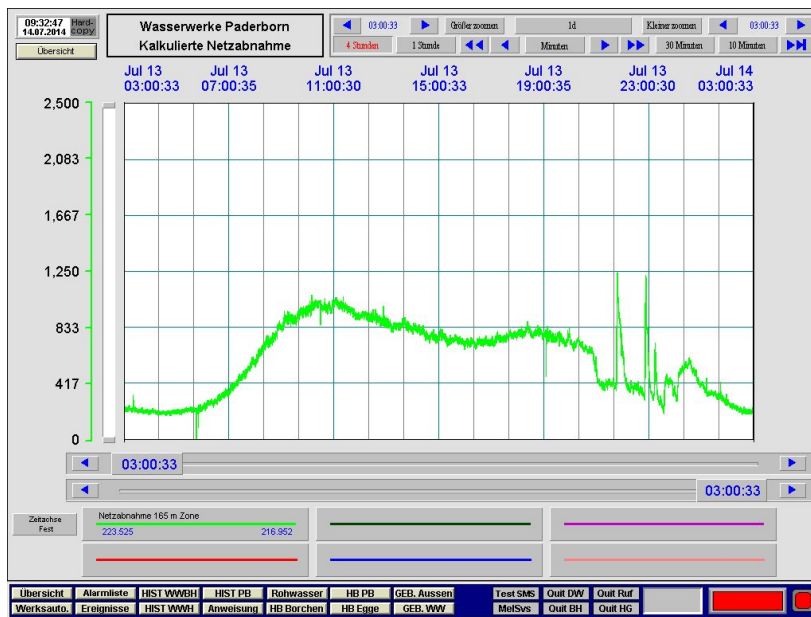


Abbildung 2.8: Wassernachfrage in Paderborn am Tag des Fußball-WM-Finales Deutschland gegen Argentinien am 13.07.2014, Quelle: Wasserwerke Paderborn GmbH

## 2.2 Wasserversorgungssystem als Graph

Aufgrund ihrer Netzwerkstruktur lassen sich Wasserversorgungssysteme mathematisch als Graphen modellieren. Zu diesem Zweck werden an dieser Stelle einige grundlegende Begriffe der Graphentheorie eingeführt. Dazu werden hauptsächlich [Domschke und Drexl, 2005], S. 65 ff. und [Suhl und Mellouli, 2013], S. 167 ff. als Quellen genutzt. Anschließend werden die verschiedenen Komponenten eines Wasserversorgungssystems als Elemente eines Graphen eingruppiert.

### 2.2.1 Grundlegende Begriffe der Graphentheorie

Ein *gerichteter Graph*  $G(V, E)$  besteht aus einer nichtleeren *Knotenmenge*  $V$  und einer *Kantenmenge*  $E$ . Eine *gerichtete Kante* von einem Knoten  $i$  zu einem Knoten  $j$ ,  $i \neq j \in V$  wird mit  $(i, j)$  gekennzeichnet. Dabei wird Knoten  $i$  auch *Anfangsknoten* und  $j$  *Endknoten* genannt. In diesem Fall heißen Knoten  $i$  und die Kante  $(i, j)$  *inzident*, da die Kante  $(i, j)$  den Knoten  $i$  mit einem anderen Knoten  $j$  verbindet. Ebenso sind Knoten  $j$  und die Kante  $(i, j)$  *inzident*. Diese Beziehungen können in einer *Inzidenzmatrix*  $B$  abgebildet werden. Dabei ist die Anzahl der Zeilen der Matrix gleich der Anzahl der Knoten und die Anzahl der Spalten gleich der Anzahl der Kanten im Graphen. Die Einträge der Matrix können den Wert 1 oder 0 besitzen. Ein Eintrag  $b_{k,\ell}$  gibt an, ob die Kante  $k$  und der Knoten  $\ell$  inzident zueinander sind (1) oder nicht (0). Die Anzahl aller inzidenten Kanten eines Knoten  $i$  bezeichnet den *Knotengrad* des Knotens. Die durch die Kante  $(i, j)$  verbundenen Knoten  $i$  und  $j$  werden *adjazent* genannt. Alle Knoten, die zu Knoten  $i$  adjazent sind, werden mit der Menge  $Adj(i)$  bezeichnet. Auch diese Beziehung kann in einer Matrix  $A$  abgebildet werden, die dann *Adjazenzmatrix* genannt wird. Die Anzahl der Zeilen und Spalten dieser Matrix ist gleich der Anzahl an Knoten. Auch die Einträge dieser Matrix können nur die Werte 1 oder 0 annehmen. Ein Eintrag  $a_{i,j}$  gibt dann an, ob Knoten  $i$  und  $j$  adjazent sind (1) oder nicht (0).

### 2.2.2 Wassernetzkomponenten im Graphen

Die oben vorgestellten Komponenten eines Wasserversorgungssystems können nun in Knoten und Kanten eingeteilt werden.

Wassertürme, Hochbehälter und Tiefbehälter stellen Knoten innerhalb des Netzes dar. Talsperren sowie Flüsse, aus denen Wasser entnommen wird, werden ebenfalls als Knoten aufgefasst. An all diesen Knoten wird Wasser in das System eingespeist. Zusätzlich kann ein Knoten auch eine Entnahmestelle sein. An diesen Knoten wird eine zeitlich

variierende Menge an Wasser dem Netz entnommen. Dies entspricht der Wasserabgabe an Endverbraucher. Weiterhin können Knoten auch Verzweigungen darstellen, an denen zwei Rohre aufeinandertreffen, aber keine weiteren Ereignisse stattfinden.

Als Kanten kommen die verbleibenden Komponenten des Netzes in Frage. Dies sind Rohre, Pumpen sowie Ventile. Alle Kanten werden als gerichtete Kanten definiert. Das bedeutet, dass der Volumenstrom  $Q_{ij}$  (in  $[m^3/h]$ ) positiv ist, falls das Wasser von Knoten  $i$  nach Knoten  $j$  fließt. Falls das Wasser von Knoten  $j$  nach Knoten  $i$  fließt, so ist  $Q_{ij}$  negativ.

### 2.2.3 Netzarten

Im Bereich der Wasserversorgungsnetze gibt es im Wesentlichen drei verschiedene Netzarten. Dazu zählen Verästelungsnetze und Ringnetze sowie Ringnetze mit Vermaschung. Diese sind zur Veranschaulichung in Abbildung 2.9 dargestellt.

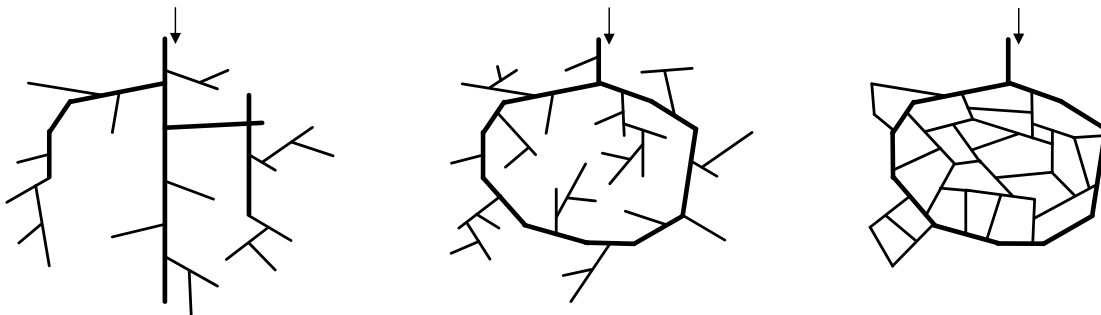


Abbildung 2.9: Beispiel für ein Verästelungsnetz, ein Ringnetz und ein Ringnetz mit Vermaschung, nach [Karger et al., 2008]

Bei einem Verästelungsnetz oder auch als Netz mit Baumstruktur bezeichnet, zweigen Versorgungsleitungen von einer Hauptleitung ab. Von den Versorgungsleitungen können dann wieder weitere Versorgungsleitungen abzweigen, vgl. [Karger et al., 2008], S. 235. Der Nachteil dieser Netzstruktur ist, dass sie unsicher im Betrieb sind, da bei einem Rohrbruch ganze Teile des Gebietes von der Versorgung abgeschnitten werden können. Diesen Nachteil haben Ringnetze und Ringnetze mit Vermaschung nicht, da hier das Wasser auch auf einem alternativen Weg zu jedem Knoten gelangen kann. Ein Nachteil der Ringnetze mit und ohne Vermaschung sind die höheren Kosten und die Gefahr der Stagnation des Wasser innerhalb des Netzes, vgl. [Karger et al., 2008], S. 235.

## 2.3 Hydraulik

In diesem Abschnitt sollen einige hydraulische Grundlagen erklärt werden, die zur Analyse und Berechnung von Wassernetzen notwendig sind.

Innerhalb eines Wasserversorgungsnetzes soll das Wasser von einem Knoten zum anderen fließen. Um dies zu erreichen, müssen einige physikalische Eigenschaften gelten. Zunächst muss die Massenbilanzgleichung erfüllt sein. Sie besagt, dass die zu- und abfließenden Volumenströme  $Q$  eines Knotens gleich Null sind:

$$\sum Q_{in} - \sum Q_{out} = 0, \quad (2.1)$$

wobei  $Q = \frac{1}{3600} A \cdot v$  (in  $[m^3/h]$ ) gilt. Dabei ist  $A$  (in  $[m^2]$ ) die Querschnittfläche des Rohres und  $v$  (in  $[m/s]$ ) die mittlere Fließgeschwindigkeit des Wassers innerhalb des Rohres, vgl. [DVGW, 1983], S. 7.

Weiterhin muss die Energieerhaltungsgleichung gelten, die mit Hilfe der *Bernoullischen Energiegleichung* beschrieben werden kann. Diese gibt an, dass die Energiehöhe von zwei durch ein Rohr ( $i, j$ ) verbundenen Knoten  $i$  und  $j$  gleich ist und lautet wie folgt:

$$z_i + \frac{p_i}{g \cdot \rho} + \frac{v_i^2}{2g} = z_j + \frac{p_j}{g \cdot \rho} + \frac{v_j^2}{2g} + h_{vij}. \quad (2.2)$$

Dabei ist  $p_i$  der Druck an Knoten  $i$  (in  $[kg/m \cdot s^2]$ ),  $\rho$  die Fluidichte des Wassers (in  $[kg/m^3]$ ) und  $g$  die Erdbeschleunigung in  $([m/s^2])$ . Der Parameter  $z_i$  beschreibt die Höhe des Knotens  $i$  über der Nulllinie, der Term  $\frac{p_i}{g \cdot \rho}$  die Druckhöhe des Knotens  $i$ , der Term  $\frac{v_i^2}{2g}$  die Geschwindigkeitshöhe des Knotens  $i$  und  $h_{vij}$  die Druckverlusthöhe des Knotens  $i$ , alle in  $[m]$ . Bei der Rohrnetzrechnung wird die meist sehr kleine Geschwindigkeitshöhe vernachlässigt, vgl. [Rautenberg et al., 2014], S. 63. Es werden also nur die geodätische Höhe sowie die Druckhöhe des jeweiligen Knotens berücksichtigt. Damit vereinfacht sich die Gleichung (2.2) zu:

$$z_i + \frac{p_i}{g \cdot \rho} = z_j + \frac{p_j}{g \cdot \rho} + h_{vij}. \quad (2.3)$$

Wird diese Gleichung umgeformt, so ergibt sich die Druckverlusthöhe zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  in  $m$ :

$$\underbrace{\left(z_i + \frac{p_i}{g \cdot \rho}\right)}_{H_i} - \underbrace{\left(z_j + \frac{p_j}{g \cdot \rho}\right)}_{H_j} = h_{vij}, \quad (2.4)$$

wobei  $H_i$  und  $H_j$  jeweils die Summe aus geodätischer Höhe und Druckhöhe des jeweiligen Knotens darstellen. Die Druckverlusthöhe  $h_{vij}$  lässt sich unterteilen in  $h_{vij} = h_{veij} + h_{vsij}$ , wobei  $h_{veij}$  die Einzelverluste innerhalb des Rohres ( $i, j$ ) und  $h_{vsij}$  die streckenabhängigen Verluste des Rohres ( $i, j$ ) sind, vgl. [Strybny, 2010], S. 70. Einzelverluste treten insbesondere bei der Betrachtung von Ein- und Auslässen oder Rohrkrümmern auf, vgl. [Strybny, 2010], S. 70. Im Rahmen dieser Arbeit werden jedoch nur gerade Rohrleitungen betrachtet, weswegen  $h_{veij}$  vernachlässigt werden kann. Im Gegensatz dazu spielen die streckenabhängigen Verluste eine wesentliche Rolle. Um diese Verlusthöhe, auch Reibungsverlusthöhe oder Druckverlusthöhe genannt, zu berechnen, wird die *Darcy-Weisbach-Gleichung* (2.5) benutzt, siehe z. B. [Karger et al., 2008], S. 223:

$$h_{vij} = \lambda_{ij} \cdot \frac{\ell_{ij}}{d_{ij}} \cdot \frac{v_{ij}^2}{2g}. \quad (2.5)$$

Die Parameter dieser Gleichung finden sich in Tabelle 2.2.

Name	Beschreibung
$h_{vij}$	Druckverlusthöhe zwischen Knoten $i$ und $j$ , in $[m]$
$\lambda_{ij}$	Widerstandsbeiwert des Rohres ( $i, j$ )
$\ell_{ij}$	Rohrleitungslänge des Rohres ( $i, j$ ), in $[m]$
$d_{ij}$	Rohrinnendurchmesser des Rohres ( $i, j$ ), in $[m]$
$v_{ij}$	Mittlere Fließgeschwindigkeit innerhalb des Rohres ( $i, j$ ), in $[m/s]$
$g$	Erdbeschleunigung, in $[m/s^2]$
$Q_{ij}$	Volumenstrom in Rohr ( $i, j$ ), in $[m^3/h]$

Tabelle 2.2: Parameter der Darcy-Weisbach-Gleichung

Diese Formel beschreibt die Verlusthöhe, die aufgrund hydraulischer Reibungsvorgänge innerhalb eines Rohres entsteht. Es ist zu erkennen, dass die Druckverlusthöhe von

der Fließgeschwindigkeit des Wassers  $v_{ij}$ , dem Durchmesser  $d_{ij}$  sowie der Länge  $\ell_{ij}$  des Rohres abhängt. Es stellt sich die Frage, was denn das  $\lambda_{ij}$  in dieser Formel macht. Das  $\lambda_{ij}$  bezeichnet den Widerstandsbeiwert und spielt damit eine entscheidende Rolle. Dies ist ein einheitenloser Kennwert, der von dem Durchmesser und der Rauheit eines Rohres sowie der Strömungsart innerhalb des Rohres abhängt, vgl. [DIN4046, 1983], S. 21. Im Wesentlichen gibt es die folgenden verschiedenen Strömungsarten innerhalb eines Rohres, vgl. [DVGW, 1983], S. 5 f.:

1. Laminare Strömung
2. Turbulente Strömung
  - a) Strömung im hydraulisch glatten Rohr
  - b) Strömung im hydraulisch rauhen Rohr
  - c) Übergangsbereich zwischen hydraulisch glatt und hydraulisch rau

Um welche Strömungsart es sich handelt, lässt sich mit Hilfe der sogenannten dimensionslosen *Reynoldszahl* bestimmen:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}, \quad (2.6)$$

wobei  $\nu$  die kinematische Viskosität (in  $[m^2/s]$ ) darstellt. Falls im Falle von Wasser  $Re \leq 2320$  gilt, so handelt es sich um laminare Strömung, andernfalls um turbulente Strömung.

Je nach Strömungsart wird der Widerstandsbeiwert wie folgt berechnet:

Bei laminarer Strömung wird  $\lambda$  mit Hilfe des *Gesetzes von Hagen-Poiseuille* berechnet, vgl. [DVGW, 2005b], S. 10:

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (2.7)$$

Die Berechnung bei turbulenter Strömung in hydraulisch glatten Rohren erfolgt mit

der Formel von *Prandtl-Kármán*, vgl. [DVGW, 2005b], S. 11:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg \left( Re \cdot \sqrt{\lambda} \right) - 0,8. \quad (2.8)$$

Bei turbulenter Strömung in hydraulisch rauen Rohren wird der Widerstandsbeiwert mit einer weiteren Formel von *Prandtl-Kármán* berechnet, vgl. [DVGW, 2005b], S. 12:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 - 2 \cdot \lg \left( \frac{k}{d} \right), \quad (2.9)$$

wobei  $k$  die natürliche Wandrauheit (in  $[m]$ ) ist.

Im Übergangsbereich gilt die Formel von *Prandtl-Colebrook*, vgl. [DVGW, 2005b], S. 11:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg \left( \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,71 \cdot d} \right). \quad (2.10)$$

Für die Berechnung von  $\lambda$  mit den Formeln (2.9) und (2.10) wird die Wandrauheit  $k$  benötigt. Die Wandrauheit wird maßgeblich durch die Beschaffenheit und das Material der Rohrwand bestimmt. Geeignete Werte können beispielsweise in [DVGW, 2005b], S. 15 f., nachgelesen werden. In dieser Arbeit wird im Folgenden davon ausgegangen, dass es sich bei den Volumenströmen innerhalb der Rohre um turbulente Strömungen in hydraulisch rauen Rohren handelt. Somit wird zur Berechnung des Widerstandsbeiwertes die Formel (2.9) zugrunde gelegt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass in einem Versorgungssystem neben der Kontinuitätsgleichung (2.1) auch die Energieerhaltungsgleichung 2.2 gelten muss, die umgeformt die Druckverlusthöhe zwischen zwei Knoten angibt, siehe Gleichung 2.4.

Werden die Formeln (2.4) und (2.5) miteinander kombiniert und die Fließgeschwindigkeit mit Hilfe des Volumenstroms  $Q_{ij}$  durch  $v = \frac{1}{3600} \cdot \frac{4Q_{ij}}{\pi d_{ij}^2}$  ersetzt, so ergibt sich für die Druckverlusthöhe zwischen zwei durch ein Rohr verbundener Knoten  $i$  und  $j$ :

$$H_i - H_j = \lambda_{ij} \cdot \frac{\ell_{ij}}{d_{ij}} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \left( \frac{4Q_{ij}}{\pi d_{ij}^2} \right)^2 \quad (2.11)$$

$$= \lambda_{ij} \cdot \frac{\ell_{ij}}{d_{ij}^5} \cdot \frac{8}{g\pi^2} \cdot \frac{1}{3600} \cdot Q_{ij}^2 \quad (2.12)$$

$$= r_{ij} \cdot Q_{ij}^2. \quad (2.13)$$

Dabei wurden der Einfachheit halber die Konstanten und die Parameter des Rohres in dem Parameter  $r_{ij}$  (in  $[h^2/m^5]$ ) zusammengefasst. Dieser Parameter wird *Rohrreibungswiderstand* genannt. Zu beachten ist, dass in Formel (2.13) davon ausgegangen wird, dass das Wasser von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  fließt. Ist die Fließrichtung nicht bekannt, jedoch in jede Richtung möglich, so wird die Formel geändert zu

$$H_i - H_j = r_{ij} \cdot Q_{ij} \cdot |Q_{ij}|. \quad (2.14)$$

Diese Gleichung wird im weiteren Verlauf der Arbeit auch *Druckverlustgleichung* genannt.

Sind zwei Knoten nicht durch eine Rohrleitung, sondern durch eine Pumpe verbunden, wird der Druckunterschied zwischen den beiden Knoten mit Hilfe der sogenannten Pumpenkennlinie berechnet. Diese beschreibt bei vorgegebener Drehzahl den Zusammenhang zwischen der Förderhöhe  $H$  und des Förderstromes  $Q$  und wird daher auch  $Q$ - $H$ -Kennlinie genannt. Jede Pumpe hat ihre eigene Kennlinie, die schon bei der Planung berücksichtigt werden muss. Ein Beispiel für eine Pumpenkennlinie ist in Abbildung 2.10 zu finden.



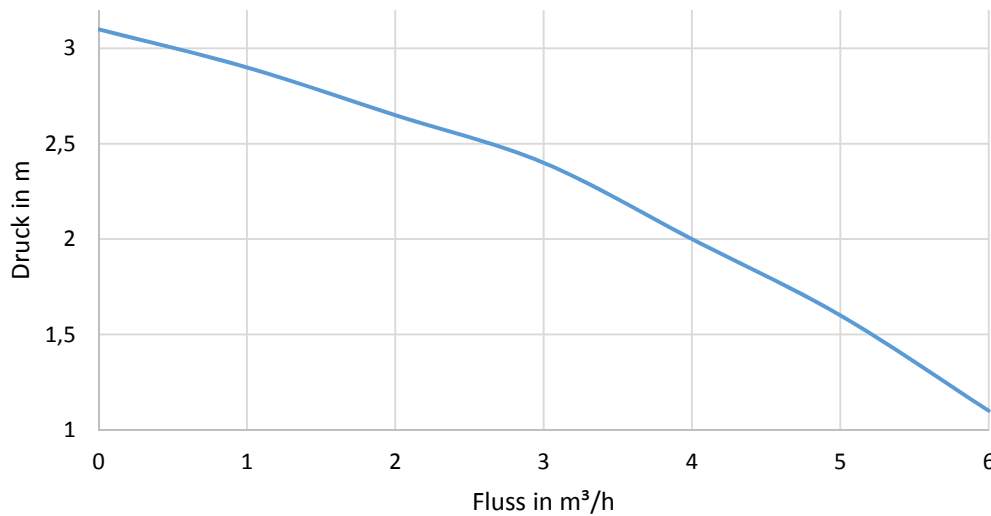


Abbildung 2.10: Beispiel für eine Pumpenkennlinie

## 2.4 Grundbegriffe der mathematischen Optimierung

In diesem Abschnitt werden einige Grundlagen der mathematischen Optimierung eingeführt. Es gibt verschiedene Klassen von Optimierungsmodellen, die im Folgenden kurz vorgestellt werden. Anschließend werden einige Lösungsmethoden für die verschiedenen Arten von Optimierungsmodellen genannt.

Allgemein kann ein Optimierungsmodell in der folgenden Form definiert werden, vgl. z. B. [Floudas, 1995], S. 5 f.:

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} \quad & f(x, y) \\
 \text{s.t.} \quad & g(x, y) \leq 0 \\
 & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \\
 & y \in Y \subseteq \mathbb{Z}^m,
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

wobei  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  gilt. Sind die beiden Funktionen  $f$  und  $g$  linear, so ist (2.15) ein *gemischt-ganzzahliges Programm* (engl. Mixed Integer Program (MIP)). Falls die Menge  $Y$  leer ist, so wird von einem *linearen Programm* (engl. Linear Program (LP)) gesprochen. Ist hingegen die Menge  $X$  leer, so ist (2.15) ein *ganzzahliges Programm* (engl. Integer Program (IP)).

Falls eine oder beide der Funktionen  $f$  oder  $g$  nichtlineare Terme enthält, dann wird

von einem *gemischt-ganzzahligen nichtlinearen Programm* (engl. Mixed Integer Nonlinear Program (MINLP)) gesprochen. Ähnlich zum linearen Fall gilt auch hier, dass (2.15) bei einer leeren Menge  $Y$  zu einem *nichtlinearen Programm* (engl. Nonlinear Program (NLP)) bzw. bei einer leeren Menge  $X$  zu einem *ganzzahligen nichtlinearen Programm* (engl. Integer nonlinear Program (INLP)) wird.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Spezialfall eines MINLPs betrachtet. In diesem Fall ist die Funktion  $f$  linear, wohingegen die Funktion  $g$  quadratische Terme enthält und die Mengen  $X$  und  $Y$  nichtleer sind. Dann wird von einem *gemischt-ganzzahligen quadratisch-beschränkten Programm* (engl. Mixed Integer Quadratically constrained Program (MIQCP)) gesprochen. Ist die Funktion  $g$  zusätzlich nicht-konvex, so ist (2.15) ein nicht-konvexes MIQCP.

Es gibt viele verschiedene Algorithmen, um die unterschiedlichen Ausprägungen des Programms (2.15) zu lösen. Für den linearen Fall sind dies im Wesentlichen der *Branch-and-Bound-Algorithmus*, der *Simplex-Algorithmus* oder die *Innere-Punkte-Methode*. Details zu diesen Lösungsverfahren finden sich beispielsweise in [Wolsey, 1998] bzw. [Chvatal, 1983].

Für den nichtlinearen Fall gibt es ebenso eine Vielzahl von Algorithmen. Da die Nichtlinearitäten jedoch verschiedenster Art sein können, gibt es hier keine Standardtechniken, die bei jedem Optimierungsmodell angewendet werden können. Eine Übersicht über verschiedene Techniken sowie Software, die zur Lösung von nichtlinearen Modellen angewendet werden können, ist in [Bussieck und Vigerske, 2014] zu finden. Sowohl für lineare als auch nichtlineare Optimierungsmodelle können auch Heuristiken sowie Meta-Heuristiken eingesetzt werden. Die in dieser Arbeit relevanten Heuristiken und Meta-Heuristiken werden an der jeweiligen Stelle kurz erläutert.

## **3 Stand der Forschung und Handlungsbedarf**

In diesem Kapitel wird ein Überblick über den aktuellen Stand der Forschung im Bereich der Optimierung von Trinkwasserversorgungsnetzen gegeben. Dazu werden zunächst in Abschnitt 3.1 verschiedene Optimierungsfragestellungen im Bereich von Trinkwasserversorgungsnetzen vorgestellt. Anschließend werden in Abschnitt 3.2 verschiedene Lösungskonzepte für diese Fragestellungen diskutiert. Im Anschluss daran wird in Abschnitt 3.3 der Handlungsbedarf sowie die Ziele der Arbeit abgeleitet und das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Konzept vorgestellt.

### **3.1 Optimierungsmodelle im Bereich von Wasserversorgungssystemen in der Forschungsliteratur**

Die in der Literatur betrachteten Optimierungsfragestellungen im Bereich von Wasserversorgungssystemen lassen sich unterteilen in operative Entscheidungsprobleme, strategische Entscheidungsprobleme sowie einer Kombination aus beiden. Die verschiedenen Fragestellungen werden in den folgenden drei Unterabschnitten vorgestellt.

#### **3.1.1 Operative Entscheidungsprobleme**

Im Bereich der operativen Entscheidungsprobleme gibt es unterschiedliche Optimierungsfragestellungen, die im Folgenden diskutiert werden.

Zunächst werden Optimierungsmodelle vorgestellt, die den operativen Einsatz von Pumpen optimieren. Sowohl [Zessler und Shamir, 1989] als auch [Fukushima et al., 1982] stellen ein Optimierungsmodell vor, das einen optimalen Steuerungsplan für die Pumpen im Wasserversorgungsnetz berechnen soll und damit die Kosten von Pumpenanlagen minimiert. Diese Kosten hängen von der Fördermenge der Pumpen, der Nachfrage nach Wasser sowie dem Wasservorkommen der Reservoirs ab. Die Fördermenge sowie das Wasservorkommen in den Reservoirs müssen sich innerhalb vordefinierter Grenzen bewegen. Weiterhin muss an den Reservoirs die Massenbilanzgleichung gelten. Weitere hydraulische Eigenschaften, insbesondere die Druckverlustgleichung, werden in diesem Modell nicht betrachtet. Da die Kostenfunktion in manchen Fällen

nicht-konvex sein kann, ist das von [Zessler und Shamir, 1989] entwickelte Modell ein MINLP. Das vorgestellte Modelle in [Fukushima et al., 1982] wurde als MIP formuliert.

Ein ähnliches Modell wird in [De La Vega und Alem, 2014] vorgestellt. Es wird ein stochastisches Optimierungsmodell als MIP formuliert, das entscheiden soll, welche Pumpen in welchem Zeitraum zum Einsatz kommen sollen, um die als unsicher betrachtete Nachfrage erfüllen zu können. Minimiert werden hierbei die für die Pumpen benötigten Energiekosten. Wie in [Zessler und Shamir, 1989] wird dabei die Massenbilanzgleichung an den Reservoirs betrachtet, weitere hydraulische Eigenschaften werden ebenfalls nicht berücksichtigt.

Im Gegensatz dazu werden in [Geißler et al., 2011], [Gleixner et al., 2012] und [Morsi et al., 2012] Optimierungsmodelle vorgestellt, die die hydraulischen Eigenschaften innerhalb eines Wassernetzes detaillierter berücksichtigen. So werden beispielsweise die Druckverlustgleichung innerhalb der Rohre sowie der Einsatz von Ventilen beschrieben. Das Optimierungsziel der Modelle ist die Befriedigung der Nachfrage aller Kunden unter minimalen Kosten. Dabei soll an jeder Stelle im System der erforderliche Versorgungsdruck vorhanden sein, was durch die Betrachtung der Druckverlustgleichung sichergestellt ist. Die zu minimierenden Kosten sind die für die Pumpen benötigten Energiekosten. Daher wird durch das Modell eine optimale Steuerung der Pumpen bestimmt. Durch die detaillierte Betrachtung der Pumpen sowie der Druckverlustgleichung sind alle Modelle als nicht-konvexe MINLPs formuliert.

Ein ähnliches Modell wird in [Martínez et al., 2007] vorgestellt. Der Hauptunterschied liegt in der zusätzlichen Betrachtung von verschiedenen Wasserquellen, die unterschiedliche Produktionskosten aufweisen. Diese Kosten werden daher bei der Formulierung der Zielfunktion berücksichtigt.

Der Fokus des von [Burgschweiger et al., 2004] entwickelten Modells liegt auf der Minimierung der operativen Kosten innerhalb eines Wassernetzes. Dabei werden die operativen Kosten unterteilt in Kosten, die für die Förderung von Rohwasser entstehen sowie die Energiekosten, die für die Behandlung von Rohwasser und für den Einsatz von Roh- und Reinwasserpumpen anfallen. Ziel ist die Generierung eines kostenminimalen Tagesplans für ein Wasserversorgungsunternehmen unter der Annahme von deterministischen Wassernachfragewerten. Hierbei werden die gängigsten Komponenten eines Wassernetzes wie Reservoirs, Behälter und Ventile berücksichtigt. Weiterhin werden die hydraulischen Eigenschaften eines Wassernetzes im Modell integriert. Die Autoren präsentieren zwei Modellformulierungen für dieses Optimierungsproblem. Zum einen stellen sie eine Generalized Disjunctive Programming-Formulierung vor, zum anderen eine nicht-konvexe MINLP-Formulierung.

Ein ebenfalls nichtlineares Optimierungsmodell wurde in [Hähnlein, 2008] entwickelt. Das Optimierungsziel dieses Modells ist die Minimierung der steuerungsabhängigen

Kosten eines Wassernetzes. Diese Kosten sind die Energiekosten der Reinwasserpumpen. Der Einsatz der Pumpen soll durch das Modell bestimmt werden. Dabei werden Behälter, Reservoirs sowie Ventile und die zugehörigen hydraulischen Eigenschaften eines Wassernetzes berücksichtigt.

Es gibt weitere Optimierungsmodelle, die die Energiekosten für Pumpen minimieren und zusätzlich andere Eigenschaften optimieren. So präsentieren beispielsweise [Vieira und Ramos, 2008] verschiedene lineare und nichtlineare Optimierungsmodelle, die neben den Pumpen auch den Einsatz von Windkraftanlagen optimieren. Die durch die Windkraftanlagen erzeugte Energie kann für den Betrieb der Pumpen eingesetzt werden. Die hydraulischen Eigenschaften werden außerhalb des Modells mit Hilfe eines Simulationstools betrachtet. In [Biscos et al., 2004] wird hingegen zusätzlich die Minimierung der Chlorkonzentration innerhalb des Wassernetzes betrachtet. Das vorgestellte Modell ist als MINLP formuliert. Eine detaillierte Betrachtung der Hydraulik findet in diesem Modell nicht statt.

### **3.1.2 Strategische Entscheidungsprobleme**

Strategische Entscheidungsprobleme, auch Designprobleme genannt, betreffen die Auslegung von Rohren, Pumpen oder Wasserbehältern. Ein Überblick über die verschiedenen Optimierungsmodelle wird im Folgenden gegeben.

Es existieren viele Optimierungsmodelle, die sich mit der Dimensionierung von Rohren innerhalb der Wasserversorgungssysteme beschäftigen. [Montalvo et al., 2008] präsentieren ein nichtlineares Optimierungsmodell, das die kostenminimale Rohrdimensionierung für ein gegebenes Wasserversorgungssystem liefern soll. Die Zielfunktion minimiert dabei die Kosten, die für den Bau eines Rohres abhängig von der Länge und dem Durchmesser anfallen. Zusätzlich enthält die Zielfunktion einen Strafterm, der dafür sorgt, dass an jedem Knoten des Netzes der Druck über einem bestimmten Niveau liegt. Eine detaillierte hydraulische Betrachtung wird in dieser Veröffentlichung nicht vorgestellt.

Ein ähnliches nichtlineares Modell wird von [Hansen et al., 1991] vorgeschlagen, bei dem ebenfalls für ein gegebenes Wassernetz die Rohrdurchmesser mit minimalen Kosten bestimmt werden sollen. Auch hier soll sichergestellt werden, dass ein ausreichender Versorgungsdruck an den einzelnen Knoten herrscht. Dies wird hier durch die Berücksichtigung der nicht-konvexen Druckverlustgleichung sichergestellt. Die Nachfrage nach Wasser wird in diesem Modell nicht explizit berücksichtigt. Diese wird jedoch z. B. in den vorgestellten Optimierungsmodellen von [Simpson et al., 1994], [Dandy et al., 1996], [Liong und Atiquzzaman, 2004] und [Djebedjian et al., 2006] betrachtet. Bei diesen allesamt nichtlinearen Modellen soll für ein gegebenes Layout eines Wassernetz-

zes mit bekannter Wassernachfrage die kostenminimalen Rohrdurchmesser gefunden werden. Dabei werden die Massenbilanzgleichung mit Berücksichtigung der Nachfrage, die Druckverlustgleichung sowie minimale und maximale Schranken für den Druck an allen Knoten betrachtet.

Die Arbeiten [Vairavamorthy und Ali, 2000], [Cunha und Ribeiro, 2004], [Bragalli et al., 2006] und [Marques et al., 2014] präsentieren ebenfalls nichtlineare Optimierungsmodelle, die die Rohrdurchmesser unter Berücksichtigung von Nachfragebedingungen und den hydraulischen Eigenschaften des Netzes kostenminimal bestimmen sollen. Der Unterschied zu den zuvor diskutierten Modellen ist, dass die Rohrdurchmesser in diesen Modellen aus einer vorher festgelegten diskreten Menge an verschiedenen Rohrdurchmessern ausgewählt werden müssen. [Sherali und Smith, 1997] erweitern diese Optimierungsfragestellung, indem sie zusätzlich Pumpen in ihr Modell integrieren. Diese kommen zum Einsatz, falls an einem Knoten der Versorgungsdruck nicht ausreichend ist.

Weiter verfeinert wird diese Optimierungsfragestellung von [Lekane et al., 1980]. Die Autoren stellen ein mehr-periodisches lineares Programm vor, um das Design der Rohre eines Wassernetzwerkes festzulegen. Sie beziehen dabei Rohre, Pumpen sowie druckreduzierende Ventile mit in das Modell ein. Unter der Zielsetzung der Minimierung der Investitionskosten und der operativen Kosten im Planungszeitraum sollen nicht nur der Durchmesser und die Länge der Rohre bestimmt werden, sondern auch der benötigte Druck in den Pumpen, um den minimal benötigten Druck an allen Stellen im System zu gewährleisten. Weiterhin wird der Druckverlust in den Rohren mit druckreduzierenden Ventilen so bestimmt, dass der maximale Druck nicht überschritten wird. Die Standorte der Pumpen und Regler sind dabei bekannt und auch die Nachfrage wird als deterministisch vorausgesetzt.

Bei den strategischen Entscheidungsproblemen im Bereich der Trinkwasserversorgung werden jedoch nicht nur Rohre optimiert. In [Lansey und Mays, 1989] wird neben der Berechnung optimaler Rohrdurchmesser die optimale Ausprägung von Pumpen, Ventilen und Wasserbehältern betrachtet. Bei den Wasserbehältern werden das Volumen sowie die Füllhöhe bestimmt. Die zugehörige Zielfunktion bildet die Kosten der einzelnen Komponenten ab. Die optimale Entscheidung soll unter Berücksichtigung der täglichen Bedarfsschwankungen sowie den hydraulischen Eigenschaften des Netzes getroffen werden. Das vorgestellte nichtlineare Modell wird von [Cullinane et al., 1992] um Zuverlässigkeit der Systemkomponenten erweitert. Dabei ist Zuverlässigkeit definiert als die Zeit, in der alle Elemente des Wassernetzes so arbeiten, wie für den Betrieb und die Nachfrage notwendig ist.

Auch [Vamvakeridou-Lyroudia et al., 2007] und [Basile et al., 2008] betrachten die Optimierung von Trinkwasserbehältern. [Vamvakeridou-Lyroudia et al., 2007] präsen-

tieren ein Optimierungsmodell, das die Speicherkapazität und den minimalen Wasserstand eines Wassertanks bestimmt. Mit Hilfe dieser Werte werden andere Eigenschaften des Wassertanks abgeleitet, wie beispielsweise die Form des Tanks oder die in den Tanks notwendige Notfallreserve an Wasser. Die hydraulischen Eigenschaften wie die Massenbilanz und der Druckverlust werden in diesem Modell ebenfalls berücksichtigt. Auch [Basile et al., 2008] beziehen diese in ihr Modell mit ein. Das Modell soll den optimalen Standort sowie die optimale Größe von Wasserbehältern bestimmen. Das Modell wird jedoch nicht im Detail vorgestellt.

Wasserbehälter können auch unabhängig vom Versorgungsnetz betrachtet werden. Dann liegt der Fokus der Optimierung auf der Bauweise, der Struktur und den Materialien eines Wassertanks. So stellen [El Ansary et al., 2010] ein Optimierungsmodell vor, das das Design eines kegelförmigen Stahltanks optimiert. Dazu soll das Eigengewicht des Behälters minimiert werden. Dabei muss berücksichtigt werden, dass das Volumen einem vordefinierten Wert entspricht und die Wände des Behälters aufgrund des Druckes nicht ausbeulen. Ein ähnliches Modell wird von [El Ansary et al., 2011] aufgestellt. In diesem wird jedoch das Design von Behältern aus versteiftem Stahlbeton betrachtet. Beide Modelle enthalten aufgrund der geometrischen Eigenschaften und der Materialeigenschaften Nichtlinearitäten. Die Struktur eines kegelförmigen Stahlbetontanks wird von [Barakat und Altoubat, 2009] betrachtet. Die Autoren präsentieren ein nichtlineares Optimierungsmodell, das die Materialkosten des Tanks minimiert. Dabei ist der Standort des Tanks fest vorgegeben und es werden Entscheidungen über die Wanddicke, die Wandneigung und die Tiefe des Wassertanks getroffen. In [Minoglou et al., 2013] werden dünnwandige Stahltanks analysiert. Dabei sollen die kostenoptimalen Dimensionen des Tanks ermittelt werden wie beispielsweise der Radius, die Höhe und die Wanddicke des Tanks. Dabei wird insbesondere die hydrostatische Belastung auf den Tank mitberücksichtigt, da dünnwandige Stahltanks in dieser Hinsicht besonders anfällig sind.

### **3.1.3 Kombination aus operativen und strategischen Entscheidungsproblemen**

Einige Arbeiten stellen Optimierungsmodelle vor, in denen sowohl operative als auch strategische Entscheidungen getroffen werden sollen. So wird beispielsweise in der Arbeit von [Mariano-Romero et al., 2007] ein nichtlineares Optimierungsmodell aufgestellt, das ein Netzdesign finden soll, das die Nachfrage nach Frischwasser und damit das Volumen an Abwasser sowie die Investitionskosten minimieren soll. Als Designentscheidungen werden hier der Rohrdurchmesser und die Rohrlänge genannt. Als Nebenbedingungen dieses Modells werden die Massenbilanzgleichung sowie Nebenbedingungen, die die Konzentration von Kontaminationen regulieren, betrachtet. Ein Druckverlust wird hingegen nicht berücksichtigt.

In dem von [Kurek und Ostfeld, 2013] vorgestellten Modell sind die Designentscheidungen die Durchmesser der Wassertanks. Mögliche Werte für die Durchmesser werden aus einer vordefinierten diskreten Menge gewählt. Die operativen Entscheidungen betreffen den Einsatz der Pumpen sowie die Desinfektionskonzentrationen an den Wasseraufbereitungsanlagen. Diese Entscheidungsvariablen können kontinuierlich gewählt werden. Die Autoren stellen zwei unterschiedliche Modelle vor, die sich in der Zielfunktion unterscheiden. In beiden Modellen werden die operativen Kosten, die für den Betrieb der Pumpen anfallen, sowie die durch den Standort und den Durchmesser der Wassertanks anfallenden Kosten minimiert. Weiterhin wird die Wasserqualität maximiert. Im ersten Modell wird dies über die Desinfektionskonzentration abgebildet. Das zweite Modell berücksichtigt die Verweilzeit des Wassers innerhalb des Netzes. Die Entscheidungen sollen unter Berücksichtigung der hydraulischen Eigenschaften wie Massenbilanz und Druckverlust getroffen werden. Zusätzlich wird auch ein gleichmäßiger Wasserstand in den Behältern gefordert, um die Zuverlässigkeit des Wasserversorgungssystems zu gewährleisten.

In [Alperovits und Shamir, 1977] wird ebenfalls ein nichtlineares Optimierungsmodell präsentiert, das Entscheidungen sowohl im strategischen als auch im operativen Bereich ermitteln soll. Unter der Minimierung der Kapitalkosten und der operativen Kosten sollen die optimalen Rohrdurchmesser berechnet werden. Zusätzlich werden Energiekosten der Pumpen berücksichtigt, sodass deren Einsatz ebenfalls optimiert werden kann. Um einen möglichst genauen Einsatz der Pumpen und Ventile planen zu können, werden verschiedene Nachfrageszenarien sowie die Hydraulik innerhalb des Netzes berücksichtigt.

In dem von [Murphy et al., 1994] diskutierten Optimierungsmodell werden die Materialien und die Durchmesser von Rohren optimiert. Zusätzlich werden Standort, Größe und Einsatzplan von Pumpenanlagen optimal festgelegt sowie der optimale Standort und die optimale Höhenlage von Wasserbehältern bestimmt. Dabei wird darauf geachtet, dass der Versorgungsdruck immer ausreichend ist und der Wasserstand in den Behältern über einem festgelegten Niveau liegt. Da das Optimierungsmodell nicht im Detail vorgestellt wird, lässt sich keine Aussage über die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten oder Hydraulik treffen.

Die Autoren in [Farmani et al., 2005] beschreiben ein Modell, das entscheiden soll, wann Rohre erneuert werden müssen, welche Größe und welchen Standort die Behälter im Netz annehmen sollten und wie die Pumpen gesteuert werden sollen, um ein kostenminimales Netzwerk zu erhalten. Dabei sind die Kosten die Kapitalkosten für Rohre und Behälter sowie die Energiekosten, die für den Einsatz der Pumpen benötigt werden. Es soll sichergestellt sein, dass die Nachfrage der Kunden zu jeder Zeit mit dem erforderlichen Versorgungsdruck befriedigt werden kann. Auch in diesem Fall werden keine Details zu dem Modell vorgestellt.



### 3.1.4 Zusammenfassung

In den Tabellen 3.1, 3.2 und 3.3 sind alle vorgestellten Arbeiten aufgelistet sowie die Eigenschaften der betrachteten Optimierungsmodelle dargestellt. Dabei wird zwischen Fragestellungen unterschieden, die den operativen, strategischen Bereich oder eine Kombination aus beiden Bereichen betreffen. Zusätzlich wird der hauptsächlich betrachtete Optimierungsgegenstand gekennzeichnet sowie dargestellt, ob es sich bei dem Optimierungsmodell um ein MINLP handelt und ob die Hydraulik im Modell berücksichtigt wurde.

Quelle	Pumpen	Rohre	Behälter	MINLP	Hydraulik
[Fukushima et al., 1982]	x				
[Zessler und Shamir, 1989]	x			x	
[Biscos et al., 2004]	x			x	
[Burgschweiger et al., 2004]	x			x	x
[Martínez et al., 2007]	x			x	x
[Hähnlein, 2008]	x			x	x
[Vieira und Ramos, 2008]	x			x	
[Geißler et al., 2011]	x			x	x
[Gleixner et al., 2012]	x			x	x
[Morsi et al., 2012]	x			x	x
[De La Vega und Alem, 2014]	x				

Tabelle 3.1: Übersicht über die Literatur, die operative Fragestellungen behandelt

Quelle	Pumpen	Rohre	Behälter	MINLP	Hydraulik
[Lekane et al., 1980]		x		x	x
[Lansey und Mays, 1989]	x	x	x	x	x
[Hansen et al., 1991]		x		x	x
[Cullinane et al., 1992]	x	x	x	x	x
[Simpson et al., 1994]		x		x	x
[Dandy et al., 1996]		x		x	x
[Sherali und Smith, 1997]		x		x	x

Quelle	Pumpen	Rohre	Behälter	MINLP	Hydraulik
[Vairavamoorthy und Ali, 2000]		x		x	x
[Cunha und Ribeiro, 2004]		x		x	x
[Liong und Atiquzzaman, 2004]		x		x	x
[Bragalli et al., 2006]		x		x	x
[Djebeddjian et al., 2006]		x		x	x
[Vamvakeridou-Lyroudia et al., 2007]			x	x	x
[Basile et al., 2008]			x	x	x
[Montalvo et al., 2008]		x		x	
[Barakat und Altoubat, 2009]			x	x	
[El Ansary et al., 2010]			x	x	
[El Ansary et al., 2011]			x	x	
[Minoglou et al., 2013]			x	x	
[Marques et al., 2014]		x		x	x

Tabelle 3.2: Übersicht über die Literatur, die strategische Fragestellungen behandelt

Quelle	Pumpen	Rohre	Behälter	MINLP	Hydraulik
[Alperovits und Shamir, 1977]	x	x		x	x
[Murphy et al., 1994]	x	x	x		
[Farmani et al., 2005]	x	x	x		
[Mariano-Romero et al., 2007]		x		x	
[Kurek und Ostfeld, 2013]	x		x	x	x

Tabelle 3.3: Übersicht über die Literatur, die eine Kombination aus operativen und strategischen Fragestellungen behandelt

Es ist zu erkennen, dass in der operativen Planung hauptsächlich der Einsatz von Pumpen Gegenstand der Optimierung ist. In den meisten Fällen ist das Optimierungsmodell als MINLP formuliert und viele Arbeiten berücksichtigen die hydraulischen Eigenschaften eines Wassernetzes. In strategischen Fragestellungen werden sowohl Rohre als auch Wasserbehälter hinsichtlich der Durchmesser, der Standorte oder der Mate-

rialien optimiert. In den Artikeln, in denen Wasserbehälter unabhängig vom Versorgungsnetz betrachtet werden, ist keine Hydraulik des Netzes berücksichtigt. Fast alle Modelle im strategischen Bereich sind als MINLP formuliert. Bei den operativen und strategischen Fragestellungen werden sowohl Pumpen, Rohre als auch Wasserbehälter betrachtet. Jedoch werden hier nicht alle Modelle als MINLP formuliert und nicht alle Modelle beziehen die hydraulischen Eigenschaften in das Modell mit ein. Daher soll im Rahmen dieser Arbeit ein Optimierungsmodell zur Optimierung von Trinkwasserbehältern entwickelt werden, das die hydraulischen Eigenschaften eines Wassernetzes berücksichtigt.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie Optimierungsmodelle im Bereich der Wasserversorgungssysteme gelöst werden können. Im folgenden Abschnitt wird daher ein Überblick über verschiedene Lösungsansätze gegeben.

## 3.2 Lösungsansätze für Optimierungsmodelle im Bereich von Wasserversorgungssystemen in der Forschungsliteratur

Der überwiegende Teil der Modelle der betrachteten Entscheidungsprobleme im Bereich von Wasserversorgungssystemen ist als nichtlineares Optimierungsmodell formuliert. Um diese Modelle zu lösen, gibt es verschiedene Ansätze, die hier unterteilt sind in LP- und NLP-basierte Lösungsverfahren sowie heuristische Lösungsansätze. Diese werden in den folgenden zwei Abschnitten vorgestellt.

### 3.2.1 LP- und NLP-basierte Lösungsverfahren

Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten für Optimierungsfragestellung im Bereich der Wasserversorgungssysteme, die auf linearer bzw. gemischt-ganzzahliger oder auch nichtlinearer Programmierung beruhen. Einige dieser Ansätze werden im Folgenden diskutiert.

In [Alperovits und Shamir, 1977] wird eine Lösungsmethode vorgestellt, die die Autoren *Linear Programming Gradient (LPG)* nennen. Diese Methode beinhaltet eine hierarchische Dekomposition des Problems in zwei Stufen. In der ersten Stufe werden einige Variablen auf einen festen Wert fixiert. In diesem Fall sind es die Flussvariablen, die die Volumenströme innerhalb des Netzes abbilden. Das verbleibende Modell kann dann als lineares Programm formuliert werden, wobei eventuell auftretende Nichtlinearitäten linearisiert werden. Dieses Modell, das unter anderem die optimalen Druckhöhen bestimmt, kann dann mit bekannten LP-Techniken gelöst werden. Die zweite Stufe umfasst die Verbesserung der vorher fixierten Flussvariablen. Um verbesserte Werte zu

finden, wird eine Suchtechnik angewendet, die den Gradienten der Zielfunktion nach den Flussvariablen benutzt. Der Gradient wird dabei mit Hilfe der Dualvariablen des LPs aus der ersten Stufe bestimmt. Die beiden Stufen werden iterativ angewendet, bis ein vorher definiertes Konvergenzkriterium erreicht ist. Die Autoren zeigen, dass mit dieser Methode ein lokales Optimum gefunden werden kann. Evaluiert wird der vorgeschlagene Algorithmus an einem Wasserversorgungsnetz, das 51 Knoten und 65 Kanten enthält. Wegen der Nutzung bekannter LP-Techniken wird diese Methode von z. B. [Kessler und Shamir, 1989], S. 1469, als attraktiv angesehen. [Lansey und Mays, 1989], S. 1401-1402, hingegen kritisieren, dass mit diesem Ansatz nur Netze mit einer relativ kleinen Größe gelöst werden können.

In dem Modell von [Lekane et al., 1980], welches das Design eines Wasserversorgungssystems festlegen soll, werden alle Bestandteile des Modells linear formuliert, sodass direkt bekannte LP-Techniken angewendet werden können. Die nichtlineare Zielfunktion wird dabei durch einen linearen Ausdruck approximiert. Der Druckverlust wird so modelliert, dass gefordert wird, dass dieser sich zwischen einer unteren und einer oberen Schranke befinden muss. Durch die Möglichkeit des Einsatzes von linearen Programmierungstechniken werden akzeptable Lösungszeiten für das untersuchte Fallbeispiel erreicht. Dieses hat eine Größe von 24 Knoten und 24 Kanten.

Auch das Optimierungsmodell zur optimalen Steuerung von Pumpen, das in [Fukushima et al., 1982] präsentiert wird, ist als gemischt-ganzzahliges Programm formuliert. Gelöst wird dieses Modell mit Hilfe einer *Lagrange-Relaxation* und eines *Subgradientenverfahrens*. Die vorgeschlagene Methode wird an einem Testnetz, das 8 Pumpen betrachtet, evaluiert.

Das für die Entscheidung über optimale Rohrdurchmesser formulierte Modell von [Hansen et al., 1991] ist hingegen als MINLP formuliert. Die Lösung des Modells erfolgt mit einer iterativen Methode. Die nichtlineare Zielfunktion sowie die nichtlineare Druckverlustgleichung werden mit Hilfe einer *Taylor-Funktion* linear approximiert. Anschließend wird das entstandene LP mit Standardmethoden gelöst. Da die Durchmesser der Rohre in diesem Modell nur diskrete Werte annehmen dürfen, wird die Schrittweite des anschließenden Variablen-Updates so gewählt, dass die Variablen für die Rohrdurchmesser zulässige Werte annehmen. Mit den neuen Rohrdurchmessern wird eine weitere Iteration gestartet, die erneut die Taylor-Approximation anwendet. Die Methode wird an einem Testnetz mit 169 Knoten und 201 Rohren als sehr effizient und stabil evaluiert. Es wird darauf hingewiesen, dass je nach Initiallösung unterschiedliche Lösungen für das Optimum generiert werden. Jedoch liegen alle Lösungen nahe der besten gefundenen Lösung.

In dem Modell von [Sherali und Smith, 1997] werden ebenfalls die Parameter von Rohren optimiert. Gelöst wird dieses Modell, indem zunächst eine *Reformulierungs-*

*Linearisierungs-Technik* angewendet wird. Damit wird eine LP-Relaxation des nicht-konvexen Modells erstellt, welche dann mit Hilfe eines *Branch-and-Bound-Algorithmus* gelöst wird. Die Autoren geben an, dass sie das Modell damit global  $\varepsilon$ -optimal mit einer Genauigkeit von  $\varepsilon > 0$  lösen können. Getestet wird das Verfahren an einem aus [Alperovits und Shamir, 1977] bekannten Modell mit 7 Knoten und 8 Kanten. [Sherali et al., 2001] verbessern die vorgestellte Methode, indem bessere Relaxations-Formulierungen vorgeschlagen werden sowie effektivere Partitioning- und Branchingstrategien innerhalb des Branch-and-Bound-Algorithmus angewandt werden.

Von [Geißler et al., 2011] und [Morsi et al., 2012] wird eine stückweise Linearisierung der nichtlinearen Anteile des Modells betrachtet. Sie benennen die verwendete Linearisierungstechnik *inkrementelle Methode*, die in der Literatur, aber meist unter anderem Namen wie z. B. *Linearisierung mit L01-Variablen*, weit verbreitet ist, siehe z. B. [Padberg, 2000] oder [Friedrich, 2007], S. 26. Dabei nutzen sie ein adaptives Approximationsschema, das dafür sorgt, dass die zu linearisierende Funktion an Stellen, an denen sie eine stärkere Krümmung aufweist, mehr Stützstellen hat. An Stellen, die glatter sind, werden dagegen weniger Stützstellen verwendet. So wird erreicht, dass die Funktion genauer approximiert werden kann, jedoch nicht zu viele Stützstellen und damit Variablen im Modell verwendet werden. Die Methode wird ausführlich in [Geißler, 2011] diskutiert. Zudem wird dort in diesem Zusammenhang die Implementierung einer Fehlerschranke vorgeschlagen, sodass die Differenz der entstandenen Approximation zu der Original-Funktion unter dieser Fehlerschranke liegt. In [Geißler et al., 2012] werden zusätzlich verschiedene Möglichkeiten der stückweisen Linearisierung diskutiert, wie z. B. die *Konvexkombinationsmethode* oder die *Multiple Choice-Methode*. Dabei stellen die Autoren fest, dass die oben genannte inkrementelle Methode den anderen Varianten überlegen ist. Zusätzlich stellen die Autoren vor, wie die SOS2-Formulierungen, die für die Modellierung der stückweisen Linearisierung benötigt werden, innerhalb eines Branch-and-Bound-Algorithmus effektiv genutzt werden können, um diesen zu beschleunigen. In den Artikeln [Geißler et al., 2011], [Morsi et al., 2012], [Geißler, 2011] und [Geißler et al., 2012] werden jeweils Beispielinstanzen angegeben, für die die stückweise Linearisierungstechnik inkrementelle Methode evaluiert wurde. Auf die Größe der Instanzen wird dabei nicht im Detail eingegangen. Die Autoren geben an, dass die Lösung ein globales Optimum liefert, das aufgrund der vordefinierten Fehlerschranke innerhalb einer vorgegebenen Toleranz liegt. In [Geißler et al., 2012] wird zudem die Frage diskutiert, wie sinnvoll die Lösung eines MINLPs mit Hilfe einer Approximation durch ein MIP ist. Sie sehen als Vorteil der MIP-Formulierung, dass die Lösungsmethoden für MIPs sehr gut erforscht sind und daher eine global optimale Lösung innerhalb einer kurzen Lösungszeit gefunden werden kann. Den Nachteil sehen die Autoren darin, dass die Lösung nur für eine Approximation des MINLPs generiert wird und sie stellen daher die Frage, welche Bedeutung diese Lösung für das ursprüngliche MINLP hat. Sie finden heraus, dass sie mit Hilfe der stückweisen Linearisierung

eine global optimale Lösung innerhalb einer vordefinierten Fehlerschranke finden. Die Anwendung der vorgestellten Technik eignet sich besonders, wenn es nur wenige nicht-lineare Funktionen im Modell gibt, die wiederum nur von einer geringen Anzahl an unterschiedlichen Variablen abhängen. In [Geißler et al., 2011] wird zudem gezeigt, dass sich die Anwendung des Verfahrens auf dynamische Transportnetzwerke, wie z. B. Wasserversorgungssysteme, eignet, um die zugrundeliegenden Optimierungsmodelle zu lösen.

In [Bragalli et al., 2012] werden die Modelle unter Nutzung der MINLP Solver BONMIN, vgl. [Bonami et al., 2008], und BARON, vgl. [Tawarmalani und Sahinidis, 2002], gelöst. Die Autoren vergleichen die Ergebnisse mit der Anwendung einer stückweisen Linearisierung und stellen fest, dass die Nutzung der NLP- bzw. MINLP-Solver effizienter ist. Dies begründen sie damit, dass für eine möglichst exakte Lösung sehr viele Stützstellen bei der stückweisen Linearisierung benötigt werden und daher hohe Lösungszeiten zu erwarten sind. Sie evaluieren die Techniken anhand der neun Testmodelle, die auch von [Raghunathan, 2013] genutzt wurden.

Die Autoren in [Collins et al., 1978] nutzen in ihrem Artikel ebenfalls eine stückweise Linearisierung, präsentieren aber auch drei weitere Lösungsmethoden. Dies sind die *Frank-Wolfe-Methode*, die *konvexe Simplex-Methode* sowie die *Newton-Raphson-Methode*. Bei der Approximation der nichtlinearen Funktionen durch eine stückweise Linearisierung weisen die Autoren darauf hin, dass für die zu linearisierenden Variablen eine gute obere Schranke gewählt werden muss, um die Qualität der Approximation zu verbessern. Bei der Frank-Wolfe-Methode wird ausgehend von einer zulässigen Lösung für das zugrundeliegende Modell die nächste Lösung mit Hilfe des Gradienten der Zielfunktion gefunden. Dazu wird ein Unterproblem in Form eines LPs gelöst. Falls die Unterprobleme einfach zu lösen sind, ist diese Methode sehr effizient. Die Autoren beschleunigen diese Methode durch eine zusätzliche Linien-Suche. Die konvexe Simplex-Methode ist eine Verallgemeinerung der Simplex-Methode für LPs. Der Unterschied liegt darin, dass die Nichtbasisvariablen auch Werte zwischen der oberen und unteren Schranke annehmen können. Wenn eine Nichtbasisvariable in einer Simplex-Iteration als eintretende Variable ausgewählt wurde, wird eine eindimensionale Suche durchgeführt, um die Veränderung des Wertes dieser Variable zu ermitteln. Dabei wird sichergestellt, dass diese Veränderung eine Verbesserung der aktuellen Lösung darstellt. Die Newton-Raphson-Methode ist eine iterative Lösungsmethode, um nichtlineare Gleichungssysteme zu lösen. Die Autoren testen alle Methoden an einem Testnetz, das 452 Knoten und 530 Kanten besitzt. Dabei stellen sie unter anderem fest, dass die Konvergenzeigenschaften der konvexen Simplex-Methode und der stückweisen Linearisierung den anderen Methoden überlegen sind, wobei sich die stückweise Linearisierung dabei am besten verhält.

Die Benutzung der Newton-Raphson-Methode wird ebenfalls in [Shamir, 1974] vorgestellt. Die Autoren präsentieren einen Ansatz, der eine modifizierte Newton-Raphson-Methode nutzt, um die Flussvariablen zu bestimmen. Weiterhin wird eine Kombination aus *Generalized Reduced Gradient-Algorithmus (GRG-Algorithmus)*, vgl. [Mantell und Lasdon, 1977], und Lagrange-Bestrafungsfunktion genutzt, um eine Optimierung durchzuführen. Da die Autoren davon ausgehen, dass ein Knoten innerhalb eines Netzes nicht mit viel mehr als fünf anderen Knoten verbunden ist, daher also die Inzidenzmatrix sehr dünn besetzt ist, werden innerhalb der Newton-Raphson-Methode spezielle Techniken für dünnbesetzte Matrizen angewendet. Die Methode wird anhand eines Testnetzes mit 25 Knoten und 40 Kanten evaluiert.

Auch [Lansey und Mays, 1989] sowie [Cullinane et al., 1992] benutzen einen GRG-Algorithmus. Das vorgestellte nichtlineare Modell wird durch eine Kombination aus Problem-Reduktionstechniken, nichtlinearer Programmierung und hydraulischer Simulation gelöst. Die verwendete Problem-Reduktionstechnik ist eine analytische Variablen-Reduktionstechnik, welche die Problemgröße reduziert. Nach der Reduktion wird das Modell in kleinere Unterprobleme unterteilt, deren hydraulische Nebenbedingungen wie die Massenbilanzgleichung und die Druckverlustgleichung mittels eines hydraulischen Simulators gelöst werden. Damit reduziert sich die Anzahl der Nebenbedingungen des Modells, das anschließend mit einem GRG-Algorithmus gelöst wird. Dieser nutzt eine Lagrange-Bestrafungsfunktion, um den iterativen Prozess dieses Algorithmus zu steuern. Die Autoren geben an, dass für die gefundene Lösung keine globale Optimalität garantiert werden kann. Der Algorithmus wird in [Lansey und Mays, 1989] an zwei Netzwerken evaluiert, die 16 Knoten und 34 Kanten bzw. 17 Knoten und 17 Kanten besitzen. In [Cullinane et al., 1992] kommen zwei Testnetze mit 14 Knoten und 21 Kanten sowie 14 Knoten und 20 Kanten zum Einsatz.

Mit der Reduktion der Problemgröße beschäftigt sich ebenfalls [Hähnlein, 2008], der zunächst ein sogenanntes *Skelett-Modell* des betrachteten Netzes konstruiert, um so die Komplexität des Modells zu verringern. Dazu werden nur die Komponenten des Netzes berücksichtigt, die unbedingt für die hydraulische Berechnung des Netzes notwendig sind. Gelöst wird das so entstandene Modell mittels *dynamischer Programmierung* und eines *Knoten-Strang-Verfahrens*. Die entwickelte Methode wird an realen Praxisinstanzen evaluiert, deren Größe nicht angegeben wird.

Dynamische Programmierung wird auch von [Zessler und Shamir, 1989] eingesetzt, um das vorgestellte NLP zu lösen. Da die betrachteten Modelle laut den Autoren zu groß werden, um diese mit der konventionellen dynamischen Programmierung zu lösen, wird ein Verfahren angewendet, das sich *Progressive Optimality* nennt, welches eine iterative Form der dynamischen Programmierung ist. Dieses Verfahren wird anhand eines realen Netzes getestet und findet ein globales Optimum, falls das Modell nur konvexe Funktionen enthält, sonst ein lokales Optimum.

In [Burgschweiger et al., 2005] werden Reduktionstechniken sowie weitere Beschleunigungstechniken zur Lösung eines nicht-konvexen MINLPs diskutiert. Das vorgestellte MINLP wird mittels eines gradienten-basierten Algorithmus gelöst. Es werden verschiedene Techniken zur Konvergenzbeschleunigung dieses Algorithmus vorgestellt. Eine dieser Techniken befasst sich mit der Modellformulierung. Bei dieser Technik wird die Druckverlustgleichung geglättet, um bestimmte mathematische Eigenschaften dieser Gleichung ausnutzen zu können. Weiterhin wird eine Initialisierungsstrategie für den NLP-Algorithmus vorgestellt, bei der das zugrundeliegende NLP als LP relaxiert und gelöst wird. Die Autoren stellen zudem Netzwerkreduktionstechniken vor, die die Größe des Netzmodells reduzieren. Auf diese Techniken wird in Kapitel 5 dieser Arbeit noch genauer eingegangen. Die vorgestellten Techniken werden anhand eines realen Netzes mit 1481 Knoten und 1935 Kanten evaluiert.

Die Autoren in [Kolb et al., 2012] wählen einen anderen Ansatz und stellen eine Lösungsmethode vor, die MIP- und MINLP-Techniken kombiniert. Dabei wird die Lösung des MIPs als Input für das MINLP genutzt. Der Vorteil beider Verfahren kann hierbei ausgenutzt werden: Bei MIP-Algorithmen wird eine global optimale Lösung erreicht, bei MINLP-Techniken werden in relativ kurzer Zeit lokal optimale Lösungen gefunden, die physikalisch korrekt sind. Die Autoren präsentieren zusätzlich eine Heuristik, um zulässige Lösungen für das MINLP zu generieren. Dazu werden binäre Entscheidungsvariablen relaxiert und ein Bestrafungsterm der Zielfunktion hinzugefügt. Anschließend wird eine Optimierung durchgeführt und falls sich die Variablen innerhalb der vordefinierten Schranke befinden, können die Binärvariablen fixiert werden. Falls sich die Variablen außerhalb ihrer Schranken befinden, wird eine neue Iteration gestartet, bei der der Bestrafungsterm angepasst wird. Die Lösungsmethode wird an zwei Netzen getestet, von denen das eine 20 Knoten und 16 Kanten hat. Die Größe des anderen Netzes wird nicht näher beschrieben, es handelt sich jedoch um ein reales Netzwerk. Die Autoren geben an, dass sich die Lösungsmethode gut eignet, um operative Planungsprobleme zu lösen, da global optimale Lösungen gefunden werden können, die zusätzlich physikalisch korrekt sind.

Einen anderen Ansatz wählen [Cai et al., 2001b], die die betrachteten nicht-konvexen NLPs mit einer *Generalized Benders-Dekomposition (GBD)* lösen. Dazu werden einige der Variablen des Problems als sogenannte *komplizierte Variablen* definiert. Diese Variablen werden definiert als Variablen, die dazu führen, dass nicht-konvexe Funktionen im Modell existieren und für die das Modell bei Fixierung auf einen festen Wert konvex wird. Ausgehend von dieser Aufteilung der Variablen wird das Modell in ein Masterproblem und ein Unterproblem unterteilt, wobei das Masterproblem dabei alle Nebenbedingungen enthält, in denen nur komplizierte Variablen vorkommen. Das Unterproblem hingegen beinhaltet alle anderen Nebenbedingungen, in denen entweder nur nicht-komplizierte Variablen oder beide Variablentypen vorkommen. Die komplizierten Variablen werden initialisiert und diese Werte dem Unterproblem übergeben,



das anschließend gelöst wird. Ausgehend von dieser Lösung wird ein Cut generiert, der dem Masterproblem hinzugefügt wird. Dieses wird dann erneut gelöst und damit neue Werte für die komplizierten Variablen generiert. Diese werden wieder an das Unterproblem übergeben. Diese Schleife wird solange durchlaufen, bis die obere Schranke (Zielfunktionswert des Masterproblems) und die untere Schranke (Zielfunktionswert des Unterproblems) nah genug beieinander liegen. Der Vorteil dieser Methode ist, dass durch die Dekomposition des Modells die zu lösenden Modelle keine nicht-konvexen Anteile mehr enthalten. Die Autoren wenden die Generalized Benders-Dekomposition auf zwei Beispielm Modelle an und geben an, dass mit dieser Methode eine gute Approximation an die globale Lösung gefunden werden kann.

Eine Dekomposition des Modells wird auch von [Kessler und Shamir, 1989] diskutiert, die diese für die Modellformulierung von [Alperovits und Shamir, 1977] vorschlagen. Dazu werden zwei Unterprobleme aufgestellt, die iterativ gelöst werden. In dem ersten Unterproblem werden die Druckvariablen fixiert und die Flussvariablen ermittelt. Dazu wird ein *Minimum Concave Cost Flow-Algorithmus* genutzt, welcher eine Variante eines *Minimum Cost Flow-Algorithmus* ist. In dem zweiten Unterproblem werden umgekehrt die Flussvariablen fixiert und so die Druckvariablen mittels linearer Programmierung ermittelt. Es wird gezeigt, dass die Methode gegen ein lokales Optimum konvergiert. Die Methode wird anhand zwei kleinerer Testprobleme evaluiert, die 6 Knoten und 6 Kanten bzw. 9 Knoten und 9 Kanten haben.

Die Autoren in [Eiger et al., 1994] nutzen ebenfalls die Modellformulierung von [Alperovits und Shamir, 1977] und entwickeln für diese eine alternative Methode, um das Modell zu lösen. Die Methode basiert auf der Idee eines Branch-and-Bound-Algorithmus und nutzt nicht-glatte Optimierungstechniken sowie Dualitätstheorie. Um die Methode anwenden zu können, wird das Modell in ein nicht-glatte, nicht-konvexes Masterproblem und ein inneres lineares Problem unterteilt. Es wird gezeigt, dass der Algorithmus eine Lösung gefunden hat, wenn die Differenz zwischen der besten bisher gefundenen Lösung und der globalen unteren Schranke sich innerhalb einer vordefinierten Toleranzgrenze befindet. Evaluiert wird der Algorithmus an den aus der Literatur bekannten Netzen *Two-loop* und *Hanoi* sowie an einer Erweiterung des Netzes *Two-Loop* und einem realen Netz mit 52 Knoten und 68 Rohren.

Auch [Raghunathan, 2013] stellen eine Methode vor, die einen Branch-and-Bound-Algorithmus nutzt. Die präsentierte Methode kann auf Optimierungsmodelle angewendet werden, bei denen die Druckverlustgleichung über eine konvexe, monoton steigende Funktion modelliert ist. Das bedeutet, dass die Flussrichtung innerhalb eines Rohres bekannt sein muss. Ist dies nicht der Fall, kann das Modell jedoch so umformuliert werden, dass für jedes Rohr die Flussrichtung bekannt ist. Dazu werden für jedes Rohr zwei verschiedene Flussvariablen definiert, die jeweils den Fluss in die entgegengesetzte Richtung angeben. Hier muss zusätzlich sichergestellt sein, dass nur eine

der beiden Variablen von Null verschieden ist. Durch diese Umformulierung wird das nicht-konvexe MINLP zu einem konvexen MINLP. Das so entstandene Modell wird mit einem *LP/NLP-Branch-and-Bound-Algorithmus* gelöst. Dazu wird zunächst ein MIP hergeleitet, das durch Linearisierung der konvexen, nichtlinearen Nebenbedingungen entsteht. Diese Linearisierungen, die innerhalb des LP/NLP-Branch-and-Bound-Algorithmus benutzt werden, werden so verbessert, dass für die zugrundeliegende Problemstellung eine global optimale Lösung garantiert werden kann. Das Verfahren wird an neun verschiedenen Testnetzen evaluiert, die teilweise der Literatur entstammen, z. B. *Hanoi* oder *New York*, und teilweise reale Netze italienischer Städte sind. Die Größe der Netze variiert dabei von 8 Knoten und 8 Kanten bis hin zu 276 Knoten und 317 Kanten.

Die Arbeit von [Gleixner et al., 2012] diskutiert ebenfalls unter anderem den Einsatz eines Branch-and-Bound-Algorithmus. Das vorgestellte nicht-konvexe MINLP wird mit Hilfe von problemspezifischen Presolving-Techniken und state-of-the-art MINLP-Algorithmen gelöst. Einer dieser Algorithmen ist ein Branch-and-Bound-Algorithmus für MINLPs. Dieser teilt das Problem sukzessive in kleinere Teilprobleme auf, bis diese einfach zu lösen sind. Für den Bounding-Prozess werden bei nicht-konvexen Modellen oft konvexe Unterschätzer genutzt, um eine lösbare konvexe Relaxation des nicht-konvexen Unterproblems zu erhalten. Für den Branching-Prozess werden entweder Variablen genutzt, die ganzzahlig sein sollen, aber in der aktuellen Lösung fraktionale Werte besitzen oder Variablen, die in verletzten nicht-konvexen Nebenbedingungen auftauchen. Ein weiterer beschriebener Algorithmus ist die *Outer Approximation (OA)*. Hierbei werden die konkaven und konvexen Hüllen der nicht-konvexen Funktionen mittels einer linearen äußeren Approximation abgeschätzt. Falls die relaxierte Lösung die nichtlinearen Nebenbedingungen verletzt, kann die Approximation weiter verfeinert werden. Zusätzlich wird eine Heuristik eingesetzt, die im Branch-and-Bound-Baum frühzeitig eine gute Lösung finden soll, um den Suchprozess zu beschleunigen. Das problemspezifische Presolving umfasst unter anderem die Ausnutzung der Tatsache, dass an einem Knoten, an dem eine Nachfrage hinterlegt ist, mindestens eine Flussvariable, die zu diesem Knoten führt, von Null verschieden sein muss. Außerdem werden parallele Pumpen, bestimmte Rohr-Ventil-Sequenzen sowie Rohrsequenzen zusammengefasst. Die Algorithmen werden an zwei Testmodellen evaluiert, welche 25 Knoten und 22 Kanten bzw. 88 Knoten und 64 Kanten besitzen. Die Modelle werden mittels SCIP, vgl. [Berthold et al., 2012], gelöst und eine  $\varepsilon$ -globale Optimalität wird gezeigt.

Auch [Fügenshuh und Humpola, 2013] lösen das von ihnen betrachtete nicht-konvexe MINLP mittels eines LP/NLP-Branch-and-Bound-Algorithmus. Innerhalb dieses Algorithmus können verschiedene Relaxationen angewendet werden. So können z. B. die Schranken der Fluss- und Druckvariablen durch die Einführung von Schlupfvariablen relaxiert werden, die in der Zielfunktion minimiert werden. Die vorgestellten Methoden

werden an fünf Testnetzen mit bis zu 500 Rohren evaluiert. Diese Testnetze sind Gasverteilungsnetze, die vorgestellten Methoden werden jedoch auch für die Anwendung auf Wassernetze empfohlen.

In [Vieira und Ramos, 2008] werden die vorgestellten Optimierungsmodelle mittels einer Kombination aus LP-Solver bzw. NLP-Solver und eines hydraulischen Simulators, in diesem Fall *EPANET*, vgl. [Rossman, 2000], gelöst. Die NLP-Techniken werden hier nicht näher spezifiziert. Die Kombination mit *EPANET* soll sicherstellen, dass alle hydraulischen Eigenschaften des Netzes in der optimalen Lösung erfüllt sind.

Die Kombination mit einem hydraulischen Simulator wird oft auch in Lösungsmethoden diskutiert, die einen heuristischen Ansatz wählen. Daher bietet der nächste Abschnitt einen Überblick über heuristische Lösungsansätze für Optimierungsmodelle im Bereich von Wasserversorgungssystemen.

### 3.2.2 Heuristische Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt werden verschiedene heuristische Ansätze zur Lösung von Optimierungsfragestellungen im Bereich von Wasserversorgungssystemen vorgestellt. Diese Ansätze liefern in vielen Fällen Lösungen, die nah an einer global optimalen Lösung sind, jedoch kann eine globale Optimalität nicht sichergestellt werden.

In [Simpson et al., 1994] wird ein Modell für ein Netzwerkdesign-Problem mittels eines *genetischen Algorithmus (GA)* gelöst. Bei einem genetischen Algorithmus basiert die Grundidee auf den genetischen Prozessen eines biologischen Organismus und den dazugehörigen Evolutionsmechanismen. Am Anfang wird eine Population von Individuen festgelegt, meist in Form von Binärketten. Diese Individuen werden anhand ihrer Fitness bewertet, die durch die Auswertung einer Fitnessfunktion ermittelt werden kann. Basierend auf dieser Fitness werden einige Individuen ausgewählt und modifiziert. Diese Modifikation wird mittels Mutationen und Rekombinationen erreicht. Damit entsteht eine neue Population, deren Individuen wiederum auf ihre Fitness hin überprüft werden. Dieser iterative Prozess wird einige Male durchlaufen, bis ein Abbruchkriterium erreicht ist. Für die Kodierung der Variablenbelegung eines Individuums nutzen die Autoren eine binäre Kodierung, die die Belegung der Design-Variablen repräsentiert. Der Algorithmus wird anhand des Netzes *14-Pipe*, das 12 Knoten und 14 Kanten besitzt, getestet. Die Autoren stellen fest, dass eine global optimale Lösung für diese Testnetze schon nach wenigen Iterationen gefunden werden kann.

Die Autoren in [Dandy et al., 1996] stellen ebenfalls ein Modell für ein Netzwerkdesign-Problem vor, für dessen Lösung sie einen modifizierten, verbesserten GA verwenden. Die Verbesserungen des GAs bestehen aus drei Modifikationen. Zum einen wird eine

Skalierung der Fitnessfunktion vorgenommen und zum anderen wird ein *Adjacency Mutation Operator* genutzt, der die benachbarten Gene untersucht, um so die lokale Umgebung der aktuellen Lösungen zu untersuchen. Weiterhin wird statt einer binären Kodierung, wie z. B. in [Simpson et al., 1994] ein *Gray Coding* zur Kodierung der Lösungen genutzt, das den Vorteil hat, dass ähnliche Lösungen ähnlich kodiert sind. Dieser verbesserte GA wird an dem Testnetz *New York* mit 20 Knoten und 21 Kanten evaluiert und die Autoren stellen fest, dass der verbesserte GA effizienter als der normale GA ist und ebenfalls anderen Optimierungsmethoden wie beispielsweise linearen, dynamischen oder nichtlinearen Programmierungstechniken überlegen ist.

In [Vairavamorthy und Ali, 2000] wird das Netzwerkdesign-Problem ebenfalls mittels eines GAs gelöst. Die Autoren nennen zunächst die Schwierigkeiten, die bei Verwendung eines GAs bei anderen Autoren, siehe z. B. [Dandy et al., 1996], aufgetreten sind. Dies sind zum einen Redundanzen, die dadurch entstehen, dass die diskreten Werte der Rohrdurchmesser als Binär-Code kodiert werden. Zum anderen müssen für jedes Mitglied der Population die hydraulischen Eigenschaften überprüft werden. Dies kann zu einem hohen rechnerischen Aufwand führen. Um diesen beiden Schwierigkeiten entgegen zu wirken, schlagen die Autoren vor, die Kodierung der Rohrdurchmesser durch reelle Werte vorzunehmen. Weiterhin nutzen sie eine lineare Transformationsfunktion, die die hydraulischen Eigenschaften eines Wassernetzes approximiert. Damit können die hydraulischen Nebenbedingungen schneller überprüft werden. Der genetische Algorithmus mit diesen Verbesserungen wird an den Testnetzen *Hanoi* und *New York* evaluiert. Die Autoren geben an, dass keine globale Optimalität mit diesem Algorithmus garantiert werden kann.

Eine Kombination aus einem genetischen Algorithmus und einer *Finiten-Elemente-Methode (FEM)* wird in [El Ansary et al., 2010] präsentiert. Das betrachtete Optimierungsmodell soll das optimale Design eines einzelnen Behälters bestimmen. Dabei wird die FEM dazu genutzt, den kegelförmigen Tank zu modellieren. Der GA legt eine Startpopulation für die Designparameter fest. Danach wird mit Hilfe der FEM jede Belegung der Parameter überprüft und eine Zielfunktion ausgewertet. Anschließend werden die Lösungen sortiert und neue Individuen erzeugt. Diese Schritte werden wiederholt bis ein Abbruchkriterium erreicht wurde. Der Ansatz wird anhand des Wasserturms in Fredericton getestet.

In [Djebbedjian et al., 2006] wird ein GA in Kombination mit einem Newton-Verfahren vorgestellt. Dieser Ansatz wird genutzt, um ein Modell für das Netzwerkdesign-Problem zu lösen. Dabei wird das Newton-Verfahren angewendet, um die Lösungen hinsichtlich ihrer hydraulischen Eigenschaften zu evaluieren. Getestet wird der Algorithmus anhand einer realen Fallstudie, deren Wassernetz 341 Knoten und 389 Kanten besitzt.

### 3.2 Lösungsansätze für Optimierungsmodelle im Bereich von Wasserversorgungssystemen in der Forschungsliteratur

---

Ein ähnlicher Ansatz wird von [Murphy et al., 1994] verfolgt. Sie verwenden zur Evaluation der hydraulischen Eigenschaften eine *extended period Simulation (EPS)*, welche eine hydraulische Simulation über mehrere Zeitschritte durchführt. Diese wird in einem GA integriert. Das Verfahren wird anhand des Testnetzes *Anytown* mit 25 Knoten und 46 Kanten evaluiert. Dieses Testnetz wurde ebenfalls von [Vamvakieridou-Lyroudia et al., 2007] verwendet, um ihren Ansatz zu testen. Sie präsentieren einen GA, der *Fuzzy-Logik* nutzt und auf ein multi-kriterielles Modell angewendet wird. Auch hier wird eine hydraulische Simulation des Netzes durchgeführt, die den Zufluss sowie die Entnahme eines Wassertanks berechnet. Damit kann das Tanklevel für den nächsten Zeitschritt mit Hilfe des GA berechnet werden. Dieses Vorgehen wird für alle definierten Zeitschritte durchgeführt.

Die Anwendung eines Simulationstools ist ebenfalls in der Arbeit von [Martínez et al., 2007] zu finden. Sie wählen zur Lösung ihres Modells für die Bestimmung des operativen Betriebs eines Wasserversorgungssystems eine Kombination aus künstlich neuronalen Netzen, einem Simulationstool und einem dynamischen genetischen Algorithmus. Dabei werden die neuronalen Netze in Kombination mit dem Simulationstool EPANET genutzt, um den Einfluss verschiedener Ventil- und Pumpeneinstellungen vorherzusagen. Der GA wird verwendet, um die beste Kombination dieser Einstellungen für alle Zeitpunkte zu bestimmen. Das vorgestellte Verfahren wird an einer realen Fallstudie getestet. Dabei handelt es sich um das Wasserversorgungssystem von Valencia, dessen Netzmodell mit 725 Knoten und 772 Kanten modelliert wurde.

Ein genetischer Algorithmus wird ebenfalls von [Cai et al., 2001a] verwendet. Sie stellen einen Ansatz vor, der einen genetischen Algorithmus mit linearen Programmierungstechniken kombiniert. Dazu identifizieren sie sogenannte „komplizierte“ Variablen im Modell. Variablen gelten dabei als kompliziert, wenn das Modell nach deren Fixierung auf einen Wert zu einem LP wird. Der GA bestimmt als Lösungen verschiedene Werte für diese Variablen und berechnet dann die Fitness dieser Lösungen, indem jeweils ein LP gelöst wird. Die Autoren wenden die vorgestellte Methode auf zwei Testmodelle an und stellen fest, dass der Ansatz zwar Lösungen liefert, die nah am globalen Optimum sind, jedoch keine globale Optimalität garantiert werden kann.

Das von [Barakat und Altoubat, 2009] entwickelte Modell zur Bestimmung der optimalen Struktur eines Wasserbehälters wird mit drei verschiedenen heuristischen Techniken gelöst, von denen einer ein genetischer Algorithmus ist. Die anderen beiden Techniken sind ein *Simulated Annealing-Algorithmus (SA-Algorithmus)* und ein *Shuffled Complex Evolution-Algorithmus (SCE-Algorithmus)*. Ein Simulated Annealing-Algorithmus bildet den Abkühlungsprozess eines Metalls nach. Das Metall kann in einem langsamen Abkühlprozess in einer Wärmebehandlung in eine ideale, regelmäßige Kristallgitterstruktur überführt werden. In diesem Zustand nehmen die Atome den energetisch günstigsten Zustand ein. Wenn jedoch Fremdatome eingeschlossen sind oder die

Abkühlung sehr schnell erfolgt, weist der Kristallaufbau Fehlstellen auf. Um diese zu vermeiden, kann das Metall sehr langsam abgekühlt werden, um den Atomen genügend Zeit zur Umlagerung zu bieten. Je mehr Zeit die Atome für die Platzwechsel haben, umso regelmäßiger wird die Gitterstruktur, was die mechanischen Eigenschaften des Metalls verbessert. Dieser Prozess wird algorithmisch nachgebildet. Dabei muss darauf geachtet werden, dass der Abkühlungsprozess nicht zu schnell stattfindet, da sonst das Optimum nicht erreicht wird. In der mathematischen Optimierung spielt dieses Verfahren eine große Rolle, da es ein einfaches, effizientes und robustes Verfahren ist. Der Shuffled Complex Evolution-Algorithmus startet wie der GA mit einer Population an Individuen. Die Population ist jedoch in mehrere Gruppen aufgeteilt, die sich unabhängig voneinander entwickeln und reproduzieren. Nach einigen Iterationen werden die Gruppen zusammengefasst und neue Gruppen gebildet. Damit wird erreicht, dass die Informationen, die innerhalb einer Gruppe gefunden wurden, auf Individuen anderer Gruppen übertragen werden können. So können die gewonnenen Informationen geteilt werden. Dies wird so lange wiederholt, bis ein Konvergenzkriterium erfüllt ist. Die Autoren vergleichen anschließend die drei Verfahren bei Anwendung auf ihr Modell. Dabei stellen sie fest, dass der SCE-Algorithmus bessere Zielfunktionswerte liefert und auch schneller konvergiert als der SA-Algorithmus und der GA. Daraus schließen die Autoren, dass der SCE-Algorithmus sich als effizienter als die anderen beiden Algorithmen erweist.

Die Autoren in [Le Ngo et al., 2007] verwenden ebenfalls einen SCE-Algorithmus und koppeln diesen mit dem Simulationstool *MIKE11*. Dieses Tool simuliert den Fluss, den Wasserstand sowie die Wasserqualität für Flüsse, Kanäle und Reservoirs. Der Fokus der Autoren liegt auf der Optimierung der Kontrollstrategien eines Reservoirs in Vietnam. Die Kombination aus Optimierung und Simulation wird anhand eines realen Beispiels, dem Hoa Binh Reservoir in Vietnam, getestet.

Eine Kombination eines SCE-Algorithmus und eines Simulationstools wird auch in [Liong und Atiquzzaman, 2004] genutzt. Um das Netzwerkdesign-Problem zu lösen, wenden die Autoren einen SCE-Algorithmus in Kombination mit EPANET an, das die durch die Lösungen entstandenen Netzwerke analysieren soll. Der vorgestellte Ansatz ist laut den Autoren effizienter als andere Lösungsmethoden wie z. B. genetische Algorithmen, Simulated Annealing-Algorithmen oder *Shuffled Frog Leaping-Algorithmen*. Dies untersuchen sie anhand von Testläufen mit den Testnetzen *Two-Looped* und *Hanoi*.

Das Simulationstool EPANET findet auch in Kombination mit anderen heuristischen Verfahren Verwendung, beispielsweise in [Marques et al., 2014], [Farmani et al., 2005], [Kurek und Ostfeld, 2013] und [Maier et al., 2003]. In [Marques et al., 2014] wird ein SA-Algorithmus verwendet, um das multi-kriterielle Optimierungsmodell zu lösen. EPANET wird dabei genutzt, um die Einhaltung der hydraulischen Nebenbedingungen

sicher zu stellen. Getestet wird dieses Verfahren an einem Netz mit 17 Knoten und 22 Kanten.

Die Autoren in [Farmani et al., 2005] wenden auf ihr multi-kriterielles MINLP einen evolutionären Algorithmus an, in diesem Fall der *Elitist Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGAI)*. Dieser Algorithmus nutzt EPANET, um die Performanz einer jeden Lösung zu untersuchen. Die Autoren zeigen, dass NSGAI dem evolutionären Algorithmus *Strength Pareto Evolutionary Algorithm II (SPEA2)* überlegen ist. Getestet wird dieses Verfahren an dem Testnetz *Anytown*.

Eine Kombination aus SPEA2 und EPANET stellt [Kurek und Ostfeld, 2013] vor. Es werden zunächst die als reelle und binäre Variablen kodierten Tankparameter initialisiert und Populationen aus Individuen gebildet. Diese werden mit EPANET evaluiert und der jeweilige Zielfunktionswert berechnet. Nachdem alle Lösungen evaluiert wurden, kann die Stärke einer jeden Lösung berechnet werden. Diese wird definiert durch die Anzahl an Individuen, die von dieser Lösung dominiert werden. Die Fitness eines Individuums wird anschließend berechnet durch die Summe der Stärken der Lösungen, die diese Lösung dominieren. Danach bleiben Individuen übrig, die nicht dominiert werden. Diese werden für die Generierung der nächsten Population genutzt. Bei der Erstellung einer neuen Generation nutzen die Autoren ein Verfahren namens *Constrained Tournament*, mit dem sichergestellt werden kann, dass eher zulässige als unzulässige Lösungen ausgewählt werden. Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis ein Abbruchkriterium erreicht wurde. Getestet wird dieses Verfahren an dem von EPANET mitgelieferten Netz *Net3* mit 97 Knoten und 119 Kanten.

In [Maier et al., 2003] wird ein Modell zum Netzwerkdesign-Problem gelöst, indem ein *Ant Colony Optimization-Algorithmus (ACO-Algorithmus)*, vgl. [Dorigo et al., 1996], angewendet wird. Dies ist ein evolutionärer Algorithmus, der das Verhalten von Ameisen auf Futtersuche nachahmt. Dieser Algorithmus nutzt die Tatsache aus, dass Ameisen bei der Futtersuche den kürzesten Weg von der Futterquelle bis zum Nest wählen. Dies liegt daran, dass die Ameisen, die den kürzesten Weg nutzen, schneller zum Nest zur Futterquelle hin und wieder zurück laufen als die Ameisen, die den längeren Weg nutzen. Da Ameisen während der Futtersuche einen Duftstoff hinterlassen, ist nach einiger Zeit auf dem kürzesten Weg mehr Duftstoff vorhanden als auf den längeren. Da die Ameisen sich von der Konzentration dieses Duftstoffes leiten lassen, nehmen nach einiger Zeit alle Ameisen den kürzesten Weg. Der ACO-Algorithmus wird mit EPANET kombiniert und an den Testnetzen *14-Pipe* und *New York* getestet und mit einem GA verglichen. Dabei wird festgestellt, dass der ACO-Algorithmus eine attraktive Alternative zur Verwendung eines GA ist.

Weitere heuristische Ansätze werden von [Cunha und Ribeiro, 2004], [Mariano-Romero et al., 2007] und [Basile et al., 2008] vorgestellt. [Cunha und Ribeiro, 2004] stel-

len einen *Tabu-Suche-Algorithmus* vor, der benutzt wird, um das vorgestellte Modell zum Netzwerkdesign-Problem zu lösen. Ein Tabu-Suche-Algorithmus ist eine Meta-Heuristik, die von einer Initiaillösung ausgehend, die Nachbarschaft dieser Lösung untersucht und in dieser nach einer besseren Lösung sucht. Dabei wird eine Tabu-Liste erstellt, in der Lösungen gespeichert werden, die für eine bestimmte Zeit nicht mehr für die Untersuchungen in Frage kommen. Nach einigen Iterationen wird eine lokal optimale Lösung gefunden. Für die Definition der Nachbarschaft nutzen die Autoren Lösungen, in denen alle Rohre, bis auf ein ausgewähltes, andere Durchmesser haben als in der aktuellen Lösung. Um den Algorithmus zu evaluieren, werden die folgenden fünf Testnetze genutzt: *Hanoi*, *New York*, ein von [Alperovits und Shamir, 1977] vorgestelltes Netzmodell sowie zwei weitere Netze aus [Gessler, 1981] bzw. [Walski et al., 1990].

Die Autoren in [Mariano-Romero et al., 2007] lösen ihr aufgestelltes multi-kriterielles Modell mit zwei verschiedenen Ansätzen. Zum einen stellen sie den Einsatz der *Reduzierten Gradienten-Methode* vor, die nach Aggregation der Zielfunktionen eingesetzt werden kann. Zum anderen wird ein heuristischer Ansatz präsentiert, den sie *Multi-objective Distributed Q-Learning (MDQL)* nennen. Dieser nutzt im Gegensatz zu anderen evolutionären Ansätzen die Informationen aus, die innerhalb eines Suchprozesses generiert werden. Die beiden Lösungsansätze werden anhand von drei Testmodellen, von denen zwei auf realistischen Daten basieren, evaluiert.

In [Basile et al., 2008] wird für die Bestimmung der optimalen Größe und des optimalen Standorts von Wassertanks ein heuristischer Ansatz genutzt, der in zwei Stufen aufgeteilt ist. In der ersten Stufe wird für jeden möglichen Behälter eine Sicherheitsreserve bestimmt, die in dem Behälter für Störfälle, insbesondere für Löschwassereinsätze, zur Verfügung stehen muss. Diese Sicherheitsreserve wird durch einen iterativen Prozess mit Hilfe von EPANET bestimmt. Dabei wird mit einer initialen Menge an Wasser im Behälter begonnen, die sukzessive verkleinert wird. Anschließend wird auf ähnliche Weise in der zweiten Stufe die Menge an Wasser bestimmt, die für die Nachfrage der Kunden benötigt wird. Der Ansatz wird an einem Netz mit 40 Knoten und 34 Kanten getestet. Aussagen zur globalen Optimalität werden nicht gemacht.

#### 3.2.3 Zusammenfassung

Wie bereits in Abschnitt 3.1 erwähnt, ist der überwiegende Teil der Optimierungsmodelle als NLP bzw. MINLP formuliert, weshalb es viele unterschiedliche Lösungsverfahren gibt, um die Modelle lokal oder global optimal zu lösen. Es wurden unter anderem Lösungsansätze diskutiert, die lineare Programmierungstechniken sowie gemischt-ganzzahlige Programmierungstechniken nutzen. Um diese Techniken nutzen zu können, wurden Variablen des Modells fixiert, nichtlineare Funktionen linear ap-



### 3.2 Lösungsansätze für Optimierungsmodelle im Bereich von Wasserversorgungssystemen in der Forschungsliteratur

proximiert oder stückweise linearisiert. Weiterhin wurden auch Techniken der nicht-linearen Programmierung genutzt, wie beispielsweise die Frank-Wolfe-Methode, der Generalized Reduced Gradient-Algorithmus, die Generalized Benders Decomposition oder LP/NLP-Branch-and-Bound-Algorithmen. Unter anderem wurden hier auch MINLP-Solver wie SCIP, BONMIN oder BARON genutzt. Viele Autoren setzten auch Heuristiken bzw. Meta-Heuristiken zur Lösung der Modelle ein. Darunter waren beispielsweise genetische Algorithmen, Simulated Annealing-Algorithmen oder Shuffled Complex Evolution-Algorithmen. Oft traten diese in Kombination mit einem hydraulischen Simulationstool auf, welches in vielen Fällen das Open Source-Tool EPANET war. In Tabelle 3.4 ist eine Übersicht über die vorgestellten Arbeiten zu finden. Dabei wurde gekennzeichnet, in welchen Artikeln eine Linearisierung genutzt wurde, und ob eine Reduktion oder eine Simulation verwendet wurden. Weiterhin ist angegeben, welches die maximale Netzgröße war, die innerhalb der Arbeiten verwendet wurde. Eine detaillierte Übersicht über Modelle und Lösungsansätze im Bereich der Wasserversorgungsnetze bietet beispielsweise auch [D’Ambrosio et al., 2014].

Quelle	Linearisierung	Reduktion	Simulation	Max. Netzgröße
[Shamir, 1974]				25/40
[Fukushima et al., 1982]				-
[Kessler und Shamir, 1989]				9/9
[Zessler und Shamir, 1989]				-
[Eiger et al., 1994]				52/68
[Simpson et al., 1994]				12/14
[Dandy et al., 1996]				20/21
[Vairavamoorthy und Ali, 2000]				32/34
[Cai et al., 2001a]				-
[Cai et al., 2001b]				-
[Cunha und Ribeiro, 2004]				32/34
[Djebedjian et al., 2006]				341/389
[Mariano-Romero et al., 2007]				-
[Barakat und Altoubat, 2009]				-
[El Ansary et al., 2010]				-
[Kolb et al., 2012]				-
[Raghunathan, 2013]				276/317
[Fügenshuh und Humpola, 2013]				-/500
[Alperovits und Shamir, 1977]	x			51/65

Quelle	Linearisierung	Reduktion	Simulation	Max. Netzgröße
[Collins et al., 1978]	x			452/530
[Lekane et al., 1980]	x			24/24
[Hansen et al., 1991]	x			169/201
[Sherali und Smith, 1997]	x			7/8
[Sherali et al., 2001]	x			7/8
[Geißler et al., 2011]	x			-
[Geißler, 2011]	x			-
[Bragalli et al., 2012]	x			276/317
[Geißler et al., 2012]	x			-
[Morsi et al., 2012]	x			-
[Lansley und Mays, 1989]		x	x	16/34
[Cullinane et al., 1992]		x	x	14/21
[Murphy et al., 1994]			x	25/46
[Maier et al., 2003]			x	20/21
[Liong und Atiquzzaman, 2004]			x	32/34
[Burgschweiger et al., 2005]		x		1481/1935
[Farmani et al., 2005]			x	25/46
[Le Ngo et al., 2007]			x	-
[Martínez et al., 2007]			x	725/772
[Vamvakeridou-Lyroudia et al., 2007]			x	25/46
[Basile et al., 2008]			x	40/34
[Hähnlein, 2008]		x		-
[Vieira und Ramos, 2008]			x	-
[Gleixner et al., 2012]		x		88/64
[Kurek und Ostfeld, 2013]			x	97/119
[Marques et al., 2014]			x	17/22

Tabelle 3.4: Übersicht über die in der Literatur verwendeten Lösungsansätze

### 3.3 Handlungsbedarf und Ziele dieser Arbeit

In Abschnitt 3.1 wurden verschiedene Optimierungsfragestellungen im Bereich von Wasserversorgungssystemen sowie in Abschnitt 3.2 unterschiedliche Lösungstechniken für diese Fragestellungen vorgestellt. In den Tabellen 3.1 bis 3.4 wurden alle hier vorgestellten Arbeiten aufgelistet. In diesem Abschnitt soll der daraus resultierende Handlungsbedarf abgeleitet werden sowie die Ziele dieser Arbeit dargestellt werden.

#### 3.3.1 Handlungsbedarf

In Kapitel 1 wurde bereits herausgestellt, dass Rohre und Behälter aufgrund von Effizienzverlusten und möglichen Kosteneinsparungen großes Optimierungspotential aufweisen. Der überwiegende Teil der in Abschnitt 3.1 vorgestellten Fragestellungen in der Literatur behandelt die Optimierung von Pumpen oder Rohren. Dabei wird im operativen Bereich der Einsatz von Pumpen und Pumpenanlagen geplant, während im strategischen Bereich der Hauptfokus auf der Optimierung von Rohrdimensionen liegt. Einige Arbeiten, die Fragestellungen im strategischen Bereich betrachten, beinhalten auch eine Behälterplanung. Jedoch wird in vielen dieser Arbeiten der Bau eines einzelnen Behälters unabhängig vom zugrundeliegenden Versorgungssystem geplant. Aus diesem Grund soll der Fokus der vorliegenden Arbeit auf der strategischen Fragestellung der Behälterplanung liegen, wobei zusätzlich das gesamte zugehörige Versorgungssystem berücksichtigt wird.

Im Bereich der Behälterplanung werden in der Forschungsliteratur verschiedene Entscheidungen im Rahmen eines Optimierungsmodells abgebildet. So existieren Modelle, in denen die optimalen Standorte, Formen oder Speicherkapazitäten bestimmt werden können. In den Arbeiten, in denen diese Optimierungsfragestellungen behandelt werden, sind die vorgestellten Optimierungsmodelle jedoch entweder gar nicht oder nur zum Teil als mathematisch formuliertes Modell zu finden. Daher soll im Rahmen dieser Arbeit ein mathematisches Optimierungsmodell für die Behälterplanung hergeleitet und entwickelt werden.

Werden Optimierungsfragestellungen im Bereich der Wasserversorgung betrachtet, so sollten die hydraulischen Eigenschaften eines Wasserversorgungssystems Berücksichtigung finden, um eine gute Annäherung an die Realität zu gewährleisten. Dazu muss insbesondere die Modellierung des Druckverlustes innerhalb der Rohre in ein mathematisches Optimierungsmodell integriert werden. In der Forschungsliteratur wird der Druckverlust in den meisten Fällen als nichtlineare Funktion abgebildet, wodurch die entstandenen Modelle in den überwiegenden Fällen als MINLP formuliert sind. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Druckverlustgleichung, wie in Kapitel 2 gezeigt,

als nicht-konvexe quadratische Funktion modelliert. Daher soll das in dieser Arbeit zu entwickelnde Optimierungsmodell als nicht-konvexes Mixed Integer Quadratically Constrained Program (MIQCP) formuliert werden.

In Abschnitt 3.2 wurden verschiedene Möglichkeiten aus der Forschungsliteratur diskutiert, wie nichtlineare Modelle im Bereich der Wasserversorgungssysteme gelöst werden können. Dabei wurden viele Arbeiten vorgestellt, in denen heuristische Ansätze zur Lösung der Modelle zum Einsatz kommen. Der Nachteil dieser Ansätze besteht darin, dass die Optimalität der gefundenen Lösung nicht garantiert werden kann. Einige Arbeiten nutzen eine Linearisierung der nichtlinearen Anteile der Modelle, um somit die Vorteile der linearen Programmierungstechniken ausnutzen zu können. In den überwiegenden Fällen konnten damit jedoch keine Netzmodelle mit einer praxisrelevanten Größe optimal gelöst werden. Im Rahmen dieser Arbeit soll auch für solche Netzmodelle eine Lösung gefunden werden.

In der Forschungsliteratur werden unabhängig von der genutzten Lösungstechnik Verfahren vorgeschlagen, die die Größe der betrachteten Netzmodelle reduzieren. Damit soll erreicht werden, dass auch Netzmodelle mit einer praxisrelevanten Größe gelöst werden können. Keines dieser Reduktionsverfahren wurde jedoch mit linearen Programmierungstechniken kombiniert. Solch eine Kombination soll daher in dieser Arbeit analysiert werden.

Werden Reduktionsverfahren auf die Netzmodelle angewendet, so stellt sich die Frage, wie sich diese Verfahren auf die gefundene Lösung und die hydraulischen Eigenschaften der Netze auswirken. Dies kann beispielsweise mit Hilfe einer hydraulischen Simulation überprüft werden. Zwar werden in einigen Arbeiten in der Forschungsliteratur hydraulische Simulationsverfahren verwendet, jedoch werden diese nicht zur Evaluation der Reduktionstechniken genutzt. Diese Form der Evaluation soll in dieser Arbeit zum Einsatz kommen und untersucht werden.

Insgesamt findet sich in der Forschungsliteratur kein Ansatz zur Lösung der Behälteroptimierung, der lineare Programmierungstechniken, Reduktionstechniken für Netzmodelle sowie hydraulische Simulationstechniken miteinander kombiniert. Daher soll die Entwicklung, Analyse und Evaluation eines Verfahrens, das diese drei Techniken miteinander kombiniert, Gegenstand dieser Arbeit sein.

Aus diesen gerade gewonnenen Erkenntnissen, sollen im folgenden Abschnitt die Ziele dieser Arbeit abgeleitet und formuliert werden sowie ein Konzept vorgestellt werden, mit dem diese Ziele erreicht werden sollen.

### 3.3.2 Ziele dieser Arbeit

#### **1. Ziel: Konzeption, Entwicklung und Analyse eines Lösungsprozesses, der bei der Planung von Trinkwasserbehältern Einsatz findet**

Das Hauptziel dieser Arbeit besteht in der Konzeption, Entwicklung und Analyse eines Lösungsprozesses, der bei der Planung des Baus von Trinkwasserbehältern in einem Wasserversorgungssystem eingesetzt werden kann. In diesem Lösungsprozess soll die Planungsaufgabe der Behälteroptimierung möglichst realitätsnah abgebildet werden sowie für praxisrelevante Netzgrößen eine kostenminimale Lösung in annehmbarer Zeit gefunden werden.

#### **2. Ziel: Entwicklung und Umsetzung eines Optimierungsmodells zur Planung des Baus von Trinkwasserbehältern**

Um eine kostenminimale Lösung finden zu können, ist die mathematische Optimierung ein wesentlicher Bestandteil des zu entwickelnden Lösungsprozesses. Daher ist die Entwicklung und Umsetzung eines Optimierungsmodells, das den Bau von Trinkwasserbehältern plant, ebenfalls ein Ziel dieser Arbeit. Dabei soll entschieden werden, an welcher Stelle welche Art von Trinkwasserbehälter eingesetzt werden soll. Die Entscheidungen können sowohl den Bau neuer Behälter betreffen als auch die Anpassung der Dimensionen oder die Weiternutzung der bestehenden Behälter. Dabei können existierende sowie auch neu zu planende Wasserversorgungssysteme betrachtet werden. Um eine realitätsnahe Abbildung zu gewährleisten, werden in dem Optimierungsmodell die hydraulischen Eigenschaften eines Wasserversorgungssystems berücksichtigt und das zu entwickelnde Optimierungsmodell als nicht-konvexes Mixed Integer Quadratically Constrained Program (MIQCP) formuliert.

#### **3. Ziel: Auswahl einer geeigneten Lösungsmethode zur Lösung des entwickelten Optimierungsmodells**

Ein weiteres Ziel ist die Auswahl einer geeigneten Lösungsmethode, die für das entwickelte Optimierungsmodell eine Lösung in annehmbarer Zeit findet. Dafür kommen sowohl heuristische Ansätze, NLP- sowie LP-Techniken in Frage. [Geißler et al., 2012] nennen als Vorteil einer stückweisen Linearisierung, dass die Lösungsmethoden für MIPs sehr gut erforscht sind und daher kurze Lösungszeiten zu erwarten sind. Weiterhin stellen sie heraus, dass sie mit Hilfe der von ihnen verwendeten Linearisierung eine global optimale Lösung innerhalb einer vordefinierten Fehlerschranke finden können. Sie empfehlen die Anwendung der Technik, wenn es im Modell nur wenig nichtlineare

Funktionen gibt. In [Geißler et al., 2011] wird zudem gezeigt, dass sich die Anwendung einer stückweisen Linearisierung insbesondere bei dynamischen Transportnetzwerken eignet. Aus diesem Grund soll in dieser Arbeit der Fokus auf der Verwendung einer stückweise Linearisierung liegen.

#### **4. Ziel: Auswahl und Analyse von geeigneten Netzreduktionstechniken zur Reduktion der Knoten und Kanten eines Netzmodells**

In [Bragalli et al., 2012] wird die Anwendung einer stückweisen Linearisierung mit der Nutzung von NLP- und MINLP-Solvern verglichen. Die Autoren stellen dabei heraus, dass aufgrund der vielen Stützstellen, die für eine möglichst exakte Lösung bei der stückweisen Linearisierung benötigt werden, hohe Lösungszeiten zu erwarten sind und daher der Einsatz von NLP- bzw. MINLP-Solvern effizienter ist. Um dem in dieser Arbeit entgegen zu wirken, soll die Anzahl der Stützstellen und damit benötigten Variablen im Modell möglichst klein gehalten werden. Jedoch sollte dadurch kein bzw. nur ein geringer Verlust der Lösungsgenauigkeit auftreten. In dem hier betrachteten Optimierungsmodell soll die stückweise Linearisierung für jedes Rohr im Wasserversorgungssystem und für jeden betrachteten Zeitschritt durchgeführt werden. Gerade bei Netzmodellen mit praxisrelevanten Größen kann es passieren, dass diese sehr lange Lösungszeiten mit sich bringen. Um auch diese Netzmodelle in akzeptabler Zeit lösen zu können und auch die Zeit für den Lösungsprozess für alle anderen Netze zu verringern, soll vor Lösung des Optimierungsproblems die Anzahl der Knoten und Kanten im zugrundeliegenden Netzmodell reduziert werden. Dadurch muss die Linearisierung der Druckverlustgleichung für eine geringere Anzahl an Rohren durchgeführt werden, was eine deutliche Reduktion der Variablen und Nebenbedingungen und damit der Lösungszeit bedeutet. Daher ist ein weiteres Ziel dieser Arbeit die Auswahl und Analyse von geeigneten Netzreduktionstechniken, die die Anzahl der Knoten und Kanten in einem Netzmodell reduzieren können und eine möglichst geringe Abweichung in den hydraulischen Eigenschaften des originalen und des reduzierten Netzmodells mit sich bringen.

#### **5. Ziel: Konzeption und Analyse eines Prozesses zur Evaluation der im reduzierten Netzmodell gefundenen Lösung und zur Modifikation des Netzmodells im Falle von Unzulässigkeiten**

Bei der Anwendung der Reduktionstechniken können in einigen Fällen Abweichungen in den hydraulischen Eigenschaften des originalen und des reduzierten Netzmodell auftreten. Weiterhin ist zu beachten, dass durch die Nutzung der stückweisen Linearisierung nur eine Approximation an das ursprüngliche als MIQCP formulierte Modell

erreicht werden kann. Somit entsteht eine weitere Abweichung im Vergleich zum originalen Modell. Dennoch soll sichergestellt sein, dass die durch Optimierung des reduzierten Netzmodells gefundene optimale Lösung zulässig für das originale Netzmodell ist. Aus diesem Grund ist ein weiteres Ziel dieser Arbeit, einen Prozess zu konzipieren und zu analysieren, mit dem die generierte optimale Lösung mit dem ursprünglichen Netzmodell kombiniert und auf Zulässigkeit überprüft werden kann. Dieser Prozess soll zudem im Falle des Auftretens von Unzulässigkeiten ein Verfahren beinhalten, mit dem dennoch eine zulässige Lösung gefunden werden kann. Um das mit der optimalen Lösung kombinierte Netzmodell auf Zulässigkeit zu überprüfen, soll ein hydraulischer Simulator genutzt werden, der die physikalischen Eigenschaften eines Wassernetzes im Detail abbilden kann. Dieser Simulator führt mit dem kombinierten Netzmodell einen Simulationslauf durch und überprüft somit, ob die aktuell gefundene optimale Lösung zulässig für das ursprüngliche Netzmodell ist. Werden nach der Simulation Unzulässigkeiten festgestellt, soll ein Modifikationsschritt stattfinden. Die Stellen im Netz, an denen die Unzulässigkeiten aufgetreten sind, werden gesucht und markiert. Anschließend wird das ursprüngliche Netzmodell erneut durch Anwendung der Reduktionstechniken reduziert. Die markierten Stellen werden dabei jedoch für die Reduktion gesperrt, sodass an diesen keine erneute Reduktion stattfindet. So ist es möglich, dass diese Stellen bei der Optimierung detaillierter betrachtet werden können. Mit dem neuen reduzierten Netzmodell wird erneut ein Optimierungsmodell aufgestellt, das ebenfalls gelöst wird. Anschließend wird die so gefundene optimale Lösung wieder mit dem ursprünglichen Netzmodell kombiniert und an den Simulator übergeben, der die Zulässigkeit der Lösung überprüft. Dieser Prozess soll so lange wiederholt werden, bis der Simulator eine gefundene Lösung als zulässig identifiziert.

Eine schematische Übersicht über das gerade beschriebene Verfahren ist in Abbildung 3.1 zu finden. Dieses Verfahren soll im Rahmen dieser Arbeit prototypisch implementiert werden und anhand numerischer Tests evaluiert werden.

Insgesamt liegt der Fokus dieser Arbeit also auf der Konzeption, Analyse und Evaluation eines Lösungsprozesses, der Netzreduktionstechniken, mathematische Optimierungstechniken sowie hydraulische Simulationstechniken kombiniert. Solch ein Prozess ist bisher nicht in der Literatur zu finden und mit diesem soll das Ziel erreicht werden, für die Fragestellung der Behälterplanung für praxisrelevante Größen der Netzmodelle eine kostenminimale Lösung in annehmbarer Zeit zu finden.

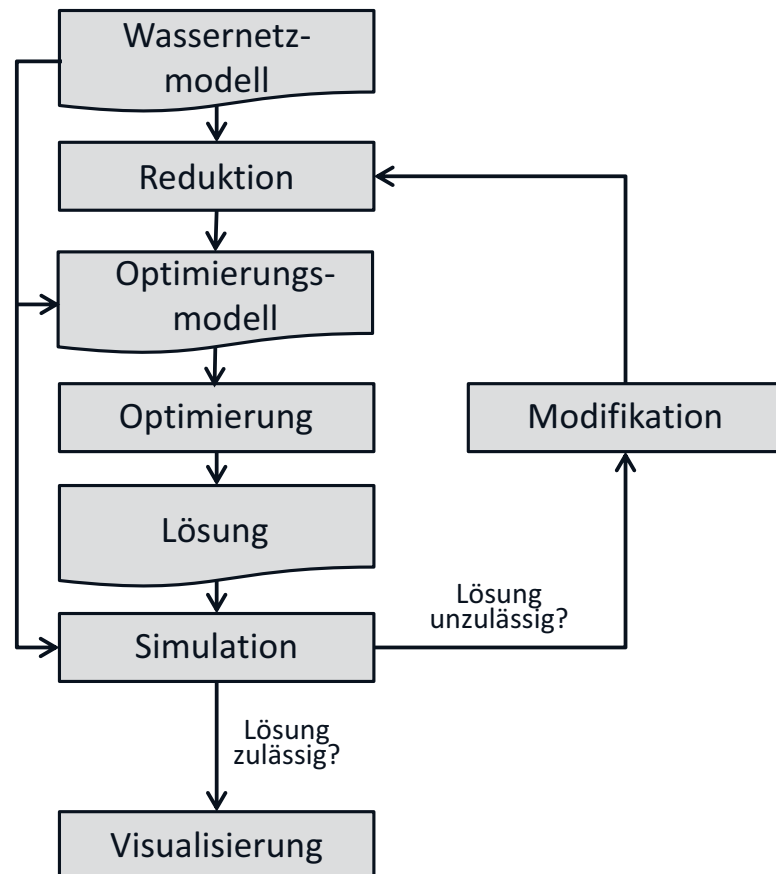


Abbildung 3.1: Schematischer Ablauf des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Verfahrens



## 4 Optimierung

In diesem Kapitel wird das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Optimierungsmodell zur Planung von Trinkwasserbehältern vorgestellt. Dazu wird zunächst in Abschnitt 4.1 die Planungsaufgabe beschrieben und anschließend werden die Zielfunktion sowie die notwendigen Nebenbedingungen hergeleitet und somit das vollständige Optimierungsmodell entwickelt. Das so entstandene Modell ist als nicht-konvexes Mixed Integer Quadratically Constrained Program (MIQCP) formuliert. In den darauffolgenden Abschnitten werden verschiedene Lösungsmethoden vorgestellt, die angewendet werden können, um eine Lösung für das entwickelte Optimierungsmodell zu finden. Die Herausforderung dabei sind die Nicht-Konvexität sowie die Nichtlinearitäten des Modells. In Abschnitt 4.3 wird zunächst ein Simulated Annealing-Algorithmus vorgestellt, der zulässige Lösungen für das Modell finden kann. Danach werden in Abschnitt 4.4 verschiedene Varianten und Möglichkeiten zur stückweisen Linearisierung diskutiert und miteinander verglichen. Dazu werden im weiteren Verlauf des Abschnitts numerische Ergebnisse zu den verschiedenen Techniken präsentiert und analysiert.

### 4.1 Optimierungsmodell zur Planung von Trinkwasserbehältern

In diesem Abschnitt wird zunächst die Planungsaufgabe definiert und anschließend als mathematisches Optimierungsmodell formuliert. Ziel ist die Entwicklung eines Optimierungsmodells, das bei der Entscheidung unterstützen soll, an welchen vordefinierten Standorten im Wasserversorgungssystem ein Wasserbehälter stehen soll. Zusätzlich sollen auch die Maße der Behälter im System festgelegt werden. Dabei werden nicht nur die Maße neu geplanter Behälter bestimmt, sondern auch die Maße bestehender Behälter, die daraufhin gegebenenfalls angepasst werden müssen. Auch soll berücksichtigt werden, dass bestehende Behälter geschlossen werden können. Diese Entscheidungen sollen aus wirtschaftlicher Sicht kostenoptimal getroffen werden. Daher ist das Optimierungsziel die Minimierung der Investitionskosten für den Bau bzw. Umbau eines Behälters sowie die Minimierung variabler Kosten, die von der Größe eines Behälters abhängen. Dieses Optimierungsziel wird durch verschiedene Restriktionen beschränkt. So muss zum Beispiel sichergestellt sein, dass an jeder Stelle im Wasserversorgungssystem zu jedem Zeitpunkt eine ausreichende Menge an Wasser mit dem nötigen Versorgungsdruck vorhanden ist. Weiterhin müssen genug Wasserreserven im System vorhanden sein, um Löschwassereinsätze durchführen zu können. Zusätz-

lich müssen diese Wasserreserven in der Lage sein, Störfälle zu überbrücken, bei denen beispielsweise ein Rohr oder ein Behälter außer Betrieb gesetzt sind. Zudem müssen die hydraulischen Eigenschaften innerhalb eines Wasserversorgungssystems modelliert werden. Das bedeutet, dass die Druckhöhen und die Volumenströme im System physikalisch korrekt berücksichtigt werden müssen. Die mathematische Formulierung des vorgestellten Optimierungsproblems wird im Folgenden vorgestellt. Frühere Versionen dieses Modells sind in [Dohle und Suhl, 2012], [Hallmann, 2013] und [Hallmann und Suhl, 2015] zu finden.

Sei  $N$  die Menge aller Knoten in einem Wasserversorgungsnetz und sei  $B \subseteq N$  die Menge aller Knoten, an denen sich bereits ein Wasserbehälter befindet oder an denen ein Wasserbehälter gebaut werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit sollen nur Wasserbehälter mit kreisförmiger Grundfläche betrachtet werden. Um die Anzahl der nichtlinearen Ausdrücke innerhalb des Modells gering zu halten, aber dennoch unterschiedliche Durchmesser für die Grundfläche der Behälter betrachten zu können, werden dem Netzmodell fiktive Knoten hinzugefügt. Dies geschieht an den Stellen im Netzmodell, an denen ein Behälter existiert oder existieren kann. Diese fiktiven Knoten repräsentieren demnach den möglichen Behälter mit unterschiedlichen Durchmessern, welche aus einer vorher definierten Menge ausgewählt werden können. Weiterhin können durch den Einsatz der fiktiven Knoten auch unterschiedliche Materialien oder unterschiedliche Eigenschaften des Standortes kodiert werden. So ist es möglich, verschiedene Ausprägungen des Behälters im Modell zu betrachten. Die Menge  $E \subseteq B$  beschreibt diejenigen Knoten, an denen auf jeden Fall ein Wasserbehälter existieren soll. Die Binärvariable  $y_b$  gibt an, ob ein Behälter  $b$  bestehen bleiben soll, umgebaut bzw. gebaut werden soll (1) oder nicht (0).

Ziel ist die Minimierung der Kosten eines Wasserbehälters. Dazu gehören die Investitionskosten  $InvC_b$ , die anfallen, falls der Behälter  $b$  gebaut wird. Investitionskosten fallen jedoch ebenfalls an, falls ein bestehender Behälter umgebaut werden muss. Diese Kosten beinhalten die Kosten für die Erschließung und Bebauung des Grundstücks, die nötigen Kosten für die architektonische Gestaltung sowie weitere Kosten, die von dem betrachteten Standort abhängen. Zudem werden ebenfalls die Kosten für die Bauweise des Behälters berücksichtigt. Dabei wird unterschieden, ob der Behälter vor Ort gebaut wird oder aus Fertigbauteilen zusammengesetzt wird. Weiterhin müssen Kosten  $C_b$  berücksichtigt werden, die abhängig von der Größe des Behälters sind. Diese setzen sich zusammen aus Kosten, die durch den Materialeinsatz entstehen und operativen Kosten wie beispielsweise Reinigungskosten. Sowohl in den Investitionskosten als auch in den variablen Kosten werden Personalkosten für den Bau und die Wartung des Behälters berücksichtigt. Um die Größe des Behälters zu bestimmen, wird die Variable  $MaxV_b$  eingeführt. Diese gibt das maximale Volumen an, das über alle Zeitschritte  $t \in T$  in dem Behälter  $b$  gespeichert wurde. Für die Bestimmung der minimalen Kosten wird daher das maximale Volumen über alle Zeitschritte mit dem Kostenfaktor  $C_b$

multipliziert. Dabei ist darauf zu achten, dass der maximale Wasserspiegel deutlich unterhalb der Behälterdecke liegt. Dennoch müssen auch für diesen Hohlraum  $VH_b$  im Behälter Kosten angesetzt werden, da für diese ebenfalls Materialkosten anfallen.

Die Zielfunktion lautet demnach:

$$\min \sum_{b \in B} (InvC_b \cdot y_b + C_b \cdot MaxV_b \cdot \Delta t + C_b \cdot VH_b \cdot y_b). \quad (4.1)$$

Dabei ist  $\Delta t$  die Länge eines Zeitschrittes.

Um das maximale Volumen  $MaxV_b$  des Behälters  $b$  über alle Zeitpunkte  $t \in T$  zu finden, wird die folgende Restriktion eingeführt:

$$V_b^t \leq MaxV_b \cdot \Delta t \quad \forall b \in B, t \in T. \quad (4.2)$$

Diese sorgt dafür, dass die Variable  $MaxV_b$  das maximale Volumen eines Behälters  $b$  unter allen Volumina  $V_b^t$  über alle Zeitschritte annimmt.

Das Optimierungsziel wird durch weitere Restriktionen beschränkt. So muss die Binärvariable  $y_e$  eines Behälters  $e \in E$ , der in jedem Fall existieren soll, auf Eins gesetzt werden. Dies wird in der folgenden Restriktion abgebildet:

$$y_e = 1 \quad \forall e \in E. \quad (4.3)$$

In einem Behälter muss zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine minimale Menge an Wasser  $Vmin_b$  vorhanden sein, um mögliche Störfälle im Wassernetz oder am Behälter selbst überbrücken zu können. Das Volumen  $V_b^t$  eines Behälters ist jedoch auch nach oben beschränkt. Dies wird über den Parameter  $Vmax_b$  abgebildet. Diese Beschränkungen an das Volumen müssen jedoch nur gelten, falls der Behälter existiert. Sonst muss das Volumen auf den Wert Null gezwungen werden. Diese Beziehungen werden in den folgenden zwei Nebenbedingungen abgebildet:

$$V_b^t \geq Vmin_b \cdot y_b \quad \forall b \in B, t \in T, \quad (4.4)$$

$$V_b^t \leq Vmax_b \cdot y_b \quad \forall b \in B, t \in T. \quad (4.5)$$

Im gesamten Wassernetz muss zu jeder Zeit eine bestimmte Menge an Wasser  $Vmin_{to}$  vorhanden sein. Dies ist notwendig, um mögliche Störfälle im Wassernetz überbrücken zu können. Zusätzlich muss diese Menge an Wasser im gesamten System ausreichen, um Löschwassereinsätze durchführen zu können, ohne dass die Wasserversorgung beeinträchtigt wird. Die folgende Restriktion sorgt dafür, dass insgesamt ausreichend Wasser im gesamten Versorgungsgebiet vorhanden ist:

$$\sum_{b \in B} V_b^t \geq Vmin_{to} \quad \forall t \in T. \quad (4.6)$$

Die Variable  $L_b^t$  gibt die Füllhöhe des Behälters  $b$  zur Zeit  $t$  an. Die Füllhöhe  $L_b^t$  lässt sich mit Hilfe des Volumens  $V_b^{t-1}$  des vorangegangenen Zeitpunkts und des Durchmessers  $d_b$  mit der Formel

$$L_b^t = \frac{4 \cdot V_b^{t-1}}{\pi \cdot d_b^2}$$

berechnen. Dieser Zusammenhang darf jedoch nur gelten, falls ein Behälter existiert. Daher werden die folgenden zwei Nebenbedingungen definiert, die nur greifen, falls der Behälter existiert:

$$L_b^t - \frac{4 \cdot V_b^{t-1}}{\pi \cdot d_b^2} \leq M_1 \cdot (1 - y_b) \quad \forall b \in B, t \in T \setminus \{0\},$$

$$-L_b^t + \frac{4 \cdot V_b^{t-1}}{\pi \cdot d_b^2} \leq M_2 \cdot (1 - y_b) \quad \forall b \in B, t \in T \setminus \{0\}.$$

Für die Formulierung dieser Nebenbedingungen werden zwei BigM-Werte  $M_1$  und  $M_2$  benötigt. Ist die Binärvariable auf den Wert Null gesetzt, so hat auch die Varia-

ble für das Volumen des Behälters den Wert Null. Daher können die beiden BigM-Werte auf die untere bzw. obere Schranke der Variablen  $L_b^t$  gesetzt werden. Also kann  $M_1 = Hmax - E_b$  und  $M_2 = Hmin - E_b$  gewählt werden. Dabei ist  $Hmax$  die maximale Druckhöhe und  $Hmin$  die minimale Druckhöhe, die im Netz herrschen darf. Die Restriktionen lauten demnach:

$$L_b^t - \frac{4 \cdot V_b^{t-1}}{\pi \cdot d_b^2} \leq (Hmax - E_b) \cdot (1 - y_b) \quad \forall b \in B, t \in T \setminus \{0\}, \quad (4.7)$$

$$-L_b^t + \frac{4 \cdot V_b^{t-1}}{\pi \cdot d_b^2} \leq (Hmin - E_b) \cdot (1 - y_b) \quad \forall b \in B, t \in T \setminus \{0\}. \quad (4.8)$$

Dass die Füllhöhe  $L_b^t$  auch innerhalb ihrer Schranken bleibt, falls der Behälter existiert, ist dadurch sichergestellt, dass das Volumen in den Restriktionen (4.4) und (4.5) beschränkt wird.

Die Variable  $H_n^t$  gibt die Druckhöhe eines Knotens  $n$  zur Zeit  $t$  an. Diese ergibt sich aus der Füllhöhe  $L_b^t$  und der geodätischen Höhe  $E_b$  des Behälters  $b$ . Dieser Zusammenhang wird in der folgenden Nebenbedingung beschrieben:

$$H_b^t = L_b^t + E_b \quad \forall b \in B, t \in T. \quad (4.9)$$

Sei  $P \subseteq (N \times N)$  die Menge alle Rohre im Wasserversorgungssystem. Dann stellt die Variable  $Q_{i,j}$  den Volumenstrom innerhalb des Rohres zwischen Knoten  $i$  und Knoten  $j$  dar. Für jedes Rohr ist durch die physikalischen Gegebenheiten des Rohres ein maximaler Volumenstrom  $Qmax_{i,j}$  gegeben.

Wie schon in Abschnitt 2.3 beschrieben, muss an jedem Knoten des Netzes die Massenbilanzgleichung (2.1) gelten. Dabei wird unterschieden, ob es sich um einen Behälterknoten  $b \in B$ , einen Reservoirknoten  $r \in R$  oder einen normalen Knoten  $n \in N \setminus (\{B\} \cup \{R\})$  handelt. Dabei sei  $R \subseteq N$  die Menge aller Knoten, an denen ein Reservoir existiert. Für einen Behälterknoten kann die Massenbilanzgleichung wie

folgt modelliert werden:

$$\sum_{(i,b) \in P} Q_{i,b}^t - \sum_{(b,j) \in P} Q_{b,j}^t = (V_b^t - V_b^{t-1}) \cdot \frac{1}{\Delta t} \quad \forall b \in B, t \in T \setminus \{0\}. \quad (4.10)$$

Dabei wird die im vorangegangenen Zeitschritt gespeicherte Wassermenge  $V_b^{t-1}$  wieder in das Netz zurückgegeben, während die im Zeitschritt  $t$  gespeicherte Menge  $V_b^t$  in den Behälter fließt. Ein Knoten, der keinen Behälter und kein Reservoir darstellt, besitzt eine Nachfrage nach Wasser  $D_n^t$ , die über die Zeit variieren kann. Diese muss bei der Massenbilanzgleichung berücksichtigt werden, was in der folgenden Restriktion modelliert ist:

$$\sum_{(i,n) \in P} Q_{i,n}^t - \sum_{(n,j) \in P} Q_{n,j}^t = D_n^t \cdot \frac{1}{\Delta t} \quad \forall n \in N \setminus (\{B\} \cup \{R\}), t \in T. \quad (4.11)$$

Für einen Reservoirknoten gilt im eigentlichen Sinne keine Massenbilanzgleichung. Dies liegt daran, dass in dem mathematischen Modell für ein Reservoir angenommen wird, dass dieses über eine unendliche Menge an Wasser verfügt, das in das System abgegeben werden kann. Daher ist die Menge an Wasser, die aus dem Reservoir entnommen werden kann, nur durch die physikalischen Eigenschaften der aus dem Reservoir führenden Rohre beschränkt. Dies wird mittels des maximalen Volumenstroms  $Q_{max_{i,j}}$  des Rohres  $(i, j)$  sichergestellt.

Für ein Reservoir  $r$  gilt, dass an diesem zu jedem Zeitpunkt ein konstanter Druck herrscht, der über die konstante Druckhöhe  $InitH_r$  modelliert wird. Daher wird die Druckhöhe eines Reservoirknotens zu jedem Zeitpunkt mit dieser konstanten Druckhöhe initialisiert, was in der folgenden Nebenbedingung berücksichtigt ist.

$$H_r^t = InitH_r \quad \forall r \in R, t \in T. \quad (4.12)$$

In Abschnitt 2.3 wurde bereits die Druckverlustgleichung (2.14) eingeführt. Diese bestimmt die Druckverlusthöhe zwischen zwei Knoten  $i$  und  $j$  und ist abhängig von dem Volumenstrom  $Q_{i,j}^t$ , der in dem Rohr zwischen den beiden Knoten fließt sowie von dem Rohrreibungswiderstand  $r_{i,j}$ . Diese Gleichung wird in der folgenden Nebenbedingung

abgebildet:

$$H_i^t - H_j^t = r_{i,j} \cdot Q_{i,j}^t \cdot |Q_{i,j}^t| \quad \forall (i, j) \in P, t \in T. \quad (4.13)$$

In den Tabellen 4.1, 4.2 und 4.3 sind die Mengen, die Parameter und die Variablen des Optimierungsproblems noch einmal zusammengefasst.

Name	Beschreibung
$N$	Menge aller Knoten im Wasserversorgungssystem
$B \subseteq N$	Menge aller Knoten, an denen ein Behälter existiert oder existieren kann
$E \subseteq B$	Menge aller Knoten, an denen in jedem Fall ein Behälter existieren soll
$R \subseteq N$	Menge aller Knoten, an denen sich ein Reservoir befindet
$P \subseteq (N \times N)$	Menge aller Rohre
$T$	Menge aller Zeitschritte

Tabelle 4.1: Mengen des Optimierungsmodells

Name	Beschreibung
$InvC_b$	Investitionskosten des Behälters $b$ , in $GE$
$C_b$	Weitere Kosten des Behälters $b$ , in $GE/m^3$
$VH_b$	Hohlraum zwischen maximalem Wasserspiegel und Behälterhöhe des Behälters $b$ , in $m^3$
$Vmin_b$	Minimale Wassermenge des Behälters $b$ , in $m^3$
$Vmax_b$	Maximale Wassermenge des Behälters $b$ , in $m^3$
$d_b$	Durchmesser des Behälters $b$ , in $m$
$E_b$	Geodätische Höhe des Behälters $b$ , in $m$
$D_n^t$	Wassernachfrage des Knotens $n$ zur Zeit $t$ , in $m^3$
$InitH_r$	Initiale Druckhöhe des Reservoirs $r$ , in $m$
$r_{i,j}$	Rohrreibungswiderstand des Rohres $(i, j)$ , in $h^2/m^5$
$Qmax_{i,j}$	Obere Schranke des Volumenstroms des Rohres $(i, j)$ , in $m^3/h$
$Vmin_{to}$	Minimal erforderliche Wassermenge im Netz, in $m^3$
$Hmin$	Minimale Druckhöhe im Netz, in $m$
$Hmax$	Maximale Druckhöhe im Netz, in $m$
$\Delta t$	Länge eines Zeitschrittes, in $h$

Tabelle 4.2: Parameter des Optimierungsmodells

Name	Beschreibung
$y_b$	Binärvariable, die angibt, ob Behälter $b$ bestehen bleiben soll (1) bzw. gebaut wird (1) oder nicht (0)
$V_b^t$	Menge an Wasser, die zur Zeit $t$ in Behälter $b$ gespeichert wird, in $m^3$
$MaxV_b$	Volumen an Wasser, das in Behälter $b$ über alle Zeitschritte maximal gespeichert wird, in $m^3/h$
$L_b^t$	Füllhöhe des Behälters $b$ zur Zeit $t$ , in $m$
$H_n^t$	Druckhöhe des Knotens $n$ zur Zeit $t$ , in $m$
$Q_{i,j}^t$	Volumenstrom zwischen Knoten $i$ und $j$ zur Zeit $t$ , in $m^3/h$

Tabelle 4.3: Variablen des Optimierungsmodells

Das mathematische Optimierungsmodell, inklusive aller Schranken auf die Variablen, wird im Folgenden noch einmal zusammengefasst.



$$\begin{aligned}
 \min \sum_{b \in B} (InvC_b \cdot y_b + C_b \cdot MaxV_b \cdot \Delta t + C_b \cdot VH_b \cdot y_b) \\
 V_b^t &\leq MaxV_b \cdot \Delta t && \forall b \in B, t \in T \\
 y_e &= 1 && \forall e \in E \\
 V_b^t &\geq Vmin_b \cdot y_b && \forall b \in B, t \in T \\
 V_b^t &\leq Vmax_b \cdot y_b && \forall b \in B, t \in T \\
 \sum_{b \in B} V_b^t &\geq Vmin_{to} && \forall t \in T \\
 L_b^t - \frac{4 \cdot V_b^{t-1}}{\pi \cdot d_b^2} &\leq (Hmax - E_b) \cdot (1 - y_b) && \forall b \in B, t \in T \setminus \{0\} \\
 -L_b^t + \frac{4 \cdot V_b^{t-1}}{\pi \cdot d_b^2} &\leq (Hmin - E_b) \cdot (1 - y_b) && \forall b \in B, t \in T \setminus \{0\} \\
 H_b^t &= L_b^t + E_b && \forall b \in B, t \in T \\
 \sum_{(i,b) \in P} Q_{i,b}^t - \sum_{(b,j) \in P} Q_{b,j}^t &= (V_b^t - V_b^{t-1}) \cdot \frac{1}{\Delta t} && \forall b \in B, t \in T \setminus \{0\} \\
 \sum_{(i,n) \in P} Q_{i,n}^t - \sum_{(n,j) \in P} Q_{n,j}^t &= D_n^t \cdot \frac{1}{\Delta t} && \forall n \in N \setminus (\{B, R\}), \\
 &&& t \in T \\
 H_r^t &= InitH_r && \forall r \in R, t \in T \\
 H_i^t - H_j^t &= r_{i,j} \cdot Q_{i,j}^t \cdot |Q_{i,j}^t| && \forall (i,j) \in P, t \in T \\
 y_b &\in \{0, 1\} && \forall b \in B \\
 V_b^t &\geq 0 && \forall b \in B, t \in T \\
 MaxV_b &\geq 0 && \forall b \in B \\
 Hmax &\geq H_n^t \geq Hmin && \forall n \in N, t \in T \\
 Hmax - E_b &\geq L_b^t \geq Hmin - E_b && \forall b \in B, t \in T \\
 Qmax_{i,j} &\geq Q_{i,j}^t \geq -Qmax_{i,j} && \forall (i,j) \in P, t \in T
 \end{aligned}$$

Durch die Benutzung von Binärvariablen und der nicht-konvexen quadratischen Druckverlustgleichung (4.13) ist das vorgestellte Optimierungsmodell ein nicht-konvexes gemischt-ganzzahliges quadratisch beschränktes Optimierungsmodell bzw. ein nonconvex Mixed Integer Quadratically Constrained Program (MIQCP). In den folgenden Unterkapiteln werden Lösungsmethoden diskutiert, mit denen dieses Modell gelöst werden kann. Zuvor werden die im Rahmen dieser Arbeit genutzten Testinstanzen vorgestellt.

## 4.2 Testinstanzen

In diesem Abschnitt werden die Wassernetzmodelle vorgestellt, die im Verlauf dieser Arbeit für die numerischen Experimente genutzt werden. Bei den Modellen handelt es sich einerseits um fiktive Netze und andererseits um Netze, denen ein reales Wassernetzwerk zugrunde liegt. Dabei sind einige Netze aus der Literatur entnommen, während andere von dem Praxispartner RZVN Wehr GmbH zur Verfügung gestellt wurden. In Tabelle 4.4 sind alle Netze sowie deren wichtigsten Eigenschaften dargestellt. Dabei ist die Tabelle in drei Abschnitte unterteilt. Im ersten Abschnitt befinden sich Netze mit einer relativ kleinen Anzahl an Knoten und Kanten. Im zweiten Abschnitt sind Netze mit einer mittleren Anzahl an Knoten und Kanten zu finden, während im dritten Abschnitt große Netze zu sehen sind.

Name	# Knoten	# Kanten	# Tanks	# Res.	Name in Literatur
S01	8	10	3	1	
S02	10	12	1	0	McGhee
S03	11	12	4	1	Shamir
S04	12	11	8	1	
S05	12	11	5	1	
S06	14	13	8	0	
S07	14	15	7	1	
S08	17	16	10	0	
S09	18	17	6	1	
S10	20	21	15	1	
S11	21	20	15	0	
M01	27	26	15	1	
M02	30	31	10	1	New York
M03	34	38	20	0	
M04	42	44	10	1	Hanoi
M05	46	50	15	1	
M06	52	73	15	1	Foss_Poly_0
M07	56	77	20	0	Foss_Iron
M08	86	114	15	3	Pescara
L01	219	250	20	0	
L02	300	345	30	2	Modena
L03	916	973	25	1	
L04	932	1014	30	2	
L05	1913	2487	20	2	Exnet

Tabelle 4.4: Eigenschaften der Testinstanzen

Bei den aus der Literatur entnommenen Netzen steht der in der Literatur verwendete Name in der letzten Spalte der Tabelle. Es sei darauf hingewiesen, dass diesen Netzen weitere Behälter hinzugefügt worden sind, sodass in diesen Netzen eine Wassertankoptimierung durchgeführt werden kann. Bei den Netzen M06, M07, M08 und L02 handelt es sich um reale Wassernetze, denen italienische Wassernetzwerke zugrunde liegen, siehe [Bragalli et al., 2012], S. 230. Auch die Netze L01, L03 und L04 sind reale Wassernetze, die die Versorgungssysteme deutscher Städte modellieren. Zur Veranschaulichung sind in den Abbildungen 4.1 bis 4.3 mit den Netzen S09, M02 und L05 jeweils ein Netz aus jeder Größenkategorie abgebildet.

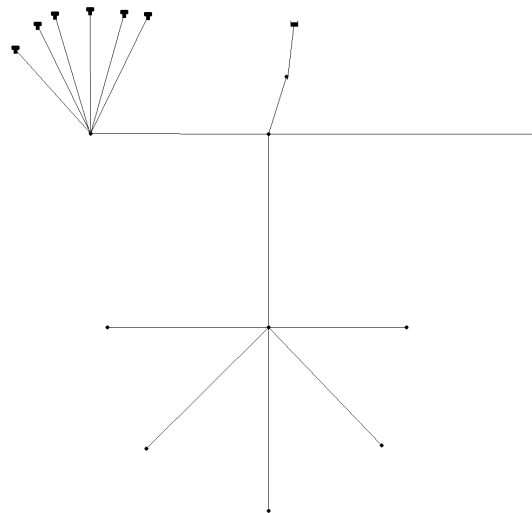


Abbildung 4.1: Grafische Darstellung von Netz S09

In den folgenden Kapiteln werden mit diesen Testinstanzen einige numerische Experimente durchgeführt. Dazu werden die Netze mit nur zwei Zeitschritten betrachtet, um die Ergebnisse der Netze miteinander vergleichen zu können. Die Berechnungen wurden auf einem Rechner mit Intel Core i7-3370 CPU mit 3,4 GHz und 32 GB Hauptspeicher unter Windows 8.1 Pro durchgeführt. Die prototypische Implementierung des im Rahmen der Arbeit entwickelten Lösungsprozesses wurde in C# programmiert und mit VisualStudio 2012 im Release-Modus kompiliert. Als Optimierungssoftware wurde Gurobi 5.02 genutzt. In Abbildung 4.4 ist ein Screenshot des entwickelten Prototyps zu sehen.

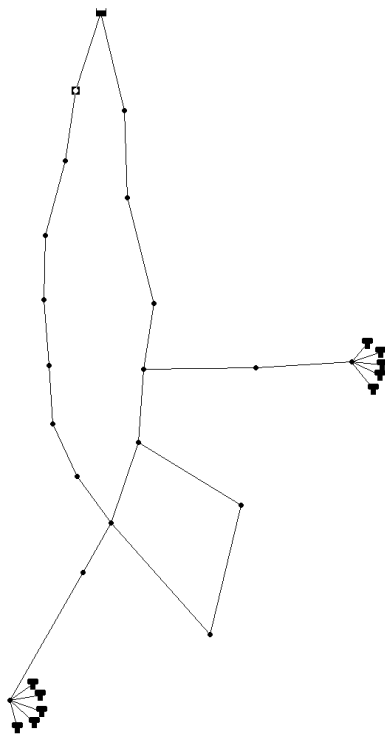


Abbildung 4.2: Grafische Darstellung von Netz M02

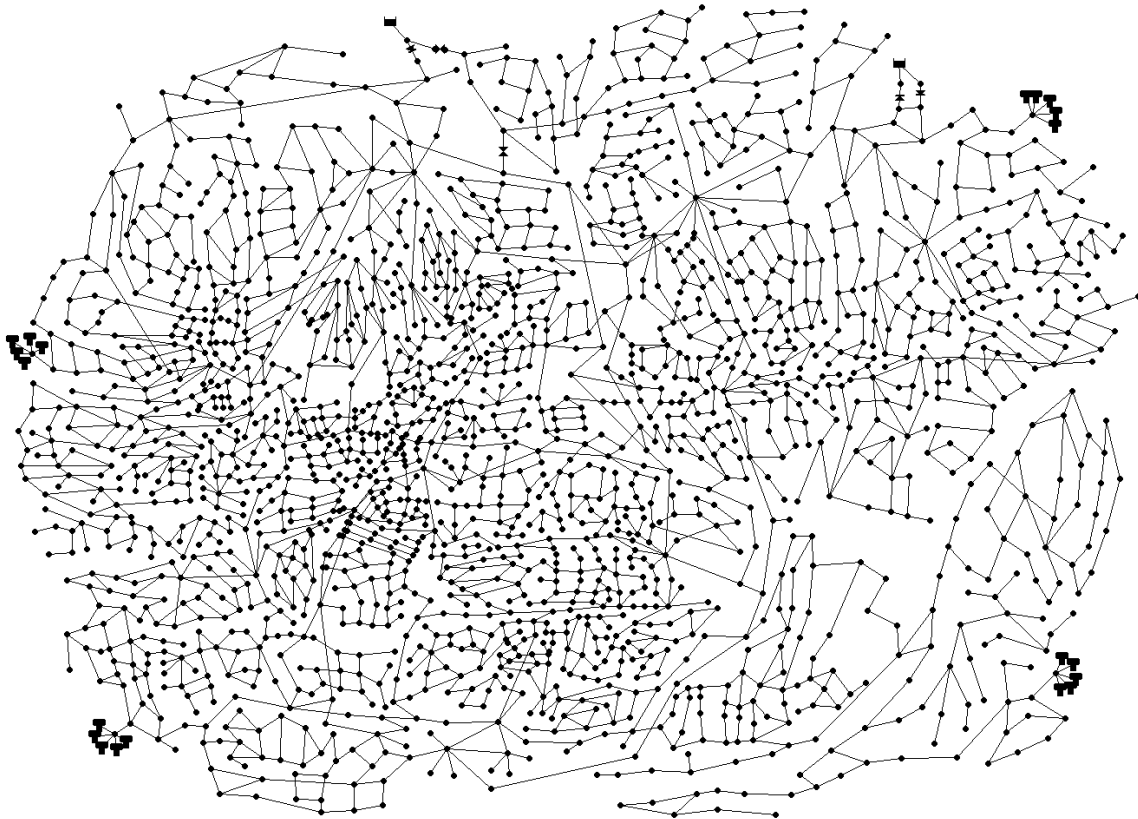


Abbildung 4.3: Grafische Darstellung von Netz L05

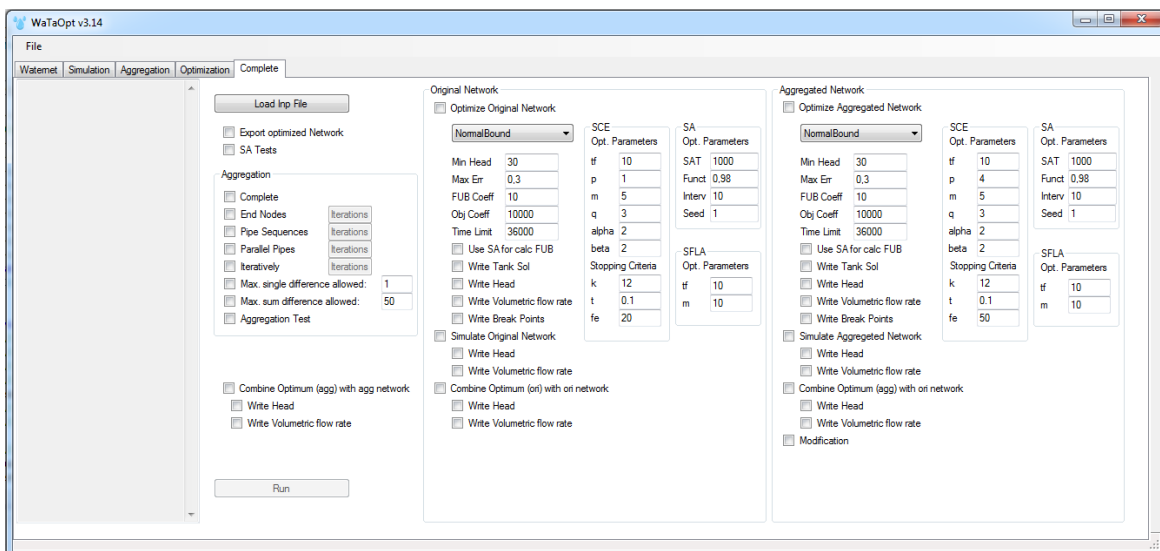


Abbildung 4.4: Screenshot des entwickelten Prototyps

### 4.3 Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung eines Simulated Annealing-Algorithmus

In diesem Abschnitt wird die Anwendung eines Simulated Annealing-Algorithmus (SA-Algorithmus) auf das Behälteroptimierungsproblem vorgestellt. Mit diesem sollen zulässige Lösungen für das in Unterkapitel 4.1 entwickelte Optimierungsmodell gefunden werden.

Wie schon kurz in Abschnitt 3.2 beschrieben, bildet ein Simulated Annealing-Algorithmus den Abkühlungsprozess eines Metalls nach. Dabei wird das Wissen genutzt, dass sich die Atome des Metalls während eines möglichst langsamen Abkühlungsprozesses in einer möglichst energetisch günstigen Kristallstruktur anordnen. Dieser Prozess wird algorithmisch nachgebildet, um eine möglichst gute Lösung eines Optimierungsproblems zu finden. Ein SA-Algorithmus ist eine Meta-Heuristik, die auf lokaler Suche basiert. In Algorithmus 1 ist der grundsätzliche Ablauf des SA-Algorithmus beschrieben. Der Algorithmus wird mit einer zulässigen Lösung  $s_0$  initialisiert. Weiterhin werden eine initiale Temperatur  $t$ , eine Funktion zur Temperaturreduktion  $\alpha(t)$  sowie eine maximale Anzahl an Iterationen  $maxIter$  festgelegt. Anschließend wird eine zu  $s_0$  benachbarte Lösung  $s$  bestimmt und deren Zielfunktionswert  $f(s)$  mit dem Zielfunktionswert  $f(s_0)$  der aktuellen Lösung  $s_0$  verglichen. Falls die Lösung besser im Sinne des Zielfunktionswertes ist, so wird diese neue Lösung übernommen. Falls nicht, so wird sie mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit dennoch übernommen. Dies wird mit der Funktion  $\exp(-\delta/t)$  entschieden, wobei  $\delta$  die Differenz der beiden Zielfunktionswerte darstellt. Danach wird erneut eine benachbarte Lösung von der aktuellen Lösung  $s_0$  gesucht. Dieser Prozess wird einige Male wiederholt bis die maximale Anzahl an Iterationen erreicht wurde. Anschließend wird die Temperatur reduziert und der Prozess erneut gestartet. Dies wird so lange ausgeführt bis das zuvor definierte Abbruchkriterium erfüllt ist. Zurückgegeben wird eine Lösung  $s_0$ , die die beste gefundene Approximation an ein Optimum des Optimierungsproblems ist.

Im Vergleich zu anderen Meta-Heuristiken hat der SA-Algorithmus, wie oben beschrieben, die Eigenschaft, dass während des Suchprozesses mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auch eine schlechtere Lösung übernommen werden kann. Damit besteht die Möglichkeit, dass der Algorithmus ein lokales Optimum wieder verlassen kann und nicht bis zum Ende in diesem verweilt. Die dazu genutzte Funktion stellt zudem sicher, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine schlechtere Lösung übernommen wird, am Anfang des Algorithmus höher ist als am Ende. Dies hängt mit der fallenden Temperatur zusammen, von der die Funktion  $\exp(-\delta/t)$  abhängt. Diese Eigenschaft des Algorithmus hat auch den Vorteil, dass die Wahl der initialen Lösung keinen zu großen Einfluss auf das Endergebnis hat. Weitere Details zu diesem Algorithmus können beispielsweise in [Reeves, 1993], S. 20 ff., nachgelesen werden.

---

**Algorithmus 1** : Simulated Annealing-Algorithmus

---

Wähle eine initiale, zulässige Lösung  $s_0$ .  
Wähle eine initiale Temperatur  $t$ .  
Wähle eine Funktion zur Temperaturreduktion  $\alpha(t)$ .  
Wähle eine maximale Anzahl an Iterationen  $maxIter$ .  
Setze einen Iterationszähler  $i = 0$ .  
**repeat**  
    **repeat**  
        Wähle eine Lösung  $s \in N(s_0)$ , wobei  $N(s_0)$  die Nachbarschaft von  $s_0$  ist.  
        Berechne  $\delta = f(s) - f(s_0)$ , wobei  $f(\bar{s})$  die Kostenfunktion des Optimierungsproblems  $\bar{s}$  ist.  
        **if**  $\delta < 0$  **then**  
            | Setze  $s_0 = s$ .  
        **end**  
        **else**  
            Wähle zufällig ein  $x \in (0, 1)$ .  
            **if**  $x < \exp(-\delta/t)$  **then**  
                | Setze  $s_0 = s$ .  
            **end**  
        **end**  
        Setze  $i = i + 1$ .  
    **until**  $i = maxIter$ ;  
    Setze  $t = \alpha(t)$ .  
**until** Abbruchkriterium ist erfüllt;  
 $s_0$  ist die beste gefundene Lösung.

---

Wird der Simulated Annealing-Algorithmus nun auf ein spezielles Problem angewendet, so müssen im Vorfeld einige Entscheidungen getroffen werden. Dabei gibt es zwei Kategorien der Entscheidungen, vgl. [Reeves, 1993], S. 27. Zum einen sind es generische Entscheidungen, die den Algorithmus an sich betreffen. Dazu gehören unter anderem die Wahl der initialen Temperatur, die Wahl der Abkühlungsfunktion sowie die Anzahl der maximalen Iterationen und das Abbruchkriterium. Zum anderen müssen problemspezifische Entscheidungen getroffen werden. Dies sind beispielsweise die Wahl des Raumes der zulässigen Lösungen, die Wahl der Kostenfunktion  $f(s)$ , die die aktuelle Lösung  $s$  bewerten soll und die Wahl einer Nachbarlösung. Der SA-Algorithmus soll als Lösung eine Belegung der Variablen des in Abschnitt 4.1 definierten Optimierungsmodells liefern. Dazu werden für die Belegung der Variablen für das Volumen der Behälter  $V_b^t$  diskrete Werte vorgegeben. Zusätzlich sollen für die Binärvariablen  $y_b$ , die entscheiden, ob ein Behälter gebaut bzw. umgebaut oder nicht gebaut wird, zulässige Belegungen gefunden werden. Eine Nachbarlösung wird gefunden, indem ein weiterer Behälter aus dem Netz ausgewählt wird und für diesen die entsprechenden

Variablenbelegungen bestimmt werden. Die Kostenfunktion ist die Zielfunktion (4.1) des in Abschnitt 4.1 vorgestellten Optimierungsmodells. Für die Überprüfung der Zulässigkeit der Lösungen wird eine hydraulische Simulation genutzt, die in Kapitel 6 genauer vorgestellt wird. Die generischen Entscheidungen sind wie folgt getroffen worden. Gestoppt wird der Algorithmus, sobald die Temperatur kleiner als Eins ist, die initiale Temperatur wurde auf 1000 festgelegt und die Abkühlungsfunktion wurde als  $\alpha(t) = 0,98 \cdot t$  gewählt. Die maximale Anzahl an Iterationen wurde auf 10 festgesetzt.

Im Rahmen dieser Arbeit ist die Wahl auf den SA-Algorithmus gefallen, da dieser ein einfaches, aber robustes und schnelles Verfahren ist, um eine nahezu optimale Lösung zu finden. Da es sich hierbei um eine Meta-Heuristik handelt, kann jedoch nicht sichergestellt werden, dass es sich bei der gefundenen Lösung um ein globales Optimum handelt. Zudem werden, wie oben erwähnt, die Variablen aus einer diskreten Menge gewählt. Aus diesem Grund kann dieser Algorithmus auch nicht als exakte Lösungsmethode angewendet werden. In Tabelle 4.5 sind die Ergebnisse zu finden, die durch die Lösung mit Hilfe des SA-Algorithmus entstanden sind. Als Vergleich wurden alle Modelle ebenfalls mit SCIP, [Berthold et al., 2012], gelöst. Die dadurch entstandenen Ergebnisse sind ebenfalls in Tabelle 4.5 zu finden. Um die mit dem SA-Algorithmus gefundenen Lösungen bewerten zu können, werden diese mit der Lösung von SCIP wie folgt verglichen:

$$RelDiff = \frac{|ZF_{SA} - ZF_{SCIP}|}{|ZF_{SCIP}|}, \quad (4.14)$$

wobei  $ZF_{SA}$  der Zielfunktionswert des SA-Algorithmus und  $ZF_{SCIP}$  der Zielfunktionswert von SCIP ist.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Zeit (s)
S01-SA	644365,7639	0,263	1,02
S01-S	510153,2948	-	0,10
S02-SA	40312,3860	72,162	1,03
S02-S	551,0000	-	0,01
S03-SA	235919,4490	0,330	1,05
S03-S	177365,8369	-	0,06
S04-SA	10017,4770	1,321	1,28
S04-S	4315,8634	-	0,02
S05-SA	5854,8668	0,078	1,20
S05-S	5431,9206	-	0,13
S06-SA	25232,7412	0,035	1,24
S06-S	24377,8030	-	0,09



4.3 Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung eines Simulated  
Annealing-Algorithmus

Name	ZF-Wert	RelDiff	Zeit (s)
S07-SA	5609042,8867	-	2,54
S07-S	0,0000	-	0,09
S08-SA	43296,8990	0,138	1,58
S08-S	38034,0672	-	0,15
S09-SA	18149,9985	1,206	1,38
S09-S	8228,2358	-	0,15
S10-SA	1443833,50579	3,459	2,26
S10-S	323781,6305	-	1,07
S11-SA	32441,5902	1,901	2,18
S11-S	11181,9100	-	1,73
M01-SA	67429,5297	0,320	2,51
M01-S	51070,3745	-	0,62
M02-SA	94547,7796	0,322	2,33
M02-S	71492,8293	-	2,16
M03-SA	316822,7608	14,906	3,48
M03-S	19918,7915	-	64,90
M04-SA	318386,2562	1,889	2,78
M04-S	110217,7802	-	2,51
M05-SA	0,0000	-	4,36
M05-S	0,0000	-	12,19
M06-SA	6627497,0037	-	5,18
M06-S-Primal	10234205,8963	-	86400,00
M06-S-Dual	363835,1559	-	86400,00
M07-SA	837249,0440	-	6,04
M07-S-Primal	3240196,3677	-	86400,00
M07-S-Dual	129860,2073	-	86400,00
M08-SA	709521,8425	-	6,75
M08-S-Primal	infinity	-	86400,00
M08-S-Dual	256785,8387	-	86400,00
L01-SA	3539804,1243	-	16,81
L01-S-Primal	484239,8146	-	86400,00
L01-S-Dual	282999,3213	-	86400,00
L02-SA	1970300,4966	-	30,18
L02-S-Primal	41203988,2812	-	86400,00
L02-S-Dual	367365,8627	-	86400,00
L03-SA	9387200,7517	-	90,47
L03-S-Primal	2557665,7162	-	86400,00
L03-S-Dual	64621,1504	-	86400,00
L04-SA	292245560,6547	-	181,05
L04-S-Primal	5851326,3138	-	86400,00

Name	ZF-Wert	RelDiff	Zeit (s)
L04-S-Dual	137624,7424	-	86400,00
L05-SA	117185305,9789	-	7606,64
L05-S-Primal	infinity	-	86400,00
L05-S-Dual	0,0000	-	86400,00

Tabelle 4.5: Ergebnisse nach Anwendung des Simulated Annealing-Algorithmus

Es ist zu erkennen, dass gerade bei den kleinen Netzmodellen S01 bis S11, M01 und M02 die Lösungszeit bei Benutzung von SCIP deutlich geringer ist. Danach findet in den meisten Fällen der SA-Algorithmus Lösungen in einer kürzeren Lösungszeit. Ab Netz M06 konnte SCIP in der vorgegebenen Zeitschranke von 24 Stunden keine optimale Lösung finden. Daher werden ab diesem Netz die primale und duale Schranke angegeben. Ab diesem Netz können aus diesem Grund auch keine Werte für den relativen Fehler angegeben werden. Bis zu Netz M05 ist jedoch zu erkennen, dass die Lösung des SA-Algorithmus stark von den mit SCIP gefundenen optimalen Lösungen abweicht. Aus diesem Grund und weil für die anderen Netze keine optimale Lösung mit SCIP gefunden werden konnte, sollen in dem folgenden Abschnitt weitere Lösungsmethoden für das hier vorgestellte Optimierungsmodell betrachtet werden.

#### 4.4 Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung von Linearisierungstechniken

Das in Abschnitt 4.1 vorgestellte Modell ist als nicht-konvexes MIQCP formuliert. Verantwortlich für die Nicht-Konvexität und die quadratischen Nebenbedingungen ist die Druckverlustgleichung in Nebenbedingung (4.13). Daher ist das Ziel dieses Abschnitts, diese Gleichung stückweise zu linearisieren. Dies hat den Vorteil, dass das Optimierungsmodell anschließend als MIP formuliert ist und mit Standard-Solvern für MIPs gelöst werden kann. In diesem Abschnitt werden daher zunächst zwei Techniken zur Formulierung einer stückweisen Linearisierung vorgestellt, die danach miteinander verglichen werden. Anschließend wird die Anwendung auf das in Abschnitt 4.1 vorgestellte Optimierungsmodell diskutiert. Im Anschluss daran werden die Wahl der Stützstellen und die Wahl des Definitionsbereiches der zu linearisierenden Funktion beschrieben. Danach werden die numerischen Ergebnisse nach Anwendung der stückweisen Linearisierung auf die Netzmodelle vorgestellt.

Die Anwendung einer stückweisen Linearisierung soll für separable nichtlineare Funktionen beschrieben werden. Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige separable nichtlineare Funktion, so dass die Funktion geschrieben werden kann als  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$

## 4.4 Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung von Linearisierungstechniken

mit  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $D_j$  der Definitionsbereich der Funktion  $f_j$ . Dann lässt sich  $D_j$  in  $m$  verschiedene Intervalle mit  $m$  Startpunkten  $a_k^j$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ , und einem Endpunkt  $a_m^j$  unterteilen. Damit kann jedes  $f_j$  in  $m$  Segmente mit  $b_k^j = f_j(a_k^j)$ ,  $k = 0, \dots, m$ , unterteilt werden. Dies führt zu  $m+1$  verschiedenen Koordinaten  $(a_k^j, b_k^j)$ ,  $k = 0, \dots, m$ , der Funktion  $f_j$ . Werden alle aufeinander folgenden Koordinaten mittels einer linearen Funktion miteinander verbunden, entsteht eine stückweise lineare Approximation  $\phi_j$  an  $f_j$ . Dies wird in Abbildung 4.5 veranschaulicht. Dabei ist in schwarz die originale Funktion und grau die Approximation der Funktion als stückweise Funktion zu sehen.

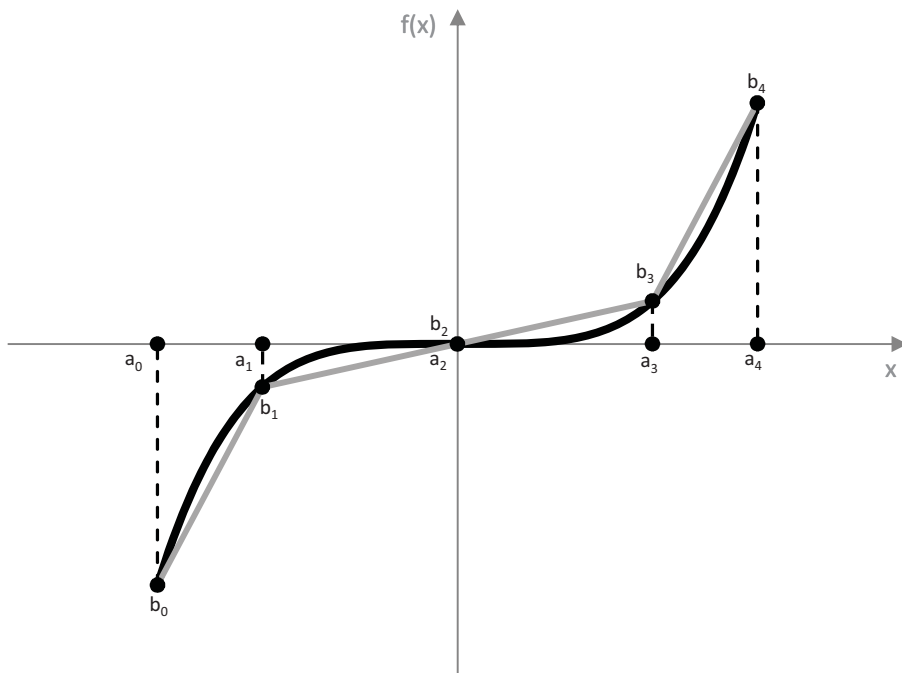


Abbildung 4.5: Stückweise Linearisierung einer Funktion  $f$

Der Übersichtlichkeit halber wird der Index  $j$  im Folgenden vernachlässigt. Die nächsten zwei Abschnitte stellen zwei verschiedene Techniken zur Formulierung einer stückweisen Linearisierung vor, die im Folgenden *Konvexkombinations-Methode* und *inkrementelle Methode* genannt werden.

### 4.4.1 Konvexkombinations-Methode

Eine intuitive und weit verbreitete Methode ist die *Konvexkombinations-Methode*, die unter anderem in [Geißler, 2011], S. 11, beschrieben wird. Sie ist auch in [Nemhauser

und Wolsey, 1988], S. 11, [Dantzig, 1960], S. 36 oder in [Padberg, 2000] als *Model II* zu finden.

Sei der Definitionsbereich  $D$  der zu linearisierenden Funktion  $f$  wie oben beschrieben in  $m$  Intervalle  $[a_k, a_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, m - 1$ , unterteilt. Dann lässt sich jedes  $x \in D = [a_0, a_m]$  als Konvexkombination zweier benachbarter Intervallgrenzen  $a_i, a_{i+1}$  schreiben. Seien  $z_k \geq 0$ ,  $k = 0, \dots, m$ , kontinuierliche Variablen, dann gilt

$$x = a_0 \cdot z_0 + a_1 \cdot z_1 + \dots + a_m \cdot z_m = \sum_{k=0}^m a_k \cdot z_k,$$

wobei

$$\sum_{k=0}^m z_k = 1$$

gelten muss. Damit können die approximierten Funktionswerte der Funktion  $f$  formuliert werden als

$$\phi(x) = b_0 \cdot z_0 + b_1 \cdot z_1 + \dots + b_m \cdot z_m = \sum_{k=0}^m b_k \cdot z_k.$$

Um sicherzustellen, dass nur zwei benachbarte  $z_i$  von Null verschieden sind, werden zusätzlich  $m$  Binärvariablen  $y_k$ ,  $k = 0, \dots, m - 1$ , eingeführt. Zusammen mit diesen Variablen kann die Funktion  $f$  mit den folgenden Restriktionen linear approximiert werden:

$$x = \sum_{k=0}^m a_k \cdot z_k \quad (4.15)$$

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot z_k \quad (4.16)$$

$$0 \leq z_0 \leq y_0 \quad (4.17)$$

$$0 \leq z_k \leq y_{k-1} + y_k \quad \forall k = 1, \dots, m-1 \quad (4.18)$$

$$0 \leq z_m \leq y_{m-1} \quad (4.19)$$

$$\sum_{k=0}^m z_k = 1 \quad (4.20)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_k = 1 \quad (4.21)$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad \forall k = 0, \dots, m-1. \quad (4.22)$$

Diese Approximation  $\phi$  der Funktion  $f$  benötigt die Einführung von  $m+1$  kontinuierlichen Variablen und  $m$  Binärvariablen. In Abbildung 4.6 ist die Idee dieser Approximation veranschaulicht. Dabei ist das rote Segment das aktive Segment für die Linearisierung. Der  $x$ -Wert kann dann berechnet werden durch  $x = a_k \cdot z_k + a_{k+1} \cdot z_{k+1}$ , wodurch sich der approximierte Funktionswert  $\phi(x) = b_k \cdot z_k + b_{k+1} \cdot z_{k+1}$  ergibt.

#### 4.4.2 Inkrementelle Methode

Eine weitere Möglichkeit, um die Funktion  $f$  zu approximieren, stellt die in [Geißler, 2011], S. 12, genannte *inkrementelle Methode* dar. Sie wird ebenfalls in [Padberg, 2000] unter dem Namen *Model I* beschrieben. Um diese Methode nutzen zu können, wird für jedes Intervall  $k$  eine kontinuierliche Variable  $z_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ , eingeführt. Mit diesen Variablen kann  $x$  wie folgt berechnet werden:

$$x = a_0 + z_1 + \dots + z_m = a_0 + \sum_{k=1}^m z_k. \quad (4.23)$$

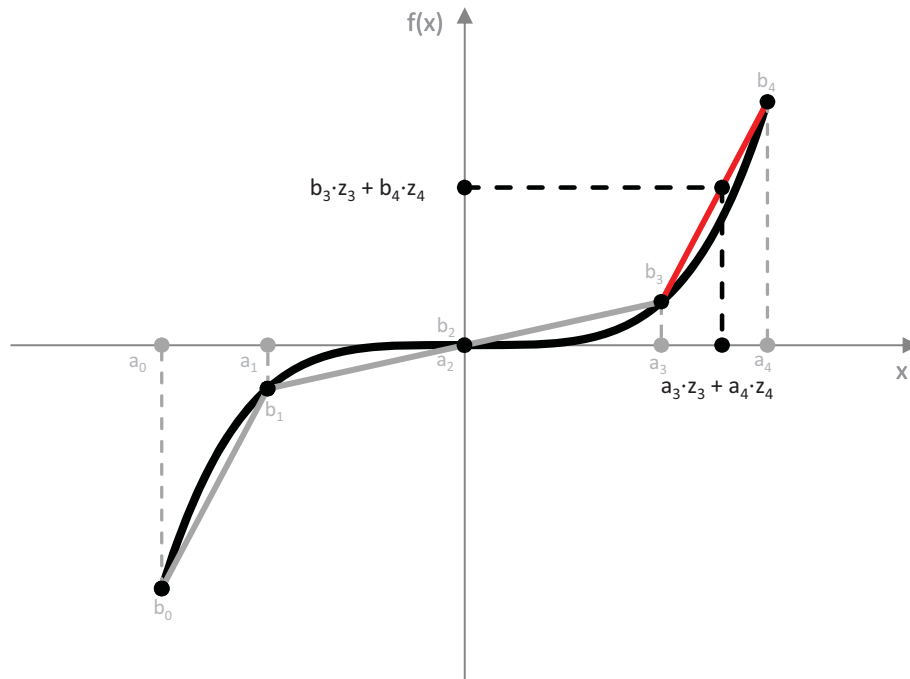


Abbildung 4.6: Stückweise Linearisierung einer Funktion  $f$  mit der Konvexkombinations-Methode

Damit können die approximierten Funktionswerte von  $f$  wie folgt dargestellt werden:

$$\phi(x) = b_0 + \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0} \cdot z_1 + \dots + \frac{b_m - b_{m-1}}{a_m - a_{m-1}} \cdot z_m = b_0 + \sum_{k=1}^m \frac{b_k - b_{k-1}}{a_k - a_{k-1}} \cdot z_k. \quad (4.24)$$

Die Idee hierbei ist die folgende: Falls  $x$  in dem Intervall  $[a_i, a_{i+1}]$  liegt, so sollen alle Variablen  $z_\ell$ , die zu den davor liegenden Intervallen  $[a_\ell, a_{\ell+1}]$ ,  $\ell = 0, \dots, i - 1$ , gehören, von Null verschieden sein. Dabei sollen sie den Wert der Intervalllänge  $a_{\ell+1} - a_\ell$  annehmen. Die Variable  $z_i$  hingegen soll einen Wert zwischen 0 und der Intervalllänge  $a_{i+1} - a_i$  annehmen. Damit ist sichergestellt, dass mit Hilfe der beiden Gleichungen (4.23) und (4.24) jeder Wert  $x$  mit zugehörigem Funktionswert  $\phi(x)$  dargestellt werden kann. Damit diese Eigenschaften für jede Variable  $z_k$  gelten, werden zusätzlich  $m - 1$  Binärvariablen  $y_k$ ,  $k = 1, \dots, m - 1$ , benötigt. Mit diesen kann die Funktion  $f$  wie folgt linear approximiert werden:

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^m z_k \quad (4.25)$$

$$\phi(x) = b_0 + \sum_{k=1}^m \frac{b_k - b_{k-1}}{a_k - a_{k-1}} \cdot z_k \quad (4.26)$$

$$z_1 \leq a_1 - a_0 \quad (4.27)$$

$$z_k \geq (a_k - a_{k-1}) \cdot y_k \quad \forall k = 1, \dots, m - 1 \quad (4.28)$$

$$z_{k+1} \leq (a_{k+1} - a_k) \cdot y_k \quad \forall k = 1, \dots, m - 1 \quad (4.29)$$

$$z_k \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (4.30)$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad \forall k = 1, \dots, m - 1. \quad (4.31)$$

Diese Formulierung zur stückweisen Linearisierung der Funktion  $f$  benötigt  $m$  zusätzliche kontinuierliche Variablen und  $m - 1$  zusätzliche Binärvariablen. In Abbildung 4.7 wird die Idee dieser Formulierung veranschaulicht. Dabei ist zu sehen, dass sich der Wert der  $x$ -Achse aus den addierten Längen der vorherigen Intervalle  $[a_0, a_1]$  bis  $[a_2, a_3]$  addiert mit einem Stück des Intervalls  $[a_3, a_4]$  ergibt. Dies ist der wesentliche Unterschied zur Konvexkombinations-Methode, bei der der  $x$ -Wert durch nur ein aktives Intervall bestimmt wird.

### 4.4.3 Vergleich der beiden Methoden

Es gibt noch weitere Methoden, um eine Funktion stückweise zu linearisieren. Einige davon werden beispielsweise in [Lin et al., 2013] beschrieben. Die beiden vorgestellten Methoden zur stückweisen Linearisierung einer Funktion  $f$ , die Konvexkombinationsmethode und die inkrementelle Methode, werden von Padberg in dem Artikel [Padberg, 2000] miteinander verglichen. Dabei wird festgestellt, dass die inkrementelle Methode für die Formulierung der Linearisierung sowohl eine kontinuierliche als auch eine Binärvariable weniger benötigt. Weiterhin wird gezeigt, dass der Lösungsraum der inkrementellen Methode in dem des Lösungsraums der Konvexkombinations-Methode enthalten ist. Damit liefert die inkrementelle Methode eine bessere Formulierung zur Approximation einer nichtlinearen Funktion  $f$ . Aus diesem Grund wird daher im weiteren Verlauf ausschließlich die inkrementelle Methode benutzt.

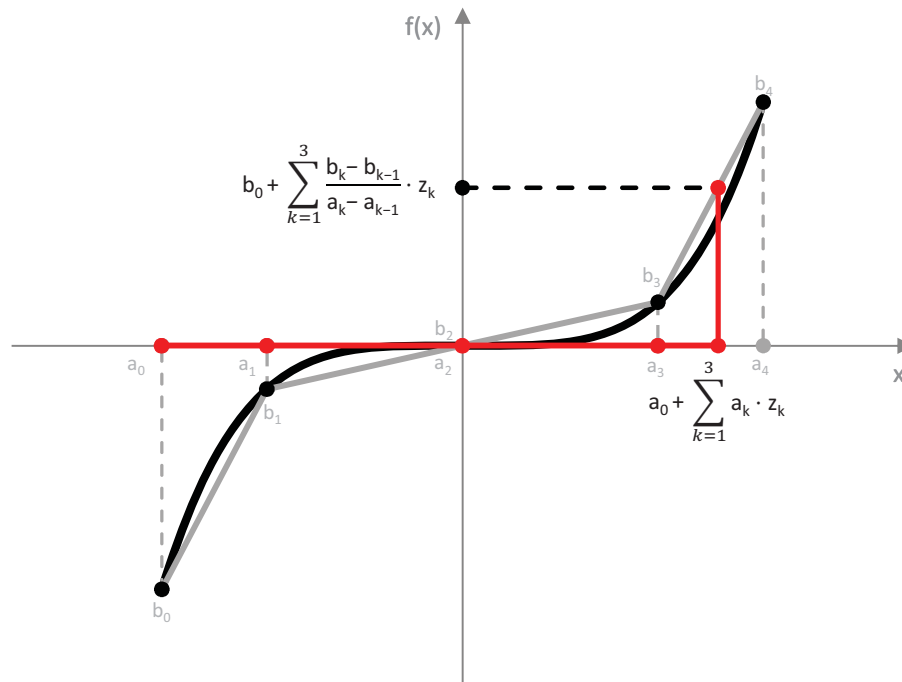


Abbildung 4.7: Stückweise Linearisierung einer Funktion  $f$  mit der inkrementellen Methode

#### 4.4.4 Wahl des Definitionsbereichs und der Stützstellen

Bei der Anwendung einer stückweisen Linearisierung gilt es, zwei wichtige Entscheidungen zu treffen. Dies ist zum einen die Wahl des Definitionsbereiches der zugrunde liegenden Funktion  $f$  und zum anderen die Verteilung und Anzahl der Stützstellen. In den folgenden Abschnitten werden diese beiden Entscheidungen genauer erläutert.

Um die Anzahl der Stützstellen schon im Vorfeld gering zu halten, sollte der Definitionsbereich  $D$  der zu approximierenden Funktion  $f$  so klein wie möglich gewählt werden. Jedoch muss dabei darauf geachtet werden, dass der Lösungsraum dadurch nicht eingeschränkt wird. In diesem Abschnitt sollen verschiedene Möglichkeiten für die Wahl des Definitionsbereiches untersucht werden.

Der Definitionsbereich  $D$  der Funktion  $f$  hängt von der unteren bzw. oberen Schranke  $Q_{lb}$  bzw.  $Q_{ub}$  der Flussvariablen  $Q$  ab. Damit gilt also  $D = [Q_{lb}, Q_{ub}]$ . Im Rahmen dieser Arbeit wurden zwei verschiedene Möglichkeiten zur Bestimmung dieser Schranken untersucht. Zum einen kann die bereits erwähnte Simulation dazu genutzt werden, das Netz im Vorfeld zu simulieren, um danach die Schranken für die jeweiligen Flussvariablen abzuleiten. Zum anderen kann der in Abschnitt 4.3 vorgestellte SA-Algorithmus



#### 4.4 Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung von Linearisierungstechniken

---

genutzt werden. Dies soll dafür sorgen, dass die Schranken nah an einer guten Lösung liegen. In beiden Fällen wird die obere Schranke  $Q_{ub}$  so gewählt, dass sie den maximalen Wert über alle Zeitschritte annimmt. Dies bedeutet:

$$Q_{ub} = \max_{t \in T} |Q^t| \cdot F, \quad (4.32)$$

wobei  $F > 0$  ein konstanter Faktor ist, um die Größe des Definitionsbereiches zu steuern. Für die untere Schranke des Definitionsbereiches gilt  $Q_{lb} = -Q_{ub}$ .

Wurde der Definitionsbereich gewählt, so kann die Unterteilung des Definitionsbereiches durch die Stützstellen vorgenommen werden. Für die Formulierung einer stückweisen Linearisierung einer Funktion  $f$  werden zusätzliche kontinuierliche und binäre Variablen benötigt. Je mehr dieser Variablen benötigt werden, desto länger dauert der Lösungsprozess des entstandenen Optimierungsmodells. Daher sollte die Anzahl an zusätzlichen Variablen möglichst klein gehalten werden. Jedoch ist die Approximation an die Funktion  $f$  umso genauer, je mehr Stützstellen und damit Variablen genutzt werden. Daher ist die Herausforderung, den Definitionsbereich  $D$  einer nichtlinearen Funktion  $f$  so zu unterteilen, dass die Approximation  $\phi$  an  $f$  möglichst genau ist, jedoch gleichzeitig so wenig wie möglich Stützstellen benutzt werden. Bei der Wahl der Stützstellen gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Möglichkeiten. Die Stützstellen können über den Definitionsbereich gleichmäßig oder ungleichmäßig verteilt sein. Der Vorteil bei einer gleichmäßigen Verteilung liegt darin, dass die Verteilung von vornherein feststeht und keine Berechnungszeit für die Verteilung aufgewendet werden muss. Ein Nachteil ist jedoch, dass durch die gleichmäßige Verteilung einige Stellen der Funktion nur sehr ungenau approximiert werden und damit eventuell große Ungenauigkeiten entstehen können. Im Gegensatz dazu kann bei einer ungleichmäßigen Verteilung der Stützstellen erreicht werden, dass die Funktion an allen Stellen genau approximiert werden kann. Jedoch kann die Berechnung der ungleichmäßigen Verteilung viel Zeit in Anspruch nehmen.

Im Folgenden werden zwei verschiedene Möglichkeiten vorgestellt, um die Stützstellen zu wählen. Die erste Möglichkeit ist, die Stützstellen gleichmäßig zu wählen, sodass die dabei entstehende Approximation eine vorgegebene Fehlerschranke einhält. Die zweite Möglichkeit ist, die Stützstellen adaptiv zu wählen, sodass eine vorgegebene Fehlerschranke eingehalten wird. Ergebnisse werden im Anschluss an die Vorstellung der beiden Möglichkeiten diskutiert.

### Uniforme Stützstellen

Die Idee dieser Methode ist es, den Definitionsbereich  $D$  einer Funktion  $f$  in  $m$  uniforme Intervalle zu unterteilen. Das bedeutet, dass alle Intervalle die gleiche Länge besitzen. Dabei soll die Differenz zwischen der Funktion  $f$  und ihrer Approximation unter einer vorgegebenen Fehlerschranke  $\varepsilon$  liegen. Um dies sicherzustellen, wird die Anzahl der Stützstellen in Abhängigkeit der Fehlerschranke  $\varepsilon$  gewählt. Dazu wird der folgende Konvergenzsatz für stetige stückweise lineare Interpolationen genutzt.

**Satz 4.4.1.** *Sei der Definitionsbereich  $D$  unterteilt in  $m$  Intervalle  $[a_k, a_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, m$ , mit  $D = [a_0, a_m]$  und sei  $f \in C^2[a_0, a_m]$ . Weiterhin sei  $a_k = a_{k-1} + k \cdot h$ ,  $k = 1, \dots, m$ , mit  $h = \frac{b-a}{m}$ . Dann gilt für die stückweise Interpolation  $\phi(x)$  der Funktion  $f(x)$ :*

$$\max_{x \in D} |f(x) - \phi(x)| \leq \frac{h^2}{8} \cdot \max_{x \in D} |f''(x)|. \quad (4.33)$$

Der Beweis dazu lässt sich beispielsweise in [Schwarz und Köckler, 2011], S. 93, nachlesen.

Die in dieser Arbeit zu linearisierende Funktion ist die Druckverlustgleichung aus Nebenbedingung (4.13)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(Q) = r \cdot Q \cdot |Q|$ , wobei  $D = [-Qmax, Qmax]$  gilt. Da diese Funktion aufgrund des Absolutbetrages an der Stelle 0 nicht zwei Mal stetig differenzierbar ist, wird die Funktion für die Linearisierung in ihren positiven und negativen Anteil unterteilt. Damit ist auch Satz 4.4.1 anwendbar und mit ihm kann die Anzahl  $m$  der Intervalle berechnet werden, die mindestens vorhanden sein müssen, damit die Approximation die vorgegebene Fehlerschranke einhält. Es gilt  $f''(Q) = 2r$  und sei  $err := \max_{Q \in D} |f(Q) - \phi(Q)|$ . Dann lässt sich (4.33) so umformen, dass sich für die Schrittweite der Intervalle  $h$  eine untere Schranke von  $2 \cdot \sqrt{\frac{err}{r}} \leq h$  ergibt. Mit dieser kann dann die Anzahl der uniformen Intervalle  $m$  ermittelt werden, die mindestens vorhanden sein müssen, um die Fehlerschranke einzuhalten.

In Abbildung 4.8 ist als Beispiel die gleichmäßige Verteilung der Stützpunkte zu sehen. Der rote Punkt stellt dabei den Punkt dar, der der Variablenbelegung entspricht, wenn das zugehörige Optimierungsmodell optimal gelöst wurde. Ziel ist es also, diesen Punkt möglichst genau zu approximieren. Es ist zu erkennen, dass die Funktion  $f$  im Intervall  $[a_1, a_2]$  sehr gut approximiert ist, während die Annäherung in den anderen Intervallen nur sehr grob ist. Auch im Bereich des roten Punktes ist die Differenz zwischen der originalen Funktion und der Approximation sehr groß.

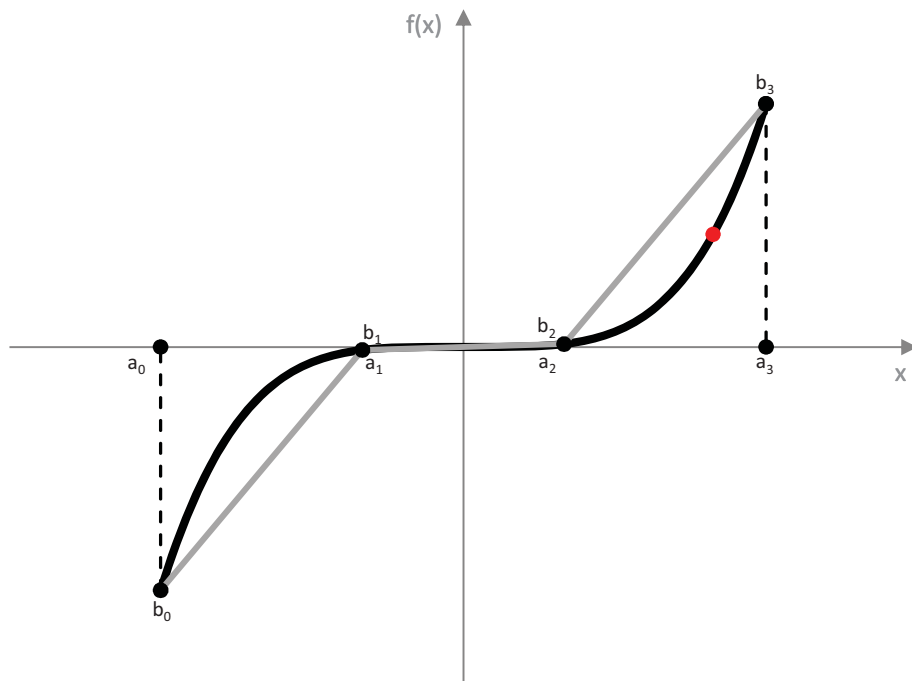


Abbildung 4.8: Gleichmäßige Verteilung der Stützstellen der Approximation an die Funktion  $f$

### Adaptive Stützstellen

Die Stützstellen können auch nicht-uniform gewählt werden. Das bedeutet, sie können im Definitionsbereich ungleichmäßig verteilt sein. Jedoch sollen sie möglichst so verteilt sein, dass an jeder Stelle die Differenz zwischen der Funktion  $f$  und ihrer Approximation  $\phi$  unter einer vorgegebenen Fehlerschranke  $\varepsilon$  liegt. Dabei können an eher flachen Stücken einer Funktion wenig Stützstellen ausreichend sein und an Stellen, an denen die Kurve stärker gekrümmt ist, mehr Stützstellen nötig sein, um die Funktion so genau wie möglich zu approximieren. Die Differenz zwischen der Funktion und ihrer Approximation zu berechnen, ist nach Lösung des Optimierungsmodells einfach, da dann die Funktion an einer gefundenen Lösung nur noch evaluiert werden muss. Die Herausforderung ist es jedoch, die Fehlerschranke schon vor der Berechnung des Optimierungsmodells abzuschätzen, um sicherzugehen, dass die Approximation die Fehlerschranke einhält. Das hier genutzte adaptive Verfahren wird im Detail von [Geißler, 2011] entwickelt und diskutiert. Geißler definiert für die Berechnung des Fehlers folgenden Approximationsfehler. Sei der Definitionsbereich  $D$  der Funktion  $f$  in  $m$  Intervalle  $I_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , unterteilt. Für jedes Intervall sei eine lineare Funktion  $\phi_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, die die Funktion  $f$  in dem Intervall  $I_k$  linear approximiert. Um den Approximationsfehler zu bestimmen, werden ein maximaler Unter- und Überschätzer der

Funktion definiert. Diese Definition ist aus [Geißler, 2011], S. 30, entnommen. Der *maximale Unterschätzer* der Funktion  $f$  im Intervall  $I_k$  ist demnach definiert als

$$\varepsilon_u(f, I_k) := \max_{x \in I_k} f(x) - \phi_k(x). \quad (4.34)$$

Der *maximale Überschätzer* der Funktion  $f$  für das Intervall  $I_k$  ist analog definiert als

$$\varepsilon_o(f, I_k) := \max_{x \in I_k} \phi_k(x) - f(x). \quad (4.35)$$

Mit den beiden Abschätzungen (4.34) und (4.35) lässt sich der *maximale Approximationsfehler*  $\varepsilon(f, I_k)$  der Funktion  $f$  im Intervall  $I_k$  bestimmen durch

$$\varepsilon(f, I_k) := \max\{\varepsilon_u(f, I_k), \varepsilon_o(f, I_k)\}. \quad (4.36)$$

In Abbildung 4.9 ist die Idee des maximalen Unter- und Überschätzers einer Funktion  $f$  zu sehen.

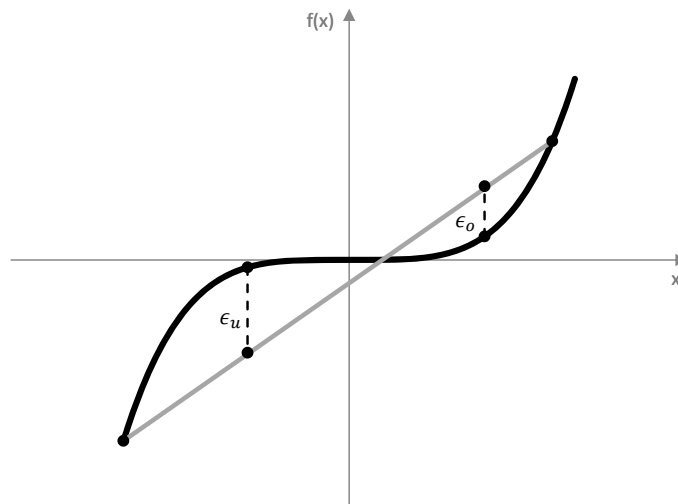


Abbildung 4.9: Maximaler Unterschätzer  $\varepsilon_u$  und maximaler Überschätzer  $\varepsilon_o$  einer Funktion  $f$  mit Approximation  $\phi$ , nach [Geißler, 2011]

#### 4.4 Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung von Linearisierungstechniken

Soll nun eine Funktion  $f$  stückweise linear approximiert werden, so wird mit einer initialen Einteilung des Definitionsbereichs  $D$  der Funktion  $f$  begonnen. Anschließend wird mit Hilfe der maximalen Unter- und Überschätzer für jedes Intervall die höchste Abweichung der Approximation zur Funktion  $f$  berechnet. Liegt diese unter der vordefinierten Fehlerschranke, so wird das nächste Intervall überprüft. Liegt sie jedoch darüber, wird das Intervall in zwei kleinere Intervalle unterteilt, für die ebenfalls diese Prüfung stattfindet. Wurde für jedes Intervall festgestellt, dass der maximale Approximationsfehler unter der vordefinierten Schranke liegt, so wurde eine Approximation gefunden, die den vorgegebenen Fehler einhält. Da diese Approximation sukzessiv entsteht, wird dieses Verfahren adaptiv genannt. Für die detaillierte Berechnung der maximalen Unter- und Überschätzer sowie für weitere Details zu diesem Verfahren sei auf [Geißler, 2011], S. 31 ff., verwiesen.

In Abbildung 4.10 ist die Idee der adaptiven Verteilung der Stützstellen dargestellt. Auch hier kennzeichnet der rote Punkt die Variablenbelegung, wenn das zugehörige Optimierungsmodell optimal gelöst wurde. Es ist zu sehen, dass die maximale Abweichung zwischen der Funktion  $f$  und ihrer Approximation geringer ist im Vergleich zu der gleichmäßigen Verteilung in Abbildung 4.8. Gerade im Bereich des Optimums ist somit eine genauere Approximation möglich.

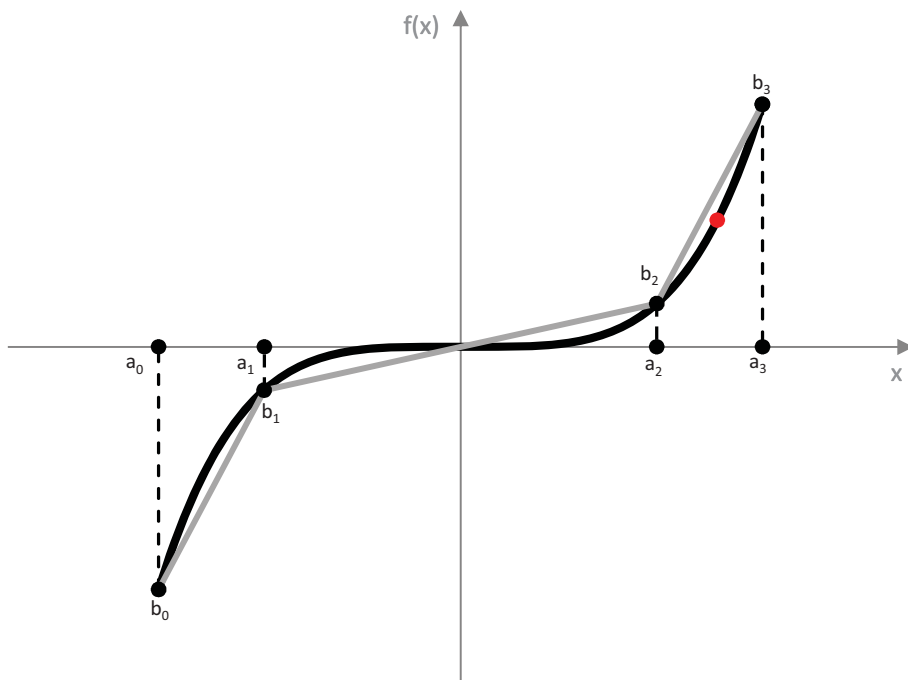


Abbildung 4.10: Ungleichmäßige Verteilung der Stützstellen der Approximation der Funktion  $f$

### Ergebnisse zur Wahl des Definitionsbereiches und der Stützstellen

In diesem Abschnitt werden die Wahl des Definitionsbereiches und der Stützstellen anhand von drei Testnetzen detailliert untersucht werden. In den Tabellen 4.6, 4.7 und 4.8 finden sich numerische Ergebnisse der Netze S09, M02 und L01. Dabei wurden die beiden verschiedenen Methoden zur Verteilungen der Stützstellen untersucht und verschiedene Größen des Definitionsbereiches der zu linearisierenden Funktion mit Hilfe des Faktors  $F$  analysiert. Zudem wurde der Einfluss des Simulated Annealing-Algorithmus auf die Bestimmung des Definitionsbereiches ermittelt. In den Tabellen sind die errechneten Zielfunktionswerte, die relative Abweichung zum Zielfunktionswert der mit SCIP gefundenen Lösung, berechnet nach Formel (4.14), die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen, der maximale Fehler, der durch die Linearisierung entstanden ist, gekennzeichnet mit  $Err$  sowie die benötigte Lösungszeit in Sekunden zu finden. In der ersten Spalte der Tabellen sind die genutzte Methode, Werte für den Faktor  $F$  sowie der Einsatz des SA-Algorithmus zu sehen. Dabei bedeutet *Uni*, dass eine uniforme Verteilung der Stützstellen vorgenommen wurde, während *Ada* eine adaptive Verteilung bedeutet. Die dahinterstehenden Zahlen geben die Belegung für den Faktor  $F$  an. An der Endung *-SA* ist zu erkennen, dass der SA-Algorithmus eingesetzt wurde.

#### Untersuchung des Definitionsbereiches und der Verteilung der Stützstellen am Beispiel von Netz S09

Meth.	ZF-Wert	RelDiff	Var.	NB	Err	Zeit
Uni-10	18094,8023	1,199	2112	2155	0,21	0,31
Uni-10-SA	8339,1757	0,013	2304	2347	0,21	0,36
Ada-10	18096,7711	1,199	2570	2613	0,09	13,64
Ada-10-SA	8254,5828	0,003	2822	2865	0,14	8,92
Uni-30	8280,4352	0,006	6184	6227	0,21	0,63
Uni-30-SA	8405,9452	0,022	6772	6815	0,21	2,28
Ada-30	8288,8944	0,007	7042	7085	0,23	19,72
Ada-30-SA	8280,0689	0,006	8214	8257	0,23	36,89
Uni-50	8346,3589	0,014	10244	10287	0,21	2,42
Uni-50-SA	8308,6659	0,010	11232	11275	0,21	3,93
Ada-50	8370,0612	0,017	11388	11431	0,23	50,25
Ada-50-SA	8340,0313	0,014	12094	12137	0,23	87,55
SCIP	8228,2358	-	87	150	-	0,15

Tabelle 4.6: Untersuchung der Wahl des Definitionsbereichs und der Stützstellen bei Netz S09

#### 4.4 Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung von Linearisierungstechniken

Die Ergebnisse für Netz S09 in Tabelle 4.6 zeigen, dass die Wahl des Faktors  $F$  eine entscheidende Rolle für die Qualität der gefundenen Lösung spielt. Wird das Netz S09 mit dem Faktor  $F = 10$  und ohne Einsatz des SA-Algorithmus gelöst, so ergibt sich ein Zielfunktionswert von 18094,8023 (Uni) bzw. 18096,7711 (Ada). Dies liefert jeweils verglichen mit der optimalen durch SCIP gefundenen Lösung einen relativen Fehler von 1,199. Dies deutet darauf hin, dass der Faktor  $F$  zu gering gewählt wurde und dadurch der Lösungsraum zu sehr eingeschränkt wurde. Daher sollte dieser Faktor in zukünftigen Berechnungen höher gewählt werden.

Weiterhin fällt auf, dass die Lösung mit Faktor  $F = 10$  und mit Einsatz des SA-Algorithmus den Lösungsraum nicht einzuschränken scheint. Daher ist der Einsatz des SA-Algorithmus unter diesem Gesichtspunkt zu bevorzugen, da mit diesem der Definitionsbereich der zu linearisierenden Funktion scheinbar gut approximiert werden kann. Jedoch ist ebenfalls zu erkennen, dass die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen bei Einsatz des SA-Algorithmus deutlich höher ist als ohne. Damit erhöht sich in den überwiegenden Fällen die Lösungszeit bei Einsatz des SA-Algorithmus deutlich, obwohl die Lösungszeit für den SA-Algorithmus für Netz S09 nur 1,38 Sekunden beträgt, vgl. Tabelle 4.5. Daher stellt sich hier die Frage, ob sich der Einsatz des SA-Algorithmus lohnt.

Werden die beiden Methoden zur Verteilung und Anzahl der Stützstellen miteinander verglichen, so fällt auf, dass die Lösungszeit bei der uniformen Verteilung deutlich geringer ist als bei der adaptiven Verteilung. Dies lässt sich durch den höheren Aufwand bei der Berechnung der Verteilung erklären. Und obwohl die Anzahl der Stützstellen und damit der Variablen und Nebenbedingungen höher als bei der uniformen Verteilung ist, ergibt sich dadurch nicht zwingend ein Gewinn in der Genauigkeit der Lösung, was mit Hilfe des maximalen Fehlers  $Err$  gemessen wird. Der Wert  $Err$  ist in allen bis auf zwei Fällen bei der adaptiven Verteilung bei 0,23 während er bei der uniformen Verteilung bei 0,21 liegt.

Als bestes Verfahren hat sich bei diesem Netz die adaptive Verteilung mit einem Faktor  $F = 10$  und mit Einsatz des SA-Algorithmus herausgestellt. Dieses ist mit einem maximalen Fehler von  $Err = 0,09$  bei der Optimierung und einem relativen Fehler von  $RelDiff = 0,003$  verglichen mit der optimalen Lösung den anderen Verfahren hinsichtlich der Güte der Lösung überlegen. Jedoch ist die Lösungszeit mit 13,64 Sekunden relativ hoch. Weiterhin ist erkennbar, dass für den Faktor  $F = 30$  auch die uniforme und adaptive Verteilung sowie die adaptive Verteilung in Kombination mit dem SA-Algorithmus mit einer relativen Differenz von 0,006 bzw. 0,007 ebenfalls in Erwägung zu ziehen sind. Hinsichtlich der Lösungszeit ist in diesem Fall die uniforme Verteilung mit 0,63 Sekunden den anderen beiden Verfahren mit 19,72 Sekunden bzw. 36,89 Sekunden deutlich überlegen. Diese Lösungszeit unterliegt jedoch deutlich der Lösungszeit von SCIP mit 0,15 Sekunden. Anhand der anderen Netze soll nun festge-

stellt werden, ob sich eines der Verfahren gegenüber SCIP als vorteilhaft erweist und welches der Verfahren zur Lösung der Modelle gewählt werden sollte.

### Untersuchung des Definitionsbereiches und der Verteilung der Stützstellen am Beispiel von Netz M02

Meth.	ZF-Wert	RelDiff	Var.	NB	Err	Zeit
Uni-10	71541,0796	0,001	3430	3501	0,21	1,56
Uni-10-SA	72034,0853	0,008	5268	5339	0,23	4,32
Ada-10	71652,7956	0,002	4250	4321	0,28	60,48
Ada-10-SA	72014,9004	0,007	6034	6105	0,22	21,76
Uni-30	71541,4026	0,001	10062	10133	0,21	3,31
Uni-30-SA	71501,6058	< 1E-04	15532	15603	0,21	11,80
Ada-30	71498,9887	< 1E-04	12258	12329	0,15	46,13
Ada-30-SA	71511,1599	< 1E-04	20582	20653	0,26	190,47
Uni-50	72027,5107	0,007	16700	16771	0,23	6,28
Uni-50-SA	71993,2869	0,007	25804	25875	0,21	13,83
Ada-50	71573,5962	0,001	18746	18817	0,17	183,06
Ada-50-SA	71889,7629	0,006	29844	29015	0,25	556,66
SCIP	71492,8293	-	216	302	-	2,16

Tabelle 4.7: Untersuchung der Wahl des Definitionsbereiches und der Stützstellen bei Netz M02

In Tabelle 4.7 sind die numerischen Ergebnisse für Netz M02 zu finden. Bei diesem Netz lässt sich kein Einfluss des Faktors  $F$  feststellen. Jedoch ist bei diesem Netz ebenfalls zu erkennen, dass bei Einsatz des SA-Algorithmus mehr Variablen und Nebenbedingungen benötigt werden und sich daher auch höhere Lösungszeiten ergeben, obwohl der SA-Algorithmus das Modell in 2,33 Sekunden lösen konnte, vgl. Tabelle 4.5. Daher scheint sich der Einsatz des SA-Algorithmus auch bei diesem Netz aus zeitlicher Sicht nicht zu lohnen. Der maximale Fehler durch die Linearisierung sowie die relative Differenz verglichen mit dem Zielfunktionswert von SCIP lassen ebenfalls keinen klaren Vorteil bei Einsatz des SA-Algorithmus erkennen.

Deutlich sind jedoch auch bei diesem Netz die Unterschiede in den Lösungszeiten zu erkennen, wenn die Techniken adaptive und uniforme Verteilung der Stützstellen verglichen werden. Auch in diesem Fall werden bei der adaptiven Verteilung mehr Variablen und Nebenbedingungen benötigt. Aufgrund dessen und der zeitlich aufwändigeren Verteilung der Stützstellen ist die Berechnung der Lösung bei sonst gleichbleibenden Parametern bei der adaptiven Verteilung deutlich höher als bei der uniformen Vertei-



#### 4.4 Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung von Linearisierungstechniken

lung. Ein Genauigkeitsgewinn bei der adaptiven Verteilung ist nur in einigen Fällen möglich.

Die relative Differenz ist insbesondere bei einem Faktor  $F = 30$  sehr gering sowie bei Faktor  $F = 10$  mit uniformer Verteilung und bei Faktor  $F = 50$  mit adaptiver Verteilung. Verglichen mit der Lösungszeit, die von SCIP benötigt wurde, ist aus diesen sechs Verfahren nur die uniforme Verteilung mit einem Faktor von  $F = 10$  überlegen.

Insgesamt lässt sich aus diesen Ergebnissen schließen, dass die uniforme Verteilung gegenüber der adaptiven Verteilung aufgrund der deutlich geringeren Lösungszeiten und ähnlichen Werten für die relative Differenz und den maximalen Linearisierungsfehler  $Err$  zu bevorzugen ist. Ein Einsatz des SA-Algorithmus scheint auch bei diesem Netz nicht vorteilhaft zu sein.

#### Untersuchung des Definitionsbereiches und der Verteilung der Stützstellen am Beispiel von Netz L01

Meth.	ZF-Wert	RelDiff	Var.	NB	Err	Zeit
Uni-10	283295,6154	-	5356	5502	0,22	110,42
Uni-10-SA	282999,3213	-	3204	3350	0,18	20,34
Ada-10	282999,3227	-	6170	6316	0,22	348,67
Ada-10-SA	282999,3213	-	3340	3486	0,19	77,23
Uni-30	282999,3213	-	13876	14022	0,24	130,96
Uni-30-SA	282999,3213	-	7208	7354	0,25	25,90
Ada-30	282999,3213	-	16012	16158	0,26	180,36
Ada-30-SA	282999,3213	-	8198	8344	0,24	217,17
Uni-50	283657,1971	-	22490	22636	0,22	145,23
Uni-50-SA	282999,3213	-	11406	11552	0,22	125,47
Ada-50	282999,3213	-	25496	25642	0,24	790,03
Ada-50-SA	282999,3213	-	13312	13458	0,24	490,33
SCIP-Primal	484239,8146	-	1166	2694	-	86400,00
SCIP-Dual	282999,3213	-	1166	2694	-	86400,00

Tabelle 4.8: Untersuchung der Wahl des Definitionsbereiches und der Stützstellen bei Netz L01

Tabelle 4.8 zeigt die numerischen Ergebnisse für Netz L01. Der Faktor  $F$  hat auch bei diesem Netz keinen Einfluss auf den Lösungsraum des zugrundeliegenden Modells. Bei Einsatz des SA-Algorithmus zeigt sich, dass hier in allen Fällen eine deutlich geringere Anzahl an Variablen und Nebenbedingungen benötigt wird und sich daher

auch deutlich geringere Lösungszeiten ergeben. So konnte das Optimierungsmodell am schnellsten mit der uniformen Verteilung mit einem Faktor  $F = 10$  und mit Einsatz des SA-Algorithmus innerhalb von 20,34 Sekunden gelöst werden. Dies bedeutet also, dass sich der Einsatz des SA-Algorithmus durchaus lohnen kann.

Bei Vergleich der uniformen und adaptiven Verteilung fällt wiederum auf, dass deutlich mehr Stützstellen, Variablen und Nebenbedingungen bei der adaptiven Verteilung genutzt werden und sich jedoch dadurch nur in manchen Fällen ein Genauigkeitsgewinn ergibt. Die Lösungszeiten hingegen liegen bei der adaptiven Verteilung deutlich über denen der uniformen Verteilung. Weiterhin fällt auf, dass SCIP für dieses Optimierungsmodell keine zulässige Lösung innerhalb von 24 Stunden finden konnte, die duale Schranke jedoch sehr nah an den optimalen Zielfunktionswerten der anderen Methoden liegt. Wenn davon ausgegangen wird, dass die gefundenen Lösungen zulässig für das originale MIQCP sind, dann zeigt dies, dass die Lösungen sehr nah an einer guten Lösung liegen.

### **Untersuchung der Verteilung der Stützstellen anhand aller Testnetze**

Insgesamt lässt sich aus den Ergebnissen der drei betrachteten Netze schließen, dass der Faktor  $F$  nicht zu klein gewählt werden sollte, damit der Lösungsraum nicht beschränkt wird. Weiterhin konnte festgestellt werden, dass sich der Einsatz des SA-Algorithmus in manchen Fällen eignet, um eine deutliche Reduktion der Lösungszeit zu erreichen. Ob sich der Einsatz des SA-Algorithmus lohnt, soll nun an den verbleibenden Netzen überprüft werden. Für die Verteilung der Stützstellen lässt sich feststellen, dass eine adaptive Verteilung in einigen Fällen zwar einen Genauigkeitsgewinn mit sich bringt. Dieser scheint sich jedoch aufgrund des hohen Zeitaufwands bei der Berechnung der Verteilung sowie aufgrund der hohen daraus resultierenden Anzahl an Variablen und Nebenbedingungen negativ auf die Lösungszeit auszuwirken. Diese Beobachtung soll ebenfalls an den verbleibenden Testnetzen überprüft werden. Dazu sind in Tabelle 4.9 die Ergebnisse der anderen Netze zu finden. Dabei wurde jedes Netz mit der uniformen Verteilung mit und ohne Einsatz des SA-Algorithmus gelöst, was mit *Uni* bzw. *Uni+SA* gekennzeichnet ist. Zudem wurde jedes Netz mit der adaptiven Verteilung, gekennzeichnet mit *Ada*, sowie mit SCIP, gekennzeichnet mit *S*, gelöst. Für den Faktor  $F$  wurde für Netz S09  $F = 30$  gewählt. Da der Faktor für alle anderen Netzen keinen Einfluss auf den Definitionsbereich der zu linearisierenden Funktionen hat, wird für alle anderen Netze  $F = 10$  gewählt. In der Tabelle sind die Zielfunktionswerte, die relative Differenz sowie die Anzahl an Variablen und Nebenbedingungen, der Linearisierungsfehler und die benötigte Lösungszeit in Sekunden zu finden. In Abbildung 4.11 ist zusätzlich die Lösungszeit aller Netze mit den verschiedenen Methoden abgebildet. Dabei wurden die Netzmodelle nach der Lösungszeit, die mit SCIP benötigt wurde, sortiert.

#### 4.4 Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung von Linearisierungstechniken

Name	ZF-Wert	RelDiff	Var.	NB	Err	Zeit (s)
S01-Uni	510153,0665	< 1E-04	1791	1742	0,22	0,91
S01-Uni+SA	510153,0715	< 1E-04	2909	2932	0,21	1,88
S01-Ada	510171,5572	< 1E-04	2157	2180	0,19	5,36
S01-S	510153,2948	-	68	58	-	0,10
S02-Uni	551,0000	< 1E-04	100	110	0,24	0,11
S02-Uni+SA	551,0000	< 1E-04	100	110	0,24	1,12
S02-Ada	551,0000	< 1E-04	104	114	0,10	0,92
S02-S	551,0000	-	58	67	-	0,01
S03-Uni	177382,4273	< 1E-04	3751	3780	0,20	1,53
S03-Uni+SA	177393,6247	< 1E-04	2053	2082	0,20	1,45
S03-Ada	177384,0203	< 1E-04	4541	4570	0,28	10,60
S03-S	177365,8369	-	62	94	-	0,06
S04-Uni	4315,9046	< 1E-04	618	675	0,20	0,16
S04-Uni+SA	4315,9429	< 1E-04	716	773	0,20	1,45
S04-Ada	4315,8024	< 1E-04	732	789	0,16	2,65
S04-S	4315,8634	-	96	167	-	0,02
S05-Uni	5483,0269	0,009	860	896	0,26	0,22
S05-Uni+SA	5444,8593	0,002	888	924	0,25	1,38
S05-Ada	5449,9439	0,003	962	998	0,16	3,17
S05-S	5431,9206	-	73	114	-	0,13
S06-Uni	24525,5615	0,006	764	814	0,21	0,24
S06-Uni+SA	24523,1313	0,006	964	1014	0,21	1,54
S06-Ada	24468,3754	0,004	926	976	0,20	3,83
S06-S	24377,8030	-	84	132	-	0,09
S07-Uni	0,0000	-	24762	24812	0,23	17,93
S07-Uni+SA	0,0000	-	24762	24812	0,23	16,41
S07-Ada	0,0000	-	29156	29206	0,20	86,42
S07-S	0,0000	-	117	179	-	0,09
S08-Uni	38184,2219	0,004	775	846	0,21	0,17
S08-Uni+SA	38261,1520	0,006	1087	1158	0,21	1,86
S08-Ada	38199,1491	0,004	939	1010	0,20	9,60
S08-S	38034,0672	-	117	225	-	0,15
S09-Uni	8280,4352	0,006	6184	6227	0,21	0,63
S09-Uni+SA	8405,9452	0,022	6772	6815	0,21	2,28
S09-Ada	8288,9844	0,007	7042	7085	0,23	19,72
S09-S	8228,2358	-	87	150	-	0,15
S10-Uni	323781,7230	< 1E-04	2884	2990	0,17	1,59
S10-Uni+SA	323781,9144	< 1E-04	13662	13768	0,20	14,83
S10-Ada	323781,5807	< 1E-04	3252	3358	0,25	20,10
S10-S	323781,6305	-	95	94	-	1,07

Name	ZF-Wert	RelDiff	Var.	NB	Err	Zeit (s)
S11-Uni	11181,9002	< 1E-04	4077	4183	0,22	0,88
S11-Uni+SA	11181,9004	< 1E-04	60407	60513	0,22	92,16
S11-Ada	11181,9004	< 1E-04	4653	4759	0,25	20,08
S11-S	11181,9100	-	175	151	-	1,73
M01-Uni	51069,9607	< 1E-04	4463	4569	0,19	1,75
M01-Uni+SA	51068,6033	< 1E-04	39707	39813	0,21	68,43
M01-Ada	51070,0570	< 1E-04	5409	5515	0,12	29,33
M01-S	51070,3745	-	192	158	-	0,62
M02-Uni	71541,0796	0,001	3430	3501	0,21	1,56
M02-Uni+SA	72034,0853	0,008	5268	5339	0,23	4,32
M02-Ada	71652,7956	0,002	4250	4321	0,28	60,48
M02-S	71492,8293	-	216	302	-	2,16
M03-Uni	19984,6182	0,002	986	1127	0,29	0,62
M03-Uni+SA	20411,5639	0,025	774	915	0,29	3,85
M03-Ada	20145,6951	0,011	1214	1355	0,28	30,49
M03-S	19918,7915	-	314	469	-	64,90
M04-Uni	110179,1274	< 1E-04	3138	3209	0,23	0,73
M04-Uni+SA	188157,7708	0,707	2892	2963	0,24	3,37
M04-Ada	947138,8262	7,593	3052	3123	0,30	33,39
M04-S	110217,7802	-	99	180	-	2,51
M05-Uni	0,0000	-	11468	11574	0,23	4,56
M05-Uni+SA	0,0000	-	5396	5502	0,23	6,34
M05-Ada	0,0000	-	14404	14510	0,25	83,85
M05-S	0,0000	-	305	337	-	12,19
M06-Uni	363888,9073	-	6712	6818	0,23	24,63
M06-Uni+SA	363889,1555	-	6260	6366	0,27	30,99
M06-Ada	363888,8127	-	7766	7872	0,27	189,00
M06-S-Primal	10234205,8963	-	491	712	-	86400,00
M06-S-Dual	363835,1559	-	491	712	-	86400,00
M07-Uni	130482,9050	-	4498	4639	0,29	252,64
M07-Uni+SA	130482,9097	-	4498	4639	0,29	140,27
M07-Ada	130481,8959	-	5322	5463	0,27	692,79
M07-S-Primal	3240196,3677	-	541	829	-	86400,00
M07-S-Dual	129860,2073	-	541	829	-	86400,00
M08-Uni	256788,7830	-	12020	12126	0,29	236,56
M08-Uni+SA	256788,8200	-	12190	12296	0,24	551,51
M08-Ada	256788,3538	-	14250	14356	0,27	222,88
M08-S-Primal	infinity	-	694	1080	-	86400,00
M08-S-Dual	256785,8387	-	694	1080	-	86400,00
L01-Uni	283295,6154	-	5356	5502	0,22	110,42

#### 4.4 Lösung des Optimierungsmodells durch Anwendung von Linearisierungstechniken

Name	ZF-Wert	RelDiff	Var.	NB	Err	Zeit (s)
L01-Uni+SA	282999,3213	-	3204	3350	0,18	20,34
L01-Ada	282999,3227	-	6170	6316	0,22	348,67
L01-S-Primal	484239,8146	-	1166	2694	-	86400,00
L01-S-Dual	282999,3213	-	1166	2694	-	86400,00
L02-Uni	380973,1757	-	17554	17765	0,29	86400,00
L02-Uni+SA	458055,8687	-	17568	17779	0,29	86400,00
L02-Ada	380298,2622	-	21018	21229	0,30	86400,00
L02-S-Primal	41203988,2812	-	1926	2919	-	86400,00
L02-S-Dual	367365,8627	-	1926	2919	-	86400,00
L03-Uni	64631,2974	-	19932	20108	0,23	46,65
L03-Uni+SA	64633,6727	-	80566	807742	0,28	335,98
L03-Ada	64647,8830	-	17912	18088	0,29	321,75
L03-S-Primal	2557665,7162	-	3612	5553	-	86400,00
L03-S-Dual	64621,1504	-	3612	5553	-	86400,00
L04-Uni	145945,5178	-	24656	24867	63,48	86400,00
L04-Uni+SA	164968,7267	-	28610	28821	22,53	86400,00
L04-Ada	144724,2053	-	27768	27979	63,09	56489,40
L04-S-Primal	5851326,3138	-	3538	8019	-	86400,00
L04-S-Dual	137624,7424	-	3538	8019	-	86400,00
L05-Uni	0,0000	-	29635	29776	0,29	86400,00
L05-Uni+SA	0,0000	-	32158	32263	6,10	86400,00
L05-Ada	0,0000	-	31165	31306	3,76	86400,00
L05-S-Primal	infinity	-	11531	15463	-	86400,00
L05-S-Dual	0,0000	-	11531	15463	-	86400,00

Tabelle 4.9: Untersuchung der Wahl der Stützstellen

Es ist zu erkennen, dass die Lösungszeiten von SCIP für die Netze S01 bis S10 deutlich geringer sind als die Lösungszeiten, die die anderen Methoden benötigt haben. Für Netz S11 wurde jedoch von der uniformen Methode mit 0,88 Sekunden im Vergleich zu SCIP mit 1,73 Sekunden schneller eine Lösung gefunden. In Abbildung 4.11 ist zu sehen, dass ab Netz M02 die Linearisierungsmethoden deutlich bessere Lösungszeiten liefern als SCIP, das ab Netz M06 in der vorgegebenen Zeitschranke von 24 Stunden keine optimale Lösung mehr finden konnte. Werden die Linearisierungstechniken untereinander verglichen, so ist zu erkennen, dass die adaptive Verteilung der Stützstellen in den meisten Fällen deutlich längere Lösungszeiten liefert als die anderen beiden Techniken. Keine der beiden Techniken uniforme Verteilung und uniforme Verteilung in Kombination mit dem SA-Algorithmus ist der anderen klar überlegen. Für jede Technik gibt es Netze, für die die jeweilige Technik besser geeignet ist. Die relative Differenz sowie der maximale Fehler geben keine Auskunft darüber, welche der

Linearisierungstechniken die bessere bezüglich der Qualität der Lösung ist, da es auch in Bezug auf dieses Kriterium für jede Technik Netze gibt, bei denen die eine Technik den anderen überlegen ist. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird zur Lösung der Netzmodelle die uniforme Verteilung der Stützstellen ohne Nutzung des SA-Algorithmus genutzt.

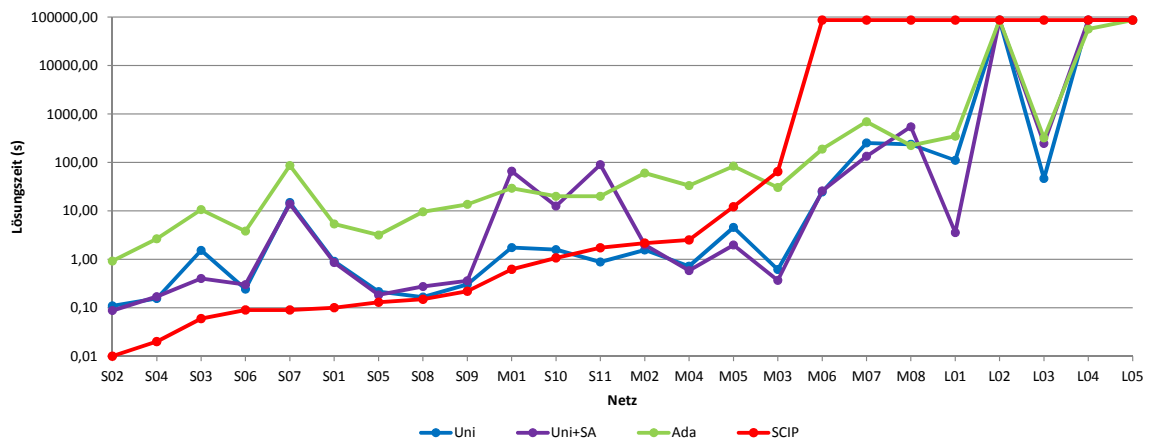


Abbildung 4.11: Vergleich der Lösungszeit der verschiedenen Lösungstechniken anhand der Testnetze

### 4.5 Fazit und Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde zunächst ein Optimierungsmodell entwickelt, das bei der Entscheidung unterstützen soll, an welcher Stelle in einem Wasserversorgungssystem ein Behälter stehen soll und welche Dimensionen dieser Behälter besitzen sollte. Es stellte sich heraus, dass das entwickelte Modell aufgrund der nichtlinearen Druckverlustgleichung als nicht-konvexes MIQCP formuliert werden musste. Danach wurden verschiedenen Lösungstechniken für dieses Optimierungsmodell präsentiert und diskutiert. Aus den anschließend vorgestellten numerischen Ergebnissen ist erkennbar, dass für die Netze S01 bis S11 sowie M01 bis M04 die durch die verschiedenen Linearisierungstechniken gefundenen Lösungen nah an der von SCIP gefundenen optimalen Lösung liegen und die relative Differenz für diese Netze in den meisten Fällen sehr gering ist. Dies deutet auf darauf hin, dass die mit den Linearisierungstechniken gefundenen Lösungen nah an der optimalen Lösung liegen. Ab Netz M06 konnte SCIP innerhalb von 24 Stunden keine optimale Lösung finden. Daher werden für diese Netz die primale und duale Schranke nach 24 Stunden angegeben. Es ist zu erkennen, dass in vielen Fällen die mit den Linearisierungstechniken gefundenen Lösungen nah an der dualen Schranke von SCIP liegen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die gefundenen Lö-

sungen nah an der optimalen Lösung für die jeweiligen Netzmodelle liegen. Weiterhin wurde festgestellt, dass ab Netz M02 die Linearisierungstechniken deutlich schneller eine Lösung finden als SCIP. Jedoch ist auch zu sehen, dass es mitunter auch mit den Linearisierungstechniken sehr lange dauern kann, bis eine Lösung gefunden wurde. Bei den Netzen L02 und L05 konnte innerhalb der vorgegebenen Zeitschranke von 24 Stunden keine Lösung gefunden werden. Daher ist die Idee, das Netzmodell vor der Optimierung zu reduzieren, sodass das daraus resultierende Optimierungsmodell kleiner wird. Dadurch sollen deutlich geringe Lösungszeiten für die Netzmodelle erreicht werden. Dieses Vorgehen und dessen Auswirkungen werden im folgenden Kapitel 5 erläutert und untersucht.





## 5 Netzreduktion

Das in Kapitel 4 entwickelte Optimierungsmodell ist ein nicht-konvexes MIQCP. Um dieses Modell lösen zu können, wurden in Kapitel 4 ein SA-Algorithmus sowie verschiedene Techniken vorgestellt, die die nichtlineare Druckverlustgleichung stückweise linearisieren. Somit wurde das nicht-konvexe MIQCP in ein MIP transformiert und konnte mit Standard-Solvern für MIPs gelöst werden. Um die stückweise Linearisierung zu modellieren, ist die Einführung mehrerer zusätzlicher Binärvariablen notwendig. In den numerischen Ergebnissen in Abschnitt 4.4 ist zu erkennen, dass durch diese zusätzlichen Variablen die Lösungszeit je nach Netzgröße sehr hoch sein kann. Die nichtlineare Druckverlustgleichung muss für jedes Rohr im Netzmodell und jeden Zeitschritt separat berechnet und damit auch linearisiert werden. Daher erscheint es sinnvoll, die Anzahl der Rohre im Netzmodell zu reduzieren. Dadurch würde erreicht, dass insgesamt weniger Gleichungen linearisiert werden müssen. Dies wiederum würde zu einer geringeren Anzahl an Binärvariablen führen, was sich wiederum positiv auf die Lösungszeit auswirkt. Daher sollen in diesem Kapitel in Abschnitt 5.1 Möglichkeiten diskutiert werden, wie das Netzmodell reduziert werden kann. Anschließend werden im Abschnitt 5.2 numerische Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken diskutiert. Zusätzlich werden nachfolgend in Abschnitt 5.3 Ergebnisse präsentiert, die durch die Kombination von Netzreduktion und Optimierung entstanden sind.

### 5.1 Netzreduktionstechniken

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Größe eines Netzmodells zu reduzieren. In der Literaturübersicht in Kapitel 3 wurden bereits einige Techniken kurz erwähnt. So wurde beispielsweise in [Lansley und Mays, 1989] vorgeschlagen, die Größe des Optimierungsmodells durch eine analytische Variablen-Reduktionstechnik zu reduzieren. Diese Technik kann auf beliebige Optimierungsmodelle angewendet werden. Eine Technik, die auf Wassernetzmodelle spezialisiert ist, wird von [Hähnlein, 2008] präsentiert. Er nutzt ein Skelett-Modell, um die Größe des Netzmodells zu reduzieren. Die Idee des Skelett-Modells ist es, dass nur diejenigen Komponenten des Wasserversorgungssystems betrachtet werden, die unbedingt für die hydraulische Berechnung des Netzmodells nötig sind. In [Collins et al., 1978], S. 755, wird kurz erwähnt, dass die Anzahl der Knoten des von ihnen betrachteten Testmodells reduziert wurde. Dabei wurde die Nachfrage der eliminierten Knoten auf benachbarte Knoten übertragen. De-

tails zu dieser Übertragung werden nicht gegeben. Es wird jedoch angegeben, dass die hydraulischen Eigenschaften durch die Reduktion nicht beeinträchtigt wurden. Eine algebraische Reduktionstechnik wird in [Perelman und Ostfeld, 2008] vorgeschlagen. Diese basiert auf einer Gauß-Elimination der Inzidenzmatrix. Dabei werden Knoten und Kanten eliminiert. Falls einer der eliminierten Knoten eine Nachfrage besitzt, die von Null verschieden ist, so wird diese auf benachbarte Knoten übertragen. Diese Übertragung wird abhängig von dem Rohrreibungswiderstand der zu dem Knoten gehörenden Rohre vorgenommen. Die Autoren geben an, dass alle hydraulischen Eigenschaften des Netzes bei dieser Technik erhalten bleiben. Details dazu werden jedoch nicht genannt. Diese algebraische Vorgehensweise wird ebenfalls in [Maschler und Savic, 1999], S. 22 ff., vorgestellt. Zudem beschreiben [Maschler und Savic, 1999], S. 19-22, noch einige weitere Reduktionstechniken, die direkt auf dem Netzmodell arbeiten. So stellen sie vor, dass Knoten, die nah beieinander liegen, also durch ein sehr kurzes Rohr miteinander verbunden sind, zusammengefasst werden können. Genauso können auch Rohre, die einen sehr kleinen Rohrreibungswiderstand haben, eliminiert werden und die zugehörigen Knoten zusammengelegt werden. Auch benachbarte Knoten, die einen ähnlichen Druck haben, können zusammengefasst werden. Die Autoren schlagen weiterhin vor, dass ein Netzmodell, das mindestens zwei Quellen hat, in kleinere Netzwerkmodelle unterteilt werden kann, sodass jedes eine eigene Quelle enthält. Sie präsentieren außerdem noch die drei Techniken *Eliminierung von Endknoten*, *Eliminierung von Rohrsequenzen* und *Eliminierung paralleler Rohre*. Im Rahmen dieser Arbeit sollen Techniken eingesetzt werden, die die hydraulischen Eigenschaften des Wassernetzmodells weitestgehend erhalten. Da die drei genannten Techniken das Potential haben, diese Eigenschaften zu erhalten, werden sie innerhalb dieser Arbeit genutzt und im Folgenden näher beschrieben.

Um die drei Reduktionstechniken herzuleiten, wird der Knotengrad der Knoten im Netz betrachtet. Dabei werden zunächst Knoten mit einem Knotengrad von Eins untersucht. Anschließend werden Knoten mit Knotengrad Zwei und danach Knoten mit Knotengrad Drei und höher diskutiert.

### 5.1.1 Eliminierung von Endknoten

Die erste Reduktionstechnik ist die *Eliminierung von Endknoten*. Dabei ist ein Endknoten ein Knoten, der nur eine inzidente Kante bzw. nur einen adjazenten Knoten hat. Das ist gleichbedeutend damit, dass der Knoten den Knotengrad Eins besitzt. Für die Identifikation eines solchen Knotens werden die Adjazenzlisten aller Knoten betrachtet, in der alle benachbarten Knoten eines Knotens aufgelistet sind. Falls sich für einen Knoten nur ein Element in dieser Liste befindet, so handelt es sich dabei um einen Endknoten. Dieser kann unter bestimmten Voraussetzungen aus dem Netzmodell eliminiert werden. Ist dieser Endknoten ein Reservoir oder ein Wassertank, so darf

dieser Knoten nicht gelöscht werden. Diese beiden Knotenarten spielen eine wichtige Rolle für die Hydraulik des Wassernetzes und sollten daher für die Reduktion ausgeschlossen werden. Ist der Endknoten jedoch kein Reservoir oder Wassertank, so kann er aus dem Netzmodell entfernt werden. Dieser Prozess soll so ablaufen, dass sich die hydraulischen Eigenschaften des Netzmodells nicht ändern.

Sei  $m$  ein Endknoten und sei  $i$  der zu  $m$  adjazente Knoten. Der Einfachheit halber seien mit  $Q_{in,i}$  und  $Q_{i,out}$  alle in Knoten  $i$  eingehende Flüsse bzw. ausgehende Flüsse bezeichnet. Ausgenommen davon ist  $Q_{i,m}$ . In Abbildung 5.1 ist ein solcher Endknoten  $m$  abgebildet. Dabei sind die Knotennamen sowie in Klammern die Nachfragewerte  $D_i$  bzw.  $D_m$  der jeweiligen Knoten angegeben. Oberhalb der Kanten ist die Fließrichtung zu sehen, während unterhalb der Kanten die jeweilige Flussvariable abgebildet ist.

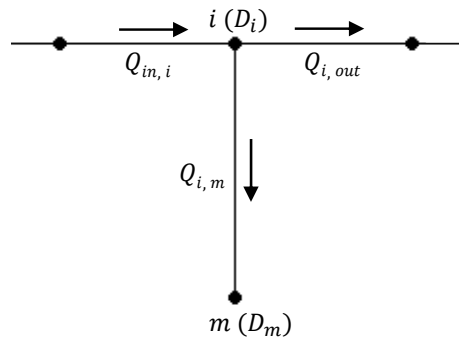


Abbildung 5.1: Ein Endknoten  $m$  und die zugehörigen Flüsse und Fließrichtungen

Für die Knoten  $m$  und  $i$  gelten die Massenbilanzgleichungen (5.1) und (5.2) sowie die Druckverlustgleichung (5.3):

$$Q_{i,m} = D_m, \quad (5.1)$$

$$Q_{in,i} - Q_{i,out} = Q_{i,m} + D_i, \quad (5.2)$$

$$H_i - H_m = r_{i,m} \cdot Q_{i,m} \cdot |Q_{i,m}|. \quad (5.3)$$

Da der Knoten  $m$  kein Reservoir oder Wassertank ist, ist die Nachfrage an diesem Knoten nicht negativ, also  $D_m \geq 0$ . Daher ist der Fluss von Knoten  $i$  nach Knoten  $m$  auch nicht negativ, also  $Q_{i,m} \geq 0$ . Aus diesem Grund muss der Absolutbetrag in der Druckverlustgleichung in (5.3) nicht weiter betrachtet werden. Zudem ergibt sich, dass der Fluss zwischen den beiden Knoten genau der Nachfrage an Knoten  $m$  entsprechen muss, also gilt  $Q_{i,m} = D_m$ , was auch an der Massenbilanzgleichung (5.1) an Knoten  $m$  erkennbar ist. Damit ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$Q_{i,m} = D_m, \quad (5.4)$$

$$Q_{in,i} - Q_{i,out} = D_m + D_i, \quad (5.5)$$

$$H_i - H_m = r_{i,m} \cdot D_m \cdot D_m. \quad (5.6)$$

In Gleichung (5.6) ist erkennbar, dass der Druckverlust zwischen Knoten  $i$  und  $m$  einem konstanten Wert entspricht, der nicht durch den Druck oder den Fluss anderer Knoten bzw. Kanten beeinflusst wird. Umgekehrt hat dieser Wert ebenfalls keinen Einfluss auf die restlichen Knoten und Kanten im Wassernetz. Weiterhin wird in Gleichung (5.5) deutlich, dass der Fluss zwischen den beiden Knoten vernachlässigt werden kann, wenn im Gegenzug die Nachfrage des Knotens  $m$  auf die Nachfrage des Knotens  $i$  addiert wird.

Zusammenfassend lässt sich ein Endknoten  $m$  also eliminieren, wenn die zu Knoten  $m$  gehörige Nachfrage auf den benachbarten Knoten addiert wird. In diesem Fall bleiben die hydraulischen Eigenschaften des restlichen Modells unverändert. In Abbildung 5.2 ist diese Reduktionstechnik veranschaulicht. Die Idee der Technik ist aus [Maschler und Savic, 1999], S. 45-47, entnommen. Auch [Deuerlein und Klingel, 2007], S. 5, nutzen diese Technik, geben jedoch keine mathematischen Details zu dieser Technik an. Die vorgestellte Technik lässt sich iterativ anwenden, da durch die Eliminierung von Endknoten neue Endknoten entstehen können, die wiederum eliminiert werden können.

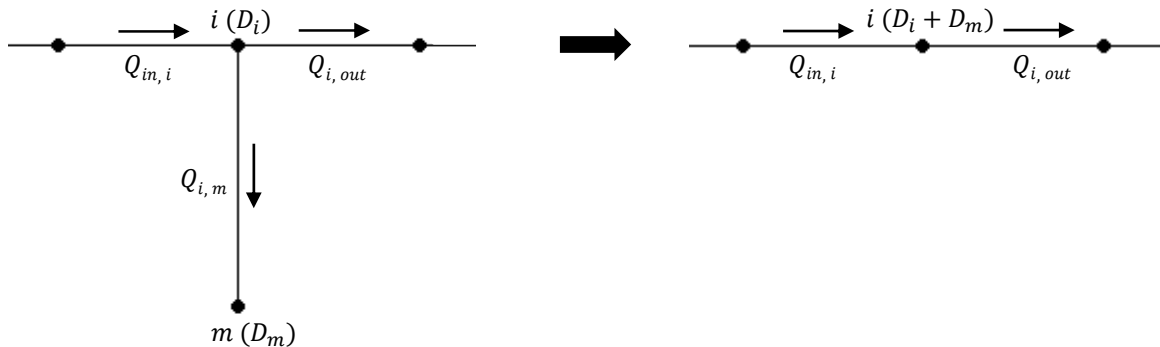


Abbildung 5.2: Eliminierung von Endknoten

Im Folgenden ist ein Beispiel zur Anwendung dieser Technik dargestellt.

**Beispiel 5.1.1.** Sei ein Endknoten  $m$  mit einer Nachfrage von  $D_m = 6 \text{ m}^3/h$  gegeben. Dieser Endknoten ist durch das Rohr  $(i, m)$  mit dem Knoten  $i$  verbunden, an dem eine Nachfrage von  $D_i = 1 \text{ m}^3/h$  herrscht. In Abbildung 5.3 sind diese beiden Knoten sowie

zwei an  $i$  angrenzende Knoten zu sehen. Weiterhin sind die Druckhöhen  $H$  aller Knoten angegeben sowie die Rohrreibungswiderstände  $r$  und die Volumenströme  $Q$  innerhalb der Rohre.

Um den Knoten  $m$  nun zu eliminieren, muss die Nachfrage des Knotens zur Nachfrage des Knotens  $i$  hinzuaddiert werden. Demnach hat Knoten  $i$  dann die Nachfrage  $D_i = 1 + 6 = 7$ . Im Anschluss daran kann das Rohr eliminiert werden.

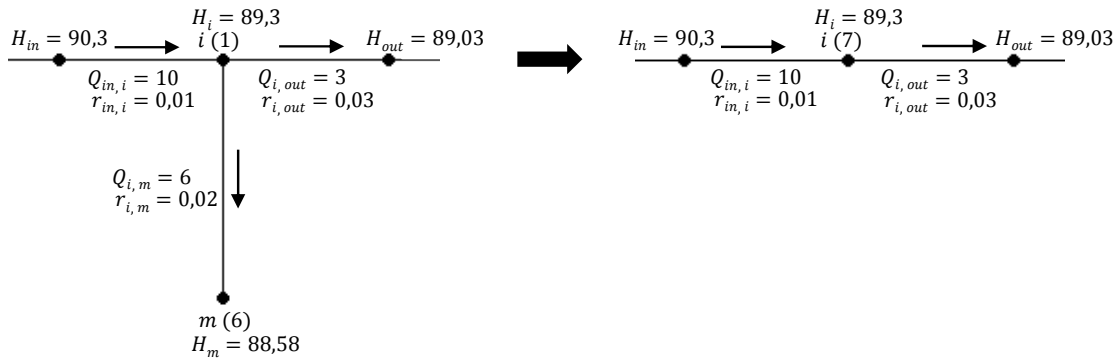


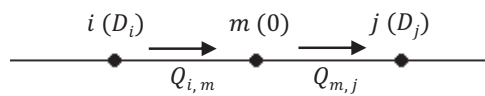
Abbildung 5.3: Beispiel: Eliminierung von Endknoten

### 5.1.2 Eliminierung von Rohrsequenzen

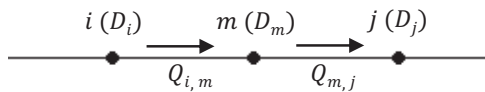
In diesem Abschnitt wird die Reduktionstechnik *Eliminierung von Rohrsequenzen* vorgestellt. Diese Technik wird auf Knoten angewandt, deren Knotengrad Zwei ist. Das bedeutet, dass ein solcher Knoten zwei benachbarte Knoten hat, mit denen er jeweils durch eine Kante verbunden ist. Somit bilden diese drei Knoten eine Rohrsequenz. Die Idee ist es, den Knoten mit Knotengrad Zwei und die dazugehörigen beiden Kanten zu eliminieren und durch eine neue fiktive Kante zu ersetzen. Hierbei sollen wie auch bei der Technik Eliminierung von Endknoten die hydraulischen Eigenschaften des Netzes erhalten bleiben. Bei der Eliminierung von Endknoten konnten die Eigenschaften der eliminierten Kante vernachlässigt werden, da sie komplett aus dem Netzmodell gelöscht wurde. Bei der Eliminierung von Rohrsequenzen sollen jedoch zwei Kanten eliminiert und durch eine neue fiktive Kante ersetzt werden. Daher sind die Eigenschaften der zu löschenden Kante weiterhin relevant für die Hydraulik des Netzmodells und müssen Berücksichtigung finden.

Sei  $m$  ein Knoten mit Knotengrad Zwei und seien  $i$  und  $j$  die beiden benachbarten Knoten. Im Folgenden werden zwei Fälle bei der Eliminierung von Rohrsequenzen unterschieden. Im ersten Fall hat der Knoten  $m$  keine Nachfrage, also  $D_m = 0$ . Im zweiten Fall hat der Knoten eine positive Nachfrage, also  $D_m > 0$ . Abbildung 5.4 ver-

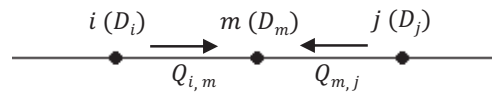
anschaulicht die zwei Fälle, wobei bei dem zweiten Fall zwei unterschiedliche Varianten betrachtet werden müssen. Dies wird bei der Beschreibung dieses Falls weiter unten erläutert. In der Abbildung werden Rohrsequenzen zwischen den Knoten  $i$ ,  $m$  und  $j$  gezeigt. Auch hier wird neben den Knotennamen jeweils die Nachfrage der Knoten in Klammern angegeben sowie ober- und unterhalb der Kanten die Fließrichtung bzw. die jeweilige Flussvariable.



Fall 1



Fall 2 (a)



Fall 2 (b)

Abbildung 5.4: Verschiedene Rohrsequenzen der Rohre  $(i, m)$  und  $(m, j)$  und die zugehörigen Flüsse und Fließrichtungen

### 1. Fall: Nachfrage $D_m = 0$

Für die Knoten und Rohre gelten sowohl die Massenbilanzgleichung als auch die Druckverlustgleichung. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass das Wasser von Knoten  $i$  in Richtung Knoten  $j$  fließt, also  $Q_{i,m}, Q_{m,j} \geq 0$ . Für den umgekehrten Fall gelten die Betrachtungen analog. Zudem seien wie oben mit  $Q_{in,n}$  und  $Q_{n,out}$  die eingehenden und ausgehenden Flüsse eines Knotens  $n$  bezeichnet. Dann gelten die Massenbilanzgleichungen (5.7) - (5.9) an den Knoten  $i$ ,  $m$  und  $j$  sowie die Druckverlustgleichungen (5.10) und (5.11) in den Rohren  $(i, m)$  und  $(m, j)$ .

$$Q_{in,m} - Q_{m,out} - Q_{i,m} = D_i, \quad (5.7)$$

$$Q_{i,m} - Q_{m,j} = D_m, \quad (5.8)$$

$$Q_{in,j} - Q_{j,out} + Q_{m,j} = D_j, \quad (5.9)$$

$$H_i - H_m = r_{i,m} \cdot Q_{i,m} \cdot Q_{i,m}, \quad (5.10)$$

$$H_m - H_j = r_{m,j} \cdot Q_{m,j} \cdot Q_{m,j}. \quad (5.11)$$

Ist die Nachfrage des Knoten  $m$  gleich Null, also  $D_m = 0$ , so ergibt sich aus Gleichung (5.8), dass der Fluss auf den Kanten  $(i, m)$  und  $(m, j)$  genau gleich ist. Wird nun Knoten  $m$  aus dem Netzmodell eliminiert, kann die Druckhöhe von Knoten  $m$  ebenfalls eliminiert werden. Dazu werden die Gleichungen (5.10) und (5.11) addiert, womit sich ergibt:

$$H_i - H_j = r_{i,m} \cdot Q_{i,m} \cdot Q_{i,m} + r_{m,j} \cdot Q_{m,j} \cdot Q_{m,j}. \quad (5.12)$$

Da  $Q_{i,m} = Q_{m,j}$  gilt, folgt:

$$H_i - H_j = (r_{i,m} + r_{m,j}) \cdot Q_{i,m} \cdot Q_{i,m}. \quad (5.13)$$

Damit ist gezeigt, dass sich der Druckverlust zwischen Knoten  $i$  und  $j$  mit Hilfe der Rohrreibungswiderstände der Rohre  $(i, m)$  und  $(m, j)$  exakt bestimmen lässt. Also können die hydraulischen Eigenschaften des Wassernetzes erhalten bleiben, wenn ein Knoten  $m$  mit einer Nachfrage von Null aus dem Netzmodell entfernt wird. Ähnliche Herleitungen sind in [Burgschweiger et al., 2005], S. 22, oder [Gleixner et al., 2012], S. 11-12, zu finden. In Abbildung 5.5 ist die Elimination einer Rohrsequenz mit einer Nachfrage  $D_m = 0$  veranschaulicht. Dabei ist oberhalb der Kanten wieder die Fließrichtung und unterhalb der Kante der Fluss auf der Kante angegeben.



Abbildung 5.5: Elimination einer Rohrsequenz mit  $D_m = 0$

Das folgende Beispiel soll diese Technik veranschaulichen.

**Beispiel 5.1.2.** Sei eine Rohrsequenz aus den Rohren  $(i, m)$  und  $(m, j)$  gegeben. In Abbildung 5.6 ist diese Rohrsequenz sowie die Druckhöhen  $H$ , die Volumenströme  $Q$ , die Rohrreibungswiderstände  $r$  und die Nachfrage in Klammer hinter dem Knotennamen gegeben. Es ist zu erkennen, dass der zu eliminierende Knoten  $m$  eine Nachfrage von  $D_m = 0 \text{ m}^3/h$  hat, während der Knoten  $j$  eine Nachfrage von  $D_j = 6 \text{ m}^3/h$  besitzt. Der Volumenstrom ist nach Formel (5.8) in beiden Rohren  $Q_{i,m} = Q_{m,j} = 6 \text{ m}^3/h$ . Werden nun die beiden Rohre eliminiert und durch ein neues Rohr  $(i, j)$  ersetzt, so fließt durch dieses ebenfalls ein Volumenstrom von  $Q_{i,j} = 6 \text{ m}^3/h$ . Der Rohrreibungswiderstand des neuen Rohres ergibt sich nach Formel (5.13) durch  $r_{i,j} = r_{i,m} + r_{m,j} = 0,01 + 0,03 = 0,04$ .

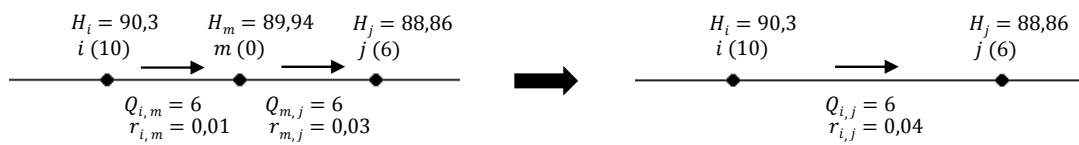


Abbildung 5.6: Beispiel: Eliminierung einer Rohrsequenz mit  $D_m = 0$

## 2. Fall: Nachfrage $D_m > 0$

Ist die Nachfrage an Knoten  $m$  von Null verschieden, so ist es nicht ohne weiteres möglich, die hydraulischen Eigenschaften des Netzes zu erhalten, wenn Knoten  $m$  eliminiert wird. Es müssen hier, wie oben schon kurz angedeutet, zwei verschiedene Fälle untersucht werden. Zum einen muss der Fall betrachtet werden, dass das Wasser von Knoten  $i$  zu Knoten  $m$  und dann weiter zu Knoten  $j$  fließt, siehe Abbildung 5.4, Fall 2 (a). Analog ist es zu betrachten, wenn das Wasser von Knoten  $j$  über Knoten  $m$  zu Knoten  $i$  fließt. Das bedeutet also, dass sich die Fließrichtung innerhalb der Rohrsequenz nicht ändert. Zum anderen muss der Fall untersucht werden, in dem das Wasser sowohl von Knoten  $i$  als auch von Knoten  $j$  zu Knoten  $m$  fließt, siehe Abbildung 5.4, Fall 2 (b). Hier findet also ein gleichzeitiger Zufluss zu Knoten  $m$  aus zwei verschiedenen Richtungen statt.

Zunächst soll die gleichbleibende Fließrichtung (Fall 2 (a)) betrachtet werden. Dabei wird angenommen, dass das Wasser von Knoten  $i$  zu Knoten  $m$  und weiter zu Knoten  $j$  fließt. Also gilt  $Q_{i,m}, Q_{m,j} \geq 0$ . Für die Fließrichtung von Knoten  $j$  zu Knoten  $i$  erfolgt die Betrachtung analog. Auch hier gelten die Gleichungen (5.7) - (5.11), mit dem Unterschied, dass  $D_m > 0$  gilt. Daher gilt auch nicht, dass der Fluss in den beiden Rohren  $(i, m)$  und  $(m, j)$  gleich ist. Wird der Knoten  $m$  nun aus dem Netzmodell eliminiert, so muss sichergestellt sein, dass sich die Druckhöhen an den beiden verbleibenden Knoten  $i$  und  $j$  nicht ändern. Der Druckverlust des neu entstehenden



Rohres  $(i, j)$  muss also der Summe der beiden Druckverluste der Rohre  $(i, m)$  und  $(m, j)$  entsprechen:

$$H_i - H_j = r_{i,m} \cdot Q_{i,m} \cdot Q_{i,m} + r_{m,j} \cdot Q_{m,j} \cdot Q_{m,j} = r_{i,j} \cdot Q_{i,j} \cdot Q_{i,j}. \quad (5.14)$$

Es stellt sich nun die Frage, wie der Rohrreibungswiderstand  $r_{i,j}$  und der Fluss innerhalb des Rohres berechnet werden sollen, um die hydraulischen Eigenschaften des Wassernetzes zu erhalten. Um den Fluss zu berechnen, schlagen [Burgschweiger et al., 2005], S. 22, vor, zunächst die Nachfrage des zu löschenden Knotens  $m$  auf die beiden verbleibenden Knoten aufzuteilen. Die Aufteilung wird laut den Autoren abhängig von dem Rohrreibungswiderstand der Rohre vorgenommen. [Burgschweiger et al., 2005] benutzen folgende Formeln:

$$\bar{D}_i = \frac{r_{i,m}}{r} \cdot D_m, \quad (5.15)$$

$$\bar{D}_j = \frac{r_{m,j}}{r} \cdot D_m, \quad (5.16)$$

wobei  $r = r_{i,m} + r_{m,j}$  gilt. Damit wird die gesamte Nachfrage von Knoten  $m$  auf die benachbarten Knoten aufgeteilt. Diese muss auf die schon bestehende Nachfrage addiert werden. Der Fluss  $Q_{i,j}$  des neu entstehenden Rohres  $(i, j)$  lässt sich damit berechnen als

$$Q_{i,j} = Q_{i,m} - \bar{D}_i = Q_{m,j} + \bar{D}_j. \quad (5.17)$$

Mit Hilfe von Gleichung (5.14) kann der Rohrreibungswiderstand des Rohres  $(i, j)$  berechnet werden. Dazu wird Gleichung (5.17) in die folgende umgestellte Gleichung (5.14) eingesetzt:

$$r_{i,j} = \frac{H_i - H_j}{Q_{i,j} \cdot Q_{i,j}}. \quad (5.18)$$

Abbildung 5.7 zeigt die Eliminierung einer Rohrsequenz, bei der Knoten  $m$  eine positive Nachfrage hat und der Fluss von Knoten  $i$  nach Knoten  $j$  fließt.



Abbildung 5.7: Eliminierung einer Rohrsequenz mit  $D_m > 0$  und gleichmäßiger Fließrichtung

Das folgende Beispiel illustriert diese Technik.

**Beispiel 5.1.3.** Auch in diesem Beispiel sei eine Rohrsequenz aus den Rohren  $(i, m)$  und  $(m, j)$  gegeben. In Abbildung 5.8 sind diese Sequenz sowie die relevanten Parameter zu sehen. Anders als in Beispiel 5.1.2 hat in diesem Fall der Knoten  $m$  eine positive Nachfrage mit  $D_m = 4 \text{ m}^3/\text{h}$ . Wird nun der Knoten  $m$  eliminiert, so muss diese Nachfrage auf die verbleibenden Knoten  $i$  und  $j$  verteilt werden. Ebenso muss der Volumenstrom innerhalb des neuen fiktiven Rohres berechnet werden. Für die Verteilung der Nachfrage werden die Gleichungen (5.15) und (5.16) verwendet. So ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{D}_i &= \frac{r_{i,m}}{r} \cdot D_m = \frac{0,01}{0,04} \cdot 4 = 1, \\ \bar{D}_j &= \frac{r_{m,j}}{r} \cdot D_m = \frac{0,03}{0,04} \cdot 4 = 3. \end{aligned}$$

Diese Werte müssen den bereits bestehenden Nachfragewerten der Knoten  $i$  und  $j$  hinzuaddiert werden. Somit ergeben sich die neuen Nachfragewerte von  $D_i = 11$  für Knoten  $i$  und  $D_j = 9$  für Knoten  $j$ . Der Volumenstrom innerhalb des neuen Rohres ergibt sich mit Formel (5.17):  $Q_{i,j} = Q_{i,m} - \bar{D}_i = 10 - 1 = 9$ . Der Rohrreibungswiderstand für Rohr  $(i, j)$  errechnet sich mit Hilfe der Formeln (5.17) und (5.18) und ist demnach  $r_{i,j} = 0,02568$ .

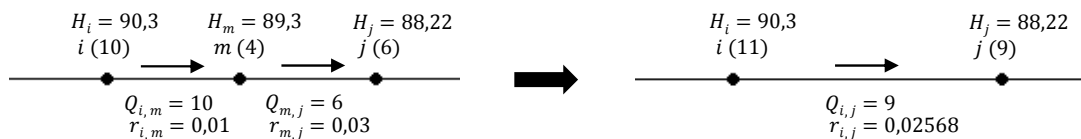


Abbildung 5.8: Beispiel: Eliminierung einer Rohrsequenz mit  $D_m > 0$  und gleichbleibender Fließrichtung

Findet hingegen der Zufluss zu Knoten  $m$  von beiden Richtungen statt, siehe Abbildung 5.4, Fall 2 (b), so muss der Fluss in dem neu entstehenden Rohr auf eine andere Weise als in (5.17) berechnet werden. Die Verteilung der Nachfrage des Knotens  $m$  bleibt jedoch wie in Gleichungen (5.15) und (5.16) bestehen. Die Fließrichtung des neuen Rohres hängt von den Druckhöhen der Knoten  $i$  und  $j$  ab. Das Wasser fließt in Richtung des Knotens, der die niedrigere Druckhöhe aufweist. Es wird der Fall betrachtet, in dem Knoten  $i$  die größere Druckhöhe aufweist. Das Wasser fließt demnach von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$ . Der andere Fall ist analog zu betrachten. Um den Volumenstrom zu berechnen, werden die beiden Volumenströme innerhalb der Rohre addiert und die neue Nachfrage an Knoten  $i$  subtrahiert:

$$Q_{i,j} = Q_{i,m} + |Q_{m,j}| - \bar{D}_i. \tag{5.19}$$

Mit diesem Volumenstrom kann ebenfalls mit Hilfe der Formel (5.18) der Rohrreibungswiderstand des Rohres  $(i, j)$  berechnet werden. In Abbildung 5.9 ist die Eliminierung einer Rohrsequenz dargestellt, bei der Knoten  $m$  eine positive Nachfrage hat und einen Zufluss von beiden Seiten hat. Zu beachten ist bei der Eliminierung eines Knotens mit einer Nachfrage verschieden von Null, dass die Verteilung der Nachfrage des zu löschenden Knotens  $m$  in den Formeln (5.15) und (5.16) nicht exakt ist. Daher kann auch nicht garantiert werden, dass die hydraulischen Eigenschaften des Wasseretzes nach Anwendung dieser Reduktionstechnik erhalten bleiben. Nach [Burgschweiger et al., 2005], S. 22, ist diese Verteilung jedoch eine gute Annäherung.



Abbildung 5.9: Eliminierung einer Rohrsequenz mit  $D_m > 0$  und beidseitigem Zufluss

Im Folgenden wird auch zu dieser Technik ein Beispiel präsentiert.

**Beispiel 5.1.4.** Wie in den zwei vorangegangenen Beispielen ist auch hier eine Rohrsequenz aus den Rohren  $(i, m)$  und  $(m, j)$  gegeben. Im Unterschied zu Beispiel 5.1.3 fließt hier das Wasser von beiden Seiten in Richtung von Knoten  $m$ . Die Rohrsequenz sowie alle relevanten Daten sind in Abbildung 5.10 zu finden. Wird nun der Knoten  $m$  aus der Rohrsequenz eliminiert, so kann wie in Beispiel 5.1.3 die Nachfrage mit den Formeln (5.15) und (5.16) errechnet werden und es ergibt sich  $\bar{D}_i = 1$  und  $\bar{D}_j = 3$  und damit für die Knoten  $i$  und  $j$  die Nachfragewerte  $D_i = 11$  bzw.  $D_j = 9$ . Bei der Berechnung des Volumenstroms muss in diesem Fall die Formel (5.19) verwendet werden. Damit ergibt sich  $Q_{i,j} = Q_{i,m} + |Q_{m,j}| - \bar{D}_i = 3 + 1 - 1 = 3$ . Da die Druckhöhe

von Knoten  $i$  höher ist als die von Knoten  $j$  ist die Fließrichtung innerhalb des neuen Rohres von Knoten  $i$  nach Knoten  $j$ . Für die Berechnung des Rohrreibungswiderstandes des Rohres  $(i, j)$  werden in diesem Fall die Formeln (5.18) und (5.19) verwendet. Damit ergibt sich  $r_{i,j} = 0,00\bar{6}$ .

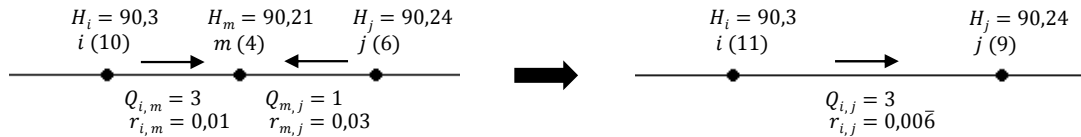


Abbildung 5.10: Beispiel: Eliminierung einer Rohrsequenz mit  $D_m > 0$  und beidseitigem Zufluss

Insgesamt ist bei der Eliminierung von Rohrsequenzen zu beachten, dass nicht jede Kante einer Rohrsequenz eliminiert werden kann. So sind Pumpen- und Ventilkanten von der Reduktion ausgeschlossen. Es werden ebenfalls keine Kanten für die Reduktion betrachtet, die mit einem Tank oder einem Reservoir verbunden sind.

Die Technik lässt sich ebenso wie die Eliminierung von Endknoten iterativ anwenden, sodass auch Rohrsequenzen, die aus mehr als zwei Rohren bestehen, eliminiert werden können. Die hydraulischen Eigenschaften des Netzes bleiben bei dieser Technik nur exakt erhalten, wenn der zu eliminierende Knoten keine Nachfrage nach Wasser besitzt.

### 5.1.3 Eliminierung von parallelen Rohren

Die dritte Technik zur Netzmodellreduktion wird *Eliminierung von parallelen Rohren* genannt. Dabei sollen Rohre aus dem Netzmodell entfernt werden, die parallel zueinander liegen. Das sind Rohre, die den gleichen Startknoten  $i$  und Endknoten  $j$  besitzen. Demnach kommen für diese Technik Knoten mit einem Knotengrad größer oder gleich Drei in Frage. Abbildung 5.11 zeigt auf der linken Seite ein Beispiel für parallele Rohre.

Die Idee ist es, die zwei Rohre  $(i1, j1)$  und  $(i2, j2)$  zu einem Rohr  $(i, j)$  zusammenzufassen. Da sich die Nachfrage an Knoten  $i$  und  $j$  durch diese Zusammenfassung nicht ändern soll, lässt sich der Fluss in Rohr  $(i, j)$  als Summe der beiden zu eliminierenden Rohre berechnen:

$$Q_{i,j} = Q_{i1,j1} + Q_{i2,j2}. \quad (5.20)$$

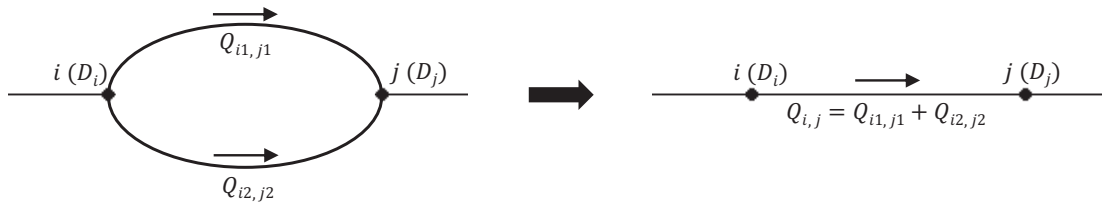


Abbildung 5.11: Eliminierung von parallelen Rohren

Wie bei der Technik Eliminierung von Rohrsequenzen kann der Rohrreibungswiderstand des neuen Rohres  $(i, j)$  ebenfalls mit Formel (5.18) berechnet werden. Da hier alle Werte bekannt sind und keine Umverteilung der Nachfrage vorgenommen werden muss, ändern sich die hydraulischen Eigenschaften des Wassernetzes durch diese Reduktionstechnik nicht. In Abbildung 5.11 wird die Eliminierung von zwei parallelen Rohren dargestellt.

Auch diese Technik kann wie die beiden zuvor vorgestellten Techniken iterativ auf mehrere parallele Rohre angewendet werden. Die Technik wird unter anderem auch in [Burgschweiger et al., 2005], S. 22, [Wood, 1986], S. 272, oder [Maschler und Savic, 1999], S. 20, beschrieben.

Mit Hilfe des folgenden Beispiels soll diese Technik veranschaulicht werden.

**Beispiel 5.1.5.** Seien zwei Knoten  $i$  und  $j$  gegeben, die durch zwei Rohre  $(i1, j1)$  und  $(i2, j2)$  verbunden sind. Diese parallelen Rohre sowie alle relevanten Daten sind in Abbildung 5.12 zu finden. Ziel ist es hier, die beiden parallelen Rohre zu eliminieren und ein neues Rohr hinzuzufügen. Der Volumenstrom des neuen Rohres berechnet sich nach Formel (5.20) durch  $Q_{i,j} = Q_{i1,j1} + Q_{i2,j2} = 4 + 2 = 6$ . Der Rohrreibungswiderstand wird mit Hilfe von  $Q_{i,j}$  und Formel (5.18) berechnet, wonach sich  $r_{i,j} = 0,00\bar{4}$  ergibt.

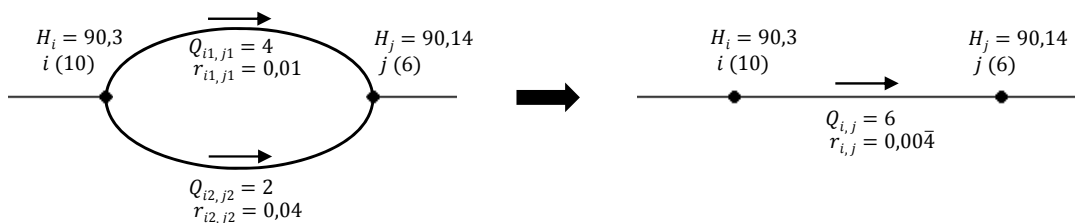


Abbildung 5.12: Beispiel: Eliminierung von parallelen Rohren

## Zusammenfassung

In den vergangenen Abschnitten wurden drei Reduktionstechniken vorgestellt: Eliminierung von Endknoten, Eliminierung von Rohrsequenzen und Eliminierung von parallelen Rohren. Jede dieser drei Techniken kann, wie oben beschrieben, iterativ angewendet werden. Sie können aber auch nacheinander und dann iterativ angewendet werden, da z. B. durch die Eliminierung von Rohrsequenzen neue parallele Rohre auftreten können oder durch die Eliminierung von parallelen Rohren neue Endknoten. Zu beachten ist, dass nicht alle Knoten und Kanten für die Reduktion in Frage kommen. So sind Reservoirs und Wassertanks sowie Pumpen und Ventile von der Reduktion ausgeschlossen. Weiterhin können auch andere Knoten oder Kanten für die Reduktion gesperrt sein. Aufgrund der Technik Eliminierung von Rohrsequenzen kann nicht garantiert werden, dass die hydraulischen Eigenschaften im reduzierten Netzmodell exakt denen des originalen Netzmodells entsprechen. Dennoch eignet sich die Anwendung der Techniken, um die Größe des Netzmodells zu reduzieren und eine gute Approximation der hydraulischen Eigenschaften zu erhalten. In den nächsten Abschnitten werden Ergebnisse der Reduktionstechniken bei Anwendung auf die Netzmodelle vorgestellt.

## 5.2 Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken

Dieser Abschnitt zeigt die Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf die Netzmodelle. Dabei werden zunächst die Ergebnisse bei Anwendung auf die fünf Netze S09, M02, M07, L01 und L02 vorgestellt. Anschließend werden die Netzreduktionstechniken auf alle anderen Netze angewendet und die Ergebnisse diskutiert.

Um die hydraulischen Abweichungen des originalen Netzes und des reduzierten Netzes zu messen, wird im weiteren Verlauf der Arbeit die folgende Formel genutzt:

$$Diff = \max_{n \in N^{red}} \{|H_n^{ori} - H_n^{red}|\}. \quad (5.21)$$

Dabei ist die Menge  $N^{red}$  die Menge aller Knoten im reduzierten Netzmodell, während  $H_n^{ori}$  die Druckhöhe an Knoten  $n$  im originalen Netzmodell und  $H_n^{red}$  die Druckhöhe des gleichen Knotens im reduzierten Netzmodell ist. Um die hydraulische Abweichung gering zu halten, kann vor Anwendung der Techniken eine maximale Schranke für die Abweichung festgelegt werden. Falls bei der Reduktion diese Schranke überschritten wird, so werden die Knoten, an denen diese maximale Abweichung auftritt, für die Reduktion gesperrt und die Reduktion erneut ausgeführt. Sofern nicht anders angegeben, wird die maximale Differenz auf 0,01 festgelegt.

### 5.2.1 Anwendung der Netzreduktionstechniken auf Netzmodelle mit Endknoten und Rohrsequenzen

In diesem Abschnitt wird die Anwendung der verschiedenen Reduktionstechniken am Beispiel der Netze S09 und L01 untersucht. In Tabelle 5.1 sind die Ergebnisse zu finden, die nach Anwendung der Reduktionstechniken auf Netz S09 entstanden sind. In der ersten Zeile der Tabelle sind die Eigenschaften des originalen Netzes zu sehen. Anschließend folgen die Ergebnisse bei Anwendung einer einzelnen Technik wie der Eliminierung paralleler Rohre, gekennzeichnet mit *Para*, der Eliminierung von Endknoten, gekennzeichnet mit *End*, sowie der Eliminierung von Rohrsequenzen, gekennzeichnet mit *Seq*. Die darauffolgenden Zeilen zeigen die Anwendung der Kombination von zwei Techniken, die iterativ hintereinander ausgeführt werden. Die letzten beiden Zeilen stellen die Ergebnisse dar, die bei der iterativen Anwendung aller Techniken entstanden sind. Dabei ist in der vorletzten Zeile das Ergebnis bei einer maximalen Differenz von 0,01, gekennzeichnet mit *Red(0,01)* zu sehen, während die letzte Zeile das Ergebnis bei einer maximalen Differenz von 10,0, gekennzeichnet mit *Red(10,0)* zeigt.

In Abbildung 5.13 sind die Ergebnisse der Netzreduktion bei Netz S09 grafisch veranschaulicht. Es ist zu erkennen, dass Netz S09 keine parallelen Rohre enthält und damit die Eliminierung von parallelen Rohren keinen Effekt auf die Netzstruktur hat, was sich ebenfalls in den Daten in Tabelle 5.1 widerspiegelt. Das Netz besitzt zwei Rohrsequenzen, daher kann nach Anwendung der Technik Eliminierung von Rohrsequenzen die Anzahl der Knoten von 18 auf 16 und die Anzahl der Kanten von 17 auf 15 reduziert werden. Dies ist in Abbildung 5.13 oben rechts zu erkennen. Wird nur die Technik Eliminierung von Endknoten angewendet, so reduziert sich die Anzahl der Knoten auf 10 und die Anzahl der Kanten auf 9. Diese Technik ist in diesem Netz die effektivste, was auf die Baumstruktur dieses Netzes zurückzuführen ist. Aufgrund dieser Struktur kann die Anzahl der Knoten bzw. Kanten mit dieser Technik auf 55,6 % bzw. 52,9 % reduziert werden. Werden zwei Techniken kombiniert, so zeigt sich, dass nur die Kombination der beiden Techniken Eliminierung von Endknoten und Eliminierung von Rohrsequenzen einen Effekt hat, da in dem Netz keine parallelen Rohre vorhanden sind und auch nicht durch Anwendung einer anderen Technik entstehen. Nach Anwendung der beiden Techniken reduziert sich die Anzahl der Knoten auf 8 und die Anzahl der Kanten auf 7, was 44,4 % bzw. 41,2 % der Anzahl der Knoten bzw. Kanten des originalen Netzes entspricht. Das Ergebnis nach Anwendung der beiden Techniken ist in Abbildung 5.13 unten rechts zu sehen. Da die maximale Differenz in allen Fällen kleiner als 1E-04 beträgt, wirkt sich die Änderung der Fehlerschranke nicht auf das Ergebnis aus.

Insgesamt ist an diesem Netzmodell zu erkennen, dass die beiden Techniken Eliminierung von Endknoten und die Eliminierung von Rohrsequenzen einen erheblichen

Einfluss auf die Netzgröße haben und alle Knoten bis auf die gesperrten Knoten aus dem Netz eliminiert werden können.

Name	Knoten	Kanten	% Knoten	% Kanten	Diff
S09-Ori	18	17	-	-	-
S09-Para	18	17	100,0	100,0	0
S09-End	10	9	55,6	52,9	< 1E-04
S09-Seq	16	15	88,9	88,2	< 1E-04
S09-ParaEnd	10	9	55,6	52,9	< 1E-04
S09-ParaSeq	16	15	88,9	88,2	< 1E-04
S09-SeqEnd	8	7	44,4	41,2	< 1E-04
S09-Red(0,01)	8	7	44,4	41,2	< 1E-04
S09-Red(10,0)	8	7	44,4	41,2	< 1E-04

Tabelle 5.1: Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf das Netzmodell S09

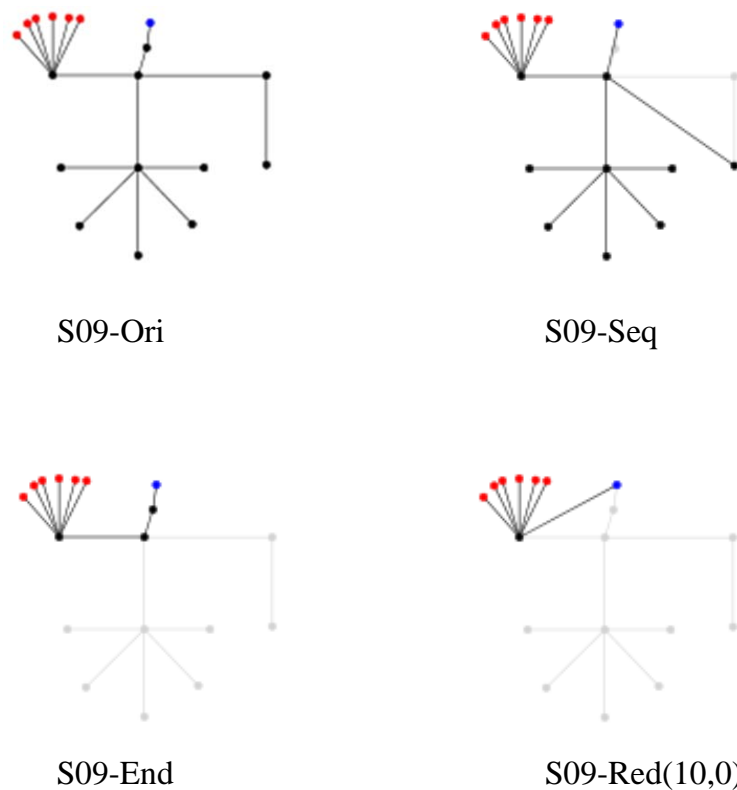


Abbildung 5.13: Anwendung der Reduktionstechniken auf das Netzmodell S09



Werden die Netzreduktionstechniken auf das Netzmodell des Netzes L01 angewendet, so ergibt sich ein ähnliches Bild. In Abbildung 5.14 sind das originale Netz sowie das Netz nach Anwendung der Reduktionstechniken zu sehen. Es ist zu erkennen, dass das originale Netz relativ viele Endknoten, einige Rohrsequenzen und nur ein paralleles Rohr besitzt. Die Ergebnisse in Tabelle 5.2 spiegeln diese Tatsache wider. Die alleinige Anwendung der Technik Eliminierung von parallelen Rohren führt demnach nur zur Eliminierung einer Kante. Wird ausschließlich die Technik Eliminierung von Endknoten angewendet, so lässt sich das Netz auf 140 Knoten und 171 Kanten reduzieren, was 63,9 % bzw. 68,4 % der Anzahl an Knoten und Kanten im originalen Netz entspricht. Auch mit der Technik Eliminierung von Rohrsequenzen lässt sich das Netz auf 183 Knoten und 214 Kanten deutlich reduzieren. Die Anwendung dieser beiden Techniken ist in Abbildung 5.14 oben rechts sowie in der Mitte links veranschaulicht. Es ist zu erkennen, dass nach Anwendung der Technik Eliminierung von Rohrsequenzen noch viele Endknoten im Netz vorhanden sind. Ebenso lässt sich feststellen, dass nach Anwendung der Technik Eliminierung von Endknoten noch viele Rohrsequenzen existieren. Werden daher diese beiden Techniken kombiniert, so lassen sich die Knoten bzw. Kanten auf 79 bzw. 110 reduzieren, was 36,1 % bzw. 44,0 % des originalen Netzes entspricht. Die grafische Veranschaulichung dessen ist in Abbildung 5.14 unten links zu sehen. Weiterhin ist zu erkennen, dass dadurch einige parallele Rohre entstanden sind. Werden daher alle drei Techniken kombiniert, so lässt sich das Netz noch weiter auf 66 Knoten bzw. 91 Kanten reduzieren, im Falle einer Fehlertoleranzgrenze von 10,0. In diesem Fall beträgt die maximale Toleranz jedoch auch nur 0,0294. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.14 unten rechts dargestellt. Bei einer niedrigeren Fehlertoleranz von 0,01 werden ein Knoten und eine Kante weniger reduziert.

Name	Knoten	Kanten	% Knoten	% Kanten	Diff
L01-Ori	219	250	-	-	-
L01-Para	219	249	100,0	99,6	< 1E-04
L01-End	140	171	63,9	68,4	< 1E-04
L01-Seq	183	214	83,6	85,6	< 1E-04
L01-ParaEnd	139	169	63,5	67,6	0,0019
L01-ParaSeq	183	211	83,6	84,4	< 1E-04
L01-SeqEnd	79	110	36,1	44,0	0,0029
L01-Red(0,01)	67	92	30,6	36,8	0,0014
L01-Red(10,0)	66	91	30,1	36,4	0,0294

Tabelle 5.2: Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf das Netzmodell L01

Insgesamt wirken sich bei diesem Netz also ebenfalls die Techniken Eliminierung von Endknoten und Rohrsequenzen am effektivsten aus. Die Technik Eliminierung von parallelen Rohren hingegen gewinnt erst nach Anwendung der anderen beiden Techniken an Bedeutung.

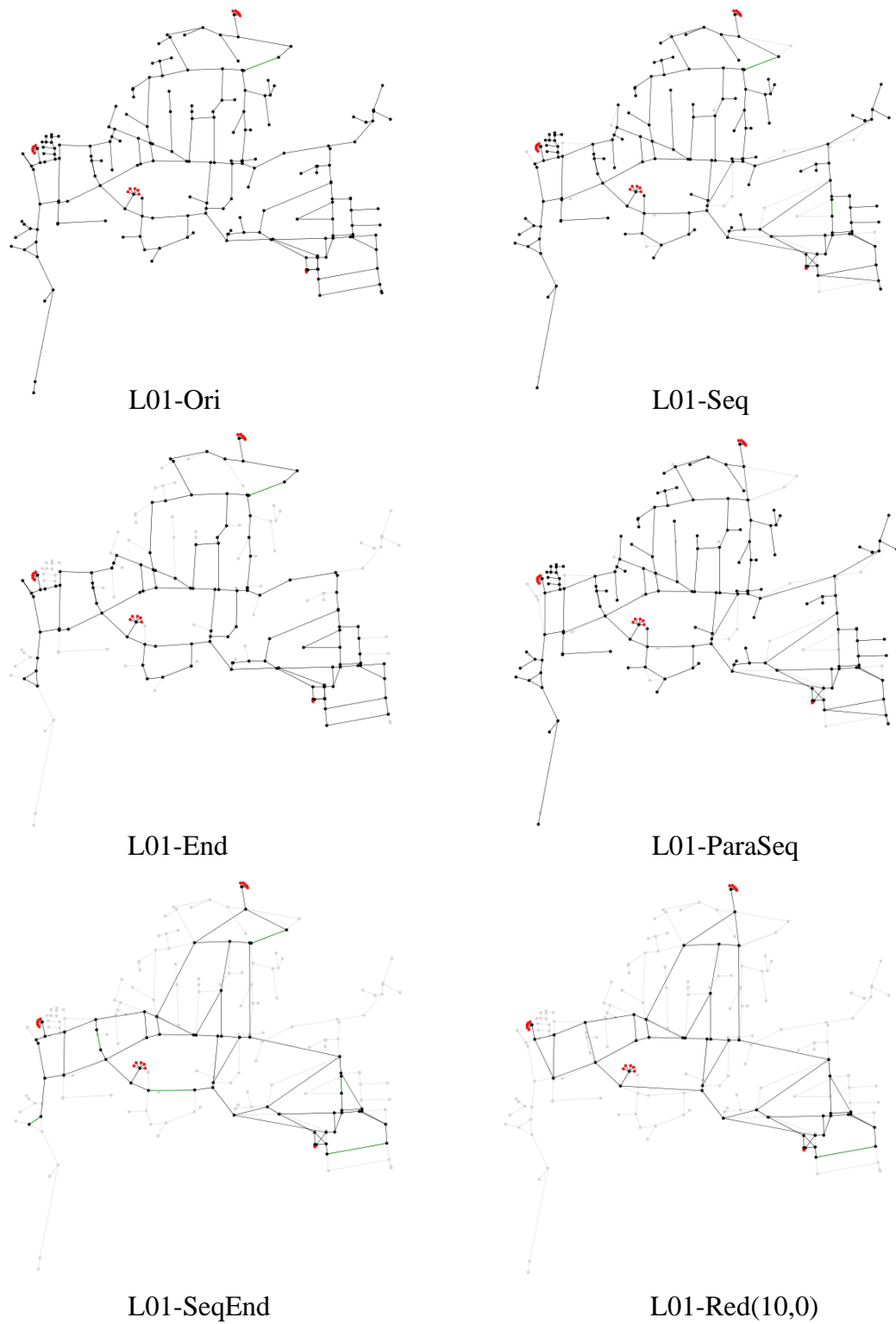


Abbildung 5.14: Anwendung der Reduktionstechniken auf das Netzmodell L01

### 5.2.2 Anwendung der Reduktionstechniken auf Netzmodelle mit Rohrsequenzen

In diesem Abschnitt werden die vorgestellten Techniken anhand der Netze M02 und L02 untersucht, deren Netzmodelle viele Rohrsequenzen aufweisen. In Tabelle 5.3 sind die Ergebnisse für Netz M02 im Detail zu sehen. Eine grafische Veranschaulichung der Ergebnisse ist in Abbildung 5.15 zu finden. In der Mitte sowie rechts in der Abbildung sind die reduzierten Versionen des Netzes zu sehen. Im Hintergrund ist in grau jeweils das originale Netz zum Vergleich abgebildet.

Name	Knoten	Kanten	% Knoten	% Kanten	Diff
M02-Ori	30	31	-	-	-
M02-Para	30	31	100,0	100,0	0
M02-End	30	31	100,0	100,0	0
M02-Seq	16	17	53,3	54,8	0,0026
M02-ParaEnd	30	31	100,0	100,0	0
M02-ParaSeq	16	16	53,3	51,6	0,0012
M02-SeqEnd	16	17	53,3	54,8	0,0026
M02-Red(0,01)	16	16	53,3	51,6	0,0012
M02-Red(10,0)	15	15	50,0	48,4	2,6522

Tabelle 5.3: Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf das Netzmodell M02

In Tabelle 5.3 ist zu erkennen, dass die Technik Eliminierung von Rohrsequenzen den größten Einfluss bei der Reduktion hat. Die Anzahl der Knoten wird von 30 auf 16 und die Anzahl der Kanten von 31 auf 17 reduziert. Wie in Abbildung 5.15 zu sehen ist, besitzt Netz M02 viele Rohrsequenzen, was die Effizienz der Technik erklärt. Nach der Eliminierung der Rohrsequenzen ergibt sich das Netzmodell M02-Seq, das in der Mitte von Abbildung 5.15 abgebildet ist. Die grüne Linie kennzeichnet dabei ein paralleles Rohr. Daher kann bei Kombination der Eliminierung von Rohrsequenzen und parallelen Rohren die Anzahl der Rohre noch um Eins verringert werden. Anschließend ergibt sich eine neue Rohrsequenz, deren Eliminierung jedoch nur durchgeführt wird, falls die Fehlertoleranz größer als 2,7 gewählt ist. Daher ergeben sich bei diesem Netz unterschiedliche Ergebnisse bei den Fehlertoleranzen von 0,01 und 10,0. Im Falle einer Fehlertoleranz von 10,0 besitzt das reduzierte Netz 15 Knoten und Kanten, was 50,0 % bzw. 48,4 % der originalen Anzahl an Knoten bzw. Kanten entspricht.

In Tabelle 5.4 sind die Ergebnisse nach Anwendung der Reduktionstechniken auf das Netzmodell L02 dargestellt und Abbildung 5.16 zeigt das originale Netz sowie die Reduktion mit allen Techniken mit einer Fehlertoleranz von 10,0. In der Tabelle ist zu erkennen, dass bei diesem Netz nur die Technik Eliminierung von Rohrsequenzen Auswirkungen auf die Netzgröße hat. Unabhängig davon mit welcher anderen Technik

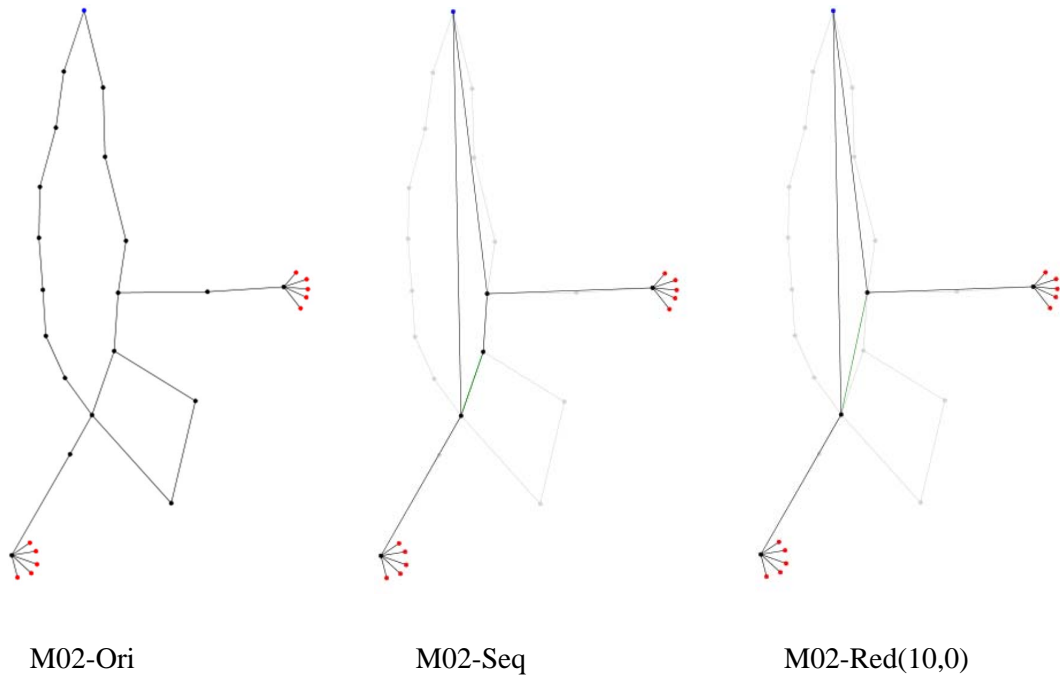


Abbildung 5.15: Anwendung der Reduktionstechniken auf das Netzmodell M02

diese Technik kombiniert wurde, das Netz wurde in allen Fällen von 300 Knoten und 345 Kanten auf 126 Knoten und 171 Kanten reduziert. Wurde die Fehlergrenze auf 10,0 angehoben, so konnte sogar eine Reduktion auf 107 Knoten und 152 Kanten erreicht werden. In Abbildung 5.16 lässt sich deutlich erkennen, dass das Netz stark vermascht ist und keine Endknoten sowie sehr viele Rohrsequenzen besitzt, was die Effektivität der Technik Eliminierung von Rohrsequenzen ähnlich wie bei Netz M02 erklärt.

Name	Knoten	Kanten	% Knoten	% Kanten	Diff
L02-Ori	300	345	-	-	-
L02-Para	300	345	100,0	100,0	0
L02-End	300	345	100,0	100,0	0
L02-Seq	126	171	42,0	49,6	0,0010
L02-ParaEnd	300	345	100,0	100,0	0
L02-ParaSeq	126	171	42,0	49,6	0,0010
L02-SeqEnd	126	171	42,0	49,6	0,0010
L02-Red(0,01)	126	171	42,0	49,6	0,0010
L02-Red(10,0)	107	152	35,7	44,1	4,2511

Tabelle 5.4: Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf das Netzmodell L02

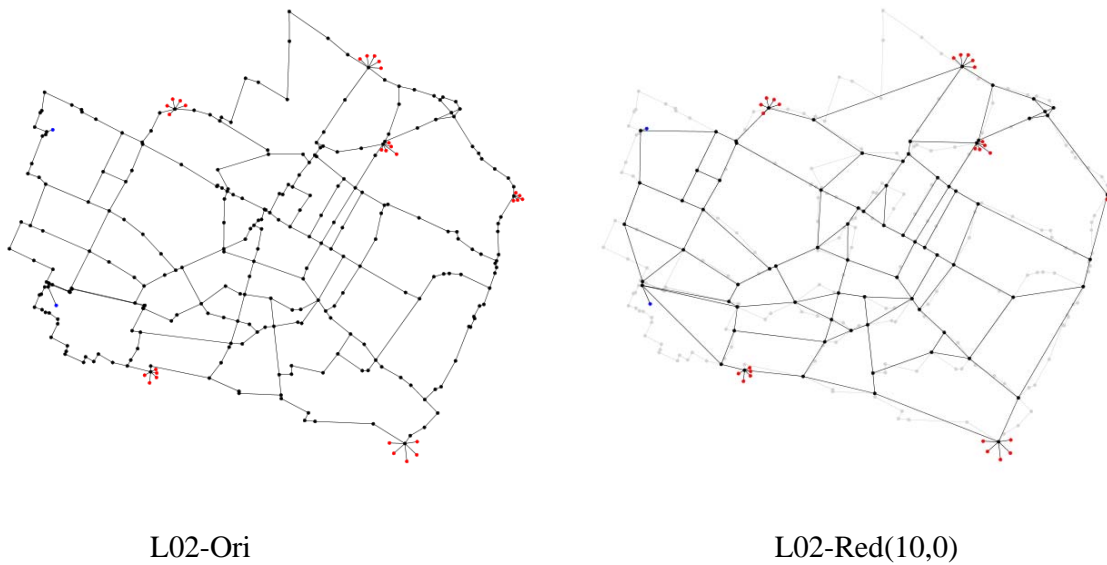


Abbildung 5.16: Anwendung der Reduktionstechniken auf das Netzmodell L02

### 5.2.3 Anwendung der Reduktionstechniken auf ein vermaschtes Netzmodell

In diesem Abschnitt wird die Anwendung der Reduktionstechniken auf Netz M07 untersucht. In Abbildung 5.17 ist zu erkennen, dass es sich bei Netz M07 um ein Netz mit sehr vielen Maschen handelt. Die roten Punkte in der Abbildung stellen Knoten dar, die für die Reduktion gesperrt sind. Bei genauer Betrachtung lässt sich feststellen, dass alle für die Reduktion zur Verfügung stehenden Knoten einen Knotengrad von mindestens Drei besitzen. Daher wäre die einzige Technik, die bei diesem Netz für eine Reduktion sorgen könnte, die Eliminierung von parallelen Rohren. Jedoch sind in dem Netz keine zwei Knoten durch parallele Rohre verbunden. Daher kann auch diese Technik in diesem Netz ebenfalls keine Reduktion herbeiführen. Aus diesem Grund kann dieses Netz durch keine der Techniken reduziert werden. Dies ist ebenfalls an den Ergebnissen in Tabelle 5.5 zu erkennen.

Name	Knoten	Kanten	% Knoten	% Kanten	Diff
M07-Ori	56	77	-	-	-
M07-Para	56	77	100,0	100,0	0
M07-End	56	77	100,0	100,0	0
M07-Seq	56	77	100,0	100,0	0
M07-ParaEnd	56	77	100,0	100,0	0
M07-ParaSeq	56	77	100,0	100,0	0
M07-SeqEnd	56	77	100,0	100,0	0
M07-Red(0,01)	56	77	100,0	100,0	0
M07-Red(10,0)	56	77	100,0	100,0	0

Tabelle 5.5: Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf das Netzmodell M07

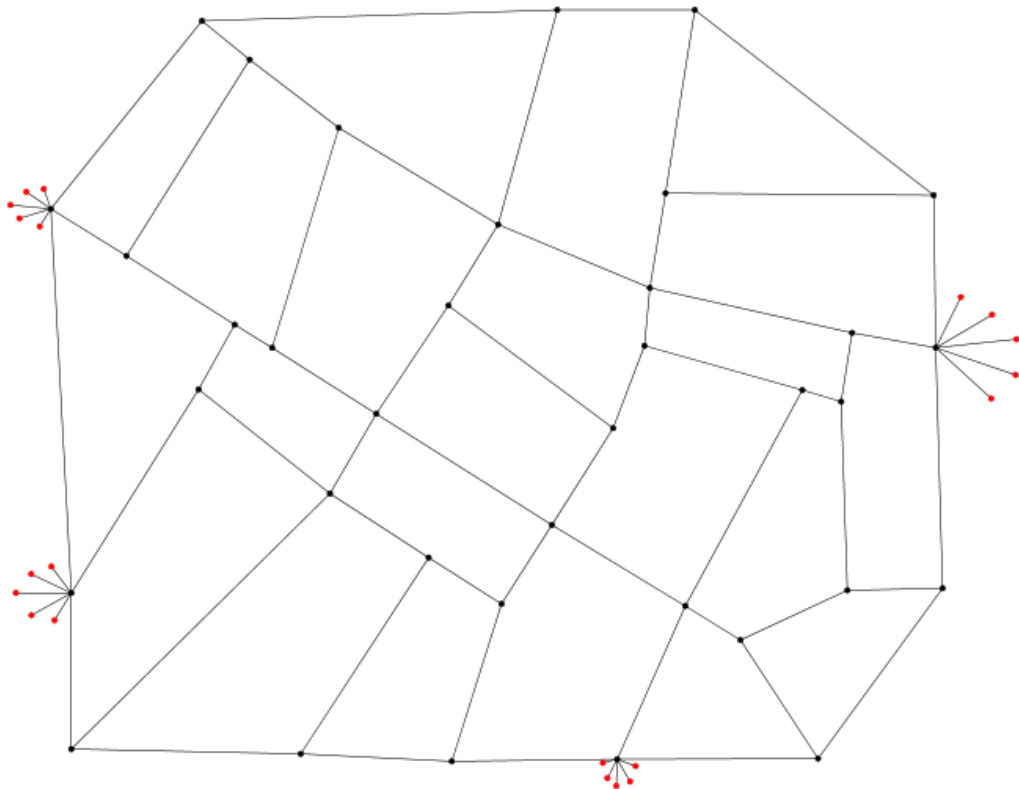


Abbildung 5.17: Anwendung der Reduktionstechniken auf das Netzmodell M07

## Zusammenfassung

Aus den Ergebnissen nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf die Netzmodelle der Netze S09, M02, M07, L01 und L02 lässt sich schließen, dass die Effizienz der Techniken sehr stark von der Struktur des zu reduzierenden Netzes abhängt. Wird ein Netz mit vielen Rohrsequenzen betrachtet, wie z. B. bei den Netzen M02 und L02, so erweist sich die Technik Eliminierung von Rohrsequenzen als sehr effektiv. Besitzt ein Netzmodell zusätzlich viele Endknoten wie die Netze S09 und L01, so ist die Anwendung der Technik Eliminierung von Endknoten sehr effizient. Bei diesen beiden Netzmodellen ist ebenfalls zu erkennen, dass die Kombination der beiden Techniken Eliminierung von Rohrsequenzen sowie Eliminierung von Endknoten einen erheblichen Einfluss auf die Netzgröße hat. Handelt es sich hingegen um ein sehr stark vermaschtes Netz wie es bei den Netzen M07 oder L02 der Fall ist, so haben die Techniken Eliminierung von Endknoten und parallelen Rohren keinen oder kaum einen Effekt. In allen Fällen ist die Kombination aus allen drei Techniken am effektivsten. Diese Ergebnisse sollen im nächsten Abschnitt anhand der weiteren Testinstanzen evaluiert werden.

In den Ergebnissen der vorherigen Abschnitte ist zu sehen, dass mit Hilfe der Fehlergrenze die Abweichungen zwischen dem originalen und den aggregierten Netzen gering gehalten werden können. Welche Auswirkungen eine höhere Fehlertoleranz auf die Optimierungsergebnisse haben wird, soll in Abschnitt 5.3 näher untersucht werden.

### 5.2.4 Ergebnisse der restlichen Netze

Dieser Abschnitt zeigt die Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf alle Netzmodelle der im Rahmen dieser Arbeit genutzten Testinstanzen. In Tabelle 5.6 sind die Daten der originalen Netzmodelle sowie die Daten der jeweiligen reduzierten Netzmodelle zu finden. Es werden die Anzahl der Knoten und Kanten sowie die hydraulischen Abweichungen zwischen dem originalen und dem reduzierten Netzmodell mit Hilfe der Formel (5.21) verglichen. Dabei sind für jedes Netz die Ergebnisse mit einer Fehlerschranke von 10,0 zu finden. War die dadurch gefundene maximale Abweichung größer als 0,01, wurde eine weitere Reduktion mit einer Fehlerschranke von 0,01 durchgeführt. Die jeweils genutzte Schranke wird durch *10,0* bzw. *0,01* gekennzeichnet. Die Reduktion der Netzmodell konnte in allen Fällen in unter 5 Sekunden durchgeführt werden.

Name	Knoten	Kanten	% Knoten	% Kanten	Diff
S01-Ori	8	10	-	-	-
S01-Red(10,0)	8	10	100,0	100,0	0
S02-Ori	10	12	-	-	-

Name	Knoten	Kanten	% Knoten	% Kanten	Diff
S02-Red(10,0)	3	2	30,0	16,7	< 1E-04
S03-Ori	11	12	-	-	-
S03-Red(10,0)	6	5	54,5	41,7	< 1E-04
S04-Ori	12	11	-	-	-
S04-Red(10,0)	10	9	83,3	81,8	< 1E-04
S05-Ori	12	11	-	-	-
S05-Red(10,0)	10	9	83,3	81,8	0,0010
S06-Ori	14	13	-	-	-
S06-Red(10,0)	8	7	57,1	53,8	< 1E-04
S07-Ori	14	15	-	-	-
S07-Red(10,0)	10	10	71,4	66,7	< 1E-04
S08-Ori	17	16	-	-	-
S08-Red(10,0)	11	10	64,7	62,5	< 1E-04
S09-Ori	18	17	-	-	-
S09-Red(10,0)	8	7	44,4	41,2	< 1E-04
S10-Ori	20	21	-	-	-
S10-Red(10,0)	20	21	100,0	100,0	0
S11-Ori	21	20	-	-	-
S11-Red(10,0)	18	17	85,7	85,0	0,0003
M01-Ori	27	26	-	-	-
M01-Red(10,0)	21	20	77,8	76,9	< 1E-04
M02-Ori	30	31	-	-	-
M02-Red(0,01)	16	16	53,3	51,6	0,0012
M02-Red(10,0)	15	15	50,0	48,4	2,6522
M03-Ori	34	38	-	-	-
M03-Red(10,0)	32	36	94,1	94,7	< 1E-04
M04-Ori	42	44	-	-	-
M04-Red(0,01)	24	26	57,1	59,1	0,0003
M04-Red(10,0)	15	16	35,7	36,4	4,8179
M05-Ori	46	50	-	-	-
M05-Red(0,01)	40	43	87,0	86,0	0,0063
M05-Red(10,0)	24	26	52,2	52,0	0,8623
M06-Ori	52	73	-	-	-
M06-Red(10,0)	52	73	100,0	100,0	0
M07-Ori	56	77	-	-	-
M07-Red(10,0)	56	77	100,0	100,0	0
M08-Ori	86	114	-	-	-
M08-Red(0,01)	72	97	83,7	85,1	0,0040
M08-Red(10,0)	70	95	81,4	83,3	6,7994
L01-Ori	219	250	-	-	-



Name	Knoten	Kanten	% Knoten	% Kanten	Diff
L01-Red(0,01)	67	92	30,6	36,8	0,0014
L01-Red(10,0)	66	91	30,1	36,4	0,0294
L02-Ori	300	345	-	-	-
L02-Red(0,01)	126	171	42,0	49,6	0,0010
L02-Red(10,0)	107	152	35,7	44,1	4,2511
L03-Ori	916	973	-	-	-
L03-Red(10,0)	123	172	13,4	17,7	0,0013
L04-Ori	932	1014	-	-	-
L04-Red(0,01)	221	285	23,7	28,1	0,0084
L04-Red(10,0)	195	259	20,9	25,5	2,0162
L05-Ori	1913	2487	-	-	-
L05-Red(0,01)	681	1104	35,6	44,4	0,0003
L05-Red(10,0)	677	1099	35,4	44,2	3,459

Tabelle 5.6: Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken auf die Netzmodelle

In Abbildung 5.18 ist der prozentuale Anteil der verbleibenden Kanten im Vergleich zum originalen Netzmodell abgebildet. Da der verbleibende Anteil der Knoten und Kanten in einem ähnlichen Bereich liegt, wurde in diesem Diagramm nur der Anteil der verbleibenden Kanten visualisiert. Es ist zu erkennen, dass es einige Netze gibt, bei denen weder Knoten noch Kanten reduziert werden konnten, wie z. B. die Netze S01, S10, M06 und M07. Da diese Netze stark vermascht sind, ist bei diesen Netzen mit den hier vorgestellten Techniken keine Reduktion möglich.

Es gibt einige Netze, bei denen der Anteil der verbleibenden Kanten nach der iterativen Anwendung aller drei Techniken sehr gering ist. Dies gilt insbesondere für die Netze S02, S03, S09, M04 und L01 bis L05. Bei diesen Netzen konnten die Kanten auf 44,2 % bis 16,7 % reduziert werden. Insgesamt fällt auf, dass gerade bei den großen Netzen L01 bis L05 die Anzahl der Kanten sehr stark reduziert werden konnte, während es bei den kleinen und mittleren Netzen große Unterschiede bei dem Anteil verbleibender Kanten gibt. Dies zeigt, dass sich die Reduktion gerade bei sehr großen Netzmodellen zu lohnen scheint.

Die hydraulischen Abweichungen konnten in allen Fällen unter 10,0 bzw. 0,01 gehalten werden. Bei Netz M04 fällt dabei der Unterschied zwischen den beiden Fehlerschranken relativ groß aus. Mit einer Fehlerschranke von 0,01 konnten die Knoten auf 57,1 % und die Kanten auf 59,1 % reduziert werden. Wurde hingegen eine Fehlerschranke von 10,0 zugelassen, so konnte die Anzahl der Knoten auf 35,7 % und die Anzahl der Kanten auf 36,4 % bei einem Fehler von 4,8179 reduziert werden. Es bleibt zu untersuchen, wie sehr sich diese Abweichung auf die Lösung des Optimierungsmodells auswirkt. Dies wird in Abschnitt 5.3 untersucht.

Bei den Netzen M08, L01, L02, L04 und L05 fallen die Unterschiede bei den beiden betrachteten Fehlerschranken geringer aus. Auch hier bleibt zu untersuchen, ob der Fokus darauf liegen sollte, möglichst geringe hydraulische Abweichungen zwischen dem reduzierten und dem originalen Netzmodell zu erreichen und damit eventuell genauere Ergebnisse zu erreichen oder ob der Fokus auf einer möglichst hohen Reduktion liegen sollte, um damit die Lösungszeit für die Optimierung zu verringern. Dies wird ebenfalls in Abschnitt 5.3 analysiert.

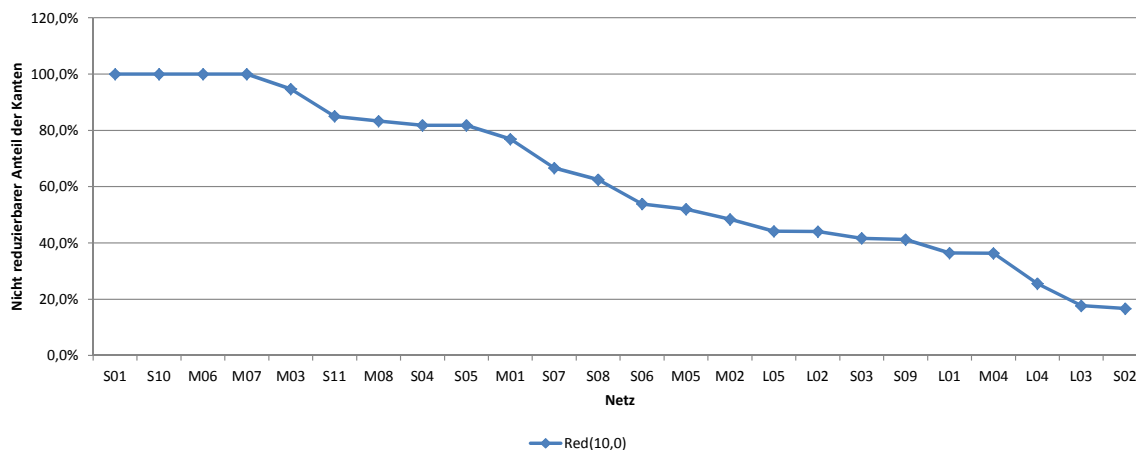


Abbildung 5.18: Nicht reduzierbarer Anteil der Kanten nach Anwendung aller Reduktionstechniken auf die Netzmodelle

Es bleibt zu untersuchen, welche der drei Techniken sich für die Reduktion der Netzmodellgröße als die effektivste erweist. An den Netzen S09, M02, M07, L01 und L02 wurde die Tendenz hergeleitet, dass sich die Eliminierung von Endknoten und Rohrsequenzen als effektiv erweisen, insbesondere die Kombination dieser beiden Techniken. Zunächst sollen alle drei Techniken einzeln untersucht werden. Dazu ist in Abbildung 5.19 der prozentuale Anteil der Kanten für jedes Netz im Vergleich zu der Anzahl der Kanten im originalen Netzmodell für jede Technik zu sehen. In Blau ist der Anteil nach der vollständigen Reduktion zu erkennen. In Grün wird der Anteil nach der Eliminierung von parallelen Rohren abgebildet, in Rot ist dieser Anteil nach der Eliminierung von Endknoten gekennzeichnet und Violett zeigt den Anteil nach der Eliminierung von Rohrsequenzen.

Es ist deutlich erkennbar, dass die Eliminierung von Endknoten einen starken Einfluss auf die Netzgröße hat. So kann in manchen Fällen schon nahezu der Anteil der nicht reduzierbaren Kanten erreicht werden, der bei vollständiger Reduktion erreicht wird, wie beispielsweise bei den Netzen S04, S05, S06, S08 und M01. Bei manchen Netzen hat diese Reduktionstechnik jedoch auch gar keinen Einfluss, wie z. B. bei den Netzen S02, S03, S07, M02, M08 oder L02. Ähnlich ist es bei der Technik Eliminierung von Rohrsequenzen, bei der die Netze M02 und L02 sehr weit reduziert werden können und

## 5.2 Ergebnisse nach Anwendung der Netzreduktionstechniken

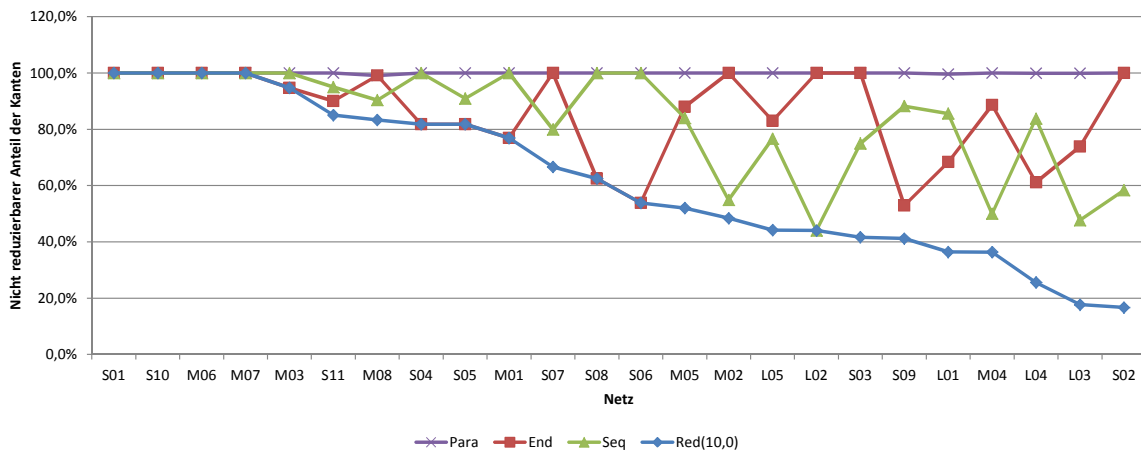


Abbildung 5.19: Nicht reduzierbarer Anteil der Kanten nach Anwendung einer einzelnen Reduktionstechnik auf die Netzmodelle

die Netze S04, S06 und M01 sich gar nicht reduzieren lassen. Die Technik Eliminierung von parallelen Rohren wirkt sich hingegen in fast keinem der Netze aus. Zusätzlich fällt auf, dass bei den größeren Netzmodellen ab Netz L03 der Anteil der verbleibenden Kanten nach Anwendung einer einzelnen Technik noch weit von dem Anteil entfernt liegt, der bei vollständiger Reduktion erreicht werden kann.

Im nächsten Schritt sollen die Kombinationen aus zwei verschiedenen Reduktionstechniken betrachtet werden. Dazu sind in Abbildung 5.20 diese Kombinationen dargestellt. Dabei ist ebenfalls wieder in Blau die vollständige Reduktion gekennzeichnet, in Grün die Kombination aus Eliminierung von Rohrsequenzen und Endknoten, in Rot die Kombination aus Eliminierung von parallelen Rohren und Endknoten und in Violett die Kombination aus Eliminierung von parallelen Rohren und Rohrsequenzen.

Für jede der Kombinationen gibt es Netzmodelle, bei denen die Kombination zu einer sehr starken Reduktion führt und sich nah an der vollständigen Reduktion befindet. Dabei ist zu erkennen, dass die Ergebnisse der Kombination aus Eliminierung von Rohrsequenzen und Endknoten in den überwiegenden Fällen sehr nah an den Werten der vollständigen Reduktion liegen. Die Ergebnisse der Kombination aus Eliminierung von parallelen Rohren und Endknoten sowie die Ergebnisse der Kombination aus Eliminierung von parallelen Rohren und Rohrsequenzen haben in vielen Fällen ebenfalls einen großen Einfluss bei der Reduktion. Jedoch existieren auch Netzmodelle, bei denen diese Kombinationen nur einen geringen Einfluss bei der Reduktion haben. Daraus lässt sich schließen, dass insbesondere die Techniken Eliminierung von Rohrsequenzen und Eliminierung von Endknoten hauptverantwortlich für die Reduktion sind und in jedem Fall angewendet werden sollten.

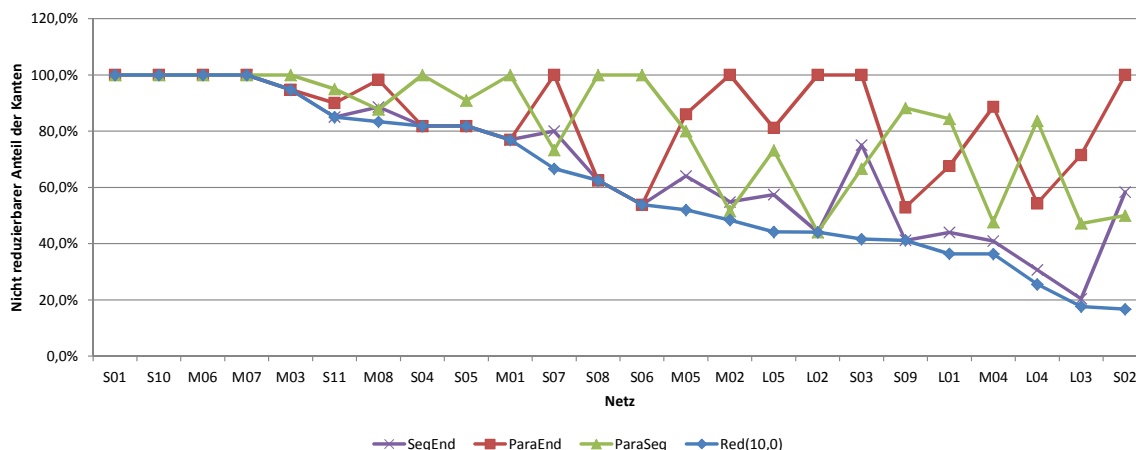


Abbildung 5.20: Nicht reduzierbarer Anteil der Kanten nach Anwendung einer Kombination aus zwei Reduktionstechniken auf die Netzmodelle

Es bleibt weiterhin die Frage, ob die Reduktion der Netzmodelle einen positiven Einfluss auf die Lösungszeit hat und wie sich die Reduktion auf die optimale Lösung auswirkt. Dies soll in dem folgenden Abschnitt 5.3 untersucht werden.

### 5.3 Ergebnisse der Kombination aus Netzreduktion und Optimierung

In diesem Abschnitt soll das Zusammenspiel der Netzreduktionstechniken und des Optimierungsmodells und deren Lösung analysiert werden. Alle in diesem Abschnitt vorgestellten Optimierungsergebnisse wurden mit einer uniformen Verteilung der Stützstellen mit Faktor  $F = 10$ , mit Ausnahme von Netz S09 mit einem Faktor von  $F = 30$ , und ohne Einsatz des SA-Algorithmus ermittelt. In den Tabellen 5.7 bis 5.8 werden die numerischen Ergebnisse nach Ergebnislage sortiert dargestellt. Die Tabellen zeigen die Ergebnisse, die bei Optimierung des originalen Netzmodells mit der Linearisierung (*Ori*) und mit SCIP (*S*) entstanden sind. Weiterhin ist das Ergebnis nach Lösung des reduzierten Netzmodells mit der Linearisierung (*Red(10,0)*) zu sehen. Falls die Fehlerschranke von 0,01 unterschiedliche Ergebnisse liefert, wird zusätzlich die Version des reduzierten Netzmodells mit der Fehlerschranke 0,01 (*Red(0,01)*) betrachtet. In den Tabellen sind neben den Zielfunktionswerten, der relativen Differenz im Vergleich zur Lösung mit SCIP auch die Anzahl an Variablen und Nebenbedingungen, der Linearisierungsfehler sowie die Lösungszeit zu finden.

In Tabelle 5.7 sind die Netze zu finden, bei denen die Anwendung der Reduktionstechniken einen sehr deutlichen Effekt auf die Lösungszeit des reduzierten Netzmodells

### 5.3 Ergebnisse der Kombination aus Netzreduktion und Optimierung

hat. In Abbildung 5.21 sind zusätzlich die Lösungszeiten der reduzierten Netzmodelle im Vergleich zu den Lösungszeiten der originalen Netzmodelle zu sehen. Dabei ist jeweils der prozentuale Anteil der Lösungszeit des reduzierten Netzmodells mit einer Reduktionsschranke von 10,0 bzw. 0,01 im Vergleich zur Lösungszeit des originalen Netzmodells angegeben.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Var.	NB	Err	Zeit (s)
S02-Ori	551,0000	< 1E-04	100	110	0,24	0,11
S02-Red(10,0)	551,0000	< 1E-04	38	45	0,24	0,05
S02-S	551,0000	-	58	67	-	0,01
S03-Ori	177382,4273	< 1E-04	3751	3780	0,20	1,53
S03-Red(10,0)	177382,4273	< 1E-04	2752	2781	0,18	0,67
S03-S	177365,8369	-	62	94	-	0,06
S04-Ori	4315,9046	< 1E-04	618	675	0,20	0,16
S04-Red(10,0)	4315,9046	< 1E-04	474	531	0,20	0,15
S04-S	4315,8634	-	96	167	-	0,02
S05-Ori	5483,0269	0,009	860	896	0,26	0,22
S05-Red(10,0)	5473,6841	0,008	662	698	0,26	0,21
S05-S	5431,9206	-	73	114	-	0,13
S06-Ori	24525,5615	0,006	764	814	0,21	0,24
S06-Red(10,0)	23276,7260	0,045	400	450	0,21	0,21
S06-S	24377,8030	-	84	132	-	0,09
S07-Ori	0,0000	-	24762	24812	0,23	17,93
S07-Red(10,0)	0,0000	-	23776	23826	0,11	13,79
S07-S	0,0000	-	117	179	-	0,09
S08-Ori	38184,2219	0,004	775	846	0,21	0,17
S08-Red(10,0)	35979,1808	0,054	411	482	0,05	0,15
S08-S	38034,0672	-	117	225	-	0,15
S09-Ori	8280,4352	0,006	6184	6227	0,21	0,63
S09-Red(10,0)	7238,5084	0,120	2986	3029	0,20	0,27
S09-S	8228,2358	-	87	150	-	0,15
S11-Ori	11181,9002	< 1E-04	4077	4183	0,22	0,88
S11-Red(10,0)	11181,9075	< 1E-04	3742	3848	0,22	0,71
S11-S	11181,9100	-	175	151	-	1,73
M01-Ori	51069,9607	< 1E-04	4463	4569	0,19	1,75
M01-Red(10,0)	51069,9607	< 1E-04	4113	4219	0,19	1,49
M01-S	51070,3745	-	192	158	-	0,62
M02-Ori	71541,0796	0,001	3430	3501	0,21	1,56
M02-Red(0,01)	71296,6635	0,003	1842	1913	0,21	0,62
M02-Red(10,0)	71295,9848	0,003	1699	1770	0,21	0,37
M02-S	71492,8293	-	216	302	-	2,16
M03-Ori	19954,6182	0,002	986	1127	0,29	0,62

Name	ZF-Wert	RelDiff	Var.	NB	Err	Zeit (s)
M03-Red(10,0)	19925,0064	< 1E-04	964	1105	0,29	0,54
M03-S	19918,7915	-	314	469	-	64,90
M04-Ori	110179,1274	< 1E-04	3138	3209	0,23	0,73
M04-Red(0,01)	110292,8453	0,001	2072	2143	0,21	0,64
M04-Red(10,0)	110381,0142	0,001	1463	1534	0,22	0,55
M04-S	110217,7802	-	99	180	-	2,51
M05-Ori	0,0000	-	11468	11574	0,23	4,56
M05-Red (0,01)	0,0000	-	11433	11539	0,23	4,54
M05-Red(10,0)	0,0000	-	6560	6666	0,21	2,62
M05-S	0,0000	-	305	337	-	12,19
M08-Ori	256788,7830	-	12020	12126	0,29	236,56
M08-Red(0,01)	256788,8112	-	10892	10998	0,29	60,01
M08-Red(10,0)	256788,8149	-	10692	10798	0,24	53,39
M08-S-Primal	infinity	-	694	1080	-	86400,00
M08-S-Dual	256785,8387	-	694	1080	-	86400,00
L01-Ori	283295,6154	-	5356	5502	0,22	110,42
L01-Red(0,01)	283000,1223	-	2946	3029	0,19	5,28
L01-Red(10,0)	283000,1223	-	2935	3081	0,13	3,21
L01-S-Primal	484239,8146	-	1166	2694	-	86400,00
L01-S-Dual	282999,3213	-	1166	2694	-	86400,00
L02-Ori	380973,1757	-	17554	17765	0,29	86400,00
L02-Red(0,01)	385082,8917	-	11512	11723	0,28	86400,00
L02-Red(10,0)	373235,5552	-	10893	11104	0,29	6063,34
L02-S-Primal	41203988,2812	-	1926	2919	-	86400,00
L02-S-Dual	367365,8627	-	1926	2919	-	86400,00
L03-Ori	64631,2974	-	19932	20108	0,23	46,65
L03-Red(10,0)	64631,1453	-	14275	14451	0,21	15,45
L03-S-Primal	2557665,7162	-	3612	5553	-	86400,00
L03-S-Dual	64621,1504	-	3612	5553	-	86400,00
L04-Ori	145945,5178	-	24656	24867	63,48	86400,00
L04-Red(0,01)	144141,4493	-	16489	16700	0,23	67450,01
L04-Red(10,0)	143022,8744	-	13393	13604	62,73	86400,00
L04-S-Primal	5851326,3138	-	3538	8019	-	86400,00
L04-S-Dual	137624,7424	-	3538	8019	-	86400,00

Tabelle 5.7: Ergebnisse der Netzmodelle, bei denen eine deutliche Verbesserung der Lösungszeit nach Anwendung der Kombination aus Netzreduktion und Optimierung erzielt werden konnte

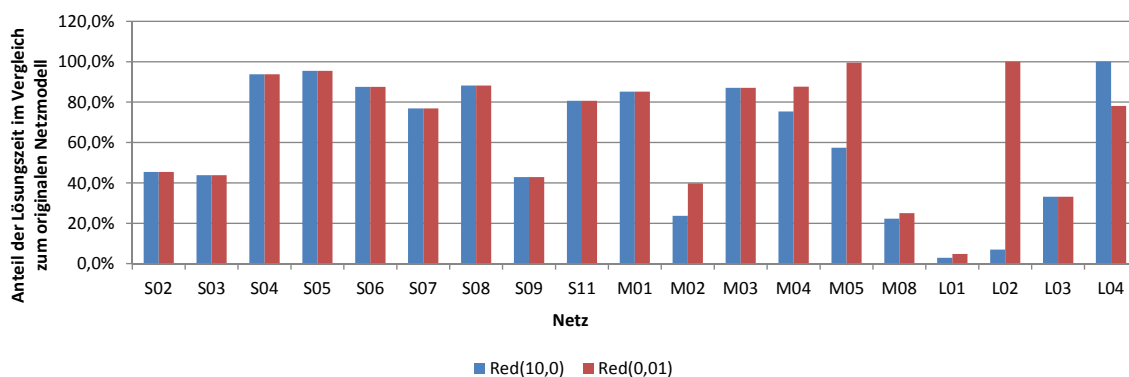


Abbildung 5.21: Benötigte Lösungszeit der reduzierten Netzmodelle im Vergleich zur Lösungszeit der originalen Netzmodelle

Das Netz S03 konnte beispielsweise durch Anwendung der Reduktionstechniken von 11 Knoten und 12 Kanten auf 6 Knoten und 5 Kanten reduziert werden. Dadurch konnte die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen des Optimierungsmodells ebenfalls deutlich von 3751 bzw. 3780 auf 2752 bzw. 2781 reduziert werden. Dies hat einen erheblichen Einfluss auf die benötigte Lösungszeit, die von 1,53 Sekunden auf 0,67 Sekunden gesunken ist. Damit benötigt die reduzierte Version des Netzmodells nur 43,8 % der Lösungszeit des originalen Netzmodells. Auch die Lösungszeit des reduzierten Netzmodells von Netz S09 liegt mit 0,27 Sekunden unter der des originalen Netzmodells mit 0,63 Sekunden.

Das Netz S11 konnte von 21 Knoten und 20 Kanten auf 18 Knoten und 17 Kanten reduziert werden. Das originale Netzmodell wurde innerhalb von 0,88 Sekunden optimal gelöst, während das reduzierte Netzmodell in 0,71 Sekunden optimal gelöst werden konnte. Ähnlich sieht es bei Netz M01 aus, dessen originales Netzmodell 27 Knoten und 26 Kanten besitzt und nach der Reduktion 21 Knoten und 20 Kanten aufweist. Das originale bzw. reduzierte Netzmodell konnte in 1,75 bzw. 1,49 Sekunden gelöst werden.

Bei Netz M02 ist zu erkennen, dass die beiden reduzierten Versionen des Netzmodells schneller als das originale Netzmodell gelöst werden konnten. Das originale Netzmodell wurde innerhalb von 1,56 Sekunden gelöst, während die Version M02-Red(0,01) in 0,62 Sekunden gelöst wurde, was 39,7 % der Lösungszeit des originalen Netzmodells entspricht. Das Netzmodell M02-Red(10,0), das stärker reduziert werden konnte, wurde mit 0,37 Sekunden noch etwas schneller gelöst. Dies entspricht 23,7 % der Lösungszeit des originalen Netzmodells.

Auch bei den größeren Netzen ist die Auswirkung der Reduktion auf die Lösungszeit deutlich zu sehen. Das Netz L01 konnte beispielsweise von 219 Knoten und 250

Kanten auf 72 Knoten und 97 Kanten im Falle einer Fehlerschranke von 0,01 und auf 70 Knoten und 95 Kanten bei einer Fehlerschranke von 10,0 reduziert werden. Bei beiden reduzierten Netzmodellen konnte eine erhebliche Reduktion der Lösungszeit festgestellt werden. Die reduzierten Modelle wurden in 5,28 Sekunden bei Netz L01-Red(0,01) bzw. 3,21 Sekunden bei Netz L01-Red(10,0) gelöst, während die Lösungszeit des originalen Netzmodells 110,42 Sekunden beträgt. Dies entspricht 4,8 % bzw. 2,9 % der Lösungszeit des originalen Netzmodells.

Bei Netz L02 zeigt sich, dass sowohl das originale Netzmodell als auch das reduzierte Netzmodell mit einer Fehlerschranke von 0,01 nicht innerhalb der vordefinierten Zeitschranke von 24 Stunden gelöst werden konnte. Die reduzierte Version mit einer Fehlerschranke von 10,0 konnte jedoch innerhalb von 6063,34 Sekunden optimal gelöst werden. Auch bei Netz L04 zeigt sich ein ähnliches Verhalten. Bei diesem Netz konnten ebenfalls das originale Netzmodell sowie das Netzmodell L04-Red(10,0) nicht innerhalb von 24 Stunden optimal gelöst werden. Für die Version L04-Red(0,01) hingegen konnte innerhalb von 67450,01 Sekunden eine optimale Lösung gefunden werden. Dies zeigt sehr deutlich den positiven Effekt der Anwendung der Reduktionstechniken.

Es gibt Netze, bei denen die Reduktion einen großen Einfluss auf die Größe des Netzmodells hatte, die reduzierte Version des Netzes jedoch nicht wesentlich schneller gelöst werden konnte als die originale Version. Dies gilt beispielsweise für Netz S06, das von 14 Knoten und 13 Kanten auf 8 Knoten und 7 Kanten reduziert werden konnte. Die reduzierte Version dieses Netzes wurde in 0,21 Sekunden gelöst, während die originale Version 0,24 Sekunden benötigt hat. Somit hat in diesem Fall die Reduktion zu keiner klaren Verbesserung der Lösungszeit für die Optimierung geführt.

Bei den Netzen M04 und M05 haben sich durch die Anwendung der Reduktionstechniken zwei unterschiedliche Versionen des reduzierten Netzmodells ergeben. Das mit der Fehlerschranke 0,01 entstandene Netzmodell hat in beiden Fällen mehr Knoten und Kanten als das reduzierte Netzmodell, das mit der Fehlerschranke 10,0 entstanden ist. Dies spiegelt sich auch in der Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen sowie den Lösungszeiten der reduzierten Netzmodelle wider. So konnte in beiden Fällen das reduzierte Netzmodell Red(10,0) schneller gelöst werden als das reduzierte Netzmodell Red(0,01). Wird die relative Differenz betrachtet, so ist festzustellen, dass diese sich nicht unterscheidet. Somit scheint es keinen großen Einfluss auf die Lösung zu haben, welche Version des reduzierten Netzmodells zur Optimierung genutzt wird.

Werden insgesamt die relativen Differenzen der originalen und reduzierten Netze verglichen, so fällt auf, dass diese sich in vielen Fällen nicht wesentlich verändert haben, wie bei den Netzen S02 bis S05, S07, S11 und M01 bis M05. Bei den Netzen S06, S08 und S09 fällt jedoch auf, dass sich die relative Differenz deutlich von 0,006 auf 0,045 bzw. von 0,004 auf 0,054 und von 0,006 auf 0,120 verschlechtert hat. Ebenso fällt auf,



dass sich die zugehörigen Zielfunktionswerte deutlich unterscheiden. Dies könnte darauf hindeuten, dass bei diesen Netzen durch die Anwendung der Reduktionstechniken Ungenauigkeiten entstanden sind, die zu einer anderen Lösung führen. Daher stellt sich die Frage, ob diese Lösung überhaupt zulässig für das jeweilige originale Netzwerkmodell sein kann. Diese Thematik wird im nachfolgenden Kapitel 6 detailliert behandelt und untersucht.

In Tabelle 5.8 sind die Netze abgebildet, bei denen durch die Reduktionstechniken keine Reduktion des Netzwerkmodells erreicht werden konnte. Daher ist bei diesen Netzen die Lösung des originalen sowie reduzierten Optimierungsmodells identisch. Zusätzlich ist in dieser Tabelle auch das Netz L05 zu finden, für das in der vorgegebenen Zeit von 24 Stunden sowohl für das originale als auch für das reduzierte Netzwerkmodell keine optimale Lösung gefunden werden konnte. Für diese beiden Netze ist die bis dahin beste gefundene Lösung angegeben.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Var.	NB	Err	Zeit (s)
S01-Ori	510153,0665	< 1E-04	1791	1742	0,22	0,91
S01-Red(10,0)	510153,0665	< 1E-04	1791	1742	0,22	0,91
S01-S	510153,2948	-	68	58	-	0,10
S10-Ori	323781,7230	< 1E-04	2884	2990	0,17	1,59
S10-Red(10,0)	323781,7230	< 1E-04	2884	2990	0,17	1,59
S10-S	323781,6305	-	95	94	-	1,07
M06-Ori	363888,9073	-	6712	6818	0,23	24,63
M06-Red(10,0)	363888,9073	-	6712	6818	0,23	24,63
M06-S-Primal	10234205,8963	-	491	712	-	86400,00
M06-S-Dual	363835,1559	-	491	712	-	86400,00
M07-Ori	130482,9050	-	4498	4639	0,29	252,64
M07-Red(10,0)	130482,9050	-	4498	4639	0,29	252,64
M07-S-Primal	3240196,3677	-	541	829	-	86400,00
M07-S-Dual	129860,2073	-	541	829	-	86400,00
L05-Ori	0,0000	-	29635	29776	0,29	86400,00
L05-Red(0,01)	0,0000	-	29297	29438	0,26	86400,00
L05-Red(10,0)	0,0000	-	16181	16322	0,29	86400,00
L05-S-Primal	infinity	-	11531	15463	-	86400,00
L05-S-Dual	0,0000	-	11531	15463	-	86400,00

Tabelle 5.8: Ergebnisse der Netzwerkmodelle, bei denen keine Verbesserung der Lösungszeit nach Anwendung der Kombination aus Netzreduktion und Optimierung erzielt werden konnte

Insgesamt ist an den Ergebnissen dieses Abschnitts zu sehen, dass es ein lohnender Ansatz zu sein scheint, das reduzierte Netzmodell zu lösen, da dadurch bei dem überwiegenden Teil der Netze die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen und damit die Lösungszeit deutlich reduziert werden konnte. Bei einigen der hier betrachteten Netze fällt zudem auf, dass es zu Abweichungen in der Zielfunktion kommt und auch die relative Differenz bei den reduzierten Netzen angestiegen ist. Daher bleibt zu diskutieren, ob die Ergebnisse, die mit Hilfe des reduzierten Netzes erreicht werden, zulässig für das originale Netzmodell sind. Eine Untersuchung der Zulässigkeit der durch die Optimierung des reduzierten Netzmodells gefundenen Lösung soll im nächsten Kapitel 6 durchgeführt werden.

### 5.4 Fazit und Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden in Abschnitt 5.1 zunächst drei Netzreduktionstechniken vorgestellt, die die Größe eines Wassernetzmodells verringern können. Dies sind die Techniken Eliminierung von Endknoten, die Eliminierung von Rohrsequenzen sowie die Eliminierung von parallelen Rohren. An den numerischen Ergebnissen in Abschnitt 5.2 wurde gezeigt, dass durch die Anwendung dieser Techniken die Anzahl der Knoten und Kanten eines Netzmodells in vielen Fällen deutlich reduziert werden kann. Dabei kann es jedoch auch zu Abweichungen der hydraulischen Eigenschaften des originalen und reduzierten Netzmodells kommen. In Abschnitt 5.3 wurden mit Hilfe der reduzierten Netzmodelle Optimierungsmodelle erstellt und mit den in Kapitel 4 vorgestellten Optimierungsmethoden gelöst. Dabei wurde festgestellt, dass die Lösungszeit der reduzierten Netzmodelle in vielen Fällen unter der Lösungszeit liegt, die für das originale Netzmodell benötigt wurde. Jedoch stellt sich die Frage, ob die im reduzierten Netzmodell gefundene Lösung überhaupt zulässig für das originale Netzmodell ist. Um dies zu evaluieren, soll die im reduzierten Netzmodell gefundene optimale Lösung an das originale Netzmodell übergeben werden und anhand einer hydraulischen Simulation überprüft werden, ob die Lösung zulässig ist. Der hydraulische Simulator sowie numerische Ergebnisse nach der Übergabe der Lösung an das originale Netzmodell werden im nächsten Kapitel 6 vorgestellt. Nach der Analyse der Ergebnisse wird ein Verfahren vorgestellt, das zum Einsatz kommt, falls eine gefundene Lösung im originalen Netzmodell unzulässig ist. Mit Hilfe dieses Verfahrens soll gewährleistet werden, dass im Laufe des Verfahrens eine zulässige Lösung gefunden wird, sofern eine existiert.

## 6 Simulation und Modifikation

In diesem Kapitel wird die hydraulische Simulation vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit genutzt wird. Zunächst werden in Abschnitt 6.1.1 die Eigenschaften und die Verwendung des genutzten Simulators beschrieben. Der Simulator wird genutzt, um die Lösungen, die bei der Optimierung des reduzierten Netzmodells entstanden sind, im originalen Netzmodell auf Zulässigkeit zu überprüfen. Dazu wird die Lösung an das originale Netzmodell übergeben und ein Simulationslauf gestartet. Anschließend werden in Abschnitt 6.1.2 die numerischen Ergebnisse gezeigt, die nach Integration des Simulators in den Lösungsprozess entstanden sind. Dabei wird festgestellt, dass bei einigen Netzen Unzulässigkeiten identifiziert werden können. Anschließend wird in Abschnitt 6.2 ein Modifikationsschritt vorgestellt, mit dem für diese Netzmodelle eine zulässige Lösung gefunden werden soll. Die Wirksamkeit der Modifikation wird anhand verschiedener Netze gezeigt. In Abschnitt 6.3 wird anschließend der Einfluss der Genauigkeit der Linearisierung und der Reduktionsschranke auf die gefundene Lösung untersucht.

### 6.1 Simulation

#### 6.1.1 Beschreibung des hydraulischen Simulators

Im Rahmen dieser Arbeit wird unter Simulation eine diskrete ereignisorientierte Simulation verstanden, die die hydraulischen Eigenschaften eines Wasserversorgungssystems über eine diskrete Menge an Zeitschritten nachbildet. In [Coelho und Andrade-Campos, 2014], S. 61, werden Simulationsmodelle wie folgt beschrieben. Es sind Modelle, die reale Systeme und deren Eigenschaften mit Hilfe mathematischer Funktionen abbilden. Diese können anschließend numerisch gelöst werden. Im Speziellen werden bei hydraulischen Simulationsmodellen die Massenbilanzgleichungen und die nichtlinearen Druckverlustgleichungen modelliert. Weiterhin können auch die verschiedenen Komponenten eines Wasserversorgungssystems abgebildet werden. Nachdem die aufgestellten Gleichungen mit Hilfe des Simulators gelöst wurden, können detaillierte Informationen der Netzelemente zu verschiedenen Zeitpunkten ausgewertet werden. Im Bereich der hydraulischen Simulation gibt es eine Vielzahl von unterschiedlichen Simulationstools, mit denen die hydraulischen Eigenschaften von Wasserversorgungs-

systemen simuliert werden können. Eines der bekanntesten Simulationstools ist das Open Source-Projekt EPANET, vgl. [EPA, 2014], das von der U. S. Environmental Protection Agency (EPA) entwickelt wurde. Eine Dokumentation dieses Simulationstools ist in [Rossman, 2000] zu finden. Es existieren viele verschiedene Simulatoren, die auf EPANET basieren, wie z. B. STANET, vgl. [STANET, 2015], H2ONET, vgl. [Innovyze, 2015] und WaterCAD, vgl. [Bentley, 2015]. Es gibt aber auch Simulatoren, die von EPANET unabhängig sind, wie z. B. HYDROFLO, vgl. [Tahoe Design Software, 2015] oder Pipe2014, vgl. [KYPipe, 2015]. Eine detaillierte Übersicht über diese und weitere Simulationstools ist in [Coelho und Andrade-Campos, 2014], S. 62-63, zu finden.

Der in dieser Arbeit genutzte Simulator Roka3 basiert ebenfalls auf EPANET und wurde von dem Industriepartner Rechenzentrum für Versorgungsnetze Wehr GmbH (RZVN), vgl. [RZVN, 2015], entwickelt. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über die Eigenschaften und Verfahren gegeben, die dieses Simulationstool zu bieten hat.

Roka3 kann für verschiedene Anwendungsgebiete im Bereich der Versorgungssysteme verwendet werden. So können z. B. nicht nur Wasserversorgungssysteme, sondern auch Gasbezugssysteme modelliert und berechnet werden. Im Folgenden steht die Betrachtung der Wasserversorgungsnetze jedoch im Vordergrund. Es gibt die Möglichkeit, die hydraulischen Eigenschaften eines Wasserversorgungssystems über mehrere Zeitschritte zu berechnen. Es ist jedoch auch möglich, die Wasserqualität innerhalb des Netzes zu simulieren sowie die Optimierung von Rohren durchzuführen. Da Roka3 auf EPANET basiert, sind die folgenden Ausführungen zum größten Teil an [Rossman, 2000] angelehnt. Das Simulationstool basiert auf der Einteilung des Netzes in Knoten und Kanten. Dabei stellen die Knoten Verzweigungen bzw. Entnahmestellen, Wasserbehälter und Reservoirs dar. Rohre, Pumpen und Ventile werden als Kanten modelliert. Um die hydraulischen Eigenschaften der einzelnen Netzelemente zu berechnen, werden verschiedene Eingangsparameter benötigt. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über die Eingangsparameter der Netzelemente sowie die berechneten Eigenschaften gegeben.

Die Eingangsparameter von *Verzweigungen und Entnahmestellen* sind die geodätische Höhe, auf der sich dieser Knoten befindet, und die nachgefragte Menge an Wasser, die zeitlich variieren kann. Nach der Durchführung eines Simulationslaufes wird die Druckhöhe an diesem Knoten berechnet.

Wie auch im Optimierungsmodell wird für *Reservoirs* angenommen, dass sie eine unendliche Menge an Wasser besitzen, die an das System abgegeben werden kann. Die Druckhöhe an einem Reservoir ist für jeden Zeitschritt vorgegeben und kann nicht durch die Hydraulik des Wasserversorgungssystems beeinflusst werden.

Bei *Wasserbehältern* ist die Druckhöhe hingegen eine zu berechnende Größe. Damit wird gleichzeitig auch der Wasserstand innerhalb des Behälters zu jedem Zeitpunkt bestimmt. Als Eingangsparameter werden die geodätische Höhe sowie der initiale, minimale und maximale Wasserstand benötigt. Da in dieser Arbeit Wasserbehälter mit einer runden Grundfläche betrachtet werden, wird zudem der Durchmesser des Wasserbehälters als Eingangsgröße angegeben.

Für *Rohre* werden der Durchmesser, die Länge sowie der Widerstandsbeiwert als Eingangsparameter benötigt. Zusätzlich kann ein Status des Rohres definiert werden. So ist es möglich die Status *open*, *closed* oder *Check Valve* zu wählen. Der Status *open* bedeutet dabei, dass das Wasser ungehindert durch das Rohr fließen kann, während der Status *closed* bedeutet, dass der Fluss durch das Rohr mit Hilfe eines Schiebers verhindert wird. Mit Hilfe des Status *Check Valve* wird der Fluss nur in eine Richtung des Rohres erlaubt. Durch einen Simulationslauf werden der Volumenstrom, die Fließgeschwindigkeit sowie der Druckverlust innerhalb des Rohres berechnet.

Die Eingangsparameter von *Pumpen* sind die Informationen, die zur Erstellung einer Pumpenkennlinie benötigt werden. Berechnet werden der Fluss innerhalb der Pumpen sowie die Druckerhöhung, die durch die Pumpe erreicht wurde.

Für *Ventile* wird ebenfalls der Fluss innerhalb des Ventils berechnet sowie der Druckverlust, der innerhalb des Ventils aufgetreten ist. Als Eingangsparameter werden der Durchmesser, der Status sowie bestimmte Einstellungsparameter benötigt. Diese Einstellungsparameter hängen von der Art des Ventils ab. Mögliche Ventilarten sind PRV, PSV, PBV und FCV, die kurz in Abschnitt 2.1.3 dieser Arbeit vorgestellt wurden.

Weiterhin bietet das Simulationstool auch die Möglichkeit, weitere Eigenschaften eines Wasserversorgungssystems zu berücksichtigen. So ist es möglich, verschiedene Regeln für das System zu definieren. Beispielsweise kann so für eine bestimmte Kante definiert werden, dass sich ihr Status zu einem bestimmten Zeitpunkt ändern soll. Auch ist es möglich zu definieren, dass sich der Status ändern soll, falls ein oder mehrere Knoten einen bestimmten Druck über- oder unterschreiten oder der Wasserstand eines oder mehrerer Wassertanks einen bestimmten Wert erreicht. Damit kann das Simulationstool viele unterschiedliche Regeln und Eigenschaften eines Wasserversorgungssystems abbilden.

Um nun für ein gegebenes Wassernetzmodell für alle Knoten und Kanten die Druckhöhen bzw. Volumenströme zu berechnen, müssen wie auch beim Optimierungsmodell, das in Kapitel 4 entwickelt wurde, die Massenbilanzgleichung für jeden Knoten sowie die Druckverlustgleichung für jede Kante erfüllt sein. Weiterhin müssen auch alle anderen Eigenschaften des Netzes berücksichtigt werden.

Es gibt verschiedene Verfahren, die das so entstehende nichtlineare Gleichungssystem lösen können. So existieren das *Hardy-Cross-Verfahren*, der *Flow Adjustment-Algorithmus*, der *Simultaneous Adjustment-Algorithmus* und das *Todini-Pilati-Verfahren*. Details zu diesen Verfahren werden in [Boulos et al., 2006], S. 5-11 ff., beschrieben. In dem hier betrachteten Simulationstool ist das von Todini und Pilati entwickelte Verfahren implementiert, das in [Todini und Pilati, 1988] vorgestellt wird. Dieses nutzt das Newton-Verfahren, vgl. [Bronstein et al., 2008], S. 967, welches auf das nichtlineare Gleichungssystem angewendet wird, das durch die Massenbilanzgleichungen und die Druckverlustgleichungen entstanden ist.

### 6.1.2 Verwendung des hydraulischen Simulators

Das Simulationstool wird im Rahmen dieser Arbeit aus zwei verschiedenen Gründen eingesetzt. Zum einen wird es benötigt, um für eine optimale Lösung des reduzierten Netzmodells festzustellen, ob diese zulässig ist, wenn sie auf das Gesamtsystem übertragen wird. Dies ist sinnvoll, da einerseits Abweichungen durch die stückweise Linearisierung der nichtlinearen Druckverlustgleichung entstehen, wie in Kapitel 4 erläutert wurde. Andererseits kann es ebenfalls zu Abweichungen zwischen den hydraulischen Eigenschaften des reduzierten und des originalen Netzmodells kommen, wie in Kapitel 5 beschrieben wurde. Zum anderen bietet das Simulationstool eine detailliertere Abbildung der Realität als das Optimierungsmodell. Somit kann nach der Übertragung einer optimalen Lösung überprüft werden, ob diese ebenfalls in der detaillierteren Beschreibung des Netzes zulässig ist.

In Abschnitt 5.3 wurde festgestellt, dass die Lösungszeiten für die Optimierung der reduzierten Versionen der Netzmodelle bei den meisten Testnetzen niedriger waren als die Lösungszeiten, die für die Lösung der originalen Netzmodelle benötigt wurden. Da es bei einigen Netzmodellen jedoch auch höhere Abweichungen in den Zielfunktionswerten gab und damit hohe Werte für die relative Differenz aufgetreten sind, bleibt zu klären, ob die Lösung, die durch die Optimierung des reduzierten Netzmodells gefunden wurde, zulässig ist, wenn sie in das originale Netzmodell übertragen wird. Daher wurde für jedes Netz die im reduzierten Netzmodell generierte Lösung an das originale Netzmodell übergeben und mit diesen Daten ein Simulationslauf gestartet. Anschließend wurde überprüft, ob es zu Unzulässigkeiten im Simulationslauf gekommen ist. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.1 zu finden. Dabei ist in der vierten Spalte die Anzahl aller Warnungen, gekennzeichnet mit *Warn.* zu erkennen, die von der Simulation zurückgegeben werden.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Max.Diff.	Zeit
S01-Ori	510153,0665	< 1E-04	-	0,22	0,91
S01-Red(10,0)	510153,0665	< 1E-04	0	0,22	0,91
S01-S	510153,2948	-	-	-	0,10
S02-Ori	551,0000	< 1E-04	-	0,24	0,11
S02-Red(10,0)	551,0000	< 1E-04	0	0,24	0,05
S02-S	551,0000	-	-	-	0,01
S03-Ori	177382,4273	< 1E-04	-	0,20	1,53
S03-Red(10,0)	177382,4273	< 1E-04	0	0,18	0,67
S03-S	177365,8369	-	-	-	0,06
S04-Ori	4315,9046	< 1E-04	-	0,20	0,16
S04-Red(10,0)	4315,9046	< 1E-04	0	0,20	0,15
S04-S	4315,8634	-	-	-	0,02
S05-Ori	5483,0269	0,009	-	0,26	0,22
S05-Red(10,0)	5473,6841	0,008	0	0,26	0,21
S05-S	5431,9206	-	-	-	0,13
S06-Ori	24525,5615	0,006	-	0,21	0,24
S06-Red(10,0)	23276,7260	0,045	6	0,21	0,21
S06-S	24377,8030	-	-	-	0,09
S07-Ori	0,0000	-	-	0,23	17,93
S07-Red(10,0)	0,0000	-	0	0,11	13,79
S07-S	0,0000	-	-	-	0,09
S08-Ori	38184,2219	0,004	-	0,21	0,17
S08-Red(10,0)	35979,1808	0,054	6	0,05	0,15
S08-S	38034,0672	-	-	-	0,15
S09-Ori	8280,4352	0,006	-	0,21	0,63
S09-Red(10,0)	7238,5084	0,120	9	0,19	0,27
S09-S	8228,2358	-	-	-	0,15
S10-Ori	323781,7230	< 1E-04	-	0,17	1,59
S10-Red(10,0)	323781,7230	< 1E-04	0	0,17	1,59
S10-S	323781,6305	-	-	-	1,07
S11-Ori	11181,9002	< 1E-04	-	0,22	0,88
S11-Red(10,0)	11181,9075	< 1E-04	0	0,22	0,71
S11-S	11181,9100	-	-	-	1,73
M01-Ori	51069,9607	< 1E-04	-	0,19	1,75
M01-Red(10,0)	51069,9607	< 1E-04	0	0,19	1,49
M01-S	51070,3745	-	-	-	0,62
M02-Ori	71541,0796	0,001	-	0,21	1,56
M02-Red(0,01)	71296,6635	0,003	1	0,21	0,62
M02-Red(10,0)	71295,9848	0,003	1	0,21	0,57
M02-S	71492,8293	-	-	-	2,16

Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Max.Diff.	Zeit
M03-Ori	19954,6182	0,002	-	0,29	0,62
M03-Red(10,0)	19925,0064	< 1E-04	0	0,29	0,54
M03-S	19918,7915	-	-	-	64,90
M04-Ori	110179,1274	< 1E-04	-	0,23	0,73
M04-Red(0,01)	110292,8453	0,001	0	0,21	0,64
M04-Red(10,0)	110381,0142	0,001	0	0,22	0,55
M04-S	110217,7802	-	-	-	2,51
M05-Ori	0,0000	-	-	0,23	4,56
M05-Red(0,01)	0,0000	-	0	0,23	4,54
M05-Red(10,0)	0,0000	-	0	0,21	2,62
M05-S	0,0000	-	-	-	12,19
M06-Ori	363888,9073	-	-	0,23	24,63
M06-Red(10,0)	363888,9073	-	0	0,23	24,63
M06-S-Primal	10234205,8963	-	-	-	86400,00
M06-S-Dual	363835,1559	-	-	-	86400,00
M07-Ori	130482,9050	-	-	0,29	252,64
M07-Red(10,0)	130482,9050	-	0	0,29	252,64
M07-S-Primal	3240196,3677	-	-	-	86400,00
M07-S-Dual	129860,2073	-	-	-	86400,00
M08-Ori	256788,7830	-	-	0,29	236,56
M08-Red(0,01)	256788,8112	-	0	0,29	60,01
M08-Red(10,0)	256788,8149	-	0	0,24	53,39
M08-S-Primal	infinity	-	-	-	86400,00
M08-S-Dual	256785,8387	-	-	-	86400,00
L01-Ori	283295,6154	-	-	0,22	110,42
L01-Red(0,01)	283000,1223	-	0	0,19	5,28
L01-Red(10,0)	283000,1223	-	0	0,13	3,21
L01-S-Primal	484239,8146	-	-	-	86400,00
L01-S-Dual	282999,3213	-	-	-	86400,00
L02-Ori	380973,1757	-	-	0,29	86400,00
L02-Red(0,01)	385082,8917	-	0	0,28	86400,00
L02-Red(10,0)	373235,5552	-	12	0,29	6063,34
L02-S-Primal	41203988,2812	-	-	-	86400,00
L02-S-Dual	367365,8627	-	-	-	86400,00
L03-Ori	64631,2974	-	-	0,23	46,65
L03-Red(10,0)	64631,1453	-	0	0,21	15,45
L03-S-Primal	2557665,7162	-	-	-	86400,00
L03-S-Dual	64621,1504	-	-	-	86400,00
L04-Ori	145945,5178	-	-	63,48	86400,00
L04-Red(0,01)	144141,4493	-	0	90,23	67450,01



Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Max.Diff.	Zeit
L04-Red(10,0)	143022,8744	-	0	62,73	86400,00
L04-S-Primal	5851326,3138	-	-	-	86400,00
L04-S-Dual	137624,7424	-	-	-	86400,00
L05-Ori	0,0000	-	-	0,29	86400,00
L05-Red(0,01)	0,0000	-	0	0,26	86400,00
L05-Red(10,0)	0,0000	-	0	0,29	86400,00
L05-S-Primal	infinity	-	-	-	86400,00
L05-S-Dual	0,0000	-	-	-	86400,00

Tabelle 6.1: Ergebnisse aller Netzmodelle nach Integration der Simulation

Aus den Ergebnissen ist erkennbar, dass bei den Netzen S06, S08, S09, M02 sowie L02 Warnungen des Simulationstools zurückgegeben werden. Dies deutet darauf hin, dass hier Unzulässigkeiten durch die Übertragung der Lösung des reduzierten Netzmodells in das originale Netzmodell entstanden sind. Bei allen anderen Netzen konnten keine Warnungen und daher auch keine Unzulässigkeiten festgestellt werden. Das bedeutet, dass für diese Netze eine zulässige Lösung mit Hilfe des reduzierten Netzmodells gefunden werden konnte. An der relativen Differenz dieser Netze ist zu sehen, dass die jeweiligen Lösungen nah an der von SCIP gefundenen Lösung sind, falls SCIP eine optimale Lösung finden konnte. In den anderen Fällen ist zu erkennen, dass die Lösung nah an der dualen Schranke liegt, die von SCIP ausgegeben wurde. Bei Netz L05 fällt auf, dass auch die reduzierte Version des Netzmodells nicht optimal in der vorgegebenen Zeit gelöst werden konnte. Dennoch konnte bei diesem Netz eine Lösung generiert werden, die zulässig ist.

Die Netze, bei denen Unzulässigkeiten aufgetreten sind, werden im folgenden Abschnitt im Detail untersucht. Dort wird ebenfalls diskutiert, wie mit Hilfe eines Modifikations-schrittes eine zulässige Lösung ermittelt werden kann.

## 6.2 Modifikation

In diesem Abschnitt werden die Netze, bei denen Unzulässigkeiten im Simulationsschritt festgestellt wurden, im Detail betrachtet. Es wird für jedes Netz analysiert, welche Ursache diese Unzulässigkeiten haben. Anschließend werden die Stellen, an denen Unzulässigkeiten aufgetreten sind, im Netzmodell lokalisiert. An diesen Stellen sollte eine detailliertere Betrachtung stattfinden und sie werden daher markiert. Um diese Stellen detaillierter in der Optimierung berücksichtigen zu können, wird das originale Netzmodell betrachtet. Dieses wird erneut reduziert, jedoch werden in diesem Durchlauf die markierten Knoten und Kanten für die Reduktion gesperrt. So entsteht

ein neues reduziertes Netzmodell, das an einigen Stellen detaillierter ist als das vorherige reduzierte Netzmodell. Mit diesem neuen reduzierten Netzmodell wird ebenfalls eine Optimierung durchgeführt, wodurch eine neue optimale Lösung generiert wird. Die Lösung wird wiederum an das Simulationstool übergeben, das die Zulässigkeit dieser Lösung im originalen Netzmodell überprüfen soll. Falls wieder eine oder mehrere Unzulässigkeiten auftreten sollten, werden neue Knoten und Kanten für die Reduktion markiert und somit gesperrt. Dieser Prozess wird so lange wiederholt, bis das Simulationstool eine Lösung als zulässig evaluiert. Insgesamt kann somit sichergestellt werden, dass eine optimale Lösung, die mit Hilfe eines reduzierten Netzmodells gefunden wurde, auch zulässig ist, wenn sie in dem originalen Netzmodell betrachtet wird.

Im Folgenden werden Ergebnisse vorgestellt, die durch den Einsatz dieses Modifikationsschrittes entstanden sind.

### 6.2.1 Ergebnisse der Netzmodelle, bei denen durch den Einsatz des Modifikationsschrittes ein zeitlicher Vorteil erreicht werden konnte

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Netzmodelle M02 sowie L02 analysiert, die durch den Einsatz des Modifikationsschrittes entstanden sind.

#### Modifikationsschritt am Beispiel von Netz M02

Netz M02 besitzt in der originalen Version des Netzmodells 30 Knoten sowie 31 Kanten. Insgesamt sind zehn der Knoten mögliche Behälterknoten. Wird dieses Modell gelöst, so soll nur der Behälter 26 mit einem maximalen Volumen von  $2374,70 \text{ m}^3$  und einer Druckhöhe von  $30,24 \text{ m}$  existieren.

Bei diesem Netz wurden aufgrund der Fehlerschranke, die für die Reduktion definiert werden kann, zwei Versionen des reduzierten Netzmodells gefunden: M02-Red(0,01) sowie M02-Red(10,0) mit den Fehlerschranken 0,01 bzw. 10,0. Netzmodell M02-Red(0,01) besitzt 16 Knoten und 16 Kanten, während Netzmodell M02-Red(10,0) 15 Knoten und 15 Kanten besitzt. Der maximale Fehler durch die Reduktion für die beiden Netze beträgt 0,0012 bzw. 2,6522, siehe Tabelle 6.2. Es stellt sich die Frage, ob der maximale Fehler einen Einfluss auf das Ergebnis der Optimierung hat. Wird Netzmodell M02-Red(0,01) mit der Optimierung gelöst, so wird festgestellt, dass ebenfalls Behälter 26 mit einem maximalen Volumen von  $2366,56 \text{ m}^3$  und einer Druckhöhe von  $30,13 \text{ m}$  existieren soll. In Tabelle 6.2 ist zu erkennen, dass die relative Differenz im Vergleich zum originalen Netzmodell von 0,001 auf 0,003 zugenommen hat. Die Simulation gibt für dieses Netz eine Warnung zurück. Ähnlich sieht es bei Netzmodell M02-Red(10,0)

aus, bei dem die Optimierung das Ergebnis liefert, dass Behälter 26 mit einem maximalen Volumen von  $2366,53 \text{ m}^3$  und einer Druckhöhe von  $30,13 \text{ m}$  gebaut werden soll. Jedoch liegt auch bei diesem Netz die relative Differenz bei  $0,003$  und die Simulation gibt eine Warnung zurück. Dies bedeutet, dass beide reduzierten Netzmodelle keine zulässige Lösung für das originale Netzmodell liefern. In beiden Fällen wird im Modifikationsschritt der Knoten 18 gesperrt und in beiden Fällen ergeben sich anschließend nach Optimierung des neuen reduzierten Netzmodells zulässige Werte für den Behälter 26. Obwohl diese beiden Netze nach Anwendung der Reduktionstechniken unterschiedliche maximale Fehler aufweisen, liefern beide Netze eine zulässige Lösung für das originale Netzmodell. Dabei ist die relative Differenz für Netzmodell M02-Red(10,0), die unter  $1\text{E-}04$  liegt, etwas geringer als die von Netzmodell M02-Red(0,01) mit  $0,001$ . Dies deutet darauf hin, dass der maximale Fehler, der durch die Reduktion entstanden ist, keinen großen Einfluss auf die Lösung hat.

Werden die Lösungszeiten verglichen, so lässt sich feststellen, dass im Falle der Reduktion mit einer Fehlerschranke von  $0,01$  die beiden reduzierten Versionen des Netzmodells zusammen schneller gelöst werden konnten als das originale Netzmodell. Ebenso verhält es sich bei den beiden reduzierten Netzmodellen mit der Fehlerschranke  $10,0$ , die zusammen schneller gelöst werden konnten als die beiden mit der Fehlerschranke von  $0,01$  generierten Netzmodelle. Dies zeigt, dass die Kombination aus reduziertem Netzmodell und modifiziertem reduziertem Netzmodell der Lösung des originalen Netzmodells zeitlich überlegen sein kann.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Diff	Zeit
M02-Ori	71541,0796	0,001	-	-	1,56
M02-Red(0,01)	71296,6635	0,003	1	0,0012	0,62
M02-Red(0,01)-Modi	71534,8537	0,001	0	-	0,60
M02-Red(10,0)	71295,9848	0,003	1	2,6522	0,37
M02-Red(10,0)-Modi	71528,1714	< $1\text{E-}04$	0	-	0,61
M02-S	71492,8293	-	-	-	2,16

Tabelle 6.2: Ergebnisse aus Reduktion, Optimierung, Simulation und Modifikation am Beispiel von M02

### Modifikationsschritt am Beispiel von Netz L02

Das Netzmodell des Netzes L02 besitzt 300 Knoten und 345 Kanten. Insgesamt gibt es in diesem Netz 30 mögliche Behälterknoten. Wird dieses Netzmodell mit der Optimierung gelöst, so ergibt sich, dass die vier Behälter 279, 287, 289 und 295 gebaut werden sollen.

Auch bei diesem Netz werden mit unterschiedlichen Fehlerschranken unterschiedliche reduzierte Netzmodelle generiert. So hat das Netzmodell L02-Red(0,01) 126 Knoten und 171 Kanten bei einer Differenz durch die Reduktion von 0,0010 und das Netzmodell L02-Red(10,0) 107 Knoten sowie 152 Kanten bei einer Differenz von 4,2511. In Tabelle 6.3 ist zu erkennen, dass das Netzmodell L02-Red(0,01) innerhalb der vorgegebenen Zeitschranke nicht optimal gelöst werden konnte. Die bis dahin beste gefundene Lösung schlägt jedoch ebenfalls vor, die Behälter 279, 287, 289 und 295 zu bauen. Diese Lösung wurde mit dem originalen Netzmodell kombiniert und dem Simulationstool übergeben. Daraufhin konnten keine Unzulässigkeiten festgestellt werden. Dies zeigt, dass eine zulässige Lösung für das originale Netzmodell gefunden werden konnte. Das etwas kleinere Netzmodell L02-Red(10,0) konnte hingegen in 6063,34 Sekunden optimal gelöst werden. In diesem Fall sollen die Behälter 269, 279, 289 und 295 gebaut werden. Nach Übergabe an das Simulationstools weist diese Lösung jedoch zwölf Warnungen auf. Daraufhin wurde in diesem Modell ein Knoten für den nächsten Reduktionsschritt gesperrt. Das dadurch generierte Modell mit 108 Knoten und 153 Kanten konnte innerhalb von 4250,92 Sekunden gelöst werden. Die Lösung dieses Modells weist in Kombination mit dem originalen Netz keine weiteren Warnungen auf und hat als Lösung die gleichen Behälterknoten ausgewählt, wie in der Lösung des originalen Netzmodells. Somit konnte in diesem Fall eine zulässige Lösung gefunden werden, deren Zielfunktionswert nah an der dualen Schranke der von SCIP gefundenen Lösung liegt.

Es ist zu erkennen, dass das originale Netzmodell in der vorgegebenen Zeit nicht bis zum Optimum gelöst werden konnte. Die beiden Netzmodelle L02-Red(10,0) und L02-Red(10,0)-Modi1 konnten hingegen zusammen in einer deutlich geringeren Zeit gelöst werden. Bei diesem Netz ist also deutlich zu sehen, dass es sich lohnt, nur das reduzierte Netzmodell und ein eventuell modifiziertes reduziertes Netzmodell zu lösen. Jedoch fällt bei diesem Netz auch auf, dass es einen erheblichen Unterschied macht, ob die Version mit der Fehlerschranke 0,01 oder 10,0 gelöst wird.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Diff	Zeit
L02-Ori	380973,1757	-	-	-	86400,00
L02-Red(0,01)	385082,8917	-	0	0,0010	86400,00
L02-Red(10,0)	373235,5552	-	12	4,2511	6063,34
L02-Red(10,0)-Modi	378961,2780	-	0	-	4250,92
L02-S-Primal	41203988,2812	-	-	-	86400,00
L02-S-Dual	367365,8627	-	-	-	86400,00

Tabelle 6.3: Ergebnisse aus Reduktion, Optimierung, Simulation und Modifikation am Beispiel von Netz L02

## Zusammenfassung

In diesem Abschnitt konnte mit Hilfe der Netzmodelle M02 sowie L02 gezeigt werden, dass der Einsatz des Modifikationsschrittes auch einen zeitlichen Vorteil mit sich bringt. Bei Netz M02 wurde sowohl bei der Fehlerschranke 10,0 als auch bei der Fehlerschranke 0,01 ein Modifikationsschritt benötigt. Die Lösung der reduzierten und der modifizierten Version des Netzmodells benötigte insgesamt weniger Zeit als die Lösung des originalen Modells. Noch deutlicher zeigt sich die Effizienz des Modifikationsschrittes bei der Lösung des Netzes L02. In diesem Fall konnte das originale Netzmodell nicht in der vorgegebenen Zeit von 24 Stunden gelöst werden. Das reduzierte und modifizierte Netzmodell konnten hingegen zusammen in deutlich geringerer Zeit gelöst werden.

### 6.2.2 Ergebnisse der Netzmodelle, bei denen durch den Einsatz des Modifikationsschrittes kein zeitlicher Vorteil erreicht werden konnte

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Netze S06, S08 und S09 diskutiert, die nach Einsatz des Modifikationsschrittes entstanden sind.

#### Modifikationsschritt am Beispiel von Netz S06

Das originale Netzmodell von Netz S06 besitzt 14 Knoten und 13 Kanten. Von diesen Knoten sind 8 Knoten mögliche Behälterknoten. Wird das originale Netzmodell mit der Optimierung gelöst, so wird entschieden, dass nur der Behälter mit der ID 4 gebaut werden soll, welcher ein maximales Volumen von  $1158,84 \text{ m}^3$  fassen soll und eine Druckhöhe von  $97,19 \text{ m}$  besitzen soll. Nach Anwendung der Reduktionstechniken ergibt sich ein reduziertes Netzmodell mit 8 Knoten und 7 Kanten. Dies sind genau die 8 möglichen Behälterknoten. Die maximale hydraulische Abweichung *Diff* zwischen dem reduzierten und dem originalen Netz liegt unter  $1\text{E-}04$ , was Tabelle 6.4 zu entnehmen ist.

Wird das reduzierte Netzmodell mit der Optimierung gelöst, so wird ebenfalls entschieden, dass nur der Behälter 4 mit einem maximalen Volumen von  $1158,84 \text{ m}^3$  gebaut werden soll. In diesem Fall beträgt die Druckhöhe jedoch  $92,23 \text{ m}$ , was deutlich unter der Druckhöhe liegt, die durch die Optimierung des originalen Netzmodells berechnet wurde. Weiterhin ist in Tabelle 6.4 zu sehen, dass die relative Differenz des reduzierten Netzes mit 0,045 deutlich höher ist als beim originalen Netz. Werden nun die Informationen des reduzierten Netzmodells an das originale Netzmodell übergeben und ein Simulationslauf durchgeführt, so gibt das Simulationstool sechs Warnungen

zurück, was ebenfalls in Tabelle 6.4 zu erkennen ist. Diese Warnungen geben an, dass an sechs Knoten innerhalb des Netzes ein zu geringer Druck herrscht, um den benötigten Versorgungsdruck zu erreichen. Es wird nun der Knoten gesucht, an dem der Druck am niedrigsten ist. In diesem Fall ist dies der Knoten mit der ID *N21*. Dieser wird markiert und kann so für die Reduktion gesperrt werden. Nun wird das originale Netzmodell erneut reduziert, jedoch bleibt Knoten *N21* bestehen. Somit ergibt sich ein neues reduziertes Netzmodell, das 9 Knoten und 8 Kanten besitzt. Mit diesem wird ein neuer Optimierungslauf gestartet, bei dem ebenfalls Behälter 4 für den Bau ausgewählt wird. In diesem Fall jedoch mit einer Druckhöhe von 97,00 *m*. Die relative Differenz für dieses Ergebnis ist 0,004, also deutlich geringer als es bei dem ersten reduzierten Netzmodell der Fall war. Werden diese Informationen an das originale Netzmodell übergeben und ein neuer Simulationslauf durchgeführt, so werden keine Warnungen des Simulationstools zurückgegeben. Somit ist diese neue errechnete Lösung zulässig für das originale Netzmodell.

Die Lösungszeit für das reduzierte Netzmodell S06-Red(10,0) beträgt 0,21 Sekunden, während die Lösungszeit für das neue reduzierte Netzmodell S06-Red(10,0)-Modi mit 0,18 Sekunden angegeben wird. Das originale Netzmodell konnte in 0,24 Sekunden optimal gelöst werden. Bei diesem Netz konnte also nach Anwendung eines Modifikationsschrittes eine zulässige Lösung gefunden werden. Jedoch hat dieser Prozess insgesamt länger gedauert als die Lösung des originalen Netzmodells direkt zu berechnen.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Diff	Zeit
S06-Ori	24525,5615	0,006	-	-	0,24
S06-Red(10,0)	23276,7260	0,045	6	< 1E-04	0,21
S06-Red(10,0)-Modi	24476,5956	0,004	0	-	0,18
S06-S	24377,8030	-	-	-	0,09

Tabelle 6.4: Ergebnisse aus Reduktion, Optimierung, Simulation und Modifikation am Beispiel von Netz S06

### Modifikationsschritt am Beispiel von Netz S08

Die originale Version des Netzmodells von S08 besitzt 17 Knoten und 16 Kanten. Von diesen Knoten sind 10 mögliche Behälterknoten. Wird dieses mit der Optimierung gelöst, so wird entschieden, dass Behälter 8 existieren soll und ein maximales Volumen von 7616,84 *m*<sup>3</sup> bei einer Druckhöhe von 96,98 *m* besitzen soll.

Wird das reduzierte Netzmodell S08-Red(10,0) mit 11 Knoten und 10 Kanten optimiert, so gibt die Optimierung eine Lösung zurück, bei der die Behälter 2 und 8 gebaut

werden sollen. Diese sollen ein maximales Volumen von  $866,75 \text{ m}^3$  bzw.  $3688,82 \text{ m}^3$  bei Druckhöhen von  $44,14 \text{ m}$  bzw.  $46,97 \text{ m}$  besitzen. In Tabelle 6.5 fällt auf, dass der Zielfunktionswert dieses Netzes deutlich unter dem des originalen Netzmodells liegt, die maximale Differenz jedoch auch mit  $0,054$  im Vergleich zu  $0,004$  größer geworden ist. Wird die Lösung an das originale Netzmodell übergeben und ein Simulationslauf durchgeführt, so gibt das Simulationstool sechs Warnungen zurück, die bedeuten, dass an sechs Knoten eine zu geringe Druckhöhe herrscht. Auch bei diesem Netzmodell wird der Knoten mit dem geringsten Wert für die Druckhöhe identifiziert und für den nächsten Reduktionsdurchlauf gesperrt. In diesem Fall ist dies der Knoten  $N2$ . Nach erneuter Reduktion ergibt sich das Netzmodell S08-Red(10,0)-Modi mit 12 Knoten und 11 Kanten. Nach Anwendung der Optimierung wird festgestellt, dass Behälter 8 mit einem maximalen Volumen von  $7601,54 \text{ m}^3$  bei einer Druckhöhe von  $96,79 \text{ m}$  gebaut werden soll. Wird diese Lösung an das originale Netzmodell übergeben und durch das Simulationstool evaluiert, so wird festgestellt, dass keine Unzulässigkeiten mehr auftreten. Damit ist diese Lösung zulässig für das originale Netzmodell und besitzt mit einer maximalen Differenz von  $0,002$  einen besseren Wert als das originale Netzmodell. Nach Anwendung der Reduktionstechniken liegt die maximale Abweichung zwischen dem reduzierten und dem originalen Netzmodell unter  $1\text{E-}04$ , siehe Tabelle 6.5. Diese lieferte auch bei diesem Testnetz keinen Hinweis darauf, dass das reduzierte Netzmodell eine Lösung finden würde, die unzulässig im originalen Netzmodell ist.

Werden die benötigten Lösungszeiten betrachtet, so lässt sich feststellen, dass die beiden reduzierten Versionen des Netzes zwar etwas schneller gelöst werden konnten als das originale Netzmodell. Jedoch mussten in diesem Fall zwei reduzierte Netzmodelle gelöst werden, wodurch sich in diesem Fall erneut kein zeitlicher Vorteil gegenüber der Lösung des originalen Netzmodells ergeben hat.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Diff	Zeit
S08-Ori	38184,2219	0,004	-	-	0,17
S08-Red(10,0)	35979,1808	0,054	6	< 1E-04	0,15
S08-Red(10,0)-Modi	38107,7127	0,002	0	-	0,16
S08-S	38034,0672	-	-	-	0,15

Tabelle 6.5: Ergebnisse aus Reduktion, Optimierung, Simulation und Modifikation am Beispiel von Netz S08

### Modifikationsschritt am Beispiel von Netz S09

Das Netz S09 besitzt 18 Knoten und 17 Kanten, wobei sechs der Knoten mögliche Behälterknoten sind. Wird dieses originale Netzmodell gelöst, so wird festgestellt, dass die Behälter 1 und 6 gebaut werden sollen. Diese haben maximale Volumina von  $235,62 \text{ m}^3$  bzw.  $680,23 \text{ m}^3$  bei Druckhöhen von  $50,36 \text{ m}$  bzw.  $32,41 \text{ m}$ .

Wird das reduzierte Netzmodell S09-Red(10,0) mit 8 Knoten und 7 Kanten mit der Optimierung gelöst, so sollen ebenfalls die Behälter 1 und 6 gebaut werden, jedoch mit maximalen Volumina von  $148,75 \text{ m}^3$  und einer Druckhöhe von  $48,84 \text{ m}$  bzw.  $619,48 \text{ m}^3$  und  $30,00 \text{ m}$ . Diese Lösung hat eine relative Differenz von  $0,120$  im Vergleich zur gefundenen Lösung von SCIP. Dieser Wert ist deutlich höher als die relative Differenz von  $0,006$  des originalen Netzmodells, siehe Tabelle 6.6. Wird die gefundene Lösung an das Simulationstool übergeben, so werden neun Unzulässigkeiten festgestellt. Auch in diesem Fall sind dies zu niedrige Druckhöhen innerhalb des Netzes. An Knoten  $N4$  wurde der niedrigste Wert für die Druckhöhe festgestellt. Aus diesem Grund wird dieser Knoten markiert und für die Reduktion gesperrt, wodurch sich nach Anwendung der Reduktionstechniken ein neues reduziertes Netzmodell S09-Red(10,0)-Modi mit 10 Knoten und 9 Kanten ergibt. Die Lösung dieses Modells liefert ähnliche Ergebnisse wie das originale Netzmodell. Die relative Differenz dieses Netzes liegt bei  $0,003$  und die Simulation stellt nach der Kombination der Lösung und des originalen Netzmodells keine weiteren Unzulässigkeiten fest. Bei diesem Netz konnte im Vorfeld ebenfalls an der maximalen Abweichung von  $1\text{E-}04$ , die bei Anwendung der Reduktionstechniken entstanden ist, kein Hinweis darauf abgeleitet werden, dass in dem reduzierten Netzmodell Unzulässigkeiten auftreten würden.

Werden die Lösungszeiten der verschiedenen Versionen des Netzmodells miteinander verglichen, so ist auch bei diesem Netz zu erkennen, dass die reduzierten Versionen des Netzes deutlich schneller als das originale Netzmodell gelöst werden konnten. Jedoch brauchten die beiden reduzierten Versionen insgesamt eine längere Lösungszeit bis eine zulässige Lösung gefunden werden konnte als für die Berechnung einer Lösung für das originale Netzmodell benötigt wurde.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Diff	Zeit
S09-Ori	8280,4352	0,006	-	-	0,63
S09-Red(10,0)	7238,5084	0,120	9	< 1E-04	0,27
S09-Red(10,0)-Modi	8251,4835	0,003	0	-	0,53
S09-S	8228,2358	-	-	-	0,15

Tabelle 6.6: Ergebnisse aus Reduktion, Optimierung, Simulation und Modifikation am Beispiel von Netz S09

## Zusammenfassung

Anhand der Netzmodelle S06, S08 und S09 konnte gezeigt werden, dass mit Hilfe des Modifikationsschrittes für alle Netze eine zulässige Lösung für das originale Netzmodell gefunden werden konnte. Dafür wurde jeweils nur ein Modifikationsschritt benötigt, bei dem jeweils ein Knoten gesperrt wurde. Die Gesamtlösungszeit konnte durch den



Einsatz des Modifikationsschrittes jedoch nicht reduziert werden, da die kombinierte Lösungszeit für die Lösung der reduzierten und modifizierten Netzmodelle jeweils höher war als die Lösungszeit für das originale Netzmodell. Da die originalen Netzmodelle S06, S08 und S09 aufgrund der geringen Anzahl an Knoten und Kanten in sehr kurzer Zeit gelöst werden konnten, ist bei diesen Netzen auch keine große Reduktion der Gesamtlösungszeit zu erwarten gewesen.

### 6.2.3 Zusammenfassung der Ergebnisse nach Einsatz des Modifikationsschrittes

Die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte zeigen, dass die Modifikation ein wichtiges Werkzeug des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Lösungsprozesses ist. Wird eine Lösung mit Hilfe des reduzierten Netzmodells gefunden, so wird sie anschließend an das originale Netzmodell übergeben. Der Simulator überprüft im Anschluss daran, ob diese Lösung im originalen Netzmodell zulässig ist. Werden dabei Unzulässigkeiten festgestellt, so werden die Stellen, an denen diese auftreten, lokalisiert. Diese Stellen werden im originalen Netzmodell markiert und für eine erneute Reduktion gesperrt. Nach einer wiederholten Anwendung der Reduktion ergibt sich somit ein neues reduziertes Netzmodell, bei dem die als unzulässig identifizierten Stellen detaillierter betrachtet werden können. Dieses neue Netzmodell wird erneut durch die Optimierung gelöst und die so entstandene Lösung wieder mit Hilfe des Simulators evaluiert. Dieser Prozess wird so lange wiederholt, bis der Simulator eine Lösung als zulässig identifiziert. Dass dieses Vorgehen zu zulässigen Lösungen für das Behälteroptimierungsproblem führt, ist an den Ergebnissen der vergangenen Abschnitte zu sehen. Weiterhin ist an den Ergebnissen zu erkennen, dass dieser Prozess auch zeitlich der Lösung des originalen Netzmodells überlegen sein kann. Dies ist insbesondere bei den Netzen M02 und L02 zu sehen. Diese konnten mit Hilfe des reduzierten Netzmodells und jeweils eines neuen modifizierten Netzmodells schneller gelöst werden als das originale Netzmodell. Bei Netz L02 ist weiterhin festzustellen, dass für dieses Netz nur durch das im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Prozesses eine zulässige Lösung gefunden werden konnte. Für beide Netze lässt sich zudem feststellen, dass der Prozess ebenfalls schneller eine Lösung lieferte als der Vergleichslöser SCIP.

Im nächsten Abschnitt sollen die Auswirkungen der Linearisierungsschranke und der Reduktionsschranke auf die gefundene Lösung anhand von zwei Testnetzen im Detail untersucht werden.

### 6.3 Auswirkungen von Linearisierungsschranke und Reduktionsschranke

In diesem Abschnitt sollen anhand von zwei Netzmodellen die Auswirkungen der Linearisierungsschranke und der Reduktionsschranke auf die gefundene Lösung bei Anwendung des gesamten Prozesses untersucht werden. Dazu werden verschiedene Belegungen der beiden Schranken untersucht. Die Linearisierungsschranke soll dabei die verschiedenen Werte 3,0, 0,3, 0,003 und 0,0003 annehmen, während die Reduktionsschranke die Werte 10,0, 0,01 und 0,0001 besitzen kann. Es werden im Folgenden exemplarisch die Netze S08 und M02 untersucht. Dabei wird bei Netz S08 insbesondere die Auswirkung der Linearisierungsschranke und bei Netz M02 die Auswirkung der Reduktionsschranke im Detail untersucht.

#### 6.3.1 Ergebnisse der Auswirkungen der Linearisierungsschranke

Bei Netz S08 haben die verschiedenen Schranken bei Anwendung der Reduktionstechniken keinen Einfluss auf das reduzierte Netz, da die maximale Abweichung zwischen dem originalen und dem reduzierten Netzmodell kleiner als  $1E-04$  ist. Daher kann bei diesem Netz nur der Einfluss der Schranke für die Linearisierung untersucht werden. In Tabelle 6.7 ist zu erkennen, dass die Genauigkeit der Linearisierung keinen Einfluss auf die Anzahl der Warnungen hat, die von der Simulation zurückgegeben werden. Bei allen Belegungen wurden sechs Unzulässigkeiten durch die Simulation festgestellt. Ein Unterschied ist bei der relativen Differenz der reduzierten Netzmodelle Red(10,0)-Modi-x zu erkennen, die sich bei zunehmender Genauigkeit erwartungsgemäß verringert. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Lösungszeit bei zunehmender Genauigkeit zunimmt, was sich durch die zusätzlich benötigten Variablen und Nebenbedingungen für die Linearisierung erklären lässt. Bei einer Genauigkeit von 0,003 konnten das reduzierte und das modifizierte Netzmodell schneller gelöst werden als das originale Netzmodell. Bei allen anderen Belegungen der Genauigkeit konnte dieses zeitliche Vorteil nicht festgestellt werden. Ein ähnliches Verhalten bei Änderung der Linearisierungsschranke konnte auch bei anderen Netzen der hier genutzten Testinstanzen festgestellt werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass für Netz S08 eine Linearisierungsschranke zwischen 0,03 und 0,003 gewählt werden sollte, da damit eine Lösung nah an der optimalen Lösung erreicht werden kann und diese in annehmbarer Zeit gefunden werden kann. Für größere Netzmodelle kann jedoch aufgrund der zu erwartenden Lösungszeit eine etwas höhere Schranke sinnvoll sein.

Meth.	ZF-Wert	RelDiff	Warn	Knoten	Kanten	Zeit
Ori-3,0	39922,5556	0,050	-	17	16	0,13
Red(10,0)-3,0	36785,3152	0,033	6	11	10	0,12
Red(10,0)-Modi-3,0	39626,1691	0,042	0	12	11	0,12
Ori-0,3	38184,2219	0,004	-	17	16	0,17
Red(10,0)-0,3	35979,1808	0,054	6	11	10	0,15
Red(10,0)-Modi-0,3	38107,7127	0,002	0	12	11	0,16
Ori-0,03	38049,5135	< 1E-04	-	17	16	0,45
Red(10,0)-0,03	35966,6129	0,054	6	11	10	0,40
Red(10,0)-Modi-0,03	38046,8970	< 1E-04	0	12	11	0,40
Ori-0,003	38036,3816	< 1E-04	-	17	16	3,22
Red(10,0)-0,003	35962,1303	0,054	6	11	10	1,58
Red(10,0)-Modi-0,003	38034,8648	< 1E-04	0	12	11	1,59
S	38034,0672	-	-	17	16	0,15

Tabelle 6.7: Auswirkung der Linearisierungsschranke am Beispiel von Netz S08

### 6.3.2 Ergebnisse der Auswirkungen der Linearisierungsschranke und der Reduktionsschranke

In den Tabellen 6.8 bis 6.11 sind die Ergebnisse für die verschiedenen Belegungen der Genauigkeit und der Reduktionsschranke am Beispiel von Netz M02 zu sehen. Die verschiedenen Tabellen zeigen die Ergebnisse für unterschiedliche Genauigkeiten. Wie auch bei Netz S08 lässt sich hier feststellen, dass bei zunehmender Genauigkeit die Lösungszeit ansteigt und die relative Differenz sinkt.

In Tabelle 6.8 sind die Ergebnisse zu sehen, die bei einer oberen Schranke für die Linearisierung von 3,0 entstanden sind. Es ist zu erkennen, dass nur bei einer Reduktionsschranke von 10,0 eine Warnung von der Simulation zurückgegeben wird. Bei den Schranken 0,01 und 0,001 hingegen werden keine Unzulässigkeiten festgestellt. Dies zeigt, dass durch eine höhere Genauigkeit bei der Aggregation eine genauere Approximation des originalen Netzes entsteht und somit unzulässige Werte vermieden werden können. Es ist auch zu erkennen, dass die Lösungszeit des Netzmodells M02-Red(0,001) im Vergleich zu der Lösungszeit der beiden Netzmodelle M02-Red(10,0) und M02-Red(10,0)-Modi zusammen sich nicht wesentlich unterscheidet. Daher scheint es in diesem Fall keinen Unterschied zu machen, ob das genauer approximiert Netzmodell gelöst wird oder das etwas gröber approximiert Netzmodell mit einem zusätzlichen Modifikationsschritt. Es bleibt also abzuwägen, ob das Netzmodell etwas höhere Abweichungen besitzen darf und damit die Lösungszeit reduziert wird, dafür aber in Kauf genommen wird, dass eventuell mehr Iterationen benötigt werden oder ob durch eine höhere Genauigkeit bei der Reduktion ein größeres reduziertes Netzmodell entsteht,

das eine höhere Lösungszeit benötigt, jedoch eventuell keine Unzulässigkeiten aufweist und damit kein Modifikationsschritt benötigt wird.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Knoten	Kanten	Zeit
Ori	72712,7456	0,017	-	30	31	0,41
Red(10,0)	71314,2938	0,002	1	15	15	0,24
Red(10,0)-Modi	72631,4135	0,016	0	16	16	0,21
Red(0,01)	71945,7663	0,006	0	16	16	0,26
Red(0,001)	72712,7456	0,017	0	26	27	0,38
S	71492,8293	-	-	30	31	2,16

Tabelle 6.8: Auswirkung der Reduktionsschranke am Beispiel von Netz M02 mit einer Linearisierungsschranke von 3,0

In den Tabellen 6.9 und 6.10 sind die Ergebnisse zu finden, die bei einer Linearisierungsgenauigkeit von 0,3 bzw. 0,03 entstanden sind. Die Ergebnisse der beiden Tabellen zeigen ein ähnliches Bild. In beiden Fällen weisen alle drei reduzierten Versionen der Netzmodelle nach der ersten Lösung des Optimierungsmodells eine Warnung auf, die durch Sperrung eines Knotens jeweils behoben werden können. In den meisten Fällen lag die kumulierte Lösungszeit der beiden reduzierten Versionen des Netzmodells unter der Lösungszeit, die zur Lösung des originalen Netzmodells benötigt wurde. Eine große Abweichung gibt es jedoch bei den Netzmodellen M02-Red(0,0001) und M02-Red(0,0001)-Modi bei einer Linearisierungsgenauigkeit von 0,03. Die beiden Netzmodelle zusammen benötigten 12,71 Sekunden zur Lösung, während das originale Netzmodell schon in 7,12 Sekunden gelöst werden konnte. Hier scheint es sich aufgrund des zusätzlichen Modifikationsschrittes also nicht positiv auszuwirken, wenn eine möglichst kleine Schranke bei der Reduktion gewählt wird.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Knoten	Kanten	Zeit
Ori	71541,0796	0,001	-	30	31	1,56
Red(10,0)	71295,9848	0,003	1	15	15	0,37
Red(10,0)-Modi	71528,1714	< 1E-04	0	16	16	0,61
Red(0,01)	71296,6635	0,003	1	16	16	0,62
Red(0,01)-Modi	71534,8537	0,001	0	17	17	0,60
Red(0,0001)	71317,6259	0,002	1	26	27	0,88
Red(0,0001)-Modi	71545,5398	0,001	0	27	28	0,85
S	71492,8293	-	-	30	31	2,16

Tabelle 6.9: Auswirkung der Reduktionsschranke am Beispiel von Netz M02 mit einer Linearisierungsschranke von 0,3

Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Knoten	Kanten	Zeit
Ori	71547,4601	0,001	-	30	31	7,12
Red(10,0)	71029,8942	0,006	1	15	15	3,66
Red(10,0)-Modi	71525,1319	< 1E-04	0	16	16	3,87
Red(0,01)	71171,9056	0,004	1	16	16	3,94
Red(0,01)-Modi	71537,3435	0,001	0	17	17	5,40
Red(0,0001)	71183,7476	0,004	1	26	27	6,12
Red(0,0001)-Modi	71555,3619	0,001	0	27	28	6,59
S	71492,8293	-	-	30	31	2,16

Tabelle 6.10: Auswirkung der Reduktionsschranke am Beispiel von Netz M02 mit einer Linearisierungsschranke von 0,03

Tabelle 6.11 zeigt die Ergebnisse für Netz M02 bei einer Genauigkeit der Linearisierung von 0,003. Dabei ergeben sich bei den verschiedenen Reduktionsschranken unterschiedliche Ergebnisse. Wird eine obere Grenze für die Reduktion von 10,0 gewählt, so ist zu erkennen, dass das reduzierte Netzmodell M02-Red(10,0), das 15 Knoten und Kanten besitzt, eine Warnung aufweist. Die Sperrung eines Knotens hat auf diese Unzulässigkeit keinen Einfluss, da auch bei Netzmodell M02-Red(10,0)-Modi1 mit 16 Knoten und Kanten eine Warnung durch die Simulation zurückgegeben wird. Insgesamt sind 10 Modifikationsschritte nötig, bis mit M02-Red(10,0)-Modi10 ein Netzmodell generiert wurde, das keine Warnungen mehr enthält. Durch die zehn benötigten Modifikationsschritte ergibt sich eine Gesamtlösungszeit von 865,86 Sekunden, die im Vergleich zum originalen Netzmodell mit einer Lösungszeit von 115,59 deutlich höher liegt.

Werden die Ergebnisse bei einer Reduktionsschranke von 0,01 betrachtet, so ergibt sich ein ähnliches Bild. Hier wird für das Netzmodell M02-Red(0,01) mit 16 Knoten und Kanten ebenfalls eine Warnung zurückgegeben. Anschließend müssen sieben Modifikationsschritte durchgeführt werden, bis ein Netzmodell generiert werden kann, das keine Unzulässigkeiten mehr aufweist. Insgesamt werden für diesen Prozess 635,62 Sekunden benötigt. Diese Zeit liegt zwar deutlich unter der Zeit, die bei einer Reduktionsschranke von 10,0 benötigt wurde, jedoch höher als die Lösungszeit des originalen Netzmodells.

Wird hingegen eine Reduktionsschranke von 0,0001 betrachtet, so ist festzustellen, dass in diesem Fall nur ein Modifikationsschritt nötig ist, um ein zulässiges Netzmodell zu generieren. In diesem Fall liegt die gesamte Lösungszeit bei 165,35 Sekunden. Die Ergebnisse dieser Tabelle zeigen, dass die relative Differenz bei allen Netzen, die eine zulässige Lösung generieren, unter 1E-04 liegt.

Weiterhin ist zu erkennen, dass bei einer höheren Genauigkeit der Reduktion eine genauere Approximation des Netzmodells entsteht. Diese führt nach weniger Modifikationsschritten zu einem zulässigen Netzmodell als es bei einem Netzmodell mit einer

niedrigeren Genauigkeit der Fall ist. Somit lässt sich schließen, dass es vorteilhaft sein kann, eine hohe Genauigkeit zu wählen, die zwar zu höheren Lösungszeiten für ein einzelnes Netzmodell führen kann. Jedoch können dadurch möglicherweise einige Modifikationsschritte eingespart werden.

Name	ZF-Wert	RelDiff	Warn.	Knoten	Kanten	Zeit
Ori	71497,8387	< 1E-04	-	30	31	115,59
Red(10,0)	71019,0025	0,007	1	15	15	31,87
Red(10,0)-Modi1	71475,4437	< 1E-04	1	16	16	42,28
Red(10,0)-Modi2	71478,0018	< 1E-04	1	17	17	37,52
...						
Red(10,0)-Modi10	71499,7876	< 1E-04	0	29	30	99,01
Red(0,01)	71149,0597	0,005	1	16	16	31,00
Red(0,01)-Modi1	71487,8131	< 1E-04	1	17	17	52,21
Red(0,01)-Modi2	71487,7660	< 1E-04	1	18	18	42,49
...						
Red(0,01)-Modi7	71493,4588	< 1E-04	0	24	25	114,95
Red(0,0001)	71170,5045	0,005	1	26	27	91,99
Red(0,0001)-Modi	71505,8637	< 1E-04	0	27	28	73,36
S	71492,8293	-	-	30	31	2,16

Tabelle 6.11: Auswirkung der Reduktionsschranke am Beispiel von Netz M02 mit einer Linearisierungsschranke von 0,003

Werden die Ergebnisse der Tabellen 6.8 bis 6.11 miteinander verglichen, so fällt auf, dass erst bei einer Linearisierungsgenauigkeit von 0,003 mehrere Modifikationsschritte nötig sind. Dies ist damit zu erklären, dass die Ergebnisse der Optimierung bei dieser Genauigkeit sehr nah an der optimalen Lösung liegen und nur kleine Toleranzen zulässig sind. Da jedoch auch Abweichungen auftreten können, die die Lösung unzulässig werden lassen, wenn diese im originalen Netzmodell betrachtet wird, kann es hier öfter auftreten, dass die Simulation Warnungen zurückgibt. Bei einer geringeren Genauigkeit hat die Lösung mehr Spielraum und führt daher zu weniger Unzulässigkeiten. Insgesamt ist zu erkennen, dass eine Lösung mithilfe des hier vorgestellten Ansatzes sich gegenüber der Lösung mit SCIP bei diesem Netz nur bis zu einer Genauigkeit der Linearisierung von 0,03 auszahlt, da sonst zu hohe Lösungszeiten zu erwarten sind. Für die Reduktionsschranke empfiehlt es sich, einen Wert zwischen 0,01 und 0,0001 zu wählen, um eine Gesamtlösungszeit zu erreichen, die unter der Lösungszeit des originalen Netzmodells liegt.

Soll der Lösungsprozess auf ein beliebiges Modell angewendet werden, so stellt sich insgesamt bei der Wahl der Parametereinstellungen die Frage, ob eine Lösung schnell errechnet werden soll und daher eine hohe Schranke für die Genauigkeit der Linearisie-

rung und der Reduktion gewählt werden sollte. Oder ob eine möglichst genaue Lösung generiert werden sollte und daher niedrige Werte für die Genauigkeit der Linearisierung und der Reduktion gewählt werden sollen, dadurch aber möglicherweise mehr Zeit für den Lösungsprozess benötigt wird. Die beste Belegung der Parameter hängt maßgeblich von der Größe des zugrundeliegenden Netzmodells ab. Sinnvoll erscheint es, bei großen Netzmodellen die Linearisierungsschranke relativ hoch zu wählen, um eine Lösung in annehmbarer Zeit berechnen zu können. Die Reduktionsschranke sollte zwischen 0,01 und 10,0 gewählt werden. Für hohe Reduktionsschranken wird die Zulässigkeit der Lösung durch den hier vorgestellten Lösungsprozess, insbesondere durch den Modifikationsschritt, sichergestellt.

## 6.4 Fazit und Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde zunächst das Simulationstool Roka3 und dessen Einsatz im Rahmen des hier vorgestellten Lösungsprozesses beschrieben. Die Simulation soll dazu dienen, um festzustellen, ob eine Lösung, die nach Optimierung des reduzierten Netzmodells generiert wurde, auch zulässig ist, wenn sie an das originale Netzmodell übertragen wird. Anhand der Ergebnisse in Abschnitt 6.1.2 konnte gezeigt werden, dass es einige Netzmodelle gibt, bei denen nach der Übertragung der Lösung im originalen Netzmodell Unzulässigkeiten auftreten. In Abschnitt 6.2 wurde daher ein Modifikationsschritt vorgestellt, der dafür sorgt, dass eine zulässige Lösung für diese Netzmodelle gefunden werden kann. Anhand mehrerer Testnetze wurde dieser Schritt dargestellt und herausgestellt, dass dieser Schritt in vielen Fällen effizienter ist als die Lösung des originalen Netzmodells. Weiterhin wurden in Abschnitt 6.3 die Auswirkungen der Schranken für die Linearisierung und der Reduktion untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass eine hohe Genauigkeit der Linearisierung einerseits zu genaueren Zielfunktionswerten führt. Jedoch wurde andererseits gezeigt, dass dies eine höhere Lösungszeit mit sich bringt. Weiterhin kann eine höhere Genauigkeit der Linearisierung bei den reduzierten Netzen dazu führen, dass schneller Unzulässigkeiten auftreten. Bei der Schranke für die Reduktion konnte festgestellt werden, dass sich eine hohe Genauigkeit positiv auf die Lösung auswirkt, da oft weniger Unzulässigkeiten auftreten als bei höheren Reduktionsschranken. Da in diesem Fall jedoch das Netzmodell nicht so stark reduziert werden kann, führt dies zu höheren Lösungszeiten der einzelnen Netzmodelle.

Insgesamt konnte in diesem und in den vorangegangenen Kapiteln gezeigt werden, dass mit dem im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Lösungsprozess für jedes Netzmodell in unter 24 Stunden eine zulässige Lösung generiert werden konnte. Dabei sind sowohl die Anwendung der Reduktionstechniken als auch die Nutzung des Simulationstools und die Durchführung des Modifikationsschrittes von großer Bedeutung für

die Bestimmung dieser Lösung. Es hat sich zudem gezeigt, dass das Verfahren sich als sehr effizient erweist, da insbesondere bei den großen Netzmodellen schneller eine Lösung gefunden werden konnte als es mit dem Vergleichslöser SCIP oder bei Lösung des originalen Netzmodells der Fall gewesen ist.



## 7 Zusammenfassung und Ausblick

### 7.1 Zusammenfassung

Das Hauptziel dieser Arbeit war die Konzeption, Entwicklung und Analyse eines Lösungsprozesses, der bei der Planung des Baus von Trinkwasserbehältern in einem Wasserversorgungssystem eingesetzt werden kann. Dabei sollte die Planungsaufgabe der Behälteroptimierung möglichst realitätsnah abgebildet werden und für praxisrelevante Netzgrößen eine kostenminimale Lösung in annehmbarer Zeit gefunden werden. In den verschiedenen Kapiteln der vorliegenden Arbeit wurden die einzelnen Komponenten und Methoden des Lösungsprozesses vorgestellt.

In Abschnitt 4.1 wurde ein Optimierungsmodell entwickelt, das die Planungsaufgabe abbildet. Dabei bestimmt das entwickelte Optimierungsmodell, an welcher Stelle in einem Wasserversorgungssystem ein Behälter existieren soll. Es kann entschieden werden, ob Behälter neu gebaut werden sollen oder bestehende Behälter weiter existieren sollen. Die Dimensionen aller Behälter werden dabei ebenfalls bestimmt. Aufgrund der hydraulischen Eigenschaften, die innerhalb eines Wasserversorgungssystems berücksichtigt werden müssen, wurde das Optimierungsmodell als nicht-konvexes MIQCP formuliert. Damit konnte das in dieser Arbeit definierte 2. Ziel, die Entwicklung und Umsetzung eines Optimierungsmodells zur Planung des Baus von Trinkwasserbehältern, erreicht werden.

Um das entwickelte Optimierungsmodell zu lösen, wurden in den Abschnitten 4.3 und 4.4 unterschiedliche Lösungstechniken vorgestellt und diskutiert. Insbesondere wurden verschiedene Möglichkeiten präsentiert, um die nichtlineare Druckverlustgleichung zu linearisieren. Anhand der numerischen Ergebnisse in Abschnitt 4.4 wurde festgestellt, dass die uniforme Verteilung der Stützstellen sich als effizienter gegenüber den anderen Methoden erweist. Um die Qualität der Lösung zu überprüfen, wurden die Modelle ebenfalls mit SCIP gelöst. Dabei konnte festgestellt werden, dass die gefundenen Lösungen sehr nah an der optimalen Lösung liegen, die durch SCIP gefunden wurde. Bei größeren Netzmodellen konnte SCIP keine optimale Lösung innerhalb der vorgegebenen Zeitschranke von 24 Stunden finden. In diesen Fällen wurden die primale und duale Schranke für den Vergleich genutzt. Dabei konnte festgestellt werden, dass die mit der Linearisierung gefundenen Lösungen sehr nah an der dualen Schranke liegen, die von SCIP zurückgegeben wurde. Dies deutet darauf hin, dass es sich bei der gefun-

denen Lösung um eine gute Lösung handelt. Insgesamt konnte damit das formulierte 3. Ziel, die Auswahl einer geeigneten Lösungsmethode zur Lösung des entwickelten Optimierungsmodells, erreicht werden.

Weiterhin haben die Ergebnisse des Abschnitts 4.4 gezeigt, dass die Optimierungsmodelle einiger Netze auch mit Hilfe der Linearisierungsmethoden nicht in der vorgegebenen Zeitschranke optimal gelöst werden konnten. Aus diesem Grund wurden in Abschnitt 5.1 drei Techniken vorgestellt, die genutzt werden können, um die Anzahl der Knoten und Kanten in einem Netzmodell zu reduzieren. Diese Techniken sind die Eliminierung von Endknoten, die Eliminierung von parallelen Rohren sowie die Eliminierung von Rohrsequenzen. Die numerischen Ergebnisse in Abschnitt 5.2 haben gezeigt, dass die Anzahl der Knoten und Kanten mit diesen drei Techniken bei vielen Netzmodellen stark reduziert werden konnte. Wurde mit diesen reduzierten Netzmodellen ein Optimierungsmodell erstellt und anschließend gelöst, so konnte gezeigt werden, dass diese in kürzerer Zeit gelöst werden können als die originalen Netzmodelle, siehe Abschnitt 5.3. In Kapitel 5 konnte insgesamt das 4. Ziel, die Auswahl und Analyse von geeigneten Netzreduktionstechniken zur Reduktion der Knoten und Kanten eines Netzmodells, erreicht werden.

Da jedoch sowohl durch die Linearisierung als auch durch die Reduktionstechniken Abweichungen in der Genauigkeit bzw. den hydraulischen Eigenschaften entstehen können, stellte sich die Frage, ob die Lösung, die durch die Optimierung des reduzierten Netzmodells entstanden ist, zulässig ist, wenn sie auf das originale Netzmodell übertragen wird. Aus diesem Grund wurde in Abschnitt 6.1 ein Simulator vorgestellt, mit dem die gefundene Lösung des reduzierten Netzmodells im originalen Netzmodell evaluiert werden kann. Anhand der numerischen Ergebnisse des Abschnitts 6.1.2 konnte festgestellt werden, dass bei einigen Netzen Unzulässigkeiten im originalen Netzmodell aufgetreten sind, wenn die Lösung des reduzierten Netzmodells an dieses übertragen wurde. Um dennoch eine zulässige Lösung für diese Netzmodelle finden zu können, ohne das originale Netzmodell lösen zu müssen, wurde in Abschnitt 6.2 ein Modifikationsschritt vorgestellt. In diesem Schritt werden die unzulässigen Stellen im originalen Netzmodell gesucht und die Knoten, an denen die Unzulässigkeiten aufgetreten sind, markiert. Diese Markierung wurde während eines erneuten Reduktionsdurchlaufes genutzt, um diese Stellen für die Reduktion zu sperren. Dadurch sind neue reduzierte Netzmodelle entstanden, aus denen erneut Optimierungsmodelle generiert werden konnten. Mit diesen wurde eine neue Lösung erzeugt und wieder an das originale Netzmodell übergeben. Bei allen Netzmodellen konnte nach einem oder mehreren Modifikationsschritten eine Lösung als zulässig evaluiert werden und der Lösungsprozess beendet werden. Für die Netzmodelle, für die mit SCIP eine optimale Lösung gefunden werden konnte, konnte zudem gezeigt werden, dass die gefundene Lösung sehr nah an der optimalen Lösung liegt. Für die anderen Netzmodelle konnte festgestellt werden, dass die gefundenen Lösungen oft nah an der dualen Schranke

liegen, die von SCIP gefunden wurde, was auf eine gute Lösungsqualität hindeutet. Insgesamt konnte so für jedes Netz eine zulässige Lösung gefunden werden und das im Rahmen der Arbeit definierte 5. Ziel, die Konzeption und Analyse eines Prozesses zur Evaluation der im reduzierten Netzmodell gefundenen Lösung und zur Modifikation des Netzmodells im Falle von Unzulässigkeiten, erreicht werden.

In Abschnitt 6.3 wurde zusätzlich der Einfluss der Linearisierungsschranke sowie der Reduktionsschranke untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass durch eine hohe Genauigkeit bei der Linearisierung eine genauere Lösung bestimmt werden kann. Jedoch geht dies mit einer Erhöhung der Lösungszeit einher. Eine große Reduktionsschranke wirkt sich hingegen positiv auf die Lösungszeit aus. Jedoch kann es passieren, dass dadurch größere Abweichungen in den hydraulischen Eigenschaften entstehen und somit Unzulässigkeiten auftreten und somit ein oder mehrere Modifikationsschritte notwendig sind. Es bleibt daher abzuwägen, ob eher große Schranken für die Linearisierung und die Reduktion gewählt werden sollten, um möglichst geringe Lösungszeiten zu erreichen oder ob niedrige Schranken gewählt werden sollten, um möglichst genaue Lösungen zu erhalten. Im ersten Fall kann es jedoch dann passieren, dass ein oder mehrere Modifikationsschritte durchgeführt werden müssen, was sich wiederum negativ auf die Lösungszeit auswirkt. In vielen Fällen liegt die Lösungszeit, die für den Gesamtprozess benötigt wurde, jedoch auch dann immer noch unter der Lösungszeit, in der das originale Modell gelöst werden konnte.

Insgesamt konnte in den einzelnen Kapiteln herausgestellt werden, dass alle Schritte des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Lösungsprozess notwendig sind, um die Problemstellung für alle Testnetze in unter 24 Stunden lösen zu können. Insbesondere der Einsatz der Reduktionstechniken hat sich als sehr effizient erwiesen, da durch Anwendung dieser Techniken die Größe des Optimierungsmodells und damit die benötigte Lösungszeit deutlich reduziert werden konnte. Um Unzulässigkeiten der gefundenen Lösung festzustellen, hat sich der hydraulische Simulator als wichtiger Bestandteil des Lösungsprozesses gezeigt. Der danach erforderliche Modifikationsschritt sorgte dafür, dass dennoch eine zulässige Lösung für jedes Netzmodell gefunden werden konnte. Insgesamt wurde zudem festgestellt, dass das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Lösungsverfahren sich in vielen Fällen als vorteilhaft gegenüber der Lösung mit SCIP und der Lösung des originalen Netzmodells erweist. Insgesamt konnte somit das in dieser Arbeit formulierte Hauptziel, die Konzeption, Entwicklung und Analyse eines Lösungsprozesses, der bei der Planung von Trinkwasserbehältern Einsatz findet, erreicht werden.

### 7.2 Ausblick

Der im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Lösungsprozess kann an einigen Stellen zukünftig weiterentwickelt werden. So kann beispielsweise das Optimierungsmodell erweitert werden, sodass auch Behälter beliebiger Grundfläche betrachtet werden. Zudem wäre es denkbar, auch weitere Komponenten eines Wasserversorgungssystems in das Optimierungsmodell zu integrieren, wie beispielsweise Ventile oder Pumpen. Auch netzwerkbasierte Regeln können in einer späteren Version des Modells Berücksichtigung finden. In der jetzigen Version des Modells wird die Nachfrage nach Wasser als konstant angenommen. Um eine bessere Annäherung an die Realität zu gewährleisten, könnte die Nachfrage auch als stochastischer Parameter in das Modell einfließen. Dann sollte das Modell als zweistufiges stochastisches Modell formuliert werden. Ansätze für diese Vorgehensweise finden sich beispielsweise bei der Optimierung von Gasnetzwerken, wie z. B. in [Koberstein et al., 2011].

Bei den Linearisierungstechniken kann insbesondere die Wahl des Definitionsbereiches der zu linearisierenden Funktion genauer untersucht werden. Hier gilt es, einen Bereich zu wählen, der so groß ist, dass keine zulässige Lösung abgeschnitten wird, jedoch so klein, dass die eingesetzten Stützstellen die Funktion möglichst genau abbilden. Hier kann eine effizientere Wahl des Bereiches zu einer Reduktion der Lösungszeit führen.

Die Netzreduktion kann um weitere Techniken erweitert werden, sodass beispielsweise kleine Teile eines Netzmodells zu einem Knoten zusammengefasst werden, wie beispielsweise in [Ríos-Mercado et al., 2002] vorgestellt wird. Eine weitere mögliche Reduktionstechnik ist die Zusammenfassung von Knoten, die sehr nah beieinander liegen, wie in [Maschler und Savic, 1999], S. 20, vorgestellt wird. Weiterhin ist dort eine Technik beschrieben, die Knoten mit ähnlichen Druckhöhen zusammenfasst sowie eine Technik, die Rohre mit einem sehr niedrigen Widerstandsbeiwert zusammenfasst. Mit diesen Techniken kann jedoch nicht sichergestellt werden, dass die hydraulischen Eigenschaften des originalen und des reduzierten Netzmodells ähnlich zueinander sind. Daher gewinnt bei Einsatz dieser Techniken der Modifikationsschritt noch weiter an Bedeutung und kann weiter untersucht und analysiert werden.

Auch der Modifikationsschritt weist Weiterentwicklungspotential auf. In der jetzigen Umsetzung wird in dem Modifikationsschritt der Knoten gesperrt, bei dem die Unzulässigkeit mit dem größten Einfluss aufgetreten ist. Falls mehr als ein Modifikationsschritt durchgeführt wird, ist es jedoch denkbar, dass auch die Sperrung eines anderen Knotens sinnvoll ist. Damit können möglicherweise mehrere Iterationen der Modifikation gespart werden. Weiterhin sollte ebenfalls analysiert werden, ob es bei mehreren Modifikationsschritten effizienter ist, wenn statt einem Knoten pro Modifikationsschritt mehrere Knoten gesperrt werden. Auch kann der Einfluss der Reihenfolge der gesperrten Knoten analysiert werden.

Es sollte außerdem untersucht werden, ob das hier vorgestellte Konzept sich auf andere Problemstellungen übertragen lässt. Insbesondere bei Problemstellungen, denen eine Netzwerkstruktur zugrunde liegt, scheint eine Anwendung dieses Verfahrens sinnvoll, da durch die Nutzung von Netzreduktionstechniken die Größe der Netzmodelle in den meisten Fällen stark reduziert werden kann. Zum einen kommen in diesem Fall weitere Fragestellungen aus dem Bereich der Wasserversorgungsnetze in Frage, wie z. B. die Optimierung von Pumpeneinsatzplänen oder Fragestellungen in der Layoutplanung eines Netzes. Zum anderen sind zudem auch Optimierungsfragestellungen im Gas- oder Strombereich denkbar.



## Literaturverzeichnis

- [Alperovits und Shamir, 1977] Alperovits, E. und Shamir, U. (1977). Design of optimal water distribution systems. *Water Resources Research*, 13(6):885–900.
- [Barakat und Altoubat, 2009] Barakat, S. A. und Altoubat, S. (2009). Application of evolutionary global optimization techniques in the design of RC water tanks. *Engineering Structures*, 31(2):332–344.
- [Basile et al., 2008] Basile, N., Fuamba, M., und Barbeau, B. (2008). Optimization of water tank design and location in water distribution systems. *Proceedings of the 10th Annual Water Distribution Systems Analysis Conference 2008*.
- [Baumgarten, 2014] Baumgarten, C. (2014). Wassersparen in Privathaushalten: sinnvoll, ausgereizt, übertrieben?: Fakten, Hintergründe, Empfehlungen. *Umweltbundesamt*.
- [Bentley, 2015] Bentley (2015). Watercad. <http://www.bentley.com/en-US/Products/WaterCAD/>. Letzter Zugriff am 10.07.2015.
- [Berthold et al., 2012] Berthold, T., Heinz, S., und Vigerske, S. (2012). *Extending a CIP framework to solve MIQCPs*. Springer.
- [Biscos et al., 2004] Biscos, C., Mulholland, M., Lann, M.-V. L., Buckley, C. A., und Brouckaert, C. (2004). Optimal operation of water distribution networks by predictive control using MINLP. *Water SA*, 29(4):393–404.
- [Bonami et al., 2008] Bonami, P., Biegler, L. T., Conn, A. R., Cornuéjols, G., Grossmann, I. E., Laird, C. D., Lee, J., Lodi, A., Margot, F., Sawaya, N., und Wächter, A. (2008). An algorithmic framework for convex mixed integer nonlinear programs. *Discrete Optimization*, 5(2):186–204.
- [Boulos et al., 2006] Boulos, P. F., Lansley, K. E., und Karney, B. W. (2006). *Comprehensive water distribution systems analysis - Handbook for engineers and planners*. MWH Soft.
- [Brackemann et al., 2000] Brackemann, H., Epperlein, K., Grohmann, A., Höring, H., Kühleis, C., Lell, O., Rechenberg, J., und Weiß, N. (2000). Liberalisierung der deutschen Wasserversorgung - Auswirkungen auf den Gesundheits- und Umwelt-

- schutz, Skizzierung eines Ordnungsrahmens für eine wettbewerbliche Wasserwirtschaft. *Text 2/00 des Umweltbundesamtes*.
- [Bragalli et al., 2006] Bragalli, C., D’Ambrosio, C., Lee, J., Lodi, A., und Toth, P. (2006). A MINLP solution method for a water network problem. *Algorithms-ESA 2006, Springer Berlin Heidelberg*, Seiten 696–707.
- [Bragalli et al., 2012] Bragalli, C., D’Ambrosio, C., Lee, J., Lodi, A., und Toth, P. (2012). On the optimal design of water distribution networks: A practical MINLP approach. *Optimization and Engineering*, 13(2):219–246.
- [Bronstein et al., 2008] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G., und Mühlig, H. (2008). *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch.
- [Burgschweiger et al., 2004] Burgschweiger, J., Gnädig, B., und Steinbach, M. C. (2004). Optimization models for operative planning in drinking water networks. *ZIB-Report 04-48, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin*.
- [Burgschweiger et al., 2005] Burgschweiger, J., Gnädig, B., und Steinbach, M. C. (2005). Nonlinear programming techniques for operative planning in large drinking water networks. *ZIB-Report 05-31, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin*.
- [Bussieck und Vigerske, 2014] Bussieck, M. R. und Vigerske, S. (2014). MINLP solver software. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science, Wiley & Sons, Inc.*
- [Cai et al., 2001a] Cai, X., McKinney, D. C., und Lasdon, L. S. (2001a). Solving nonlinear water management models using a combined genetic algorithm and linear programming approach. *Advances in Water Resources*, 24(6):667–676.
- [Cai et al., 2001b] Cai, X., McKinney, D. C., Lasdon, L. S., und Watkins Jr., D. W. (2001b). Solving large nonconvex water resources management models using Generalized Benders Decomposition. *Operations Research*, 49(2):235–245.
- [Chvatal, 1983] Chvatal, V. (1983). *Linear Programming*. Freeman, New York/San Francisco.
- [Coelho und Andrade-Campos, 2014] Coelho, B. und Andrade-Campos, A. (2014). Efficiency achievement in water supply systems - A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 30:59–84.
- [Collins et al., 1978] Collins, M., Cooper, L., Helgason, R., Kennington, J., und LeBlanc, L. (1978). Solving the pipe network analysis problem using optimization



- techniques. *Management Science*, 24(7):747–760.
- [Cullinane et al., 1992] Cullinane, M. J., Lansey, K. E., und Mays, L. W. (1992). Optimization-availability-based design of water-distribution networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(3):420–441.
- [Cunha und Ribeiro, 2004] Cunha, M. und Ribeiro, L. (2004). Tabu search algorithms for water network optimization. *European Journal of Operational Research*, 157:746–758.
- [D’Ambrosio et al., 2014] D’Ambrosio, C., Lodi, A., Wiese, S., und Bragalli, C. (2014). Mathematical programming techniques in water network optimization. *optimization-online.org*, March 2014.
- [Dandy et al., 1996] Dandy, G. C., Simpson, A. R., und Murphy, L. J. (1996). An improved genetic algorithm for pipe network optimization. *Water Resources Research*, 32(2):449–458.
- [Dantzig, 1960] Dantzig, G. B. (1960). On the significance of solving linear programming problems with some integer variables. *Econometrica, Journal of the Econometric Society*, Seiten 30–44.
- [De La Vega und Alem, 2014] De La Vega, J. und Alem, D. (2014). An improved stochastic optimization model for water supply pumping systems in urban networks. *CEP*, 18052:780.
- [Deuerlein und Klingel, 2007] Deuerlein, J. und Klingel, P. (2007). Application of hydraulic models for rehabilitation of drinking water distribution systems. *High Quality Drinking Water 2007 Workshop, Delft University of Technology, Delft, Netherlands*.
- [DIN2000, 2000] DIN2000 (2000). Leitsätze für Anforderungen an Trinkwasser, Planung, Bau, Betrieb und Instandhaltung der Versorgungsanlagen, Oktober 2000. *Technische Regeln des DVGW*.
- [DIN4046, 1983] DIN4046 (1983). Wasserversorgung Begriffe, September 1983. *Technische Regeln des DVGW*.
- [Djebeddjian et al., 2006] Djebeddjian, B., Yaseen, A., und Rayan, M. A. (2006). Optimization of large-scale water distribution system design using genetic algorithms. *Tenth International Water Technology Conference, IWTC10 2006*, Seiten 447–477.
- [Dohle und Suhl, 2012] Dohle, C. und Suhl, L. (2012). An optimization model for the optimal usage of water tanks in water supply systems. *Proceedings of the Interna-*

- tional Conference on Applied Mathematical Optimization and Modelling APMOD 2012*, Seiten 404–408.
- [Domschke und Drexl, 2005] Domschke, W. und Drexl, A. (2005). *Einführung in Operations Research*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [Dorigo et al., 1996] Dorigo, M., Maniezzo, V., und Colorni, A. (1996). Ant system: optimization by a colony of cooperating agents. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, 26(1):29–41.
- [DVGW, 1983] DVGW (1983). DVGW-Arbeitsblatt G 464 Berechnung von Druckverlusten bei der Gasverteilung, November 1983. *Technische Regeln des DVGW*.
- [DVGW, 2000] DVGW (2000). DVGW-Merkblatt W 335 Druck-, Durchfluss- und Niveauregelung in Wassertransport und -verteilung, September 2000. *Technische Regeln des DVGW*.
- [DVGW, 2004] DVGW (2004). DVGW-Arbeitsblatt W 400-1 Technische Regeln Wasserverteilungsanlagen (TRWV) - Teil 1: Planung, Oktober 2004. *Technische Regeln des DVGW*.
- [DVGW, 2005a] DVGW (2005a). DVGW-Arbeitsblatt W 300 Wasserspeicherung - Planung, Bau, Betrieb und Instandhaltung von Wasserbehältern in der Trinkwasserversorgung, Juni 2005. *Technische Regeln des DVGW*.
- [DVGW, 2005b] DVGW (2005b). DVGW-Arbeitsblatt W 303-1 Berechnung von Gas- und Wasserrohrnetzen - Teil 1: Hydraulische Grundlagen, Netzmodellierung und Berechnung, November 2005. *Technische Regeln des DVGW*.
- [Eiger et al., 1994] Eiger, G., Shamir, U., und Ben-Tal, A. (1994). Optimal design of water distribution networks. *Water Resources Research*, 30(9):2637–2646.
- [El Ansary et al., 2010] El Ansary, A. M., El Damatty, A. A., und Nassef, A. (2010). A coupled finite element genetic algorithm technique for optimum design of steel conical tanks. *Thin-Walled Structures*, 48:260–273.
- [El Ansary et al., 2011] El Ansary, A. M., El Damatty, A. A., und Nassef, A. (2011). A coupled finite element genetic algorithm for optimum design of stiffened liquid-filled steel conical tanks. *Thin-Walled Structures*, 49:482–493.
- [EPA, 2014] EPA (2014). United States Environmental Protection Agency - Drinking Water Research. EPANET. <http://www.epanet.de>. Letzter Zugriff am 10.07.2015.
- [Farmani et al., 2005] Farmani, R., Walters, G. A., und Savic, D. A. (2005). Trade-off

- between total cost and reliability for Anytown water distribution network. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 131(3):161–171.
- [Floudas, 1995] Floudas, C. A. (1995). *Nonlinear and Mixed-Integer Optimization: Fundamentals and applications*. Marcombo.
- [Friedrich, 2007] Friedrich, S. (2007). *Algorithmische Verbesserungen für die Lösung diskreter Optimierungsmodelle*. Dissertation, Freie Universität Berlin, Universitätsbibliothek.
- [Fügenschuh und Humpola, 2013] Fügenschuh, A. und Humpola, J. (2013). A unified view on relaxations for a nonlinear network flow problem. *ZIB-Report 13-31, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin*.
- [Fukushima et al., 1982] Fukushima, M., Morinaga, Y., und Mine, H. (1982). A heuristic decomposition approach to optimal control in a water supply model. *European Journal of Operational Research*, 11(4):338–348.
- [Geißler, 2011] Geißler, B. (2011). *Towards globally optimal solutions for MINLPs by discretization techniques with applications in gas network optimization*. Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg.
- [Geißler et al., 2011] Geißler, B., Kolb, O., Lang, J., Leugering, G., Martin, A., und Morsi, A. (2011). Mixed integer linear models for the optimization of dynamical transport networks. *Mathematical Methods of Operations Research*, 73(3):339–362.
- [Geißler et al., 2012] Geißler, B., Martin, A., Morsi, A., und Schewe, L. (2012). Using piecewise linear functions for solving MINLPs. *Mixed Integer Nonlinear Programming*, Seiten 287–314.
- [Gessler, 1981] Gessler, J. (1981). Analysis of pipe networks. *Closed-conduit flow. Chelsea: Water Resources Publication*, Seiten 61–100.
- [Gleixner et al., 2012] Gleixner, A., Held, H., Huang, W., und Vigerske, S. (2012). Towards globally optimal operation of water supply networks. *ZIB-Report 12-25, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin*.
- [Hähnlein, 2008] Hähnlein, C. (2008). *Numerische Modellierung zur Betriebsoptimierung von Wasserverteilnetzen*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt.
- [Hallmann, 2013] Hallmann, C. (2013). An approach for a decision support system to optimize water tanks in water supply systems by combining network reduction, optimization and simulation. *DS&OR Working Paper*, 1303.

- [Hallmann und Suhl, 2015] Hallmann, C. und Suhl, L. (2015). Optimizing water tanks in water distribution systems by combining network reduction, mathematical optimization and hydraulic simulation. *OR Spectrum - Special Issue Energy*, (accepted for publication).
- [Hansen et al., 1991] Hansen, C. T., Madsen, K., und Nielsen, H. B. (1991). Optimization of pipe networks. *Mathematical programming*, 52(1-3):45–58.
- [Innovyze, 2015] Innovyze (2015). H2ONET. <http://www.innovyze.com/products/>. Letzter Zugriff am 10.07.2015.
- [Karger et al., 2008] Karger, R., Cord-Landwehr, K., und Hoffmann, F. (2008). *Wasserversorgung*. Vieweg Verlag.
- [Kessler und Shamir, 1989] Kessler, A. und Shamir, U. (1989). Analysis of the linear programming gradient method for optimal design of water supply networks. *Water Resources Research*, 25(7):1469–1480.
- [Koberstein et al., 2011] Koberstein, A., Lucas, C., Wolf, C., und König, D. (2011). Modelling and optimising risk in the strategic planning problem of local distribution companies. *The Journal of Energy Markets*, 4:47–68.
- [Kolb et al., 2012] Kolb, O., Morsi, A., Lang, J., und Martin, A. (2012). Nonlinear and mixed integer linear programming. *Mathematical Optimization of Water Networks*, Seiten 55–65.
- [Kurek und Ostfeld, 2013] Kurek, W. und Ostfeld, A. (2013). Multi-objective optimization of water quality, pumps operation, and storage sizing of water distribution systems. *Journal of Environmental Management*, 115:189–197.
- [KYPipe, 2015] KYPipe (2015). Pipe2014. <http://kypipe.com/kypipe>. Letzter Zugriff am 10.07.2015.
- [Lansey und Mays, 1989] Lansey, K. und Mays, L. (1989). Optimization model for water distribution system design. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115(10):1401–1418.
- [Le Ngo et al., 2007] Le Ngo, L., Madsen, H., und Rosbjerg, D. (2007). Simulation and optimisation modelling approach for operation of the Hoa Binh Reservoir, Vietnam. *Journal of Hydrology*, 336:269–281.
- [Lekane et al., 1980] Lekane, T. M., Hellemans, D. E., und Whitwam, C. M. (1980). Long-term optimization model of tree water networks. *European Journal of Operational Research*, 4:7–15.

- [Lin et al., 2013] Lin, M.-H., Carlsson, J. G., Ge, D., Shi, J., und Tsai, J.-F. (2013). A review of piecewise linearization methods. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013.
- [Liong und Atiquzzaman, 2004] Liong, S. Y. und Atiquzzaman, M. (2004). Optimal design of water distribution network using shuffled complex evolution. *Journal of the Institution of Engineers*, 44(1):93–107.
- [Maier et al., 2003] Maier, H. R., Simpson, A. R., Zecchin, A. C., Foong, W. K., Phang, K. Y., Seah, H. Y., und Tan, C. L. (2003). Ant colony optimization for design of water distribution systems. *Journal of water resources planning and management*, 129(3):200–209.
- [Mantell und Lasdon, 1977] Mantell, J. B. und Lasdon, L. S. (1977). A GRG algorithm for econometric control problems. *Annals of Economic and Social Measurement*, 6(5):104–122.
- [Mariano-Romero et al., 2007] Mariano-Romero, C. E., Alcocer-Yamanaka, V. H., und Morales, E. F. (2007). Multi-objective optimization of water-using systems. *European Journal of Operational Research*, 181(3):1691–1707.
- [Marques et al., 2014] Marques, J., Cunha, M., Savić, D., und Giustolisi, O. (2014). Dealing with uncertainty through real options for the multi-objective design of water distribution networks. *Procedia Engineering*, 89:856–863.
- [Martínez et al., 2007] Martínez, F., Hernández, V., Alonso, J. M., Rao, Z., und Alvisi, S. (2007). Optimizing the operation of valencia water distribution network. *Journal of Hydroinformatics*, 09.1:65–78.
- [Maschler und Savic, 1999] Maschler, T. und Savic, D. A. (1999). Simplification of water supply network models through linearisation. *Report No. 99/01, School of Engineering, University of Exeter*.
- [Minoglou et al., 2013] Minoglou, M. K., Hatzigeorgiou, G. D., und Papagiannopoulos, G. A. (2013). Heuristic optimization of cylindrical thin-walled steel tanks under seismic loads. *Thin-Walled Structures*, 64:50–59.
- [Montalvo et al., 2008] Montalvo, I., Izquierdo, J., und Tung, R. P. M. (2008). Particle swarm optimization applied to the design of water supply systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(3):769–776.
- [Morsi et al., 2012] Morsi, A., Geißler, B., und Martin, A. (2012). Mixed integer optimization of water supply networks. In *Mathematical Optimization of Water Networks*, Seiten 35–54. Springer.

- [Murphy et al., 1994] Murphy, L. J., Dandy, G. C., und Simpson, A. R. (1994). Optimum design and operation of pumped water distribution systems. In *National Conference Publication - Institution of Engineers Australia NCP*, Seiten 149–149.
- [Mutschmann und Stimmelmayer, 2007] Mutschmann, J. und Stimmelmayer, F. (2007). *Taschenbuch der Wasserversorgung*. Vieweg Verlag.
- [Nemhauser und Wolsey, 1988] Nemhauser, G. L. und Wolsey, L. A. (1988). *Integer and combinatorial optimization*. Wiley New York.
- [Nickel et al., 2013] Nickel, D., Lange, M. A., Ayres, A., Schielein, J., und Oelmann, M. (2013). Ökologische und hygienische Kennzahlen im Benchmarking der Wasserversorgung: Empfehlungen aus Sicht des Gewässer- und Gesundheitsschutzes. *Text 16/2013 des Umweltbundesamtes*.
- [Padberg, 2000] Padberg, M. (2000). Approximating separable nonlinear functions via mixed zero-one programs. *Operations Research Letters*, 27:1–5.
- [Perelman und Ostfeld, 2008] Perelman, L. und Ostfeld, A. (2008). Water distribution system aggregation for water quality analysis. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 134(3):303–309.
- [Raghunathan, 2013] Raghunathan, A. U. (2013). Global optimization of nonlinear network design. *SIAM Journal on Optimization*, 23(1):268–295.
- [Rautenberg et al., 2014] Rautenberg, J., Fritsch, P., Hoch, W., Merkl, G., Otillinger, F., Weiß, M., und Wricke, B. (2014). *Mutschmann/Stimmelmayer Taschenbuch der Wasserversorgung*. Vieweg Verlag.
- [Reeves, 1993] Reeves, C. R. (1993). *Modern heuristic techniques for combinatorial problems*. John Wiley & Sons, Inc.
- [Ríos-Mercado et al., 2002] Ríos-Mercado, R. Z., Wu, S., Scott, L. R., und Boyd, E. A. (2002). A reduction technique for natural gas transmission network optimization problems. *Annals of Operation Research*, 117:217–234.
- [Rossman, 2000] Rossman, L. A. (2000). *EPANET 2 - Users Manual*. Water Supply and Water Resources Division, National Risk Management Research Laboratory, Cincinnati.
- [RZVN, 2015] RZVN (2015). Rechenzentrum für Versorgungsnetze Wehr GmbH. <http://www.rzvn.de/>. Letzter Zugriff am 10.07.2015.
- [Scheele, 2006] Scheele, U. (2006). *Versorgungssicherheit und Qualitätsstandards in*

- der Wasserversorgung: Neue Herausforderung unter veränderten Rahmenbedingungen; Diskussionspapier.* Deutsches Institut für Urbanistik.
- [Schwarz und Köckler, 2011] Schwarz, H.-R. und Köckler, N. (2011). *Numerische Mathematik.* Springer-Verlag.
- [Shamir, 1974] Shamir, U. (1974). Optimal design and operation of water distribution systems. *Water Resources Research*, 10(1):27–36.
- [Sherali und Smith, 1997] Sherali, H. D. und Smith, E. P. (1997). A global optimization approach to a water distribution network design problem. *Journal of Global Optimization*, 11(2):107–132.
- [Sherali et al., 2001] Sherali, H. D., Subramanian, S., und Loganathan, G. V. (2001). Effective relaxations and partitioning schemes for solving water distribution network design problems to global optimality. *Journal of Global Optimization*, 19(1):1–26.
- [Simpson et al., 1994] Simpson, A. R., Dandy, G. C., und Murphy, L. J. (1994). Genetic algorithms compared to other techniques for pipe optimization. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 120(4):423–443.
- [STANET, 2015] STANET (2015). STANET - Network analysis. <http://www.stafu.de/en>. Letzter Zugriff am 10.07.2015.
- [Strybny, 2010] Strybny, J. (2010). *Ohne Panik Strömungsmechanik.* Vieweg + Teubner.
- [Suhl und Mellouli, 2013] Suhl, L. und Mellouli, T. (2013). *Optimierungssysteme - Modelle, Verfahren, Software, Anwendungen.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [Tahoe Design Software, 2015] Tahoe Design Software (2015). HYDROFLO. <http://www.tahoesoftware.com/html/hydroflo.htm>. Letzter Zugriff am 10.07.2015.
- [Tawarmalani und Sahinidis, 2002] Tawarmalani, M. und Sahinidis, N. V. (2002). *Convexification and global optimization in continuous and mixed-integer nonlinear programming: Theory, algorithms, software, and applications*, volume 65. Springer Science & Business Media.
- [Todini und Pilati, 1988] Todini, E. und Pilati, S. (1988). A gradient algorithm for the analysis of pipe networks. *Computer applications in water supply: Vol. 1- Systems analysis and simulation*, Seiten 1–20.
- [TrinkwV, 2001] TrinkwV (2001). Verordnung über die Qualität von Trinkwasser für

- den menschlichen Gebrauch. (*Trinkwasserverordnung - TrinkwV 2001*) BGBl. I Nr. 24 vom 28.05.2001.
- [Vairavamoorthy und Ali, 2000] Vairavamoorthy, K. und Ali, M. (2000). Optimal design of water distribution systems using genetic algorithms. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 15(5):374–382.
- [Vamvakeridou-Lyroudia et al., 2007] Vamvakeridou-Lyroudia, L. S., Savic, D. A., und Walters, G. A. (2007). Tank simulation for the optimization of water distribution networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(6):625–636.
- [Vieira und Ramos, 2008] Vieira, F. und Ramos, H. M. (2008). Hybrid solution and pump-storage optimization in water supply system efficiency: A case study. *Energy policy*, 36(11):4142–4148.
- [VKU, 2011] VKU (2011). Fragen und Antworten : Wasserpreise und Gebühren. *Verband kommunaler Unternehmen e. V.*
- [Walski et al., 1990] Walski, T. M., Gessler, J., und Sjostrom, J. W. (1990). *Water Distribution Systems: Simulation and Sizing*. CRC Press, Inc.
- [Wolsey, 1998] Wolsey, L. A. (1998). *Integer Programming*. John Wiley and Sons, New York et al.
- [Wood, 1986] Wood, R. K. (1986). Factoring algorithms for computing k-terminal network reliability. *Reliability, IEEE Transactions on*, 35(3):269–278.
- [Zessler und Shamir, 1989] Zessler, U. und Shamir, U. (1989). Optimal operation of water distribution systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 115(6):735–752.