

Zusammenfassung

Die lokale Suche ist einer der erfolgreichsten Ansätze zur Lösung schwerer Optimierungsprobleme. Bei der lokalen Suche ist jeder Lösung eine Menge von Nachbarlösungen zugeordnet. Gesucht ist ein *lokales Optimum*, das heißt eine Lösung, die keinen besseren Nachbarn hat. Die Nachbarschaftsbeziehung zwischen den Lösungen induziert auf natürliche Weise so genannte *Standardalgorithmen*, die lokale Optima finden: Beginne mit einer zulässigen Lösung und wechsele iterativ zu einem besseren Nachbarn bis ein lokales Optimum gefunden ist. Viele empirische und theoretische Untersuchungen haben gezeigt, dass diese Methoden bei den meisten Eingaben schnell ein lokales Optimum erreichen.

Für einige Probleme sind allerdings Instanzen gefunden worden, bei denen ein Standardalgorithmus exponentiell viele Schritte benötigen kann, wenn die initiale Lösung und die sogenannte *Pivot-Regel*, die unter den verbessernden Lösungen auswählt, unglücklich gewählt sind. Schlimmer noch, für einige Probleme sind Instanzen und initiale Lösungen gefunden worden, in denen unabhängig von der Pivot-Regel *jeder* Standardalgorithmus exponentiell viele Schritte benötigt. Von solchen Problemen sagen wir, dass sie die *All-exp* Eigenschaft haben. Insgesamt gilt also, dass es es in einigen Fällen unpraktisch ist, einen Standardalgorithmus zur Berechnung eines lokalen Optimums zu wählen.

Aber wie schwer ist es dann, ein lokales Optimum zu finden—mit Standardalgorithmen oder einem anderen Ansatz? Um die Komplexität der Berechnung lokaler Optima zu kapseln, haben Johnson et al. (JCSS,1988) die Klasse PLS eingeführt. Kurz danach zeigten Schäffer et al. (JOC,1991) PLS-Vollständigkeit für verschiedene lokale Suchprobleme einschließlich des Problems LOCALMAX-CUT auf Graphen unbeschränkten Grades mit FLIP-Nachbarschaft, in der ein Knoten die Partition wechselt. Darüber hinaus zeigten sie zwei weitere Ergebnisse für LOCALMAX-CUT: Es hat die All-exp Eigenschaft und das Problem, ein lokales Optimum zu berechnen, das ausgehend von einem Paar aus Instanz und initialer Lösung mit Hilfe eines Standardalgorithmus erreichbar ist (kurz: SAP), ist PSPACE-vollständig. Auf der anderen Seite zeigte Poljak (JOC,1995), dass höchstens $O(n^2)$ verbessernde Schritte für LOCALMAX-CUT auf kubischen Graphen möglich sind bis ein lokales Optimum erreicht wird. Außerdem stellte er die Frage, ob LOCALMAX-CUT auf Graphen mit Höchstgrad vier die All-exp Eigenschaft hat. Wegen der großen Lücke zwischen dem Grad drei und einem unbeschränkten Grad fragten Ackermann et al. (JACM,2008) nach dem kleinsten $d \in \mathbb{N}$, für das LOCALMAX-CUT auf Graphen mit Höchstgrad d PLS-vollständig ist.

Die vorliegende Arbeit liefert drei Komplexitätsergebnisse für LOCALMAX-CUT. Erstens behält es die All-exp Eigenschaft auch wenn es auf Graphen mit Höchstgrad vier eingeschränkt wird—dieses Ergebnis löst das Problem von Poljak. Zweitens ist das SAP PSPACE-vollständig auf Graphen mit Höchstgrad vier. Drittens ist die Berechnung eines

lokalen Optimums PLS-vollständig für Graphen mit Höchstgrad fünf—dieses Ergebnis löst das Problem von Ackermann et al. fast vollständig, da d dadurch entweder vier oder fünf ist (außer $PLS \subseteq P$). Die Ergebnisse haben Einfluss auf weitere Probleme, da LOCALMAX-CUT in der Literatur als Basis für verschiedene PLS-Reduktionen diente. Einige der Reduktionen behalten den Grad auf bestimmte Weise bei und übertragen so die Komplexitätsergebnisse auf die entsprechenden Probleme auch für sehr eingeschränkte Mengen zulässiger Eingaben.