Zusammenfassung

On the Hardness of Computing Local Optima

(Über die Schwierigkeit der Berechnung Lokaler Optima)

Dominic Dumrauf

In dieser Arbeit untersuchen wir die *Komplexität der Berechnung lokal optimaler Lösungen* von Problemen aus den Bereichen der *Spieltheorie* und der *Optimierung*. Für unsere Untersuchungen verwenden wir das Framework $\mathcal{PLS}$ (Abkürzung für "Polynomialzeit lokale Suche"), wie von Johnson, Papadimtriou und Yannakakis [56] eingeführt.

Bevor wir unsere Ergebnisse präsentieren, rekapitulieren wir zunächst das Framework $\mathcal{PLS}$ und präsentieren die benötigte Notation in Kapitel 2. In Kapitel 3 geben wir einen Überblick über den Stand der Forschung zur Komplexität der Berechnung lokal optimaler Lösungen. Dort konzentrieren wir uns auf wohl bekannte und erfolgreiche lokale Suchheuristiken für verschiedene Probleme, wobei unser Fokus auf der worst case Komplexität, zusammen mit der Existenz von *Sequenzen verbessernder Schritte exponentieller Länge* liegt. Wir konzentrieren uns hauptsächlich auf die verwandte Literatur zu Congestion Games, welche die Verbindung zwischen lokaler Suche und Spieltheorie initiierten.

In der Spieltheorie sind Congestion Games ein weit verbreitetes und akzeptiertes Modell um das Verhalten und die Performanz von großen verteilten Netzwerken mit autonomen Teilnehmern zu untersuchen. Die Klasse der *Restricted Network Congestion Games* ist eine Teilklasse der Congestion Games bei der für jeden Spieler eine Menge von Kanten existiert, die er nicht verwenden darf. Rosenthals Potentialfunktion garantiert die Existenz von Nash Equilibrien, da lokale Minima der Potentialfunktion Nash Equilibrien sind; des Weiteren ist Rosenthals Potentialfunktion in Polynomialzeit berechenbar. Dies erlaubt es das Problem der Berechnung eines Nash Equilibriums in einem gegebenen Restricted Network Congestion Game als lokales Suchproblem zu formulieren. In Kapitel 5 zeigen wir mittels einer tighten Reduktion von MaxCut, dass die Berechnung eines Nash Equilibriums in einem Restricted Network Congestion Game mit *zwei Spielern $\mathcal{PLS}$-vollständig* ist. Das Ergebnis gilt für gerichtete Netzwerke und für ungerichtete Netzwerke.

Aus dem Bereich der Optimierung untersuchen wir die Komplexität der Berechnung lokal optimaler Lösungen des Maximum Constraint Assignment (abgekürzt MCA) Problems und von gewichteten Standard-Mengenproblemen. Im Wesentlichen ist das MCA

Problem, welches wir in Kapitel 6 untersuchen, eine lokale Suchversion des gewichteten Generalized Maximum Satisfiability Problems über Constraints (Funktionen, die Variablenbelegungen auf positive ganze Zahlen abbilden) über Variablen mit höherer Wertigkeit. Die Parameter in (p, q, r)-MCA$_{k\text{-par}}$ beschränken hierbei simultan die maximale Länge p jedes Constraints, das maximale Auftreten q jeder Variable und deren Wertigkeit r; zusätzlich ist die Menge der Constraints k-partit. Wir konzentrieren uns auf Härteergebnisse und zeigen mittels tighter Reduktionen von Circuit/Flip die *$\mathcal{PLS}$-Vollständigkeit* von $(3, 2, 3)$-MCA$_{3\text{-par}}$ und $(2, 3, 6)$-MCA$_{2\text{-par}}$. Unsere Ergebnisse sind in dem Sinne *optimal*, dass $(2, 2, r)$-MCA für jedes $r \in \mathbb{N}$ in Polynomialzeit berechenbar ist. Besondere Aufmerksamkeit legen wir auch auf den Fall von *binären Variablen* und zeigen hierbei, dass $(6, 2, 2)$-MCA tight $\mathcal{PLS}$-vollständig ist. Für unsere Ergebnisse erweitern und verfeinern wir eine Technik von Krentel [67].

Abschließend untersuchen wir in Kapitel 7 die Komplexität der Berechnung lokal optimaler Lösungen von *gewichteten Standard-Mengenproblemen* wie SetPacking, SetCover und vieler anderer Probleme, wie sie in [SP1]–[SP10] im Buch von Garey und Johnson [40, Seite 221ff.] zusammengefasst sind. Wir zeigen, dass für die meisten dieser Probleme die Berechnung einer lokal optimalen Lösung *bereits für eine einfache natürliche Nachbarschaft der Größe eins $\mathcal{PLS}$-vollständig* ist. Für die lokalen Suchversionen von gewichtetem SetPacking und SetCover zeigen wir scharfe Schranken für eine einfache Nachbarschaft der Größe zwei. Nach bestem Wissen sind dies einige der wenigen $\mathcal{PLS}$ Ergebnisse zu lokaler Suche bei gewichteten Standard-Mengenproblemen.

Die Untersuchungen in dieser Arbeit sind hauptsächlich dadurch motiviert, die Härte der oben beschriebenen lokalen Suchprobleme nachzuweisen. Idealerweise würden wir gerne die *effiziente Berechenbarkeit* lokal optimaler Lösungen für diese Probleme *demarkieren.* Des Weiteren sind wir an *Gemeinsamkeiten* zwischen den Reduktionen, die wir vorstellen, als auch an den *potentiellen Quellen der Komplexität* der von uns als schwer klassifizierten Probleme interessiert. Wir diskutieren diese übergeordneten Fragen in Kapitel 8 und zeigen potentielle Richtungen für weitere Forschungen auf, indem wir verschiedene offenen Probleme vorstellen.