

**Optimale Steuerung und Mehrzieloptimierung von  
dynamischen Systemen untersucht am Beispiel des  
Mehr Fachpendels**

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)  
der Fakultät Maschinenbau  
der Universität Paderborn

genehmigte  
DISSERTATION

von  
Dipl.-Math. Julia Timmermann  
aus Paderborn

Tag des Kolloquiums 8. November 2013  
Referent Prof. Dr-Ing. habil. Ansgar Trächtler  
Koreferent Jun.-Prof. Dr. Sina Ober-Blöbaum



## **Danksagung**

Zuallererst danke ich Prof. Dr.-Ing. Ansgar Trächtler für die gute Betreuung meiner Arbeit in den letzten Jahren. Durch die Arbeit am Lehrstuhl für Regelungs-technik und Mechatronik hatte ich die Möglichkeit mich mit einem sehr interessanten Themengebiet zu beschäftigen und dabei meine Ideen frei zu entfalten. Dabei war vor allem die anwendungsorientierte Verwendung von mathematischen Konzepten sowohl für Prof. Dr.-Ing. Trächtler als auch für mich von großer Bedeutung.

Ich danke auch Prof. Dr.-Ing. Eugeny Kenig und Prof. Dr.-Ing. Detmar Zimmer für das Mitwirken in der Promotionskommission.

Ich bedanke mich bei allen meinen Kollegen am Lehrstuhl für die gute Zusammenarbeit und die vielen wissenschaftlichen und auch nicht wissenschaftlichen Diskussionen. Dabei sollen Peter Reinold, Alexander Löffler, Tanja Schmüdderich, Sarah Flottmeier und Dr.-Ing. Isabel Koke besonders bedacht werden.

Außerdem danke ich Dr.-Ing. Martin Krüger, der mich schon sehr lange bei meiner wissenschaftlichen Karriere begleitet und mit dem ich über Jahre das Büro geteilt habe. In unseren Gesprächen und Diskussionen haben wir Lösungen für viele Probleme gefunden und auf seine Hilfe und Unterstützung konnte ich mich immer verlassen.

Durch die Zusammenarbeit mit Jun.-Prof. Dr. Sina Ober-Blöbaum und Dr. Kathrin Flaßkamp sind einige interessante interdisziplinäre Ergebnisse meiner Arbeit entstanden. Ich danke beiden für die inspirierende Zusammenarbeit und Unterstützung.

Besonders danke ich auch meiner Familie. Sie haben mich immer bei meinen Entscheidungen unterstützt und ermutigt. Vielen Dank für eure Begleitung in den Jahren von Studium und Promotion.

Am Ende danke ich Robert Timmermann dafür, dass er immer für mich da ist.

Paderborn, im Juni 2014

Julia Timmermann



## **Zusammenfassung**

In dieser Arbeit wird gezeigt, wie optimale Trajektorien für ein unteraktuiertes mechanisches System – das Doppel- bzw. Dreifachpendel auf einem Wagen – mittels optimaler Steuerung bestimmt werden können. Dabei werden neuartige mathematische Methoden verwendet und deren Vorteile in der Anwendung aufgezeigt. Es werden sowohl die theoretischen Ergebnisse analysiert als auch die praktische Umsetzung in Simulationen und am Prüfstand untersucht.

Das Manöver, welches hier hauptsächlich betrachtet wird, ist der Aufschwung des Pendels aus der stabilen unteren Ruhelage in die instabile obere Ruhelage. Dabei werden mit Hilfe von Methoden der Mehrzieloptimierung viele Varianten von Lösungen berechnet, die die zwei gegenläufigen Zielgrößen Dauer des Manövers und Steueraufwand unterschiedlich stark berücksichtigen. So ist es möglich eine komplexe Bibliothek von optimalen Lösungen zu erhalten und diese weitergehend bezüglich des Gesamtsystemverhaltens zu analysieren.

Ein weiterer Ansatz ist die Entwicklung von Strategien für eine optimale Steuerung auf Mannigfaltigkeiten, die besondere dynamische Strukturen des Pendelsystems für einen optimalen Aufschwung nutzen. Auf der stabilen Mannigfaltigkeit kann sich das dynamische System kostenlos in die Ruhelage bewegen. Dies ist somit ein besonderer physikalisch motivierter Ansatz, um optimale Manöver zu finden.

## **Abstract**

This thesis presents the determination of optimal trajectories for an underactuated mechanical system – the double or triple pendulum on a cart – by means of optimal control methods. For this novel mathematical methods are used and their advantages in the application are pointed out. The theoretical results are analysed, as well as the practical implementation in simulations and at the test rig is examined.

The main maneuver under consideration here is the swing-up of the pendulum from its lower stable equilibrium to its upper unstable equilibrium. By means of multiobjective optimization the computation of a great variety of solutions with respect to the contrary objectives duration of the maneuver and control effort is possible. This results in a complex library of optimal solutions which can be created and it can be analysed regarding the complete system behavior.

A further approach is the development of strategies for the optimal control on manifolds using special dynamical structures for the swing-up of the pendulum. A motion on a stable manifold to the equilibrium is free of costs. This is a special physically inspired approach to find optimal control maneuvers.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.1.1 Optimale Steuerung dynamischer Systeme . . . . .	2
1.1.2 Mehrfachpendel und ihre Eigenschaften . . . . .	3
1.2 Zielsetzung . . . . .	5
1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .	8
<b>2 Grundlagen zum Einsatz von Mehrfachpendelsystemen</b>	<b>11</b>
2.1 Pendelsysteme in Theorie und Praxis - Ein Stand der Technik . .	11
2.1.1 Aufbau und Ansteuerung von Pendelsystemen . . . . .	12
2.1.2 Ansätze für Steuerung und Regelung . . . . .	14
2.2 Prüfstand . . . . .	16
2.3 Modellbildung . . . . .	17
2.3.1 Doppelpendel . . . . .	18
2.3.2 Dreifachpendel . . . . .	24
2.4 Zwei-Freiheitsgrade-Struktur . . . . .	27
2.4.1 Simulationsmodell . . . . .	28
2.4.2 Reglerauslegung . . . . .	29
<b>3 Optimale Steuerung mittels Discrete Mechanics and Optimal Control</b>	<b>39</b>
3.1 Das Optimalsteuerungsproblem . . . . .	40
3.1.1 Herleitung des Optimalsteuerungsproblems für das Mehrfachpendel . . . . .	41
3.2 Lösungsmethoden für das Optimalsteuerungsproblem . . . . .	43
3.2.1 Das Pontryaginsche Maximumprinzip . . . . .	43
3.2.2 Numerische Methoden . . . . .	45
3.3 Discrete Mechanics and Optimal Control . . . . .	49
3.3.1 Einführung in Variationsmechanik . . . . .	49
3.3.2 Die DMOC Methode . . . . .	51
3.3.3 Vergleich mit Standardmethoden . . . . .	58

3.3.4	Herleitung des diskreten Optimalsteuerungsproblems mit DMOC für das Mehrfachpendel . . . . .	61
3.3.5	Spezielle Eigenschaften der DMOC Methode . . . . .	63
3.3.6	Aktuelle Forschungsarbeiten mit DMOC . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Optimale Steuerungstrajektorien für das Mehrfachpendel</b>	<b>73</b>
4.1	Numerische Lösung des Optimalsteuerungsproblems mit SQP- Verfahren . . . . .	74
4.1.1	Herleitung . . . . .	75
4.1.2	Lösung . . . . .	77
4.2	Mehrzieloptimierung und Pareto-Optimalität . . . . .	78
4.2.1	Pareto-Optimalität . . . . .	79
4.2.2	Lösung des MOP . . . . .	81
4.3	Optimale Trajektorien am Doppelpendel . . . . .	84
4.3.1	Umsetzung der Optimierung . . . . .	85
4.3.2	Lösungstrajektorien für den Aufschwung des Doppelpen- dels . . . . .	87
4.3.3	Ergebnisse am Prüfstand des Doppelpendels . . . . .	91
4.3.4	Pareto-Optimalität von Lösungen für den Aufschwung . .	93
4.3.5	Nachoptimierung . . . . .	99
4.4	Optimale Trajektorien am Dreifachpendel . . . . .	101
4.4.1	Lösungstrajektorien für den Aufschwung des Dreifach- pendels . . . . .	103
4.4.2	Ergebnisse am Prüfstand des Dreifachpendels . . . . .	108
4.5	Vergleich von Methoden für die Berechnung des Aufschwungs am Pendel . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Strategien für optimale Steuerung auf invarianten Mannigfaltig- keiten</b>	<b>113</b>
5.1	Grundlagen . . . . .	114
5.1.1	Dynamische Systeme . . . . .	115
5.1.2	Mengenorientierte Berechnung von Mannigfaltigkeiten mit Hilfe von GAIO . . . . .	120
5.1.3	Stark (in)stabile Mannigfaltigkeiten . . . . .	123
5.1.4	Modellierung . . . . .	125
5.1.5	Berechnung der (in)stabilen Mannigfaltigkeiten . . . . .	127
5.2	Steuerungsstrategie auf (in)stabilen Mannigfaltigkeiten . . . .	129
5.2.1	Grundidee der Methodik . . . . .	130
5.3	Anwendung der optimalen Steuerung auf Mannigfaltigkeiten am Doppelpendel . . . . .	133
5.3.1	Anwendung am momentengesteuerten Doppelpendel .	134

5.3.2 Anwendung am Doppelpendel mit Wagen . . . . .	139
5.3.3 Numerische Ergebnisse . . . . .	141
5.4 Validierung durch Simulation und Tests am Prüfstand . . . . .	142
5.4.1 Ergebnisse Simulationsumgebung . . . . .	143
5.4.2 Ergebnisse am Prüfstand . . . . .	144
5.5 Vergleich der optimalen Steuerung auf Mannigfaltigkeiten mit dem Standardansatz . . . . .	146
5.6 Erweiterungsmöglichkeiten und zukünftige Anwendungen . . . . .	149
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>151</b>
6.1 Zusammenfassung . . . . .	151
6.2 Ausblick . . . . .	154
<b>A Mathematischer Anhang</b>	<b>157</b>
A.1 Mannigfaltigkeiten . . . . .	157
A.1.1 Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten . . . . .	158
A.1.2 Untermannigfaltigkeiten . . . . .	160
A.1.3 Tangentialbündel . . . . .	160
A.1.4 Vektorfelder . . . . .	162
A.2 Euler-Lagrange-Gleichungen und Lagrange-d'Alembert-Prinzip .	162
A.3 Diskrete Gleichungen mittels DMOC . . . . .	165
A.3.1 Diskrete Euler-Lagrange-Gleichungen . . . . .	166
A.3.2 Diskrete Randbedingungen . . . . .	167
A.3.3 Bestimmung der exakten Geschwindigkeiten . . . . .	169
<b>B Literaturverzeichnis</b>	<b>171</b>



## Abkürzungsverzeichnis

AWP	Anfangswertproblem
DMOC	Discrete Mechanics and Optimal Control
DMOCC	Discrete Mechanics and Optimal Control for Constrained Systems
GAIO	Global Analysis of Invariant Objects
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
LQR	Linear quadratischer Regler
MKS	Mehrkörpersystem
NAG	Numerical Algorithms Group
NLP	Nichtlineare Programmierung
QP	Quadratische Programmierung
SQP	Sequentielle quadratische Programmierung



## Symbolverzeichnis

$A$	Systemmatrix
$a_1, a_2, a_3$	Abstände zum Schwerpunkt der Pendelarme
$a, b$	Gewichtungsfaktoren
$\alpha_i$	Gewichtungsfaktoren
$\alpha^*$	optimale Schrittweite
$B$	Eingangsmatrix des linearisierten Systems
$\mathcal{B}$	Eingangsmatrix
$C$	Kostenfunktion in der Zielfunktion
$c$	Ungleichheitsnebenbedingungen
$\mathcal{C}$	Coriolis- und Zentrifugalkräfte
$C_d$	diskrete Kostenfunktion
$c_j$	Kosten des Manövers
$D_1, D_2$	Ableitung nach erster und zweiter Komponente
$d_1, d_2, d_3$	Dämpfungskonstanten in den Gelenken
$\delta q$	Variation
$\Delta t$	Diskretisierungsgitter
$E$	Kontrollaufwand
$E^s, E^u, E^c$	stabiler, instabiler und Zentrumstraum
$f$	nichtlineare Dynamik
$F_1^d, F_2^d, F_3^d$	Dämpfungsmomente
$\mathcal{F}$	Kräfte
$f_k^-, f_k^+$	linke und rechte diskrete Kräfte
$g$	Gleichheitsnebenbedingungen
$\Gamma, \Delta\tau$	Zeitgitter und Schrittweite
$\mathcal{G}$	Terme bezüglich der Gewichtskraft
$H$	Hamilton-Funktion
$h$	Schrittweite
$I$	Zeitintervall
$J$	Gütemaß / Zielfunktion
$J_d$	diskrete Zielfunktion
$k$	Regler
$\kappa$	Kostenfunktion in der Zielfunktion
$L$	Lagrange-Funktion

---

$l_1, l_2, l_3$	Längen der Pendelarme
$\lambda$	Lagrange-Multiplikatoren
$\lambda_i$	Eigenwerte
$\lambda^{ss}, v^{ss}$	Eigenwert mit kleinstem Realteil und zugehöriger Eigenvektor
$\lambda^{uu}, v^{uu}$	Eigenwert mit größtem Realteil und zugehöriger Eigenvektor
$l_b^u, u_b^u$	untere und obere Grenzen der Steuerung
$l_b^z, u_b^z$	untere und obere Grenzen der Zustandsgrößen
$\mathcal{L}$	abstrakte Form der Euler-Lagrange-Gleichungen
$L_d$	diskrete Lagrange-Funktion
$\mathbb{F}L$	Legendre-Transformation
$\mathbb{F}^{f^+} L_d, \mathbb{F}^{f^-} L_d$	diskrete Legendre-Transformation
$m_0$	Masse des Wagens
$m_1, m_2, m_3$	Massen der Pendelarme
$\mathcal{M}$	Massenmatrix
$m_i$	Übergangspunkte
$\mu$	Parametrisierungsvektor
$N$	Anzahl der Diskretisierungspunkte
$n$	Systemordnung
$\nabla$	Gradient
$n_c$	Dimension der Ungleichheitsnebenbedingungen
$n_g$	Dimension der Gleichheitsnebenbedingungen
$n_k$	Anzahl der Zielfunktionen
$n_p$	Dimension des Parametervektors
$n_u$	Dimension des Steuervektors
$P$	Riccati-Matrix
$p$	Parametervektor
$\Phi^t$	Fluss
$\phi$	Zielfunktion
$\Pi_\mu^\nu$	Raum der Polynome bis zum Grad $\mu$ mit $\nu$ -dimensionalen Vektoren
$\pi_i$	Übereinstimmungsbedingungen
$p_k$	diskreter Impuls
$Q$	Konfigurationsraum
$q$	Vektor der verallgemeinerten Lagekoordinaten
$q^0, \dot{q}^0$	Anfangsbedingungen

---

$\mathcal{Q}$	Gewichtungsmatrix im Riccati-Entwurf
$q_d$	diskreter Pfad
$\dot{q}$	Vektor der verallgemeinerten Geschwindigkeitskoordinaten
$q^f, \dot{q}^f$	Endbedingungen
$q_k$	Diskretisierungspunkt der Konfiguration
$\dot{q}_{max}, \ddot{q}_{max}$	maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung
$r$	Nebenbedingungen am Endpunkt
$\mathcal{R}$	Gewichtungsmatrix im Riccati-Entwurf
$\rho$	Scheduling-Vektor
$S$	Suchrichtung
$s$	Knotenwerte
$\sigma$	Spektrum
$T$	kinetische Energie
$t_0$	Startzeit
$t_f$	Endzeit
$T_{ges}$	Gesamtzeit
$T_j$	Zeit für Manöver zur Mannigfaltigkeit
$T_{mnf}$	Zeit auf dem Orbit der Mannigfaltigkeit
$TQ$	Tangentialraum
$T_{q(t)}^* Q$	Kotangentialraum
$U$	Menge der zulässigen Steuerungen
$u$	Steuergröße
$u_d$	diskrete Steuerung
$u_F$	Kraft als Steuergröße
$u_k$	Diskretisierungspunkt der Steuerung
$u_M$	äußeres Moment als Steuergröße
$u^*$	nominale/optimale Steuerung
$u_y$	Beschleunigung als Steuergröße
$V$	potentielle Energie
$v^i, u^i, w^i$	Eigenvektoren
$W^s, W^u$	globale stabile und instabile Mannigfaltigkeit
$W_\varepsilon^s, W_\varepsilon^u$	lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeit
$x$	Zustandsvektor
$x^0$	Startpunkt
$x^1, x^2, x^3, x^4$	redundante Koordinaten des Pendels mit Wagen
$\bar{x}$	Fixpunkt

$x^f$	Endpunkt
$x_{mnf}$	Orbit auf Mannigfaltigkeit
$x^*$	nominale/optimale Trajektorie
$y$	Verschiebung des Wagens
$\mathcal{Y}$	parameterabhängige Ansatzfunktion

# 1 Einleitung

Ein aktuiertes Pendel ist ein klassisches Anwendungsbeispiel, an dem neue Regelungstechnische und systemtheoretische Ansätze von Forschern getestet werden. Anschaulich liegt das Interesse hauptsächlich in dem Erreichen und der Stabilisierung der instabilen oberen Ruhelage. Mehrfachpendel besitzen dabei besondere Eigenschaften, z.B. ist ein Doppelpendel auf einem Wagen ein unteraktuiertes System (die Anzahl der Freiheitsgrade ist größer als die Anzahl der Steuereingänge), denn die Pendelarme können nicht direkt, sondern nur indirekt über den Wagen angesteuert werden. Die Trajektorienplanung und Durchführung stellt für solche Systeme eine große Herausforderung dar.

In dieser Arbeit werden Strategien entwickelt, um den Aufschwung des Doppel- bzw. Dreifachpendels in die instabile obere Ruhelage umzusetzen. Dabei liegt der Hauptaspekt bei der Bestimmung eines Manövers hierfür und somit bei der Auslegung der passenden Vorsteuerung. Die zusätzlich benötigte Regelung für die Stabilisierung basiert auf klassischer linearer Regelungstechnik. Mit Hilfe von optimaler Steuerung können geeignete Vorsteuerungen für das Pendel bestimmt werden, sodass dieses sich nicht auf einer beliebigen Bahn bewegt, sondern das Manöver in die instabile Ruhelage zusätzlich optimal bezüglich gewünschter Ziele ist. Durch den Einsatz von Mehrzieloptimierung bei der Auslegung der optimalen Steuerung ist es außerdem möglich, optimale Kompromisse zwischen mehreren Zielen für das System zu bestimmen.

## 1.1 Motivation

Die Berechnung von Trajektorien mittels Methoden der optimalen Steuerung für den Entwurf und die Realisierung einer Folgeregelung für das Pendel ist eine Besonderheit dieser Arbeit im Vergleich zu anderen Ansätzen. Durch sie ist es z.B. möglich, optimale Manöver zu berechnen und dabei technische Beschränkungen, die bei realen mechatronischen Systemen immer auftreten, sehr elegant schon in der Berechnung einzubinden. Im Folgenden werden in Abschnitt 1.1.1 einige Grundideen zur optimalen Steuerung erläutert.

Außerdem ist die Dynamik von Pendelsystemen ein zentraler Aspekt, der zur Komplexität der hier behandelten Aufgabe beiträgt. In Abschnitt 1.1.2 wird anschaulich das Verhalten eines idealisierten Pendels dargestellt und analysiert, welche Auswirkungen seine Eigenschaften auf den Entwurf und die Umsetzung von Trajektorien an einem realen Pendel haben.

### 1.1.1 Optimale Steuerung dynamischer Systeme

Die Optimierung von Bewegungen eines mechanischen Systems ist eine wichtige Aufgabe in vielen technischen Anwendungen. Dabei beschäftigt sich das Gebiet der optimalen Steuerung mit der Berechnung von Trajektorien, die ein bestimmtes Optimalitätskriterium erfüllen. Es wird untersucht, wie die Eingangsgröße des Systems zu wählen ist, um Optimalität zu erreichen. Dabei stellt sich die Frage, wann eine bestimmte Steuerung die optimale Steuerung eines dynamischen Systems darstellt.

Bei der Berechnung einer optimalen Steuerung wird die Optimalität immer bezüglich einer vom Benutzer definierten Zielfunktion ausgedrückt. Diese Zielfunktion kann ein oder mehrere, für das System wichtige, Ziele berücksichtigen. Dies führt dazu, dass durch die Veränderung der Zielfunktion auch eine andere Lösung optimal für das System ist. Daher kann man sagen, dass die optimale Lösung stark von der gewählten Zielfunktion abhängt und eine optimale Lösung immer nur optimal bezüglich der gewählten Zielfunktion ist.

Vor der Berechnung der optimalen Steuerung muss das Optimalsteuerungsproblem des dynamischen Systems zuerst in geeigneter Weise formuliert werden. Dabei müssen diverse zusätzliche Nebenbedingungen berücksichtigt werden: Die Bewegung eines allgemeinen mechanischen Systems wird mit Hilfe von Bewegungsgleichungen beschrieben, denen die Lösungstrajektorie des Optimalsteuerungsproblems entsprechen muss. Zusätzlich müssen ein Start- und Endpunkt angegeben werden. Dabei unterliegen mechanische Systeme normalerweise technischen Beschränkungen an die Zustände und die Eingangsgrößen, so kann ein Aktor z.B. keine beliebig große Kraft stellen. Diese technischen Eigenschaften sollten auch bei der optimalen Steuerung berücksichtigt werden, denn wenn dies nicht beachtet wird, können sich unzulässige, also nicht realisierbare, Lösungen des Optimalsteuerungsproblems ergeben.

Nachdem das Optimalsteuerungsproblem in geeigneter Weise aufgestellt worden ist, wird anschließend eine optimale Steuerung bestimmt. Diese Lösung erfolgt in den meisten Fällen numerisch, da eine optimale Steuerung nur für sehr einfache Systeme analytisch berechnet werden kann. Um das beschriebene kontinuierliche optimale Steuerungsproblem numerisch lösen zu können, muss dieses in ein diskretes Problem umgewandelt werden. Dies ist ein entscheidender Schritt bei der Bestimmung der optimalen Steuerung, da das Ergebnis stark von der Wahl des numerischen Verfahrens und dessen Parametrisierung abhängt. Das diskrete Optimierungsproblem kann anschließend mit numerischen Standardverfahren gelöst werden, und im Falle der Konvergenz des Algorithmus erhält man eine Lösung des Optimalsteuerungsproblems.

In dieser Arbeit werden Methoden der optimalen Steuerung verwendet, um optimale Trajektorien für den Aufschwung des Mehrfachpendels zu berechnen. Dabei geht es nicht allein darum, eine einzelne optimale Trajektorie zu bestimmen, sondern durch die Variation des Optimalsteuerungsproblems und die dadurch entstehenden Lösungen auch zusätzliches Systemwissen zu erhalten.

### 1.1.2 Mehrfachpendel und ihre Eigenschaften

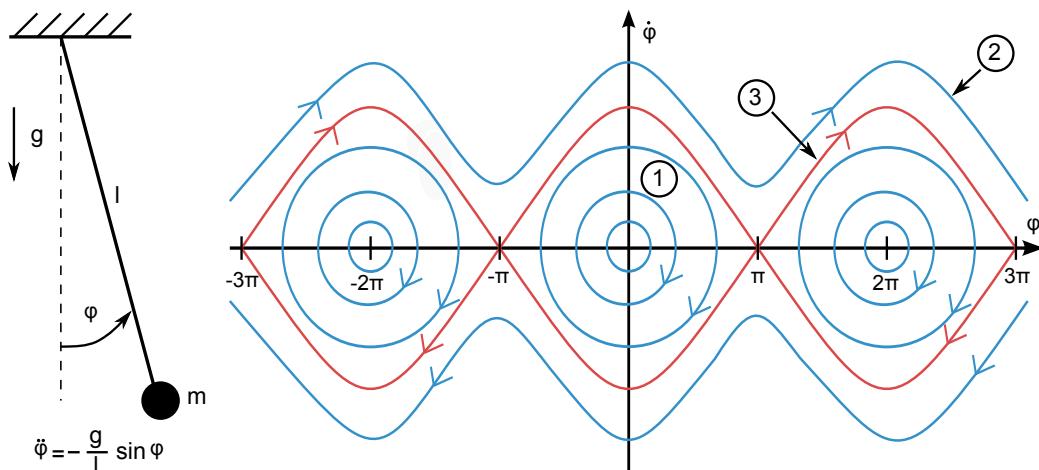


Bild 1-1: Modell des mathematischen Pendels (links) und ausgewählte Trajektorien in der Zustandsebene (rechts)

Das einfache Pendel (siehe Bild 1-1 (links)) wird in der Lehre und Forschung als ein anschauliches Beispiel für die Entwicklung und Demonstration von regelungstechnischen Theorien und Methoden verwendet. Die Stabilisierung in der instabilen oberen Ruhelage lässt sich durch einen einfachen Stab als Balancierstange nachstellen. Je nach Größe und Gewicht der Stange funktioniert die Stabilisierung auf der Hand oder dem Finger mehr oder weniger gut, aber nach etwas Übung sind die meisten Menschen in der Lage diese „regelungstechnische“ Aufgabe für ein paar Sekunden auszuführen. Dabei findet eine Regelung wie in jedem klassischen Regelkreis (siehe Bild 1-2) statt: Durch die Augen und andere Sinnesorgane werden die Bewegungen des Stabes und der Hand beobachtet (Messung der Regelgröße), es wird überprüft, ob sich der Stab in einer möglichst vertikalen Position befindet (Soll-/Istwert Vergleich) und bei einer entsprechenden Abweichung (Regeldifferenz) wird die Hand (Stelleinrichtung) so bewegt (Stellgröße), dass die aufrechte Position des Stabes wieder erreicht wird. Der Mensch selbst fungiert in diesem Fall also als Regler.

Ein Pendelsystem kann in verschiedensten Ausprägungen auftreten. Von einem mathematischen Pendel (siehe Bild 1-1 (links)) spricht man, wenn die Rotation

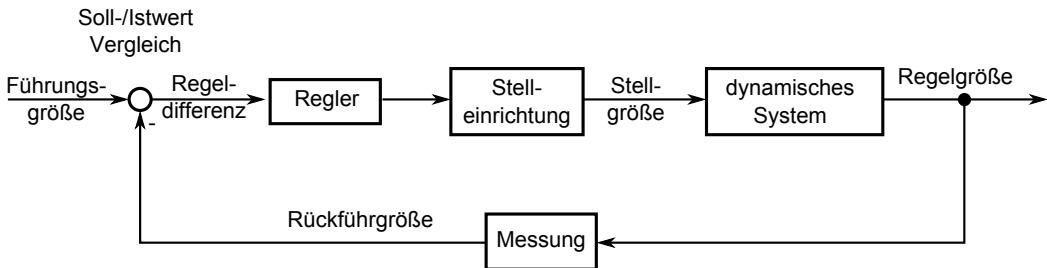


Bild 1-2: Standardregelkreis

der Gelenke ideal stattfindet, also keine Dämpfung vorhanden ist. Ein Einfachpendel dieser Art wird, wenn man es leicht auslenkt, eine Dauerschwingung ausführen und somit „ewig“ weiter schwingen. In der Zustandsebene des Einfachpendels (siehe Bild 1-1 (rechts)) stellt eine solche Dauerschwingung näherungsweise eine Ellipse um die untere stabile Ruhelage (z. B. ( $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$ )) dar, hier gekennzeichnet durch ①. Da die Ruhelagen nicht eindeutig sind, wiederholen sich diese Strukturen in der Zustandsebene. Es sind aber noch weitere interessante und dynamisch unterschiedliche Trajektorien zu erkennen. Wenn das Pendel mit einer ausreichend hohen Anfangsgeschwindigkeit gestartet wird, wird es aufeinander folgende Überschläge durchführen, so dass der Winkel  $\varphi$  immer weiter wächst bzw. abnimmt, je nachdem ob die Anfangsgeschwindigkeit positiv oder negativ ist (Trajektorien oben bzw. unten in der Zustandsebene in Bild 1-1, gekennzeichnet durch ②). Eine besondere Form von Trajektorien ist hier rot eingezzeichnet und mit ③ gekennzeichnet. Sie befindet sich genau zwischen den zwei Bereichen, in dem das Systemverhalten entweder durch eine Dauerschwingung oder durch Überschläge gekennzeichnet ist. Wenn das Pendel auf der roten Trajektorie startet, läuft es automatisch in die obere instabile Ruhelage. Eine derartige Struktur wird im Weiteren auch als stabile Mannigfaltigkeit der Ruhelage bezeichnet und in Kapitel 5 für die Berechnung von optimalen Steuerungen ausgenutzt. Um dieses Pendelsystem der Realität weiter anzunähern, kann zusätzlich Reibung im Gelenk betrachtet werden. Dadurch wird die untere Ruhelage des Pendels asymptotisch stabil, da dem System durch die dämpfende Wirkung des Gelenks die Energie vollständig entzogen wird und es zur Ruhe kommt.

Die Komplexität des Systems wird erhöht, wenn zwei durch ein weiteres Gelenk verbundene Pendelarme betrachtet werden: ein sogenanntes Doppelpendel. In diesem Fall scheint sich das System auf den ersten Blick nicht entscheidend geändert zu haben, aber für die Dynamik gilt dies nicht. Ein mathematisches Doppelpendel (also ohne Reibung in den Gelenken) ist ein chaotisches dynamisches System. In der Praxis ist das Bewegungsverhalten eines solchen Systems nahezu unvorhersagbar. Mit Hilfe von Leuchtdioden und einer Langzeitbelichtung wird in Bild 1-3

eine solche Bewegung eines Doppelpendels beispielhaft dargestellt. Es wird deutlich, dass sich das Doppelpendel keineswegs gleichmäßig bewegt, sondern durch die Verkopplung der beiden Pendelarme ein sehr komplexes Manöver ausführt. Eine besondere Eigenschaft von chaotischen Systemen ist, dass schon kleine Veränderungen der Ausgangssituation das Verhalten des Pendels stark verändern. So ist es mit dem in Bild 1-3 dargestellten Versuch niemals möglich, zweimal die gleiche Trajektorie zu erzeugen. Dieses Verhalten wird auch als sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert bezeichnet.

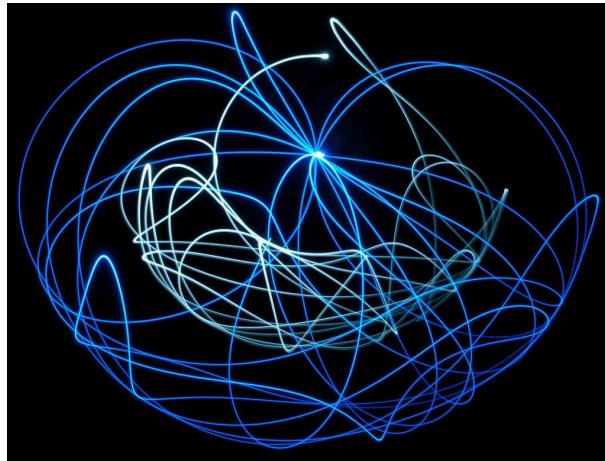


Bild 1-3: Chaotischer Orbit eines Doppelpendels

Diese besonderen Eigenschaften des mathematischen Pendels haben auch Auswirkungen auf das praktische Anwendungsbeispiel. Sowohl in Simulationen als auch am Prüfstand des Doppelpendels werden in dieser Arbeit Manöver umgesetzt. Aufgrund der sensitiven Abhängigkeit vom Anfangswert wirken sich Störungen bzw. Fehler stark aus, sodass immer auf eine möglichst exakte Ausführung geachtet werden muss und eine zusätzliche Regelung zur Kompensation der Störungen notwendig ist. Ansonsten wären selbst einfache Manöver am Pendel nicht umsetzbar. Zusätzlich muss auch auf die starke Nichtlinearität des Systems hingewiesen werden, denn durch die beiden rotatorischen Pendelarme kommt es zu einer starken Verkopplung von trigonometrischen Funktionen. In diesem Sinne werden geeignete Regelungskonzepte verwendet, um das Pendel gezielt regeln zu können.

## 1.2 Zielsetzung

In dieser Arbeit wird gezeigt, wie optimale Trajektorien für ein unteraktuiertes mechanisches System – das Doppel- bzw. Dreifachpendel auf einem Wagen – mittels optimaler Steuerung bestimmt werden können. Dabei werden neuartige

mathematische Methoden verwendet und deren Vorteile aufgezeigt. Es werden sowohl die theoretischen Ergebnisse als auch die praktische Umsetzung in Simulationen und am Prüfstand untersucht.

Ein Hauptziel ist dabei, mit Hilfe von Mehrzieloptimierung eine große Variantenvielfalt an Lösungen zu erhalten. Dies ist wichtig, um auf unterschiedliche Anforderungen von außen reagieren zu können. Es werden dabei zwei Zielgrößen berücksichtigt: Zum einen der Steueraufwand des Motors, der ein Maß für die Energieeffizienz darstellt, und zum anderen die Dauer des Manövers, um möglichst schnelle Manöver zu erhalten. Da diese beiden Ziele gegenläufig sind, ergeben sich für die jeweiligen optimalen Lösungen Kompromisse zwischen ihnen, die durch eine unterschiedliche Gewichtung der Ziele verändert werden können.

Durch die Möglichkeit, viele unterschiedliche Lösungen bezüglich ihrer Zielfunktionswerte untersuchen zu können, kann zusätzliches Systemwissen erlangt werden. Die entstehenden Trajektorien stellen eine Wissensbasis für das System dar. So kann z. B. analysiert werden, wie eine Bewegung des Pendels aussieht, die für eine bestimmte Manöverzeit optimal ist. Im Vorfeld besitzt man speziell für komplexe mechanische Systeme keine Vorstellung darüber, wie eine solche Bewegung aussehen könnte. Durch die Variation von äußeren Parametern bei der Bestimmung von optimalen Lösungstrajektorien lässt sich außerdem untersuchen, ob sich eine Veränderung des Systems positiv auf die Dynamik eines Manövers auswirkt. Zum Beispiel kann hier die Wirkung eines verlängerten Verfahrwegs am Prüfstand auf die Zielfunktionswerte des Manövers untersucht werden.

In einem weiteren Schritt werden Strategien entwickelt und analysiert, die Mannigfaltigkeiten eines dynamischen Systems für die optimale Steuerung nutzen. Auf diesen speziellen Strukturen kann sich das System kostenlos bewegen und durch das Ausnutzen dieser sogenannten natürlichen Dynamik ist es möglich, besondere, physikalisch motivierte Ansätze für eine optimale Steuerung zu verwenden. Durch den Vergleich mit einem Standardansatz lässt sich diese neuartige Strategie der Verwendung der natürlichen Dynamik weitergehend evaluieren.

Das Manöver, welches in dieser Arbeit hauptsächlich betrachtet wird, ist der Aufschwung des Pendels aus der unteren Ruhelage (siehe ① in Bild 1-4) in die instabile obere Ruhelage (siehe ④ in Bild 1-4). Prinzipiell können die hier vorgestellten Methoden aber genauso auf Manöver zwischen den anderen Ruhelagen angewendet werden.

In dieser Arbeit werden somit die drei folgenden zentralen Aspekte behandelt:

- Am Anfang steht die Modellbildung und die Beschreibung des Prüfstands für das Mehrfachpendel auf einem Wagen. Dazu gehört auch der Regelungsansatz mit der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung.

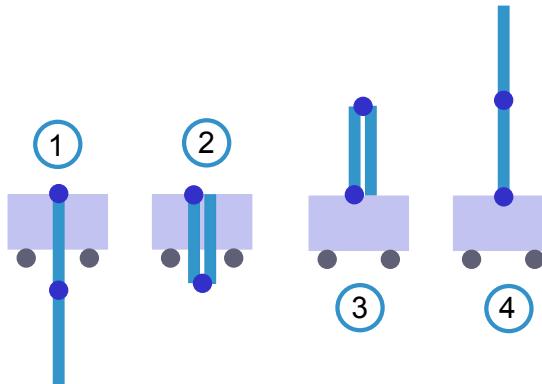


Bild 1-4: Die vier unterschiedlichen Ruhelagen des Doppelpendels mit Wagen

- Im zweiten Schritt geht es um die optimale Steuerung mit der Methode *Discrete Mechanics and Optimal Control* (DMOC), die zunächst theoretisch eingeführt und anschließend für die Berechnung vielfältiger Manöver verwendet wird. Diese werden auch am Prüfstand getestet.
- Als weitere Methode wird dann die optimale Steuerung auf Mannigfaltigkeiten vorgestellt. Hierbei wird auch die DMOC Methode für die Berechnung von optimalen Sequenzen angewendet. Auch dieser neuartige Ansatz wird am Prüfstand evaluiert.

Es wird deutlich, dass diese Aspekte stark miteinander verzahnt sind und aufeinander aufbauen. Dabei sind die optimale Steuerung mit der Anwendung am Mehrfachpendel die zentralen Punkte, die immer wieder aufgegriffen werden. Dies ist auch in Bild 1-5 grafisch dargestellt.

Insgesamt ist es ein Ziel dieser Arbeit, die verwendeten Methoden und das Vorgehen so zu beschreiben, dass es auch auf andere mechanische Mehrkörpersysteme übertragen werden kann. Dies kann dadurch erreicht werden, dass die verwendeten Methoden zur optimalen Steuerung allgemein erläutert und die Systemanalyse anschließend am Beispiel des Doppelpendels auf einem Wagen ausführlich diskutiert wird. Dadurch ist es möglich, das Vorgehen auch für andere Systeme zu wiederholen und in entsprechender Weise durch die Berechnung von Manövern Systemwissen zu generieren. Dies können z.B. Systeme im Bereich der Robotik sein, bei denen effiziente Trajektorien berechnet werden sollen, die nur eingeschränkte Bewegungsmöglichkeiten besitzen, da sie mit anderen Robotern kooperieren müssen. Von Vorteil wäre hier, dass die Trajektorien optimal bezüglich gewählter Ziele sind und technische Einschränkungen einfach berücksichtigt werden können.

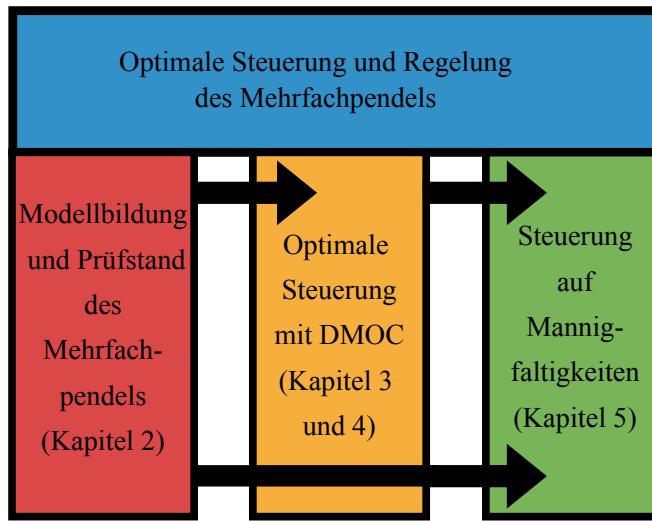


Bild 1-5: Aufbau der zentralen Aspekte dieser Arbeit

### 1.3 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen zum Einsatz von Mehrfachpendelsystemen vorgestellt. Dabei wird sowohl auf den Stand der Technik bezüglich der Systeme und Methoden eingegangen, als auch die Modellierung des in dieser Arbeit verwendete Doppel- bzw. Dreifachpendels erläutert. Es wird die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur vorgestellt, die für den Aufschwung des Mehrfachpendels angewendet wird. Für die Auslegung der Regelung werden zwei unterschiedliche Ansätze dargestellt, die beide auf linearen Methoden basieren. Erste Tests dieser Regelung in Simulationen und am Prüfstand schließen dieses Kapitel ab.

Die Grundlagen zur optimalen Steuerung von dynamischen Systemen werden in Kapitel 3 vorgestellt. Das allgemeine Optimalsteuerungsproblem wird hergeleitet und anschließend werden unterschiedliche Methoden zur Lösung vorgestellt. In dieser Arbeit wird die Methode DMOC für die Herleitung des diskreten Optimalsteuerungsproblems verwendet. Die theoretischen Grundlagen dieser Methode und ihre besonderen Eigenschaften werden dargestellt. Außerdem wird auf die aktuelle Forschungsarbeit mit der DMOC Methode eingegangen.

In Kapitel 4 wird dann gezeigt, wie das diskrete Optimalsteuerungsproblem mittels SQP-Verfahren (*Sequentielle Quadratische Programmierung*) gelöst werden kann. Dabei werden durch einfache Mehrzieloptimierungsmethoden unterschiedliche Ziele für die Auslegung der Trajektorien für das Pendel berücksichtigt. Im Anschluss werden die Ergebnisse ausführlich diskutiert. Ein Aspekt dabei ist die große Variantenvielfalt, die für den Aufschwung des Doppelpendels mittels Mehrzieloptimierung erzielt werden kann. Die entstehenden Lösungen können bezüglich

ihrer Pareto-Optimalität analysiert werden. Durch eine geeignete Nachoptimierung wird anschließend untersucht, wie sich die Lösungen bezüglich der unterschiedlichen Ziele gezielt variieren lassen.

Eine neue Methode für die optimale Steuerung von mechanischen Systemen auf (in)stabilen Mannigfaltigkeiten wird in Kapitel 5 beschrieben. Dabei wird die stabile Mannigfaltigkeit genutzt, da sich das System auf ihr unaktuiert, also ohne Kosten, in die obere Ruhelage bewegt. Der Ansatz basiert im Wesentlichen darauf, eine Sequenz aus einem gesteuerten Teilstück zur stabilen Mannigfaltigkeit und der Bewegung auf dieser bis zur oberen Ruhelage zu bilden. Durch eine anschließende Nachoptimierung, bei der die Sequenz als *initial guess* verwendet wird, lassen sich die Ergebnisse noch verbessern. Vergleiche mit Lösungen, die durch einen linear interpolierten *initial guess* (Standardansatz) berechnet worden sind, zeigen weitere Vorteile dieses neuen Ansatzes. Auch am Prüfstand des Doppelpendels auf einem Wagen wird die Bewegung auf der stabilen Mannigfaltigkeit analysiert.

Zum Abschluss der Arbeit wird in Kapitel 6 eine ausführliche Zusammenfassung des Vorgehens und der erzielten Ergebnisse gegeben. Außerdem werden in einem Ausblick zusätzliche Aspekte für weiterführende Forschungsaufgaben beschrieben.



## 2 Grundlagen zum Einsatz von Mehrfachpendelsystemen

Dieses Kapitel widmet sich den Grundlagen zur Einstimmung und Vorbereitung der weiteren Kapitel der vorliegenden Arbeit. Zunächst wird ein Überblick über die Möglichkeiten für den Aufbau und die Steuerung von Pendelsystemen gegeben und erläutert, welche grundsätzlichen Ansätze verwendet werden können, um solche Systeme zu steuern und zu regeln.

Im Weiteren werden die Grundlagen für die Anwendung von theoretischen Methoden und praktischen Anwendungen am Pendel vorgestellt. Dazu wird der Prüfstand eines Mehrfachpendels auf einem Wagen vorgestellt, der in dieser Arbeit für die praktische Umsetzung verwendet wird. Die notwendige Modellbildung wird für das Doppel- und Dreifachpendel durchgeführt, und es wird auch auf die Möglichkeit von verschiedenen Modelldarstellungen eingegangen. Anschließend wird die Zwei-Freiheitsgrade-Regelung bestehend aus Vorsteuerung und zusätzlicher Regelung beschrieben. Dies ist ein etabliertes Konzept und wurde z.B. auch schon in [GTZ05], [GTZ07] und [GEK13] verwendet, um Manöver für das Doppel- und Dreifachpendel inklusive Steuerung und Regelung umzusetzen. In diesem Kapitel werden zum einen diese Methode für die Anwendung am Prüfstand und zum anderen erste Ergebnisse für die Reglerauslegung vorgestellt. Dabei geht es darum, dass das System mit Hilfe eines zusätzlichen Reglers der vorgegebenen Trajektorie möglichst exakt folgt.

Am Ende dieses Kapitels ist ein grundlegendes Konzept bestehend aus den Hauptkomponenten Steuerung und Regelung für die Arbeit mit dem Pendelsystem gegeben. In den folgenden Kapiteln wird dieses im Bereich der Steuerung aufgegriffen, um neue mathematische Methoden für die Auslegung eines optimalen Systemverhaltens zu entwickeln.

### 2.1 Pendelsysteme in Theorie und Praxis - Ein Stand der Technik

Das in dieser Arbeit betrachtete Pendelsystem auf einem Wagen ist nicht die einzige Möglichkeit der praktischen Realisierung. Im Folgenden werden weitere Möglichkeiten für den Aufbau eines allgemeinen Pendelsystems beschrieben und es wird gezeigt, welche Methoden der Steuerung und Regelung daran entwickelt und getestet wurden.

### 2.1.1 Aufbau und Ansteuerung von Pendelsystemen

Viele Wissenschaftler haben sich in ihrer Forschung mit unterschiedlichen Pendelsystemen und Manipulatoren beschäftigt, um diverse Methoden der Regelungstechnik zu entwickeln oder auch deren Anwendung in der Lehre darstellen zu können. Neue Methoden, vor allem in der nichtlinearen Regelungstechnik, wurden mit Pendelsystemen getestet, realisiert und auch anschaulich dargestellt. Dabei lassen sich zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Pendelsystemen beschreiben: Die einen besitzen ein aktuiertes Gelenk, und die anderen können sich durch einen Wagen (Motor) auf einem horizontalen Fahrweg bewegen. Eine Variante des zuletzt genannten Systems ist das rotatorische Pendel.

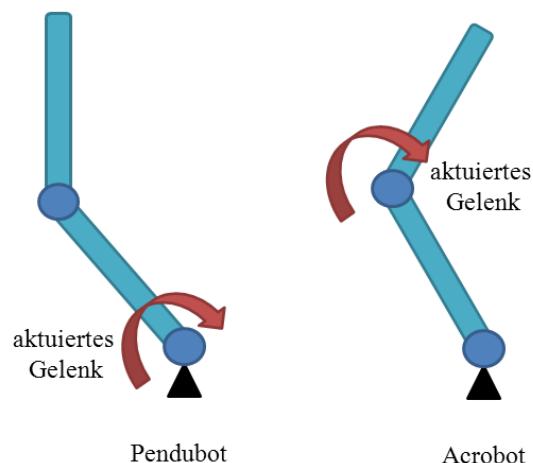
Bei den Mehrfachpendelsystemen handelt es sich meist um unteraktuierte mechanische Systeme. Dies bedeutet, dass bei diesen Systemen die Anzahl der Freiheitsgrade größer ist als die Anzahl der Steuergrößen. Die Steuerung und Regelung von unteraktuierten Systemen ist auf Grund ihrer diversen komplexen Eigenschaften schwierig und eine allgemeine Behandlung solcher Systeme existiert nicht. Aus Regelungstechnischer Sicht ist es eine besondere Herausforderung, dass es dadurch Körper gibt, die nicht direkt beeinflusst werden können. Bei unteraktuierten Systemen kann keine vollständige Zustandslinearisierung durchgeführt werden, so dass sich eine nicht beobachtbare interne Dynamik (Nulldynamik) des Systems ergibt. Die Regelung wird häufig passivitätsbasiert ausgeführt (siehe zum Beispiel [Spo98]). Für eine erfolgreiche Steuerung und Regelung ist es nötig, eine genaue Systemkenntnis inklusive detaillierter Modellbildung zu besitzen und in der Umsetzung sehr exakt zu arbeiten. Die Entwicklung von neuen Methoden an Mehrfachpendelsystemen dient der Motivation dieser Verfahren, da die Ergebnisse dann auf andere unteraktuierte Systeme übertragen werden können. Beispiele für solche Untersuchungen lassen sich in [Spo96], [FL01], [FLS00], [LFB00] und [SPL00] finden.

#### Pendel mit aktuiertem Gelenk

In diesem Abschnitt wird der Fokus auf Pendelsysteme gelegt, die eine Variante des Pendelsystems auf einem Wagen darstellen. Dabei wird kein Wagen als Aktor verwendet, sondern eines der Gelenke wird direkt aktuiert.

Die Systeme Acrobot (siehe [MH90], [Spo95]) und Pendubot (siehe [SB95]) bestehen beide aus zwei Pendelarmen die mit zwei rotatorischen Gelenken verbunden bzw. gelagert werden. Solche unteraktuierten Systeme treten im Bereich von Robotersystemen häufig auf und werden als akademische Beispiele bei der Entwicklung von Methoden verwendet. Beim Acrobot ist dabei das fest gelagerte Gelenk aktuiert und beim Pendubot das Gelenk zwischen den Pendelarmen (siehe Bild 2-1). Dadurch sind sich beide Systeme ähnlich, und es können prinzipiell

die gleichen Methoden für eine Regelung verwendet werden [SB95]. Mit Hilfe von partieller Zustandslinearisierung des Systems und der Analyse der Nulldynamik lässt sich z. B. ein Regler für den Aufschwung herleiten. Da diese Systeme nur eine unabhängige Eingangsgröße besitzen, ergibt sich eine eindimensionale Mannigfaltigkeit von Ruhelagen. Da z. B. beim Pendubot der innere Pendelarm durch ein bestimmtes konstantes Moment in dem aktuierten Gelenk in jeder beliebigen Position gehalten werden kann, gibt es jeweils eine instabile obere Ruhelage des Systems, wenn der andere Pendelarm senkrecht steht. Eine instabile Ruhelage kann beim Acrobot dadurch eingestellt werden, dass das aktuierte Gelenk die Pendelarme in einer ausbalancierten Pose fixiert. Eine mögliche Ruhelage dieser Systeme ist jeweils auch in Bild 2-1 dargestellt.



*Bild 2-1: Pendubot und Acrobot, jeweils in einer möglichen instabilen Ruhelage; die roten Pfeile markieren die aktuierten Gelenke*

### Pendel mit Wagen bzw. rotatorisches Pendel

Eine weitere Art von Pendelsystemen sind Pendel auf einem Wagen, welche sich auf einem horizontalen Fahrweg bewegen (siehe z. B. [GTZ07], [ZR01]). Diese Systeme haben im Gegensatz zu den Pendeln mit aktuiertem Gelenk eine andere Dynamik, da sie z. B. im Fall eines Doppelpendels auf einem Wagen zwei frei schwingende Pendelarme besitzen. Somit können die Pendelarme nicht direkt, sondern nur durch den aktuierten Wagen bewegt werden. Im Gegensatz zum Acrobot und Pendubot ist das Doppelpendel auf einem Wagen ein zweifach unteraktuiertes System (Anzahl Freiheitsgrade: 3, Anzahl Aktoren: 1). Für die Dynamik eines mathematischen Doppelpendels, bestehend aus zwei Massepunkten, die reibungsfrei schwingen, kann sogar gezeigt werden, dass sie chaotisch ist,

siehe auch Abschnitt 5.1.1. Wegen dieser Eigenschaft ist das Systemverhalten sehr komplex.

Eine Variante des Pendels auf einem Wagen ist das rotatorische Pendel, welches auch Furuta-Pendel genannt wird [ÅF96], [LFSM09]. Ein rotatorisches Pendel mit einem Pendelarm ist in Bild 2-2 zu sehen. Hierbei ist ein Pendelarm an einem rotierenden Stab befestigt, der sich mit Hilfe eines Aktors drehen lässt. Dieser Aufbau des Pendels hat den Vorteil, dass der Fahrweg unbeschränkt ist, da der Aktor beliebig viele Umdrehungen in eine Richtung durchführen kann, um das Pendel aufzuschwingen.



Bild 2-2: Rotatorisches Pendel [Wik13]

### 2.1.2 Ansätze für Steuerung und Regelung

Der Aufschwung des Einfach- oder Doppelpendels auf einem Wagen in die inverse Position (obere Ruhelage) ist eine herausfordernde Aufgabe, da das System unteraktuiert ist und eine komplexe Dynamik besitzt. Dieses Problem wird z. B. durch energiebasierte Methoden gelöst (siehe [ZR01], [ÅF96]). Bei diesen Methoden geht es darum, mit Hilfe von Energie- bzw. Lyapunov-Funktionen einen Regler zu entwerfen, der ein bestimmtes Energilevel (z. B. das der oberen Ruhelage) einregelt. Wenn die gewünschte Ruhelage erreicht ist, kann dann ein linearer Regler (LQ-Regler, siehe auch Abschnitt 2.4.2) verwendet werden, um diese zu stabilisieren.

In [ZR01] wird ein Regler für den Aufschwung des Doppelpendels aus einer beliebigen Position in die inverse Position mit Hilfe von Passivitätseigenschaften und *energy shaping* ausgelegt. Während des Aufschwungs bringt der energiebasierte Regler das Pendel in einen bestimmten Einzugsbereich um die inverse Position, wo dann ein Regler zum Balancieren in der oberen Ruhelage aktiviert werden kann. Der in der Ruhelage verwendete Regler basiert auf linearen Methoden.

Für einen in ähnlicher Weise ausgelegten Regler kann in [Xin11] sogar gezeigt werden, dass im geschlossenen Regelkreis das Pendel gegen die obere Ruhelage konvergiert, indem das entsprechende Energieniveau angenommen wird.

Die energiebasierten Methoden haben den Vorteil einer hohen Robustheit des Systems bezüglich Störungen oder auch Modellgenauigkeiten, denn es wird keine Trajektorie fest vorgegeben. Wenn Störungen auftreten, ist der Regler in der Lage sich anzupassen und auch dann noch das Regelziel zu erreichen. Ein Nachteil, der sich aus dem eben beschriebenen Verhalten ergibt, besteht darin, dass die Regelung eines Systems mit energiebasierten Methoden nicht zeiteffizient ist. Das Erreichen des Regelziels kann erstens sehr lange dauern, und man kann zweitens keine genaue Zeit angeben, zu der es wirklich erreicht wird.

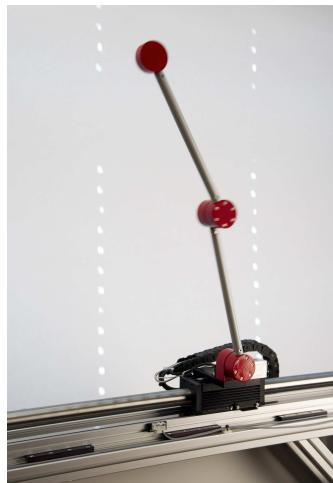
Dieser Nachteil kann dadurch behoben werden, dass im Vorfeld eine - nach Möglichkeit optimale - Trajektorie für die Bewegung des Systems berechnet wird. Man gibt also dem System das komplette Verhalten von der Ausgangslage zum Zielpunkt vor und kann mit Hilfe einer zusätzlichen Regelung dafür sorgen, dass diese ausgeführt wird. Ein solcher Ansatz, bestehend aus einer Kombination aus Steuerung und Regelung, wird als Zwei-Freiheitsgrade-Struktur bezeichnet. Durch dieses Vorgehen ist das Systemverhalten deterministisch, und es ist die Möglichkeit gegeben, z.B. die Dauer der Bewegung oder die Auslenkung der Zustände genau vorherzusagen. Kleinere Störungen können durch die zusätzliche Regelung abgefangen werden. Hierdurch kommt es nur zu leichten Abweichungen von der Solltrajektorie. Größere Eingriffe in das System führen dagegen dazu, dass die gewünschte Trajektorie nicht durchgeführt werden kann. Für einen erneuten Test muss das System außerdem wieder in die exakte Ausgangslage versetzt werden. Somit wird deutlich, dass beide Ansätze gewisse Vor- und Nachteile besitzen. Es muss immer ein Kompromiss zwischen Robustheit bzw. Flexibilität und der Schnelligkeit des gewünschten Manövers getroffen werden.

Eine Regelung durch eine Zwei-Freiheitsgrade-Struktur wird z.B. in [GTZ07] oder [RRA02] dazu verwendet, einen Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen aus der unteren in die obere instabile Ruhelage durchzuführen. In [GTZ07] wird eine inversionsbasierte Steuerung verwendet, um Trajektorien für das Aufschwungmanöver zu berechnen. Ein Randwertproblem wird gelöst, um die interne Dynamik des Pendels zu berücksichtigen. Dabei werden freie Parameter in der gesuchten Lösungstrajektorie eingeführt, um ausreichend Freiheitsgrade zu erhalten.

ten. Der zusätzliche stabilisierende Regler wird ebenfalls mit linearen Methoden ausgelegt. Durch ein vergleichbares Vorgehen ist es in [GEK13] sogar möglich, den Aufschwung und die Stabilisierung für das Dreifachpendel auf einem Wagen am Prüfstand durchzuführen.

## 2.2 Prüfstand

Für die Arbeiten mit einem Mehrfachpendel (in dieser Arbeit wird das Doppel- bzw. Dreifachpendel getestet) wurde am Lehrstuhl für Regelungstechnik und Mechatronik (RtM) ein entsprechender Prüfstand aufgebaut. In Bild 2-3 ist der reale Prüfstand zu sehen.



*Bild 2-3: Prüfstand des Doppelpendels auf einem Wagen*

Beim Aufbau des Prüfstands wurde ein Linearantrieb (Linearmotor LKL 20-85, Bosch Rexroth) verbaut, der gewährleistet, dass hochdynamische Bewegungen der Pendelarme durchgeführt werden können. Der Motor besitzt einen Verfahrweg von  $\pm 0.6$  m, eine maximale Geschwindigkeit von  $5 \frac{m}{s}$  und eine maximale Beschleunigung von  $101 \frac{m}{s^2}$ . Es wurde außerdem darauf geachtet, dass die Gelenke des Pendels besonderen Anforderungen genügen. Sie sind am Lehrstuhl für Regelungstechnik und Mechatronik der Universität Paderborn konstruiert worden und sehr reibungsarm ausgelegt. Dies hat den Vorteil, dass die dynamischen Bewegungen der Pendelarme nur wenig durch Reibung beeinträchtigt werden. Des Weiteren wurden in den Gelenken hochauflösende optische Encoder mit einer Auflösung von 20000 Striche pro Umdrehung verbaut, um die Winkellage der Pendelarme und die Bewegung des Wagens sehr präzise messen zu können. Die Signalübertragung wird mit Hilfe von Schleifringen in den Gelenken realisiert, um

eine aufwändige und störende Kabelführung im Pendel zu umgehen. Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Auslegung der Rahmenkonstruktion. Um hochdynamische Trajektorien mit dem Mehrfachpendel exakt ausführen zu können, ist es notwendig, dass die Rahmenkonstruktion möglichst standfest und schwingungsarm ist. Um diese Anforderungen zu realisieren, wurde die Rahmenkonstruktion mit Hilfe eines biege- und torsionssteifen Aluminium-Profilsystems aufgebaut. Außerdem wurde beim Aufbau auf eine zusätzliche Versteifung des Prüfstandes durch Verspannelemente geachtet. Zusätzliche Maschinenfüße aus einer schwungsdämpfenden Gummimischung sind gut für die auftretenden dynamischen Belastungen geeignet. Der Aufbau des Gesamtsystems ist in Bild 2-4 zu sehen. Die Auslegung des gesamten Prüfstandes wurde in den Arbeiten [Leß09] und [Koh09] untersucht und dokumentiert. Dabei wurden zur Auswahl der Komponenten Nutzwertanalysen aufgestellt.



Bild 2-4: Prüfstand des Mehrfachpendels auf einem Wagen (CAD-Zeichnung)

Für die Realisierung der Ansteuerung und Regelung des Pendelsystems am Prüfstand wird ein echtzeitfähiges Hardwaresystem der Firma dSPACE verwendet. Integriert ist ein Echtzeitrechner und verschiedene I/O-Panel für die notwendige digitale Signalverarbeitung.

## 2.3 Modellbildung

Für die Modellbildung des Mehrfachpendels wird nun das Modell eines Mehrkörpersystems hergeleitet, das die grundsätzliche Funktionsweise des realen Prüfstandes darstellt. Dazu sind zunächst die Abgrenzung zur Umwelt und anschließend

die Erstellung eines physikalischen Ersatzbildes notwendig. Mit Hilfe der Methode nach Lagrange werden die Bewegungsgleichungen des Systems aufgestellt, die numerisch simuliert werden können.

### 2.3.1 Doppelpendel

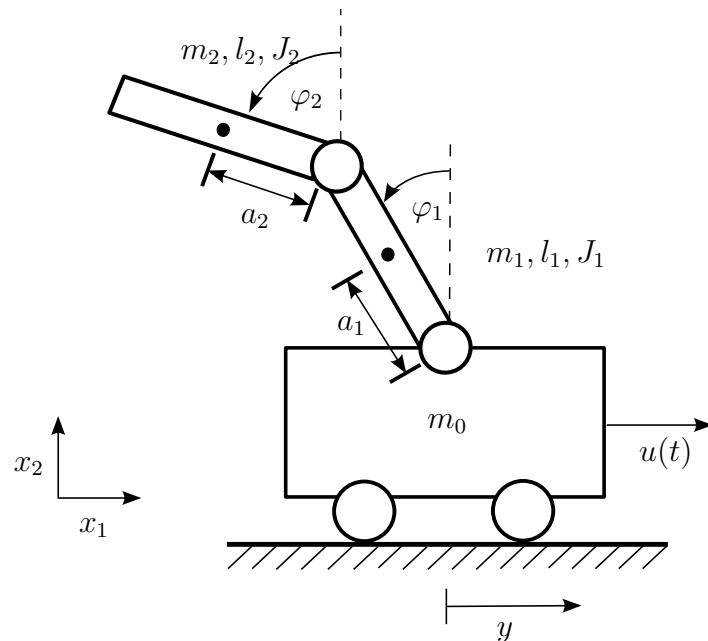


Bild 2-5: Modell des Doppelpendels auf einem Wagen

Das Modell des Doppelpendels auf einem Wagen besteht aus drei Starrkörpern, welche die zwei Pendelarme bzw. den Linearmotor repräsentieren. Die charakterisierenden Größen der Pendelarme werden durch ihre Masse  $m_i$ , ihre Länge  $l_i$ , den Abstand zwischen Gelenk und Schwerpunkt  $a_i$  und das Trägheitsmoment  $J_i$  mit  $i = 1, 2$  beschrieben (siehe Bild 2-5). Der Wagen besitzt die Masse  $m_0$ . Die generalisierten Koordinaten des Doppelpendels auf einem Wagen sind die absoluten Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der Pendelarme bezüglich einer vertikalen Auslenkung und die Verschiebung des Wagens  $y$ . Die Steuergröße des Systems wird mit  $u(t)$  bezeichnet. Im Folgenden sollen zwei äquivalente Modelle für das Pendel hergeleitet werden, die sich in der Wahl der Steuergröße unterscheiden. Zum einen kann hier die Kraft des Aktors  $u_F(t) = F_0$  und zum anderen auch die Beschleunigung des Wagens  $u_y(t) = \ddot{y}$  gewählt werden. Eine Überführung vom einen in das andere Modell ist durch die partielle Zustandslinearisierung möglich. Es wird zusätzlich angenommen, dass in den Gelenken die Dämpfung  $d_1$  bzw.  $d_2$  wirkt.

Für die Simulation des Pendels werden realistische Werte für die aufgeführten Größen benötigt. Diese sind in Tabelle 2-1 aufgeführt und konnten durch Messungen am Prüfstand und mit Hilfe von CAD-Daten gewonnen werden.

*Tabelle 2-1: Mechanische Parameter des Doppelpendels auf einem Wagen*

	innerer Pendelarm (i=1)	äußerer Pendelarm (i=2)
Länge $l_i$ [m]	0.356	0.356
Abstand zum Schwerpunkt $a_i$ [m]	0.18	0.148
Masse $m_i$ [kg]	0.775	0.654
Trägheitsmoment $J_i$ [ $N\ m\ s^2$ ]	0.0224	0.0179
Dämpfungskonstante $d_i$ [ $N\ m\ s$ ]	0.005	0.005
Masse des Wagens $m_0$ : 4 [kg]		

## Herleitung der Bewegungsgleichungen mit Krafteinang

Die Bewegungsgleichungen des Doppelpendels auf einem Wagen werden mit Hilfe des Lagrange-Formalismus hergeleitet. Dies hat den Vorteil, dass nicht alle Schnittkräfte in den Gelenken berechnet werden müssen, die im Folgenden in den Bewegungsgleichungen auch nicht benötigt werden. Beim Lagrange-Formalismus ist es notwendig, die Lagrange-Funktion des Systems herzuleiten. Diese besteht für mechanische Systeme aus kinetischer und potentieller Energie (siehe auch Gleichung (A-2-4) im Anhang). Durch eine partielle Ableitung nach den Zuständen des Systems werden dann die Euler-Lagrange-Gleichungen mit Kräften berechnet (siehe auch Gleichung (A-2-5) im Anhang). Hierfür wird die Darstellung der Pendel und des Wagens in redundanten Koordinaten  $x_1^0$  sowie  $x_1^i, x_2^i, \varphi_i$ ,  $i = 1, 2$  beschrieben. Mit  $x^i = [x_1^i \ x_2^i]$ ,  $i = 0, 1, 2$  als Schwerpunktkoordinaten der Körper lässt sich die Beziehung zwischen redundanten und generalisierten Koordinaten durch

$$\begin{aligned} x^0 &= \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}, \\ x^1 &= \begin{bmatrix} y - a_1 \sin \varphi_1 \\ a_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix}, \\ x^2 &= \begin{bmatrix} y - l_1 \sin \varphi_1 - a_2 \sin \varphi_2 \\ l_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ausdrücken. Mittels dieser Charakterisierung können die kinetische und potentielle Energie als

$$T = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^2 m_i \|\dot{x}^i\|_2^2 + \sum_{i=1}^2 J_i \dot{\varphi}_i^2 \right),$$

$$V = \sum_{i=0}^2 m_i g x_2^i$$

bestimmt werden, wobei  $g$  die Gravitationskonstante ist. Die nicht konservativen Dämpfungsmomente werden modelliert durch die folgenden linearen Ausdrücke

$$F_1^d = -d_1 \dot{\varphi}_1 + d_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1),$$

$$F_2^d = -d_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1).$$

Es wird an dieser Stelle angenommen, dass zwischen dem Motor und dem Verfahrweg keine Reibungskräfte wirken. Diese können vernachlässigt werden, da der Motor am Prüfstand geschwindigkeitsgeregt betrieben wird. Dadurch kann davon ausgegangen werden, dass eine etwaige Abweichung von der Sollgeschwindigkeit, die durch Reibung verursacht werden könnte, durch die Regelung kompensiert wird. Die zweite Möglichkeit ist es, den Motor kraftgeregt zu betreiben. Dabei würde die Reibung als Störkraft auf den Motor wirken. In diesem Fall kann die Reibung durch den Einsatz eines Reibbeobachters geschätzt und direkt kompensiert werden. Dadurch ist es möglich, den Motor in beiden Modi mit zufriedenstellender Genauigkeit zu betreiben.

Als einzige Eingangsgröße auf das System wird vorerst eine Aktorkraft auf den Wagen  $u_F(t) = F_0(t)$  gewählt. Die Gelenke der Pendelarme sind dagegen frei schwingend. Im Folgenden sei  $q = [q_1 \ q_2 \ q_0] = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ y]^T$  der Vektor der verallgemeinerte Lagekoordinaten und  $\dot{q} = [\dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2 \ \dot{y}]^T$  der Vektor der verallgemeinerten Geschwindigkeiten. Mit Hilfe der Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$ , bestehend aus kinetischer und potentieller Energie des Systems (siehe auch Gleichung (A-2-4) im Anhang), lassen sich nun die Bewegungsgleichungen nach dem Lagrange-Formalismus wie folgt bestimmen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i^d, \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} - \frac{\partial L}{\partial q_0} = F_0,$$

Daraus ergibt sich dann das folgende System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\mathcal{M}(q) \cdot \ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + \mathcal{G}(q) = \mathcal{F}(\dot{q}) + \mathcal{B} \cdot u_F, \quad (2-1)$$

mit den Matrizen

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} J_1 + a_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 & a_2 l_1 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & -(a_1 m_1 + l_1 m_2) \cos(\varphi_1) \\ a_2 l_1 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & J_2 + a_2^2 m_2 & -a_2 m_2 \cos(\varphi_2) \\ -(a_1 m_1 + l_1 m_2) \cos(\varphi_1) & -a_2 m_2 \cos(\varphi_2) & m_1 + m_2 + m_0 \end{bmatrix}, \quad (2-2)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & a_2 l_1 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2 & 0 \\ -a_2 l_1 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 & 0 & 0 \\ (a_1 m_1 + l_1 m_2) \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 & a_2 m_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2-2)$$

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} -g(a_1 m_1 + l_1 m_2) \sin(\varphi_1) \\ -g a_2 m_2 \sin(\varphi_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2-3)$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -d_1 \dot{\varphi}_1 + d_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \\ d_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2-4)$$

$$\mathcal{B} = [0 \ 0 \ 1]. \quad (2-5)$$

Das hier entstandene nichtlineare System von Differentialgleichungen besitzt den typischen Aufbau für ein Mehrkörpersystem mit der symmetrischen Massenmatrix  $\mathcal{M}(q)$ , der Matrix  $\mathcal{C}(q, \dot{q})$ , die Coriolis- und Zentrifugalkräfte enthält, und den wirkenden Kräften auf der rechten Seite bestehend aus den Dämpfungskräften und der Aktorkraft  $u_F$ . Man beachte, dass der Eingang nur auf die dritte Differentialgleichung direkten Einfluss besitzt, da das System unteraktuiert ist.

### Partielle Zustandslinearisierung von unteraktuierten mechanischen Systemen

Die allgemeine exakte Zustandslinearisierung wird bei nichtlinearen Systemen zur Auslegung einer Regelung durch nichtlineare Kompensation und Entkopplung genutzt. Durch die Wahl eines nichtlinearen Vorfilters und einer nichtlinearen Rückführung können in der Strecke enthaltene Nichtlinearitäten kompensiert werden. Das dadurch entstehende Gesamtsystem ist wirkungsäquivalent zu einem entsprechenden linearen System, und für dieses können dann mit linearen Methoden Regelungen für das dynamische Verhalten entworfen werden. Siehe hierzu auch [Fö193] oder [Isi95], wo eine ausführliche Einführung in diese Thematik durchgeführt wird und außerdem auf die Voraussetzungen zur Durchführung dieser Methode eingegangen wird.

Im Folgenden wird untersucht, wie die Methode der Zustandslinearisierung auf ein allgemeines unteraktuiertes mechanisches System angewendet werden kann. Bei einem solchen System ist es nicht möglich, die exakte Zustandslinearisierung für das komplexe nichtlineare System durchzuführen, sondern man be-

schränkt sich auf die aktuierten Freiheitsgrade und erhält dadurch eine Ein-/Ausgangslinearisierung, auch partielle Zustandslinearisierung genannt. Dieses Verfahren wird z.B. in [ZR01] und [Isi95] beschrieben.

Das betrachtete unteraktuierte System sei beschrieben durch  $n$  generalisierte Koordinaten  $q_1, \dots, q_n$ , und die Anzahl der Steuergrößen bzw. Aktoren sei  $n_u < n$ . Dann ist es möglich, den Vektor  $q$  in zwei verschiedene Anteile  $q^T = (q_1^T, q_2^T)$  aufzuteilen. Dabei entspricht  $q_1$  den passiven Variablen und  $q_2$  den aktuierten Variablen. Mit Hilfe dieser Darstellung lassen sich die Euler-Lagrange Gleichungen des System durch

$$\mathcal{M}_{11}\ddot{q}_1 + \mathcal{M}_{12}\ddot{q}_2 + \mathcal{C}_1(q, \dot{q}) + \mathcal{G}_1(q) = 0, \quad (2-6)$$

$$\mathcal{M}_{21}\ddot{q}_1 + \mathcal{M}_{22}\ddot{q}_2 + \mathcal{C}_2(q, \dot{q}) + \mathcal{G}_2(q) = \mathcal{F} \quad (2-7)$$

beschreiben, wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(q) &= \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q} &= \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1(q, \dot{q}) \\ \mathcal{C}_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{G}(q) &= \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1(q) \\ \mathcal{G}_2(q) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

die Systemmatrizen des Gesamtsystems bezeichnen, wie schon durch die Systemdarstellung (2-1)-(2-5) beschrieben wurde. Mit  $\mathcal{F}$  werden die  $n_u$  generalisierten Kräfte der  $n_u$  Aktoren bezeichnet.

Auf Grund der positiven Definitheit der Massenmatrix besitzen alle unteraktuierten Systeme die Eigenschaft, dass sie partiell Zustandslinearisierbar sind. Durch diese Methode wird nun eine Rückführung bestimmt, so dass die Bewegungsgleichungen der aktiven Zustände  $q_2$  in linearer Form vorliegen. Aus Gleichung (2-6) kann man folgern, dass

$$\ddot{q}_1 = -\mathcal{M}_{11}^{-1}(\mathcal{M}_{12}\ddot{q}_2 + \mathcal{C}_1 + \mathcal{G}_1) \quad (2-8)$$

gilt. Die Inverse  $\mathcal{M}_{11}^{-1}$  existiert, da  $\mathcal{M}$  positiv definit ist.

Die so erhaltene Gleichung (2-8) lässt sich nun wieder in (2-7) einsetzen, und man erhält ein abgewandeltes System

$$\bar{\mathcal{M}}_{22}\ddot{q}_2 + \bar{\mathcal{C}}_2 + \bar{\mathcal{G}}_2 = \mathcal{F},$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_{22} &= \mathcal{M}_{22} - \mathcal{M}_{21}\mathcal{M}_{11}^{-1}\mathcal{M}_{12}, \\ \bar{\mathcal{C}}_2 &= \mathcal{C}_2 - \mathcal{M}_{21}\mathcal{M}_{11}^{-1}\mathcal{C}_1, \\ \bar{\mathcal{G}}_2 &= \mathcal{G}_2 - \mathcal{M}_{21}\mathcal{M}_{11}^{-1}\mathcal{G}_1 \end{aligned}$$

gilt. Anhand der entstandenen Gleichung wird nun die partielle Zustandslinearisierung durchgeführt. Es wird eine Rückführung

$$\mathcal{F} = \bar{\mathcal{M}}_{22} \cdot u_y + \bar{\mathcal{C}}_2 + \bar{\mathcal{G}}_2$$

ausgelegt, durch die ein neues System von Bewegungsgleichungen entsteht

$$\mathcal{M}_{11}\ddot{q}_1 + \mathcal{C}_1 + \mathcal{G}_1 = -\mathcal{M}_{12}u_y, \quad (2-9)$$

$$\ddot{q}_2 = u_y, \quad (2-10)$$

wobei  $u_y$  der neue Eingang des Systems ist. Durch die partielle Zustandslinearisierung des Originalsystems (2-6), (2-7) erhält man ein neues System (2-9), (2-10) mit äquivalentem Ausgangsverhalten.

Die partielle Zustandslinearisierung wird nun am Doppelpendel auf einem Wagen durchgeführt. Die aktivierte Variable ist in diesem System die Verschiebung des Wagens  $y$ , und die passiven Variablen sind die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der Pendelarme. Es ergibt sich dann ein Differentialgleichungssystem, in dem nur noch die Dynamik der Pendelarme in Form von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben wird und als neue Eingangsgröße die Beschleunigung des Wagens  $u_y = \ddot{y}$  eingeht:

$$u_y = \ddot{y}, \quad (2-11)$$

$$\mathcal{M}_{11}(q)\ddot{q}_1 + \mathcal{C}_1(q, \dot{q}) + \mathcal{G}_1(q) = \mathcal{F}_1(\dot{q}) + \mathcal{B}_1(q)u_y, \quad (2-12)$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11}(q) &= \begin{bmatrix} J_1 + a_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 & a_2 l_1 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ a_2 l_1 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & J_2 + a_2^2 m_2 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C}_1(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} a_2 l_1 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 \\ -a_2 l_1 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{G}_1(q) &= \begin{bmatrix} -(a_1 m_1 + l_1 m_2) g \sin \varphi_1 \\ -a_2 m_2 g \sin \varphi_2 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{F}_1(\dot{q}) &= \begin{bmatrix} -d_1 \dot{\varphi}_1 - d_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \\ d_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}_1(q) &= \begin{bmatrix} -(a_1 m_1 + l_1 m_2) \cos(\varphi_1) \\ -a_2 m_2 \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und dem Zustandsvektor  $x = [q^T, \dot{q}^T]^T = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2]^T$ . Hier bestehen die Kräfte des Systems aus den Dämpfungsmomenten  $\mathcal{F}_1(\dot{q})$  und dem Term  $\mathcal{B}_1(q) \cdot u_y = -\mathcal{M}_{12}\ddot{y}$ , wie es auch in Gleichung (2-9) beschrieben ist. In der Simulation des Doppelpendels wird dieses vereinfachte Modell mit der Eingangsgröße  $\ddot{y}$  verwendet. Die Ordnung des Problems und damit die benötigte Rechenleistung wird geringer, da mit der Vorgabe von  $\ddot{y}$  nur die Gleichungen (2-12) simuliert werden müssen.

**Bemerkung** Die Bewegungsgleichungen (2-12) wurden durch die partielle Zustandslinearisierung aus den ursprünglich nach dem Lagrange-Formalismus berechneten Gleichungen (2-1) hergeleitet. Durch eine etwas veränderte Modellbildung kann aber auch dasselbe System erzeugt werden. Dabei wird angenommen, dass nicht eine Kraft als Steuergröße auf den Wagen wirkt, sondern dass die Beschleunigung des Wagens  $\ddot{y}$  direkt als Steuergröße gewählt wird. Man erhält dann das System eines Doppelpendels mit Fußpunktbeschleunigung, und die Bewegung des Wagens wird dadurch nicht mehr gesondert betrachtet. Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_y &= \ddot{y}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= F_1^d, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= F_2^d, \end{aligned}$$

erhält man somit ebenfalls ein zu (2-1) äquivalentes System von Differentialgleichungen.

Hier soll zusätzlich darauf hingewiesen werden, dass durch die partielle Zustandslinearisierung das ursprüngliche System (2-1) nicht approximiert wurde, sondern dass durch die Umformungen ein gleichwertiges System (2-12) hergeleitet wurde. Im ersten Fall wirkt eine Aktorkraft auf den Wagen als Eingangsgröße, und im zweiten Fall wird die Bewegung des Wagens über seine Beschleunigung bestimmt. Der direkte Zusammenhang der zwei unterschiedlichen Eingangsgrößen  $u_F$  und  $u_y$  kann durch einen Vergleich der Bewegungsgleichungen als

$$\begin{aligned} - (a_1 m_1 + l_1 m_2) \cos(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - a_2 m_2 \cos(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2 + m_0) u_y \\ + (a_1 m_1 + l_1 m_2) \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1) + a_2 m_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2) = u_F. \end{aligned} \quad (2-13)$$

bestimmt werden. Dadurch ist die direkte Umrechnung der zwei Modelle möglich.

### 2.3.2 Dreifachpendel

Das Modell des Dreifachpendels wird analog zu dem des Doppelpendels erstellt, vergleiche dazu auch Abschnitt 2.3.1. Der zusätzliche dritte Pendelarm besitzt die Masse  $m_3$ , die Länge  $l_3$ , den Abstand zum Schwerpunkt  $a_3$  und das Trägheitsmoment  $J_3$ . Die generalisierten Koordinaten werden im Vergleich zum Doppelpendel um den Winkel  $\varphi_3$  erweitert. Durch den zusätzlichen Pendelarm verändern sich außerdem auch die Parameter des zweiten Arms. Die gesamten Parameter des Dreifachpendels sind in der Tabelle 2-2 beschrieben.

Tabelle 2-2: Mechanische Parameter des Dreifachpendels auf einem Wagen

	1. Pendel (innen) (i=1)	2. Pendel (mitte) (i=2)	3. Pendel (außen) (i=3)
Länge $l_i [m]$	0.356	0.356	0.356
Abstand Schwerpunkt $a_i [m]$	0.18	0.18	0.148
Masse $m_i [kg]$	0.775	0.775	0.654
Trägheitsmoment $J_i [N m s^2]$	0.0224	0.0224	0.0179
Dämpfungskonstante $d_i [N m s]$	0.005	0.005	0.005
Masse des Wagens $m_0: 4 [kg]$			

Auch für das Dreifachpendel lässt sich die Beziehung der generalisierten Koordinaten zu den redundanten Koordinaten durch die Koordinaten  $x^i = [x_1^i \ x_2^i]^T$ ,  $i = 0, \dots, 3$  bezüglich des Schwerpunkts der Pendelarme angeben:

$$\begin{aligned} x^0 &= \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}, \\ x^1 &= \begin{bmatrix} y - a_1 \sin \varphi_1 \\ a_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix}, \\ x^2 &= \begin{bmatrix} y - l_1 \sin \varphi_1 - a_2 \sin \varphi_2 \\ l_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}, \\ x^3 &= \begin{bmatrix} y - l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 - a_3 \sin \varphi_3 \\ l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + a_3 \cos \varphi_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für die kinetische und potentielle Energie ergeben sich dann

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^3 m_i \|\dot{x}^i\|_2^2 + \sum_{i=1}^2 J_i \dot{\varphi}_i^2 \right), \\ V &= \sum_{i=0}^3 m_i g x_2^i. \end{aligned}$$

Die generalisierten nicht konservativen Dämpfungsmomente werden durch die linearen Ausdrücke

$$\begin{aligned} F_1^d &= -d_1 \dot{\varphi}_1 + d_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1), \\ F_2^d &= -d_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + d_3 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2), \\ F_3^d &= -d_3 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) \end{aligned}$$

modelliert, wobei  $d_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  die Dämpfungskonstanten bezüglich des jeweiligen Gelenkes bezeichnen.

Analog zum Vorgehen beim Doppelpendel lassen sich die Bewegungsgleichungen des Dreifachpendels ebenfalls mit dem Lagrange-Formalismus herleiten, so dass sich die folgenden Gleichungen ergeben:

$$\mathcal{M}(q)\ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathcal{G}(q) = \mathcal{F}(\dot{q}) + \mathcal{B}(q)u_y,$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \begin{bmatrix} h_1 & l_1 h_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & l_1 h_5 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \\ l_1 h_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & h_2 & l_2 h_5 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \\ l_1 h_5 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) & l_2 h_5 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) & h_3 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} 0 & l_1 h_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2 & l_1 h_5 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)\dot{\varphi}_3 \\ -l_1 h_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1 & 0 & l_2 h_5 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)\dot{\varphi}_3 \\ -l_1 h_5 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)\dot{\varphi}_1 & -l_2 h_5 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)\dot{\varphi}_2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{G} &= \begin{bmatrix} -gh_6 \sin(\varphi_1) \\ -gh_4 \sin(\varphi_2) \\ -gh_5 \sin(\varphi_3) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{F} &= \begin{bmatrix} -d_1\dot{\varphi}_1 + d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \\ -d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + d_3(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) \\ -d_3(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} h_6 \cos(\varphi_1) \\ h_4 \cos(\varphi_2) \\ h_5 \cos(\varphi_3) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}h_1 &= J_1 + a_1^2 m_1 + l_1^2(m_2 + m_3), \\ h_2 &= J_2 + a_2^2 m_2 + l_2^2 m_3, \\ h_3 &= J_3 + a_3^2 m_3, \\ h_4 &= a_2 m_2 + l_2 m_3, \\ h_5 &= a_3 m_3, \\ h_6 &= a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3).\end{aligned}$$

Hierbei ist  $q = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T$  und  $u_y = \ddot{y}$ . Somit liegen die Bewegungsgleichungen des Dreifachpendels hier schon in der partiell zustandslinearisierten Form vor.

## 2.4 Zwei-Freiheitsgrade-Struktur

Die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur zur Steuerung und Regelung von technischen Systemen ist ein etabliertes Verfahren, das vielfache Verwendung bei praktischen Anwendungen findet [Kre99]. Horowitz führt in [Hor63] eine Zwei-Freiheitsgrade-Struktur ein, um in der Regelung eines Systems zwei Probleme gleichzeitig zu behandeln: Zum einen die Vorgabe einer gewünschten Systemantwort durch Vorsteuerung und zum anderen die gleichzeitige Regelung des Systems. Durch die Nutzung der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur ist es somit möglich, das Führungs- und Störverhalten durch Vorsteuerung und Regelung unabhängig voneinander zu entwerfen. Dies geschieht gewöhnlich modellbasiert und offline, sodass die gewünschte Trajektorie des Systems durch die Vorsteuerung vorgegeben ist und durch die Verwendung eines geeigneten Reglers eingeregelt wird. Durch die modellbasierten Berechnungen ist es zusätzlich möglich, Eingangs- und Zustandsbeschränkungen zu berücksichtigen.

Bild 2-6 zeigt die in dieser Arbeit verwendete Zwei-Freiheitsgrade-Struktur für das Pendelsystem. Dabei wird davon ausgegangen, dass sowohl die nominale Steuerung als auch die zugehörige Trajektorie des Systems bekannt sind. Mit dieser Steuerung wird das Pendel angesteuert, und der Verlauf der Größen  $\varphi_1, \varphi_2, y$  und  $\ddot{y}$  wird mit Sensoren gemessen. Die fehlenden Zustandsgrößen  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$  und  $\dot{y}$  werden durch Differentiation zusätzlich berechnet. Dadurch, dass die nominale Trajektorie bekannt ist, kann eine Abweichung durch einen Soll-Istwert-Vergleich sofort festgestellt werden. Der im Vorfeld ausgelegte Regler kann dann durch das Ausregeln der Abweichung das System wieder auf die nominale Trajektorie bringen. Wenn keine Abweichung zur nominalen Trajektorie auftritt, wird der Regler dementsprechend auch nicht aktiv.

Es existieren zahlreiche Entwurfsverfahren für die Regelung, aber nur wenige zur Berechnung einer geeigneten Vorsteuerung. In den hier folgenden Abschnitten wird daher nur kurz auf die eingesetzten Regelungsmethoden eingegangen. In den weiteren Kapiteln der Arbeit geht es dann zu einem großen Teil darum, möglichst *optimale* Trajektorien für die Vorsteuerung des Pendels zu berechnen. Dabei wird darauf eingegangen, in welchem Sinne Trajektorien optimal sein können und wie diese mittels optimaler Steuerung bestimmt werden können. Eine weitere Idee ist es, auch die inhärente Dynamik des Systems auszunutzen und dadurch sinnvolle Manöver für das Pendelsystem zu entwickeln. Für die Umsetzung dieser Ideen werden aktuelle mathematische Methoden aus den Bereichen der Optimalsteuerung und der dynamischen Systeme verwendet.

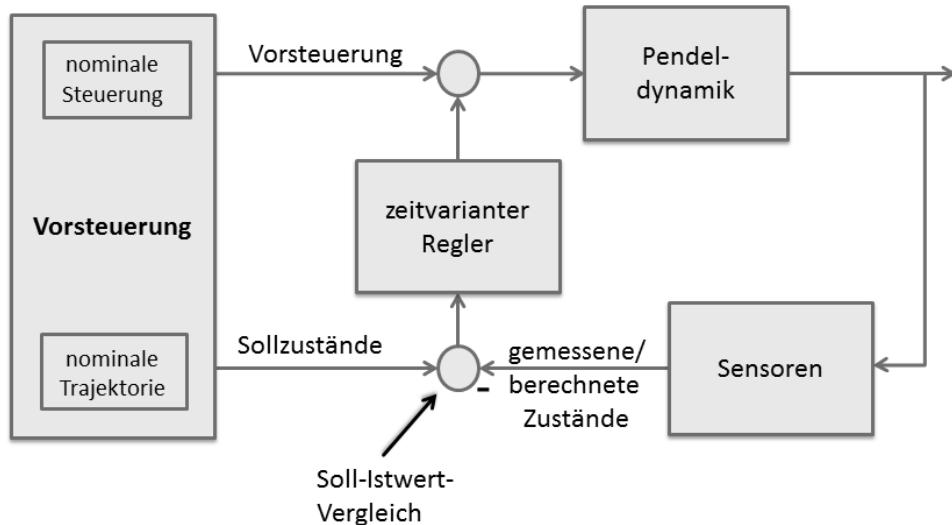


Bild 2-6: Schematische Darstellung der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur

#### 2.4.1 Simulationsmodell

Um sowohl die Steuerung als auch die Regelung modellbasiert testen zu können, wurde ein Simulationsmodell des gesamten Pendelprüfstands inklusive Aktor- und Sensormodelle in Matlab/Simulink erstellt. Modellbasiertes Testen hat für das Pendel den Vorteil, dass z. B. ungünstige Regelungsparameter durch eine Simulation des Systemverhaltens sofort ausgeschlossen werden können. Dadurch wird verhindert, dass es am Prüfstand zu einem instabilen Systemverhalten (z. B. Anschläge des Motors) kommt. Durch die Evaluation einer Konfiguration von Steuerung und Regelung am Modell erhält man eine höhere Entwicklungsreife der Regelalgorithmen, und dies führt dazu, dass Tests am Prüfstand mit höherer Wahrscheinlichkeit erfolgreich sind.

Um ein solches Simulationsmodell zu erstellen, wird nach der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur vorgegangen (siehe Bild 2-7). Die Berechnung der nominalen Steuerung und Trajektorie wird in den folgenden Kapiteln und die Reglerauslegung in dem folgenden Abschnitt 2.4.2 erläutert. Weiterhin ist es wichtig, die Dynamik der verschiedenen Bauteile des Prüfstandes zu berücksichtigen. Zum Beispiel werden am Prüfstand die Größen  $\varphi_1, \varphi_2, y$  und  $\ddot{y}$  gemessen und die fehlenden Zustandsgrößen  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$  und  $\dot{y}$  daraus durch Differentiation bestimmt. Daher müssen sowohl der Motor, als auch die Sensoren mit ihrem Verzögerungsverhalten und zusätzlichen Effekten, die durch die Wandlung der Signale auftreten, modelliert werden. Für die Pendeldynamik werden die Differentialgleichungen verwendet, wie sie in Abschnitt 2.3 hergeleitet wurden. Mit dem entwickelten Simulationsmodell erhält

man somit die Möglichkeit, die Dynamik des Prüfstands recht genau nachzubilden und dadurch verschiedene Manöver zu testen.

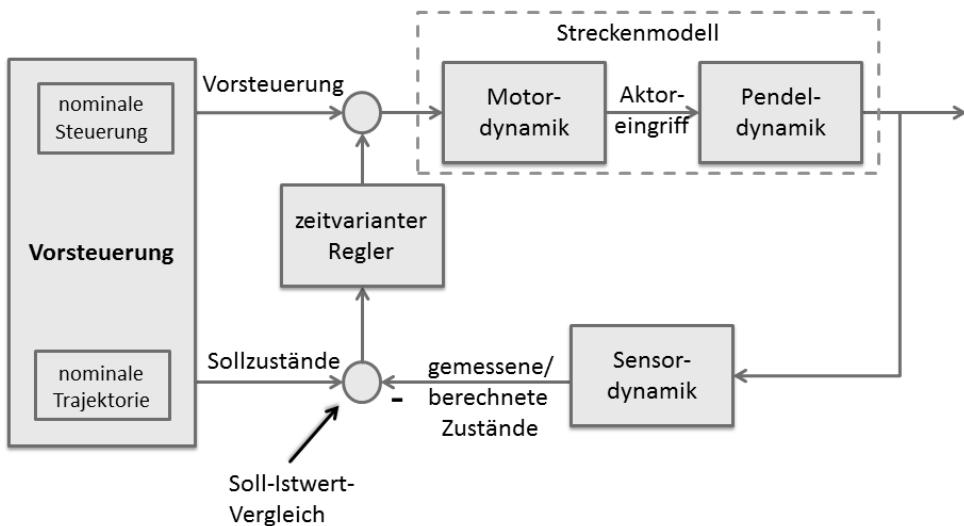


Bild 2-7: Schematische Darstellung des Simulationsmodells mit der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur

## 2.4.2 Reglerauslegung

Im folgenden Abschnitt soll der Regler für die Zwei-Freiheitsgrade-Regelung ausgelegt werden. Dazu werden Standardmethoden der linearen Regelungstechnik verwendet. Es werden zwei verschiedene Regelungsansätze betrachtet, die aber von derselben Idee ausgehen, nämlich lineare Methoden dazu zu nutzen, die Abweichung des dynamischen Systems von der berechneten Solltrajektorie auszuregeln.

Die Idee des hier verwendeten linear quadratischen Reglers (LQR) ist die Berücksichtigung von konträren Aspekten für die Regelung eines technischen Systems. Das Ziel der Reglerauslegung kann dadurch beschrieben werden, dass eine Ruhelage aus einem beliebigen Anfangszustand zum einen möglichst schnell und ohne starke Oszillation, also mit einer hohen Regelgüte, und zum anderen mit möglichst geringer Steuerenergie erreicht werden soll. Um diese Ziele bei der Auslegung des Reglers beachten zu können, müssen sie quantitativ gefasst werden. Dies ist durch die Einführung eines allgemeinen quadratischen Gütemaßes möglich:

$$J = \int_0^{t_f} [x^T(t)\mathcal{Q}(t)x(t) + u^T(t)\mathcal{R}(t)u(t)] dt. \quad (2-14)$$

Hierbei sind  $\mathcal{Q}(t)$  und  $\mathcal{R}(t)$  symmetrische und positiv definite Matrizen. Durch ihre Wahl lässt sich eine Gewichtung der Zustände  $x(t)$  und des Steuereingangs  $u(t)$  im Gütemaß durchführen. Durch das Gütemaß werden also sowohl der Verlauf des Zustandes, als auch der Verbrauch der Steuerenergie beurteilt. Ein in diesem Sinne optimaler Regler  $k(t)$  minimiert das Gütemaß und führt damit zu einem für das System optimalen Verlauf des Zustandes und der Steuerenergie. Siehe hierzu auch [Fö08] oder [KS72].

### **Gain-scheduling**

Der Gain-scheduling-Ansatz ist eine relativ einfache und etablierte Methode, um eine Regelung für ein nichtlineares System auszulegen, die auf linearen Ansätzen basiert. Aus diesem Grund werden Gain-scheduling-Regler bei vielen Anwendungen verwendet. Für das Design eines solchen Reglers wird das nichtlineare System an verschiedenen Punkten, z.B. entlang einer Trajektorie linearisiert. Dadurch erhält man eine Menge von linearen Teilmodellen, für die jeweils ein Regler bestimmt werden kann. Für den Fall des Doppelpendels wird dieser Regler als LQ-Regler ausgelegt. Während des Einsatzes in der Simulation bzw. am Prüfstand wird dann derjenige Regler aktiviert, der der aktuellen Situation am besten entspricht. Auf diese Weise ist es möglich, Methoden der linearen Systemtheorie für die Auslegung eines Reglers für ein nichtlineares System zu nutzen. Mehr Informationen über den Gain-scheduling-Ansatz sind in [Ada09], [AA98], [LL00] und [LL98] zu finden.

Die Reglerauslegung wird im Folgenden beispielhaft anhand des Doppelpendels beschrieben, ist aber analog auf das Dreifachpendel anwendbar. Dafür wird das partiell zustandslinearisierte Modell (2-11)-(2-12) verwendet, um das System  $\dot{x} = f(x, u)$  mit dem Zustandsvektor  $x = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ y \ \dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2 \ \dot{y}]^T$  aufzustellen. Es sei  $x^* = [\varphi_1^* \ \varphi_2^* \ y^* \ \dot{\varphi}_1^* \ \dot{\varphi}_2^* \ \dot{y}^*]^T$  die nominale Trajektorie und  $u^*$  die nominale Steuerung, die z.B. mittels Optimierungsmethoden berechnet werden kann. Entlang dieser Trajektorie wird das System wie folgt linearisiert:

$$\Delta\dot{x} = A(\rho, t)\Delta x + B(\rho, t)\Delta u, \quad (2-15)$$

mit  $\rho = [x^{*T} \ u^*]^T$  und

$$A(\rho, t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x^*(t), u^*(t))}, \quad B(\rho, t) = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x^*(t), u^*(t))}.$$

Dies führt zu einem zeitvarianten und parametrisierten linearen System mit dem Parametervektor  $\rho$ , welcher auch *scheduling*-Vektor genannt wird.

Entsprechend der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur in Bild 2-6 kann die Regelung für das Pendel durch

$$u(t) = u^*(t) + k(t)(x^*(t) - x(t))$$

berechnet werden, wobei  $k : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^6$  eine Funktion der Reglerparameter ist.  $k(t)$  wird dabei durch den Gain-scheduling-Ansatz und einen LQR-Ansatz bestimmt. Dafür wird das linearisierte System (2-15) entlang der diskreten Werte des Parametervektors  $\rho^i = [x^*(t^i)^T \ u^*(t^i)]^T$  ausgewertet, wobei  $t^i \in \{0, \xi, 2\xi, \dots, M\xi = t_f\}$ . Hier ist  $\xi$  die Schrittweite des Zeitintervalls und damit die Diskretisierung des Parametervektors  $[\rho^0, \dots, \rho^M]$  mit  $M \in \mathbb{N}$ . Für jedes System

$$\Delta \dot{x} = A^i \Delta x + B^i \Delta u,$$

mit  $A^i = A(\rho^i, t^i)$ ,  $B^i = B(\rho^i, t^i)$  wird nun ein LQ-Regler entworfen, der das folgende Kostenfunktional minimiert:

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^\infty (\Delta x(t)^T \mathcal{Q} \Delta x(t) + \Delta u(t)^2 \mathcal{R}) dt, \quad (2-16)$$

wobei die Matrix  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  symmetrisch und positiv definit und  $\mathcal{R}$  ein positiver Skalar ist. Die Lösung  $P^i$  der Riccati Gleichung

$$(A^i)^T P^i + P^i A^i - P^i B^i \mathcal{R}^{-1} (B^i)^T P^i + \mathcal{Q} = 0 \quad (2-17)$$

führt zu den Reglerparametern

$$k^i = \mathcal{R}^{-1} (B^i)^T P^i, \quad i = 0, \dots, M-1.$$

Somit wurde hier jeweils ein Vektor konstanter Reglerparameter mit Hilfe des Riccati-Entwurfs bestimmt, der abschnittsweise entlang der Solltrajektorie definiert ist. Während der Regelung des Systems wird immer der passende Regelparameter durch eine Aktualisierung des Reglers bestimmt

$$k(t) = k^i, \quad t \in [i\xi, (i+1)\xi], \quad i = 0, \dots, M-1, \quad (2-18)$$

wobei zwischen den konstanten Parametern umgeschaltet wird.

### Kontinuierlicher LQ-Regler

Im Gegensatz zum gerade beschriebenen Ansatz mit abschnittsweise konstanten Reglerparametern wird nun ein zeitkontinuierlicher Regler ausgelegt (siehe hierzu auch [KS72]). Dazu wird auch in diesem Fall das zeitvariante, linearisierte System betrachtet:

$$\Delta \dot{x} = A(t) \Delta x + B(t) \Delta u, \quad (2-19)$$

mit

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*(t), u^*(t))}, \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x^*(t), u^*(t))}.$$

Zusätzlich wird das folgende Gütemaß definiert

$$\begin{aligned} J(x(t), u(t)) = & \int_0^{t_f} (\Delta x(t)^T \mathcal{Q}(t) \Delta x(t) + \Delta u(t)^T \mathcal{R}(t) \Delta u(t)) dt \\ & + \Delta x(t_f)^T P_1 \Delta x(t_f), \end{aligned} \quad (2-20)$$

wobei die zeitvarianten Gewichtungsmatrizen  $\mathcal{Q}(t)$  und  $\mathcal{R}(t)$  symmetrisch und positiv definit sind und die Matrix  $P_1$  symmetrisch und positiv semi-definit ist. Durch den Term  $\Delta x(t_f)^T P_1 \Delta x(t_f)$  ist es hier möglich, eine Abweichung des Zustands von der Ruhelage am Ende der Trajektorie besonders zu berücksichtigen. Es soll nun der optimale zeitkontinuierliche Regler

$$u(t) = u^*(t) + k(t)(x^*(t) - x(t)),$$

gefunden werden, der das Gütemaß (2-20) minimiert.

Einen Ansatz zur Lösung dieses Minimierungsproblems bietet die Variationsrechnung. Es ergibt sich die sogenannte Matrix-Riccati-Differentialgleichung

$$-\dot{P}(t) = \mathcal{Q}(t) - P(t)B(t)\mathcal{R}^{-1}(t)B^T(t)P(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) \quad (2-21)$$

und der optimale Regler wird dann durch

$$k(t) = \mathcal{R}^{-1}(t)B^T(t)P(t) \quad (2-22)$$

bestimmt. Zusätzlich besteht noch die Nebenbedingung  $P(t_f) = P_1$ , die aus der Wahl des Gütemaßes (2-20) entsteht und die Anfangsbedingung zur Differentialgleichung (2-21) darstellt. Es kann dann auch gezeigt werden, dass der Regler (2-22) das Gütemaß (2-20) minimiert. Eine ausführliche Herleitung des zeitvarianten LQ-Reglers und ein Beweis hierzu sind in [KS72] und [?] zu finden.

Zwischen der hier zu lösenden Matrix-Riccati-Differentialgleichung (2-21) und der Riccati-Gleichung (2-17) aus dem Gain-scheduling-Ansatz besteht ein Zusammenhang, der sich entsprechend dem zu lösenden Reglerentwurfsproblem ergibt. Wenn in dem Gütemaß ein unendliches Integrationsintervall ( $t_f \rightarrow \infty$ ) und zeitlich konstante Gewichtungen gewählt werden, wird aus der Riccati-Differentialgleichung die aufgeführte Riccati-Gleichung (2-17) mit  $\dot{P} = 0$  und einer konstanten Lösung  $P$  mit konstanten Regelungsparametern.

### Bemerkung (Numerische Lösung der Riccati-Gleichung)

Die Matrix Riccati Gleichung (2-21) mit der Randbedingung  $P(t_f) = P_1$  wird nun numerisch gelöst. Dadurch ergibt sich für das Regelungsproblem des Systems (2-19) ein kontinuierlicher Regler. Bei der Berechnung der Lösung kann ausgenutzt werden, dass die Matrix  $P(t)$  auf Grund der Eigenschaften von  $\mathcal{Q}(t)$  und  $\mathcal{R}(t)$  und der Struktur der Riccati-Gleichung ebenfalls symmetrisch sein muss.

Ein direkter Lösungsansatz ist es, die Gleichung (2-21) als eine Menge von  $n^2$  nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten, die simultan gelöst werden müssen. Dazu lässt sich jede numerische Standardtechnik verwenden, wobei die Differentialgleichungen in Rückwärtszeit, also für das Intervall  $[t_f, t_0]$ , gelöst werden müssen. Dies ist der Fall, da gezeigt werden konnte, dass die Vorwärtsintegration der Riccati Gleichung numerisch instabil ist. Durch die einfache Integration aller Differentialgleichungen kann es aber dazu kommen, dass die zuvor festgestellte Symmetrie der Lösung durch numerische Berechnungsfehler zerstört wird. Dies kann dadurch verhindert werden, dass die Symmetrie der Matrix nach jedem Schritt durch das Ersetzen von  $P(t)$  durch  $\frac{1}{2}[P(t) + P^T(t)]$  wieder hergestellt wird. Eine weitere Alternative, die Symmetrie von  $P(t)$  zu erhalten, ist es, die Gleichung (2-21) auf ein Menge von  $\frac{1}{2}n(n+1)$  Differentialgleichungen erster Ordnung zu reduzieren, indem nur die obere bzw. untere Dreiecksmatrix betrachtet wird und die Ergebnisse für die andere Hälfte entsprechend der Symmetrie übernommen werden. Dies führt zusätzlich zu einer kürzeren Berechnungszeit der Lösung. Für die Implementierung wird in dieser Arbeit dieser zweite Ansatz verwendet, so dass deutlich weniger als  $n^2$  Differentialgleichungen gelöst werden müssen.

### Vergleich der verschiedenen Regelungsverfahren

Im Folgenden werden Regelungsparameter für eine Aufschwungtrajektorie des Doppelpendels berechnet, so dass der Endzustand des Systems die obere Ruhelage ist. Dabei werden die Ergebnisse der Reglerauslegung für die beiden beschriebenen Verfahren verglichen. Für beide Regelungen werden die gleichen Gewichtungsmatrizen

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad R(t) = 1 \quad (2-23)$$

verwendet. In diesem Fall werden nur die Winkelauslenkung (Gewichtung 500) und die Wagenbewegung (Gewichtung 1000) in der Gütfunktion berücksichtigt.

Dies führt dazu, dass ein Regler ausgelegt wird, der eine Abweichung in diesen Zuständen besonders stark berücksichtigt. Die Wahl der Gewichtungen muss immer abhängig vom System getroffen werden. Im Fall des Pendels ist es besonders wichtig, dass es möglichst keinen Fehler in der Winkellage gibt, da schon kleine Abweichungen von der Solltrajektorie auf Grund des chaotischen Verhaltens des Systems zu großen Fehlern führen.

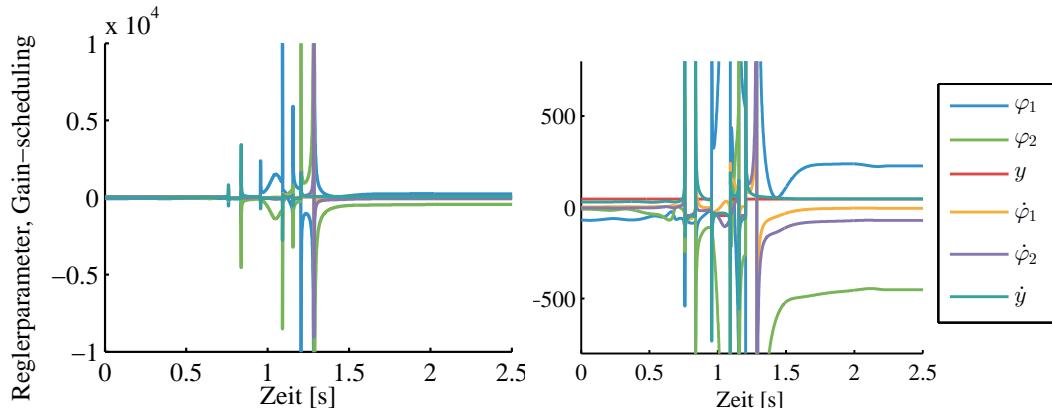


Bild 2-8: Reglerkonstanten (Gain-scheduling-Ansatz); rechts: Ausschnitt; für jede Zustandsgröße gibt es einen skalaren Reglerparameter

Durch die Wahl der Gewichtungsmatrix (2-23) für beide Regelungen ergeben sich in der oberen Ruhelage wie erwartet dieselben Parameter. In diesem Fall ist dies der Vektor

$$k(t_f) = [188.78 \quad -342 \quad 31.62 \quad -1.1 \quad -54.35 \quad 32.42].$$

Wenn der Regler mit der Gain-scheduling-Methode ausgelegt wird, wird jeweils nur das linearisierte Modell in einem Arbeitspunkt ausgewertet und für diesen ein statischer Regler ausgelegt. Informationen über den weiteren Verlauf der Trajektorie und die Änderung der Systemmatrix  $A(t)$  werden in diesem Entwurf nicht berücksichtigt. Durch die Linearisierung wird somit das Systemverhalten stark vereinfacht. Wenn man sich aber vom gewählten Arbeitspunkt entfernt, stimmt die Approximation des Systems nicht mehr mit dem nichtlinearen Ausgangssystem überein, was zu großen Fehlern führt. Außerdem kommt es dazu, dass sich die Regelparameter bei unterschiedlichen Arbeitspunkten entlang der Solltrajektorie stark ändern. Dies ist vor allem im Bereich der schlecht bzw. nicht steuerbaren Positionen des Pendels (waagerechte Pendelarme) der Fall, siehe auch Bild 2-8. Eine Regelung ist mit diesen Parametern nicht möglich, da der Regler unverhältnismäßig stark in das Systemverhalten eingreift. Daher werden die Regelparameter im Bereich der starken Ausschläge auf null gesetzt, der Regler wird also ausgeschaltet. Dadurch ist es möglich, ein stabiles Systemverhalten zu erzielen.

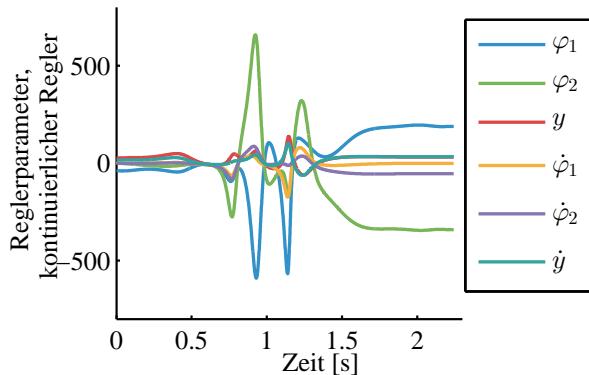


Bild 2-9: Reglerkonstanten (kontinuierlicher Ansatz); für jede Zustandsgröße gibt es einen skalaren Reglerparameter

Im Gegensatz dazu wird beim kontinuierlichen Regler nicht die statische, sondern die Riccati-Differentialgleichung gelöst. Bei stetiger rechter Seite der Differentialgleichung (2-21) existiert nach dem Existenzsatz von Peano eine Lösung des Anfangswertproblems, die stetig differenzierbar ist. Die Stetigkeit der rechten Seite wird durch die kontinuierlichen Systemmatrizen  $A(t)$  und  $B(t)$  gewährleistet. (Durch Splineinterpolation entlang der diskreten Steuertrajektorie entstehen stetige Systemmatrizen.) Die so entstandene Lösung (siehe Bild 2-9) hat deutliche Vorteile gegenüber der Lösung mit dem Gain-scheduling-Ansatz. Die stetig differenzierbaren Parameter sind für die Regelung des Systems geeigneter, da das System nicht durch extreme Sprünge und sehr große Regelungsparameter gestört wird. Bei der Regelung des realen Systems werden bei Verwendung dieses Reglers gute Ergebnisse erzielt.

Im Folgenden werden die Regelansätze anhand einer beispielhaften Steuerungstrajektorie für den Aufschwung des Doppelpendels innerhalb der Simulationsumgebung getestet. Zum Vergleich wird in Bild 2-10 zunächst die Solltrajektorie dargestellt. Deren Herleitung wird in den folgenden Kapiteln erläutert. Der erste Test ist dann die Durchführung des Manövers für das ungeregelte System. Dazu wird nur die berechnete Steuerung auf das Pendelmodell aufgebracht. Es ist zu erkennen, dass das Pendel der Solltrajektorie gut folgt, aber nicht in der instabilen oberen Ruhelage verbleibt. Als nächstes wird der Gain-scheduling-Regler verwendet, und zwar mit den Reglerparametern, wie sie in Bild 2-8 dargestellt sind. Auf Grund der zu großen Verstärkungsfaktoren dieses Reglers wird das Systemverhalten instabil, und das Pendel kann den Aufschwung nicht komplett durchführen. Der Einsatz des zeitkontinuierlichen Reglers dagegen führt dazu, dass sowohl Aufschwung als auch Stabilisierung in der oberen Ruhelage gelingen.

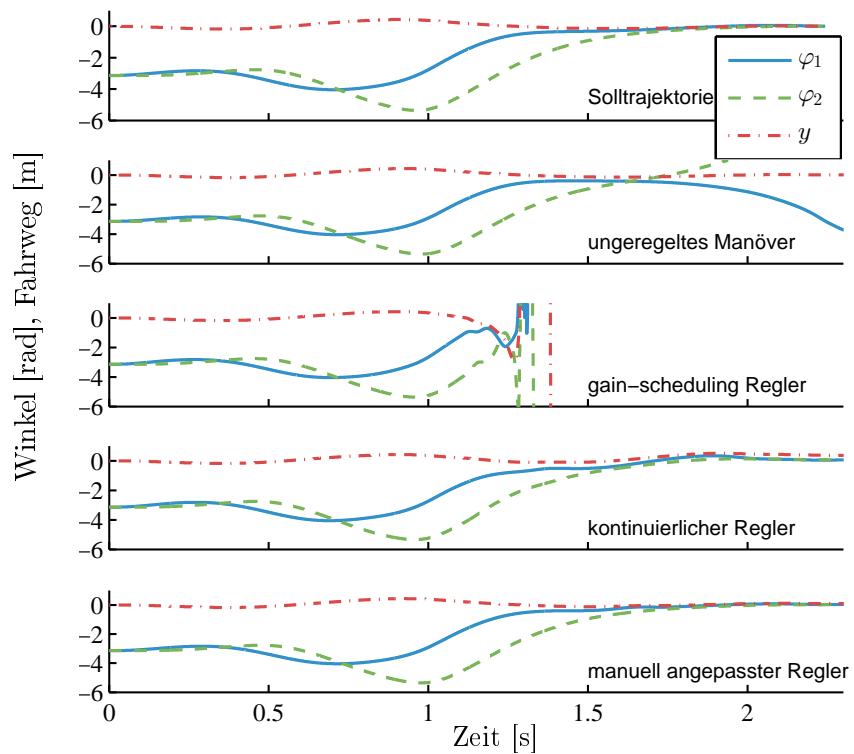


Bild 2-10: Vergleich verschiedener Regelungsansätze anhand einer Solltrajektorie; es werden jeweils  $\varphi_1$  (blaue durchgezogene Linie),  $\varphi_2$  (grün gestrichelte Linie) und  $y$  (rote Strichpunktlinie) dargestellt

Dieser Regler kann somit prinzipiell ohne weitere Anpassungen am Prüfstand verwendet werden.

Es besteht aber sowohl für den Gain-scheduling-Ansatz als auch für den kontinuierlichen Regler die Möglichkeit, das Systemverhalten durch manuelle Anpassung des Reglers zu verbessern. Dazu können z.B. die zu großen Spitzen der Reglerparameter begrenzt oder auf Null gesetzt werden, oder der Regler kann grundsätzlich erst zu einem späteren Zeitpunkt eingeschaltet werden. Solche Anpassungen müssen aber für jede einzelne Trajektorie individuell gemacht werden und lassen sich nicht verallgemeinern. Im letzten Test in Bild 2-10 wurde der Gain-scheduling-Regler erst im letzten Drittel der Trajektorie eingeschaltet. Beim Vergleich der Regelgüte im Sinne von (2-14) konnte der manuell angepasste Regler einen Wert von 18.83 erreichen. Die Regelgüte bei Einsatz des kontinuierlichen Reglers war dagegen 211.5. Somit konnte ein sehr gutes Regelergebnis für das System erreicht werden.

Als Fazit kann festgestellt werden, dass der kontinuierliche Regler für die Durchführung von Manövern am Pendel gut anwendbar ist. Durch eine manuelle Anpassung einer der beiden Regelansätze kann die Regelgüte aber noch verbessert werden.



### 3 Optimale Steuerung mittels Discrete Mechanics and Optimal Control

Ein Optimalsteuerungsproblem für ein mechanisches System beschreibt die Aufgabe, das System von einem gegebenen Anfangszustand in einen gewünschten Endzustand zu überführen. Dabei soll das Manöver so gewählt werden, dass eine vorgegebene Zielfunktion minimiert wird, die Bewegungsgleichungen erfüllt sind und zusätzlich weitere technische Beschränkungen eingehalten werden. Beispiele für diese Art von Problemen entstehen bei technischen Systemen sehr häufig. In der Fahrzeugdynamik besteht z. B. die Frage, wie ein zeitoptimales Manöver auf einer Teststrecke beschrieben werden kann [RNH10], [KT11]. In der Raumfahrttechnik müssen energieoptimale Trajektorien für Satelliten berechnet werden, damit diese trotz minimaler Brennstoffmenge ihr Ziel erreichen können [MOBM08]. Für Roboter oder biomechanische Systeme ist ein Ziel der Forschung, menschliche Bewegungen beschreiben zu können, und Ergebnisse zeigen, dass Lösungen eines Optimalsteuerungsproblems den natürlichen Bewegungen des Menschen gut entsprechen können [MSL11], [OBT09].

In dieser Arbeit werden die Methoden der optimalen Steuerung dazu verwendet, Manöver für das Doppelpendel auf einem Wagen zu berechnen. Jede Lösung dient als nominale Trajektorie und Steuerung, wie es in der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur (siehe Abschnitt 2.4) hergeleitet wurde. Es werden optimale Bewegungen bezüglich der Manöverzeit oder des Energieverbrauchs bestimmt. Dies hat den Vorteil, dass man nicht nur eine zulässige Lösung des Steuerungsproblems erhält, sondern außerdem die Optimalität bezüglich eines ausgewählten Ziels gegeben ist.

Optimalsteuerungsprobleme können im Allgemeinen nur numerisch gelöst werden, da sie für eine analytische Lösung zu komplex sind. Es existieren diverse Methoden, um das kontinuierliche Optimalsteuerungsproblem in ein endlich-dimensionales diskretes Optimierungsproblem umzuwandeln. Hier wird die Methode *Discrete Mechanics and Optimal Control* (DMOC) verwendet, welche erstmals in [JMOB05] beschrieben wurde. Diese Methode basiert auf der direkten Diskretisierung der variationellen Struktur eines mechanischen Systems. Im Kontext von Variationsintegratoren (siehe [MW01]) führt die direkte Diskretisierung des Lagrange-d'Alembert Prinzips zu einem strukturerhaltenden Zeitschrittverfahren, welches dazu genutzt wird, die Gleichheitsnebenbedingungen für das Optimierungsproblem herzuleiten. Das entstehende diskrete Problem kann dann mit

Standardtechniken der nichtlinearen Optimierung, wie zum Beispiel der *Sequentiellen Quadratischen Programmierung* (SQP) gelöst werden.

In diesem Kapitel werden Lösungsmethoden für Optimalsteuerungsprobleme vorgestellt. Zunächst widmet sich 3.1 der allgemeinen Formulierung eines Optimalsteuerungsproblems und der konkreten Herleitung für das Mehrfachpendel. In 3.2 wird zum einen das Pontryaginsche Maximumprinzip vorgestellt, mit dem sich optimale Steuerungen für einfache dynamische Systeme auch kontinuierlich bestimmen lassen. Zum anderen werden numerische Standardlösungsverfahren, wie Schießverfahren und Kollokation beschrieben. Anschließend wird in 3.3 die in dieser Arbeit verwendete DMOC Methode vorgestellt. Es wird zusätzlich auf den Unterschied zu den Standardmethoden, die speziellen Eigenschaften und die aktuelle Forschung mit DMOC eingegangen.

### 3.1 Das Optimalsteuerungsproblem

Es sei  $x \in \mathbb{R}^n$  der Zustandsvektor eines dynamischen Systems. Die Steuerung wird als  $n_u$ -dimensionale Vektorfunktion  $u(t) \in U$  abhängig von der Zeit definiert. Die Steuerungen, die in  $U$  liegen, heißen *zulässige* Steuerungen. Das Verhalten des Systems kann durch eine Menge von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung modelliert werden oder in vektorwertiger Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in I = [t_0, t_f], \quad (3-1)$$

wobei  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $n_u \in \mathbb{N}$  die Zustands- bzw. Steuervariablen darstellen. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen des Systems werden durch die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_u} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dargestellt.

Das betrachtete System kann zusätzlich durch weitere Nebenbedingungen der Dimension  $n_c$  in der Form

$$0 \leq c(x(t), u(t), t), \quad t \in I \quad (3-2)$$

mit  $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_u} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $n_c \geq 1$  beschränkt werden. Die Funktion

$$0 = r(x(t_f))$$

mit  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_r}$ ,  $n_r \geq 0$  gibt dann die Nebenbedingungen am Endpunkt der Trajektorie an.

Dieses Steuerungsproblem wird nun zu einem Optimalsteuerungsproblem, wenn man das System vom Zustand  $x^0$  zum Zeitpunkt  $t_0$  zum Zustand  $x^f$  zum Zeitpunkt  $t_f$  so steuern möchte, dass eine gegebene Zielfunktion

$$J(x, u, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} C(x(t), u(t), t) dt + \kappa(x(t_f), t_f) \quad (3-3)$$

minimiert wird. Hierbei ist  $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_u} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die abhängig vom Zustand  $x(t)$  und der Steuerung  $u(t)$  eine Trajektorie in gewünschter Weise beurteilt und  $\kappa : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die zusätzlich Eigenschaften des Endpunkts in die Zielfunktion einbringt. Außerdem soll in vielen Fällen die Dauer des Manövers minimiert werden können, sodass hierfür eine freie Endzeit gewählt wird und diese ebenfalls in die Zielfunktion eingeht.

Das gesamte Optimalsteuerungsproblem stellt sich somit wie folgt dar:

$$\min_{x,u,t_f} J(x, u, t_f) := \int_{t_0}^{t_f} C(x(t), u(t), t) dt + \kappa(x(t_f), t_f), \quad (3-4)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (3-5)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad (3-6)$$

$$0 \leq c(x(t), u(t), t), \quad (3-7)$$

$$0 = r(x(t_f)). \quad (3-8)$$

Es wird angenommen, dass zulässige Steuerungen existieren, die das System von  $x^0$  nach  $x^f$  überführen, und in dieser Teilmenge der zulässigen Steuerungen ist diejenige die *optimale* Steuerung  $u^*$ , welche  $J$  minimiert. Im Folgenden wird angenommen, dass eine solche optimale Steuerung existiert.

### 3.1.1 Herleitung des Optimalsteuerungsproblems für das Mehrfachpendel

Für das Doppelpendel auf einem Wagen wird im Folgenden das Optimalsteuerungsproblem für die Berechnung von optimalen Manövern aufgestellt. Die Herleitung verläuft für das Dreifachpendel analog.

Der erste Schritt dazu ist die Bestimmung einer geeigneten Zielfunktion. Bei der Steuerung von realen Systemen bestehen in vielen Fällen zwei konträre Ziele. Zum einen soll die Zeit für den Übergang z. B. zwischen zwei verschiedenen Ruhelagen möglichst kurz sein, um eine zeiotoptimale Lösung zu erhalten. Zum anderen ist oftmals auch der Steueraufwand zu berücksichtigen, um ein möglichst energieeffizientes Manöver realisieren zu können. Daher ist es bei der Berechnung der Lösung wichtig, beide Aspekte zu berücksichtigen, so dass sich z. B. die folgende Zielfunktion ergibt:

$$J(x, u, t_f) = a \cdot \int_{t_0}^{t_f} u(t)^2 dt + b \cdot t_f, \quad (3-9)$$

wobei für die Gewichtungsfaktoren  $a$  und  $b$  gilt:  $a + b = 1$ . Wenn z.B.  $a$  im Vergleich zu  $b$  vergrößert wird, erhält man eine langsamere, aber günstigere Lösung und entsprechend gilt dies auch anders herum. Eine solche Optimierung mittels einer gewichteten Summe ist ein Verfahren aus dem Gebiet der Mehrzieloptimierung und wird dort häufig als relativ einfach anwendbares Standardverfahren verwendet. Diese Methode wird in Abschnitt 4.2 ausführlicher behandelt. Bei der Wahl von  $a$  und  $b$  muss die Skalierung der zwei Terme in der Zielfunktion auf die gleiche Größenordnung zusätzlich berücksichtigt werden.

Um die Anfangs- und Endbedingungen des Optimalsteuerungsproblems zu bestimmen, muss zunächst festgelegt werden, welches Manöver durchgeführt werden soll. Ein interessantes und anspruchsvolles Manöver ist dabei der Aufschwung des Pendels aus der stabilen unteren Ruhelage in die instabile obere Ruhelage. Dies kann dann durch den Anfangszustand  $x^0 = [-\pi \ -\pi \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  und den Endzustand  $x^f = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  beschrieben werden, wobei der Zustandsvektor des Systems  $x = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ y \ \dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2 \ \dot{y}]$  ist, siehe auch Bild 2-5.

Als weitere Nebenbedingung bestehen die Differentialgleichungen, die das Systemverhalten beschreiben und die in (2-1) hergeleitet wurden.

Für ein reales System ist es zusätzlich wichtig, dass die bestehenden technischen Beschränkungen berücksichtigt werden. So sind der Verfahrweg des Wagens und die maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung beschränkt (siehe Tabelle 3-1). Diese Beschränkungen können aber durch Boxschranken in das Optimalsteuerungsproblem aufgenommen werden.

*Tabelle 3-1: Technische Beschränkungen des Motors*

Verfahrweg	$ y  \leq 0.6 \text{ m}$
Geschwindigkeit	$ \dot{y}  \leq 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Beschleunigung	$ \ddot{y}  \leq 100 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Das gesamte Optimalsteuerungsproblem für das Doppelpendel auf einem Wagen ergibt sich somit als

$$\min_{x,u,t_f} J(x, u, t_f) = a \cdot \int_{t_0}^{t_f} u(t)^2 dt + b \cdot t_f,$$

unter den Nebenbedingungen

$$x^0 = [-\pi \ -\pi \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (3-10a)$$

$$x^f = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (3-10b)$$

$$\mathcal{M}(q) \cdot \ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + \mathcal{G}(q) = \mathcal{F}(\dot{q}) + \mathcal{B} \cdot u, \quad (3-10c)$$

$$l_b^z \leq \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} \leq u_b^z, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (3-10d)$$

$$l_b^u \leq u(t) \leq u_b^u, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (3-10e)$$

wobei  $q = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ y]$  ist. Die Wahl des Endpunkts  $x_f$  sorgt dafür, dass der Wagen wieder seine Mittelposition einnimmt und die Pendelarme keine Überschläge durchführen. Die Gleichung (3-10c) beschreibt die Dynamik, wie sie in Abschnitt 2.3.1 hergeleitet wurde. Außerdem beschreiben  $l_b^z$  und  $u_b^z$  die unteren und oberen Grenzen der Zustandsgrößen und ihrer Ableitung (Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung) und  $l_b^u$  und  $u_b^u$  diejenigen für den Eingang.

## 3.2 Lösungsmethoden für das Optimalsteuerungsproblem

Für die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems gibt es vielfältige Ansätze. In einem ersten Schritt lassen sich diese in analytische und numerische Verfahren unterteilen. Durch das Pontryaginsche Maximumprinzip ergeben sich notwendige Bedingungen für eine global optimale Lösung des Optimalsteuerungsproblems. Für einfache Systeme lässt sich durch Auswertung dieser Bedingungen eine analytische Lösung bestimmen. Im Allgemeinen ist dies aber nicht möglich, und es werden numerische Verfahren verwendet, die das Optimalsteuerungsproblem diskretisieren, so dass das entstehende nichtlineare Programm (NLP) numerisch gelöst werden kann. Beispiele für die Diskretisierungsverfahren sind Schießverfahren und Kollokation (siehe Abschnitt 3.2.2). In dieser Arbeit wird dazu die sogenannte DMOC Methode verwendet (siehe Abschnitt 3.3.2), da diese Methode besondere Vorteile besitzt. Anschließend kann das NLP z. B. mit SQP-Verfahren (siehe Abschnitt 4.1) gelöst werden.

### 3.2.1 Das Pontryaginsche Maximumprinzip

Wie bei der Berechnung von Extrempunkten von skalaren Funktionen gibt es bei der Berechnung von optimalen Steuerungen ebenfalls notwendige und hinreichende Bedingungen für ein Optimum. Eine notwendige Bedingung für die Optimalität einer Lösung kann mit Hilfe der Variationsrechnung und den Lagrange-Multiplikatoren bestimmt werden und wird als Pontryaginsches Maximumprinzip

bezeichnet. (In der Literatur ist manchmal auch das analog herzuleitende Minimumprinzip aufgeführt.) Eine Steuerung  $u^*(t)$ , die die Bedingungen des Pontryaginschen Maximumprinzips erfüllt, ist ein Kandidat für eine global optimale Lösung des Optimalsteuerungsproblems. Die hier gewählte Darstellung folgt [Gee07].

**Satz 3.1 (Das Pontryaginsche Maximumprinzip)**

Zunächst wird die sogenannte Hamilton-Funktion  $H : \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt definiert:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t) - C(x(t), u(t), t).$$

Hierbei ist  $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]^T$  der Vektor der sogenannten adjungierten Variablen.

Das Maximumprinzip wird hier für den Fall dargestellt, dass die zulässigen Steuerungen durch die Menge  $U = \{u(t) \in \mathbb{R}^{n_u} \mid 0 \leq c_u(u(t), t), t \in [t_0, t_f]\}$  beschränkt sind, mit  $c_u(t) : \mathbb{R}^{n_u} \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_b}$  und  $n_b$  der Dimension der vorliegenden Beschränkungen.

Es sei  $u^*(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  eine zulässige Steuerung mit dem zugehörigen Pfad  $x^*(t) \in \mathbb{R}^n$ , welche das System vom Zustand  $x^0$  zur Zeit  $t_0$  zum Zustand  $x^f$  zum Zeitpunkt  $t_f$  überführt.

Falls die Steuerung  $u^*(t)$  die optimale Steuerung ist, dann existiert eine stetig differenzierbare Funktion  $\lambda(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und ein Vektor  $\alpha \in \mathbb{R}^{n_r}$  so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i)

$$\dot{x}^*(t) = \nabla_x H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t), \quad (3-11a)$$

$$x^*(t_0) = x^0, \quad (3-11b)$$

$$x^*(t_f) = x^f, \quad (3-11c)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \nabla_\lambda H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) \quad (3-11d)$$

$$= -\nabla_x C(x^*(t), u^*(t), t) - [\nabla_x f(x^*(t), u^*(t), t)]^T \lambda(t), \quad (3-11e)$$

$$\lambda(t_f) = \nabla_x \kappa(x^*(t_f)) - \nabla_x r(x^*(t_f)) \alpha. \quad (3-11f)$$

(ii) Für alle  $t \in [t_0, t_f]$  besitzt die Hamilton-Funktion  $H(x^*(t), u(t), \lambda(t), t)$  ein globales Maximum bei  $u^* \in U$ . Das heißt

$$H(x^*(t), u(t), \lambda(t), t) \leq H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) \quad (3-12)$$

für  $u \in U$ .

Durch die Verwendung von weiteren Bedingungen kann das Pontryaginsche Maximumprinzip auch an andere Optimalsteuerungsprobleme angepasst werden. So ist

es möglich auch Systeme mit freiem oder festem Endzustand, beschränktem Endzustand oder Zustandsbeschränkungen zu behandeln. Siehe hierzu auch [Gee07], [BBB<sup>+</sup>01] oder [Pin93]. Ein Beweis des Maximumprinzips ist z. B. in [PBGM62] zu finden.

### 3.2.2 Numerische Methoden

Zur numerischen Lösung des Optimalsteuerungsproblems gibt es zwei verschiedene Ansätze: die sogenannten indirekten und die direkten Methoden. Die hier aufgeführte Darstellung der numerischen Verfahren folgt [BBB<sup>+</sup>01].

Bei den indirekten Methoden werden zuerst die kontinuierlichen Gleichungen des Pontryaginschen Maximumprinzips (3-11a)-(3-11f) und (3-12) für das Optimalsteuerungsproblem hergeleitet. Diese bilden dann ein komplexes Mehrpunktrandwertproblem, welches dann numerisch gelöst werden kann.

Die Grundidee zur Lösung eines optimalen Steuerproblems mit direkten Methoden ist es, das originale unendlich dimensionale Problem in ein endlich dimensionales *nichtlineares Programmierproblem* (NLP) umzuschreiben und es anschließend numerisch zu lösen. Im Folgenden werden zunächst das *direkte Einfach- bzw. Mehrfachschießverfahren* und die *direkte Kollokation* näher ausgeführt.

#### Schießverfahren

Bei dieser Methode zur Lösung eines Optimalsteuerungsproblems lassen sich Einfach- und Mehrfachschießverfahren unterscheiden. Die Grundidee ist aber bei beiden Verfahren gleich.

Bei der Methode des Einfachschießverfahrens (siehe z. B. [Kra85]) wird eine zum Problem passende Ansatzfunktion für die kontinuierliche Steuerung  $u(t)$  gewählt, die von einem endlich dimensionalen Parametervektor  $p \in \mathbb{R}^{n_p}$  abhängt. Dann wird das aus dem Optimalsteuerungsproblem entstehende Anfangswertproblem betrachtet, dessen Lösung sich durch die Variation des Parameters  $p$  beeinflussen lässt. Durch Vorwärtsintegration und Variation von  $p$  wird derjenige Parametervektor ermittelt, der in der optimalen Lösung des Steuerungsproblems resultiert. Zusätzliche Ungleichheitsnebenbedingungen lassen sich z. B. entlang eines diskreten Zeitgitters  $t_0 < \dots < t_N = t_f$  überprüfen. Dadurch entsteht das folgende NLP:

$$\text{Minimiere}_{p \in \mathbb{R}^{n_p}} \tilde{J}(p) := \int_{t_0}^{t_f} C(\tilde{x}(t, p), \tilde{u}(t, p), t) dt + \kappa(\tilde{x}(t_f, p), t_f),$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{c}_i(p) &:= c(\tilde{x}(t_i, p), \tilde{u}(t_i, p), t_i), \quad i = 0, \dots, N, \\ 0 &= \tilde{r}(p) := r(\tilde{x}(t_N, p)). \end{aligned}$$

Beim Mehrfachschießverfahren (siehe [Pli81], [BP84]) beginnt die Umformulierung des Optimalsteuerungsproblems aus (3-4)-(3-8) in ein NLP, ähnlich wie beim Einfachschießverfahren durch eine Parametrisierung der kontinuierlichen Steuerung. Zunächst wird aber das Zeitintervall  $I = [t_0, t_f]$  in  $N$  Teilintervalle mit den Stützstellen  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$  unterteilt. Dann wird die Steuerung durch eine stückweise Darstellung parametrisiert

$$\tilde{u}_i(t, p_i) \text{ für } t \in [t_i, t_{i+1}],$$

mit  $N$  lokalen Steuerparametervektoren  $p_0, p_1, \dots, p_{N-1}; p_i \in \mathbb{R}^{n_p}$ .

In dem entscheidenden zweiten Schritt werden nun  $N + 1$  zusätzliche Vektoren  $s_0, s_1, \dots, s_N$  eingeführt, welche von derselben Dimension  $n$  wie die Zustandsvariablen sind ( $s_i \in \mathbb{R}^n$ ). Sie werden als *Knotenwerte* des Mehrfachschießverfahrens bezeichnet. Alle bis auf den letzten zusätzlichen Vektor dienen als Anfangswerte für  $N$  unabhängige Anfangswertprobleme:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= f(x_i(t), \tilde{u}_i(t, p_i), t), \\ x_i(t_i) &= s_i.\end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Probleme sind  $N$  unabhängige Trajektorien  $x_i(t)$  auf  $[t_i, t_{i+1}]$ , welche nur von  $s_i$  und  $p_i$  abhängen.

Die entkoppelten Anfangswertprobleme sind durch Übereinstimmungsbedingungen miteinander verbunden und diese fordern, dass jeder Knotenwert gleich dem Endwert der vorhergehenden Trajektorie ist:

$$s_{i+1} = \tilde{x}_i(t_{i+1}, s_i, p_i), \quad i = 0, \dots, N - 1. \quad (3-13)$$

Der erste Knotenwert des Mehrfachschießverfahrens muss gleich dem Anfangswert  $x_0$  des Steuerungsproblems sein:

$$s_0 = x^0. \quad (3-14)$$

Zusammen heben die neuen Nebenbedingungen (3-13) und (3-14) die zusätzlichen Freiheitsgrade, die durch die Einführung der Parameter  $s_i$ ,  $i = 0, \dots, N$  entstanden sind, auf.

Die Ungleichheitsnebenbedingungen können wiederum entlang des Zeitgitters berücksichtigt werden:

$$0 \leq \tilde{c}_i(s_i, p_i) := c(s_i, \tilde{u}_i(t_i, p_i), t_i), \quad i = 0, \dots, N.$$

Zusammenfassend ergibt sich das folgende endlich dimensionale NLP durch die Parametrisierung mit dem direkten Mehrfachschießverfahren:

$$\text{Minimiere}_{s_0, \dots, s_N, p_0, \dots, p_{N-1}} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{J}_i(s_i, p_i) + \tilde{\kappa}(s_N),$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}s_{i+1} &= \tilde{x}_i(t_{i+1}, s_i, p_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \\ s_0 &= x^0, \\ 0 &\leq \tilde{c}_i(s_i, p_i), \\ 0 &= r(s_N).\end{aligned}$$

## Kollokation

Beim Kollokationsverfahren werden sowohl der Zustand als auch die Steuerung durch polynomielle Ansatzfunktionen parametrisiert. Dabei ist die Grundidee, dass die Bewegungsgleichungen des Systems an  $N$  Kollokationspunkten auf dem Zeitgitter  $t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1} = t_f$  erfüllt sind.

Die Zustands- und Steuervariablen werden dazu durch stückweise definierte Funktionen  $\tilde{x}(t, s)$  und  $\tilde{u}(t, p)$  auf dem Zeitgitter approximiert. Hierbei sind  $s$  und  $p$  die Paramtervektoren. Innerhalb jedes Kollokationsintervalls  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $0 \leq i \leq N$  werden diese Funktionen als parameterabhängige Polynome der Ordnung  $k, l \in \mathbb{N}$  gewählt:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t, s)|_{[t_i, t_{i+1}]} &:= \tilde{x}_i(t, s_i) := \pi_i^X(t, s_i) \in \Pi_k^n, \\ \tilde{u}(t, p)|_{[t_i, t_{i+1}]} &:= \tilde{u}_i(t, p_i) := \pi_i^U(t, p_i) \in \Pi_l^{n_c}.\end{aligned}$$

Hierbei kennzeichnet  $\Pi_\mu^\nu$  den Raum der Polynome bis zum Grad  $\mu$  mit  $\nu$ -dimensionalen Vektoren. Die Koeffizienten der Polynome werden in den Vektoren

$$\begin{aligned}s &:= (s_0^T, \dots, s_N^T)^T \in \mathbb{R}^{N \cdot (k+1) \cdot n}, \quad s_i \in \mathbb{R}^{(k+1) \cdot n}, \quad i = 0, \dots, N, \\ p &:= (p_0^T, \dots, p_N^T)^T \in \mathbb{R}^{N \cdot (l+1) \cdot n_c}, \quad p_i \in \mathbb{R}^{(l+1) \cdot n_c}, \quad i = 0, \dots, N\end{aligned}$$

erfasst.

Übereinstimmungsbedingungen von der Form

$$\pi_i(t_{i+1}^-, \cdot) = \pi_{i+1}(t_{i+1}^+, \cdot), \quad i = 0, \dots, N-1$$

müssen an den Grenzen der Teilintervalle eingeführt werden, um die Stetigkeit der Approximationsfunktionen auf  $[t_0, t_f]$  zu erzwingen. Zusätzlich kann Differenzierbarkeit höherer Ordnung durch die Bedingungen

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \pi_i(t_{i+1}^-, \cdot) = \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \pi_{i+1}(t_{i+1}^+, \cdot), \quad \begin{cases} \gamma = 1, \dots, K \\ i = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

eingeführt werden, wobei  $K$  die benötigte Ordnung der Differenzierbarkeit darstellt.

Um ein nichtlineares Optimierungsproblem formulieren zu können, werden nun die Systemgleichungen und die Ungleichheitsbedingungen explizit diskretisiert:

- (i) Die Systemgleichungen (3-1) müssen nur an den Kollokationspunkten  $t_{i\mu}$ ,  $\mu = 1, \dots, M$  innerhalb der Teilintervalle  $[t_i, t_{i+1}[$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$  und  $[t_N, t_{N+1}]$ , erfüllt sein:

$$\begin{aligned} t_i &\leq t_{i0} < \dots < t_{iM} < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N - 1, \\ t_N &\leq t_{N0} < \dots < t_{NM} \leq t_{N+1}. \end{aligned}$$

- (ii) Die Ungleichheitsbedingungen  $c$  werden auf einem anderen Gitter in  $[t_0, t_f]$  mit  $L + 1$  Stützstellen ausgewertet:

$$t_0 \leq t_1^c < \dots < t_L^c \leq t_f.$$

Zusammenfassend ergibt sich somit das folgende diskretisierte Optimalsteuerungsproblem durch die Kollokationsmethode:

$$\min_{s,p} \tilde{J}(s,p),$$

unter den nichtlinearen Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}(t_{il}, s), \tilde{u}(t_{il}, p), t_{il}) - \dot{\tilde{x}}(t_{il}, s) &= 0, \quad \begin{cases} i = 0, \dots, N, \\ l = 0, \dots, M, \end{cases} \\ c(\tilde{x}(t_\beta^c, s), \tilde{u}(t_\beta^c, p), t_\beta^c) &\geq 0, \quad \beta = 1, \dots, L, \\ \tilde{x}(t_0, s) - x^0 &= 0, \\ r(\tilde{x}(t_f, s)) &= 0. \end{aligned}$$

Falls die Lösung zusätzlich nach den Zustands- und Steuervariablen stetig differenzierbar sein soll, müssen die folgenden Übereinstimmungsbedingungen ebenfalls erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \pi_i^X(t_{i+1}^-, s_i) - \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \pi_{i+1}^X(t_{i+1}^+, s_{i+1}) &= 0, \quad \begin{cases} \gamma = 1, \dots, K_s, \\ i = 0, \dots, N - 1, \end{cases} \\ \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \pi_i^U(t_{i+1}^-, p_i) - \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \pi_{i+1}^U(t_{i+1}^+, p_{i+1}) &= 0, \quad \begin{cases} \gamma = 1, \dots, K_c, \\ i = 0, \dots, N - 1, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei  $K_s \leq k$  die Ordnung der Differenzierbarkeit nach den Zustandsvariablen und  $K_c \leq l$  die Ordnung der Differenzierbarkeit nach den Steuervariablen ist.

### 3.3 Discrete Mechanics and Optimal Control

In diesem Abschnitt wird die Methode *Discrete Mechanics and Optimal Control* (DMOC) zur Diskretisierung eines Optimalsteuerungsproblems vorgestellt. Zunächst werden in Abschnitt 3.3.1 einige Grundlagen zur Variationsmechanik vorgestellt. Anschließend wird in Abschnitt 3.3.2 der spezielle Diskretisierungsansatz von DMOC selbst vorgestellt, und in Abschnitt 3.3.3 wird beschrieben, was DMOC von anderen Standardverfahren zur optimalen Steuerung unterscheidet. Die dabei verwendeten mathematischen Grundlagen aus den Bereichen der Differentialgeometrie, der Herleitung von Euler-Lagrange-Gleichungen und dem Lagrange-d'Alembert Prinzip, die für das Verständnis dieses Abschnitts hilfreich sind, werden im Anhang A dargestellt. Zusätzliche Informationen zur DMOC Methode sind in den Quellen [OBJM11], [OB08], [JMOB05] und [MW01] zu finden, die auch in dieser Arbeit als Grundlage für die Darstellung der DMOC Methode dienen.

Anschließend wird in Abschnitt 3.3.4 auf das diskrete Optimalsteuerungsproblem für das Mehrfachpendel eingegangen. Außerdem wird in Abschnitt 3.3.5 beschrieben, welche besonderen Eigenschaften das entstehende diskrete Verfahren besitzt. In Abschnitt 3.3.6 wird ein kurzer Überblick über die aktuelle Forschungsarbeit mit der DMOC Methode gegeben und dadurch gezeigt, in welchen Bereichen sie angewendet werden kann.

#### 3.3.1 Einführung in Variationsmechanik

Für das bessere Verständnis der Herleitung der DMOC Methode, die auf einem Variationsprinzip beruht, wird zunächst eine kurze Einführung in dieses Themengebiet gegeben. Dabei wird darauf eingegangen, wie die Euler-Lagrange-Gleichungen bzw. ein diskretes Zeitschrittverfahren mit Hilfe von Variationsprinzipien hergeleitet werden kann [MW01]. Für weitere Informationen zum Hintergrund der Variationsrechnung siehe [Pin93] und [Kie10].

Es wird die Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q} - V(q)$  eines mechanischen Systems betrachtet, wie sie auch im Anhang A.2 hergeleitet werden. Dabei ist  $M$  eine positiv definite Matrix und  $V(q)$  die potentielle Energie des Systems. Es werden die generalisierten Koordinaten  $q = [q_0, \dots, q_N]$  für die Systembeschreibung gewählt. Der Standardansatz in der Lagrangemechanik betrachtet das Wirkungsintegral, also das Integral von  $L$  entlang der Kurve  $q(t)$  und berechnet dann eine

Variation  $\delta$ , wobei die Endpunkte von  $\delta q(t)$  fest gewählt werden. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}\delta \int_0^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t)) dt &= \int_0^{t_f} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta \dot{q} \right] dt \\ &= \int_0^{t_f} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta q - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta q \right] dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta q \right]_0^{t_f} \\ &= \int_0^{t_f} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \cdot \delta q dt,\end{aligned}$$

wobei hier partielle Integration und die Information  $\delta q(0) = \delta q(t_f) = 0$  verwendet wird. Bei dem Variationsansatz wird nun gefordert, dass die Variation des Wirkungsintegrals null für alle Variationen  $\delta q$  sein muss. Dadurch ergeben sich die bekannten Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.$$

Es ist allgemein bekannt, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen spezielle Erhaltungseigenschaften besitzen. Zum Beispiel ist der Fluss symplektisch (siehe auch Abschnitt 3.3.5). Bei der Betrachtung von diskreter Lagrangemechanik ist es dann ein Ziel eine analoge diskrete Herleitung mittels Variationsprinzipien durchzuführen, um die vorhandenen Erhaltungseigenschaften auch beim diskreten Integrationschema beizubehalten. Anstatt Position  $q$  und Geschwindigkeit  $\dot{q}$  werden nun zwei diskrete Positionen  $q_0$  und  $q_1$  zusammen mit dem Zeitschritt  $h$  betrachtet. Dabei stellen  $q_0 \approx q(0)$  und  $q_1 \approx q(h)$  zwei Punkte auf einer Kurve dar, die durch den Zeitschritt  $h$  getrennt sind.

Ausgehend von diesem Ansatz wird eine diskrete Lagrange-Funktion  $L_d(q_0, q_1)$  bestimmt, die eine Approximation des Wirkungsintegrals zwischen den Punkten  $q_0$  und  $q_1$  darstellt. Um dies zu verdeutlichen kann z. B. eine einfache Approximation des Integrals  $\int_0^{t_f} L dt$  durch die Rechteck-Regel verwendet werden. Hierbei wird die Länge des Intervalls mit dem Wert des Integranden multipliziert, wobei der Geschwindigkeitsvektor durch  $(q_1 - q_0)/h$  ersetzt wird:

$$L_d(q_0, q_1) = h \left[ \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right)^T M \left( \frac{q_1 - q_0}{h} \right) - V(q_0) \right].$$

Es kann weiterführend eine diskrete Kurve von Punkten  $\{q_k\}_{k=0}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  betrachtet werden und daraus das diskrete Wirkungsintegral bestimmt werden. Dies kann durch die Summation der diskreten Lagrange-Funktion für jedes benachbarte Paar der diskreten Punkte durchgeführt werden. Entsprechend dem Vorgehen

im kontinuierlichen Fall, wird nun die Variation dieser Summe betrachtet und es werden wiederum die Punkte  $q_0$  und  $q_N$  fest gewählt. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}) \\ = \sum_{k=0}^{N-1} [D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_k + D_2 L_d(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_{k+1}] \\ = \sum_{k=1}^{N-1} [D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1})] \cdot \delta q_k, \end{aligned}$$

wobei hier die diskrete partielle Integration verwendet wird, was eine Umstellung der Summationsterme bedeutet, und wiederum  $\delta q_0 = \delta q_N = 0$  an den Randpunkten der Kurve gilt. Außerdem beschreibt  $D_1$  die Ableitung nach der ersten und  $D_2$  die Ableitung nach der zweiten Komponente der diskreten Lagrange-Funktion. Es wird nun erneut gefordert, dass die Variation des Wirkungsintegrals für jede Variation  $\delta q_k$  null ist, sodass sich die diskreten Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben:

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) = 0,$$

die für  $k = 1, \dots, N - 1$  erfüllt sein müssen.

Ausgehend von den Anfangsbedingungen  $(q_0, q_1)$  definieren die diskreten Euler-Lagrange-Gleichungen eine rekursive Vorschrift für die Berechnung der gesamten Sequenz  $\{q_k\}_{k=0}^N$ . Somit kann durch diese Gleichungen eine Abbildung  $F_{L_d} : (q_k, q_{k+1}) \mapsto (q_{k+1}, q_{k+2})$  bestimmt werden, die als Einschritt-Integrator für das, den kontinuierlichen Euler-Lagrange-Gleichungen zugrunde liegende, System dient.

### 3.3.2 Die DMOC Methode

Im Folgenden werden mechanische Systeme betrachtet, die sich auf einer sogenannten Konfigurationsmannigfaltigkeit  $Q$  bewegen. Um den vollständigen Zustandsraum eines mechanischen Systems zu erhalten, wird in jedem Punkt  $q \in Q$  der Tangentialraum  $T_q Q$  betrachtet, der die möglichen Geschwindigkeitsvektoren im Punkte  $q$  beschreibt. Die Vereinigung aller Tangentialräume beschreibt dann das Tangentialbündel  $TQ$  zur Konfigurationsmannigfaltigkeit  $Q$ . Hierdurch können alle möglichen Zustände  $(q, \dot{q}) \in TQ$  beschrieben werden, siehe auch beispielhaft Bild 3-1 und Anhang A.1.

Es ist nun das folgende Optimalsteuerungsproblem gegeben: Betrachtet wird ein mechanisches System, welches sich in dem Konfigurationsraum  $Q$  auf einer Kurve

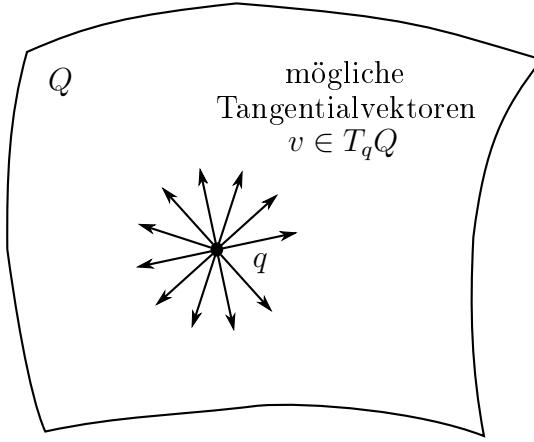


Bild 3-1: Konfigurationsmannigfaltigkeit  $Q$  und Tangentialvektoren  $v \in T_q Q$  im Punkt  $q \in Q$

$q(t) \in Q$  in einem Zeitintervall  $[t_0 = 0, t_f]$  von dem Zustand  $(q^0, \dot{q}^0) \in TQ$  in den Zustand  $(q^{t_f}, \dot{q}^{t_f}) \in TQ$  bewegt. Das mechanische System befindet sich unter dem Einfluss von generalisierten Kräften  $\mathcal{F}(q(t), \dot{q}(t), u(t)) \in T_{q(t)}^* Q$ , die so gewählt werden sollen, dass die *Kostenfunktion*

$$J(q, \dot{q}, u, t_f) = \int_0^{t_f} C(q(t), \dot{q}(t), u(t)) dt + \kappa(q(t_f), t_f) \quad (3-15)$$

minimiert wird. Es sind dabei  $T_{q(t)}^* Q$  der Kotangentialraum<sup>1</sup> und  $u(t) \in U$  die Steuerung des mechanischen Systems, wobei  $U$  der Raum der zulässigen Steuerungen darstellt.

Zur gleichen Zeit muss die Konfiguration  $q(t)$  des Systems das Lagrange-d'Alembert-Prinzip erfüllen, welches fordert, dass

$$\delta \int_0^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t)) dt + \int_0^{t_f} \mathcal{F}(q(t), \dot{q}(t), u(t)) \cdot \delta q(t) dt = 0 \quad (3-16)$$

für alle Variationen  $\delta q \in T_{q(t)} Q$  mit  $\delta q(0) = \delta q(t_f) = 0$  gilt, wobei  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  die Lagrange-Funktion des mechanischen Systems ist.

Somit kann dieses Problem abstrakt als Optimierungsproblem mit Zwangsbedingungen gesehen werden, denn man versucht die Funktion

$$J(q, \dot{q}, u, t_f)$$

bezüglich der Parameter  $q, \dot{q}, u$  und  $t_f$  zu minimieren, wobei die zusätzlichen Zwangsbedingungen

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, f) = 0$$

---

<sup>1</sup>Der Kotangentialraum besteht aus allen linearen Abbildungen von  $T_q Q$  nach  $\mathbb{R}$ .

bestehen. Hierbei ist die Funktion  $\mathcal{L}$  eine abstrakte Form für die Euler-Lagrange-Gleichungen, welche die Bewegungsgleichungen des mechanischen Systems beschreiben.

## Die Diskretisierung

Die Idee der DMOC Methode ist es, die Variationsstruktur direkt auszunutzen, ohne zuerst die Bewegungsgleichungen des Systems, also die Euler-Lagrange-Gleichungen, herzuleiten. Durch den Gebrauch einer globalen Diskretisierung des Zustands und der Steuerung erhält man, durch das *diskrete Lagrange-d'Alembert-Prinzip*, Gleichheitsbedingungen für das resultierende endlich dimensionale nicht-lineare Optimierungsproblem. Dieses kann dann z. B. durch ein SQP-Verfahren gelöst werden.

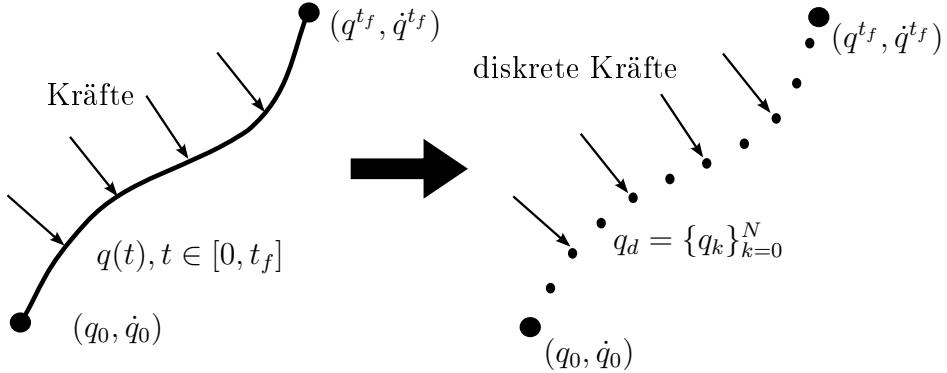
Dazu wird das Optimalsteuerungsproblem aus (3-15) und (3-16) in ein endlich-dimensionales Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen umgeformt. Im Folgenden werden die dazu nötigen Diskretisierungsschritte beschrieben.

Der Zustandsraum  $TQ$  des Systems wird auf Basis von Lagekoordinaten durch den diskreten Zustandsraum  $Q \times Q$  und das Diskretisierungsgitter wird durch  $\Delta t = \{t_k = kh \mid k = 0, \dots, N\}$ ,  $Nh = t_f$  definiert, wobei  $N \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Knotenpunkte ist und  $h$  die gewählte Schrittweite. Dabei enthält dann der diskrete Zustandsraum  $Q \times Q$  die gleichen Informationen wie  $TQ$  kontinuierlichen Fall. Der Pfad  $q : [t_0 = 0, t_f] \rightarrow Q$  wird durch einen *diskreten Pfad*  $q_d : \{t_k\}_{k=0}^N \rightarrow Q$  ersetzt, wobei dann  $q_k = q_d(kh)$  als eine Approximation von  $q(kh)$  angesehen wird, siehe auch Bild 3-2. Analog dazu wird der Pfad der Steuerung  $u : [t_0 = 0, t_f] \rightarrow U$  ebenfalls durch einen diskreten Pfad ersetzt. Zu diesem Zweck wird ein verfeinertes Gitter  $\tilde{\Delta t}$  eingeführt, welches durch eine Menge von Steuerungspunkten  $0 \leq c_1 < \dots < c_s \leq 1$  als  $\tilde{\Delta t} = \{t_{kl} = t_k + c_l h \mid k = 0, \dots, N-1, l = 1, \dots, s\}$  erzeugt wird. Durch diese Notation wird der diskrete Pfad durch  $u_d : \tilde{\Delta t} \rightarrow U$  definiert. Die dazwischen liegenden Werte der Steuerung  $u_k$  auf  $[t_k, t_{k+1}]$  werden durch  $u_k = (u_{k1}, \dots, u_{ks}) \in U^s$  als diejenigen Steuerparameter definiert, die das System von  $q_k = q_d(t_k)$  nach  $q_{k+1} = q_d(t_{k+1})$  überführen, wobei  $u_{kl} = u_d(t_{kl})$  für  $l \in \{1, \dots, s\}$  gilt.

## Das diskrete Lagrange-d'Alembert-Prinzip

Basierend auf dieser Diskretisierung wird das Integral in (3-16) auf dem Zeitintervall  $[kh, (k+1)h]$  durch eine *diskrete Lagrange-Funktion*  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$L_d(q_k, q_{k+1}) \approx \int_{kh}^{(k+1)h} L(q(t), \dot{q}(t)) dt, \quad (3-17)$$

Bild 3-2: Diskretisierung des Pfades  $q(t)$ 

approximiert, und ebenso wird die virtuelle Arbeit durch einen Ausdruck der Form

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_d^-(q_k, q_{k+1}, u_k) \cdot \delta q_k + f_d^+(q_k, q_{k+1}, u_k) \cdot \delta q_{k+1} \approx \int_0^{t_f} \mathcal{F}(q(t), \dot{q}(t), u(t)) \cdot \delta q(t) dt$$

approximiert, wobei

$$f_d^\pm(q_k, q_{k+1}, u_k) := f_k^\pm \in T^*Q$$

als *linke* bzw. *rechte diskrete Kräfte* bezeichnet werden und von den diskreten Werten  $(q_k, q_{k+1}, u_k)$  abhängig sind, siehe auch Bild 3-3.

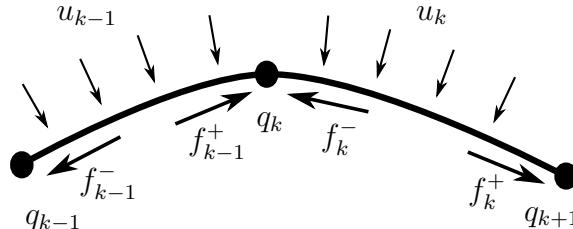


Bild 3-3: Linke und rechte diskrete Kräfte

Die diskrete Version des Lagrange-d'Alembert-Prinzips (3-16) verlangt diskrete Pfade  $\{q_k\}_{k=0}^N$  zu finden, sodass für alle Variationen  $\{\delta q_k\}_{k=0}^N$  mit  $\delta q_0 = \delta q_N = 0$  gilt, dass gilt

$$\delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}) + \sum_{k=0}^{N-1} (f_k^- \cdot \delta q_k + f_k^+ \cdot \delta q_{k+1}) = 0.$$

Das diskrete Lagrange-d'Alembert-Prinzip ist äquivalent zu dem System

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + f_{k-1}^+ + f_k^- = 0,$$

für  $k = 1, \dots, N - 1$ , und dies sind die *diskreten Euler-Lagrange-Gleichungen mit Kräften*. Hierbei ist  $D_1$  die Ableitung der diskreten Lagrange-Funktion nach der ersten Komponente bzw.  $D_2$  die Ableitung nach der zweiten Komponente. In Anhang A.2 wird eine kurze Herleitung zur Idee einer Variation, der Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen und dem Lagrange-d'Alembert-Prinzip gegeben und die diskreten Euler-Lagrange-Gleichungen wurden schon in Abschnitt 3.3.1 hergeleitet.

Diskrete Euler-Lagrange-Gleichungen werden zur Simulation von mechanischen Systemen verwendet, und solche Verfahren werden als *Variationsintegatoren* bezeichnet. Durch die Verwendung dieser Gleichungen besitzt DMOC spezielle Eigenschaften, auf die in Abschnitt 3.3.5 eingegangen wird. Weitere ausführliche Beschreibungen und Analysen zum Thema Variationsintegatoren werden in [MW01] gegeben.

## Diskrete Kostenfunktion

Die Kostenfunktion (3-15) wird nun im Zeitintervall  $[kh, (k + 1)h]$  durch

$$C_d(q_k, q_{k+1}, u_k) \approx \int_{kh}^{(k+1)h} C(q(t), \dot{q}(t), u(t)) dt,$$

approximiert, und dies führt zu der *diskreten Kostenfunktion*

$$J_d(q_d, f_d, t_f) = \sum_{k=0}^{N-1} C_d(q_k, q_{k+1}, u_k) + \kappa(q_N, t_f).$$

## Randbedingungen

Schließlich müssen die Randbedingungen  $q(0) = q^0, \dot{q}(0) = \dot{q}^0$  und  $q(t_f) = q^{t_f}, \dot{q}(t_f) = \dot{q}^{t_f}$  in die diskrete Beschreibung einbezogen werden. Zu diesem Zweck wird die Darstellung in  $Q \times Q$  mit einer Darstellung in  $TQ$  verbunden und zwar durch die *diskrete Legendre-Transformation*  $\mathbb{F}^{f+}L_d : Q \times Q \rightarrow T^*Q$  und  $\mathbb{F}^{f-}L_d : Q \times Q \rightarrow T^*Q$  für Systeme mit Kräften, die wie folgt definiert ist

$$\mathbb{F}^{f+}L_d : (q_{k-1}, q_k) \mapsto (q_k, p_k), \quad (3-18)$$

$$p_k = D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + f_d^+(q_{k-1}, q_k, u_{k-1}) \quad \text{und} \quad (3-19)$$

$$\mathbb{F}^{f-}L_d : (q_{k-1}, q_k) \mapsto (q_{k-1}, p_{k-1}), \quad (3-20)$$

$$p_{k-1} = -D_1 L_d(q_{k-1}, q_k) - f_d^-(q_{k-1}, q_k, u_{k-1}), \quad (3-21)$$

wobei  $p_k$  der diskrete Impuls ist. Diese besondere Form der Legendre-Transformation kann [MW01] entnommen werden.

Der zusätzliche Gebrauch der *gewöhnlichen Legendre-Transformation*  $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$

$$\mathbb{F}L : (q, \dot{q}) \mapsto (q, p) = (q, D_2 L(q, \dot{q})),$$

führt zu den zwei folgenden *diskreten Randbedingungen*

$$\begin{aligned} D_2 L(q^0, \dot{q}^0) + D_1 L_d(q_0, q_1) + f_d^-(q_0, q_1, u_0) &= 0, \\ -D_2 L(q^{t_f}, \dot{q}^{t_f}) + D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) + f_d^+(q_{N-1}, q_N, u_{N-1}) &= 0 \end{aligned}$$

auf Basis von Lage  $q$  und Geschwindigkeit  $\dot{q}$  des Systems. Aus diesen Gleichungen lassen sich durch die Legendre-Transformation auch die folgenden Randbedingungen für den Impuls bestimmen:

$$p_0 = -D_1 L_d(q_0, q_1) - f_d^-(q_0, q_1, u_0), \quad p_N = D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) + f_d^+(q_{N-1}, q_N, u_{N-1}).$$

In Anhang A.3.2 wird diese Herleitung mit Hilfe der diskreten Legendre-Transformation ausführlicher erläutert.

### **Das diskrete Optimalsteuerungsproblem mit Zwangsbedingungen**

Zusammengefasst bekommt man nach Durchführung der obigen Diskretisierungsschritte das folgende nichtlineare Optimierungsproblem mit Zwangsbedingungen:

$$\text{Minimiere}_{q_d, f_d, t_f} \quad J_d(q_d, f_d, t_f) = \sum_{k=0}^{N-1} C_d(q_k, q_{k+1}, u_k) + \kappa(q_N, t_f)$$

unter den Zwangsbedingungen

$$(q^0, p^0) = (q_0, -D_1 L_d(q_0, q_1) - f_d^-(q_0, q_1, u_0)), \quad (3-22a)$$

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + f_{k-1}^+ + f_k^- = 0, \quad (3-22b)$$

$$(q^{t_f}, p^{t_f}) = (q_N, D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) + f_d^+(q_{N-1}, q_N, u_{N-1})), \quad (3-22c)$$

für  $k = 1, \dots, N-1$ . Hierbei sind  $p^0$  und  $p^{t_f}$  der Impuls an den Randwerten, der aus den gegebenen Anfangs- und Endzuständen  $(q^0, \dot{q}^0)$  und  $(q^{t_f}, \dot{q}^{t_f})$  durch die Legendre-Transformation bestimmt wird.

### **Implementierung der Optimierung mit DMOC**

Als ein guter Kompromiss zwischen der Exaktheit und der Effizienz der Lösung werden die diskrete Kostenfunktion  $C_d$ , die diskrete Lagrange-Funktion  $L_d$  und

die diskreten Kräfte mit der Mittelpunktregel und konstanten Steuerungsparametern auf jedem Zeitintervall approximiert. Hierbei werden  $l = 1$  und  $c_1 = \frac{1}{2}$  gewählt:

$$\begin{aligned} C_d(q_k, q_{k+1}, u_k) &= hC\left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h}, u_k\right), \\ L_d(q_k, q_{k+1}) &= hL\left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right), \\ f_k^- = f_k^+ &= \frac{h}{2}\mathcal{F}\left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h}, u_k\right). \end{aligned}$$

Die Mittelpunktregel wird in Bild 3-4 links schematisch dargestellt. Auf der rechten Seite ist die Auswertung der diskreten Steuerung mit den gewählten Konstanten bestimmt.

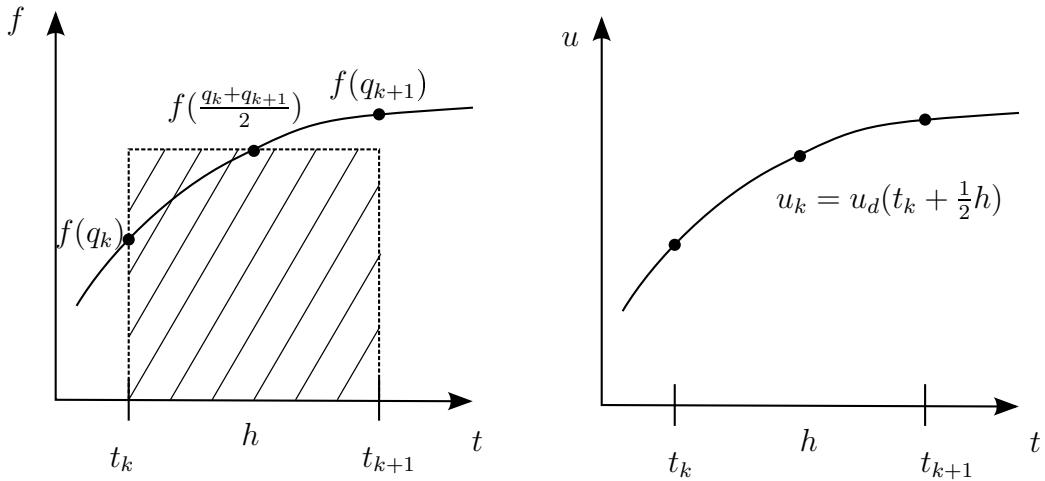


Bild 3-4: Links: Schematische Darstellung der Mittelpunktregel; rechts: diskrete Steuerung

Die Approximation des Integrals in (3-17) mit der Mittelpunktregel stellt nur eine Möglichkeit dar. Andere Quadraturformeln sind an dieser Stelle ebenfalls denkbar. Dabei führen Quadraturformeln höherer Ordnung zu exakteren numerischen Ergebnissen. Für einen Überblick zu unterschiedlichen Quadraturverfahren siehe z.B. [SK11].

Als Fazit lässt sich festhalten, dass die Gleichungen (3-22a) bis (3-22c) ein nicht-lineares Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen beschreiben, welches mit Standardoptimierungsmethoden gelöst werden kann (siehe hierzu auch Abschnitt 4.1 und Abschnitt 4.3).

### 3.3.3 Vergleich mit Standardmethoden

Beim Vergleich von Standardmethoden zur optimalen Steuerung mit DMOC ergeben sich die entscheidenden Unterschiede im Vorgehen durch die Reihenfolge der Variation und Diskretisierung für die Herleitung der notwendigen Optimalitätsbedingungen. Dies ist in Bild 3-5 dargestellt: Der linke Ast des Diagramms basiert allein auf der Variation auf kontinuierlicher Ebene (Variation, Variation, Diskretisierung), wie es bei indirekten Methoden durchgeführt wird. Im mittleren Ast ist eine Mischung der Variation auf kontinuierlicher und diskreter Ebene zu erkennen (Variation, Diskretisierung). Dies entspricht dem Vorgehen bei direkten Methoden, wie z. B. dem Kollokationsverfahren oder dem Schießverfahren. Im rechten Ast wird dann das Vorgehen bei der DMOC Methode dargestellt, bei der die Variation nur auf diskreter Ebene durchgeführt wird (Diskretisierung, diskrete Variation). Es handelt sich ebenfalls um eine direkte Methode für die Herleitung eines Optimalsteuerungsproblems, da zunächst die diskreten Bewegungsgleichungen aufgestellt werden und dann das resultierende NLP gelöst wird. Der hauptsächliche Unterschied zwischen DMOC und anderen direkten Methoden besteht darin, dass nicht die Differentialgleichungen, die aus dem Lagrange-d'Alembert-Prinzip hervorgehen, diskretisiert werden, sondern stattdessen schon ein Schritt früher diskretisiert wird. Und zwar werden bei DMOC die Gleichungen für das Optimierungsproblem durch die Variation des diskreten Lagrange-d'Alembert-Prinzips direkt hergeleitet. Dies führt zu vorteilhaften Eigenschaften dieser Methode, die in Abschnitt 3.3.5 genauer dargestellt werden, siehe hierzu auch [OB08].

Weiterführend können auch andere Unterschiede zwischen Schießverfahren, Kollokation und DMOC als Methoden für die Lösung von Optimalsteuerungsproblemen herausgestellt werden. Hier werden Argumente dafür gegeben, warum in dieser Arbeit DMOC ausgewählt wurde.

Beim Einfachschießverfahren muss in jedem Schritt des SQP-Verfahrens zur Optimierung ein numerisches Anfangswertproblem (AWP) gelöst werden. Da dies auf dem gesamten Intervall geschieht, ist die Gefahr von großen Integrationsfehlern hoch, und die Integration muss mit hoher Genauigkeit durchgeführt werden. Außerdem ist die Untersuchung von stark instabilen Systemen schwierig, da diese eine starke Abhängigkeit vom Anfangswert besitzen. Dadurch ist das AWP schlecht konditioniert, und es ist schwer, eine Lösung des Optimalsteuerungsproblems zu finden. Dafür ist das NLP, das durch das Einfachschießverfahren entsteht, klein, da wenige Optimierungsvariablen und Nebenbedingungen vorliegen. Außerdem sind die Bewegungsgleichungen des Systems während des Optimierungsprozesses immer erfüllt, da in jedem Schritt eine Vorwärtsintegration durchgeführt wird. Wenn bei einem zeitkritischen Problem die Optimierung vorzeitig abgebrochen werden muss, führt dies dazu, dass sehr wahrscheinlich die geforderten Rand-

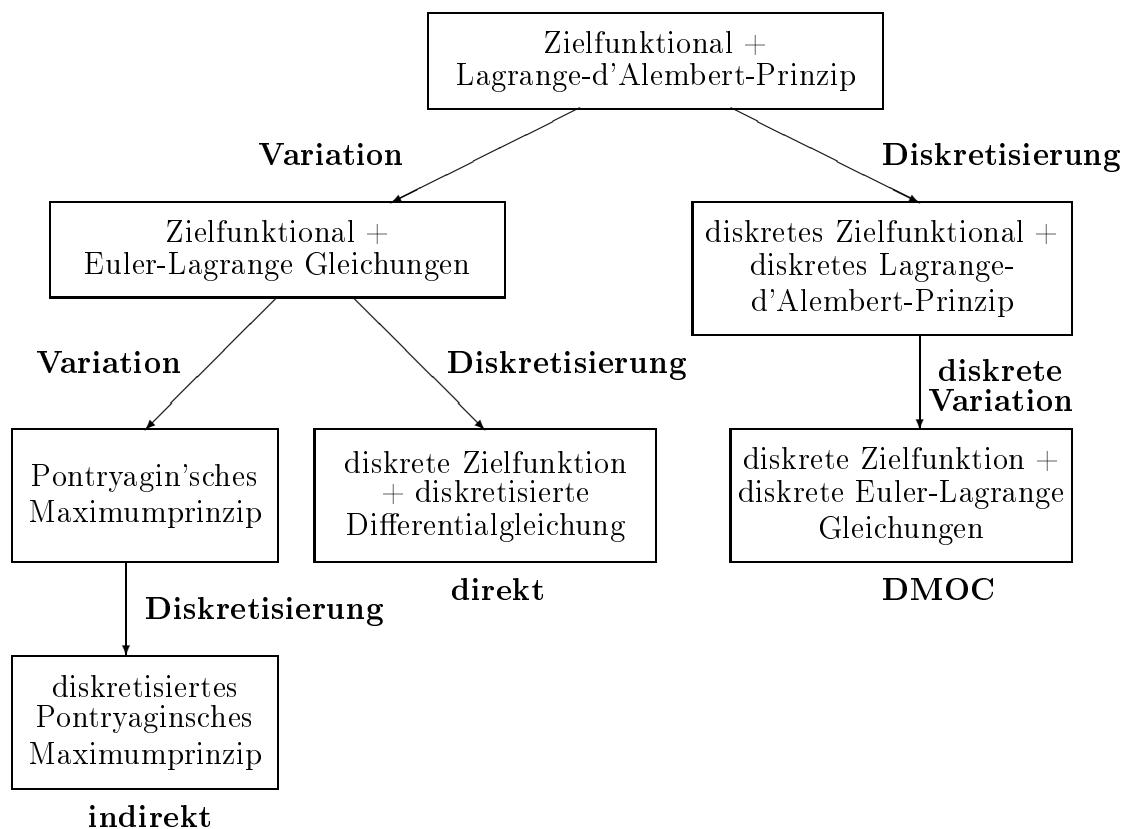


Bild 3-5: Optimale Steuerung für mechanische Systeme: Reihenfolge der Variation und Diskretisierung für die Herleitung der notwendigen Optimierungsbedingungen (vgl. [OBJM11])

bedingungen nicht erfüllt sind, sich aber eine physikalisch sinnvolle Trajektorie ergibt.

Beim Mehrfachschießverfahren besteht eine ähnliche Vorgehensweise wie beim Einfachschießverfahren, außer dass hier das gesamte Intervall diskretisiert wird und damit auf jedem Teilintervall die unterlagerten AWP gelöst werden müssen. Somit ist der numerische Aufwand zur Lösung des AWP insgesamt ebenso groß wie beim Einfachschießverfahren, die Stetigkeit der Lösung ist dagegen nur bei erfolgreicher Optimierung gegeben. Insgesamt ist das NLP durch das Mehrfachschießverfahren größer als beim Einfachschießverfahren, da mehr Optimierungsvariablen und Nebenbedingungen (z. B. für die Stetigkeit der Lösung) vorliegen. Durch Ausnutzung der besonderen Struktur kann aber mit diesem Verfahren sogar eine schnellere Konvergenz erreicht werden.

Bei der Kollokation sind im Vergleich zu den Schießverfahren potentiell noch schnellere Berechnungen möglich. Dies liegt daran, dass hier die Simulation der Differentialgleichungen und die Optimierung der Steuerung simultan ablaufen. Sowohl der Zustand als auch die Steuerung werden durch die Ansatzfunktionen mit Parametern diskretisiert und gehen zusammen in die Optimierung ein. Dadurch wird das NLP komplex, da es viele Optimierungsvariablen (Parameter für die Ansatzfunktionen) und Nebenbedingungen besitzt. Kollokation und Mehrfachschießverfahren sind in der Lage, stark instabile Systeme auf Grund der Diskretisierung des Zeitintervalls deutlich besser zu lösen als das Einfachschießverfahren.

Auch bei der DMOC Methode werden Konfiguration (Position) und Steuerung diskretisiert, so dass auch hier eine simultane Lösung des Optimalsteuerungsproblems möglich ist. Dies führt zu einer schnellen Rechenzeit bei der Lösung. Da aber die Diskretisierung nur auf Basis der Konfiguration ( $Q \times Q$ ) stattfindet, ist das NLP durch DMOC weniger komplex als beim Kollokationsverfahren. Die entsprechenden Geschwindigkeiten und Impulse werden anschließend mittels der diskreten Legendre-Transformation rekonstruiert.

In [OB08] wurde anhand eines Beispielsystems das vielversprechendste Standardverfahren – das Kollokationsverfahren – mit der DMOC Methode bezüglich ihrer Leistungsfähigkeit verglichen. Dabei wurde ein Kollokationsverfahren zweiter Ordnung und DMOC mit Mittelpunktregel (ebenfalls zweiter Ordnung) verwendet. Die ermittelten Konvergenzraten waren dabei in beiden Fällen  $\mathcal{O}(h^2)$ , entsprechend der gewählten Ordnung. Bei der Untersuchung der Rechenzeiten für die Berechnung einer optimalen Trajektorie wird deutlich, dass DMOC schneller konvergiert als die Kollokationsmethode. Hierfür wurde das betrachtete System mit unterschiedlicher Anzahl an Diskretisierungspunkten  $N \in \mathbb{N}$  untersucht. Dieser Vorteil in der Rechenzeit basiert wiederum auf der besonderen Diskretisierung

auf  $Q \times Q$ , was zu weniger Variablen im Optimierungsproblem und weniger Nebenbedingungen führt.

Zusammenfassend vereint DMOC viele einzelne vorteilhafte numerische Eigenschaften der anderen Verfahren. Es ist eine simultane Lösung des Problems möglich, auf Grund der besonderen Diskretisierung ist die Rechenzeit deutlich geringer als bei den Standardverfahren und das NLP ist weniger komplex als z.B. beim Kollokationsverfahren. Außerdem besitzt DMOC weitere spezielle Eigenschaften, auf die in Abschnitt 3.3.5 noch genauer eingegangen wird.

### 3.3.4 Herleitung des diskreten Optimalsteuerungsproblems mit DMOC für das Mehrfachpendel

Das diskrete Optimalsteuerungsproblem für das Mehrfachpendel wird aus dem kontinuierlichen Optimalsteuerungsproblem in Abschnitt 3.1.1 hergeleitet. Dazu wird die DMOC Methode im Folgenden auf das Modell des Doppelpendels auf einem Wagen angewendet.

Für das Doppelpendel mit Wagen ist der Konfigurationsraum  $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ , der Konfigurationsvektor  $q = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ y]$  und  $u_F$  die Kraft, die vom Motor aufgebracht wird. Diese Größen werden entsprechend Abschnitt 3.3.2 diskretisiert, sodass sich der diskrete Konfigurationsvektor  $q_k = q_d(t_k)$  für  $k = 0, \dots, N$  und der diskrete Steuerungsvektor  $u_k = u_d(t_k)$  für  $k = 0, \dots, N - 1$  Knotenpunkte ergibt. Die Anfangs- und Endpunkte werden für den Aufschwung aus der unteren in die instabile obere Ruhelage als  $q^0 = [-\pi \ -\pi \ 0]$ ,  $\dot{q}^0 = 0$  und  $q^{t_f} = [0 \ 0 \ 0]$ ,  $\dot{q}^{t_f} = 0$  gewählt.

Die Zielfunktion (3-9) wird mit Hilfe der diskreten Steuerung approximiert:

$$J_d(q_d, u_d, t_f) = a \cdot h \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 + b \cdot t_f,$$

wiederum mit  $a+b = 1$ . Bei Verwendung dieser Zielfunktion lässt sich durch Variation der Gewichtungsparameter  $a$  und  $b$  eine Mehrzieloptimierung durchführen. Für die Optimierung muss darauf geachtet werden, dass die beiden Terme der Zielfunktion in der gleichen Größenordnung liegen. Diese Skalierung kann auch mit Hilfe der Gewichtungsparameter  $a$  und  $b$  durchgeführt werden.

Durch die DMOC Methode werden die Bewegungsgleichungen durch einen variationellen Ansatz diskretisiert. Hierbei ergeben sich die allgemeinen diskreten Gleichungen (3-22a) - (3-22c) mit der kontinuierlichen Lagrange-Funktion

$$L : TQ \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q),$$

wie sie aus Abschnitt 2.3.1 bekannt ist. Diese wird entsprechend (3-17) durch die diskrete Lagrange-Funktion  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  approximiert.

Zusätzlich bestehen auch weiterhin Beschränkungen an die diskreten Zustände und die Steuerung:

$$\begin{aligned} lb_k^q \leq q_k \leq ub_k^q, & \quad k = 0, \dots, N, \\ lb_k^u \leq u_k \leq ub_k^u, & \quad k = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Außer diesen direkten Beschränkungen an die diskreten Lagekoordinaten und diskreten Steuerungen müssen Bedingungen an Geschwindigkeit und Beschleunigung aufgestellt werden, die entsprechend der gewählten diskreten Konfiguration durch  $q_k$ ,  $k = 0, \dots, N$  beschrieben werden müssen. Aufgrund der feinen Diskretisierung der Lagekoordinaten kann angenommen werden, dass die Geschwindigkeit und Beschleunigung mittels Differenzenquotienten genau genug approximiert werden können, was der gewählten Mittelpunktregel entspricht. Prinzipiell ist es auch möglich durch eine komplexere Rechnung mit Hilfe der diskreten Legendre-Transformation die Geschwindigkeiten exakt herzuleiten, siehe hierzu auch Anhang A.3.3. Mit dem Differenzenquotienten werden

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{q_{k+1} - q_k}{h}, & \text{für } k = 0, \dots, N - 1, \\ \ddot{q}_k &= \frac{\dot{q}_{k+1} - \dot{q}_k}{h}, & \text{für } k = 0, \dots, N - 2 \end{aligned}$$

definiert und die gewünschten Ungleichheitsnebenbedingungen können durch

$$\begin{aligned} \dot{q}_k - \dot{q}_{max} &\leq 0, & \text{für } k = 0, \dots, N - 1, \\ \ddot{q}_k - \ddot{q}_{max} &\leq 0, & \text{für } k = 0, \dots, N - 2 \end{aligned}$$

beschrieben werden. Ein weiterer Grund für die Verwendung des Differenzenquotienten ist, dass für die Werte  $\dot{q}_{max}$  und  $\ddot{q}_{max}$  in der Optimierung nicht die wirklichen maximalen Werte verwendet werden sollten. Für den späteren Reglereingriff muss eine Reserve in den physikalischen Begrenzungen berücksichtigt werden.

Somit ergibt sich als gesamtes Optimalsteuerungsproblem:

$$\text{Minimiere}_{q_d, u_d, t_f} \quad J_d(q_d, u_d, t_f) = a \cdot h \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 + b \cdot t_f \quad (3-23)$$

mit  $a + b = 1$ , unter den Nebenbedingungen

$$(q^0, p^0) = \left( \begin{bmatrix} -\pi & -\pi & 0 \end{bmatrix}, -D_1 L_d(q_0, q_1) - f_0^- \right), \quad (3-24a)$$

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + f_{k-1}^+ + f_k^- = 0, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (3-24b)$$

$$(q^{t_f}, p^{t_f}) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) + f_{N-1}^+ \right), \quad (3-24c)$$

$$\dot{q}_k - \dot{q}_{max}, \leq 0 \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (3-24d)$$

$$\ddot{q}_k - \ddot{q}_{max}, \leq 0 \quad k = 0, \dots, N-2, \quad (3-24e)$$

$$lb_k^q \leq q_k \leq ub_k^q, \quad k = 0, \dots, N, \quad (3-24f)$$

$$lb_k^u \leq u_k \leq ub_k^u, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (3-24g)$$

Die Gleichungen (3-24a) - (3-24c) müssen entsprechend der hier gezeigten Vorschrift für das Doppelpendel auf einem Wagen bestimmt werden, um dann im Optimierungsalgorithmus umgesetzt werden zu können. Hierauf wird im Anhang A.3 genauer eingegangen.

### 3.3.5 Spezielle Eigenschaften der DMOC Methode

Aufgrund der speziellen Diskretisierungsform besitzt DMOC gegenüber anderen numerischen Berechnungsverfahren Vorteile bei der Behandlung mechanischer Systeme. Dieser Ansatz beruht auf Konzepten der diskreten Mechanik und führt auf eine spezielle Diskretisierung der Systemgleichungen, welche auf Variationsintegratoren basiert, siehe hierzu auch [MW01]. Daher besitzt das diskrete Optimalsteuerungsproblem ebenfalls spezielle Eigenschaften die von den Variationsintegratoren sozusagen „geerbt“ werden. Bestimmte Strukturen, wie z. B. der Impuls, das Drehmoment oder die symplektische Form (siehe hierzu [MR05]) der numerischen Lösung bleiben erhalten. Bei Systemen mit äußeren Steuerungskräften kann der Einfluss dieser exakt abgebildet werden, was zu einer genaueren Approximation führt. Im Folgenden wird anhand des mathematischen Pendels – einem Hamilton System – gezeigt, welche Eigenschaften Variationsintegratoren besitzen, und anschließend wird auf ihre Bedeutung im Kontext von Optimalsteuerungsproblemen eingegangen.

#### Variationsintegratoren am mathematischen Pendel

Es wird im Folgenden das mathematische Pendel (Masse  $m = 1$ , masseloser Stab mit Länge  $l = 1$ , Gravitation  $g = 1$ ) betrachtet, welches einen Freiheitsgrad besitzt und durch die Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}^2 - mgl(1 - \cos q)$$

beschrieben werden kann. Es ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} = -\frac{g}{l} \sin q.$$

Es werden drei verschiedene numerische Integrationsverfahren an diesem System getestet:

- (i) Explizite Euler-Methode:  $y_{k+1} = y_k + h f(y_k)$ , mit  $y_k = [q_k \quad \dot{q}_k]^T$ .
- (ii) Implizite Euler-Methode:  $y_{k+1} = y_k + h f(y_{k+1})$ , mit  $y_k = [q_k \quad \dot{q}_k]^T$ .
- (iii) Symplektische Euler-Methode (ebenfalls ein implizites Verfahren):

$$\begin{bmatrix} q_{k+1} \\ \dot{q}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_k \\ \dot{q}_k \end{bmatrix} + h \cdot f(q_k, \dot{q}_{k+1}).$$

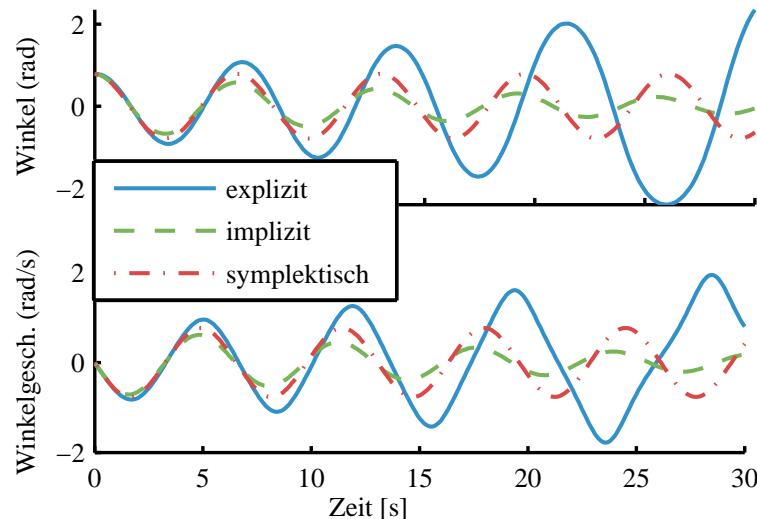


Bild 3-6: Vergleich verschiedener Euler Integratoren am mathematischen Einfachpendel (es werden Winkel und Winkelgeschwindigkeit dargestellt): explizit (blaue durchgezogene Linie), implizit (grün gestrichelte Linie) und symplektisch (rote Strichpunktlinie)

Beim mathematischen Pendel ist zu erwarten, dass es mit konstanter Amplitude immer weiter schwingt, da keine Dämpfung wirkt und es sich daher um ein idealisiertes, nicht dissipatives System handelt. Die drei verschiedenen Verfahren zur numerischen Approximation werden nun auf das System angewendet. Dabei wird eine Schrittweite von  $h = 0.1 \text{ s}$  verwendet. In Bild 3-6 sind die Ergebnisse dargestellt und es wird deutlich, dass das zu erwartende Verhalten durch die numerischen Approximationsmethoden (i) und (ii) nicht wiedergegeben werden

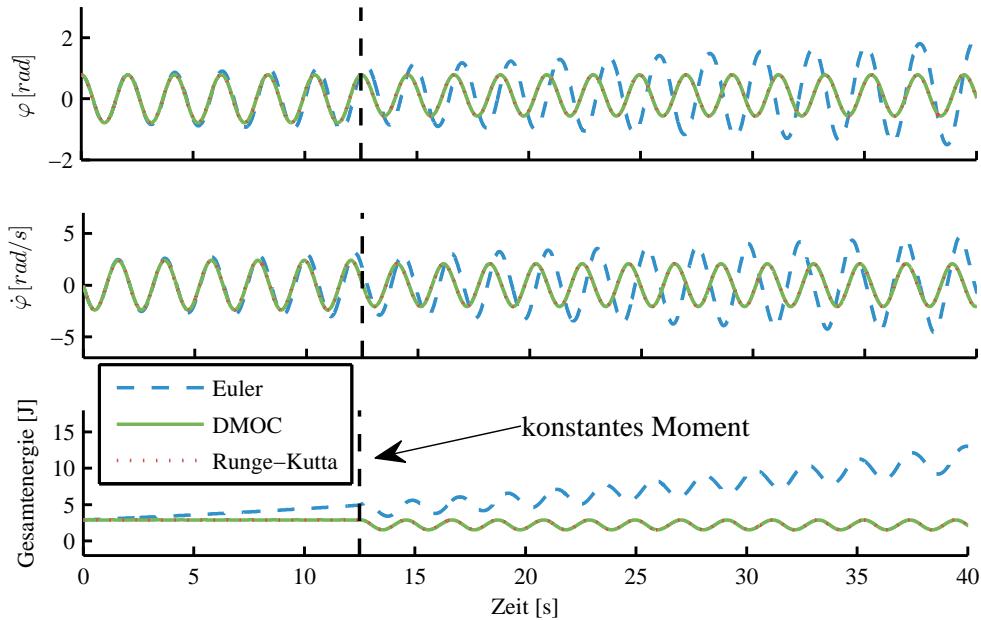
kann. Das explizite Euler-Verfahren ist instabil und führt zu einer aufklingenden Amplitude des Pendelwinkels. Das implizite Euler-Verfahren wirkt dagegen wie eine künstliche Dämpfung im System, und die Schwingungsamplitude nimmt ab. Beide Verfahren sind somit nicht in der Lage, das korrekte Verhalten des Systems abzubilden. Anders ist es beim symplektischen Euler-Verfahren, denn hier bleibt die Schwingungsamplitude des Pendels konstant, auch über eine längere Integrationszeit hinweg. Durch dieses Verfahren ist es also möglich, das dynamische Verhalten des Systems qualitativ richtig zu approximieren.

## Variationsintegratoren für Simulation realer Systeme

Es ist nun deutlich geworden, dass es sinnvoll ist, numerische Integratoren so zu bestimmen, dass vorhandene Erhaltungseigenschaften des Systems auch bei der numerischen Lösung weiterbestehen. Bei Hamilton Systemen kann z. B. die Symplektizität des Flusses durch die Verwendung eines symplektischen Integrators erhalten werden. Variationsintegratoren besitzen aber auch Vorteile bei der Behandlung von anderen Systemen. Ein allgemeines mechanisches System ist im Normalfall kein Hamilton System, da es Energieverluste z. B. durch Dämpfung oder auch eine Energiezufuhr, z. B. durch Aktoren beinhaltet. Auch wenn hier nicht die Symplektizität erhalten werden muss, hat der Einsatz von Variationsintegratoren Vorteile, denn im Gegensatz zu anderen Integratoren können sie das Energieverhalten auch dann gut approximieren, wenn es sich verändert, so dass es nicht zu künstlichen Energieverlusten bzw. -gewinnen kommt. Ein Einsatz dieser Verfahren für die Simulation dynamischer Systeme ist also erstrebenswert, um Integrationsfehler zu minimieren und das dynamische Verhalten des Systems möglichst gut zu approximieren.

Diese Eigenschaften können auch im Vergleich von drei unterschiedlichen Integratoren am mathematischen Pendel mit und ohne Dämpfung gezeigt werden. Es werden das explizite Euler-Verfahren mit einer Schrittweite  $h = 0.005\text{ s}$ , ein Integrator basierend auf den Gleichungen von DMOC ebenfalls mit der Schrittweite  $0.005\text{ s}$  und ein explizites Runge-Kutta-Verfahren mit der Dormand-Prince Formel (in Matlab *ode45*) mit einer hohen Genauigkeit als Referenz für die anderen Integratoren, verglichen. In Bild 3-7 wird das mathematische Pendel ohne Dämpfung betrachtet. Der Anfangswert ist  $[\varphi, \dot{\varphi}] = [\frac{\pi}{4}, 0]$  und bei  $t = 12.5\text{ s}$  wird ein konstantes Moment von  $1\text{ Nm}$  auf das Gelenk des Pendels aufgebracht, was durch eine vertikale gestrichelte Linie gekennzeichnet ist. Es wird deutlich, dass das Euler-Verfahren instabil ist: Die Gesamtenergie, die Amplitude der Schwingung und die Winkelgeschwindigkeit nehmen zu. Der Integrator, der basierend auf DMOC berechnet wurde, bildet das reale Systemverhalten dagegen korrekt ab, denn er stimmt mit der Referenz überein. Zunächst bleibt die Energie des Systems konstant, und bei der Wirkung des konstanten Moments ergibt sich,

entsprechend der Erwartungen, ein periodisches Verhalten. Durch die Wirkung des Moments wird der Winkel  $\varphi$  etwas in positive Richtung verschoben, und die Winkelgeschwindigkeit wird kleiner.



*Bild 3-7: Vergleich von Integratoren am mathematischen Pendel: explizites Eulerverfahren (blau gestrichelte Linie), DMOC (grün durchgehogene Linie) und Dormand-Prince Formel (explizites Runge-Kutta Verfahren) mit hoher Genauigkeit (rot gepunktete Linie); ab  $t = 12.5\text{ s}$  wird ein konstantes Moment aufgebracht und es werden  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  und die Gesamtenergie des Systems gezeigt*

In Bild 3-8 wird dann das mathematische Pendel mit Dämpfung  $d = 0.005$  untersucht. Dieses ist vergleichbar mit dem in dieser Arbeit untersuchten Anwendungsbeispiel des Doppelpendels auf einem Wagen, denn auch dort liegt Dämpfung in den Gelenken vor. Es werden dieselben Anfangswerte wie im ersten Beispiel verwendet. Erwartungsgemäß verliert das System Energie durch die Wirkung der Dämpfung und beim Einsetzen des konstanten Momentes ergibt sich das periodische Verhalten der Energie, wie schon im ersten Beispiel. Aber auch in diesem Fall wird deutlich, dass das Euler-Verfahren im Gegensatz zu den anderen beiden Integratoren das Systemverhalten nicht korrekt abbildet. Es stellt sich kein Energieverlust ein, und auch die Amplitude von Winkel und Winkelgeschwindigkeit wird nicht wie erwartet geringer.

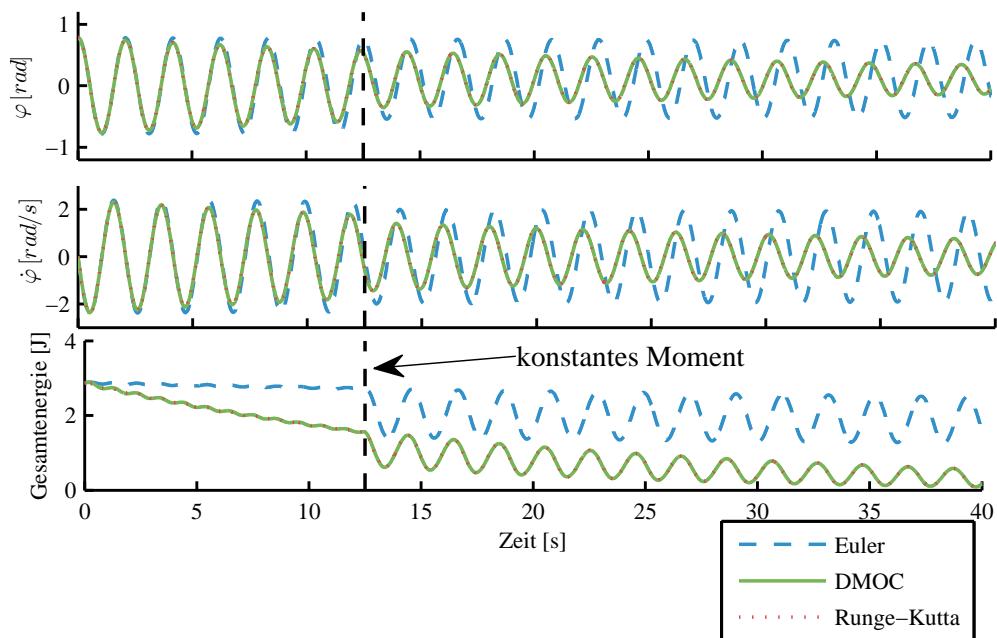


Bild 3-8: Vergleich von Integratoren am mathematischen Pendel mit Dämpfung: explizites Euler-Verfahren (blau gestrichelte Linie), DMOC (grün durchgezogene Linie) und Dormand-Prince Formel (explizites Runge-Kutta Verfahren) mit hoher Genauigkeit (rot gepunktete Linie); ab  $t = 12.5\text{ s}$  wird ein konstantes Moment aufgebracht und es werden  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  und die Gesamtenergie des Systems gezeigt

Als Fazit kann festgehalten werden, dass der Integrator basierend auf den Gleichungen der DMOC Methode ebenso gut funktioniert, wie das sehr genaue Referenzverfahren. Diese Ergebnisse motivieren zusätzlich den Einsatz der DMOC Methode für die Anwendungsfälle in dieser Arbeit.

### 3.3.6 Aktuelle Forschungsarbeiten mit DMOC

Nach der ersten Veröffentlichung der DMOC Methode im Jahr 2005 wurde sie in den folgenden Jahren weiter entwickelt und ihre Anwendung auf unterschiedliche dynamische Systeme getestet. Im Folgenden wird ein Überblick hierüber dargestellt.

In den Arbeiten [JOB05] und [JMOB06] wird DMOC zum ersten Mal an einem größeren Anwendungsbeispiel getestet. Es geht um die optimale Rekonfiguration von Raumfahrzeugen die sich in einer Formation bewegen. Dabei befinden sich  $n$  Raumfahrzeuge auf einem Orbit im Drei-Körper-Problem und die Aufgabe ist es, eine optimale Steuerung zu finden, die die Raumfahrzeuge aus einer inertialen Konfiguration auf eine Zielmannigfaltigkeit bringt. Dabei soll der Treibstoffverbrauch minimiert werden. Die Zielmannigfaltigkeit beschreibt die relative Position der Raumfahrzeuge zueinander und ihre vorgegebene Geschwindigkeit. Durch diese Beschreibung ist es möglich, dass im Optimierungsprozess die beste Ausrichtung der Formation abhängig von der inertialen Konfiguration der Raumfahrzeuge gefunden wird. Zur Kollisionsvermeidung werden künstliche Potentiale in der Systemdynamik oder Strafterme in der Kostenfunktion eingefügt, so dass sich die Raumfahrzeuge gegenseitig abstoßen, wenn sie sich zu nahe kommen. Durch die Anwendung von DMOC auf dieses Optimalsteuerungsproblem kann die gewünschte Endkonfiguration mit minimalem Steueraufwand erreicht werden. Es kann außerdem gezeigt werden, dass der numerische Aufwand von DMOC auf Grund der speziellen Implementierung geringer ist als bei einem vergleichbaren Standardansatz.

Weitergehende theoretische Untersuchungen zur Approximationsgüte der diskreten Lösung, Konvergenzeigenschaften und auch den strukturerhaltenden Eigenschaften sind in [OBJM11] und [OB08] zu finden. Dort wird genauer auf die Verbindung zwischen optimaler Steuerung und variationeller Mechanik eingegangen, welche durch DMOC geschaffen wird. Denn DMOC ist der erste Ansatz, der strukturerhaltende Methoden verwendet, um Lösungen für ein Optimalsteuerungsproblem zu berechnen. Die Vorteile der strukturerhaltenden Methoden werden dadurch an die Lösung des Optimalsteuerungsproblems weitergegeben. Die wichtigsten Aspekte sind

- (i) *Erhaltung der Impulsabbildung:* Unter bestimmten Voraussetzungen an das System wird die Impulsabbildung auch bei der diskreten Lösung des Opti-

malsteuerungsproblems erhalten. Bei Systemen mit Kräften wird der Impuls entsprechend der Wirkung der Kräfte exakt abgebildet.

- (ii) *Energieerhaltung*: Variationsintegatoren sind symplektisch, was bedeutet, dass sie bestimmte Eigenschaften erhalten (z. B. Energie). Dies ist eine wichtige Eigenschaft, wenn man das Langzeitverhalten eines dynamischen Systems betrachtet.
- (iii) *Implementierung*: Anstatt einer Implementierung auf Grundlage von Konfiguration und Impuls arbeitet DMOC auf  $Q \times Q$ . Das heißt, es wird nur die optimale Trajektorie für die Konfiguration und die Kräfte bestimmt und der Impuls bzw. die Geschwindigkeiten können mittels der diskreten Legendre-Transformation im Rahmen der numerischen Approximation exakt rekonstruiert werden.

Eine neue Forschungsrichtung ist entstanden, als mit Hilfe der DMOC Methode eine strukturerhaltende Methode für die optimale Steuerung mechanischer Mehrkörpersysteme (MKS) mit holonomen Zwangsbedingungen erstellt wurde, siehe [LOBMO07] und [LOBMO10]. Die neue Methode wurde mit "*Discrete Mechanics and Optimal Control for Constrained Systems*" (DMOCC) bezeichnet und ist eine Verbindung zwischen der Nullraum-Methode [Bet05], [BL06], [LBS08] und DMOC.

Die Nullraum-Methode ist ein effizientes Verfahren zur zeitlichen Integration von dynamischen Systemen mit Zwangsbedingungen. Außerdem können mit ihrer Hilfe die Bewegungsgleichungen eines endlich dimensionalen mechanischen MKS mit holonomen Zwangsbedingungen bestimmt werden. Die einzelnen Teilkörper des MKS werden dabei in redundanten Koordinaten beschrieben und unterliegen internen Zwangsbedingungen. Sie sind durch Gelenke, also externe holonome Zwangsbedingungen verbunden. Für diese Art von Systemen können die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrange-d'Alembert-Prinzips mit Lagrange-Multiplikatoren aufgestellt werden. Um dann die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren, können durch den Gebrauch der Nullraum-Matrix die Lagrange-Multiplikatoren wieder aus den Bewegungsgleichungen eliminiert werden. Durch eine Reparametrisierung kann die minimal mögliche Anzahl von Unbekannten in den Bewegungsgleichungen erreicht werden.

Bei der Kombination von Nullraum-Methode und DMOC wird aus dem DAE System der Bewegungsgleichungen durch die diskrete Nullraum-Methode eine zeitdiskrete Form hergeleitet. Die entstandenen reduzierten Gleichungen beschreiben ein Zeitschrittverfahren und sie dienen als Nebenbedingungen bei der Bestimmung der optimalen Steuerung mit DMOC durch einen Optimierungsalgorithmus.

DMOCC hat verschiedenen Vorteile: Erstens können die diskreten Bewegungsgleichungen einfach in redundanten Koordinaten beschrieben werden. Im zweiten Schritt wird die diskrete Nullraum-Methode angewendet, wodurch sich die mini-

mal mögliche Anzahl von Variablen und Gleichungen ergibt. Dies führt zu einem deutlich geringeren Rechenaufwand im Optimierungsalgorithmus. Drittens sind auch hier die strukturerhaltenden Eigenschaften der DMOC Methode von Vorteil. Sie führen zu einem guten Energieverhalten der diskreten Lösung, was vor allem für hochdimensionale MKS mit Zwangsbedingungen von hoher Bedeutung ist.

Es sind einige Anwendungsbeispiele von DMOCC in der Biomechanik zu finden, da hier häufig MKS mit holonomen Zwangsbedingungen vorliegen. In [OBT09] wird der menschliche Arm als MKS modelliert und es werden optimale Bewegungssequenzen eines Wurfes berechnet und analysiert. Dabei können z. B. Modelle mit unterschiedlicher Anzahl an Freiheitsgraden untersucht werden, was sich aus der Verwendung von verschiedenen Gelenken im Arm ergibt. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Wurfbewegung mit möglichst hoher Endgeschwindigkeit der Hand zu berechnen.

In [MSL11] wird ein biomechanisches Modell für einen Finger vorgestellt. Dabei werden neben dem MKS bestehend aus drei Körpern, die wirkenden Kräfte durch Muskelmodelle berechnet. Auch in diesem Beispiel wird betont, wie wichtig es ist, strukturerhaltende Verfahren zu nutzen, damit z. B. die Momente und die angreifenden Muskelkräfte nicht über- oder unterschätzt werden.

Bisher wurden bei DMOCC in der Simulation von MKS Kontakte oder Kollisionen zwischen den Körpern vernachlässigt. In neueren Arbeiten [LJO12], [LHK<sup>+</sup>12] wird nun sowohl die Vermeidung von Kollisionen als auch der geplante Kontakt zwischen Körpern bei einer optimalen Steuerungstrajektorie berücksichtigt. Dazu werden bestimmte Algorithmen verwendet, die Kontakte zwischen Körpern mittels orientierter Hyperflächen detektieren können.

In der Raumfahrt werden für die Steuerung von Satelliten häufig sehr komplexe Trajektorien entwickelt, da Raumfahrzeuge auf Grund der beschränkten Kapazität nur wenig Treibstoff verbrauchen dürfen. Für die Bestimmung solcher Trajektorien werden invariante Mannigfaltigkeiten benutzt [MOBM08]. Diese mathematischen Objekte stellen energieeffiziente Trajektorien dar, die der natürlichen Dynamik des Sonnensystems von einer Region des Weltalls in eine andere folgen. DMOC wird für die Bestimmung einer optimalen Trajektorie und für die Berechnung von optimalen Übergängen bei der Kombination von mehreren invarianten Mannigfaltigkeiten aus unterschiedlichen Drei-Körper-Problemen verwendet. In die zugehörige Zielfunktion können verschiedene Aspekte, wie Zeitoptimalität und Energieeffizienz eingehen. Ein weiterer Aspekt ist der Geschwindigkeitsunterschied beim Übergang zwischen zwei invarianten Mannigfaltigkeiten. Bei einer guten Trajektorie sollte er klein sein, um möglichst wenig Energie zu verbrauchen. Zusätzlich wurde DMOC im Rahmen dieser Arbeit zur Berechnung optimaler Trajektorien auf den Gebrauch von unterschiedlichen Gittern erweitert [MOBM11]. Dadurch kann z. B. in der Nähe eines Planeten mit kleiner Schrittweite gerechnet

werden, um eine möglichst exakte Trajektorie zu erhalten. Wenn sich der Satellit weiter entfernt, reicht dann die Verwendung einer größeren Schrittweite aus.

In den Arbeiten [FOB12],[FOBK12] wird ein ähnliches Konzept verwendet, um global optimale Trajektorien für mechanische Systeme zu berechnen. Die Idee ist es, inhärente dynamische Eigenschaften des Systems auszunutzen. Diese natürlichen Bewegungen des Systems ergeben sich ohne Steuereingriff und können so kostenlos verwendet werden. Dabei werden *motion planning* Methoden verwendet, die verschiedene Trajektorienstücke in einer Bibliothek hinterlegen und es so ermöglichen, eine optimale Trajektorie aus geeigneten Stücken zusammenzusetzen. Elemente der Bibliothek sind dabei invariante (in)stabile Mannigfaltigkeiten oder auch periodische Orbits. Zusätzlich werden durch DMOC berechnete Übergangsmanöver verwendet, um zwischen einzelnen Teilstücken wechseln zu können. Die zusammengesetzte Trajektorie ergibt einen guten *initial guess*, der mit DMOC nachoptimiert werden kann, wodurch sich eine geglättete optimale Trajektorie ergibt. Dieses Vorgehen wird an einem sphärischen Doppelpendel getestet, und erreicht dort durch die Kombination von invarianten Mannigfaltigkeiten und Teilstücken mit Steuereingriff gute Ergebnisse.

Als Fazit dieses Abschnitts lässt sich festhalten, dass die DMOC Methode in den letzten Jahren auf vielerlei Weise weiterentwickelt wurde. Dies geht einerseits in die Richtung, dass allgemein auch optimale Steuerung für komplexe Systemklassen ermöglicht wird (z. B. DMOCC) und andererseits wird DMOC für die Anwendung an komplexen Anwendungsbeispielen weiterentwickelt (z. B. Trajektorienplanung für Raumfahrzeuge mit Hilfe von invarianten Mannigfaltigkeiten). Im Folgenden wird in dieser Arbeit DMOC dazu verwendet, um für das Doppel(und Dreifach-)pendel mit Wagen optimale Trajektorien bezüglich gegenläufiger Ziele (Manöverzeit und Energieverbrauch) zu berechnen, dabei die Variantenvielfalt der Ergebnisse zu analysieren und nach paretooptimalen Lösungen zu suchen, siehe Kapitel 4. Im Weiteren wird auch für das Doppelpendel mit Wagen ein Ansatz getestet, bei dem die inhärente Systemdynamik genutzt wird, um optimale Trajektorien zu bestimmen, siehe Kapitel 5.



## 4 Optimale Steuerungstrajektorien für das Mehrfachpendel

Dieses Kapitel widmet sich der Berechnung von Trajektorien für den Aufschwung des Pendels auf einem Wagen. Dazu wird die in Kapitel 3 beschriebene DMOC Methode verwendet, um aus dem kontinuierlichen Optimalsteuerungsproblem ein endlich dimensionales, nichtlineares Programmierproblem (NLP) herzuleiten, welches anschließend numerisch gelöst werden kann. Hierzu wird die sequentielle quadratische Programmierung (SQP-Verfahren) verwendet, die in Abschnitt 4.1 beschrieben wird. Die Idee dabei ist es, das NLP iterativ zu lösen und dabei sowohl das Newton-Verfahren, als auch notwendige Optimalitätsbedingungen (Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen) zu verwenden. Im darauf folgenden Abschnitt 4.2 werden Verfahren der Mehrzieloptimierung erläutert und das Konzept der Pareto-Optimalität beschrieben. Die Methoden der Mehrzieloptimierung werden dazu verwendet, mehrere Ziele in der Optimierung berücksichtigen zu können. Diese Lösungen stellen jeweils einen optimalen Kompromiss bezüglich der gewählten Ziele, z.B. Zeit und Energie, dar und werden auch als paretooptimale Lösungen bezeichnet. Die Möglichkeit der Berücksichtigung mehrerer Zielgrößen ist ein Vorteil der Mehrzieloptimierung und führt dazu, dass eine Auswahl optimaler Kompromisse z. B. für einen Anwender zur Verfügung steht.

In Abschnitt 4.3 werden dann vier verschiedene Aufschwungmanöver für das Doppelpendel vorgestellt und bezüglich ihrer paretooptimalen Zielfunktionswerte verglichen. Durch die Mehrzieloptimierung ergeben sich vielfältige Manöver für den Aufschwung des Pendels, d. h. es ergeben sich Manöver mit unterschiedlicher Dynamik. Aus der großen Menge von optimalen Lösungen können Paretofronten gebildet werden, an denen sich interessante Eigenschaften der Dynamik des Pendels ablesen lassen.

Es kann zusätzlich gezeigt werden, dass sich eine ausgewählte Lösung auch in gewissen Bereichen variieren lässt. Das heißt, dass man durch eine Nachoptimierung die Bewegung beibehält, aber die Manöverzeit bzw. den Energieverbrauch leicht abändert. Dadurch ist es möglich, eine Trajektorie den genauen Wünschen eines Anwenders anzupassen.

Ausgewählte Lösungen der Optimierung werden am Prüfstand implementiert. Dadurch kann gezeigt werden, dass der modellbasierte Regelungsentwurf auch auf die praktische Anwendung übertragen werden kann und diese Trajektorien auch realisiert werden können.

Eine weitere Eigenschaft, die in diesem Kapitel untersucht wird, ist die Form der Paretofront. In diesem Zusammenhang wird gezeigt, dass es möglich ist, für den

Aufschwung des Pendels eine Paretofront ohne Lücken und Sprünge zu berechnen. Auf die Vorteile einer solchen Eigenschaft, vor allem für die weitere Verwendung der Lösungen in einem übergeordneten Kontext, wird später eingegangen. Außerdem kann in dieser Analyse gezeigt werden, dass die der realen Anwendung entstammende Wegbeschränkung von  $0.55\text{ m}$  für den Wagen keinen relevanten Einfluss auf die Beschaffenheit der Lösungen besitzt.

In Abschnitt 4.4 werden dann Ergebnisse für den Aufschwung des Dreifachpendels vorgestellt. Im Vergleich zum Doppelpendel ergeben sich deutlich komplexere Bewegungen, die bestimmten Mustern folgen. Es wird deutlich, dass der Aufschwung des Dreifachpendels immer mit dem Übergang über verschiedene Ruhelagen geschieht, da für ein direktes Manöver der zur Verfügung stehende Verfahrweg von  $\pm 0.55\text{ m}$  zu kurz ist.

Abschließend wird in Abschnitt 4.5 ein Fazit zur Verwendung von Optimierungsmethoden für die Berechnung von Trajektorien für den Aufschwung des Pendels gezogen. Dabei werden die Vorteile dieses Ansatzes im Vergleich zu anderen Ansätzen dargestellt.

## 4.1 Numerische Lösung des Optimalsteuerungsproblems mit SQP-Verfahren

Das *sequentielle quadratische Programmieren* (SQP) (siehe [Han76], [Pow77]) ist eine effiziente iterative Methode für die Lösung eines NLP, wie es aus der Diskretisierung eines Optimalsteuerungsproblems durch direkte Methoden entsteht. Die hier gewählte Darstellung dieses Verfahrens folgt [Rao09].

Es sei  $x \in \mathbb{R}^n$  die Menge der Parameter, die durch die Diskretisierung des unendlich-dimensionalen Optimalsteuerungsproblems eingeführt wurde. Die Idee des SQP-Verfahrens besteht in der Anwendung des Newton-Verfahrens auf die Karush-Kuhn-Tucker Optimalitätsbedingungen. Dabei wird das nichtlineare Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen im aktuellen Iterationsschritt  $x_k$  durch ein quadratisches Teilproblem approximiert und die Lösung dieses Teilproblems dazu genutzt, den neuen Wert der Parameter  $x_{k+1}$  zu berechnen. Es besteht das Ziel, den optimalen Parametern  $x^*$  in jedem Iterationsschritt näher zu kommen.

Im Folgenden wird in 4.1.1 zunächst die Herleitung der Gleichungen aus dem NLP beschrieben. Daraus ergibt sich ein quadratisches Programmierproblem, dessen Lösung in 4.1.2 beschrieben wird.

### 4.1.1 Herleitung

Im Folgenden betrachten wir ein NLP mit Gleichheitsnebenbedingungen in der Form

$$\begin{aligned} \text{Minimiere}_x \quad & J(x), \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \quad & g(x) = 0, \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_g}. \end{aligned} \quad (4-1)$$

Auf die Erweiterung des Optimierungsproblems um zusätzliche Ungleichheitsnebenbedingungen wird später eingegangen.

Die Lagrange-Funktion des Optimierungsproblems (4-1) ist gegeben durch

$$L(x, \lambda) := J(x) + \lambda^T g(x), \quad L : \mathbb{R}^{n \times n_g} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{n_g},$$

wobei  $\lambda_k$  den Lagrange-Multiplikator für die  $k$ -te Gleichheitsnebenbedingung darstellt. Die Nullstellen der Karush-Kuhn-Tucker Gleichungen sind notwendige Bedingungen für eine lokal optimale Lösung (siehe auch Satz 4.4 und Definition 4.5), und für das Optimierungsproblem (4-1) können sie durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda) &= \nabla J(x) + \lambda^T \nabla g(x) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, \lambda) &= g(x) = 0 \end{aligned} \quad (4-2)$$

beschrieben werden. Somit ist (4-2) ein System von  $n+n_g$  Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten ( $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}^{n_g}$ ). Dieses wird im Folgenden mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst. Zur Vereinfachung kann (4-2) umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\eta) &= 0, \quad \text{mit} \quad \mathcal{H} : \mathbb{R}^{n \times n_g} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n_g}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, \lambda) \\ g(x) \end{pmatrix}, \\ \eta &= \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_g}, \end{aligned} \quad (4-3)$$

und anschließend kann eine Lösung von (4-3) iterativ durch das Newton-Verfahren gefunden werden:

$$\eta_{j+1} = \eta_j + \Delta\eta_j, \quad \text{mit} \quad \nabla\mathcal{H}(\eta_j)^T \Delta\eta_j = -\mathcal{H}(\eta_j), \quad (4-4)$$

wobei  $\eta_j$  die Lösung zu Beginn der  $j$ -ten Iteration und  $\Delta\eta_j$  die notwendige Änderung von  $\eta_j$  ist, um die verbesserte Lösung  $\eta_{j+1}$  zu erhalten. Im Folgenden wird nun  $\Delta\eta_i$  geeignet bestimmt.

Durch Einsetzen von (4-3) in (4-4) erhält man

$$\begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(x_j, \lambda_j) & \nabla g(x_j) \\ \nabla g(x_j)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_j \\ \Delta \lambda_j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x L(x_j, \lambda_j) \\ g(x_j) \end{pmatrix}, \quad (4-5a)$$

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j, \quad (4-5b)$$

$$\Delta \lambda_j = \lambda_{j+1} - \lambda_j, \quad (4-5c)$$

wobei  $\nabla_x^2 L$  die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion ist. Die erste Zeile von (4-5a) kann durch Einsetzen von (4-5c) und (4-2) vereinfacht werden zu

$$\nabla_x^2 L(x_j, \lambda_j) \Delta x_j + \nabla g(x_j) \lambda_{j+1} = -\nabla J(x_j),$$

was zu einer Neuformulierung von (4-5a) führt:

$$\begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(x_j, \lambda_j) & \nabla g(x_j) \\ \nabla g(x_j)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_j \\ \lambda_{j+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla J(x_j) \\ g(x_j) \end{pmatrix}. \quad (4-6)$$

Durch die Lösung von (4-6) können nun prinzipiell die notwendige Änderung des Parametervektors  $\Delta x_j$  und die neuen Werte der Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{j+1}$  bestimmt werden. Dieser iterative Prozess kann so lange fortgeführt werden, bis die Konvergenz erreicht ist.

Anstatt das nichtlineare Gleichungssystems (4-6) iterativ zu lösen, wird dieses beim Vorgehen des SQP-Verfahrens in eine quadratisches Programmierproblem (QP) umgewandelt. Dadurch kann die gewünschte Änderung  $\Delta x_j$  in Richtung der optimalen Lösung durch die Konstruktion und Lösung eines solchen lokalen Gleichungssystems berechnet werden. Das QP hat die numerischen Vorteile, dass es fast vollständig linear ist und eine eindeutige Lösung besitzt [Rao09]. Somit wird das Problem (4-3) in jeder Iteration durch ein quadratisches Programmierproblem approximiert. Deshalb nennt man die Methode auch sequentielles *quadratisches* Programmieren. Im Folgenden wird die Herleitung des QP ausführlicher beschrieben.

Gegeben sei nun also das folgende quadratische Programmierproblem:

Finde  $\Delta x$ , so dass die quadratische Zielfunktion

$$\mathcal{Q} = \nabla J^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla_x^2 L \Delta x \quad \text{mit den Nebenbedingungen} \quad (4-7)$$

$$g_k + \nabla g_k^T \Delta x = 0, \quad k = 1, \dots, n_g, \quad \text{minimiert wird.}$$

Die entsprechende Lagrange-Funktion zu diesem Problem lautet

$$\tilde{L}(\Delta x, \lambda) = \nabla J^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla_x^2 L \Delta x + \sum_{k=1}^{n_g} \lambda_k (g_k + \nabla g_k^T \Delta x).$$

Hierzu können auch wieder die notwendigen Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \nabla J + \nabla_x^2 L \Delta x + \nabla g \lambda &= 0, \\ g_k + \nabla g_k^T \Delta x &= 0, \quad k = 1, \dots, n_g. \end{aligned} \tag{4-8}$$

Hier fällt auf, dass (4-8) dasselbe beschreibt wie (4-6). Dies zeigt, dass das Originalproblems (4-1) auch iterativ durch die Lösung des quadratischen Problems (4-7) gelöst werden kann.

Wenn das Originalproblem (4-1) nun auch noch Ungleichheitsnebenbedingungen enthält, ändert sich das quadratische Problem (4-7) wie folgt

Finde  $\Delta x$ , so dass

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \nabla J^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla_x^2 L \Delta x \quad \text{mit den Nebenbedingungen} \\ c_j + \nabla c_j^T \Delta x &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n_c, \quad c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_c} \\ \text{und } g_k + \nabla g_k^T \Delta x &= 0, \quad k = 1, \dots, n_g \quad \text{minimiert wird.} \end{aligned} \tag{4-9}$$

Die Lagrange-Funktion lautet dann

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\Delta x, \lambda) &= \nabla J^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla_x^2 L \Delta x + \sum_{j=1}^{n_c} \lambda_j (c_j + \nabla c_j^T \Delta x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_g} \lambda_{n_c+k} (g_k + \nabla g_k^T \Delta x). \end{aligned} \tag{4-10}$$

### 4.1.2 Lösung

Wie bei der Anwendung des Newton-Verfahrens für die Minimierung ohne Nebenbedingungen, wird der Lösungsvektor  $\Delta x$  des Problems (4-9) nun als Suchrichtung  $S$  verwendet, und das quadratische Programmierproblem kann wie folgt mit  $S = \Delta x$  angepasst werden:

$$\begin{aligned} \text{Finde } S, \text{ so dass } \mathcal{Q}(S) &= \nabla J^T S + \frac{1}{2} S^T \nabla_x^2 L S \\ \text{mit den Nebenbedingungen } c_j + \nabla c_j^T S &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n_c \\ \text{und } g_k + \nabla g_k^T S &= 0, \quad k = 1, \dots, n_g, \quad \text{minimiert wird.} \end{aligned} \tag{4-11}$$

Insgesamt werden durch das SQP-Verfahren die Zielfunktion quadratisch und die Nebenbedingungen linear approximiert, was zu einem quadratischen Programmierproblem (4-11) führt. Dieses kann mit Standardmethoden leicht und nur mit

Hilfe von Matrixmultiplikationen gelöst werden. Außerdem ist ein solches quadratisches Programm immer eindeutig lösbar, und jedes lokale Optimum ist ein globales Optimum. Wenn dann die Suchrichtung  $S$  gefunden wurde, kann der neue Parametervektor durch

$$x_{j+1} = x_j + \alpha^* S$$

berechnet werden. Hierbei ist  $\alpha^*$  die optimale Schrittweite entlang der Suchrichtung  $S$ , welche durch die Minimierung einer Zielfunktion, mit Straftermen bezüglich der Erfüllung der Nebenbedingungen, bestimmt werden kann. Die eindimensionale Schrittweite  $\alpha^*$  wird im Allgemeinen mittels eines Gradientenverfahrens berechnet.

Man kann also feststellen, dass der SQP-Algorithmus einen klaren Vorteil gegenüber der direkten Anwendung des Newton-Verfahrens auf die notwendigen Optimalitätsbedingungen besitzt, denn SQP bietet die Möglichkeit, die Schrittweite  $\alpha^*$  geeignet anzupassen, wenn der aktuelle Parametervektor  $(x_k, \lambda_k)$  noch nicht ausreichend nahe an der optimalen Lösung  $(x^*, \lambda^*)$  liegt und reduziert die Lösung des Problems auf ein einfacheres QP.

Im Allgemeinen kann durch ein solches nichtlineares Verfahren nur eine lokal optimale Lösung des NLP gefunden werden und damit keine globale Optimalität sichergestellt werden.

## 4.2 Mehrzieloptimierung und Pareto-Optimalität

Oftmals ist es bei technischen Systemen ein Ziel, ein gewünschtes Manöver z. B. zwischen zwei Arbeitspunkten schnell und mit niedrigem Energieverbrauch durchzuführen. Für jedes reale System sind diese Ansprüche aber widersprüchlich und können nicht beliebig gut erfüllt werden. Bei der Auslegung von Trajektorien für technische Systeme müssen also häufig mehrere Kriterien optimiert werden, wobei im besten Fall ein optimaler Kompromiss gefunden wird. Dieser kann dadurch identifiziert werden, dass bei mehreren konträren Zielen ein einzelnes Kriterium nur dann verbessert werden kann, wenn ein anderes Kriterium verschlechtert wird. Ein solches Problem wird als Mehrzieloptimierungsproblem (MOP) und der optimale Kompromiss als paretooptimale Lösung bezeichnet.

Die hier dargestellten Grundlagen sollen im Weiteren dazu verwendet werden, um mit Hilfe der optimalen Steuerungsmethoden Trajektorien für das Mehrfachpendel zu berechnen, die sowohl zeit- als auch energieoptimal sind.

Im Folgenden wird ein Minimierungsproblem mit mehreren Zielfunktionen betrachtet. Die Lösung dieses Problems führt auf eine Menge von optimalen Kompromissen bezüglich aller gegebenen Zielfunktionen, welche auch als Paretomenge bezeichnet wird. Aus dieser Menge kann dann ein Entscheidungsträger, der

Kenntnis über die physikalische Bedeutung einzelner Zielfunktionen besitzt, auswählen. Das Konzept der Pareto-Optimalität wird in Abschnitt 4.2.1 beschrieben. Ein Ansatz für die Lösung eines MOP ist es, eine Transformation in ein skalares Optimierungsproblem durchzuführen. Dann können die Methoden der skalaren Optimierung verwendet werden, um optimale Lösungen zu berechnen. Durch eine Variation der unterschiedlichen Parameter des Transformationsverfahrens ist es möglich, diverse unterschiedliche Lösungen für das Optimierungsergebnis zu erhalten. In Abschnitt 4.2.2 werden einige einfache Methoden zur Lösung eines MOP vorgestellt, die anschließend für die Berechnungen verwendet werden.

Einen Überblick über MOP und deren Lösung ist z. B. in [Hil01] oder [Mie99] zu finden. Die Lösung von MOP mit Hilfe von mengenorientierten Methoden ist in [Sch04] beschrieben, siehe dazu auch Abschnitt 5.1.2. Diese Quellen werden auch für die Darstellung der Methoden zur Mehrzieloptimierung in diesem Abschnitt verwendet.

### 4.2.1 Pareto-Optimalität

Ein Mehrzieloptimierungsproblem mit  $n_k$  Zielfunktionen  $f_1, \dots, f_{n_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kann wie folgt formuliert werden:

$$\min_{x \in R} \{F(x)\}, \text{ mit } R := \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0, c(x) \leq 0\}.$$

Hierbei ist  $F$  der Vektor der einzelnen Zielfunktionen:

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_k}, \quad F(x) = (f_1(x), \dots, f_{n_k}(x)),$$

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_g}$ ,  $n_g \leq n$  mögliche Gleichheitsnebenbedingungen und  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $n_c$  mögliche Ungleichheitsnebenbedingungen.

Um die Minimierung dieses Problems durchführen zu können, muss es die Möglichkeit geben, verschiedene Werte der nun vektorwertig gegebenen Zielfunktion vergleichen zu können. Dazu wird eine Ordnungsrelation im  $\mathbb{R}^{n_k}$  definiert.

#### Definition 4.1 (Ordnungsrelation)

Gegeben seien die Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^{n_k}$ . Dann ist  $v$  kleiner als  $w$  ( $v <_p w$ ), falls  $v_i < w_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n_k\}$ . Die Relation  $\leq_p$  ergibt sich analog.

Die folgende Definition beschreibt eine Beziehung zwischen Zielfunktionswerten, die mit Hilfe der Ordnungsrelation ausgedrückt werden kann.

**Definition 4.2** Der Vektor  $v \in \mathbb{R}^{n_k}$  wird durch den Vektor  $w \in \mathbb{R}^{n_k}$  dominiert, falls  $w \leq_p v$  und  $w \neq v$  gilt, d. h. es existiert ein  $j \in \{1, \dots, n_k\}$ , so dass  $w_j < v_j$ .

Mit Hilfe dieser partiellen Ordnung ist es nicht möglich, nur ein einzelnes Ergebnis der Minimierung zu bestimmen, sondern es ergibt sich eine ganze Menge optimaler

Kompromisse. Ein Punkt in dieser Menge zeichnet sich dadurch aus, dass die Verbesserung einer der Zielfunktionen immer die Verschlechterung von anderen Zielfunktionen nach sich zieht.

**Definition 4.3 (Paretopunkt)**

- (i) Gegeben sei ein Mehrzieloptimierungsproblem. Der Punkt  $x^*$  heißt (*global*) *paretooptimal* oder auch (*globaler*) *Paretopunkt*, falls kein  $y \in R$  existiert, so dass

$$F(y) \neq F(x^*) \text{ und } F(y) \leq_p F(x^*). \quad (4-12)$$

Das heißt der Punkt  $x^*$  ist nicht dominiert von einem anderen Punkt  $y \in R$ .

- (ii)  $x^*$  ist *lokaler Paretopunkt*, falls es eine Umgebung  $U(x^*) \subset R$  von  $x^*$  gibt, so dass kein  $y \in U(x^*)$  existiert, so dass (4-12) erfüllt ist.

Die Menge aller Paretopunkte wird *Paretomenge* genannt. Nach [Ehr05] heißt das Bild der Paretomenge unter  $F$  *Paretofront*.

Eine notwendige Bedingung für einen Paretopunkt ist durch den folgenden Satz gegeben:

**Satz 4.4** Es sei  $x^*$  ein Paretopunkt eines MOP. Es sei weiterhin die Menge der Vektoren  $\{\nabla g_i(x) | i = 1, \dots, n_g\}$  linear unabhängig. Dann existieren Vektoren  $\gamma \in \mathbb{R}^{n_k}$  mit  $\gamma_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n_k$  und  $\sum_{j=1}^{n_k} \gamma_j = 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^{n_g}$  und  $\beta \in \mathbb{R}^{n_c}$  mit  $\beta_l \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n_c$ , so dass

$$\sum_{i=1}^{n_k} \gamma_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \nabla g_j(x^*) + \sum_{l=1}^{n_c} \beta_l \nabla c_l(x^*) = 0, \quad (4-13)$$

$$\beta_l c_l(x^*) = 0, \quad l = 1, \dots, n_c, \quad (4-14)$$

$$g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \quad (4-15)$$

$$c_l(x^*) \leq 0, \quad l = 1, \dots, n_c. \quad (4-16)$$

Im unbeschränkten Fall ( $n_g = 0$  und  $n_c = 0$ , keine Nebenbedingungen vorhanden) beschreibt dieser Satz, dass es eine Linearkombination der Gradienten der Zielfunktionen im Paretopunkt gibt, welche Null ergibt. Da (4-13) eine notwendige Bedingung für Optimalität darstellt, ist jeder Punkt, der (4-13) erfüllt, ein Kandidat für einen paretooptimalen Punkt.

**Definition 4.5 (Karush-Kuhn-Tucker-Bedingung)**

Der Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  heißt Karush-Kuhn-Tucker (KKT) Punkt, wenn  $\gamma \in \mathbb{R}^{n_k}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^{n_g}$  und  $\beta \in \mathbb{R}^{n_c}$  existieren, so dass (4-13) - (4-16) erfüllt sind.

In [Kar39] und [KT51] sind weitere Informationen zur Herleitung dieser Bedingung zu finden.

### 4.2.2 Lösung des MOP

Ein Standardansatz für die Lösung eines MOP ist die Umformung in ein skalares Optimierungsproblem. In diesem Fall können die Standardmethoden für die Optimierung einer skalaren Zielfunktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  angewendet werden. Die Transformation des MOP wird häufig durch eine Parametrierung der Zielfunktionen mittels eines Parametrierungsvektors  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$  durchgeführt (siehe hierzu auch Bild 4-1). Durch jede einzelne Optimierung des transformierten Systems lässt sich dann - im idealen Fall - ein paretooptimaler Punkt berechnen.

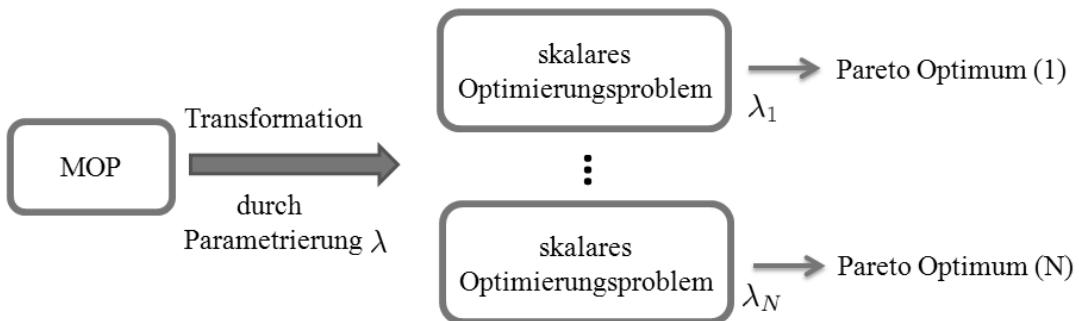


Bild 4-1: Grundidee der Transformation eines MOP in ein skalares Optimierungsproblem: Zunächst wird eine durch  $\mu$  parametrisierbare skalare Zielfunktion erstellt, und durch Variation von  $\mu$  ist es möglich, verschiedene paretooptimale Punkte zu berechnen.

### Gewichtete Summe

Diese Methode wurde zuerst in [Zad63] beschrieben und ist ein sehr häufig verwendeter Ansatz zur Lösung eines MOP. Es wird jeder einzelnen der  $n_k$  Zielfunktionen ein Gewichtungsfaktor  $\alpha_i \geq 0$  zugeordnet, wobei  $\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i = 1$  gelten muss (Normalisierung der Gewichtungsfaktoren). Somit wird dann anstatt des MOP das folgende skalare Problem gelöst

$$\min_{x \in R} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i f_i(x).$$

Der Transformationsvektor ist hier also der Gewichtungsvektor  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k})^T$  und jeder Faktor entspricht der Bedeutung der jeweiligen Zielfunktion in der Optimierung. Durch eine Variation von  $\alpha$  erhält man eine Teilmenge aller paretooptimalen Punkte. Im Fall eines konvexen MOP kann gezeigt werden, dass alle

paretooptimalen Punkte berechnet werden können, siehe [Mie99]. Außerdem gilt, dass globale Minima von  $\alpha^T F(x)$  notwendig auch globale paretooptimale Punkte des MOP sind. Entsprechendes gilt für lokale Minima.

In Bild 4-2 ist die Methode der gewichteten Summe beispielhaft mit zwei Zielfunktionen grafisch dargestellt. Die Zielfunktion  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$  soll minimiert werden:  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = c_{\min}$ . Dies ist eine allgemeine Geradengleichung, und somit ist diejenige Gerade gesucht, die das Minimierungsproblem im zulässigen Bereich löst.  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$  ist der Normalenvektor dieser Geraden.

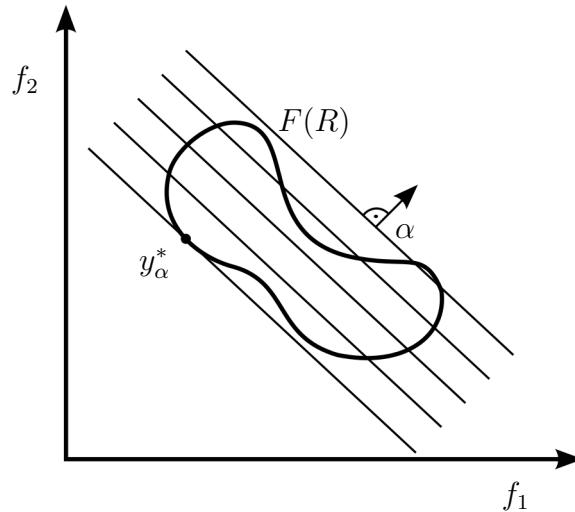


Bild 4-2: Grafische Darstellung der Methode der gewichteten Summe: Jede Gerade entspricht einer Geradengleichung  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = c$ . Die Minimierung ergibt dann ein  $y_\alpha^*$  als Minimum im zulässigen Bildbereich  $F(R)$ .

Da die Zielfunktion durch dieses Verfahren bezüglich des Parameters  $\alpha$  diskretisiert ist, kann bei der Lösung des MOP nur eine endliche Anzahl an Paretopunkten berechnet werden. Daher ist es wichtig, dass diese gleichmäßig im Raum der Zielfunktionen verteilt sind, um eine gute Approximation aller Paretopunkte zu erhalten. Die Methode der gewichteten Summe erfüllt diese Anforderung nicht. Eine äquidistante Diskretisierung von  $\alpha$  erreicht bei den Lösungen im Allgemeinen nur eine unregelmäßige Diskretisierung der Paretopunkte, da der Abstand zwischen verschiedenen berechneten Punkten im Bildraum nicht direkt gesteuert werden kann.

Es besteht ein besonderer Zusammenhang zwischen der Methode der gewichteten Summe und der KKT-Bedingung (siehe Definition 4.5). Es sei

$$g_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i f_i(x)$$

eine skalare Funktion, wie sie auch als Zielfunktion für die Methode der gewichteten Summe gewählt werden kann. Dann gilt auch

$$\nabla g_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i \nabla f_i(x). \quad (4-17)$$

Somit sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent

- (i)  $x^*$  ist Paretopunkt des MOP. Notwendig hierfür ist die Erfüllung der KKT-Bedingung, d. h. es existiert ein  $\alpha$  mit  $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$ , so dass

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i \nabla f_i(x^*) = 0$$

gilt.

- (ii)  $x^*$  ist KKT-Punkt des skalaren Problems mit Zielfunktion  $\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i f_i$ . Wie in (4-17) dargestellt, ist für ein Minimum die KKT-Bedingung automatisch erfüllt, denn es gilt

$$\nabla g_\alpha(x^*) = 0 = \sum_{i=0}^k \alpha_i \nabla f_i(x^*).$$

Man beachte hierbei, dass in (ii) keine Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung der skalaren Zielfunktion  $g_\alpha$  überprüft wird. Eine solche Bedingung ist notwendig dafür, dass  $x^*$  ein lokales Minimum von  $g_\alpha$  ist, aber nicht notwendig, damit  $x^*$  ein Pareto-Punkt des vektorwertigen Mehrzieloptimierungsproblems ist.

### **$\varepsilon$ -constraint Methode**

Die  $\varepsilon$ -constraint Methode beruht auf den Ideen von [Mar67] und [Hai73]. Hierbei wird eine einzelne Zielfunktion  $f_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n_k\}$  ausgewählt, die minimiert werden soll. Für alle anderen Zielfunktionen des MOP wird eine obere Schranke fest gewählt, die nicht überschritten werden darf. Das skalare Ersatzproblem hat dann die folgende Form

$$\min_{x \in (R \cap C_\varepsilon)} f_j(x) \text{ für ein } j \in \{1, \dots, n_k\},$$

wobei  $C_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n | f_i(x) \leq \varepsilon_i \forall i \in \{1, \dots, n_k\} \text{ mit } i \neq j\}$  gilt.

Hier wird die Transformation des MOP in ein skalares Problem durch die Wahl der zu minimierenden Zielfunktion  $f_j$  und der Grenzen  $\varepsilon_i$  für die anderen Zielfunktionen bestimmt. Eine Schwierigkeit dieser Methode ist es, die Schranken  $\varepsilon_i$  geeignet zu wählen, um sowohl zulässige als auch sinnvolle Grenzen für das untersuchte Problem zu erhalten. Wenn  $\varepsilon_i$  z. B. zu groß gewählt wird, erhält man keine neuen Lösungen, da es nicht zu einer weiteren Einschränkung des Optimierungsproblems kommt.

### Methode mit Gleichheitsnebenbedingungen

Die Methode mit Gleichheitsnebenbedingungen ist eine Erweiterung der  $\varepsilon$ -constraint Methode und wurde zuerst in [Lin76] beschrieben. Auch hier wird eine feste Zielfunktion für die Optimierung ausgewählt. Die weiteren Zielfunktionen werden für die Umwandlung in ein skalares Problem als Gleichheitsnebenbedingungen formuliert. Es ergibt sich dadurch die folgende Beschreibung

$$\min_{x \in (R \cap D)} f_j(x) \text{ für ein } j \in \{1, \dots, n_k\},$$

mit  $D := \{x \in \mathbb{R}^n | f_i(x) - \varepsilon_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, n_k\} \text{ mit } i \neq j\}$ . Eine grafische Interpretation des Verfahrens ist in Bild 4-3 zu sehen.

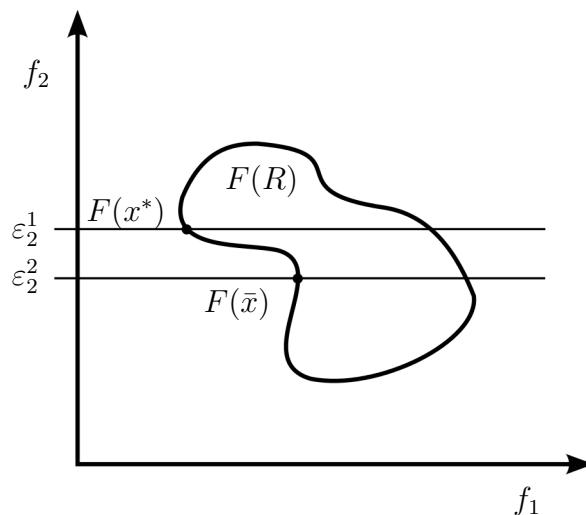


Bild 4-3: Schematische Darstellung der Methode mit Gleichheitsnebenbedingungen: Im Fall von  $\varepsilon_2^1$  erhält man einen Paretopunkt. Bei  $\varepsilon_2^2$  dagegen erhält man einen durch andere Punkte dominierten Punkt. Durch die gewählten Einschränkungen ist es dem Minimierungsverfahren in diesem Fall nicht möglich einen globalen Paretopunkt zu berechnen.

Durch eine Variation der festen Zielfunktion  $f_j$  und der Beschränkungen  $\varepsilon_i$  können prinzipiell alle paretooptimalen Punkte berechnet werden. Dabei ist die Pareto-Optimalität aber nicht für jede Parameterkonfiguration gegeben, denn es sind viele Möglichkeiten denkbar, bei denen es keine zulässige Lösung gibt.

### 4.3 Optimale Trajektorien am Doppelpendel

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse für die Berechnung von Trajektorien des Doppelpendels vorgestellt. Die unter dynamischen Aspekten anspruchsvollste Aufgabe ist es, das Pendel aus der unteren Ruhelage in die obere instabile

Ruhelage zu überführen. Daher wird im Folgenden dieses Manöver untersucht. Prinzipiell können aber auch beliebige andere Manöver berechnet werden, z.B. Manöver bei denen andere Ruhelagen als Start- bzw. Endpunkt gewählt werden.

Bei der Berechnung dieser Lösungen gibt es, wie schon erwähnt, verschiedene Ziele. Zum einen ist es erstrebenswert, möglichst zeitoptimale Trajektorien zu erhalten, zum anderen spielt auch der Energieverbrauch eine große Rolle. Für ein reales technisches System sind dies gegenläufige Anforderungen, denn wenn ein Manöver sehr schnell durchgeführt werden soll, wird im Allgemeinen der Energieaufwand hoch sein. Daher kann die beste Lösung nur ein optimaler Kompromiss – ein paretooptimaler Punkt (siehe Definition 4.3) – sein. Von den Ergebnissen dieser Arbeit ist zu erwarten, dass sie auf andere automatisierbare Prozesse, z.B. in der Robotik, übertragbar sind, um dort Anwendungen realisieren zu können, die im gewünschten Maße sowohl ressourcenschonend als auch zeiteffizient sind. Einen Prozess, der diese Anforderungen erfüllt, kann man als optimalen Prozess bezeichnen. Dabei ist es möglich, auch andere Ziele bei der Auslegung zu berücksichtigen. Ein weiteres Ziel, das bei der Optimierung berücksichtigt werden kann, ist z.B. die Regelgüte.

Zur Berechnung der Manöver für das Doppelpendel werden die zuvor beschriebenen Grundlagen verwendet. Beim Aufstellen des Modells (siehe Abschnitt 2.3) ergeben sich die stark nichtlinearen Bewegungsgleichungen des Doppelpendels. Diese werden gebraucht, um mittels DMOC (siehe Abschnitt 3.3) ein diskretes, endlich dimensionales Optimalsteuerungsproblem aufzustellen (siehe Abschnitt 3.3.4). Mit dem gerade angeführten Wunsch der zeit- und energieoptimalen Lösungen muss ein Mehrzieloptimierungsproblem gelöst werden. Dazu werden die Methoden aus Abschnitt 4.2 angewendet. Das Gesamtproblem kann dann mit Hilfe von SQP-Verfahren (siehe Abschnitt 4.1) numerisch gelöst werden.

Die Ergebnisse dieses Vorgehens werden in den folgenden Abschnitten beschrieben. Es wird zunächst genauer auf die Implementierung und deren Besonderheiten eingegangen. Anschließend werden einige der vielfältigen Lösungen dargestellt. Auf die Pareto-Optimalität und die Variabilität der Manöver wird anschließend besonderer Wert gelegt.

### **4.3.1 Umsetzung der Optimierung**

Bei der Umsetzung der Optimalsteuerung, also der Implementierung des Optimierungsverfahrens, existieren viele variable Parameter, die die Lösung des Problems stark beeinflussen können. Zum Beispiel bestimmt die Anzahl an Knotenpunkten für die Diskretisierung einer Trajektorie, wie genau die diskrete numerische Lösung die exakte kontinuierliche Lösung approximiert. Je mehr Knotenpunkte gewählt werden, desto besser ist diese Approximation. Mit steigender Knotenzahl

vergrößert sich aber auch der Rechenaufwand, so dass immer ein Kompromiss zwischen der Approximationsgüte der Lösung und dem Aufwand der Berechnungen eingegangen werden muss.

Die hier verwendeten Algorithmen lösen skalare Optimierungsprobleme. Wenn mehrere Ziele zu berücksichtigen sind, können die in Abschnitt 4.2 beschriebenen Methoden der Skalarisierung verwendet werden. Dabei ergeben sich bei unterschiedlichen Methoden (z. B. gewichtete Summe oder skalare Optimierung mit Gleichheitsnebenbedingungen) durchaus sehr unterschiedliche Bewegungsmuster der Manöver.

Um realistische Lösungen für das technische System zu erhalten, müssen technische Beschränkungen (z. B. des Motors) beachtet werden. Diese können bei der Optimierung für alle diskreten Zustände und auch den Steuereingang vorgegeben werden. Eine Lösung des Optimierungsproblems ist dann immer eine zulässige Lösung für das reale System, da die Beschränkungen schon in der Berechnung berücksichtigt werden.

Als weiterer, sehr wichtiger Aspekt ist die Wahl des *initial guess* (Anfangsschätzung) für die Optimierung zu nennen. Das Optimierungsverfahren benötigt für alle Variablen (also die diskreten Zustände und Eingänge) einen Anfangswert, bei dem der Algorithmus startet. Das Ergebnis der Optimierung hängt sehr stark von der Wahl des *initial guess* ab. Vor allem die Lokalität der Lösung wird davon beeinflusst. Nichtlineare Optimierungsverfahren, wie z. B. SQP-Verfahren, können nicht sicherstellen, dass die Lösung der Optimierung ein globales Optimum darstellt. Wenn also der *initial guess* in der Nähe eines lokalen Optimums liegt, ist es wahrscheinlich, dass der Optimierungsalgorithmus dorthin konvergiert und nicht in das globale Optimum.

Insgesamt hängt die Lösung der Optimierung sehr sensitiv von diversen Einstellungen ab. Dabei besteht auch immer die Frage, ob das Problem überhaupt eine zulässige Lösung besitzt und der Optimierer konvergiert. Bei einer zu restriktiven Wahl der Zustandsbeschränkungen könnte z. B. auch keine zulässige Lösung existieren. Das heißt, dass das gewünschte Manöver physikalisch nicht umsetzbar ist. Es bedarf somit Systemwissen und der Erfahrung des Programmierers, um vernünftige Einstellungen für die Optimierung vorzugeben. Andererseits erhält man durch die Anwendung einer Optimierung auch zusätzliches Systemwissen, z. B. in welchen Bereichen zulässige bzw. optimale Lösungen liegen.

Für die Berechnung der Lösungen in den folgenden Abschnitten wurden meistens zwischen 200 und 300 Knotenpunkte gewählt, so dass man in etwa eine Schrittweite von  $0.01\text{ s}$  erreicht. Als technische Beschränkungen sind die Leistungsdaten des Linearmotors zu beachten (siehe Abschnitt 2.2). Als *initial guess* wird – wenn nicht anders erwähnt – eine zwischen Start- und Endpunkt linear inter-

polierte Trajektorie gewählt. Dies zeigte zufriedenstellende Ergebnisse bezüglich Konvergenz und Form der Lösungen.

In dieser Arbeit wird hauptsächlich die Software der *Numerical Algorithms Group* (NAG) verwendet, welche unter anderem Optimierungsalgorithmen zur Minimierung und Maximierung einer Funktion als C-Code bereitstellen. Dieser lässt eine deutlich schnellere Berechnung zu als z.B. die *fmincon*-Funktion in Matlab. Prinzipiell sind aber beide Ansätze gleichwertig.

Die NAG-Software hat den weiteren Vorteil, dass sie die Dünnbesetztheit des Programmierproblems ausnutzt. In der hier betrachteten Anwendung ist die Jacobi-Matrix der Nebenbedingungen dünn besetzt. Dies ist durch die Struktur der diskreten Bewegungsgleichungen bedingt, denn die  $k$ -te diskrete Bewegungsgleichung ist durch die Approximation mittels des Differenzenquotienten nur von drei diskreten Zuständen  $q_{k-1}$ ,  $q_k$  und  $q_{k+1}$  abhängig. Es ergibt sich bei der Ableitung nach allen Zustandsvariablen eine Tridiagonalstruktur der Jacobi-Matrix, wodurch diese deutlich schneller berechnet werden kann als eine voll besetzte Matrix. Dieses Vorgehen kann mit der speziellen Bibliothek *e04ugc* verwirklicht werden. Die Dokumentation der Software kann unter [Nat13] eingesehen werden.

### 4.3.2 Lösungstrajektorien für den Aufschwung des Doppelpendels

Durch den Einsatz von Mehrzieloptimierungsverfahren und dadurch, dass der Optimierungsalgorithmus nur lokal optimale Lösungen berechnet, ergeben sich mehrere verschiedene Lösungstrajektorien für den Aufschwung des Doppelpendels. Außerdem sind die Ergebnisse abhängig von vielen möglichen Parametern bei der Implementierung des Optimalsteuerungsproblems und der Einstellung des Optimierungsverfahrens (siehe Abschnitt 4.3.1). Im Folgenden sollen einzelne Lösungen dargestellt werden. Es wurde jeweils die Methode der gewichteten Summe verwendet, und bei den vier vorgestellten Lösungen nimmt die Gewichtung der Zeit zu und die des Steueraufwands  $\left(h \cdot \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2\right)$  ab. Dadurch werden die Lösungen schneller, und der Steueraufwand nimmt zu.

#### Lösung 1

Die Bewegung 1 ist die komplexeste der vier ausgewählten Trajektorien, d.h. die Pendelarme werden für den Aufschwung des Pendels stark bewegt, siehe Bild 4-4. In diesem Fall ist die Gewichtung des Steueraufwands relativ hoch, sodass sich eine Trajektorie ergibt, die wenig Steueraufwand benötigt.

Bei der Bewegung schwingt das Pendel zuerst nach links, und in der Gegenbewegung nach rechts wird der untere Arm eingeklappt. Im Weiteren bewegen sich die beiden Pendelarme gegeneinander, sodass die Arme in Richtung der oberen

Ruhelage gelangen. Der zweite Pendelarm macht dann noch eine zusätzliche komplette Drehung, bis sich beide Pendelarme in der oberen Ruhelage befinden. Dies ist notwendig, um den vorgegebenen Endzustand zu erreichen und führt trotzdem zu einem sehr günstigen Manöver.

Die Bewegung 1 ist mit  $3.49\text{ s}$  mit Abstand am langsamsten. Dafür ist der Steueraufwand mit  $571\text{ N}^2\text{s}$  im Vergleich am geringsten. Hier ist sehr gut der Zusammenhang zwischen dem Steueraufwand und der Zeit für den Aufschwung zu erkennen.

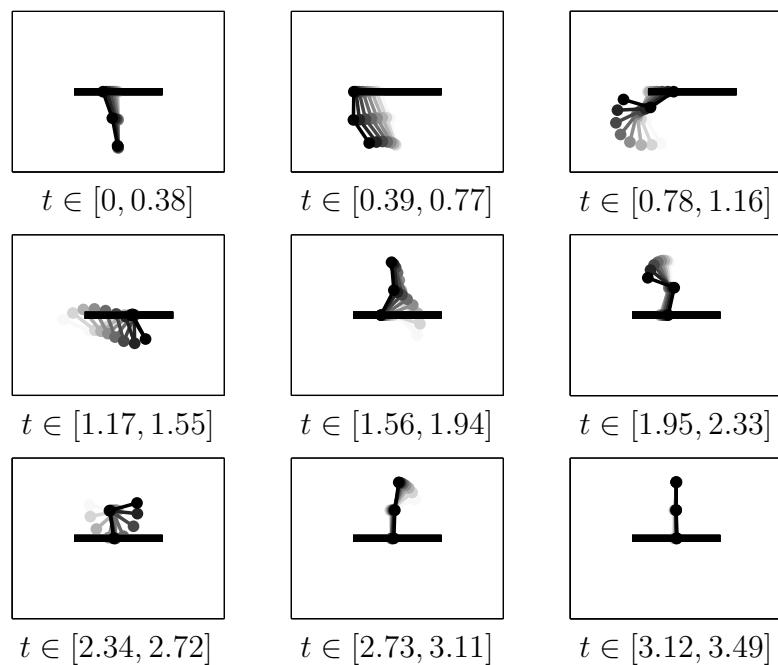


Bild 4-4: Lösung 1: Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen mit Endzeit  $t_f = 3.49\text{ s}$  und Steueraufwand  $E = 571\text{ N}^2\text{s}$

## Lösung 2

Bei Bewegung 2 (siehe Bild 4-5) schwingen beide Pendelarme zuerst zügig nach links und verfahren dann mit dem erzeugten Schwung nach rechts, sodass sich beide Pendelarme weiter nach oben bewegen. Dabei ist der äußere Pendelarm „eingeklappt“, d. h. fast parallel zum inneren Pendelarm. Durch eine weitere Gegenbewegung nach links wird der Pendelarm dann in die obere Ruhelage geführt und dort stabilisiert. Diese Bewegung benötigt im Gegensatz zur ersten Bewegung einen größeren Steueraufwand von  $721\text{ N}^2\text{s}$ , ist dafür aber auch mit  $2.32\text{ s}$  mehr als eine Sekunde schneller.

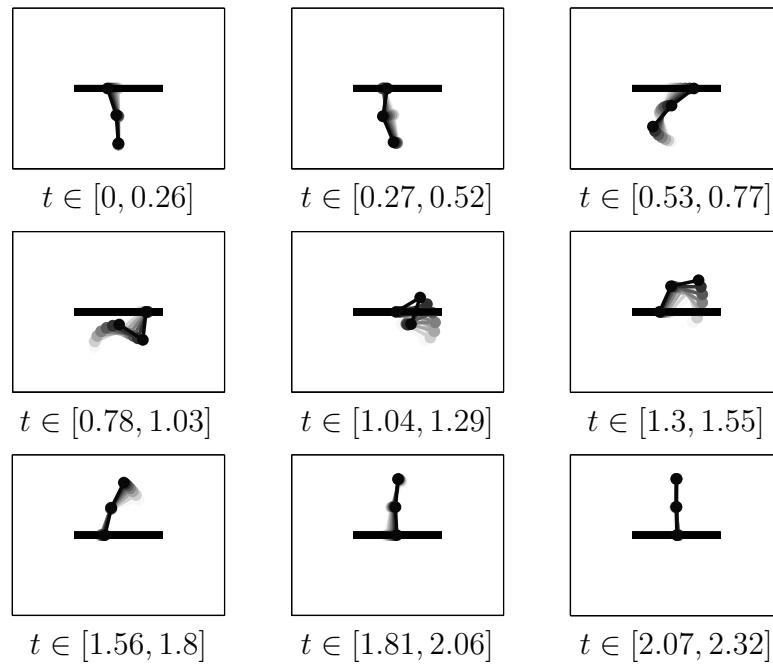


Bild 4-5: Lösung 2: Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen mit Endzeit  $t_f = 2.32\text{ s}$  und Steueraufwand  $E = 721\text{ N}^2\text{s}$

### Lösung 3

Bei der Bewegung 3 (siehe Bild 4-6) fährt das Pendel zunächst relativ langsam nach rechts und bringt dann beide Pendelarme gleichzeitig durch eine starke Beschleunigung nach links in Richtung der oberen Ruhelage. Oben muss es noch durch kleinere Steuereingriffe stabilisiert und in den Endzustand in der oberen Ruhelage verfahren werden. Diese schnelle Bewegung führt zu einer kurzen Manöverzeit von  $2.05\text{ s}$  und einem relativ hohen Steueraufwand von  $1593\text{ N}^2\text{s}$ .

### Lösung 4

Die Bewegung 4 (siehe Bild 4-7) ist ähnlich zur Bewegung 3. Hier wurde die Gewichtung der Zeit des Manövers am größten gewählt, sodass sich eine sehr kurze Manöverzeit ergibt. Das gesamte Pendel wird auch hier durch eine schnelle Bewegung nach links nach oben gezogen und dann dort stabilisiert. In diesem Fall wird nur eine schwache Ausholbewegung nach rechts ausgeführt und der Aufschwung dann in der Bewegung nach links durchgeführt. Es wirkt eine hohe Beschleunigung, und dadurch entsteht ein hoher Steueraufwand. Die Bewegung 4 ist im Vergleich mit  $1.38\text{ s}$  am schnellsten. Entsprechend benötigt sie mit  $5402\text{ N}^2\text{s}$  aber den größten Steueraufwand.

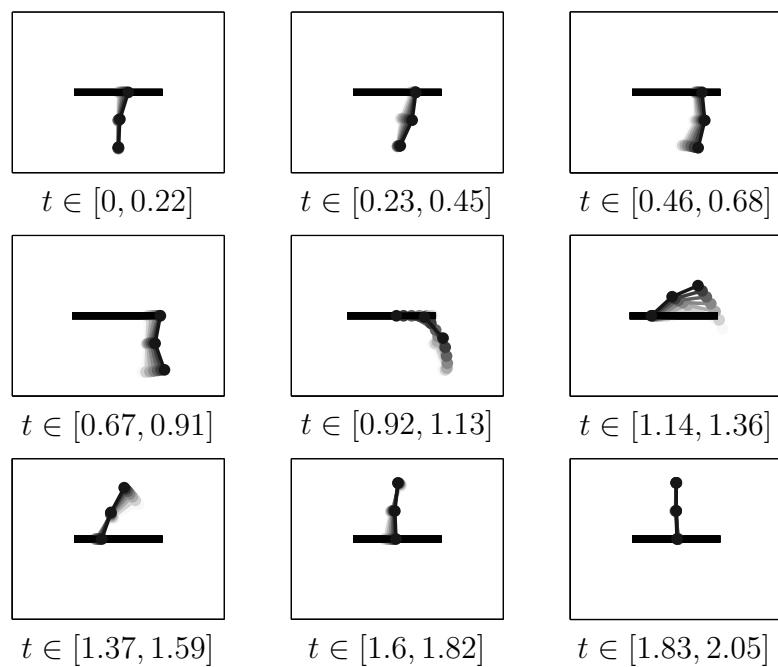


Bild 4-6: Lösung 3: Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen mit Endzeit  $t_f = 2.05\text{ s}$  und Steueraufwand  $E = 1593\text{ N}^2\text{s}$

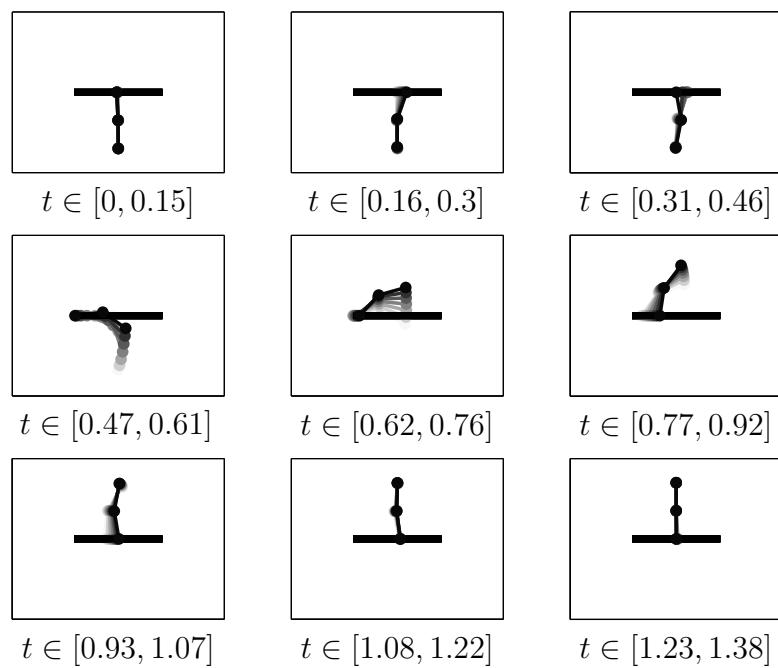


Bild 4-7: Lösung 4: Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen mit Endzeit  $t_f = 1.38\text{ s}$  und Steueraufwand  $E = 5402\text{ N}^2\text{s}$

In Bild 4-8 sind die Zielfunktionswerte der eben beschriebenen Trajektorien aufgetragen. Hierbei wird deutlich, dass diese Punkte eine Menge von nicht dominierten Punkten bilden und somit optimale Kompromisse zwischen einem energieeffizienten und zeitoptimalen Manöver darstellen. Für die Ergebnisse dieser Optimierung gibt es keine Methode, die sicherstellt, dass es sich wirklich um paretooptimale Lösungen handelt. Da aber im Folgenden sehr viele Lösungen durch unterschiedliche Ansätze berechnet werden, wird davon ausgegangen, dass die sich dadurch ergebenden nicht dominierten Punkte als paretooptimal für das System angesehen werden können. Die Zielfunktionswerte können prinzipiell durch eine Kurve verbunden werden. Es ist zu erwarten, dass weitere paretooptimale Lösungen dann auf dieser Kurve liegen, was in Abschnitt 4.3.4 genauer evaluiert wird.

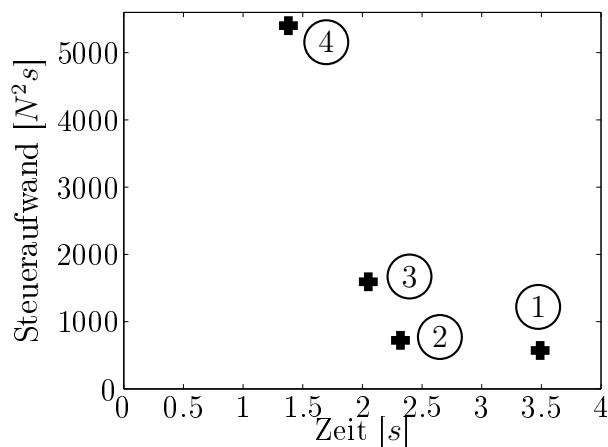


Bild 4-8: Paretofront mit den Zielfunktionswerten der vier ausgewählten Trajektorien

### 4.3.3 Ergebnisse am Prüfstand des Doppelpendels

Bevor die berechneten optimalen Steuerstrategien am Prüfstand erprobt werden können, müssen zunächst modellbasierte Tests gemacht werden. Es wird eine zeitvariante Regelung entlang der Solltrajektorie berechnet, um Abweichungen vom Sollwert kompensieren zu können (siehe Abschnitt 2.4.2). Das gesamte Regelungskonzept mit der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur wird dann an dem Simulationsmodell (siehe Abschnitt 2.4.1) untersucht. Dadurch ist es möglich, schon vor den ersten praktischen Tests einen möglichst guten Regler auszulegen. Hierzu können die Gewichtungsmatrizen im LQR-Entwurf variiert werden, siehe (2-20). Da im Simulationsmodell alle wesentlichen dynamischen Effekte berücksichtigt werden, ist es möglich, von den modellbasierten Tests auf eine Durchführung am Prüfstand zu schließen.

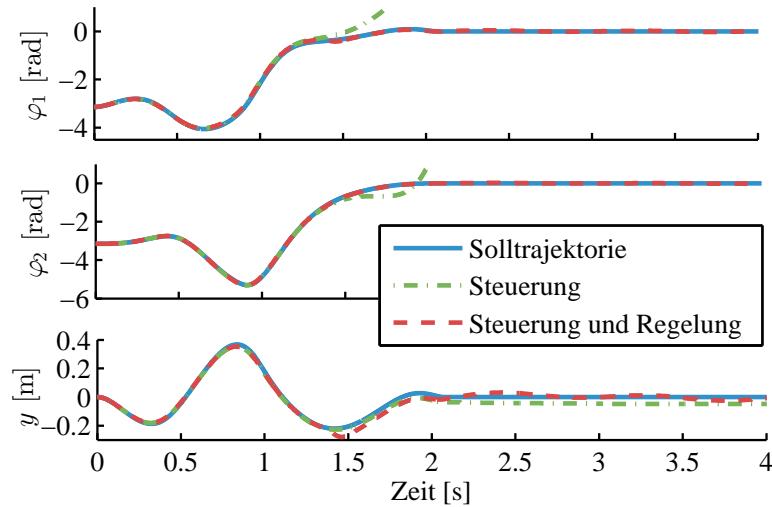


Bild 4-9: Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen am Prüfstand (dargestellt werden  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $y$ ): Solltrajektorie (blaue durchgezogene Linie), Messwerte für das gesteuerte System (grüne Strichpunktlinie) und Messwerte für das gesteuerte System inklusive Regelung (rote gestrichelte Linie)

Die Bewegung 2 aus dem vorhergehenden Abschnitt konnte so als diejenige Trajektorie identifiziert werden, bei der im Modell das Pendel durch den Reglereinsatz am besten der Solltrajektorie folgt. Dies liegt unter anderem daran, dass schon das Folgeverhalten ohne Regelung bei dieser Trajektorie als sehr gut bewertet werden kann. Daher wurde diese Trajektorie für Tests am Prüfstand ausgewählt. In Bild 4-9 sind die entsprechenden Ergebnisse dargestellt. Die durchgezogene blaue Linie entspricht der nominalen Trajektorie und damit dem Sollverlauf der Zustandsgrößen. Bei der gepunkteten grünen Linie wird nur die nominale Steuerung auf das Pendel aufgebracht, ohne die Regelung zu verwenden. Es wird deutlich, dass das Pendel auch allein durch diese Vorsteuerung der Solltrajektorie gut folgt. Die Pendelarme können aber nicht in der oberen Ruhelage stabilisiert werden. Dies ist dann durch den zusätzlichen Einsatz der Regelung entlang der Trajektorie und in der Ruhelage gewährleistet und wird durch die gestrichelte rote Linie dargestellt. Mit Hilfe der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung ist es möglich, dass das Pendel der berechneten Solltrajektorie sehr gut folgt. Nur beim Verlauf der Wagenbewegung  $y$  ist eine geringe Abweichung zu erkennen, die durch die Reaktion des Wagens auf Störungen zu erklären ist. Der Wagen muss hier durch eine zusätzliche Ausweichbewegung das Pendel so ansteuern, dass eine Stabilisierung in der oberen Ruhelage möglich ist.

Die Ergebnisse aus den Abschnitten 4.3.2 und 4.3.3 wurden auch in [TKOBT11] veröffentlicht.

#### 4.3.4 Pareto-Optimalität von Lösungen für den Aufschwung

Bei der Berechnung von Trajektorien für den Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen durch den beschriebenen Ansatz mit optimaler Steuerung gibt es viele Möglichkeiten, die Lösung zu beeinflussen. Es können z. B. unterschiedliche Ansätze für die Mehrzieloptimierung benutzt oder die technischen Einschränkungen variiert werden. In diesem Abschnitt werden nun einige Vergleiche aufgestellt, indem eine große Menge an einzelnen Optimierungen durchgeführt wird und dann die Zielfunktionswerte der Manöverzeit und des Steueraufwands für das Manöver ausgewertet werden. Die Ergebnisse werden dann bezüglich paretooptimaler Punkte bzw. Paretofronten analysiert. Diese Strukturen können in diversen Anwendungsbeispielen verwendet werden, um weiterführende Fragestellungen zu beantworten. Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs (SFB) 614 - *Selbstoptimierende Systeme des Maschinenbaus* an der Universität Paderborn werden Paretofronten z. B. dazu verwendet, optimale Reglerparameter für verschiedene Streckenabschnitte eines autonom fahrenden Schienenfahrzeugs anzupassen [VT08]. Eine andere Anwendung ist ein hierarchischer Mehrzieloptimierungsansatz, bei dem das optimale Verhalten von unterlagerten Systemen mit Hilfe von Paretofronten dargestellt wird [MAK<sup>+</sup>08]. Dies bietet Vorteile für die anschließende Optimierung des Gesamtsystems. Zusammenfassend lässt sich für viele Anwendungsbeispiele ein optimales Verhalten mit Hilfe von Paretofronten abstrahieren und damit ist eine einfachere Auswahl bestimmter Systemkonfigurationen möglich.

Eine wichtige Eigenschaft, die in den oben genannten Arbeiten gefordert wird, ist, dass die Paretofronten keine Unstetigkeiten besitzen dürfen. Dies dient einer möglichst gleichmäßigen Anpassung des Systemverhaltens bezüglich der ausgewählten Zielfunktionen. Daher soll auch hier untersucht werden, in wie weit es möglich ist, für den Aufschwung des Doppelpendels eine Paretofront zu bestimmen, die keine Lücken oder Sprünge hat.

Im Folgenden werden sowohl die Mehrzieloptimierung mit gewichteter Summe als auch mit Gleichheitsnebenbedingungen verwendet (siehe hierzu Abschnitt 4.2). Bei der zweiten Methode wird die Manöverzeit festgehalten und nur der Steueraufwand für das Manöver optimiert. Außerdem wird untersucht, welchen Einfluss die Wegbegrenzung des Motors auf die Lösungen besitzt, denn es besteht die Frage, ob der reale Verfahrweg am Prüfstand von maximal  $\pm 0.55\text{ m}$  ein einschränkender Faktor für die Lösungen zum Aufschwung ist. Hierzu werden Optimierungen mit einer Wegbegrenzung von  $\pm 0.55\text{ m}$  und  $\pm 1.5\text{ m}$  durchgeführt. Bei allen Optimie-

rungen wird die Zeit auf das Intervall  $I = [0.8, 4] \text{ s}$  beschränkt. Die berechneten Trajektorien besitzen 200 Knotenpunkte, so dass sich eine Schrittweite von  $0.004 \text{ s} \leq h \leq 0.02 \text{ s}$  ergibt.

## Ergebnisse der Optimierung

Zunächst wurde die Mehrzieloptimierung mit der Methode der gewichteten Summe für verschiedene Wegbegrenzungen des Motors durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Bild 4-10 zu sehen. Es fällt auf, dass es mehrere Zweige von lokal optimalen Lösungen gibt, die jeweils einem unterschiedlichen Manöver für den Aufschwung entsprechen. Außerdem befinden sich viele Lösungen bei einer maximalen Zeit von 4 s, besitzen aber einen hohen Steueraufwand, der deutlich macht, dass diese Lösungen keinesfalls paretooptimale Punkte darstellen. Sie werden daher nicht weiter betrachtet. Weiterhin ist zu erkennen, dass sich viele Lösungen in mehreren kleinen Gebieten häufen. Dies kann dadurch erklärt werden, dass es wahrscheinlich ein Manöver mit ungefähr diesem Zielfunktionswert gibt, das sich dynamisch gut realisieren lässt, also z. B. einer möglichst einfachen Bewegung für die entsprechende Manöverzeit entspricht. Daher konvergiert die Optimierung häufiger in diesen Bereichen und man erhält sich ähnelnde Lösungen. An den Ergebnissen sieht man auch, dass die Lösungen mit der Wegbegrenzung von  $\pm 1.5 \text{ m}$  prinzipiell etwas günstiger sind. Dies ist zu erwarten, da durch den größeren Weg dynamische Effekte besser genutzt werden können, so dass der Aufschwung mit weniger Steueraufwand durchgeführt werden kann.

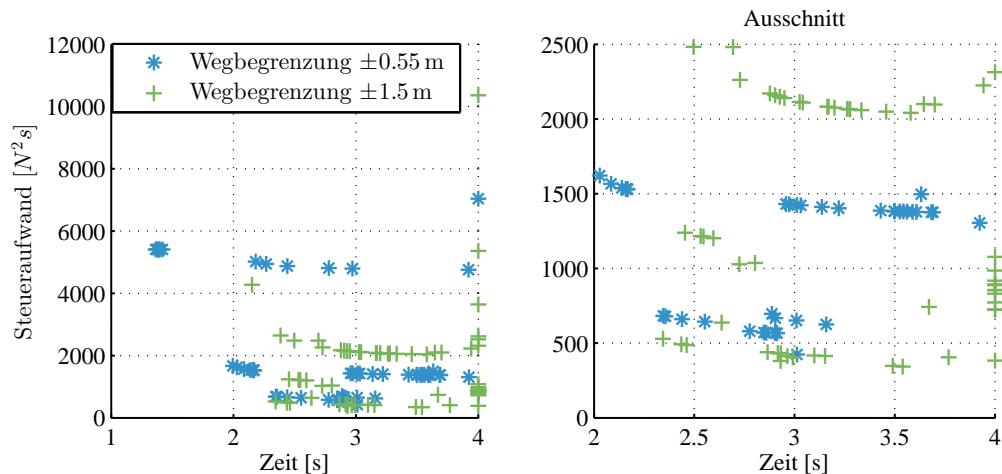


Bild 4-10: Mehrzieloptimierung mit gewichteter Summe und unterschiedlicher Wegbegrenzung für den Motor (Wegbegrenzung  $\pm 0.55 \text{ m}$  blaue Sterne, Wegbegrenzung  $\pm 1.5 \text{ m}$  grüne Kreuze); rechts: Ausschnitt

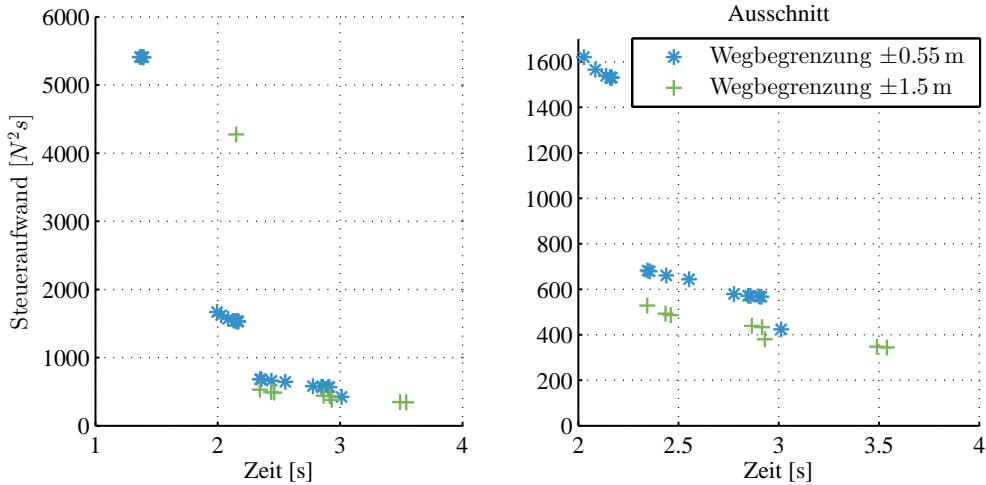
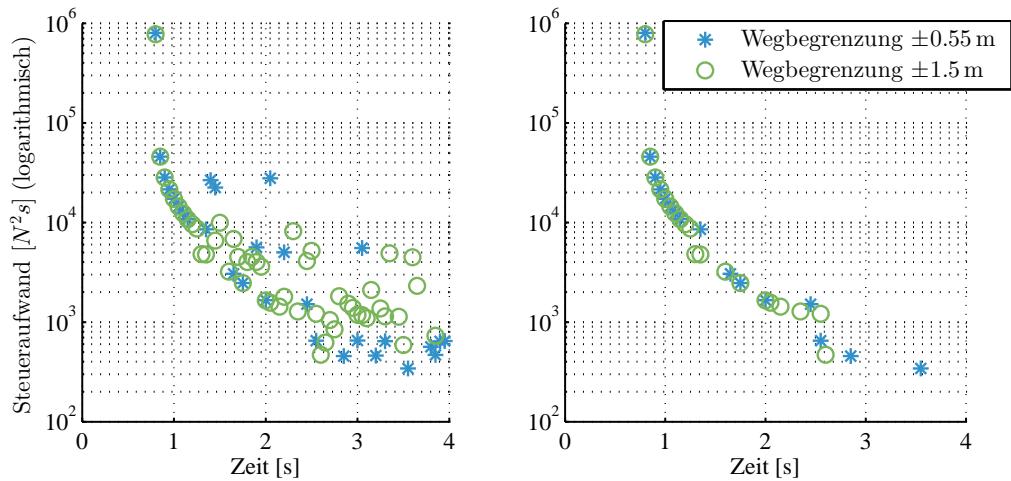


Bild 4-11: Mehrzieloptimierung mit gewichteter Summe und unterschiedlicher Wegbegrenzung für den Motor (Wegbegrenzung  $\pm 0.55\text{ m}$  blaue Sterne, Wegbegrenzung  $\pm 1.5\text{ m}$  grüne Kreuze); Darstellung der nicht dominier-ten Punkte; rechts: Ausschnitt

Aus dieser großen Menge von Punkten werden im zweiten Schritt diejenigen bestimmt, die einem optimalen Kompromiss zwischen den beiden Zielfunktionen entsprechen – also die paretooptimalen Punkte. Dazu wird unter den Zielfunktionswerten der einzelnen Lösungen ein Nichtdominanztest durchgeführt. Punkte, die nicht von anderen Punkten dominiert werden, sind Kandidaten für paretooptimale Punkte (siehe auch die Definitionen 4.2 und 4.3). Für jede einzelne Menge von Punkten (Wegbegrenzung von  $\pm 0.55\text{ m}$  und  $\pm 1.5\text{ m}$ ) werden die nicht dominierten Punkte berechnet und sind in Bild 4-11 dargestellt. Es wird deutlich, dass sehr viele Punkte durch andere dominiert werden und im Vergleich zu Bild 4-10 entfernt wurden. Somit sind alle entfernten Punkte nur lokale optimale Lösungen. An einigen Stellen häufen sich die Punkte, und dazwischen gibt es große Lücken, so dass sich eine stetige Menge an Zielfunktionswerten ergibt. Dies liegt daran, dass durch die Mehrzieloptimierung mit gewichteter Summe keine gleichmäßige Verteilung der Zielfunktionswerte im Bildraum garantiert werden kann (siehe auch Abschnitt 4.2).

Als zweite Methode wird die Mehrzieloptimierung mit Gleichheitsnebenbedingungen verwendet. Hier wird für jede Optimierung die Manöverzeit festgelegt und nur noch der Steueraufwand des Manövers ( $J = h \cdot \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2$ ) optimiert. In Bild 4-12 sind die Ergebnisse dieser Optimierung dargestellt, und zwar auf der linken Seite wieder alle Ergebnisse für verschiedene Wegbegrenzungen und rechts die daraus resultierenden nicht dominierten Punkte. Durch diese Methode lassen sich offensichtlich Ergebnisse mit einer deutlich besseren Verteilung im Bildraum erzeugen.



*Bild 4-12: Links: Mehrzieloptimierung mit Gleichheitsnebenbedingungen und unterschiedlicher Wegbegrenzung für den Motor (Wegbegrenzung  $\pm 0.55 \text{ m}$  blaue Sterne, Wegbegrenzung  $\pm 1.5 \text{ m}$  grüne Kreise); rechts: Darstellung der nicht-dominierten Punkte*

Bei den schnellen Lösungen um 1 s erhält man eine annähernd stetige Verteilung der nicht dominierten Punkte, was einer Paretofront mit den gewünschten Eigenschaften nahe kommt. Außerdem ist hier zu sehen, dass die Lösungen mit verschiedenen Wegbegrenzungen fast identisch sind. Es lässt sich schlussfolgern, dass für die optimale Lösung mit starker Zeitgewichtung ein Verfahrweg kleiner als  $\pm 0.55 \text{ m}$  ausreicht, bzw. dass mit einem größeren Verfahrweg keine deutlich besseren Lösungen erzielt werden können. Bei den langsameren Lösungen gibt es eine deutlich größere Streuung der Ergebnisse. Dies liegt daran, dass es hier viele unterschiedliche dynamische Manöver für den Aufschwung gibt. Im Gegensatz dazu ist bei den schnellen Lösungen nur ein einziges Manöver überhaupt in der Lage, alle Randbedingungen des optimalen Steuerungsproblems zu erfüllen. Bei den Lösungen zwischen 3 s und 4 s sind die günstigsten Lösungen bei einer Optimierung mit Wegbegrenzung von  $\pm 0.55 \text{ m}$  entstanden, obwohl dies nicht unbedingt zu erwarten war. Anscheinend ergibt sich aber gerade durch die stärkere Wegbegrenzung eine günstigere lokale Lösung. Die Menge der nicht dominierten Punkte besitzt in diesem Fall weniger und kleinere Lücken und kommt daher dem Ziel einer stetigen Paretofront für den Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen näher.

In Bild 4-13 werden die beiden Verfahren zur Mehrzieloptimierung für Berechnungen mit einer Wegbegrenzung von  $\pm 0.55 \text{ m}$  verglichen. Die Optimierung mit gewichteter Summe besitzt deutlich mehr lokal optimale Lösungen, aber insgesamt ergänzen sich beide Verfahren gut. Beim Einsatz von nur einer Methode

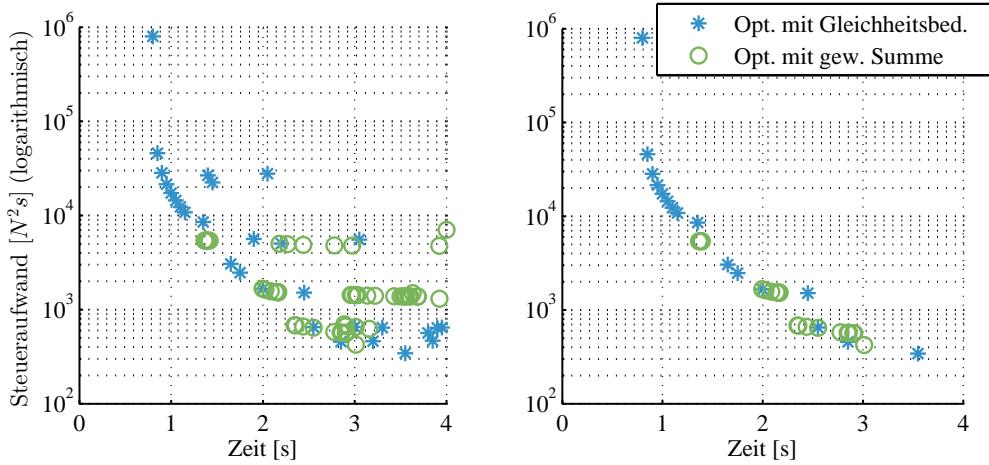
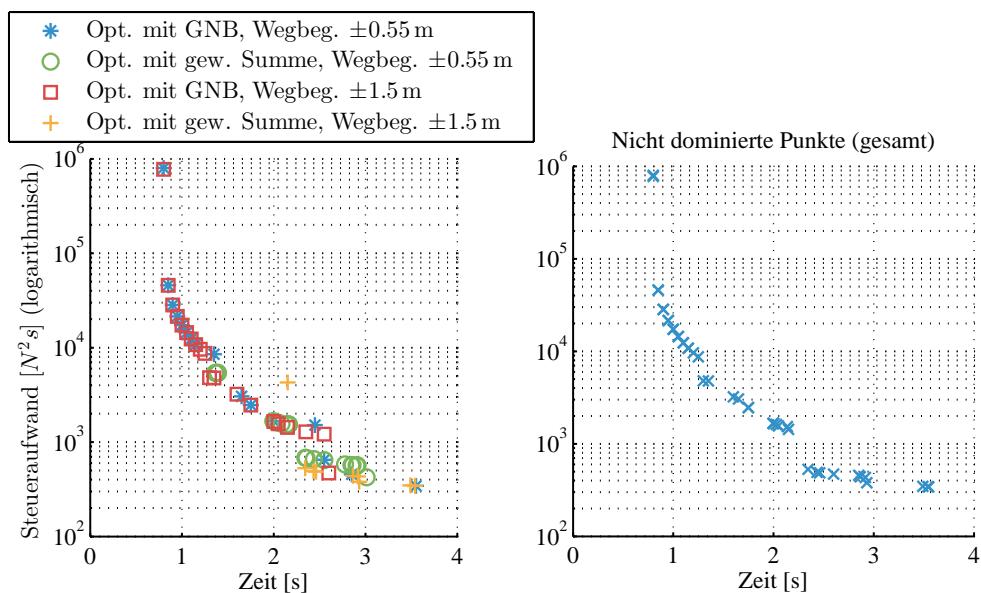


Bild 4-13: Vergleich Optimierung mit Gleichheitsnebenbedingungen (blaue Sterne) und Optimierung mit gewichteter Summe (grüne Kreise) für eine Wegbegrenzung von  $\pm 0.55$  m; rechts: Darstellung der nicht-dominierenden Punkte

wäre die Optimierung mit Gleichheitsnebenbedingungen zu bevorzugen, wenn man gleichmäßig verteilte Ergebnisse erreichen möchte. Hier ist bei den nicht dominierten Punkten schon die typische hyperbelartige Form einer Paretofront zu erkennen. Die Optimierung mit gewichteter Summe besitzt dafür mehr Freiheiten, da sie nicht auf eine Manöverzeit festgelegt ist. Für erste Abschätzungen über die möglichen Varianten der Lösungen ist diese Methode daher zu empfehlen. Dabei lässt sich auch z.B. evaluieren, in welchem Bereich der Zielfunktionswerte mit der Methode mit Gleichheitsnebenbedingungen zusätzlich bzw. genauer gesucht werden sollte.

Abschließend werden in Bild 4-14 auf der linken Seite alle nicht dominierten Punkte der verschiedenen Ansätze verglichen. Es wird deutlich, dass sich die Verfahren gut ergänzen und sich eine Paretofront mit nur noch kleineren Lücken ergibt. Es gibt keinen entscheidenden Unterschied für die Zielfunktionswerte bei der unterschiedlichen Wahl der Wegbegrenzung. Somit lässt sich schließen, dass für einen optimalen Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen kein größerer Verfahrweg vorteilhaft ist. Aus den hier gezeigten Punkten können nun auch die dominierten Punkte entfernt werden und auf der rechten Seite von Bild 4-14 ist das entsprechende Ergebnis dargestellt. Ein Ziel für weitere Untersuchungen ist es, die Lücken und Sprünge innerhalb dieser Ergebnisse zu glätten.



*Bild 4-14:* Links: Zusammenstellung aller nicht-dominierten Punkte: Optimierung mit Gleichheitsnebenbedingungen und Wegbegrenzung  $\pm 0.55$  m (blaue Sterne), Optimierung mit gewichteteter Summe und Wegbegrenzung  $\pm 0.55$  m (grüne Kreise), Optimierung mit Gleichheitsnebenbedingungen und Wegbegrenzung  $\pm 1.5$  m (rote Quadrate) und Optimierung mit gewichteteter Summe und Wegbegrenzung  $\pm 1.5$  m (gelbe Kreuze); rechts: nicht-dominante Punkte aller Punkte auf der linken Seite

### 4.3.5 Nachoptimierung

Es werden nun die paretooptimalen Punkte aus dem letzten Abschnitt ausgewählt, um eine Nachoptimierung durchzuführen. Das heißt, dass diese Lösungen jeweils als neuer *initial guess* für die Optimierung genutzt werden und dabei aber die Parameter der Mehrzieloptimierungsmethode mit Gleichheitsnebenbedingungen verändert werden. Dies wird z.B. durch eine Anpassung der Manöverzeit durchgeführt. Da in diesem Fall schon zu Beginn der Optimierung eine lokal optimale Lösung vorliegt, konvergiert die Optimierung schnell, und die Lösung wird durch eine geringe Veränderung der Parameter nur leicht verändert. Es ergibt sich ein Manöver mit einer ähnlichen Bewegung, aber etwas anderen Zielfunktionswerten.

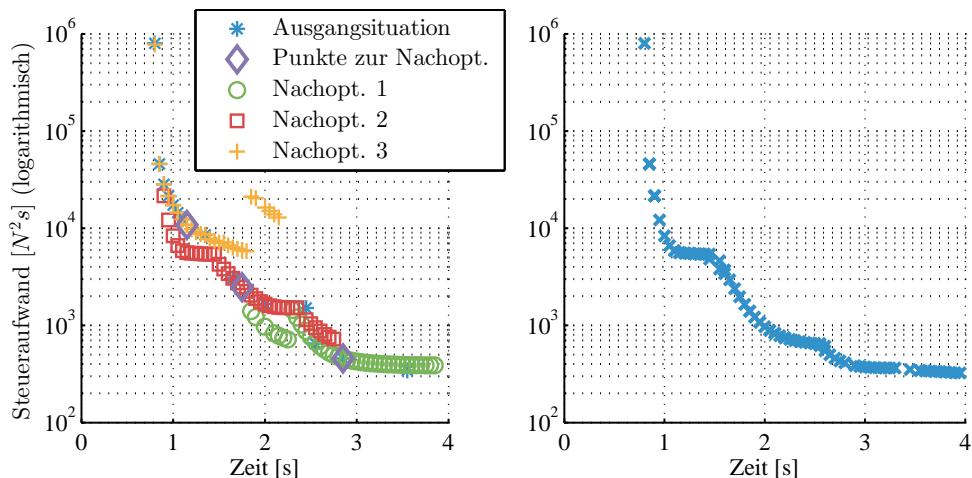
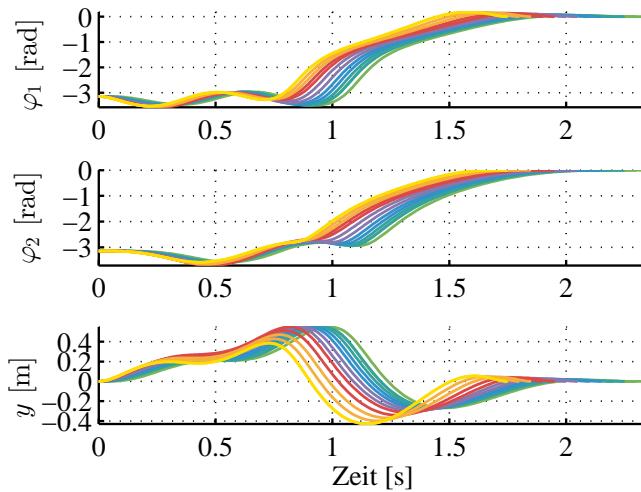


Bild 4-15: Links: Nachoptimierung ausgewählter Punkte mit Wegbegrenzung 0.55 m: Ausgangssituation der Paretofront (blaue Sterne), ausgewählte Lösungen für den Start der Nachoptimierung (lila Rauten); rechts: Darstellung der nicht-dominierten Punkte

In Bild 4-15 werden die Ergebnisse der Nachoptimierung für drei ausgewählte Fälle dargestellt. Mit den violetten Rauten sind diejenigen Lösungen markiert, die für eine Nachoptimierung ausgewählt worden sind. Diese werden in der Optimierung als neuer *initial guess* gesetzt, und die Manöverzeit wird durch die Wahl  $t_{f,Nachoptimierung} = t_{f,initial} \pm \varepsilon_t$  etwas variiert, wobei  $\varepsilon_t = 0.05 s$  ist. Die hieraus berechnete Lösung wird dann wieder für die nächste Nachoptimierung als *initial guess* gewählt, so dass diese aufeinander aufbauen. In Bild 4-15 wird deutlich, dass sich durch dieses Vorgehen verschiedene Zweige von Lösungen ergeben. Jeder dieser Zweige entspricht einer bestimmten Bewegungsform für den Aufschwung des Doppelpendels. Es gibt bei jedem der ausgewählten Fälle der Nachoptimierung Stellen, an denen die einzelnen Zweige umspringen, und sich dadurch eine



*Bild 4-16: Variation einer Trajektorie durch Nachoptimierung: dargestellt werden  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $y$ ; die gelbe Trajektorie ist die Schnellste und die grüne Trajektorie ist die Langsamste*

weitere neue Bewegung ergibt. In Bild 4-16 sind die Verläufe der Zustände von verschiedenen Lösungen des mittleren roten bzw. mit Quadraten gekennzeichneten Zweiges dargestellt. Hier wird deutlich, dass es sich immer um die gleiche Aufschwungbewegung handelt, diese aber unterschiedlich lange dauert. Entsprechend ändert sich auch der Steueraufwand; er wird also bei einem Manöver mit längerer Zeit geringer. Wenn nun eine Auswahl einer Lösung für das dynamische System gemacht werden muss, ist es durch diesen Ansatz möglich, die Bewegung fast beliebig bezüglich der Aufschwungzeit und dem Steueraufwand anzupassen.

Nachdem eine solche Nachoptimierung für alle ursprünglich ausgewählten pareto-optimalen Punkte für das gesamte Zeitintervall durchgeführt wurde und anschließend die dominierten Punkte entfernt sind, ergibt sich eine neue Paretofront, die in Bild 4-15 (rechts) dargestellt ist. Diese Paretofront besteht aus drei Zweigen, die durch die Nachoptimierung entstanden sind, und diese einzelnen Zweige entsprechen jeweils einer Bewegungsform, die in einem bestimmten Zeitintervall die optimale Lösung darstellt. Die einzelnen Zweige gehen ineinander über und bilden so eine stetige Paretofront im Bildraum der Zielfunktionen. Dabei ist hier mit der stetigen Paretofront eine sehr feine Approximation eines kontinuierlichen Objekts gemeint, denn sie besteht weiterhin aus vielen diskreten Punkten im Bildraum.

Zusammenfassend ist es gelungen mit Hilfe von verschiedenen Ansätzen der Mehrzieloptimierung und einer gezielten Nachoptimierung von verschiedenen Lösungen eine stetige Paretofront zu berechnen. Aus dieser Paretofront lässt sich auch zusätzliches Systemverständnis ziehen. Für den Aufschwung des Doppelpendels

ergeben sich drei Lösungen, die jeweils in einem Zeitintervall die optimale Bewegung darstellen. Sie gehen ineinander über, so dass sich eine Paretofront mit der gewünschten stetigen Form ergibt.

Dieses Vorgehen ist auch für andere Systeme mit ähnlichem dynamischen Verhalten anwendbar, so dass man Paretofronten erhält, die Informationen über das Systemverhalten enthalten oder für weitere Aufgaben verwendet werden können. Auch die Möglichkeit, eine optimale Trajektorie durch eine Nachoptimierung fast beliebig an die gewünschten Zielfunktionswerte anpassen zu können, bietet einen Vorteil gegenüber anderen Methoden zur Bestimmung von Steuerungen für dynamische Systeme.

### Anwendung der Nachoptimierung am Prüfstand

Die nachoptimierten Trajektorien können auch am Prüfstand umgesetzt werden. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind in Bild 4-17 dargestellt. Oben werden unterschiedliche Zielfunktionswerte der nachoptimierten Trajektorie dargestellt, die auch schon in Abschnitt 4.3.3 für die Umsetzung am Prüfstand ausgewählt wurde. Es sind dann drei der getesteten Trajektorien in rot (Kreuz), blau (Kreis) und grün (Quadrat) gekennzeichnet. Die Verläufe der Winkel und des Wagens sind zusätzlich in den entsprechenden Farben (bzw. durchgezogene, gepunkte, gestrichelte Linie) dargestellt. Dabei wird deutlich, dass die rote Trajektorie auch am Prüfstand das schnellste Manöver für den Aufschwung ist und die grün gestrichelte das Langsamste. Außerdem wird auch der Effekt der Variation der Trajektorien genauso wie in Bild 4-16 deutlich.

Diese Variation der Trajektorien auch am Prüfstand bietet eine hohe Adoptionsmöglichkeit der Manöver für den Anwender. Außerdem kann so getestet werden, ob es eine spezielle Kombination der Zielfunktionen gibt, die z.B. eine gute Regelbarkeit zeigt. Insgesamt konnte gezeigt werden, dass sich die Anpassung von Trajektorien für den Aufschwung des Doppelpendels durch Nachoptimierung sowohl für die Ergebnisse der Optimierung als auch für die Umsetzung am Prüfstand als vorteilhaft erwiesen hat.

## 4.4 Optimale Trajektorien am Dreifachpendel

Im Folgenden wird für das Dreifachpendel auf einem Wagen die Anwendung der DMOC Methode analog zum Doppelpendel auf einem Wagen durchgeführt. Es lassen sich ebenfalls optimale Steuerungsmanöver für dieses System bestimmen. Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass das Dreifachpendel eine komplexere Dynamik besitzt und schon allein durch die größere Anzahl der Zustandsgrößen die Optimierung aufwändiger wird. Auch für das Dreifachpendel ist der Fahrweg des

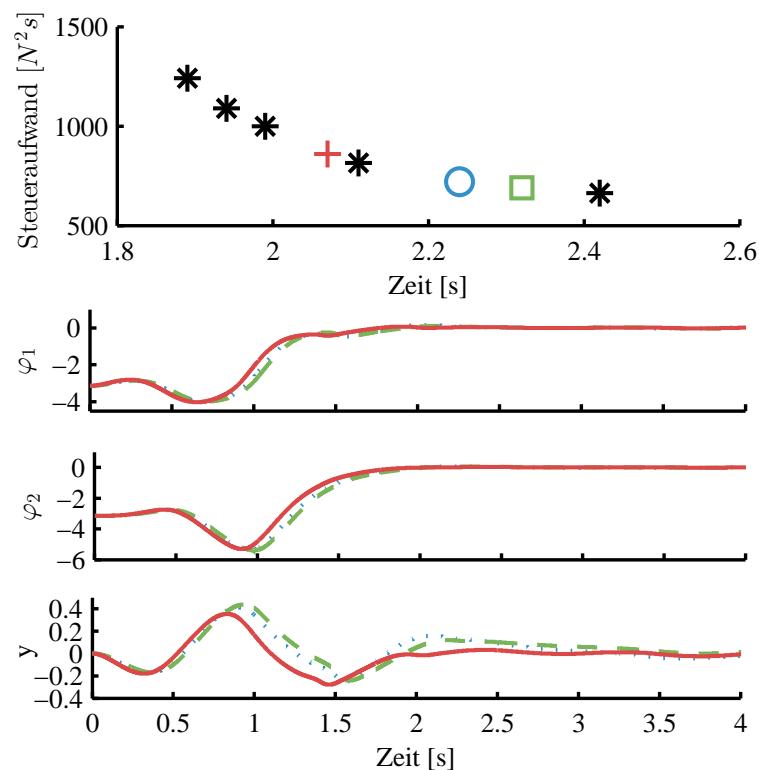


Bild 4-17: Umsetzung von nachoptimierten Trajektorien am Prüfstand: Die Farben der Verläufe von  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $y$  entsprechen der Kennzeichnung der Paretofront; Durchlauf 1: rotes Kreuz - rote durchgezogene Linie, Durchlauf 2: blauer Kreis - blaue gepunktete Linie, Durchlauf 3: grünes Quadrat - grüne gestrichelte Linie

Motors auf  $\pm 0.55\text{ m}$  beschränkt, um die realen Beschränkungen zu berücksichtigen. Durch die Ergebnisse der optimalen Steuerung wird gezeigt, dass der Verfahrweg auch für dieses System ausreichend ist. Alle hier vorgestellten Lösungen sind mit der Methode der gewichteten Summe berechnet worden. Im Folgenden werden nun einige dieser Lösungen für das Dreifachpendel vorgestellt.

#### 4.4.1 Lösungstrajektorien für den Aufschwung des Dreifachpendels

Auch für das Dreifachpendel ergeben sich durch die Mehrzieloptimierung mehrere Lösungen für den Aufschwung. Bei den Ergebnissen ist auffällig, dass bei vielen Lösungen die obere Ruhelage erst durch einen Übergang durch eine der anderen Ruhelagen erreicht wird. Dabei kommt das Pendel im Verlauf der Bewegung nicht zur Ruhe, sondern nimmt nur die entsprechenden Lagekoordinaten ein. Die hier angesprochenen Ruhelagen werden nicht exakt durchlaufen, sind aber in den folgenden Bildern gut zu erkennen. Das Durchlaufen der Ruhelagen ist dadurch zu erklären, dass für den Aufschwung nur ein kurzer Verfahrweg zur Verfügung steht und das dem Dreifachpendel nach und nach über die anderen Ruhelagen immer mehr Energie zugeführt wird. Durch den Übergang kann die potentielle Energie immer weiter erhöht werden. Für die bessere Beschreibung der Bewegungen sind in Bild 4-18 die Ruhelagen vorgestellt, die innerhalb der Lösungen für den Aufschwung auftauchen werden.

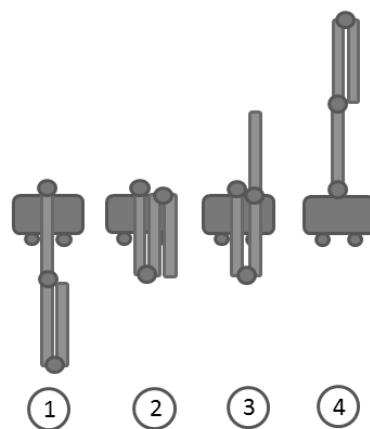


Bild 4-18: Verschiedene Ruhelagen des Dreifachpendels

#### Lösung 1

Die erste Lösung aus Bild 4-19 beschreibt mit  $2.52\text{ s}$  den schnellsten der ausgewählten Aufschwünge des Dreifachpendels auf einem Wagen, und daher ist auch

der Steueraufwand mit  $E = 2404 N^2 s$  am höchsten. Die Bewegung besteht aus zwei Teilen: Zunächst wird das Pendel in die Position der Ruhelage 2 aus Bild 4-18 gebracht, um sich dann weiter in die obere Ruhelage zu bewegen. Im ersten Teil der Bewegung wird das Pendel also „zusammengeklappt“ und streckt sich dann wieder in Richtung der oberen Ruhelage.

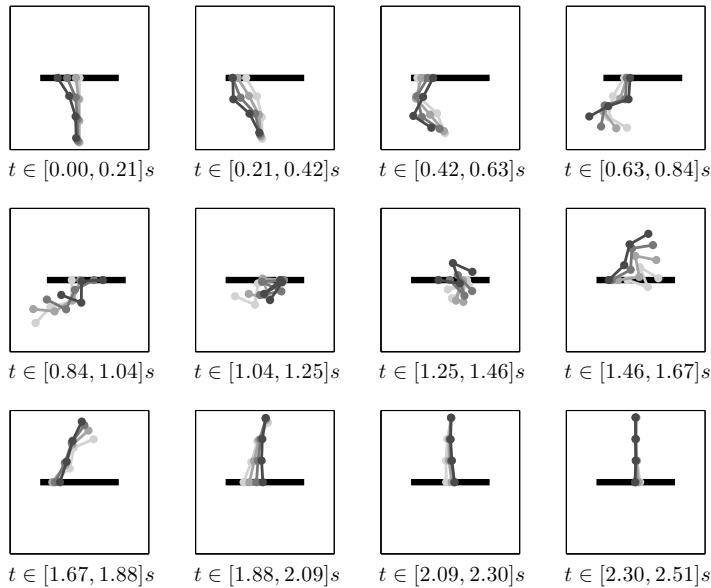


Bild 4-19: Lösung 1: Aufschwung des Dreifachpendels auf einem Wagen mit Endzeit  $t_f = 2.51 s$  und Steueraufwand  $E = 2404 N^2 s$

## Lösung 2

In der zweiten Lösung (siehe Bild 4-20) sind dann sogar die Positionen von zwei verschiedenen Ruhelagen während des Manövers zu erkennen. Zunächst die Bewegung zur Ruhelage drei und von dort zur Ruhelage vier. Im letzten Schritt muss nur noch der äußerste Pendelarm „ausgeklappt“ werden, und das Dreifachpendel befindet sich in der oberen Ruhelage. Diese Bewegung dauert 2.6 s bei einem Steueraufwand von  $E = 2123 N^2 s$ .

## Lösung 3

In Bewegung 3 (siehe Bild 4-21) wird im ersten Teil die Position der Ruhelage drei erzeugt und im zweiten Teil des Aufschwungs werden dann alle drei Pendelarme in die obere Ruhelage gebracht. Dieses Manöver dauert 2.79 s und hat einen

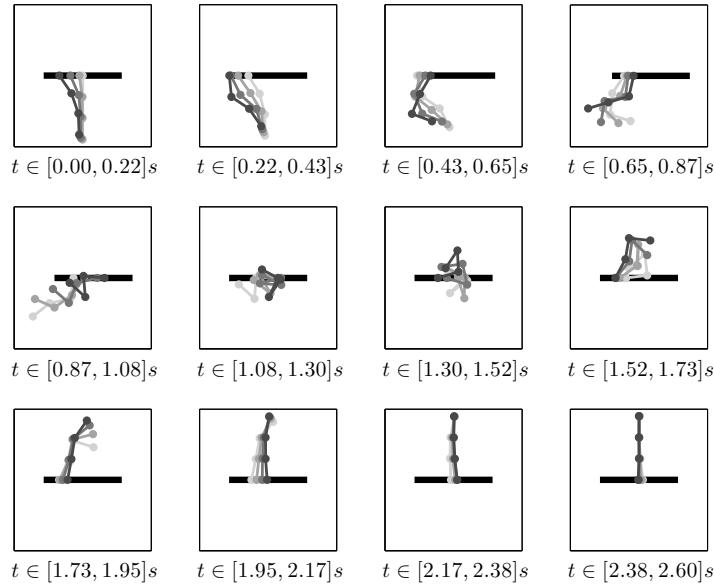


Bild 4-20: Lösung 2: Aufschwung des Dreifachpendels auf einem Wagen mit Endzeit  $t_f = 2.6\text{ s}$  und Steueraufwand  $E = 2123\text{ N}^2\text{s}$

Steueraufwand von  $E = 1117\text{ N}^2\text{s}$ . Ähnliche Manöver haben sich auch schon beim Doppelpendel ergeben, wenn man eine Bewegung vorgegeben hat, die die entsprechende Ruhelage beinhaltet. Hier, beim Dreifachpendel, ergibt sich diese komplexe Bewegung automatisch dadurch, dass für ein direktes Manöver nicht genügend Verfahrweg zur Verfügung steht. Abhilfe von dieser Problematik schafft dann Lösung 5.

## Lösung 4

Die vierte Bewegung (siehe Bild 4-22) ist im Prinzip ähnlich zu Bewegung 3. Hier wird zunächst die Position der Ruhelage 1 angefahren und aus dieser heraus das Pendel im zweiten Teil des Aufschwungs in die obere Ruhelage gebracht. Dieses Manöver dauert  $3.13\text{ s}$  und benötigt einen Steueraufwand von  $938\text{ N}^2\text{s}$ .

## Lösung 5

Durch Lösung 5 wird untersucht, ob ein direkter Aufschwung des Dreifachpendels möglich ist, wenn man den zur Verfügung stehenden Verfahrweg in eine Richtung komplett ausnutzt. Dazu ist der Anfangszustand jetzt ganz rechts gewählt, sodass dem Motor insgesamt  $1.1\text{ m}$  zur Verfügung stehen. In Bild 4-23 ist zu erkennen,

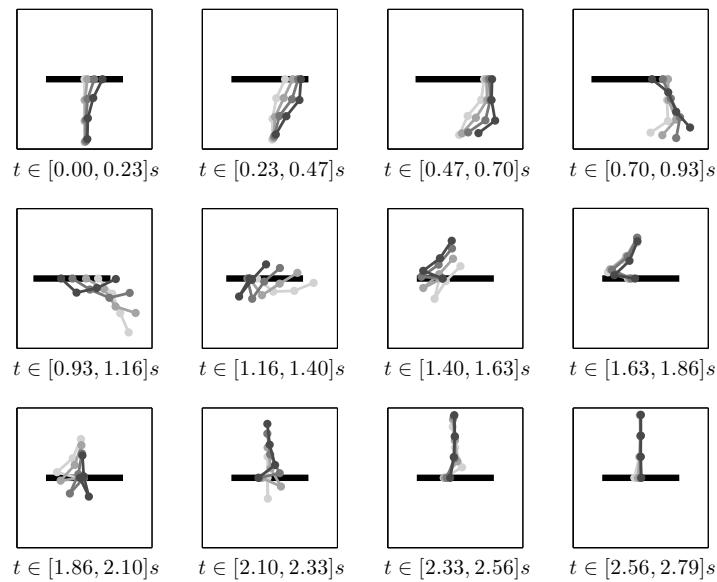


Bild 4-21: Lösung 3: Aufschwung des Dreifachpendels auf einem Wagen mit Endzeit  $t_f = 2.79 s$  und Steueraufwand  $E = 1117 N^2 s$

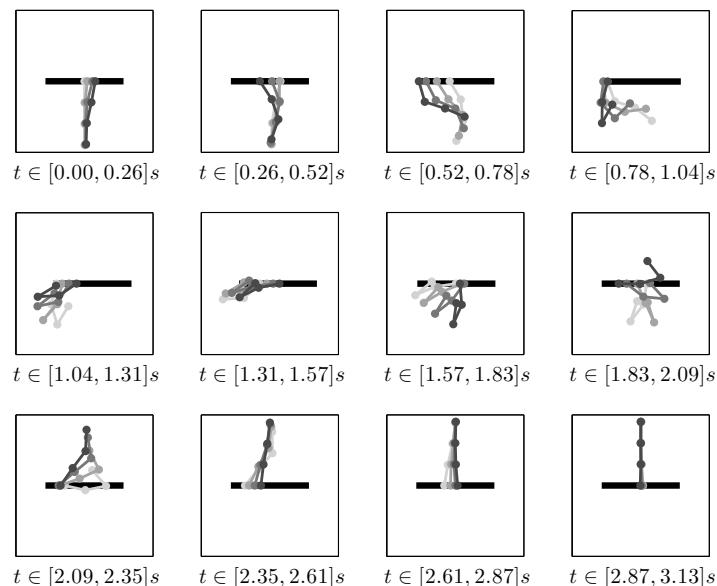
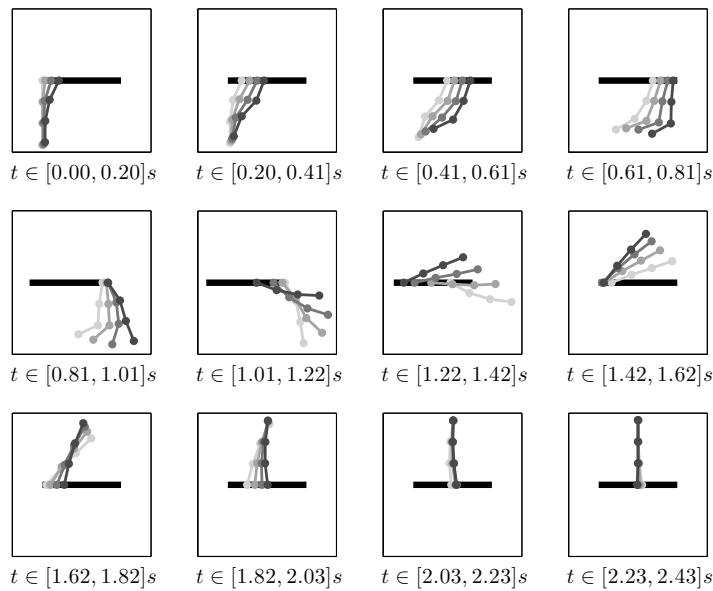


Bild 4-22: Lösung 4: Aufschwung des Dreifachpendels auf einem Wagen mit Endzeit  $t_f = 3.13 s$  und Steueraufwand  $E = 939 N^2 s$

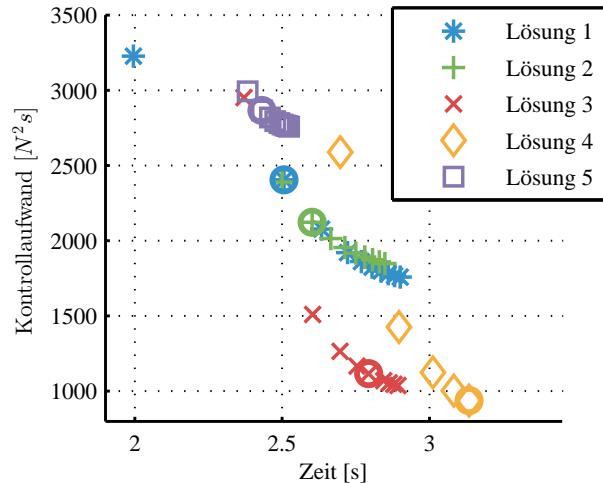
dass durch das Nutzen des gesamten Weges ein direkter Aufschwung in die obere Ruhelage möglich ist. Dieses Manöver dauert 2.43 s bei einem Steueraufwand von  $E = 2865 N^2s$ . Es besteht also die Möglichkeit, durch eine Veränderung der Randwerte weitere Arten von Bewegungen für den Aufschwung zu erhalten. Auch dieses Manöver ähnelt dem direkten Aufschwung für das Doppelpendel (siehe Bild 4-7).



*Bild 4-23: Lösung 5: Aufschwung des Dreifachpendels auf einem Wagen mit Endzeit  $t_f = 2.43 s$  und Steueraufwand  $E = 2865 N^2s$*

Für die hier beschriebenen Manöver kann, wie auch für das Doppelpendel, eine Nachoptimierung durchgeführt werden, siehe Abschnitt 4.3.5. Die Nachoptimierung wurde hier auch mittels der Methode der gewichteten Summe durchgeführt. Dabei wurde darauf geachtet, für jeden Fall die Nachoptimierungen mit den gleichen Gewichtungsfaktoren durchzuführen, um vergleichbare Ergebnisse zu bekommen. Die entsprechenden Zielfunktionswerte sind in Bild 4-24 dargestellt. Die Zielfunktionswerte der hier beschriebenen Manöver sind dabei jeweils durch Kreise gekennzeichnet. Für jede einzelne Nachoptimierung bildet sich ein Zweig an Zielfunktionswerten. Insgesamt haben die Lösungen 3 und 4 den geringsten Steueraufwand, dauern aber unterschiedlich lang. Außerdem zeigen die Lösungen 1 und 2 fast identische Werte der Zielfunktion. Beim genauen Vergleich dieser Lösungen wird deutlich, dass sie sich nur sehr wenig unterscheiden, was die ähnlichen Zielfunktionswerte erklärt. Der Steueraufwand bei Lösung 5 ist am höchsten.

Dies liegt daran, dass hier das Pendel direkt in einer schnellen Bewegung in die obere Ruhelage befördert wird. Dass ein solches Manöver besonders hohe Kosten verursacht, wurde auch schon beim Doppelpendel deutlich.



*Bild 4-24: Zielfunktionswerte für verschiedene Manöver für den Aufschwung des Dreifachpendels mit Variation durch Nachoptimierung; die vorhergehend beschriebenen Manöver werden jeweils als Ausgangspunkte verwendet und sind durch Kreise gekennzeichnet, die jeweiligen Farben stellen Lösungen mit derselben Ausgangslösung dar*

#### 4.4.2 Ergebnisse am Prüfstand des Dreifachpendels

Für die Umsetzung von Trajektorien am Prüfstand des Dreifachpendels wird analog zum Doppelpendel auf einem Wagen vorgegangen, siehe Abschnitt 4.3.3. Zunächst wird mit Hilfe der Simulationsumgebung für das Dreifachpendel die Funktionalität des LQR-Ansatzes als Regelung getestet. Wenn anschließend sowohl die Steuerung als auch die Regelung im Rahmen der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur geeignet bestimmt sind, kann das Manöver am Prüfstand getestet werden. In Bild 4-25 ist ein erfolgreicher Aufschwung dargestellt. Dabei wird hier nur der Aufschwung aus der unteren Ruhelage in die Ruhelage 1 aus Bild 4-18 durchgeführt. Dies liegt daran, dass der Aufbau des Dreifachpendels extrem stark auf Störungen und Ungenauigkeiten reagiert. Daher ist der eigentliche Aufschwung des Pendels in die obere Ruhelage am derzeit zur Verfügung stehenden Prüfstand nicht umsetzbar. An den Ergebnissen wird dieser Effekt ebenfalls deutlich: Es ist möglich, die Pendelarme in die gewünschte Ruhelage zu steuern, dabei kommt es aber zu größeren Abweichungen in den Winkellagen und beim Motor. Auch lässt sich das Pendel in der Ruhelage nicht so ruhig regeln, wie dies z.B. beim

Doppelpendel der Fall war.

Für die weitergehende Umsetzung von Manövern am Dreifachpendel müssen diese Stabilitätsprobleme behoben werden.

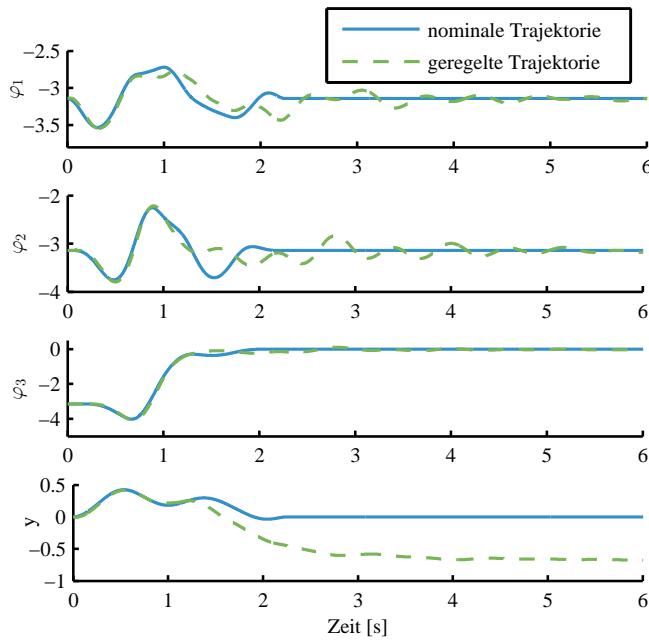


Bild 4-25: Aufschwung des Dreifachpendels am Prüfstand in Ruhelage 1 (siehe Bild 4-18); dargestellt werden  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  und  $y$  jeweils für die berechnete nominale Trajektorie (blaue durchgezogene Linie) und die gemessene geregelte Trajektorie am Prüfstand (grüne gestrichelte Linie)

## 4.5 Vergleich von Methoden für die Berechnung des Aufschwungs am Pendel

In dieser Arbeit werden optimale Steuerung und Optimierungsverfahren für die Berechnung von Steuerungen für das Mehrfachpendel verwendet. Dabei ergeben sich durch den Einsatz von Mehrzieloptimierung viele verschiedene Lösungen, die teilweise ein sehr unterschiedliches dynamisches Verhalten zeigen. Dies ist insofern ein gewünschtes Ergebnis, da es die Möglichkeit bietet, zwischen den Lösungen eine Auswahl zu treffen. Wenn dieser Ansatz auf ein allgemeines technisches System angewendet wird, besteht die Möglichkeit, unter Einsatz von zusätzlichem Wissen über das System die beste Lösung auszuwählen. Oder man nutzt die Ergebnisse der Optimierung, um das Systemverhalten an verschiedene äußere Umstände anzupassen. Dabei stehen dann die Lösungen zur Auswahl, deren Zielfunktionswerte

sich auf der Paretofront befinden.

Es existieren aber auch weitere Verfahren für die Berechnung und Durchführung eines Aufschwungs des Pendels (siehe auch Abschnitt 2.1.2). Im Folgenden werden zwei dieser Ansätze genauer vorgestellt, und es wird auf die Unterschiede zum Vorgehen in der vorliegenden Arbeit eingegangen.

In [GTZ07] wird ein vergleichbarer Ansatz mit einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur für den Aufschwung des Pendels verwendet. Auch hier ist somit der Aufschwung mittels Vorsteuerung und zusätzlicher Regelung bestimmt. Dabei besteht der Hauptunterschied dieses Ansatzes in der Berechnung der Steuerung. Für die Modellierung des Aufschwungs des Pendels wird ein überbestimmtes Randwertproblem aufgestellt. Die fehlenden Freiheitsgrade werden anschließend durch eine Ansatzfunktion mit freien Parametern ergänzt. Diese besteht z. B. aus trigonometrischen Funktionen

$$\mathcal{Y}(t, p) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi t}{t_f}\right) + \sum_{k=2}^5 p_{k-1} \cos\left(\frac{k\pi t}{t_f}\right).$$

Hierbei ist  $p = (p_1, \dots, p_4)$  der Vektor der freien Parameter und  $\mathcal{Y}(t, p)$  die parameterabhängige Ansatzfunktion. Die Parameter  $a_0$  und  $a_1$  können durch die Auswertung der Randbedingungen bestimmt werden. Die Lösung eines solchen Randwertproblems kann dann für eine feste Manöverzeit  $t_f$  mit numerischen Standardverfahren (z. B. *bvp4c* in Matlab) erfolgen. Auch hier lassen sich somit Trajektorien mit unterschiedlicher Endzeit  $t_f$  bestimmen, welche unterschiedliche Manöver des Pendels beschreiben.

Für die Umsetzung am Prüfstand wird ein Manöver ausgewählt, welches einen guten Kompromiss der maximalen Auslenkung der Trajektorien für  $y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)$  bezüglich der Beschränkungen darstellt. Für die Regelung wird entsprechend der Zwei-Freiheitsgrade Struktur ein linearer Ansatz entlang der nominalen Trajektorie verwendet.

Bei diesem Vorgehen zur Bestimmung einer Aufschwungtrajektorie für das Pendel besteht die Problematik, dass die Existenz einer Lösung für verschiedene Ansatzfunktionen nicht gesichert ist. Man benötigt vorausgehendes Systemwissen über die Beschaffenheit der Steuertrajektorie, um wirklich eine Lösung zu erhalten. In [GTZ07] wird davon ausgegangen, dass eine Ansatzfunktion mit trigonometrischen Funktionen gute Ergebnisse liefert, was aufgrund der Schwünge des Pendels sicherlich sinnvoll ist. Bei der Bestimmung der nominalen Trajektorie und Steuerung durch Optimierungsverfahren kann dagegen auf eine solche Einschränkung verzichtet werden. Dies lässt einen zusätzlichen Variantenreichtum und die Bewertung dieser Manöver bezüglich ihrer Zielfunktion zu.

Die Arbeit [ZR01] verfolgt dagegen einen anderen Ansatz für den Aufschwung eines Doppelpendels auf einem Wagen. Es wird ein energie- und passivitätsba-

sierter Regler ausgelegt, um das Pendel in die Nähe der Ruhelage zu bringen, und dann wird in der Nähe der oberen Ruhelage auf einen Regler umgeschaltet, der auf einem linearisierten Modell basiert und die obere Ruhelage stabilisiert. Der nichtlineare Regler besteht dabei aus zwei Teilen:

$$u = -k_1 y - k_2 \dot{y} + k_3 \tilde{E} ((m_1 a_1 + m_2 l_1) \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) + m_2 a_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2)).$$

Die ersten zwei Terme sorgen dafür, dass die Position des Wagens und seine Geschwindigkeit gegen Null konvergieren, und der zweite Term zwingt die Pendel, das Energilevel der oberen Ruhelage anzunehmen, welches durch den Parameter  $\tilde{E}$  in den Regler eingeht. Dieses Energilevel kann durch eine Mannigfaltigkeit abhängig von den Zustandsgrößen beschrieben werden und wirkt damit als eine zusätzlich Zwangsbedingung für das System, die durch die Regelung erfüllt werden muss.

Simulationsergebnisse dieses Ansatzes zeigen, dass innerhalb von 30 s die obere Ruhelage angefahren wird. Dabei kommt es zu einem nach und nach ausgeführten Aufschwung des Pendels, bis es sich schließlich in der Ruhelage befindet. Der Vorteil dieser Methode ist, dass sie ohne Probleme auch auf starke Störungen reagieren kann, denn die Regelstrategie besitzt keinen definierten Anfangszustand. Aus dieser Situation ergeben sich aber ebenfalls Nachteile, denn es kann keine Aussage darüber getroffen werden, wann die Ruhelage erreicht wird, und auch nicht, in welchem Bereich sich die Zustandsgrößen währenddessen befinden. Für viele technische Systeme scheidet eine Umsetzung mit einer solchen Methode demnach aus.

Als Fazit kann festgehalten werden, dass der Ansatz der Berechnung des Aufschwungs für das Doppelpendel mit Hilfe von Optimalsteuerung und Optimierungsverfahren viele Vorteile vereint. Mit dieser Methode ist man in der Lage, eine Vielfalt an Trajektorien zu erzeugen und eine Bewertung bezüglich verschiedener Ziele vorzunehmen. Dabei ist sicher, welche Zustände angenommen werden, da die nominale Steuerung und Trajektorie bekannt sind, und Störungen werden mit Hilfe einer zusätzlichen Regelung abgefangen.



## 5 Strategien für optimale Steuerung auf invarianten Mannigfaltigkeiten

Ein häufig verwendetes Ziel für Manöver von mechanischen Systemen besteht darin, möglichst energieeffiziente Trajektorien zu finden. Hierfür können Methoden der optimalen Steuerung verwendet werden. Zusätzlich können für dynamische Systeme Strukturen identifiziert werden, auf denen eine kostenlose Bewegung in eine Ruhelage möglich ist. Somit ist es denkbar, diese auch für ein optimales Steuerungsmanöver zu verwenden. In diesem Kapitel wird der Einsatz von stabilen und instabilen invarianten Mannigfaltigkeiten (im Folgenden auch durch die Bezeichnung *(in)stabile* Mannigfaltigkeiten zusammengefasst) für die optimale Steuerung untersucht. Es werden sowohl der Einsatz von (in)stabilen Mannigfaltigkeiten innerhalb einer optimalen Trajektorie, als auch die Ergebnisse dieses neuen Ansatzes im Vergleich zum Standardansatz (siehe Kapitel 4) evaluiert.

Dynamische Systeme besitzen (in)stabile Mannigfaltigkeiten, die (mehrdimensionale) Teilmengen des Zustandsraums darstellen und eine Bewegung des Systems ohne Steuereingriff aus einer bzw. in eine Ruhelage beschreiben. Eine (in)stabile Mannigfaltigkeit ist invariant unter dem Fluss des Systems, was bedeutet, dass das System bei einer Bewegung ohne äußeren Stelleingriff auf ihr verbleibt, wenn der Anfangszustand auf der (in)stabilen Mannigfaltigkeit lag. Daher muss für diese Bewegung keine Energie aufgebracht werden. In diesem Kapitel wird daher untersucht, wie die inhärente, natürliche Dynamik des Systems, welche durch die invariante Mannigfaltigkeit gegeben ist, dazu ausgenutzt werden kann optimale Steuerungen zu bestimmen. Bisher wurde eine solche Idee der optimalen Steuerung auf invarianten Mannigfaltigkeiten im Kontext von mechatronischen Systemen noch nicht für neuartige Methoden der Optimalsteuerung verwendet.

Eine interessante Anwendung von optimaler Steuerung auf invarianten Mannigfaltigkeiten entstammt aus dem Design von Raumfahrtmissionen, siehe [KLMR00], [MR06], [MOBM08] und [DOBP<sup>+</sup>09]. Da Satelliten nur begrenzten Brennstoff für ihre Reise im Weltall besitzen, sollen nach Möglichkeit Strukturen gefunden werden, die eine Bewegung ohne Energieaufwand ermöglichen. Nur so können die langen Strecken im All überwunden werden. Es lassen sich hierfür im Kraftfeld der Planeten Mannigfaltigkeiten identifizieren, die eine solche Bewegung ohne Energieaufwand ermöglichen. Es entstehen komplexe Trajektorien, und die Fortbewegung dauert lange, aber weit entfernte Ziele können mit sehr wenig Treibstoff erreicht werden.

Im Folgenden wird weiterhin der Aufschwung des Doppelpendels betrachtet. In einem ersten Schritt wird das Modell vereinfacht und ein Doppelpendel ohne Wagen, aber mit einem aktuierten Gelenk an der Aufhängung verwendet (Pendubot, siehe Kapitel 2). Für dieses System soll der Einsatz von invarianten Mannigfaltigkeiten zur Bestimmung einer optimalen Steuerung zunächst getestet werden. Das System besitzt nur zwei Freiheitsgrade und ist daher weniger komplex als das Doppelpendel mit Wagen. Es wird später gezeigt, dass die Vorgehensweise dann einfach erweitert werden kann. Auch hier wird die DMOC Methode für die Optimalsteuerung verwendet. Die Ergebnisse werden mit Lösungen verglichen, die bei der Berechnung mit einem Standardansatz (linear interpolierter *initial guess*) bestimmt werden. Das Ziel dieses neuen Ansatzes ist es, die Möglichkeiten für eine Steuerung und Regelung eines dynamischen Systems auf einer (in)stabilen Mannigfaltigkeit zu evaluieren und etwaige dynamische Vorteile zu untersuchen.

In diesem Kapitel werden zunächst in Abschnitt 5.1 die Grundlagen zu dynamischen Systemen beschrieben, die für das Verständnis des Konzepts von (in)stabilen Mannigfaltigkeiten notwendig sind. Außerdem wird die numerische Methode *Global Analysis of Invariant Objects* (GAIO) beschrieben, mit deren Hilfe diese Objekte berechnet werden. Anschließend wird in Abschnitt 5.2 ein Ansatz für die optimale Steuerung des Doppelpendels auf (in)stabile Mannigfaltigkeiten vorgestellt und die dabei erzielten Ergebnisse gezeigt. In Abschnitt 5.3 wird dieser Ansatz auf das Doppelpendel mit Wagen erweitert und in Abschnitt 5.4 auch am Prüfstand angewendet. Die weiteren Abschnitte 5.5 und 5.6 beschäftigen sich genauer mit dem Vergleich der optimalen Steuerung auf Mannigfaltigkeiten mit dem Standardansatz zur Berechnung von Aufschwüngen für das Doppelpendel bzw. mit weitergehenden Forschungsansätzen in diesem Bereich.

## 5.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen zur Untersuchung dynamischer Systeme im Kontext der Berechnung von stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten für Fixpunkte - also Ruhelagen - vorgestellt. Eine detailliertere Darstellung dynamischer Systeme und ihrer Eigenschaften sind zum Beispiel in [Pd82], [GJ09], [GH83] und [KH95] zu finden. Die hier aufgeführten Grundlagen folgen ebenfalls der Darstellung in diesen Quellen. Im Rahmen der Vorstellung der Grundlagen zu dynamischen Systemen wird zusätzlich genauer auf die chaotische Dynamik des Pendels eingegangen, die auch schon in den vorhergehenden Kapiteln dieser Arbeit angesprochen wurde.

In einem zweiten Schritt wird anschließend das Konzept der sogenannten stark (in)stabilen Mannigfaltigkeit beschrieben. Dies ist eine invariante Teilmenge der (in)stabilen Mannigfaltigkeit eines Fixpunkts.

Außerdem soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, wie stabile und instabile Mannigfaltigkeiten eines dynamischen Systems mit Hilfe des Tools GAO numerisch berechnet werden können. Weitere Informationen hierzu sind [DJ02] und [DFJ01] zu entnehmen.

Abschließend werden die zusätzlich benötigten Modelle des Pendels ohne Wagen für dieses Kapitel und die Berechnung der (in)stabilen Mannigfaltigkeiten vorgestellt.

### 5.1.1 Dynamische Systeme

#### Lineare Systeme

Zunächst wird das lineare System

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

betrachtet.

**Definition 5.1** Es sind

$$\begin{aligned} E^s &= \text{span}\{v^1, \dots, v^{n_s}\}, && \text{der stabile Unterraum,} \\ E^u &= \text{span}\{u^1, \dots, u^{n_u}\}, && \text{der instabile Unterraum,} \\ E^c &= \text{span}\{w^1, \dots, w^{n_c}\}, && \text{der Zentrumsunterraum,} \end{aligned}$$

wobei  $\{v^1, \dots, v^{n_s}\}, \{u^1, \dots, u^{n_u}\}, \{w^1, \dots, w^{n_c}\}$  die Eigenvektoren zu den Eigenwerten mit negativem Realteil, positivem Realteil und Realteil 0 sind.

**Bemerkung 5.2** (i) Es gilt  $n_x + n_u + n_c = n$ .

- (ii) Lösungen in  $E^s$  fallen exponentiell für  $t \rightarrow \infty$ .  
Lösungen in  $E^u$  fallen exponentiell für  $t \rightarrow -\infty$ .  
Lösungen in  $E^c$  zeigen kein exponentielles Verhalten.
- (iii) Der Fluss  $e^{tA}$  heißt *hyperbolisch*, falls  $n_c = 0$  gilt. Falls zudem  $n_u = 0$  bzw.  $n_s = 0$  gilt, so heißt  $e^{tA}$  Kontraktion bzw. Expansion.

**Satz 5.3** Der Fluss  $e^{tA}$  sei hyperbolisch. Dann existiert eine Zerlegung  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$  in invariante Unterräume, so dass der induzierte Fluss auf  $E^s$  eine Kontraktion und der induzierte Fluss auf  $E^u$  eine Expansion ist. Die Zerlegung ist eindeutig.

Durch die Kenntnisse über die Unterräume  $E^s$ ,  $E^u$  und  $E^c$  können somit Aussagen über das dynamische Verhalten des betrachteten Systems gemacht werden.

#### Erweiterung auf nichtlineare Systeme

Diese Eigenschaften können im Folgenden auch auf nichtlineare Systeme

$$\dot{x} = f(x),$$

mit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , erweitert werden.

Die Taylorentwicklung von  $f$  im Fixpunkt  $x^*$  kann durch

$$f(x) = f(x^*) + Df(x^*)(x - x^*) + \mathcal{O}(\|x - x^*\|^2)$$

beschrieben werden. Somit erhält man eine linearisierte Approximation des nichtlinearen Systems durch  $\dot{z} = Df(x^*)z$  mit  $z = x - x^*$ .

Ein wichtiger Satz über das dynamische Verhalten von nichtlinearen Systemen in der Nähe der Ruhelage ist der *Satz von Hartman-Grobmann* (siehe [Pd82], [GH83]). Er macht eine Aussage über das lokale Verhalten eines dynamischen Systems in der Nähe eines hyperbolischen Fixpunkts. Das Verhalten des nichtlinearen Systems ist qualitativ gleich dem der Linearisierung in dieser Umgebung. Daher kann z. B. zur Untersuchung der Stabilität solcher Fixpunkte die Linearisierung des Systems verwendet werden, was im Folgenden auch für Betrachtungen von (in)stabilen Mannigfaltigkeiten ausgenutzt wird.

**Definition 5.4** Es sei  $B_\varepsilon(x^*)$  eine Kugel in  $\mathbb{R}^n$  um den Fixpunkt  $x^*$  mit Radius  $\varepsilon$ . Dann heißen

$$\begin{aligned} W_\varepsilon^s &= \{x | \Phi^t(x) \in B_\varepsilon(x^*) \text{ für } t \geq 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^t(x) = x^*\}, \\ W_\varepsilon^u &= \{x | \Phi^t(x) \in B_\varepsilon(x^*) \text{ für } t \leq 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi^t(x) = x^*\}, \end{aligned}$$

die lokale stabile und die lokale instabile Mannigfaltigkeit von  $x^*$ , wobei  $\Phi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\Phi^t(x) = \Phi(x, t)$  den Fluss des dynamischen Systems darstellt, für den gilt  $\frac{d}{dt} (\Phi(x, t))|_{t=\tau} = f(\Phi(x, \tau))$ , siehe [GH83].

Diese Definition ist das Analogon der stabilen und instabilen Unterräume für das nichtlineare System  $\dot{x} = f(x)$ .

**Satz 5.5 (Satz über die stabile Mannigfaltigkeit eines Fixpunktes)** Es sei  $x^*$  ein hyperbolischer Fixpunkt von  $\dot{x} = f(x)$ . Dann existieren die lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeit  $W_\varepsilon^s(x^*)$  und  $W_\varepsilon^u(x^*)$ , und sie besitzen dieselben Dimensionen  $n_s$  und  $n_u$  wie die zu  $\dot{z} = Df(x^*)z$  gehörenden stabilen und instabilen Unterräume  $E^s$  und  $E^u$ . Zudem sind die Tangentialräume von  $W_\varepsilon^s(x^*)$  und  $W_\varepsilon^u(x^*)$  in  $x^*$   $E^s$  und  $E^u$ .

*Beweis.* Siehe [Pd82]. □

Durch Erweiterung der lokalen (in)stabilen Mannigfaltigkeit lässt sich auch die globale (in)stabile Mannigfaltigkeit definieren. Mit Hilfe des Flusses wird die lokale stabile Mannigfaltigkeit rückwärts in der Zeit abgebildet, so dass man dann die Menge aller Punkte erhält, deren Lösungskurve für  $t \rightarrow \infty$  asymptotisch gegen den Fixpunkt  $x^*$  konvergiert.

**Definition 5.6** Die globale stabile und instabile Mannigfaltigkeit sind durch

$$W^s(x^*) = \bigcup_{t \leq 0} \Phi^t(W_\varepsilon^s(x^*)),$$

$$W^u(x^*) = \bigcup_{t \geq 0} \Phi^t(W_\varepsilon^u(x^*))$$

gegeben.

Weitere Informationen zu Mannigfaltigkeiten im Kontext der Differentialgeometrie sind im Anhang A.1 zu finden.

## Chaotische Dynamik

Beim passiven mathematischen Doppelpendel handelt es sich um ein chaotisches System, siehe [SO06]. Diese Eigenschaft wird hier im Rahmen der Analyse dynamischer Systeme kurz vorgestellt und diskutiert.

Im Folgenden soll ein Eindruck vermittelt werden, welche speziellen Eigenschaften chaotische dynamische Systeme besitzen können. Dabei variiert die Definition für Chaos bei verschiedenen Systemklassen, im Allgemeinen trifft aber mindestens eine der folgenden Eigenschaften zu [Ber01]:

- Die Trajektorien von chaotischen Systemen zeigen ein Zeitverhalten, das sich komplizierter als stationär, periodisch oder quasiperiodisch verhält.
- Die Bewegung ist sehr empfindlich bezüglich Veränderungen in den Anfangsbedingungen. Trajektorien, die nah beieinander starten, divergieren exponentiell schnell. Diese Eigenschaft wird auch als sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert bezeichnet.
- Die asymptotische Bewegung findet auf einem geometrisch komplexen Objekt statt (häufig ein Fraktal). Dieses Objekt wird auch „seltsamer Attraktor“ genannt. Beispiele hierfür sind der Hénon- und der Lorenz- Attraktor.
- Chaotische Trajektorien besitzen unendlich viele periodische Orbits.
- Im Zeitverlauf verschlingen sich die Bilder von zwei Teilmengen des Zustandsraums unter dem Fluss des Systems in komplizierter Weise.

Diese Eigenschaften vermitteln ein allgemeines Bild von den komplexen Eigenschaften eines chaotischen dynamischen Systems. Für genauere mathematische Betrachtungen und ausführliche Beispiele siehe [Ber01], [Pd82], [GH83].

Die sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert ist eine zentrale Eigenschaft des Doppelpendels und wird daher hier formal definiert.

**Definition 5.7** Es sei  $\Phi^t$  der Fluss eines dynamischen Systems auf  $\mathbb{R}^n$ . Der Fluss  $\Phi^t$  besitzt *sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert* auf  $\mathbb{R}^n$ , falls ein  $\varepsilon > 0$  mit der folgenden Eigenschaft existiert: Für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  und jede Umgebung  $U$  von  $x$  existiert ein  $y \in U$  und ein  $t > 0$ , so dass  $\|\Phi^t(x) - \Phi^t(y)\| \geq \varepsilon$  gilt.

Seltsame Attraktoren sind darüber definiert, dass sie sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert besitzen.

**Definition 5.8** Eine abgeschlossene invariante Menge  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  ist *topologisch transitiv*, falls  $\Phi^t$  einen dichten Orbit in  $\mathcal{D}$  besitzt. Ein *Attraktor* ist eine Menge, die topologisch transitiv und attraktiv ist.

Die chaotische Dynamik macht das Doppelpendel zu einem komplexen System. Ein besonderes Kennzeichen ist dabei die sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert [SGWY92]. Diese Eigenschaft bedeutet, dass sich kleine Abweichungen  $\Delta x(t_0)$  zwischen nahe zusammen liegenden Anfangsbedingungen exponentiell verstärken

$$\Delta x(t) = \Delta x(t_0)e^{\lambda t},$$

wobei  $\Delta x(t)$  die Abweichung zwischen den Trajektorien beschreibt und  $\lambda$  eine positive Konstante ist. Für eine genauere Analyse dieser Eigenschaft werden im Folgenden die beiden Trajektorien  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  für das Doppelpendel betrachtet. Dann kann das dynamische Verhalten durch

$$\Delta \dot{x} = A \cdot \Delta x + \mathcal{O}(|\Delta x|^2),$$

mit einer linearen Matrix  $A$  approximiert werden, wobei  $\Delta x(t) = x_1(t) - x_2(t)$  ist. Wenn die Pendelarme nahe zusammen beginnen, ist  $|\Delta x|$  klein, und die Terme höherer Ordnung können vernachlässigt werden:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x. \tag{5-1}$$

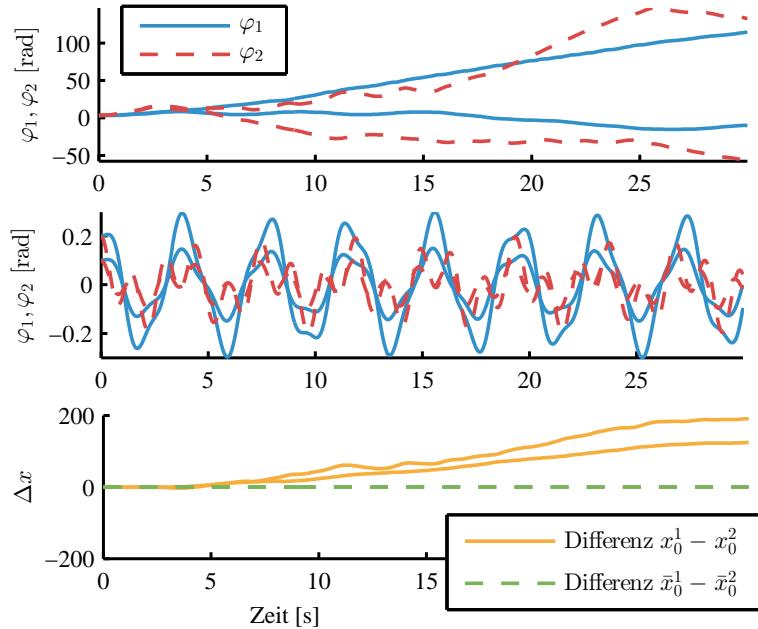
Die Lösung dieses System lautet dann

$$\Delta x(t) = \Delta x(t_0)e^{At},$$

und das Verhalten der Lösung wird durch die Eigenwerte der Matrix  $A$  bestimmt. Weitere Aussagen können dann entsprechend dem Realteil des größten Eigenwerts getroffen werden:

- Ist er positiv, dann wachsen die Abweichungen  $\Delta x$  im zeitlichen Verlauf stark an. Das System (5-1) ist instabil, und damit wird die Differenz zwischen den Trajektorien  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  immer größer.
- Ist er negativ, verschwinden die Abweichungen zwischen den Trajektorien und das System (5-1) ist stabil. In diesem Fall bleibt die Differenz also klein.

Nach diesen Ausführungen ist auch eine weitere Definition von chaotischem Verhalten über den sogenannten Lyapunov-Exponenten  $\lambda$  möglich, die somit direkt mit der sensitiven Abhängigkeit vom Anfangswert zusammenhängt. Wenn  $\lambda$  für typische Anfangswerte positiv ist, dann ist das zugrunde liegende dynamische System chaotisch [SGWY92].



*Bild 5-1: Trajektorien von nahe zusammen liegenden Anfangswerten:  $\varphi_1$ : blaue durchgezogene Linie,  $\varphi_2$ : rote gestrichelte Linie; Anfangswerte oben:  $x_1^0 = [\pi + \varepsilon \quad \pi + \varepsilon \quad 0.5 \quad 0.5]$  und  $x_2^0 = [\pi + 2\varepsilon \quad \pi + 2\varepsilon \quad 0.5 \quad 0.5]$ ; Anfangswerte mitte:  $\bar{x}_1^0 = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad 0 \quad 0]$  und  $\bar{x}_2^0 = [2\varepsilon \quad 2\varepsilon \quad 0 \quad 0]$  mit  $\varepsilon = 0.1$ ; unten: Differenz der Trajektorien:  $x_0^1 - x_0^2$  gelbe durchgezogene Linie,  $\bar{x}_0^1 - \bar{x}_0^2$  grüne gestrichelte Linie*

In Bild 5-1 ist der Effekt der sensitiven Abhängigkeit vom Anfangswert für verschiedene Anfangswerte qualitativ dargestellt. An dieser Stelle wird ein mathematisches Pendel mit Punktmassen und der unteren Ruhelage  $x_R = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$  betrachtet. Im oberen Teil des Bildes sind zwei Trajektorien mit den Anfangswerten  $x_1^0 = [\pi + \varepsilon \quad \pi + \varepsilon \quad 0.5 \quad 0.5]$  und  $x_2^0 = [\pi + 2\varepsilon \quad \pi + 2\varepsilon \quad 0.5 \quad 0.5]$  mit  $\varepsilon = 0.1$  dargestellt. Dabei ist  $\varphi_1$  in blau und  $\varphi_2$  in rot gestrichelt dargestellt. Die Differenz des Anfangswertes beträgt somit nur  $\varepsilon = 0.1$ , aber im Verlauf der dargestellten 30 s bewegen sich die Zustände weit auseinander. Ganz anders dazu verhält es sich in der mittleren Abbildung, in der die Anfangswerte  $\bar{x}_1^0 = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad 0 \quad 0]$  und  $\bar{x}_2^0 = [2\varepsilon \quad 2\varepsilon \quad 0 \quad 0]$  gewählt wurden. Auch hier beträgt die Differenz der Winkel

am Anfang  $\varepsilon = 0.1$ . Das Systemverhalten unterscheidet sich aber sehr stark, denn bei dieser zweiten Simulation bleiben die Winkel nahe beieinander, was vor allem auffällt, wenn man die Differenz der Winkel  $\Delta x$  betrachtet. Bei der Analyse der Differenz zwischen den Trajektorien (Bild 5-1, unten) wird deutlich, dass diese für die erste Trajektorie wächst, sodass hier der Lyapunov-Exponent positiv ist. Bei der zweiten Trajektorie ist die Differenz dagegen (fast) null, sodass auch der Lyapunov-Exponent null ist.

Die chaotische Dynamik wird beim Doppelpendel somit erst dann sichtbar, wenn ausreichend viel Energie im System ist.

### 5.1.2 Mengenorientierte Berechnung von Mannigfaltigkeiten mit Hilfe von GAIO

Nachdem jetzt die theoretischen Grundlagen von (in)stabilen Mannigfaltigkeiten vorgestellt wurden, beschäftigt sich der folgende Abschnitt mit der Berechnung dieser Mengen. Hierzu wird das Software-Tool GAIO (Global Analysis of Invariant Objects, siehe [DFJ01], [DJ02]) verwendet, um die Mannigfaltigkeiten numerisch zu bestimmen. In diesem Abschnitt werden die Motivation und das Vorgehen der mengenorientierten Berechnung von Mannigfaltigkeiten mit diesem Tool erläutert. Später werden mit dieser Methode Mannigfaltigkeiten für das Doppelpendel berechnet, um diese anschließend für das Lösen eines Optimalsteuerungsproblems zu verwenden.

#### Motivation

Mit Hilfe von GAIO lässt sich die globale Struktur eines dynamischen Systems mengenorientiert erfassen. Hierbei wird nicht das Langzeitverhalten einer einzelnen Trajektorie untersucht, sondern es werden invariante Mengen betrachtet, da sie das Verhalten des dynamischen Systems für beliebige Zeit angeben. Wenn die Dynamik des Systems einen bestimmten Grad an Glattheit und Hyperbolizität<sup>1</sup> besitzt, können invariante Mannigfaltigkeiten bestimmt werden, die eine Einsicht in die geometrische Struktur der Dynamik bieten.

Der mengenorientierte Ansatz, um z. B. globale Attraktoren oder invariante Mengen zu bestimmen, ist ein Unterteilungsalgorithmus. Die zentrale Idee ist es, die invariante Menge im Zustandsraum mit Boxen zu überdecken. Anschließend wird das dynamische Verhalten auf dieser Menge durch eine Markov-Kette approximiert. Diese beinhaltet Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Elementen der

---

<sup>1</sup>Für die numerische Berechnung ist es notwendig, dass die Eigenwerte der Linearisierung des dynamischen Systems im Fixpunkt nicht zu nahe an der imaginären Achse liegen. In diesem Fall zeigt das System nämlich kein ausreichend starkes Kontraktions- bzw. Expansionsverhalten.

Box-Überdeckung und beschreibt daher das dynamische Verhalten des Systems. Durch eine Verfeinerung der Boxen und Analyse der Dynamik des Systems konvergiert der Algorithmus gegen die invariante Menge.

### Berechnung invarianter Mengen

Da es sich bei den (in)stabilen Mannigfaltigkeiten um invariante Mengen handelt, soll dieser Begriff kurz erläutert werden:

#### Definition 5.9 (Invariante Menge)

Für eine stetige Abbildung  $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine invariante Menge, falls  $\theta(A) = \theta^{-1}(A) = A$  ist.

Die grundsätzliche Idee, um eine invariante Menge mit GAIO zu berechnen, ist es, diese mit Boxen zu überdecken und diese anschließend rekursiv zu verfeinern. Durch die passende Wahl von Boxen erhält man eine möglichst exakte Überdeckung der gesuchten invarianten Menge mit Boxen. Für die Umsetzung wird der folgende Algorithms verwendet:

#### Algorithmus 5.10 (Unterteilungsalgorithmus für die Berechnung von invarianten Mengen)

Beginne mit  $B_0 = \{Q\}$ . Für  $k = 1, 2, \dots$  wird  $B_k$  aus  $B_{k-1}$  in zwei Schritten berechnet:

- (i) **Unterteilung:** Teile jede Box der aktuellen Menge  $B_{k-1}$  in zwei kleinere Boxen derselben Größe.
- (ii) **Auswahl:** Entferne diejenigen der verfeinerten Boxen, deren Urbild keine der aktuellen verfeinerten Boxen schneidet. Die übrigen Boxen bilden die neue Sammlung von Mengen  $B_k$ .

In der GAIO-Software ist der zweite Schritt der Auswahl der Boxen wie folgt umgesetzt: In jeder Box befindet sich eine Menge von Testpunkten. Die gesamte Menge der Testpunkte wird durch die betrachtete Systemdynamik mit einer festgelegten Schrittweite vorwärts abgebildet und so lange mindestens einer der dadurch entstehenden Bildpunkte in der Box  $B$  liegt, wird diese nicht entfernt.

Die Parameter, wie z. B. die Größe der Boxen oder die Schrittweite müssen entsprechend des vorliegenden dynamischen Systems angepasst werden, um eine gute Approximation mit Boxen zu erhalten.

### Invariante Mannigfaltigkeiten

Die mengenorientierten Methoden können auch angewendet werden, um eine Überdeckung von invarianten Mannigfaltigkeiten in einer vorgegebenen Box  $Q$  zu berechnen. Dabei ist das Vorgehen in diesem Fall ähnlich zur Berechnung

von invarianten Mengen, wobei zusätzlich die Kenntnisse über die Dynamik von (in)stabilen Mannigfaltigkeiten ausgenutzt wird.

Im Folgenden wird die instabile Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen Fixpunkts untersucht.

Auch bei diesem Algorithmus ist es das Ziel, die instabile Mannigfaltigkeit durch Boxen zu überdecken und dadurch ihre geometrische Form im Zustandsraum zu approximieren. Zunächst wird GAIO dazu verwendet, einen kleinen Bereich zu identifizieren, der den Fixpunkt enthält (falls dieser nicht bekannt ist). Dies kann dadurch erreicht werden, dass die Boxen zyklisch unterteilt und jeweils diejenigen entfernt werden, deren Bilder sich nicht selbst schneiden. Alle übrigen Boxen enthalten Fixpunkte. Anschließend wird auf eine kleine Box, die den Fixpunkt enthält, Algorithmus 5.10 angewendet. Die so erhaltenen Boxen werden im nächsten Schritt vorwärts abgebildet, und alle in dieser Iteration getroffenen Boxen werden der Sammlung an Boxen hinzugefügt. Die so entstandenen neuen Boxen werden auch wieder vorwärts abgebildet, und die Prozedur wird entsprechend wiederholt. So erhält man die Überdeckung eines Teils der instabilen Mannigfaltigkeit.

**Algorithmus 5.11 (Fortsetzungsalgorithmus zur Berechnung von  $W^u(x^*)$ )**

- (i) **Initialisierung:** Wende den Algorithmus 5.10 auf eine kleine Box an, die den hyperbolischen Fixpunkt enthält.  
Wiederhole den folgenden Schritt, bis keine weiteren Boxen der aktuellen Sammlung hinzugefügt werden.
- (ii) **Fortsetzung:** Bilde die erhaltene Sammlung an Boxen vorwärts ab und beobachte, welche anderen Boxen der gesamten unterteilten Boxen getroffen werden. Diese Boxen werden der Sammlung hinzugefügt.

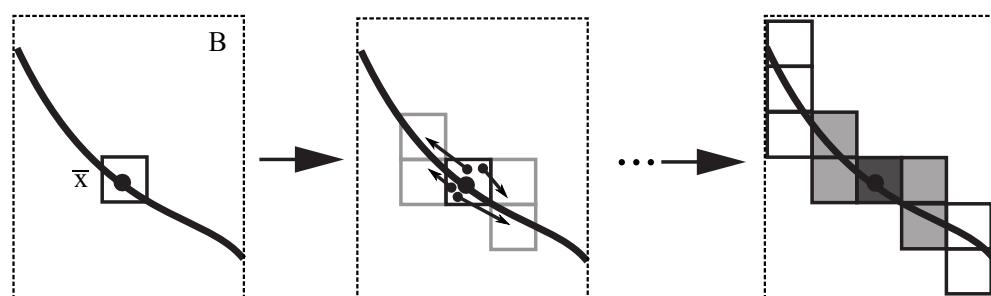


Bild 5-2: Schematische Darstellung des Fortsetzungsalgorithmus von GAIO für die Berechnung von instabilen Mannigfaltigkeiten

In Bild 5-2 wird das Vorgehen aus Punkt (ii) des Fortsetzungsalgorithmus schematisch dargestellt. Der Algorithmus beginnt mit einer Anfangsbox, die den Fixpunkt enthält. Testpunkte aus dieser Box werden dann abgebildet, indem sie

mit der Systemdynamik einen meist kurzen Zeitschritt vorwärts integriert werden. Anschließend werden alle Boxen, die von mindestens einem Testpunkt getroffen worden sind, mit neuen Testpunkten gefüllt und der nächste Durchlauf des Fortsetzungsalgorithmus wird gestartet. Der Algorithmus terminiert, wenn der Teil der instabilen Mannigfaltigkeit in  $B$  vollständig mit Boxen überdeckt ist, d. h. es werden keine neuen Boxen von Testpunkten getroffen, oder wenn eine bestimmte Anzahl an Durchläufen des Algorithmus durchgeführt worden ist. Die Größe der Boxen muss hier als ein Kompromiss zwischen Genauigkeit der Boxüberdeckung und dem Rechenaufwand gewählt werden. Für die Integration kann z. B. ein Runge-Kutta Verfahren höherer Ordnung verwendet werden. Da bei diesem Algorithmus jeweils nur sehr kurz integriert wird, ist die Methode robust bezüglich numerischen Fehlern (z. B. Drifts), die bei einer Integration über einen längeren Zeitraum häufig entstehen. Ein weiterer Vorteil von GAIO sind die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten auf Probleme mit einem Zustandsraum von mittlerer Größe, d. h. die Methode ist nicht auf zweidimensionale Beispiele beschränkt. In diesem Kapitel werden stabile und instabile Mannigfaltigkeiten von hyperbolischen Fixpunkten als Teilsequenzen für die Lösung von Optimalsteuerungsproblemen verwendet. Dabei ist die stabile Mannigfaltigkeit äquivalent zur instabilen Mannigfaltigkeit des dynamischen Systems, wenn man es in umgekehrter Zeit betrachtet. Daher kann die stabile Mannigfaltigkeit genauso wie die instabile Mannigfaltigkeit berechnet werden, nur das die Integration in Rückwärtszeit durchgeführt werden muss.

### 5.1.3 Stark (in)stabile Mannigfaltigkeiten

Der Satz über die stabile Mannigfaltigkeit 5.5 beschreibt, dass die Dimension der (in)stablen Mannigfaltigkeiten der Dimension der (in)stablen Eigenräume der Linearisierung im Fixpunkt entspricht. Für eine (in)stabile Mannigfaltigkeit mit Dimension größer als eins kann dann die Dynamik noch weiter untersucht werden. Wenn ein eindeutiger größter bzw. kleinster Eigenwert vorliegt, können stark (in)stabile Mannigfaltigkeiten [OLT04] identifiziert werden, die eindimensionale Untermannigfaltigkeiten der (in)stablen Mannigfaltigkeit darstellen und den Richtungen entsprechen, in der die Expansion bzw. Kontraktion am stärksten ist. Für die Berechnung stark (in)stabiler Mannigfaltigkeiten wird das dynamische System so transformiert, dass sich das Eigenspektrum verschiebt. Zum Beispiel wird für die Berechnung der stark stabilen Mannigfaltigkeit das Eigenwertspektrum nach rechts verschoben, sodass es in der linken Halbebene nur noch einen Eigenwert gibt, siehe auch Bild 5-3. Hierfür muss  $\lambda^{ss}$  als der Eigenwert des in der Ruhelage  $\bar{x} = 0$  linearisierten, autonomen, dynamischen Systems  $\dot{x} = f(x)$  mit dem kleinsten Realteil identifiziert werden. Es wird angenommen, dass  $\lambda^{ss}$  eindeutig und einfach ist. Der zugehörige Eigenvektor  $v^{ss}$  spannt dann den eindimen-

sionalen stark stabilen Eigenraum auf, d. h. für das in Vorwärtszeit untersuchte lineare System zeigt er vom Fixpunkt aus in die Richtung der stärksten Kontraktion. Die stark instabile Mannigfaltigkeit des nichtlinearen Ausgangssystems ist tangential zu  $v^{ss}$  in  $\bar{x}$  und sie ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit der instabilen Mannigfaltigkeit. Die stark instabile Mannigfaltigkeit entspricht analog dem eindeutigen Eigenwert  $\lambda^{uu}$  mit größten Realteil der Linearisierung im Fixpunkt  $\bar{x}$ . Für die Berechnung einer stark stabilen Mannigfaltigkeit werden hier zwei verschiedene Wege vorgestellt.

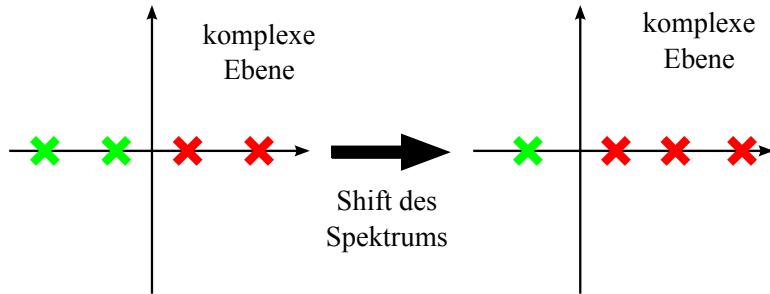


Bild 5-3: Verschiebung des Spektrums für die Berechnung der stark stabilen Mannigfaltigkeit; grüne Kreuze: stabile Eigenwerte, rote Kreuze: instabile Eigenwerte

Eine Möglichkeit besteht darin, die stark stabile Mannigfaltigkeit ebenfalls mit dem Tool GAO zu berechnen. Für das nichtlineare System  $\dot{x} = f(x)$  sei  $Df(0)$  die Jacobi-Matrix von  $f$  in der Ruhelage, also die linearisierte Systemmatrix, und  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  seien die zugehörigen Eigenwerte. Es wird angenommen, dass ein einzelner betragsmäßig größter Eigenwert in der linken komplexen Halbebene existiert. Dabei gelte  $Re(\lambda^{ss} = \lambda_1) < Re(\lambda_2) \leq \dots \leq 0 \leq Re(\lambda_i) \leq \dots \leq Re(\lambda^{uu} = \lambda_n)$ .

Es wird nun ein  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$  gewählt, so dass  $|Re(\lambda_1)| < \bar{\lambda} < |Re(\lambda_2)|$  gilt. Durch den Parameter  $\bar{\lambda}$  wird eine Systemtransformation durch  $\tilde{x}(t) := e^{\bar{\lambda}t}x(t)$  eingeführt. Damit gilt dann

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \bar{\lambda}\tilde{x}(t) + e^{\bar{\lambda}t}f(e^{-\bar{\lambda}t}\tilde{x}(t)). \quad (5-2)$$

Für (5-2) ist  $\tilde{x} = 0$  immer noch ein Fixpunkt. Es lässt sich nachrechnen, dass für das Spektrum von  $\bar{g}(\tilde{x}) = \bar{\lambda}\tilde{x}(t) + e^{\bar{\lambda}t}f(e^{-\bar{\lambda}t}\tilde{x}(t))$  gilt:

$$\sigma(D\bar{g}|_{\tilde{x}=0}) = \bar{\lambda} + \sigma(Df|_{x=0}).$$

Das gesamte Eigenwertspektrum wurde also um den Wert  $\bar{\lambda}$  verschoben, sodass das transformierte System nur noch einen einzigen Eigenwert in der linken Halbebene besitzt. GAO kann nun auf das transformierte System angewendet werden, welches jetzt nicht-autonom ist, also explizit von der Zeit  $t$  abhängt (siehe

[ARS05], [ARS06] für eine Untersuchung von invarianten Mannigfaltigkeiten von nicht-autonomen Systemen). Anschließend kann die berechnete eindimensionale stabile Mannigfaltigkeit wieder zurück transformiert werden, so dass man eine Approximation der stark stabilen Mannigfaltigkeit des Originalsystems erhält (siehe [Sch99] für eine Vorstellung der hierfür notwendigen Erweiterungen in GAIO).

Eine zweite Alternative zur Berechnung der stark stabilen Mannigfaltigkeit ist, ein solches eindimensionales Objekt durch einfache Integration von einem passenden Anfangspunkt aus zu berechnen. Um einen Orbit der stark stabilen Mannigfaltigkeit des Fixpunkts  $\bar{x} = 0$  zu erhalten, wird das Eigenwertspektrum der Linearisierung berechnet, und man erhält den eindeutigen stark stabilen Eigenwert  $\lambda^{ss}$  mit dem zugehörigen Eigenvektor  $v^{ss}$ . Der Anfangswert für die Integration wird dann in der Umgebung des Fixpunkts  $\bar{x}$  gewählt, und zwar durch eine Verschiebung in Richtung von  $v^{ss}$ :  $x^0 = \bar{x} + \delta \cdot v^{ss}$ . Es ist offensichtlich, dass der Fixpunkt selbst nicht als Anfangswert gewählt werden kann, da er invariant ist. Weitere Analysen zeigen, dass Punkte auf der stabilen Mannigfaltigkeit den Fixpunkt in Vorrwärtszeit nicht in endlicher Zeit erreichen und daher eine Integration in Rückwärtszeit, die zu nahe am Fixpunkt  $\bar{x}$  startet, sehr lange benötigen würde, um die direkte Umgebung des Fixpunkts zu verlassen (siehe [OLT04] für eine ausführliche Untersuchung dieses Effekts). Daher ist es erstrebenswert,  $\delta$  so zu wählen, dass die Trajektorie eine ausreichend große Expansion vom Fixpunkt zeigt, aber immer noch ausreichend nahe an  $\bar{x}$  liegt. Diese Trajektorie kann dann durch eine Integration in Rückwärtszeit mit vorgegebener Dauer bestimmt werden, d. h.  $x(t) : [-t, 0] \mapsto \tilde{\Phi}^{-t}(x)$ , wobei  $\tilde{\Phi}^t(x)$  ein Integrationsverfahren darstellt, das den tatsächlichen Fluss des Systems  $\Phi^t(x)$  approximiert. Abschließend muss der resultierende Orbit durch die Anpassung des Zeitvektors umgekehrt werden, um bezüglich der Zeitparametrierung eine zulässige Lösung des Originalsystems zu erhalten.

Zum einen muss für dieses Verfahren ein sehr exakter Integrator gewählt werden, da die Berechnung der Trajektorie auf einer Langzeitintegration basiert, und außerdem muss der Anfangspunkt sehr sorgfältig und daher vorzugsweise manuell ausgewählt werden. Zum anderen erhält man aber eine Trajektorie, die direkt innerhalb der Optimalsteuerung verwendet werden kann, wohingegen die Approximation der Mannigfaltigkeit mit GAIO eine solche explizite Trajektorie nicht beinhaltet, sondern nur die entsprechende Boxüberdeckung.

### 5.1.4 Modellierung

Zusätzlich zum Doppelpendel auf einem Wagen wird in diesem Kapitel auch das klassische, akademische Beispiel des in einem Gelenk aktuierten Doppelpendels untersucht. Die Modellierung dieses Anwendungsbeispiels folgt dabei grundsätz-

lich den Ansätzen aus Abschnitt 2.3. Damit die Systeme vergleichbar sind, werden auch die entsprechenden mechanischen Parameter für Längen und Massen der Pendelarme übernommen, siehe Abschnitt 2.3.1.

Der Zustandsvektor dieses vereinfachten Systems ist definiert durch  $[q \ \dot{q}] = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2]$ . Die Lagrange-Funktion des Systems kann wiederum durch die Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie beschrieben werden

$$L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} J_1 + a_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 & a_2 l_1 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ a_2 l_1 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & J_2 + a_2^2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} - g \cdot (m_1 a_1 \cos(\varphi_1) + m_2 \cdot (l_1 \cos(\varphi_1) + a_2 \cos(\varphi_2))),$$

und in den Gelenken wird die ebenfalls schon verwendete Dämpfungskraft

$$\mathcal{F}(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = (-d_1 \dot{\varphi}_1 + d_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1), d_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2))^T$$

angenommen. Durch die Anwendung des Lagrange-Formalismus können die Bewegungsgleichungen des Systems in der Form

$$\mathcal{M}(q)\ddot{q} + \mathcal{G}(q, \dot{q}) = \mathcal{F}(q, \dot{q}) \quad (5-3)$$

bestimmt werden, wobei  $q = [\varphi_1 \ \varphi_2]$  den Vektor der Lagekoordinaten und  $\dot{q} = [\dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2]$  den Vektor der Geschwindigkeiten darstellt. Somit ergibt sich die natürliche, also nicht aktivierte Dynamik des Doppelpendels als

$$\begin{pmatrix} J_1 + a_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 & a_2 l_1 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ a_2 l_1 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & J_2 + a_2^2 m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad (5-4)$$

$$\begin{aligned} &+ \begin{pmatrix} -g \sin(\varphi_1)(a_1 m_1 + l_1 m_2) + a_2 l_1 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 \\ -a_2 g m_2 \sin(\varphi_2) - a_2 l_1 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -d_1 \dot{\varphi}_1 + d_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \\ d_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5-5)$$

Um das System steuern zu können, wird zusätzlich ein äußeres Moment  $u_M(t)$  an dem Gelenk, an dem das Doppelpendel aufgehängt ist, eingeführt. Es ergibt sich ein einfacher unteraktuiertes System. Die Euler-Lagrange Gleichungen sind weiterhin von der Form (5-3), wobei der Kraftvektor jetzt zusätzlich von  $u_M(t)$  abhängt

$$\mathcal{F}(q, \dot{q}, u_M) = \begin{pmatrix} -d_1 \dot{\varphi}_1 + d_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \\ d_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_M \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5-6)$$

Zusammen mit den bekannten Modellen des Doppelpendels auf einem Wagen ist das vorgestellte neue Modell in Bild 5-4 dargestellt. Im Folgenden werden bei

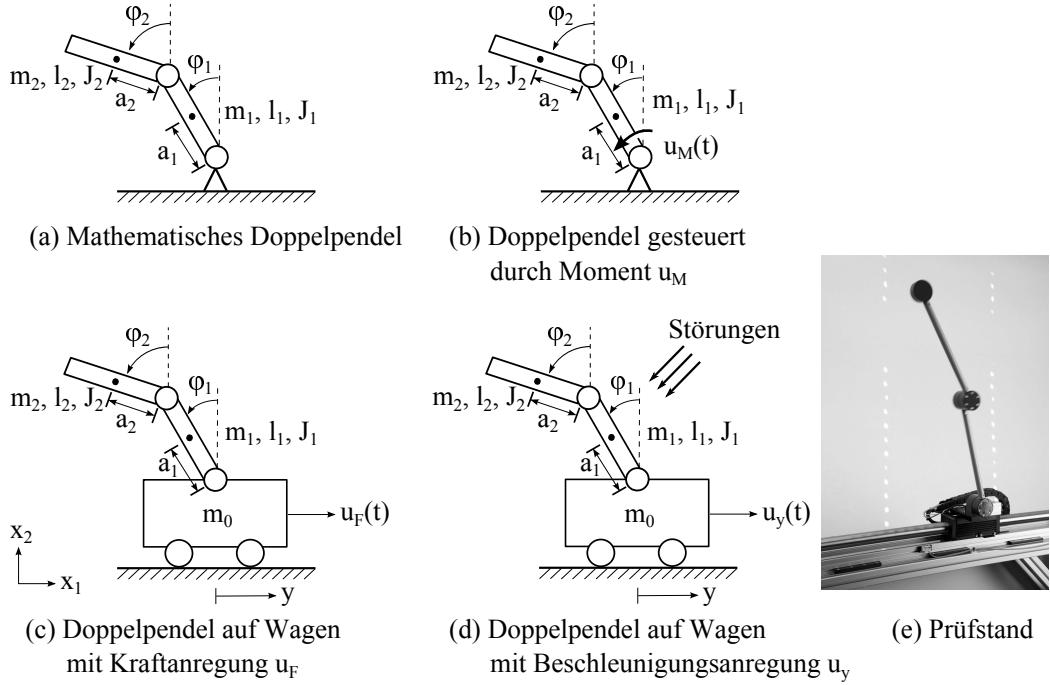


Bild 5-4: Modelle des Pendels mit verschiedenen Eingangsgrößen und Prüfstand

unterschiedlichen Fragestellungen auch unterschiedliche Modelle verwendet. So werden für Modell (a) die (stark) stabilen Mannigfaltigkeiten berechnet und an Modell (b) die Methode der optimalen Steuerung auf Mannigfaltigkeiten zum ersten Mal getestet. Anschließend wird das Doppelpendel auf einem Wagen untersucht, um die Anwendbarkeit des Ansatzes am realen Prüfstand (e) zu zeigen. Dazu werden, wie aus Kapitel 2 bekannt, das Modell mit Kraftanregung (c) für die Berechnung optimaler Trajektorien mit DMOC und das Modell mit Beschleunigungsanregung (d) für die Umsetzung im Simulationsmodell und den Test der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung verwendet.

### 5.1.5 Berechnung der (in)stabilen Mannigfaltigkeiten

Der erste Schritt zur Umsetzung der optimalen Steuerung auf Mannigfaltigkeiten ist die Berechnung der (in)stabilen Mannigfaltigkeiten für die obere Ruhelage des Pendels. Hierbei wird zunächst das einfache Modell des Pendels (a) ohne Wagen betrachtet. Nach dem Satz über die stabile Mannigfaltigkeit 5.5 wird deren Dimension durch die Dimension der Eigenräume der linearisierten Systemmatrix in der Ruhelage bestimmt. Die Eigenwerte dieser Matrix für die obere Ruhelage lauten

$$\lambda_1 = -8.0336, \quad \lambda_2 = -4.342, \quad \lambda_3 = 4.3183, \quad \lambda_4 = 7.6202,$$

und somit existieren ein zweidimensionaler stabiler und ein zweidimensionaler instabiler Eigenraum. Außerdem liegt ein hyperbolischer Fixpunkt vor, und Satz 5.5 kann angewendet werden. Für die obere Ruhelage existieren daher eine zweidimensionale instabile und eine zweidimensionale stabile Mannigfaltigkeit. Die weitere Analyse zeigt, dass die Ruhelagen mit jeweils einem nach oben und einem nach unten zeigenden Pendelarm eine dreidimensionale stabile und eine eindimensionale instabile Mannigfaltigkeit besitzen. Da es sich um ein gedämpftes System handelt, hat die untere Ruhelage eine vierdimensionale stabile Mannigfaltigkeit.

Für die Berechnung der zweidimensionalen stabilen Mannigfaltigkeit der oberen Ruhelage wird der Fortsetzungsalgorithmus 5.11 von GAIO verwendet. Da der Fixpunkt in  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$  bekannt ist, muss nur Teil (ii) des Fortsetzungsalgorithmus angewendet werden. Hierbei wird eine negative Integrationszeit verwendet, da die stark stabile Mannigfaltigkeit approximiert werden soll.

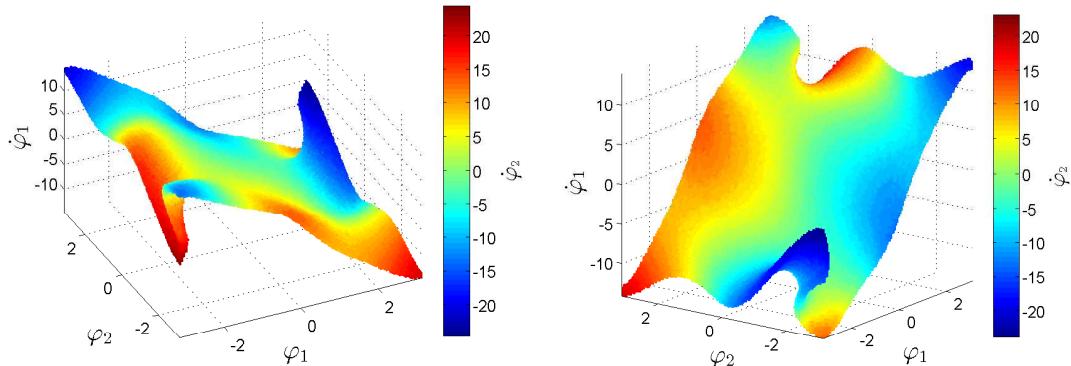


Bild 5-5: Stabile (links) und instabile (rechts) Mannigfaltigkeit der oberen Ruhelage

Es ergibt sich eine Boxüberdeckung der stabilen Mannigfaltigkeit, wie sie in Bild 5-5 auf der linken Seite dargestellt ist. Hier wird das zweidimensionale Objekt als eine Projektion in den dreidimensionalen  $(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1)$ -Raum dargestellt, und die jeweiligen Werte der vierten Koordinate  $\dot{\varphi}_2$  werden durch die Farben codiert. Die in diesem Bild sichtbaren roten und blauen Krater entsprechen Bereichen mit hoher Geschwindigkeit von beiden Pendelarmen. Auf der rechten Seite ist zusätzlich die instabile Mannigfaltigkeit der oberen Ruhelage dargestellt. Sie steht im Fixpunkt orthogonal auf der stabilen Mannigfaltigkeit.

Im nächsten Schritt kann durch die Anwendung des Fortsetzungsalgorithmus von GAIO auf das transformierte System die stark stabile Mannigfaltigkeit berechnet werden. Die stark stabile Mannigfaltigkeit ist die schwarze Menge in Bild 5-6. Auf der linken Seite wird deutlich, dass die stark stabile Mannigfaltigkeit tatsächlich

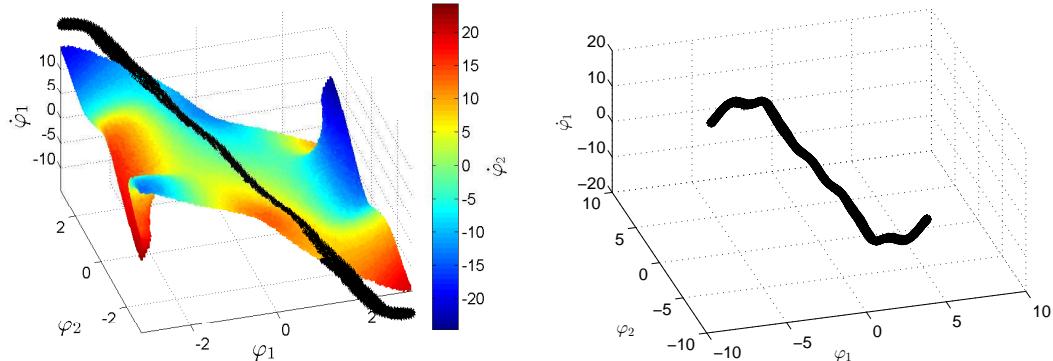


Bild 5-6: Stark stabile Mannigfaltigkeit der oberen Ruhelage

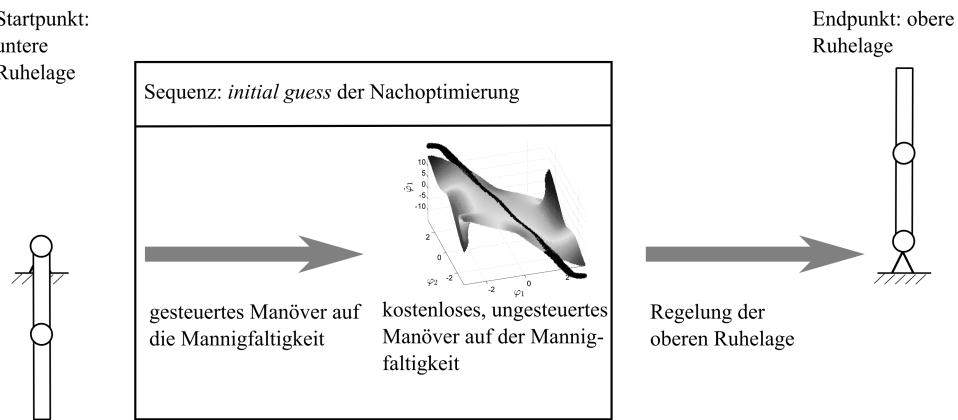
innerhalb der stabilen Mannigfaltigkeit liegt. Auf der rechten Seite ist die stark stabile Mannigfaltigkeit erneut dargestellt, wobei hier eine größere Startbox für die Berechnung gewählt wurde, sodass die Struktur dieses Objekts deutlicher wird.

In der weiteren Anwendung wird als stark stabile Mannigfaltigkeit eine Trajektorie verwendet, die durch Integration mit einer geringen positiven Anfangsgeschwindigkeit in Richtung des stabilen Eigenraums berechnet wurde. Daher folgt diese Trajektorie der stark stabilen Mannigfaltigkeit vom Fixpunkt aus nach links oben. Diese Idee der Berechnung wurde auch schon in Abschnitt 5.1.3 vorgestellt und ist z.B. auch in Bild 5-12 zu sehen. Mit Hilfe der durch GAIO berechneten stark stabilen Mannigfaltigkeit konnte die Genauigkeit dieser durch Integration berechneten Trajektorie evaluiert werden.

## 5.2 Steuerungsstrategie auf (in)stabilen Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden wird ein neuartiger Ansatz zur Berechnung von Optimalsteuerungsmanövern vorgestellt, der die natürliche Dynamik eines mechanischen Systems ausnutzt und damit energieoptimale Trajektorien bestimmt. Dabei hängen die Lösungen stark von der Manöverzeit ab, sodass sie im Folgenden auch bezüglich der Dauer als einem weiteren Ziel verglichen werden. Dieser Ansatz kann z.B. für die Berechnung eines Aufschwungs des Doppelpendels verwendet werden.

Für die Berechnung einer optimalen Steuerung besteht der hier gezeigte Ansatz darin, zum einen ungesteuerte Trajektorien auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit zu generieren und zum anderen diese mit kurzen gesteuerten Manövern (berechnet mit DMO) zu einer Sequenz zu verbinden und dadurch die Randbedingungen des Optimalsteuerungsproblems zu erfüllen. In Bild 5-7 wird dargestellt, wie durch



*Bild 5-7: Schematische Darstellung der Steuerungsstrategie für einen energieeffizienten Aufschwung des Doppelpendels durch die Verwendung inhärenter Eigenschaften der natürlichen Dynamik des Systems*

diese Strategie Sequenzen für die Lösung des Optimalsteuerungsproblems erzeugt werden können. Eine solche Sequenz ist zum einen eine zulässige Lösung des Optimalsteuerungsproblems, da sie die geforderten Nebenbedingungen erfüllt und zum anderen auch schon bezüglich der Zielfunktionen Steueraufwand und Dauer des Manövers lokal optimal. Eine anschließende Nachoptimierung, die mit der entstandenen Sequenz als *initial guess* durchgeführt wird, ergibt dann bezüglich des Mehrzieloptimierungsproblems noch verbesserte Ergebnisse. Für die Stabilisierung in der oberen Ruhelage wird eine Regelung durch einen LQR-Ansatz verwendet, der schon aus Kapitel 2 bekannt ist.

Ergebnisse dieser Arbeit sind auch in [FTOB<sup>+</sup>12] dokumentiert.

### 5.2.1 Grundidee der Methodik

Die grundsätzliche Steuerstrategie besteht aus den folgenden Schritten:

- (i) Zunächst müssen die entsprechenden Ruhelagen als Anfangs- und Endpunkte für das Optimalsteuerungsmanöver identifiziert werden.
- (ii) Für den Endpunkt wird anschließend die stabile Mannigfaltigkeit berechnet. Wenn eine mehrdimensionale Mannigfaltigkeit vorliegt, kann dann die gewünschte Trajektorie auf der Mannigfaltigkeit ausgewählt werden. Im Folgenden wird hierfür die stark stabile Mannigfaltigkeit ausgewählt.
- (iii) Ein Teilproblem ist, ein Optimalsteuerungsmanöver vom Startpunkt zur Trajektorie auf der Mannigfaltigkeit numerisch zu berechnen. Diese Manöver werden als Sequenzen mit den Trajektorien auf der Mannigfaltigkeit zusammengesetzt und sind damit zulässige Lösungen des ursprünglichen

Optimalsteuerungsproblems, da sie die Randbedingungen und diskreten Bewegungsgleichungen erfüllen.

- (iv) Im letzten Schritt werden die Sequenzen als *initial guess* für eine Nachoptimierung des ursprünglichen Optimalsteuerungsproblems verwendet. Da die Berechnung von Optimalsteuerungsmanövern im Allgemeinen nur lokal optimale Lösungen erlaubt, ist ein *initial guess* der durch das Ausnutzen der natürlichen Dynamik des System entsteht, hilfreich um eine (globale) kosten- und zeitsparende Lösung zu finden.

An dieser Stelle soll noch kurz darauf eingegangen werden, dass für die Bestimmung der optimalen Steuerung wieder die DMOC Methode verwendet wird, wie sie aus Kapitel 3 bekannt ist. Dabei wird DMOC sowohl für die Berechnung der Manöver von der unteren Ruhelage zur stark stabilen Mannigfaltigkeit als auch für die Nachoptimierung der zusammengesetzten Sequenzen verwendet. Das entstehende nichtlineare Programm wird wiederum mit SQP-Verfahren aus der NAG-Bibliothek (siehe [Nat13]) gelöst.

Zunächst werden Schritt (i) und (ii) des Sequenzansatzes genauer beschrieben: Für ein dynamisches System, das in eine instabile Ruhelage gesteuert werden soll, hat die Wahl der stabilen Mannigfaltigkeit als ein Teil des Optimalsteuerungsmanövers dynamische Vorteile. Dabei wird die stabile Mannigfaltigkeit ausgewählt, da sich das System auf ihr ohne Steuereingriff, also kostenlos, in die gewünschte Ruhelage bewegt. Die stabile Mannigfaltigkeit einer Ruhelage kann im Allgemeinen ein mehrdimensionales Objekt sein, sodass darauf prinzipiell viele verschiedene Manöver zur Ruhelage denkbar sind. Da aber eines der vorliegenden Ziele eine möglichst kurze Manöverzeit ist, ist die stark stabile Mannigfaltigkeit ein guter Kandidat für eine Trajektorie auf der stabilen Mannigfaltigkeit, denn sie beschreibt die Richtung mit der stärksten Kontraktion zur Ruhelage. Man erhält also eine Trajektorie, die einem guten Kompromiss zwischen einer schnellen, aber immer noch kostenlosen Bewegung entspricht. Wie auch schon in Abschnitt 5.1.3 beschrieben, wird eine feste Zeit auf der Mannigfaltigkeit  $T_{\text{mnf}}$  gewählt und der zugehörige Orbit auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit berechnet:  $x_{\text{mnf}} : [0, T_{\text{mnf}}] \mapsto x_{\text{mnf}}(t)$ , wobei  $x_{\text{mnf}}(T_{\text{mnf}}) \in U(x^f)$  in der Nähe des Endpunkts liegt.

Anschließend können in Schritt (iii) verschiedene kurze Manöver, die für die Verbindung des gewählten Startpunkts mit der stark stabilen Mannigfaltigkeit notwendig sind, berechnet werden. Dabei können unterschiedliche Sequenzen durch die Variation der folgenden Entwurfsparameter erzielt werden (siehe auch Bild 5-8)

- der Umschaltpunkt, d.h. der Zustand auf dem Orbit der Mannigfaltigkeit, an dem das gesteuerte Manöver endet und die Lösungssequenz umschaltet und der ungesteuerten Trajektorie auf der Mannigfaltigkeit folgt,

- die Zeit, die auf dem Orbit der Mannigfaltigkeit verbracht wird,
- die Gesamtzeit des gesteuerten Manövers, das auf den Orbit der Mannigfaltigkeit führt.

Durch die Definition des Orbits der Mannigfaltigkeit  $x_{\text{mnf}}$  wird deutlich, dass der erste und zweite Parameter korrelieren, d. h. mit der Wahl eines Umschaltpunktes auf dem Orbit der Mannigfaltigkeit ist automatisch definiert, wie lange die Bewegung bis zum Endpunkt dauert, siehe auch Bild 5-8. Deshalb wird nun eine Zeitdiskretisierung eines ausgewählten Teils des Orbits der stark stabilen Mannigfaltigkeit  $[T_{\text{mnf}}^0, T_{\text{mnf}}^f]$  mit Schrittweite  $\Delta\tau$  wie folgt definiert  $\Gamma := \{T_{\text{mnf}}^0 + \eta \cdot \Delta\tau \mid \eta = 1, \dots, L\}$ , mit  $T_{\text{mnf}}^0 + L \cdot \Delta\tau = T_{\text{mnf}}^f$ . Dabei müssen  $T_{\text{mnf}}^0$ ,  $\Delta\tau$  und  $L$  für die konkrete Anwendung geeignet gewählt werden, um eine passende Menge an Umschaltpunkten zu generieren. Diese Umschaltpunkte werden mit  $m_1, \dots, m_L$  bezeichnet (blaue Punkte in Bild 5-8), und es gilt  $m_i = x_{\text{mnf}}(T_{\text{mnf}}^0 + i \cdot \Delta\tau)$  für  $i = 1, \dots, L$ . Zusätzlich wird für die Endzeit des gesteuerten Manövers ein Zeitgitter durch  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_K\}$  für  $K \in \mathbb{N}$ ,  $T_j \in \mathbb{R}^+$  und für  $j = 1, \dots, K$  definiert. Dann kann für jeden Umschaltpunkt  $m_i$ ,  $i \in \{1, \dots, L\}$  ein Optimalsteuerungsproblem für das Manöver zur stark stabilen Mannigfaltigkeit mit der Zeit  $T_j \in \mathcal{T}$  für  $j \in \{1, \dots, K\}$  aufgestellt werden, und dies führt zu unterschiedlichen optimalen Lösungen jeweils mit einer festen Endzeit  $T_j$  und Kosten  $c_j$ , die in Bild 5-8 als grüne Linien dargestellt werden. Zusammenfassend können durch die Verbindung dieser unterschiedlichen Manöver  $L \cdot K$  Sequenzen erzeugt werden, die alle als Ausgangspunkt für eine Nachoptimierung genutzt werden. Da das ungesteuerte System autonom ist, d. h. nicht explizit von der Zeit abhängt, kann die Teilsequenz auf dem Orbit der Mannigfaltigkeit bezüglich der Zeit transformiert werden, so dass eine Lösung für das gesamte Steuerungsproblem generiert werden kann. Die  $(i, j)$ -Lösungssequenz ist dann gegeben durch

$$(x_{i,j}, u_{i,j}) : [0, T_j + T_{\text{mnf}} - (T_{\text{mnf}}^0 + i \cdot \Delta\tau)] \rightarrow \begin{cases} (x^*(t), u^*(t)) & \text{für } t \in [0, T_j], \\ (x_{\text{mnf}}(t + T_{\text{mnf}}^0 + i \cdot \Delta\tau - T_j), 0) & \text{für } t \in [T_j, T_j + T_{\text{mnf}} - (T_{\text{mnf}}^0 + i \cdot \Delta\tau)], \end{cases}$$

wobei  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  die bezüglich der Energie optimale Lösung des Optimalsteuerungsproblems vom Startpunkt  $x^0$  zum Endpunkt  $m_i$  in der Zeit  $T_j$  darstellt. Man beachte, dass das Zeitintervall der zusammengesetzten Sequenz nicht mit demjenigen des Orbits der Mannigfaltigkeit  $x_{\text{mnf}}$  übereinstimmt. Da die Konfigurationen und Geschwindigkeiten am Übergangspunkt des Manövers auf die Mannigfaltigkeit übereinstimmen, sind alle so bestimmten Sequenzen stetig.

In Schritt (iv) kann dann die Sequenz als *initial guess* für eine Nachoptimierung verwendet werden. Nur durch diese zusätzliche Optimierung kann die Optimalität des Manövers über die Mannigfaltigkeit sichergestellt werden, da nicht davon

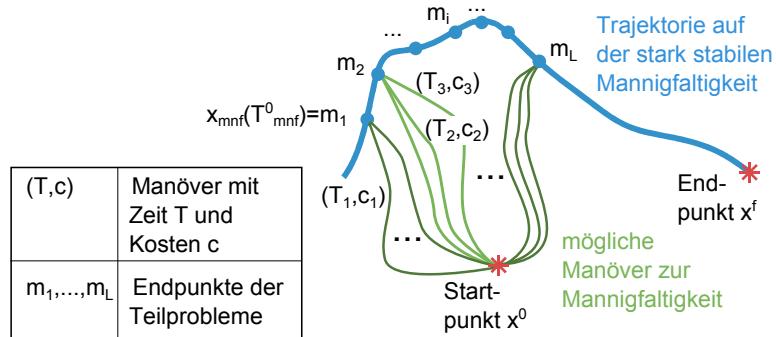


Bild 5-8: Schematische Darstellung von verschiedenen Sequenzen bestehend aus gesteuerten Manövern (grün) und Trajektorien auf dem Orbit der stark stabilen Mannigfaltigkeit (blau). Z.B. kann ein Manöver mit Dauer  $T_1$  und Kosten  $c_1$  zum Umschaltpunkt  $m_1$  zusammengesetzt werden mit der ungesteuerten Trajektorie von  $m_1$  zum Endpunkt  $x^f$ . Eine Alternative ist ein Manöver mit  $(T_2, c_2)$  oder auch mit  $(T_3, c_3)$  zum dazwischenliegenden Punkt  $m_2$  zusammen mit einer Trajektorie auf dem Orbit der Mannigfaltigkeit, der um  $\Delta\tau$  kürzer ist.

ausgegangen werden kann, dass die zwei optimalen Teiltrajektorien ein optimales Ergebnis für das gesamte Optimalsteuerungsproblem ergeben. Dies liegt daran, dass das System gezwungen ist, den Umschaltpunkt  $m_i$  zu durchlaufen. Durch dieses Vorgehen kann nicht gewährleistet werden, dass es keine Trajektorien mit besserem Zielfunktionswert gibt, die diesen Punkt nicht beinhalten. In der Nachoptimierung wird der Steueraufwand als Zielfunktion gewählt, und die Gesamtzeit der  $(i, j)$ -Sequenz  $T_{ges} = T_j + T_{mnf} - (T_{mnf}^0 + i \cdot \Delta\tau)$  wird als konstant angenommen.

Mit diesem Ansatz werden viele optimale Lösungen für den Aufschwung des Pendels über die stark stabile Mannigfaltigkeit bestimmt. Ein Vergleich der Ergebnisse ist durch die Untersuchung der Pareto-Optimalität möglich. Dabei werden wieder die Zielfunktionen Dauer des Manövers und Steueraufwand gewählt. Im Folgenden wird der hier vorgestellte Ansatz durch Tests für den Aufschwung von unterschiedlichen Doppelpendelsystemen evaluiert.

### 5.3 Anwendung der optimalen Steuerung auf Mannigfaltigkeiten am Doppelpendel

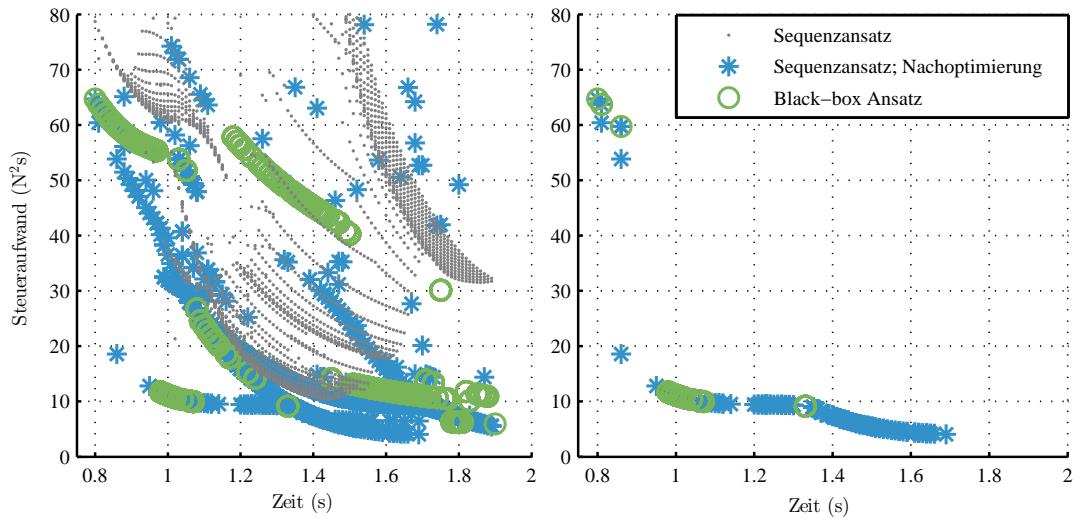
Das erste Anwendungsbeispiel ist das momentengesteuerte Doppelpendel (siehe Bild 5-4 (b)), dem das Modell des mathematischen Pendels zu Grunde liegt. Für die Ruhelagen dieses unaktuierten Systems wurden die in Abschnitt 5.1.5 vorgestellten Mannigfaltigkeiten berechnet, und diese werden jetzt in einer Sequenz zur

Optimalsteuerung verwendet. Die stabile Mannigfaltigkeit der oberen Ruhelage ist ein zweidimensionales Objekt, und die stark stabile Mannigfaltigkeit kann als eindimensionale Trajektorie identifiziert werden, die die stärkste Kontraktion auf der stabilen Mannigfaltigkeit besitzt und deswegen für die weiteren Berechnungen verwendet wird. In Abschnitt 5.3.1 werden die Ergebnisse für dieses momentengesteuerte Doppelpendel vorgestellt. Aber auch für das Doppelpendel auf dem Wagen kann die zuvor berechnete stark stabile Mannigfaltigkeit für die Berechnung von optimalen Trajektorien mit dem Sequenzansatz verwendet werden. Dies wird in Abschnitt 5.3.2 genauer diskutiert. In Abschnitt 5.3.3 werden als Fazit die numerischen Eigenschaften der Rechnungen analysiert.

### 5.3.1 Anwendung am momentengesteuerten Doppelpendel

Durch eine Analyse der Lösungen des Sequenzansatzes für das momentengesteuerte Doppelpendel wird im Folgenden gezeigt, dass dieser neuartige Ansatz Vorteile bezüglich der Zielfunktionen Zeit und Steueraufwand besitzt. Dazu werden die Lösungen des Sequenzansatzes mit Lösungen eines sogenannten „black-box“-Ansatzes, bei dem ein linear interpolierter *initial guess* verwendet wird, verglichen. Ein solcher *initial guess* wurde auch schon in Kapitel 4 für die Berechnungen verwendet.

Ein Vergleich der Zielfunktionen für verschiedene Lösungen des Optimalsteuerungsproblems mit den zwei unterschiedlichen Ansätzen ist in Bild 5-9 zu sehen. Die grauen Punkte gehören dabei zu der entstehenden Sequenz, wobei die Gesamtzeit aus der Summe der Zeit des Manövers zur Mannigfaltigkeit und der Zeit auf dieser besteht und die Kosten nur aus dem ersten Teil stammen, da die Bewegung auf der Mannigfaltigkeit kostenlos ist. Die blauen Sterne stehen für Trajektorien, die mit einer Nachoptimierung der Sequenz berechnet wurden, und die grünen Kreise für Lösungen basierend auf dem black-box Ansatz. Es wird davon ausgegangen, dass ein solcher black-box Ansatz immer dann für die Optimierung genutzt wird, wenn kein anderes spezielles Systemwissen bekannt ist. Auf der linken Seite von Bild 5-9 wird deutlich, dass die Kosten der unterschiedlichen Sequenzen (graue Punkte) durch eine Nachoptimierung (blaue Sterne) noch deutlich verbessert werden können. Dies liegt daran, dass die Nachoptimierung die ursprüngliche Sequenz an der Übergangsstelle zur Mannigfaltigkeit glättet und dadurch in fast allen Berechnungen die Kosten reduziert. Außerdem wird deutlich, dass sehr viele lokale optimale Lösungen berechnet wurden, d. h. der Optimierungsalgorithmus konvergiert in ein Optimum, das nicht global optimal ist. Wie auch schon in vorhergehenden Ergebnissen zur Mehrzieloptimierung des Aufschwungs am Doppelpendel ergeben sich wieder unterschiedliche Zweige der Zielfunktionswerte, die jeweils unterschiedliche Arten des Aufschwungs repräsentieren (vgl. Kapitel 4). Sogar für eine bestimmte feste Endzeit des Manövers existieren meh-

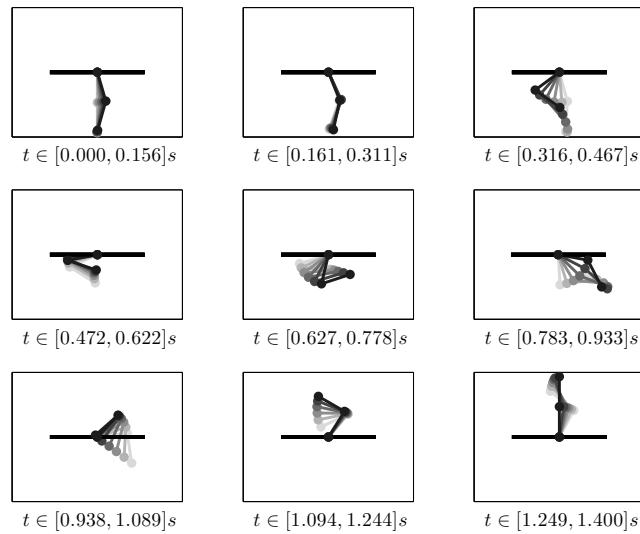


*Bild 5-9: Zielfunktionswerte für den Aufschwung des momentengesteuerten Doppelpendels: Für  $T = [0.8, 1.9] \text{ s}$  werden black-box Optimierungen durchgeführt (grüne Kreise), im Vergleich dazu werden auch Lösungen aus den zwei Sequenzteilen (graue Punkte) und aus der Nachoptimierung der Sequenz (blaue Sterne) dargestellt; rechts: nicht-dominante Lösungen*

rere lokal optimale Lösungen mit unterschiedlichen Kosten, was daran liegt, dass unterschiedliche Sequenzen mit gleicher Endzeit erzeugt werden, die aber zu verschiedenen Ergebnissen führen (siehe auch Bild 5-8). Neben diesen Zweigen gibt es auch verteilte Lösungen in der oberen rechten Ecke. Diese Punkte gehören zu Lösungen, die die Mannigfaltigkeit verlassen haben und ein unrealistisches Verhalten zeigen, sodass sie nicht weiter beachtet werden müssen. Nichtsdestotrotz kann, aufgrund der Konstruktion der Nachoptimierung, im Allgemeinen nicht sichergestellt werden, dass die Lösung in der Nähe Mannigfaltigkeit bleibt, wie es z.B. in Bild 5-12 gezeigt wird. Tatsächlich weichen manche Lösungen klar von der Mannigfaltigkeit ab. Dieser Effekt wird in Abschnitt 5.3.2 für das Doppelpendel mit Wagen genauer analysiert.

Auf der rechten Seite von Bild 5-9 sind nur die nicht-dominanten Punkte der gesamten Menge an Lösungen dargestellt. Diese Punkte sind Kandidaten für paretooptimale Lösungen. Sie bilden einen optimalen Kompromiss zwischen den zwei untersuchten Zielfunktionen. Insgesamt wird deutlich, dass es große Bereiche gibt, in denen der Sequenzansatz die besten Lösungen ergibt. Hauptsächlich in einem kleineren Bereich bei einer Gesamtzeit von  $T_{ges} = 0.98 \text{ s}, \dots, 1.07 \text{ s}$  ist der black-box Ansatz genauso gut, aber an keiner Stelle besser als der Sequenzansatz (in diesem Fall sind die Lösungstrajektorien von beiden Berechnungen gleich).

Anhand von diesen Ergebnissen lässt sich feststellen, dass der Sequenzansatz, der die natürliche Dynamik des Systems ausnutzt, ein gut geeignetes Vorgehen ist, um paretooptimale Lösungen zu finden.



*Bild 5-10: Zeit-diskrete Momentaufnahmen für den Aufschwung des Doppelpendels; Nachoptimierung des Sequenzansatzes; ab  $t = 0.755\text{ s}$  befindet sich das Manöver auf der Mannigfaltigkeit, vgl. auch Bild 5-12*

Bei einer genaueren Untersuchung von repräsentativen Lösungen, die durch die zwei Ansätze entstanden sind und gleiche Endzeiten aber unterschiedliche Kosten haben, wird deutlich, dass die Lösungen bedeutende strukturelle Unterschiede besitzen. Dazu werden in den Bildern 5-10 und 5-11 die Bewegungen durch eine Reihe von Momentaufnahmen verdeutlicht. In Bild 5-10 wird eine nachoptimierte Lösung des Sequenzansatzes und in Bild 5-11 eine Lösung des black-box Ansatzes gezeigt. Das Beispielmanöver, das entlang der stark stabilen Mannigfaltigkeit verläuft (Bild 5-10) hat eine Dauer von  $1.4\text{ s}$  und dabei einen Steueraufwand von  $12.142\text{ (Nm)}^2\text{s}$ . Das Doppelpendel holt zunächst Schwung und bewegt sich anschließend mit der passenden Geschwindigkeit in die obere Ruhelage. Dabei stellt der zweite Teil dieses Manövers die Bewegung auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit dar. Es wird nun ein Ergebnis der black-box Optimierung zum Vergleich betrachtet (Bild 5-11). Die Dauer dieses Manövers ist ebenfalls  $1.4\text{ s}$ , aber der Steueraufwand beträgt  $45.217\text{ (Nm)}^2\text{s}$ , was 3.7 mal höher ist als der Steueraufwand des anderen Manövers. Bei dieser Bewegung wird das Doppelpendel schon etwa in der Mitte des gesamten Manövers in die obere Halbebene bewegt, und zwar durch einen hohen Steueraufwand. Diese Bewegung führt auch insgesamt zu

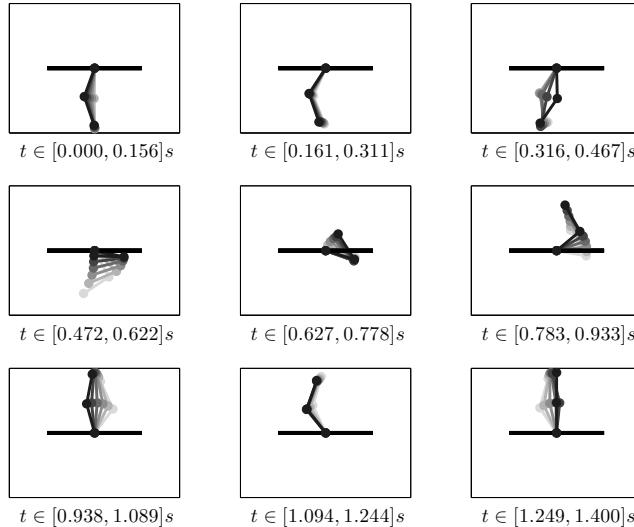


Bild 5-11: Zeit-diskrete Momentaufnahmen für den Aufschwung des Doppelpendels; berechnet mit dem linear interpolierten initial guess (black-box Optimierung)

den hohen Kosten des Manövers. Am Ende muss das Pendel abgebremst werden, um die obere Ruhelage zu erreichen.

Die beschriebenen Trajektorien können auch in einer dreidimensionalen Projektion des Zustandsraums analysiert werden. Dies wird in Bild 5-12 dargestellt, in dem die Zustände  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\dot{\varphi}_1$  gezeigt werden. Die blaue Linie ist der Orbit der stark stabilen Mannigfaltigkeit der oberen Ruhelage. Es wird eine Sequenz ausgewählt, die aus einem Manöver zur stark stabilen Mannigfaltigkeit (dargestellt durch die grüne Linie) und dem darauf folgenden Abschnitt auf der Mannigfaltigkeit besteht. Die gelbe Linie stellt dann die nachoptimierte Trajektorie dar, die als *initial guess* die zwei Abschnitte der Sequenz erhalten hat. Es wird deutlich, dass diese nachoptimierte Trajektorie nicht direkt auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit liegt, sondern sich um diese herum schlängelt. Anhand der für die Steuerung berechneten Trajektorie lässt sich schließen, dass die Trajektorie der Nachoptimierung nicht genau der kostenlosen Bewegung auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit folgt, sondern einem Manöver mit geringen Kosten, welches nahe daran liegt. Eine weitere Analyse dieses Phänomens zeigt, dass die Lösung für die Steuerung des Pendels zur Mannigfaltigkeit am letzten Diskretisierungspunkt auf null springt, um das nicht aktivierte Systemverhalten auf der Mannigfaltigkeit zu erreichen. Durch die Nachoptimierung wird dieser Sprung, der auch durch einen Knick der Trajektorie im Zustandsraum deutlich wird, geglättet. Als Fol-

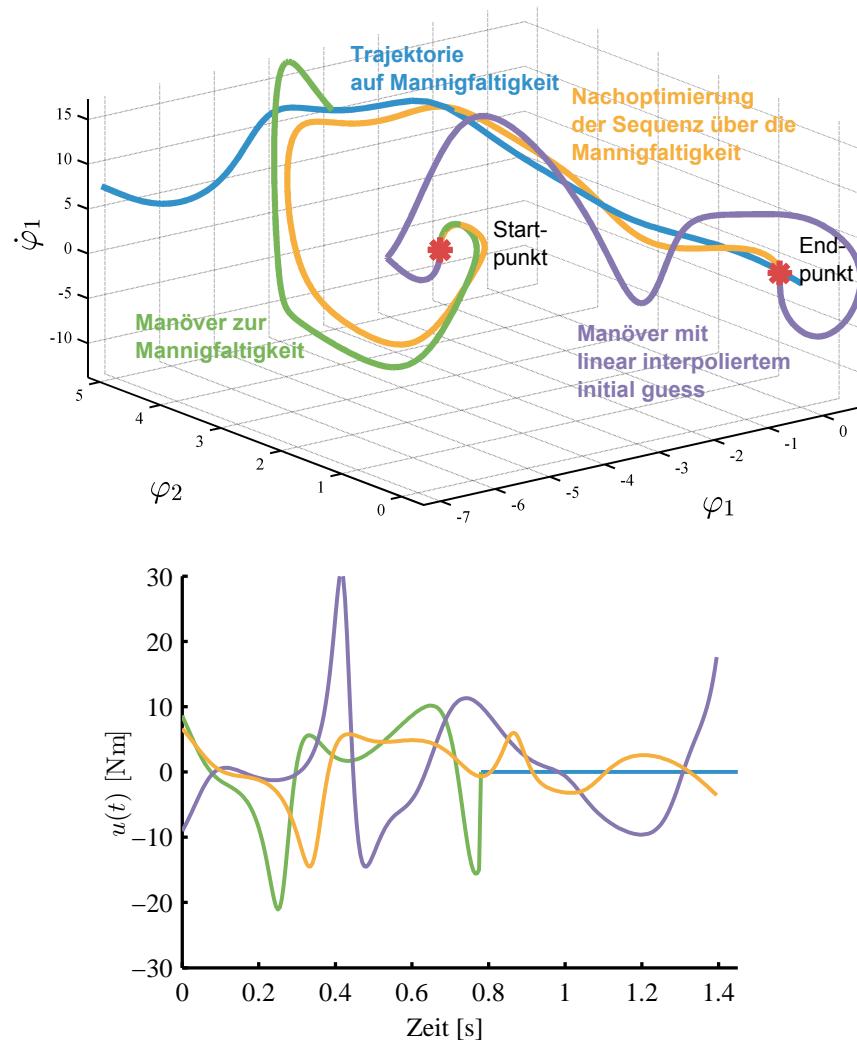


Bild 5-12: Oben: Unterschiedliche Trajektorien im Zustandsraum: Orbit der stark stabilen Mannigfaltigkeit (blau), Manöver zur Mannigfaltigkeit (grün), Nachoptimierung der Sequenz (gelb), Manöver mit linear interpoliertem initial guess (lila); unten: zugehörige Steuerungen  $u(t)$  jeweils in der gleichen Farbe gekennzeichnet

ge davon kann der nicht exakte Verlauf der nachoptimierten Lösung entlang der stark stabilen Mannigfaltigkeit erklärt werden. Diese Lösung besitzt in Steuerung und Verlauf der Zustandsgrößen keine Sprünge bzw. Knicke. Die lilafarbene Linie ist die Lösung, die auf der black-box Optimierung basiert und es ist ersichtlich, dass diese einen vollständig anderen Pfad zur oberen Ruhelage verfolgt.

### 5.3.2 Anwendung am Doppelpendel mit Wagen

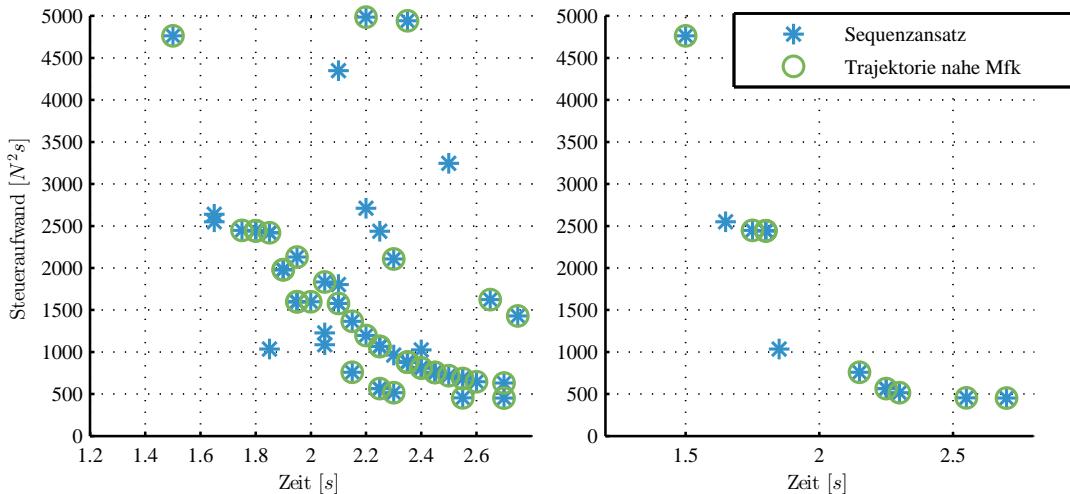
In diesem Abschnitt wird der Sequenzansatz auf das Doppelpendel auf einem Wagen erweitert. Dabei wird die strukturelle Ähnlichkeit der Pendelmodelle (siehe Bild 5-4) ausgenutzt, um die (stark) stabile Mannigfaltigkeit wiederzuverwenden. Dies ist möglich, da die Modelle (b) und (c) genau dann übereinstimmen, wenn die Systeme nicht aktuiert sind, d.h wenn das Moment in Modell (b) gleich Null ist und der Wagen in Modell (c) still steht. So erhält man erneut die zwei unterschiedlichen Teile des Sequenzansatzes. Die schon vorhandene und getestete Strategie aus Abschnitt 5.2.1 und 5.3.1 kann beibehalten werden, um optimale Trajektorien für den Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen zu berechnen. Der Sequenzansatz kann nun für dieses Anwendungsbeispiel wie folgt formuliert werden:

- Im ersten Schritt wird ein optimales Steuerungsmanöver für den Wagen berechnet (mit  $y^f = 0, \dot{y}^f = 0$ ), um das Pendel auf einen gewünschten Punkt auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit zu befördern.
- Anschließend steht der Wagen still, und das Pendel bewegt sich auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit in Richtung der oberen Ruhelage.
- Schließlich kann die Sequenz für eine Nachoptimierung des Originalproblems für Modell (c) in Bild 5-4 verwendet werden.

Für das Optimalsteuerungsproblem des Doppelpendels auf einem Wagen werden als Startpunkt die untere Ruhelage  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0, y^0, \dot{\varphi}_1^0, \dot{\varphi}_2^0, \dot{y}^0) = (-\pi, \pi, 0, 0, 0, 0)$  und als Endpunkt die obere Ruhelage  $(\varphi_1^f, \varphi_2^f, y^f, \dot{\varphi}_1^f, \dot{\varphi}_2^f, \dot{y}^f) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$  gewählt. Dabei sind die Ruhelagen im Zustandsraum  $2\pi$ -periodisch und damit nicht eindeutig. Die Wahl einer bestimmten Darstellung beeinflusst die Lösung für den Aufschwung, denn durch die Wahl von festen Start- und Endpunkten für die Bewegung wird die Richtung, in die sich die Pendelarme in die obere Ruhelage bewegen, vorgegeben. Der Grund dafür, dass  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0) = (-\pi, \pi)$  als Darstellung der unteren Ruhelage für den Startpunkt gewählt wird, liegt darin, dass dieser im Zustandsraum am nächsten zur stark stabilen Mannigfaltigkeit liegt. Weitere numerische Tests, die mit anderen Darstellungen der unteren Ruhelage durchgeführt worden sind, zeigten, dass dies eine sinnvolle Wahl ist.

Auf Grund des zusätzlichen Freiheitsgrades des Systems ist das gesamte Optimalsteuerungsproblem für das Doppelpendel auf einem Wagen komplexer als das

aus Abschnitt 5.3.1. Im Vergleich zur Implementierung von Modell (b) existieren mehr Optimierungsvariablen, was im Allgemeinen zu einer längeren Rechenzeit und zu einer geringeren Anzahl an konvergierten Lösungen führt.



*Bild 5-13: Zielfunktionswerte für den Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen mit dem Sequenzansatz (blaue Sterne); Trajektorien, die nach der Nachoptimierung tatsächlich nahe der Mannigfaltigkeit verlaufen sind mit grünen Kreisen gekennzeichnet; rechts: nicht-dominante Punkte*

Bei einem ersten Test wird eine Sequenz betrachtet, die aus einem Manöver zum Orbit der Mannigfaltigkeit mit einer Zeit von  $1.55\text{ s}$  und einem zweiten Stück auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit von  $0.85\text{ s}$  besteht. Es ergibt sich eine Gesamtzeit von  $T_{ges} = 2.4\text{ s}$ . Diese Lösung wird später auch in Abschnitt 5.4 als nominale Trajektorie für die Umsetzung am Prüfstand gewählt. Die Trajektorie, die durch die Nachoptimierung bestimmt wurde, liegt wiederum nicht exakt auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit und dies ist ein analoges Ergebnis zu der Lösungstrajektorie aus dem Anwendungsbeispiel in Abschnitt 5.3.1. Die leichte Abweichung von der stark stabilen Mannigfaltigkeit entspricht einer geringen korrigierenden Bewegung des Wagens in dem zweiten Teil der nachoptimierten Trajektorie. Im nächsten Schritt werden die Berechnungen für die unterschiedlichen Sequenzen wiederholt, wie es in Abschnitt 5.2.1 beschrieben wurde. In Bild 5-13 sind die Zielfunktionswerte der nachoptimierten Lösungen für das Doppelpendel auf einem Wagen dargestellt (blaue Sterne). Es wird wiederum deutlich, dass die Lösungen verschiedene Äste bilden, die die typische Form von Lösungen besitzen, die durch einen Mehrzieloptimierungsansatz berechnet wurden. Die Lösungen für das Doppelpendel auf einem Wagen können an dieser Stelle nicht mit Lösungen

des Standardansatzes verglichen werden, da der Optimierungsalgorithmus mit einem black-box Ansatz für die hier vorgestellte Konfiguration nicht konvergiert ist. Dies ist dadurch zu erklären, dass sich aus der gewählten Anfangsruhelage in die instabile obere Ruhelage komplexe Manöver ergeben, die durch den linear interpolierten *initial guess* nicht gefunden werden konnten. Bei einer Untersuchung der Lösungen im Zustandsraum wird ersichtlich, dass nicht alle konvergierten Lösungen der Nachoptimierung wirklich in der Nähe der stark stabilen Mannigfaltigkeit verlaufen. Das liegt an der Tatsache, dass eine globale Optimalität der Lösungen, die mit dem Sequenzansatz berechnet werden, nicht garantiert werden kann, siehe auch die Diskussion dazu in Abschnitt 5.2.1. Daher werden die Trajektorien, die entlang der stark stabilen Mannigfaltigkeit verlaufen, zusätzlich mit grünen Kreisen markiert. Auf der rechten Seite von Bild 5-13 werden die nicht dominierten Punkte dargestellt, und acht von zehn von ihnen befinden sich wie erwartet in der Nähe der stark stabilen Mannigfaltigkeit. Dementsprechend konnte das Ziel, optimale Trajektorien auf stabilen Mannigfaltigkeiten der oberen Ruhelage zu berechnen, in 80 % der Fälle erreicht werden.

Auf Grund dieser Ergebnisse kann man den Sequenzansatz auch noch aus einer anderen Perspektive als vorteilhaft ansehen. Auch wenn nicht jede Lösung der Nachoptimierung der Sequenz wirklich in der Nähe der Mannigfaltigkeit liegt, ergeben sich insgesamt gute paretooptimale Trajektorien. Da es für komplexe Bewegungen von unteraktuierten Systemen schwer ist, einen physikalisch motivierten *initial guess* zu finden, ist hierfür der Sequenzansatz empfehlenswert. So ist es vorstellbar, dass es durch die Kombination von kurzen Teiltrajektorien, die dann einen zulässigen *initial guess* bilden, überhaupt erst möglich ist, Lösungen des Optimalsteuerungsproblems für komplexe Systeme zu finden.

### 5.3.3 Numerische Ergebnisse

Als Fazit lässt sich sagen, dass die Ergebnisse von Abschnitt 5.3.1 und Abschnitt 5.3.2 zeigen, dass durch den neuartige Ansatz eine optimale Steuerung auf einer stabilen Mannigfaltigkeit zu bestimmen, das Ziel erreicht werden kann, dass Pendel in die oberen Ruhelage zu bringen.

Zusätzlich wird in Bild 5-14 der numerische Aufwand verglichen, der bei der Berechnung der Lösungen für das momentengesteuerte Pendel durch den NAG-Algorithmus entstanden ist. Da in der Optimierung eine konstante Schrittweite  $h = 0.005 \text{ s}$  verwendet wird, entspricht ein längeres Manöver einer höheren Anzahl an Knoten. Für den Sequenzansatz wird die Summe der Rechenzeiten für das Manöver zur Mannigfaltigkeit und der Nachoptimierung gebildet. Anschließend wird für jede feste Anzahl an Knoten ein Durchschnittswert der unterschiedlichen *initial guesses* gebildet, um die Werte gut vergleichen zu können (blaue Sterne).

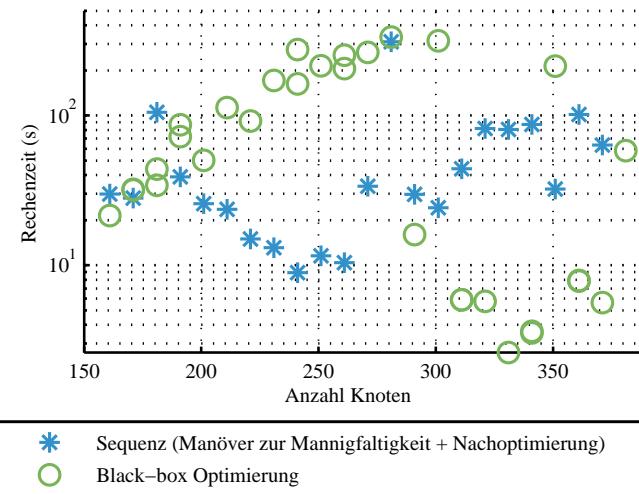


Bild 5-14: Vergleich der Rechenzeiten der gemittelten Summe des Manövers zur Mannigfaltigkeit und der Nachoptimierung (blaue Sterne) mit der Optimierung des black-box Ansatzes (grüne Kreise) bezüglich der Anzahl an Knoten, die für die Optimierung verwendet wurde.

Im Vergleich dieser Ergebnisse zu der Rechenzeit der black-box Optimierung als Referenz (grüne Kreise), hat der neuartige Ansatz eine vergleichbare Rechenzeit, obwohl er zwei Optimierungen beinhaltet. Bei kürzeren Manöver, mit einer geringeren Anzahl an Knoten, benötigt der Sequenzansatz weniger Rechenzeit als der black-box Ansatz, und für eine höhere Knotenzahl ist es umgekehrt.

## 5.4 Validierung durch Simulation und Tests am Prüfstand

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse des Sequenzansatzes für das Doppelpendel auf einem Wagen validiert. Ziel dabei ist es, diese Lösungen am Prüfstand umzusetzen. Dazu muss zusätzlich eine Regelung in der schon bekannten Zwei-Freiheitsgrade-Struktur ausgelegt werden (siehe Abschnitt 2.4). Die Funktionsfähigkeit kann dann in der Simulationsumgebung für das Doppelpendel auf einem Wagen getestet werden (siehe Abschnitt 2.4.1). In diesem Fall wird ein kontinuierlicher LQ-Regler verwendet, wie er in Abschnitt 2.4.2 beschrieben wurde. Anschließend werden Tests am Prüfstand (siehe Abschnitt 2.2) durchgeführt, an dem die Ausnutzung der natürlichen Systemdynamik sehr anschaulich beobachtet werden kann.

### 5.4.1 Ergebnisse Simulationsumgebung

Für die Validierung in der Simulationsumgebung wird das aus Abschnitt 2.4.1 bekannte Modell verwendet. Dabei wird für  $5\text{ s}$  simuliert und die schon verwendete Trajektorie aus Abschnitt 5.3.2 mit einer Gesamtzeit  $T_{ges} = 2.4\text{ s}$  getestet.

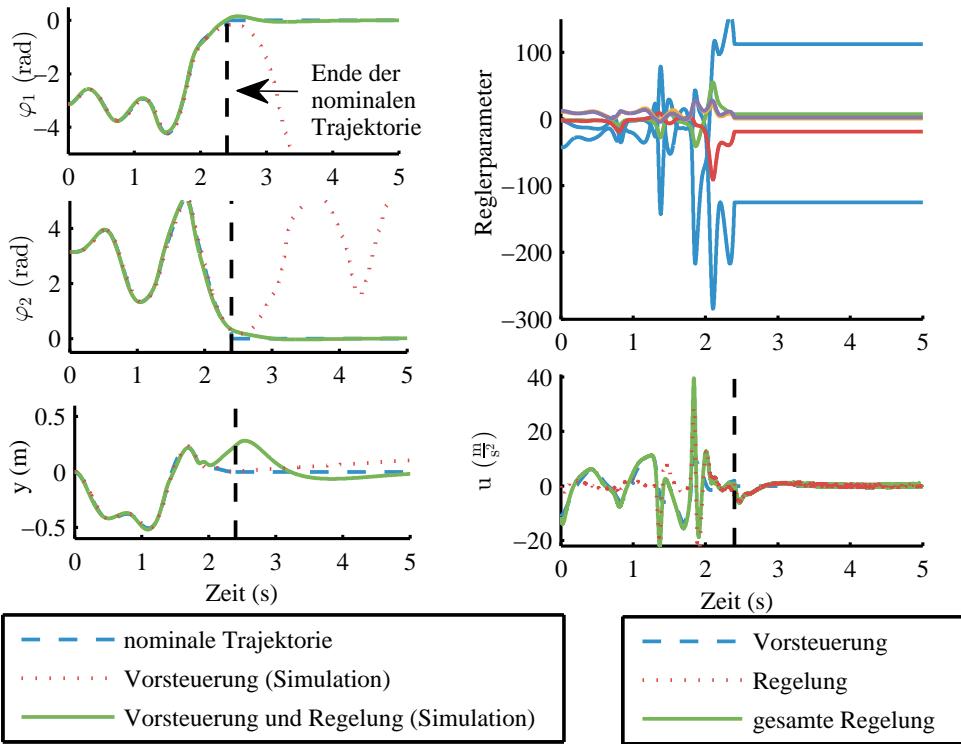


Bild 5-15: Links: Vergleich der gesteuerten Trajektorie (rot gepunktete Linie) aus der Simulation mit der geregelten Trajektorie (durchgezogene grüne Linie) und der nominalen Trajektorie (blaue gestrichelte Linie) für  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $y$ ; die gestrichelte Linie kennzeichnet das Ende der nominalen Trajektorie in der Simulation; rechts: oben: Reglerkonstanten der Reglermatrix  $k$ ; unten: Trajektorie der gesamten Steuerfunktion  $u(t)$ , die aus der Vorsteuerung (blaue gestrichelte Linie) und dem Regleranteil (rote gepunktete Linie) besteht

Die Ergebnisse der nachoptimierten Lösung des Sequenzansatzes aus der Simulationsumgebung werden in Bild 5-15 gezeigt. Insgesamt sind die Ergebnisse ähnlich zu denen von den untersuchten Standardtrajektorien (siehe Abschnitt 2.4.2), daher werden die Ergebnisse hier nur kurz diskutiert und die Besonderheiten der Lösungen des Sequenzansatzes herausgestellt.

Auf der rechten Seite sind die Verstärkungsfaktoren der Regelung für die Lösung dargestellt. Am Ende der Trajektorie, also in der Nähe der oberen Ruhelage, werden diese größer, da ein stärkerer Eingriff des Reglers notwendig ist, um das Pendel zu stabilisieren. Auf der linken Seite werden die Trajektorien für die Winkel der Pendelarme und die Position des Wagens dargestellt. Dabei werden die nominale (blau gestrichelt), die gesteuerte (rot gepunktet) und die sowohl gesteuerte als auch geregelte Trajektorie (grün durchgehend) verglichen. Es wird deutlich, dass mit Hilfe des kontinuierlichen LQ-Reglers das Doppelpendel auf einem Wagen in der oberen Ruhelage stabilisiert werden kann. Am Ende der nominalen Trajektorie bei  $2.4\text{ s}$  muss der Wagen zusätzliche Ausweichbewegungen durchführen, um das Pendel zu stabilisieren, was auch in der Darstellung der Einangsgröße (rechts unten) ersichtlich ist. Dies widerspricht der eigentlichen Idee des Sequenzansatzes, nämlich dass sich das Pendel im zweiten Teil des Manövers auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit befindet und sich der Wagen eigentlich nicht mehr bewegen muss. Diese verstärkte Regleraktivität ist aber für die Stabilisierung notwendig und konnte auch bei den bisher untersuchten Beispielen am Prüfstand beobachtet werden. Aber anhand der nominalen Trajektorie der Wagenbewegung kann trotzdem der eigentlich gewünschte Effekt abgelesen werden: Ab ca.  $1.9\text{ s}$  ist die Sollbewegung des Wagens fast null. Dieser Effekt wird im nächsten Abschnitt auch für den Test am Prüfstand untersucht. Dort wird auch die Bewegung auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit besser deutlich.

#### 5.4.2 Ergebnisse am Prüfstand

Es wird wieder die Trajektorie mit einer Gesamtzeit von  $2.4\text{ s}$  betrachtet, die auch im vorherigen Abschnitt 5.4.1 verwendet wurde. In Bild 5-16 wird der Testlauf dieser Trajektorie am Prüfstand dargestellt. Insgesamt sind die Ergebnisse am Prüfstand vergleichbar zu denen in der Simulation, denn auch hier muss der Wagen in der zweiten Hälfte des Manövers zusätzliche Bewegungen durchführen, um das Doppelpendel stabilisieren zu können.

Bei der Beobachtung des Aufschwungs am Prüfstand werden auch die speziellen Eigenschaften deutlich, die die nach optimierte Lösung des vorgestellten Ansatzes besitzt. Dies gilt vor allem, wenn man nur die gesteuerte Trajektorie betrachtet, bei der keine Regelung wirkt, denn dabei werden die zwei Teile, die dem Sequenzansatz entstammen, sehr deutlich. In Bild 5-16 ist daher der zweite Teil des Manövers, bei dem die Pendelarme entlang der stark stabilen Mannigfaltigkeit verlaufen, mit einer gestrichelten Linie gekennzeichnet. Für die nominale und die gesteuerte Trajektorie (ohne Regelung) zeigt diese Auswertung, dass fast keine zusätzliche Bewegung des Wagens notwendig ist und sich die Pendelarme selbstständig auf der Mannigfaltigkeit in Richtung der oberen Ruhelage bewegen. Dies ist das erwartete Ergebnis für das Manöver, das mit Hilfe des Sequenzansatzes

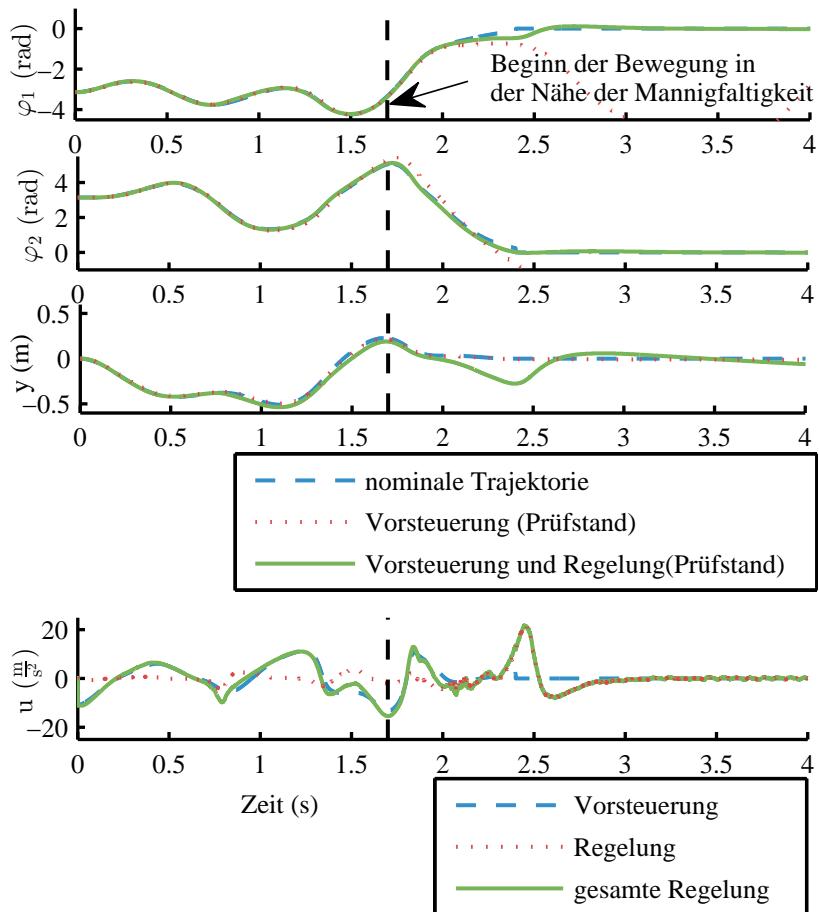


Bild 5-16: Winkel der Pendelarme, Position des Wagens und Steuerung für den Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen am Prüfstand; als nominale Trajektorie (blaue gestrichelte Linie) wird die aus Bild 5-15 verwendet; es werden ein Durchlauf ohne Regelung (rote gepunktete Linie) und einer mit zusätzlicher Regelung (grüne durchgezogene Linie) gezeigt; unten ist die Gesamtsteuerung (grüne durchgezogene Linie) bestehend aus dem Vorsteuerungsanteil (blaue gestrichelte Linie) und dem Regelungsanteil (rote gepunktete Linie) dargestellt; die vertikale gestrichelte Linie kennzeichnet hier den Beginn der Bewegung auf der stark stabilen Mannigfaltigkeit

berechnet wurde, und es zeigt auch die physikalische Bedeutung der stabilen Mannigfaltigkeit sehr anschaulich. Sogar bei der Trajektorie, die am Prüfstand mit zusätzlicher Regelung (grüne Linie in Bild 5-16) durchgeführt wird, bleibt die gewünschte Struktur in der Bewegung des Wagens teilweise erhalten. Im Verlauf der Steuerung des Wagens (siehe Bild 5-16 unten) wird im zweiten Teil sichtbar, dass diese sich zunächst fast bei null befindet, dann aber ein Regeleingriff benötigt wird, um die Stabilisierung durchzuführen. Im Vergleich zu der Simulation dieser Trajektorie (siehe Bild 5-15) sind die Spitzen, die in der Steuerung am Ende des Manövers auftreten, am Prüfstand nicht so ausgeprägt. Ein möglicher Aspekt, der dies erklärt, ist, dass der Motor am Prüfstand zusätzliche Dämpfung besitzt, die im Simulationsmodell nicht berücksichtigt ist und die sich auf die Tests vorteilhaft auswirkt. Außerdem kann die Richtungsumkehr am Motor nicht beliebig schnell ausgeführt werden, sodass immer nur ein begrenzter Ruck umgesetzt werden kann.

Zusammenfassend bietet der vorgeschlagene Sequenzansatz die Möglichkeit qualitativ neue Lösungen für den Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen zu finden. Im Vergleich zu den Lösungen aus Kapitel 4, bei denen ein linear interpolierter *initial guess* für die Optimierung verwendet wurde, ergeben sich hier deutlich komplexere Lösungen, die auch nur mit diesem deutlich komplexeren *initial guess* erzeugt werden konnten. Dies kann dadurch erklärt werden, dass zusätzliches Systemwissen durch die Verwendung der natürlichen Dynamik beim Sequenzansatz verwendet wird. Bei der Übertragung dieser Idee auf andere Systeme kann das zusätzliche Systemwissen hilfreich sein, um überhaupt optimale Lösungen zu finden oder die schon bestehenden Lösungen zu verbessern. Insgesamt lässt sich feststellen, dass die Verwendung des Sequenzansatzes, der die natürliche Dynamik des Systems ausnutzt, ein hilfreicher Prozess ist, um sehr gute Lösungen des Optimalsteuerungsproblems für den Aufschwung des Pendels zu finden.

## 5.5 Vergleich der optimalen Steuerung auf Mannigfaltigkeiten mit dem Standardansatz

Es ist nun naheliegend, die Ergebnisse, die für den Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen unter Verwendung der stabilen Mannigfaltigkeit der oberen Ruhelage erzielt werden konnten, mit den Ergebnissen des Standardansatzes aus Kapitel 4 zu vergleichen. Dafür wird zunächst kurz auf die Unterschiede der Optimalsteuerungsprobleme eingegangen.

Beim Ansatz der optimalen Steuerung mit Mannigfaltigkeiten wurde als untere Ruhelage  $x_1^0 = [-\pi \ \pi \ 0 \ 0 \ 0]$  gewählt, da sich dies zum Erreichen der

stark stabilen Mannigfaltigkeit als die beste Repräsentation herausgestellt hat. Bei dem Standardansatz, der in Kapitel 4 mit einem linear interpolierten *initial guess* durchgeführt wurde, war  $x_2^0 = [-\pi \ -\pi \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  die gewählte Repräsentation der unteren Ruhelage. Weiterführende Untersuchungen haben ergeben, dass der Standardansatz mit  $x_1^0$  für diverse unterschiedliche Parametrierungen des Problems nicht konvergiert ist. Dies ist dadurch zu erklären, dass der Aufschwung aus der Ruhelage  $x_1^0$  eine Bewegung darstellt, bei der sich die beiden Pendelarme gegeneinander in Richtung der oberen Ruhelage drehen müssen. Dieses Manöver ist komplexer als ein Aufschwung aus der Ruhelage  $x_2^0$ , bei dem sich die Pendelarme in die gleiche Richtung bewegen. Somit muss festgehalten werden, dass es sich bei den Lösungen der beiden Ansätze um qualitativ unterschiedliche Bewegungen handelt. Dennoch werden die Ergebnisse im Folgenden verglichen, da es sich prinzipiell um die Lösung des gleichen Problems handelt.

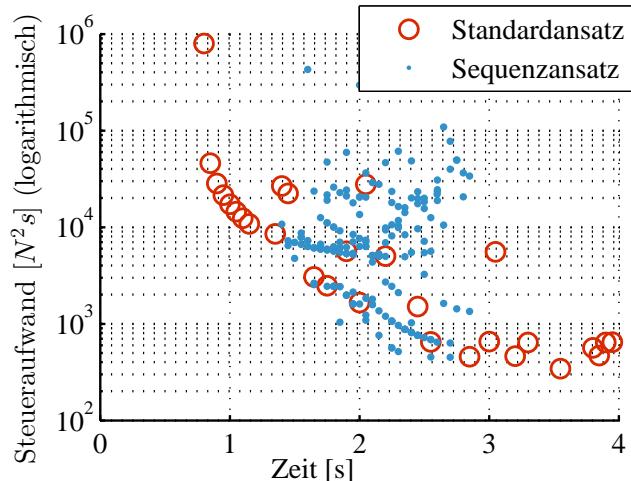


Bild 5-17: Vergleich der Ergebnisse des Standardansatzes aus Abschnitt 4.3.4 (rote Kreise) und des Sequenzansatzes (blaue Punkte)

In Bild 5-17 sind die Zielfunktionswerte der zwei verschiedenen Ansätze zusammen dargestellt. Dabei handelt es sich bei den roten Kreisen um die Ergebnisse der Rechnungen, die mit einem linear interpolierten *initial guess* und der Mehrzieloptimierung mit Gleichheitsnebenbedingungen durchgeführt wurden. Diese Ergebnisse wurden auch schon in Bild 4-12 dargestellt. Die Lösungen aus dem Sequenzansatz sind mit blauen Punkten gekennzeichnet und wurden schon in Bild 5-13 gezeigt. Im Vergleich der Werte fällt zunächst auf, dass es einen Bereich von 1.5 s bis 2.8 s gibt, in dem die Ergebnisse des Sequenzansatzes besser sind als diejenigen des Standardansatzes. Dies war auch zu erwarten, da beim Sequenzansatz mehr Systemwissen eingesetzt wurde, um bessere Ergebnisse zu erhalten. Es wird ebenfalls deutlich, dass durch den Sequenzansatz im Vergleich sehr viele

nur lokal optimale Lösungen berechnet werden, was durch die große Anzahl an Kombinationen in diesem Ansatz zu erklären ist. Es gibt nur einige Kombinationen die zu (vermutlich) global optimalen Lösungen konvergieren. Dies hängt mit einer weiteren Beobachtung für die Lösungen im Zustandsraum zusammen: Es gibt einen bestimmten Bereich für den Übergang auf die stark stabile Mannigfaltigkeit, für den sich die besten Lösungen ergeben und wo die Lösungen vermehrt konvergieren.

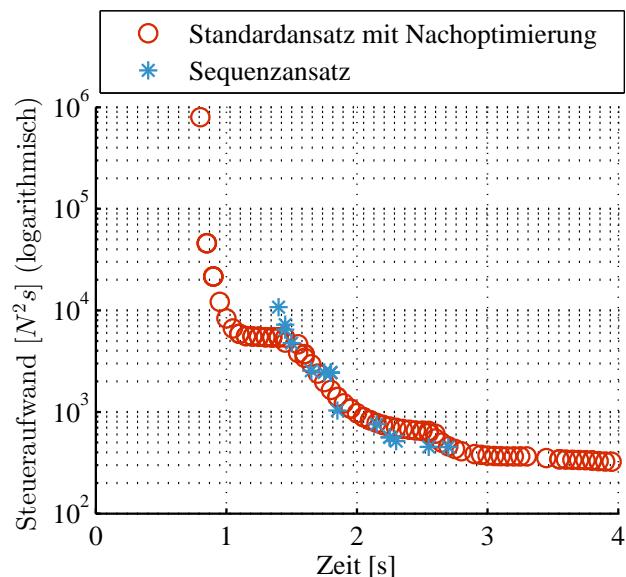


Bild 5-18: Nicht-dominante Punkte des Standardansatzes mit Nachoptimierung (rote Kreise) aus Abschnitt 4.3.5 und des Sequenzansatzes (blaue Sterne)

In Bild 5-18 sind die Zielfunktionswerte der nicht-dominierten Punkte des Sequenzansatzes (blaue Sterne) und die Ergebnisse der Nachoptimierung des Standardansatzes aus Bild 4-15 (rote Kreise) dargestellt. Es wird deutlich, dass die Lösungen aus dem Sequenzansatz nicht so gleichmäßig verteilt sind, wie die der Nachoptimierung des Standardansatzes. Hier ist es aber auch möglich, die vorliegenden Ergebnisse des Sequenzansatzes erneut durch eine Nachoptimierung zu variieren und so eine zusammenhängende Paretofront zu erhalten.

In den beiden Fällen des Sequenzansatzes und der Variation durch Nachoptimierung wurde im Vergleich zum Standardansatz zusätzlicher Aufwand für die Berechnung der Ergebnisse notwendig. Beide Varianten ergeben dabei Lösungen, die ungefähr gleich gute Zielfunktionswerte bezüglich der betrachteten Ziele besitzen. Somit lässt sich als Fazit festhalten, dass sich durch zusätzliches Systemwissen (z. B. Mannigfaltigkeiten) und durch spezielle Auswahl und Nachoptimierung besonders gute Ergebnisse erzielen lassen.

## 5.6 Erweiterungsmöglichkeiten und zukünftige Anwendungen

Weiterführend ist es notwendig zu validieren, ob der hier vorgestellte Ansatz der optimalen Steuerung auf Mannigfaltigkeiten allgemeiner anwendbar ist und dies auch an anderen Anwendungsbeispielen zu testen. Für zukünftige Arbeiten wäre es von Vorteil im Rahmen der optimalen Steuerung eine effiziente Methodik für die Lösung der Optimalsteuerungsprobleme auch in Hinblick der Mehrzieloptimierung zu finden. Zum Beispiel wurde in [ORF12] eine Methode mit Referenzpunkten verwendet, um die Berechnung von ganzen Mengen von Manövern zu beschleunigen.

Außerdem ist es denkbar, weniger einschränkende Teilprobleme für die Optimalsteuerung zu verwenden, um nur einige wenige unterschiedliche Manöver zu berechnen. Neben einer freien Zeit des Manövers könnte auch der Endpunkt auf der Mannigfaltigkeit weggelassen werden. Diese Randbedingung kann dann durch die Nebenbedingung ersetzt werden, dass die Mannigfaltigkeit einen Zielbereich darstellt, der während des Manövers erreicht werden soll. Dies könnte in DMOC einfach umgesetzt werden, benötigt aber eine analytische Beschreibung des Orbits der Mannigfaltigkeit, welcher z. B. mit Splines approximiert werden kann.

Wenn man andere Szenarien als den Aufschwung des Pendels aus der unteren in die obere Ruhelage betrachten möchte, könnten Mannigfaltigkeiten der anderen Ruhelagen interessant sein. Es müssen dann mehrere Orbits von unterschiedlichen Mannigfaltigkeiten berücksichtigt werden, und die Sequenzen könnten sogar Übergänge von einer Mannigfaltigkeit zu einer anderen beinhalten. Ein Beispiel für ein solches Vorgehen ist die Auslegung von energieeffizienten orbitalen Transfers für Weltraummissionen. Der in diesem Kapitel vorgestellte Ansatz der Parametrisierung führt dazu, dass sich die Anzahl an kurzen gesteuerten Manövern stark erhöht, wenn auch noch unterschiedliche Mannigfaltigkeiten betrachtet werden. In einem solchen Fall wäre ein systematisches Vorgehen hilfreich, das den Anwender dabei unterstützt. Um schließlich einen automatisierbaren Prozess zu erhalten, wäre ein graphbasierter Ansatz ähnlich dem Manöverautomaten aus [FDF05] denkbar.

Langfristig gesehen sollte die optimale Steuerung auf Mannigfaltigkeiten auch bezüglich der Anwendbarkeit auf eine allgemeinere und anwendungsorientierte Klasse von Systemen untersucht werden. Im Besonderen für hochdimensionale, komplexe Mehrkörpersysteme kann der Sequenzansatz ein Mittel dazu sein, einen klugen, physikalisch motivierten und sogar schon zulässigen *initial guess* zu finden, der dem Optimierungsalgorithmus hilft ein möglichst gutes Optimum zu erreichen und schnell zu einer Lösung zu konvergieren. Eine der besonderen Herausforderungen der optimalen Steuerung des Doppelpendels besteht darin, dass

dieses System unteraktuiert ist. Weitere Beispiele für unteraktuierte mechanische Systeme sind Raumfahrzeuge und Unterwasserfahrzeuge, Systeme mit flexiblen Verbindungen, oder auch Systeme im Bereich der Fortbewegung [Spo97]. Dabei ist die Verwendung von invarianten Mannigfaltigkeiten im Bereich der Entwicklung von energieeffizienten Weltraummissionen bereits aktueller Stand der Technik, worauf in der Einleitung dieses Kapitels schon eingegangen wurde. Potentiale für die Anwendung des neuen Ansatzes werden daher vor allem im Bereich von unteraktuierten Robotiksystemen gesehen, z.B. bei Systemen die sich mit der Fortbewegung von Robotern beschäftigen. Bei dieser Art von Systemen ist es das Ziel die menschliche Bewegung zu imitieren und dabei auf die Minimierung der notwendigen Steuerung zu achten, siehe [CWR01]. Dabei zeigten z.B. Tests mit dem „Honda Humanoid“, dass das Laufen des Roboters 20 mal mehr Muskelleistung als bei einem vergleichbar großen Mensch benötigt. Daher erscheint Optimalsteuerung als ein passendes Konzept, um energieeffiziente Lösungen zu finden. Es ist dabei denkbar mehrere Ziele gleichzeitig zu berücksichtigen (Mehrzieloptimierung), da z.B. eine kurze Dauer von Manövern auch wichtig ist. In [McG90] wird das biomechanisch inspirierte Design von Robotern beschrieben. Der Autor stellt einige fundamentale Aussagen vor, z.B. dass ein großer Teil der Schwungphase der menschlichen Bewegung passiv ist. Eine solche Eigenschaft entspricht der Idee der optimalen Steuerung auf Mannigfaltigkeiten, denn die Bewegung auf dieser ist ebenfalls passiv. Daher werden hier vielversprechende Verbindungen gesehen.

Auf Grundlage dieser Ideen sollen die konkrete Anwendbarkeit und Leistungsfähigkeit des hier vorgestellten neuen Ansatzes für weitere unteraktuierte Systeme in der Zukunft evaluiert werden.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Zum Abschluss folgen eine Zusammenfassung der in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse und ein Ausblick auf weitere Forschungsarbeiten.

### 6.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die optimale Steuerung von unteraktuierten dynamischen Systemen am Beispiel des Mehrfachpendels auf einem Wagen untersucht. Dabei lag ein besonderer Schwerpunkt auf der Berücksichtigung mehrerer Ziele für die Auslegung der optimalen Steuerung. Durch eine Mehrzieloptimierung war es möglich, viele Varianten für einen Aufschwung des Pendels bezüglich ihrer Pareto-Optimalität zu untersuchen. Dabei konnten bei dem Vergleich der Lösungen abhängig von den Systemzielen optimale Kompromisse für das dynamische System identifiziert werden. Ein weiterer Ansatz bestand darin, die natürliche Dynamik in Form von (in)stabilen Mannigfaltigkeiten zu nutzen, um optimale Trajektorien zu bestimmen.

In Kapitel 2 wurden zunächst verschiedene Pendelsysteme vorgestellt, die im Rahmen von Forschungsprojekten bei der Entwicklung von neuartigen Steuerungs- und Regelungskonzepten verwendet werden. In dieser Arbeit wurde das mehrfach unteraktuierte Doppel- bzw. Dreifachpendel auf einem Wagen betrachtet. Lösungen für den Aufschwung des Pendels wurden simulativ, aber auch am Prüfstand evaluiert. Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus wurde für dieses System eine ausführliche Modellbildung durchgeführt. Dabei wurde die partielle Zustandslinearisierung dazu verwendet, das kraftgesteuerte Modell in ein weniger komplexes Modell zu transformieren, das durch die Beschleunigung des Wagens gesteuert wird. Für die Ausführung der Trajektorien am Pendel wurde die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur verwendet. Hierbei müssen zuerst eine nominale Steuerung und Trajektorie bestimmt werden und diese muss anschließend durch eine zusätzliche Regelung entlang der Trajektorie stabilisiert werden. Die Regelung basierte dabei auf linearen Ansätzen und wurde mit einem zeitvarianten LQ-Regler durchgeführt. Es konnte gezeigt werden, dass sich das nichtlineare System des Doppelpendels mit Hilfe dieses Vorgehens regeln lässt. Außerdem konnte durch manuelle Anpassungen der Regelparameter in besonders kritischen Bereichen der Bewegung die Güte der Regelung zum Teil noch verbessert werden.

Der Hauptaspekt der Arbeit war die Bestimmung der Steuerung für das unteraktuierte Pendel. Diese wurde mit Hilfe von optimalen Steuerungsmethoden berechnet, um die gewünschten Systemziele berücksichtigen zu können. Dazu wurde

die Thematik der optimalen Steuerung in Kapitel 3 eingeführt und auf die unterschiedlichen Lösungsmethoden eingegangen. Man unterscheidet zwischen indirekten und direkten Methoden: Bei den indirekten Methoden werden notwendige Bedingungen mit Hilfe des Pontryaginschen Maximumsprinzips hergeleitet und dazu verwendet, ein (diskretes) Gleichungssystem zur Lösung des Optimalsteuerungsproblems zu bestimmen. Bei den direkten Methoden werden die Bewegungsgleichungen des Systems selbst dazu verwendet, ein diskretes Problem für die anschließende Lösung durch Optimierungsverfahren herzuleiten. Beispiele hierfür sind Schießverfahren und Kollokation. Auch DMOC (*Discrete Mechanics and Optimal Control*) ist eine solche direkte Methode, bei der das Lagrange-d'Alembert-Prinzip zur Herleitung der Bewegungsgleichungen zunächst diskretisiert wird und die Bewegungsgleichungen anschließend durch eine diskrete Variation hergeleitet werden. DMOC hat spezielle Eigenschaften, die auf der variationellen Herleitung dieser Methode beruhen. Zum Beispiel führt die symplektische Form der Methode zu einem qualitativ guten Energieverhalten der Trajektorien für mechanische Systeme.

Die Ergebnisse der optimalen Steuerung mit DMOC für den Aufschwung des Doppelpendels auf einem Wagen wurden in Kapitel 4 dargestellt. Das NLP, das mit Hilfe von DMOC hergeleitet werden konnte, konnte durch die Anwendung von SQP-Verfahren gelöst werden. Ein essentieller Einflussfaktor in dieser Optimierung war die Wahl der Zielfunktion, in der mehrere Ziele berücksichtigt wurden. Hierfür wurden Methoden der Mehrzieloptimierung, wie z. B. die Einführung einer gewichteten Summe in der Zielfunktion verwendet. Als Ziele wurden dabei die Dauer und der entstehende Steueraufwand des Manövers verwendet.

Ein zentrales Ergebnis war es, dass hierdurch dynamisch sehr unterschiedliche Manöver für den Aufschwung aus der unteren Ruhelage in die obere Ruhelage des Pendels bestimmt wurden. Diese Lösungen wurden bezüglich ihrer Zielfunktionswerte verglichen und damit auf ihre Pareto-Optimalität hin untersucht. Eine zusätzliche Untersuchung von Lösungen mit einem deutlich größeren Verfahrweg des Motors zeigten, dass dieser sich nicht bedeutend auf eine Verbesserung der Manöver bezüglich der gewählten Ziele auswirkt. Hierdurch wurde gezeigt, dass die Beschränkung des Verfahrwegs keine bedeutende Einschränkung für die Lösung des Optimalsteuerungsproblems darstellt.

Durch eine Nachoptimierung, bei der die vorausgehenden Lösungen als *initial guess* verwendet wurden, wurden durch leichte Variationen des Optimierungsproblems weitere Lösungen berechnet. Es war möglich, eine Paretofront ohne Sprünge zu berechnen, die im Wesentlichen aus drei dynamisch unterschiedlichen Manövern für den Aufschwung besteht. Dabei entsprechen die drei Äste, aus denen die Paretofront besteht, jeweils Variationen der gleichen Bewegung mit leicht unterschiedlichen Zielfunktionswerten. Es existieren somit für verschiedene Gesamtzeiten von Manövern unterschiedliche Bewegungen, die für den Aufschwung optimal

sind. Dies ist eine interessante Systemeigenschaft, die nur durch die Analyse von unterschiedlichen Lösungen ersichtlich werden konnte. Für einen Entscheidungsträger ist es mit diesen Ergebnissen möglich, eine bestimmte Trajektorie abhängig von der gewünschten Wichtigkeit der Ziele der Anwendung auszuwählen. Durch die Pareto-Optimalität der Lösungen ist sichergestellt, dass es sich dabei um sehr effiziente Lösungen für das dynamische System handelt.

Eine neuartige Methode für die Berechnung von optimalen Trajektorien wurde in Kapitel 5 vorgestellt. Das Ziel war es, die natürliche Dynamik von mechanischen Systemen für die optimale Steuerung auszunutzen. Die natürliche Dynamik eines dynamischen Systems wurde dabei mittels stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten beschrieben. Die stabile Mannigfaltigkeit besteht z. B. aus allen Zustandspunkten, die eine Ruhelage ohne Steuereingriff erreichen. Mannigfaltigkeiten wurden ausgenutzt, um energieeffiziente Trajektorien zu berechnen, da die (ungesteuerte) Bewegung auf ihnen kostenlos ist. Eine derartige Verwendung von Mannigfaltigkeiten für die optimale Steuerung wurde bisher vor allem im Rahmen des Designs von Weltraummissionen verwendet und stellte daher im Bereich von mechanischen Systemen einen neuartigen Ansatz dar. Das wesentliche Konzept war es, eine Sequenz aus einer gesteuerten optimalen Trajektorie aus der unteren Ruhelage auf die stabile Mannigfaltigkeit der oberen Ruhelage zu berechnen und der stabilen Mannigfaltigkeit dann unaktuiert, also kostenlos, in die obere Ruhelage zu folgen. Eine zusätzliche Regelung im Sinne einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur sorgte für die Stabilisierung des Pendels während des Aufschwungs und in der oberen Ruhelage. Eine weitere Nachoptimierung mit der Sequenz als *initial guess* in der Optimierung führte zu noch besseren Zielfunktionswerten der Lösungen. Im Rahmen der Arbeit an diesem Ansatz konnte gezeigt werden, dass sich optimale Trajektorien entlang der (stark) stabilen Mannigfaltigkeit der oberen Ruhelage des Doppelpendels berechnen lassen. Der Ansatz zeigte außerdem in vielen Fällen bessere Zielfunktionswerte der optimalen Trajektorien im Vergleich zu Lösungen, die mit einem einfachen linear interpolierten *initial guess* berechnet wurden.

Auch am Prüfstand des Doppelpendels auf einem Wagen konnte die Bewegung auf der Mannigfaltigkeit anschaulich beobachtet werden. Vor allem beim nicht geregelten Manöver konnte man im zweiten Teil der Trajektorie beobachten, dass sich der Wagen fast nicht mehr bewegen musste, um das Pendel in Richtung der oberen Ruhelage zu bringen. Dies entsprach der Bewegung auf der Mannigfaltigkeit.

Insgesamt wurde in dieser Arbeit durch die Berechnung von optimalen Manövern für das Pendel viel Systemwissen zusammengeführt. So ist es mit den vorliegenden Ergebnissen möglich, zu ermitteln, wie der schnellste Aufschwung oder derjenige mit dem geringsten Steueraufwand aussieht. Außerdem kann eine belie-

bige Lösung mittels Nachoptimierung einfach variiert werden, um eine gewünschte Kombination der Zielfunktionswerte zu erhalten. Die optimale Steuerung auf Mannigfaltigkeiten bietet zusätzlich die Möglichkeit, eine besondere Bewegung durch physikalisch motivierte Ansätze herzuleiten, die ebenfalls sehr gute Zielfunktionswerte besitzt. Die optimalen Trajektorien aus beiden Ansätzen konnten erfolgreich am Prüfstand umgesetzt werden. Dadurch wurde ersichtlich, dass die numerischen Lösungen des Optimalsteuerungsproblems exakt genug für eine praktische Umsetzung berechnet wurde. Es konnte gezeigt werden, dass ein Vorgehen entwickelt wurde, das von der Modellbildung über die theoretische Berechnung der optimalen Steuerung bis hin zur Realisierung am Prüfstand umsetzbar ist. Es wird außerdem davon ausgegangen, dass die hier vorgestellten Ansätze ebenfalls vorteilhaft auf andere mechanische Systeme angewendet werden können, worauf im folgenden Ausblick genauer eingegangen wird.

## 6.2 Ausblick

Innerhalb der Thematik der optimalen Steuerung dynamischer Systeme am Beispiel des Pendels auf einem Wagen gibt es weitere Aspekte, die in künftigen Forschungsthemen aufgegriffen werden können.

Mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden ist es nicht möglich, die durch Optimierung berechneten Trajektorien nachträglich anzupassen, um z. B. einen anderen Anfangspunkt zu erhalten. Eine solche Trajektorie müsste durch eine neue Berechnung bestimmt werden. Da aber für einen echtzeitfähigen Aufschwung aus einer beliebigen Position des Pendels aufgrund der Komplexität des Problems die benötigten Trajektorien nicht *online*, also in Echtzeit, berechnet werden können, muss ein neuer Ansatz gewählt werden. Eine Idee hierfür ist es, im Vorfeld kurze optimale Trajektorienabschnitte in Richtung der oberen Ruhelage zu berechnen und diese in einer Bibliothek zu hinterlegen. Diese optimalen Steuerungen können wiederum mit Hilfe von DMOC berechnet werden. Dann kann abhängig von der Position des Pendels im Zustandsraum das passende Trajektorienstück ausgewählt und aufgeschaltet werden. Dies muss dann mehrfach wiederholt werden, da dabei Systemungenauigkeiten auftreten werden. Denkbar ist, dass sich aufgrund der Dynamik des Pendels bestimmte Strukturen für die gewünschte Bewegung ergeben, die ausgenutzt werden können. Erste Tests zeigen, dass sich z. B. in der Nähe der oberen Ruhelage Trajektorien entlang der stark stabilen Mannigfaltigkeit ergeben. Insgesamt besteht die Idee darin, ähnlich einer *Model Predictive Control* zu arbeiten: Entsprechend dem aktuellen Zustand wird das Systemverhalten immer wieder neu angepasst, bis die Ruhelage erreicht wird.

Für die optimale Steuerung auf Mannigfaltigkeiten soll in Zukunft die Anwendbarkeit der Strategie auf andere Systeme getestet werden. Dabei kann es vor allem

für komplexe Mehrkörpersysteme von Vorteil sein, eine solche physikalisch motivierte Methode für die Berechnung von optimalen Steuerungen zu verwenden. Große Potentiale werden hier vor allem im Bereich von unteraktuierten Robotersystemen gesehen. Auch bei der automatischen Fortbewegung von Robotern soll die beim menschlichen Gang vorkommende Schwungphase ausgenutzt werden (siehe weitere Ausführungen hierzu in Abschnitt 5.6).

Eine weitere Problematik ist die Umsetzbarkeit von komplexen dynamischen Manövern am Prüfstand. Es hat sich gezeigt, dass sich anhand der optimalen Lösung keine direkte Aussage treffen lässt, ob das Manöver auch praktisch gut umsetzbar ist. Ein Teil der Lösungen ließ sich sowohl in der Simulation und auch am Prüfstand gut umsetzen, andere erforderten eine starke manuelle Anpassung. Hier wäre eine weitgehend automatisierbare Methode für die Tests der Manöver wünschenswert, die auch weniger manuelle Eingriffe notwendig macht.

Die Methode, optimale Steuerungen mit Berücksichtigung mehrerer Ziele für das unteraktuierte Doppelpendel zu berechnen, kann ebenfalls auf voll aktuierte Robotiksysteme angewendet werden. In industriellen Anwendungen werden für die Planung von optimalen Trajektorien in [GBLV12] z.B. die folgenden Ziele angegeben: minimale Ausführzeit, minimale Energie bzw. minimaler Aufwand für den Aktor und minimaler Ruck. Daher ist es gut vorstellbar, auch hier mittels Mehrzieloptimierung gute Ergebnisse zu erzielen. Eine erhöhte Komplexität der Aufgabe erhält man bei Industrierobotern häufig durch einen beschränkten Bauraum und die Berücksichtigung der Bewegung von anderen Robotern [BBLT12]. Bei der Berechnung von optimalen Steuerungen, wie sie in dieser Arbeit vorgestellt wurden, ist es relativ einfach, solche Zustandsraumbeschränkungen in der Optimierung zu berücksichtigen.



## A Mathematischer Anhang

Für das tiefere Verständnis der DMOC Methode in Kapitel 3 werden einige Grundlagen der Differentialgeometrie benötigt. Dort werden z.B. mechanische Mehrkörpersysteme auf  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, sogenannte Konfigurationsmannigfaltigkeiten, betrachtet. Außerdem sind diese Grundlagen über Mannigfaltigkeiten auch vorteilhaft für das Verständnis der optimalen Steuerung auf Mannigfaltigkeiten aus Kapitel 5.

In diesem mathematischen Anhang werden in Abschnitt A.1 zuerst differenzierbare Mannigfaltigkeiten definiert und dann einige weiterführende Konzepte aus der Sicht der Differentialgeometrie erläutert. Hierbei wird den Darstellungen in [BL05] und [Bär00] gefolgt.

In Abschnitt A.2 wird genauer auf die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen mit Hilfe von Variationsrechnung und dem Lagrange-d'Alembert-Prinzip eingegangen.

Zum Abschluss werden in Abschnitt A.3 die diskreten Bewegungsgleichungen und Randbedingungen des Optimalsteuerungsproblems für die Implementierung im Optimierungsalgorithmus mit DMOC genauer hergeleitet. Dabei wird ersichtlich, dass sich abhängig von der Lagrange-Funktion eine bestimmte Struktur dieser Gleichungen ergibt.

### A.1 Mannigfaltigkeiten

Das fundamentale Objekt der Differentialgeometrie ist die differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sie stellt eine Menge dar, die lokal ähnlich einer offenen Menge im euklidischen Raum ist. Um eine Mannigfaltigkeit zu definieren, benötigt man erstens eine *Karte*, also eine Abbildung von einer Teilmenge der Mannigfaltigkeit in eine offene Menge des euklidischen Raums und zweitens einen *Atlas*, das heißt eine Sammlung von Karten, welche die gesamte Mannigfaltigkeit überdecken, wobei bestimmte Überdeckungseigenschaften erfüllt sein müssen. Mit diesen Voraussetzungen kann man dann über Kurven auf Mannigfaltigkeiten, Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, oder auch deren Glattheit reden.

Als ein anschauliches Beispiel für eine Mannigfaltigkeit dient eine Sphäre, also eine Kugeloberfläche, wie etwa die Erdoberfläche. Verschiedene Länder der Erde können mit Hilfe einer Karte auf eine Ebene, also in  $\mathbb{R}^2$  abgebildet werden. Am Rand einer Karte besteht dann die Möglichkeit auf eine zweite Karte der angrenzenden Region zu wechseln. In dieser Weise lässt sich eine Mannigfaltigkeit durch

einen vollständigen Satz an Karten beschreiben. Dabei braucht man Regeln, wie sich beim Kartenwechsel die Karten überlappen. Anschaulich ist aber auch klar, dass sich die gesamte Kugeloberfläche nicht mit einer einzigen Karte im  $\mathbb{R}^2$  darstellen lässt. Die Dimension einer Mannigfaltigkeit entspricht der Dimension einer lokalen Karte und alle Karten haben die gleiche Dimension [Wik].

### **Definition A.1 (Differenzierbare Mannigfaltigkeit)**

Es sei  $S$  eine Menge. Eine *Karte* für  $S$  ist ein Paar  $(U, \varphi)$  mit den Eigenschaften, dass

- (i)  $U$  eine Teilmenge von  $S$  ist und
- (ii)  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine injektive Abbildung ist, wobei  $\varphi(U)$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  sei.

Sei  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , dann ist ein  $C^r$ -Atlas für  $S$  eine Sammlung  $\mathcal{A} = \{(U_a, \varphi_a)\}_{a \in A}$  von Karten mit der Eigenschaft, dass  $S = \bigcup_{a \in A} U_a$  und für jede nicht leere Schnittmenge  $U_a \cap U_b \neq \emptyset$  muss gelten:

- (i)  $\varphi_a(U_a \cap U_b)$  und  $\varphi_b(U_a \cap U_b)$  sind offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  und
- (ii) die Überdeckungsabbildung  $\varphi_{ab} := \varphi_b \circ \varphi_a^{-1} : \varphi_a(U_a \cap U_b) \rightarrow \varphi_b(U_a \cap U_b)$  ist ein  $C^r$ -Diffeomorphismus<sup>1</sup>, siehe auch Bild A-1-1.

Unterschiedliche Karten in einem Atlas mit den obigen Eigenschaften (i) und (ii) heißen kompatibel.

Zwei  $C^r$ -Atlanten  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  sind äquivalent, falls  $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$  ebenfalls ein  $C^r$ -Atlas ist.

$M$  ist eine  $C^r$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit, oder einfach  $C^r$ -Mannigfaltigkeit, wenn folgendes gilt:

- (i)  $M$  ist überdeckt mit einem Satz kompatibler Karten, d.h. jeder Punkt kann in mindestens einer Karte dargestellt werden.
- (ii)  $M$  hat einen Atlas.

Wenn jede Karte ihr Bild in einem  $n$ -dimensionalen Unterraum hat, dann wird  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit genannt.

#### **A.1.1 Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten**

Nachdem die Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit definiert wurden, werden nun Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten definiert, wie es für den euklidischen

---

<sup>1</sup>Ein Diffeomorphismus ist eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist. Im Falle eines  $C^r$ -Diffeomorphismus ist die Abbildung  $r$ -fach stetig differenzierbar

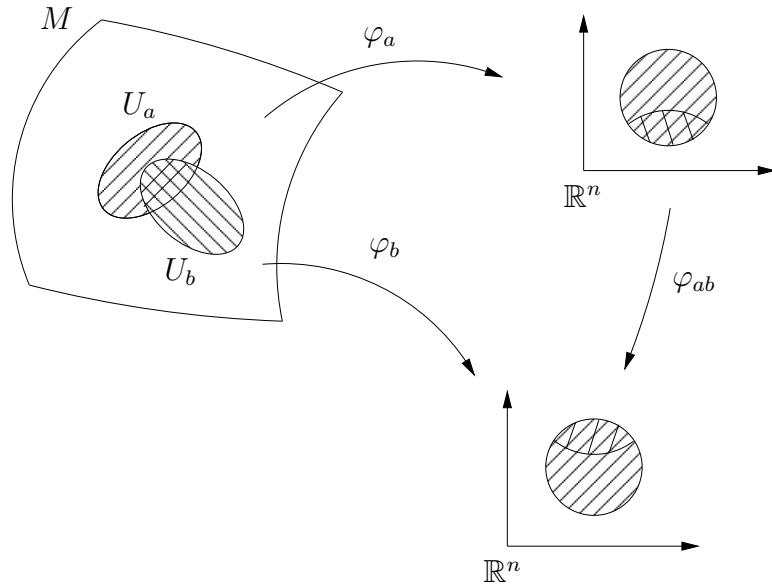


Bild A-1-1: Interpretation der Überdeckungsabbildung

Raum aus der Analysis folgt. Mit Hilfe des *lokalen Vertreters* einer Abbildung können Eigenschaften von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten gekennzeichnet werden.

### Definition A.2 (Lokaler Vertreter einer Abbildung)

Für \$r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\$ sei \$f : M \rightarrow N\$ eine Abbildung zwischen \$C^r\$-Mannigfaltigkeiten und für \$x \in M\$ sei \$(U, \varphi)\$ eine Karte, wobei \$U\$ eine Umgebung von \$x\$ ist. Außerdem sei \$(V, \psi)\$ eine Karte, wobei \$V\$ eine Umgebung von \$f(x)\$ sei, mit der Annahme, dass \$f(U) \subset V\$ ist. Falls \$f\$ stetig ist, kann \$U\$ immer soweit verkleinert werden, dass diese letzte Bedingung erfüllt ist. Dann ist der *lokale Vertreter* (siehe auch Bild A-1-2) von \$f\$ bezüglich der zwei Karten die Abbildung \$f\_{\varphi\psi} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)\$ und diese ist gegeben durch

$$f_{\varphi\psi}(y) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(y). \quad (\text{A-1-1})$$

### Definition A.3 (\$C^r\$-Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten)

Es sei \$f : M \rightarrow N\$ eine stetige Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten.

- (i) Es gilt, dass \$f : M \rightarrow N\$ von der *Klasse \$C^r\$* (oder auch \$f \in C^r(M; N)\$) mit \$r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\$ ist, wenn für jeden Punkt \$x \in M\$ Karten \$(U, \varphi)\$ für \$M\$ und \$(V, \psi)\$ für \$N\$ wie in Definition A.2 existieren und der lokale Vertreter \$f\_{\varphi\psi}\$ von der Klasse \$C^r\$, also \$r\$-mal stetig differenzierbar, ist.
- (ii) Die Menge der Klasse \$C^r\$-Abbildungen von \$M\$ nach \$N\$ wird mit \$C^r(M; N)\$ bezeichnet.

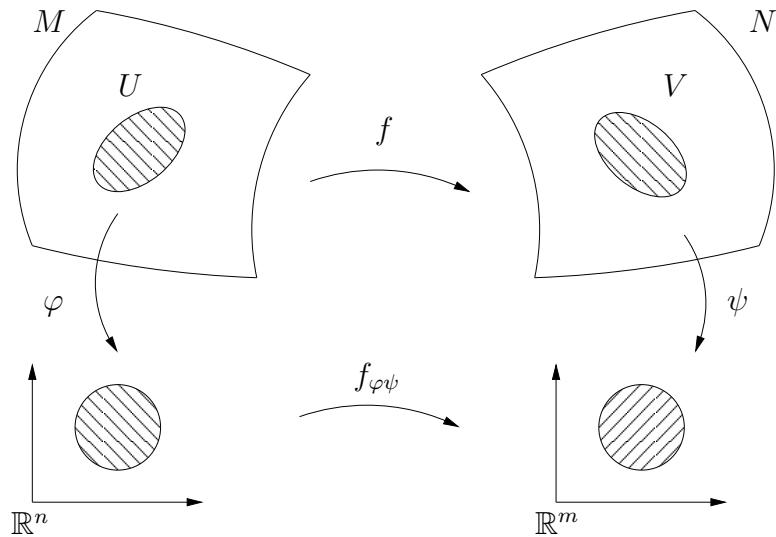


Bild A-1-2: Der lokale Vertreter einer Abbildung  $f$ .

- (iii) Falls  $f$  eine Bijektion der Klasse  $C^r$  ist und falls  $f^{-1}$  auch von der Klasse  $C^r$  ist, dann ist  $f$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus.

### A.1.2 Untermannigfaltigkeiten

Bei der Betrachtung von Vektorräumen entsteht der Begriff eines Unterraums, wenn man eine Teilmenge des Vektorraums erhält, die bezüglich der Struktur des Vektorraums abgeschlossen ist. Für Mannigfaltigkeiten gibt es ein ähnliches Konzept für Teilmengen, die die differenzierbare Struktur der Mannigfaltigkeiten erhalten, in denen sie Teilmengen sind.

#### Definition A.4 (Untermannigfaltigkeit)

Es sei  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Eine Teilmenge  $S$  einer  $C^r$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit, falls für jedes  $x \in S$  eine zulässige Karte  $(U, \varphi)$  für  $M$  mit  $x \in U$  existiert, so dass

- (i)  $\varphi$  in den Produktraum  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  abbildet, und
- (ii)  $\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$  gilt.

Eine Karte mit diesen Eigenschaften heißt auch *Karte der Untermannigfaltigkeit* für  $S$ .

### A.1.3 Tangentialbündel

Hier soll nun der Begriff des Tangentialbündels eingeführt werden. Man kann sagen, dass das Tangentialbündel die Menge aller möglichen Geschwindigkeiten

an allen Punkten der Mannigfaltigkeit  $M$  darstellt. Bemerkenswerterweise ist aber das Tangentialbündel auch selbst eine Mannigfaltigkeit, deren Dimension doppelt so groß wie die von  $M$  ist. Im Konzept der Lagrange-Mechanik heißt dies, wenn die Menge der Positionen eines Systems eine Mannigfaltigkeit ist, dann wird das Tangentialbündel dieser Mannigfaltigkeit als Menge der Positionen und Geschwindigkeiten betrachtet. Daher ist die gesamte Zustandsmannigfaltigkeit des Systems gerade das Tangentialbündel.

**Definition A.5 (Tangentialvektor, Tangentialraum und Tangentialbündel)**

Gegeben sei eine Mannigfaltigkeit  $M$ . Eine *Kurve an  $x$*  ist eine Abbildung  $\gamma : I \rightarrow M$ , wobei  $I$  ein 0 im Innern enthaltendes Intervall ist und für welche gilt  $\gamma(0) = x$ . Zwei Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind *äquivalent* in  $x$ , falls in einer Karte  $(U, \varphi)$  mit  $x \in U$  die lokalen Vertreter von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die gleiche Ableitung in 0 besitzen. Falls  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  äquivalent in  $x$  sind, wird dies durch  $\gamma_1 \sim_x \gamma_2$  dargestellt. Mit dieser Äquivalenzrelation lässt sich die Äquivalenzklasse von  $\gamma$  in  $x$  durch  $[\gamma]_x$  beschreiben.

Ein *Tangentialvektor* in  $x$  ist eine Äquivalenzklasse von Kurven unter der Äquivalenzrelation  $\sim_x$ . Die Menge aller Tangentialvektoren in  $x$  ist der *Tangentialraum* in  $x$  und wird durch  $T_x M$  bezeichnet. Die disjunkte Vereinigung

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M \quad (\text{A-1-2})$$

von allen Tangentialräumen für alle  $x \in M$  wird mit *Tangentialbündel* bezeichnet.

**Definition A.6 (Tangentialabbildung)**

Es sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$ . Es seien  $x \in M$  und  $[\gamma]_x \in T_x M$ . Dann ist  $f \circ \gamma$  eine Kurve an  $f(x)$  und wir definieren  $Tf([\gamma]_x) = [f \circ \gamma]_{f(x)}$ . Dies definiert nun eine Abbildung  $Tf : TM \rightarrow TN$ , und diese wird als *Tangentialabbildung* bezeichnet. Die Einschränkung von  $Tf$  auf  $T_x M$  wird mit  $T_x f$  bezeichnet. Man beachte, dass  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  gilt.

**Definition A.7 (Differential, Kotangentialraum und Kotangentialbündel)**

Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion, die an jedem Punkt  $x \in M$  differenziert werden kann, sodass sich die Abbildung  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}$  ergibt. Da der Tangentialraum von  $\mathbb{R}$  in jedem Punkt durch sich selbst bestimmt ist, erhält man die lineare Abbildung  $\mathbf{d}f(x) : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ . Das heißt,  $\mathbf{d}f(x) \in T_x^* M$  ist der Dualraum des Vektorraums

$T_x M$ , und wird als *Kotangentialraum* bezeichnet. In Koordinatendarstellung ergibt sich

$$\mathbf{d}f(x) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i,$$

wobei  $v \in T_x M$  ist.  $\mathbf{d}f$  heißt *Differential* von  $f$ .

Unter Gebrauch der Operatoren  $\partial/\partial x^i$  kann eine Basis von  $T_x M$  durch

$$(e_1, \dots, e_n) = \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

angegeben werden, sodass  $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial/\partial x^i$  ist.

Wenn nun jeder Vektorraum  $T_x M$  durch seinen Dualraum  $T_x^* M$  ersetzt wird, erhält man eine neue  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, die als *Kotangentialbündel*  $T^* M$  bezeichnet wird. Die duale Basis zu  $\partial/\partial x^i$  wird mit  $dx^i$  bezeichnet. Somit erhält man die Formel

$$\mathbf{d}f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

für jede glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Definition A.8 (regulärer Wert)

Für ein  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  sei  $f \in C^r(M; N)$ . Ein *regulärer Wert* von  $f$  ist ein Punkt  $y \in N$  mit der Eigenschaft, dass für jedes  $x \in f^{-1}(y)$  die Tangentialabbildung  $T_x f$  surjektiv ist.

#### A.1.4 Vektorfelder

Ein weiteres Objekt der Differentialgeometrie ist das Vektorfeld. Es ordnet jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit einen Tangentialvektor zu.

#### Definition A.9 (Vektorfeld)

Ein Vektorfeld  $V$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ordnet jedem Punkt  $p \in M$  einen Vektor  $V(p) \in T_p M$  zu.  $V$  ist somit eine Abbildung von der Mannigfaltigkeit  $M$  in das Tangentialbündel  $TM$ .

#### Definition A.10 (Vektorfeld entlang einer Kurve)

Ein Vektorfeld  $V$  entlang einer Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$  ist eine differenzierbare Abbildung, die jedem  $t \in I$  einen Tangentialvektor  $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$  zuordnet.

## A.2 Euler-Lagrange-Gleichungen und Lagrange-d'Alembert-Prinzip

In diesem Abschnitt werden kurz die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen mit Hilfe der Variationsrechnung und das Lagrange-d'Alembert-Prinzip vorge-

stellt, die für die Herleitung der DMOC Methode notwendig sind. Dabei wird der Darstellung aus [BL05] gefolgt.

Es sei  $Q$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine *Lagrange-Funktion* ist dann eine Funktion  $L$  auf  $\mathbb{R} \times TQ$ , welche von der Zeit, den Positionen und den Geschwindigkeiten des Systems abhängt. Eine Lagrange-Funktion  $L : \mathbb{R} \times TQ$  ist *zeitunabhängig*, wenn eine Funktion  $L_0 : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, für die  $L(t, v_q) = L_0(v_q)$  gilt. In dieser Arbeit werden ausschließlich zeitunabhängige Lagrange-Funktionen betrachtet und diese werden dann ebenfalls mit  $L$  anstatt  $L_0$  bezeichnet.

### Definition A.11 (Variation)

Es sei  $\gamma : [t_0, t_f] \rightarrow Q$  eine Kurve. Eine *Variation* von  $\gamma$  ist eine Abbildung  $\vartheta : [t_0, t_f] \times [-\epsilon_0, \epsilon_0] \rightarrow Q$  mit den Eigenschaften

- (i)  $\vartheta(t, 0) = \gamma(t)$  für alle  $t \in [t_0, t_f]$ ,
- (ii)  $\vartheta(t_0, \epsilon) = \gamma(t_0)$  für alle  $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$  und
- (iii)  $\vartheta(t_f, \epsilon) = \gamma(t_f)$  für alle  $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ .

Eine *infinitesimale Variation* zu der Variation  $\vartheta$  ist das Vektorfeld entlang  $\gamma$ , gegeben durch

$$\delta\vartheta(t) = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \vartheta(t, \epsilon) \in T_{\gamma(t)} Q.$$

Eine Variation von  $\gamma$  ist somit eine „Störung“ von  $\gamma$  und eine zugehörige infinitesimale Variation ist ein Maß der Störung für kleine Störparameter. Man beachte, dass die Endpunkte einer Variation stationär bleiben, sodass die infinitesimale Variation an den Endpunkten verschwindet (siehe hierzu auch Bild A-2-3).



Bild A-2-3: Eine Variation (links) und eine infinitesimale Variation (rechts)

Es sei  $Q$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $[t_0, t_f]$  ein Intervall mit  $t_0, t_f \in \mathbb{R}$  und  $q_0, q_f \in Q$ . Man erhält durch

$$C^2([t_0, t_f], q_0, q_f) = \{ \gamma : [t_0, t_f] \rightarrow Q \mid \gamma(t_0) = q_0, \gamma(t_f) = q_f, \\ \gamma \text{ zweimal stetig differenzierbar} \}$$

eine Familie von zweimal stetig differenzierbaren Kurven, die auf  $[t_0, t_f]$  definiert sind, in  $q_0$  beginnen und in  $q_f$  enden. Es wird nun angenommen, dass eine Lagrange-Funktion auf der Mannigfaltigkeit  $Q$  existiert, und dazu wird eine Funktion  $J : C^2([t_0, t_f], q_0, q_f) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$J(\gamma) = \int_{t_0}^{t_f} L(\gamma'(t)) dt$$

definiert. Die Abbildung  $t \rightarrow \gamma'(t)$  ist hier das Tangentialvektorfeld entlang  $\gamma$ . Die Funktion  $J$  wird *Gütfunktion* oder auch *Kostenfunktion* genannt.

Die zentrale Fragestellung in der Variationsrechnung ist es nun, diejenige Kurve  $\gamma^* \in C^2([t_0, t_f], q_0, q_f)$  zu finden, für die  $J(\gamma^*) \leq J(\gamma)$  für alle  $\gamma \in C^2([t_0, t_f], q_0, q_f)$  gilt. Gesucht ist also die Kurve, die das Gütemaß  $J$  minimiert. Eine direkte Berechnung dieser minimierenden Funktion ist nicht möglich, da für jede Kurve  $\gamma \in C^2([t_0, t_f], q_0, q_f)$  die Bedingung  $J(\gamma^*) \leq J(\gamma)$  ausgetestet werden müsste. Daher soll nun zumindest eine notwendige Bedingung dafür aufgestellt werden, dass eine Kurve  $\gamma$  das Gütemaß minimiert. Alle Kurven  $\gamma \in C^2([t_0, t_f], q_0, q_f)$ , die diese Bedingung nicht erfüllen, können dann ausgeschlossen werden.

Eine notwendige Bedingung sind die sogenannten *Euler-Lagrange-Gleichungen*.

**Satz A.12 (Notwendige Bedingung für die Minimierung)**

Wenn eine Kurve  $\gamma \in C^2([t_0, t_f], q_0, q_f)$  das Gütemaß  $J$  minimiert, dann müssen die Zustandsvariablen des Systems auf der Mannigfaltigkeit an jedem Punkt  $(t, q(t), \dot{q}(t))$  auf der Kurve  $\gamma$  die Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{A-2-3})$$

erfüllen. Die Gleichungen (A-2-3) werden *Euler-Lagrange-Gleichungen* zu der Lagrange-Funktion  $L$  genannt.

*Beweis.* Ein Beweis dieses Satzes kann in [BL05] gefunden werden. □

Um im Weiteren die Steuertheorie eines mechanischen Systems zu betrachten, soll die Lagrange-Funktion für ein solches System beschrieben werden.

**Definition A.13 (Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems)**

Die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems wird durch

$$L : TQ \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (\text{A-2-4})$$

beschrieben, wobei  $T : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  die kinetische Energie und  $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$  die potentielle Energie des Systems darstellen.

In Kapitel 3 wurde dargelegt, wie man optimale Steuerungen  $u^*$  für ein System bestimmen kann. Es wird nun die Steuerung eines mechanischen Systems durch Kräfte  $f$  betrachtet. Diese sind von nun an die Parameter, die zu optimieren sind. Innerhalb der Lagrange-Mechanik, wie sie bisher betrachtet wurde, können Kräfte wie folgt definiert werden:

**Definition A.14 (Kraft)**

Es sei  $Q$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $I \in \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann ist eine Kraft eine Abbildung  $f : I \times TQ \rightarrow T^*Q$ , welche stetig von der Zeit abhängt, und für die  $f(t, v_q) \in T_q^*Q$  für jedes  $(t, v_q) \in I \times TQ$  gilt.

Eine Kraft entlang einer Kurve  $\gamma$  ist dann definiert durch  $t \mapsto f(t, \gamma'(t))$ .

Mit dem folgenden *Lagrange-d'Alembert-Prinzip* lassen sich die Euler-Lagrange-Gleichungen mit Kräften herleiten.

**Definition A.15 (Das Lagrange-d'Alembert-Prinzip)**

Es sei  $L$  eine Lagrange-Funktion auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $Q$  und sei  $f$  eine Kraft. Eine zweimal differenzierbare Kurve  $\gamma : [t_0, t_f] \rightarrow Q$  erfüllt das *Lagrange-d'Alembert-Prinzip* für die Kraft  $f$  und die Lagrange-Funktion  $L$  entlang  $\gamma$ , falls für jede Variation  $\vartheta : [t_0, t_f] \times [-\epsilon_0, \epsilon_0] \rightarrow Q$  von  $\gamma$  gilt

$$\frac{d}{d\epsilon} \left|_{\epsilon=0} \right. \int_{t_0}^{t_f} L(t, \frac{d}{dt} \vartheta(t, \epsilon)) dt + \int_{t_0}^{t_f} f(t, \gamma'(t)) \cdot \delta \vartheta(t) dt = 0.$$

Mit dem Lagrange-d'Alembert-Prinzip lassen sich die Euler-Lagrange-Gleichungen mit Kräften aufstellen:

**Satz A.16 (Euler-Lagrange-Gleichungen mit Kräften)**

Es sei  $L$  eine Lagrange-Funktion und  $f$  eine Kraft auf  $Q$ . Eine zweimal differenzierbare Kurve  $\gamma : [t_0, t_f] \rightarrow Q$  erfüllt das Lagrange-d'Alembert-Prinzip für die Kraft  $f$  und die Lagrange-Funktion  $L$  genau dann, wenn die Zustandsvariablen des Systems zu jedem Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_f]$  die Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \tag{A-2-5}$$

erfüllen, wobei  $f_1, \dots, f_n$  die Komponenten von  $f$  sind. Die Gleichungen (A-2-5) werden *Euler-Lagrange-Gleichungen mit Kräften* genannt.

*Beweis.* Siehe [BL05]. □

### A.3 Diskrete Gleichungen mittels DMOC

In diesem Teil des Anhangs werden die Bestimmung der diskreten Euler-Lagrange-Gleichungen und der diskreten Randbedingungen genauer betrachtet, um zu zei-

gen, wie diese im Optimierungsalgorithmus bei Verwendung der DMOC Methode umgesetzt werden können.

### A.3.1 Diskrete Euler-Lagrange-Gleichungen

Zu bestimmen sind die Gleichungen

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + f_{k-1}^+ + f_k^- = 0, k = 1, \dots, N-1,$$

wie sie z. B. in (3-24b) für das Optimalsteuerungsproblem des Doppelpendels auf einem Wagen dargestellt sind. Dabei ist  $D_1$  die Ableitung nach der ersten Komponente und  $D_2$  die Ableitung nach der zweiten Komponente der diskreten Lagrange-Funktion. In diesem Fall ergibt sich somit zweimal die Ableitung nach  $q_k$ :

$$\frac{\partial}{\partial q_k} L_d(q_{k-1}, q_k) + \frac{\partial}{\partial q_k} L_d(q_k, q_{k+1}) + f_{k-1}^+ + f_k^- = 0, k = 1, \dots, N-1.$$

Wie auch schon in Abschnitt 3.3.4 beschrieben, wird eine Approximation der Zustände durch die Mittelpunktregel durchgeführt. Für die folgenden Rechnungen werden dabei die Abkürzungen

$$q_k^m = \frac{q_k + q_{k-1}}{2} \quad \text{und} \quad \dot{q}_k^m = \frac{q_k - q_{k-1}}{h}, \quad \text{für } k = 1, \dots, N$$

benötigt. Dadurch ergibt sich die diskrete Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L_d(q_{k-1}, q_k) &= hL\left(\frac{q_k + q_{k-1}}{2}, \frac{q_k - q_{k-1}}{h}\right) \\ &= hL(q_k^m, \dot{q}_k^m) = hT(q_k^m, \dot{q}_k^m) - hV(q_k^m), \end{aligned}$$

wobei  $T$  und  $V$  der kinetischen bzw. der potentiellen Energie entsprechen, wie sie in Abschnitt 2.3.1 für das Doppelpendel auf einem Wagen definiert wurden. Diese Gleichungen können wie folgt ausgewertet werden

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dq_k} hL\left(\frac{q_k + q_{k-1}}{2}, \frac{q_k - q_{k-1}}{h}\right) + \frac{d}{dq_k} hL\left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right) \\ &= h \left( T_{q_k^m} \left( \frac{q_k + q_{k-1}}{2}, \frac{q_k - q_{k-1}}{h} \right) \cdot \frac{1}{2} + T_{\dot{q}_k^m} \left( \frac{q_k + q_{k-1}}{2}, \frac{q_k - q_{k-1}}{h} \right) \cdot \frac{1}{h} \right. \\ &\quad \left. - V_{q_k^m} \left( \frac{q_k + q_{k-1}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &+ h \left( T_{q_{k+1}^m} \left( \frac{q_{k+1} + q_k}{2}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) \cdot \frac{1}{2} - T_{q_{k+1}^m} \left( \frac{q_{k+1} + q_k}{2}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) \cdot \frac{1}{h} \right. \\ &\quad \left. - V_{q_{k+1}^m} \left( \frac{q_{k+1} + q_k}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -T_{\dot{q}_{k+1}^m}(q_{k+1}^m, \dot{q}_{k+1}^m) + T_{\dot{q}_k^m}(q_k^m, \dot{q}_k^m) + 0.5h \left( T_{q_{k+1}^m}(q_{k+1}^m, \dot{q}_{k+1}^m) + T_{q_k^m}(q_k^m, \dot{q}_k^m) \right) \\
&- 0.5h \left( V_{q_{k+1}^m}(q_{k+1}^m) + V_{q_k^m}(q_k^m) \right) = 0,
\end{aligned}$$

und dienen dann mit den folgenden Ableitungen als Grundlage für die Implementierung:

$$\begin{aligned}
T_{\dot{q}_k^m} &= \begin{bmatrix} (J_1 + a_1^2 m_1 + l_1^2 m_2) \dot{\varphi}_{1,k}^m - (l_1 m_2 + a_1 m_1) \dot{y}_k^m \cos(\varphi_{1,k}^m) + a_2 l_1 m_2 \dot{\varphi}_{2,k}^m \cos(\varphi_{1,k}^m - \varphi_{2,k}^m) \\ (J_2 + a_2^2 m_2) \dot{\varphi}_{2,k}^m - a_2 m_2 \dot{y}_k^m \cos(\varphi_{2,k}^m) + a_2 l_1 m_2 \dot{\varphi}_{1,k}^m \cos(\varphi_{1,k}^m - \varphi_{2,k}^m) \\ (m_1 + m_2 + m_c) \dot{y}_k^m - (a_1 m_1 + l_1 m_2) \dot{\varphi}_{1,k}^m \cos(\varphi_{1,k}^m) - a_2 m_2 \dot{\varphi}_{2,k}^m \cos(\varphi_{2,k}^m) \end{bmatrix} \\
T_{q_k^m} &= \begin{bmatrix} (a_1 m_1 + l_1 m_2) \dot{\varphi}_{1,k}^m \dot{y}_k^m \sin(\varphi_{1,k}^m) - a_2 l_1 m_2 \dot{\varphi}_{1,k}^m \dot{\varphi}_{2,k}^m \sin(\varphi_{1,k}^m - \varphi_{2,k}^m) \\ a_2 m_2 \dot{\varphi}_{2,k}^m (\dot{y}_k^m \sin(\varphi_{2,k}^m) + l_1 \dot{\varphi}_{1,k}^m \sin(\varphi_{1,k}^m) - \varphi_{2,k}^m)) \\ 0 \end{bmatrix} \\
V_{q_k^m} &= \begin{bmatrix} -g \sin \varphi_{1,k}^m (a_1 m_1 + l_1 m_2) \\ -a_2 g m_2 \sin(\varphi_{2,k}^m) \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dabei steht z.B.  $T_{q_k^m}$  für die Ableitung der kinetischen Energie nach dem Term  $q_k^m$ :

$$T_{q_k^m} = \frac{\partial T}{\partial q_k^m}(q_k^m, \dot{q}_k^m).$$

Die obigen Gleichungen gelten für alle mechanischen Systeme, deren Dynamik mit Hilfe einer Lagrange-Funktion, bestehend aus kinetischer und potentieller Energie, bestimmt werden kann. Es müssen dann nur die entsprechenden Ableitungen neu bestimmt werden. Durch diese Struktur ist eine Neuimplementierung des Optimierungsalgorithmus effizient möglich.

### A.3.2 Diskrete Randbedingungen

Zusätzlich müssen noch die diskreten Gleichungen für den Anfangs- und Endimpuls bestimmt werden, damit alle Randbedingungen erfüllt sind. Diese Gleichungen können nicht auf Grundlage der Geschwindigkeiten ausgewertet werden, da diese an den Rändern durch den Differenzenquotienten nicht definiert sind. Daher wird mit der diskreten Legendre-Transformation (siehe Abschnitt 3.3.2) eine Transformation auf den Impuls  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})$  durchgeführt.

Zunächst wird gezeigt, dass die Definition der diskreten Legendre-Transformation konsistent zu den diskreten Euler-Lagrange-Gleichungen ist. Dazu wird gefordert, dass der diskrete Impuls an einem Knotenpunkt  $q_k$  sowohl durch die Berechnung

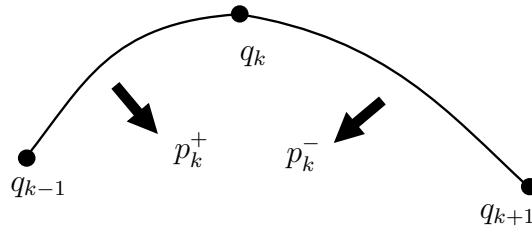


Bild A-3-4: Berechnung des diskreten Impulses aus zwei benachbarten Intervallen

aus dem Knotenpaar  $(q_{k-1}, q_k)$  als auch aus dem Knotenpaar  $(q_k, q_{k+1})$  gleich ist, siehe auch Bild A-3-4. Somit soll

$$p_k^+ = p_k^- \quad (\text{A-3-6})$$

am Knoten  $q_k$  gelten. Dabei ist  $p_k^+$  aus  $(q_{k-1}, q_k)$  mittels  $\mathbb{F}^{f^+} L_d(q_{k-1}, q_k)$  mit

$$p_k^+ = D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + f_d^+(q_{k-1}, q_k, u_{k-1})$$

und  $p_k^-$  aus  $(q_k, q_{k+1})$  mittels  $\mathbb{F}^{f^-} L_d(q_k, q_{k+1})$  mit

$$p_k^- = -D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) - f_d^-(q_k, q_{k+1}, u_k)$$

bestimmt. Aus (A-3-6) folgt dann

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + f_d^+(q_{k-1}, q_k, u_{k-1}) \quad (\text{A-3-7})$$

$$= -D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) - f_d^-(q_k, q_{k+1}, u_k) \quad (\text{A-3-8})$$

was den diskreten Euler-Lagrange-Gleichungen entspricht.

Für die Randbedingungen ergibt sich dann die folgende Umformung:

$$\underbrace{D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + f_{k-1}^+}_{p_k} + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + f_k^- = 0,$$

$$\Rightarrow p_k + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + f_k^- = 0.$$

Für die Bestimmung des diskreten Impulses  $p_k$  wird nun die kontinuierliche Legendre-Transformation zusätzlich angewendet. Diese lautet:  $\mathbb{FL} : TQ \rightarrow T^*Q$ ,  $\mathbb{FL} : (q, \dot{q}) \mapsto (q, p) = (q, D_2 L(q, \dot{q}))$ . Dadurch folgt die Approximation des diskreten Impulses durch  $p_k \approx p(kh) = D_2 L(q(kh), \dot{q}(kh))$  und es ergibt sich die folgenden Anfangsbedingung:

$$D_2 L(q_0, \dot{q}_0) + D_1 L_d(q_0, q_1) + f_0^- = 0.$$

Eine Endbedingung ergibt sich analog zu dem eben gezeigten Vorgehen:

$$-D_2 L(q_N, \dot{q}_N) + D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) + f_{N-1}^+ = 0.$$

Entsprechend dieser Herleitung lassen sich die folgenden Gleichungen für die Randbedingungen (3-24a) und (3-24c) bestimmen:

$$\begin{aligned}
 & D_2 L(q_0, \dot{q}_0) + D_1 L_d(q_0, q_1) + f_0^- \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_0} T(q_0, \dot{q}_0) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_0} V(q_0, \dot{q}_0) + \frac{d}{dq_0} h L \left( \frac{q_1 + q_0}{2}, \frac{q_1 - q_0}{h} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} (J_1 + a_1^2 m_1 + l_1^2 m_2) \dot{\varphi}_1^0 - (l_1 m_2 + a_1 m_1) \dot{y}^0 \cos(\varphi_1^0) + a_2 l_1 m_2 \dot{\varphi}_2^0 \cos(\varphi_1^0 - \varphi_2^0) \\ (J_2 + a_2^2 m_2) \dot{\varphi}_2^0 - a_2 m_2 \dot{y}^0 \cos(\varphi_2^0) + a_2 l_1 m_2 \dot{\varphi}_1^0 \cos(\varphi_1^0 - \varphi_2^0) \\ (m_1 + m_2 + m_c) \dot{y}^0 - (a_1 m_1 + l_1 m_2) \dot{\varphi}_1^0 \cos(\varphi_1^0) - a_2 m_2 \dot{\varphi}_2^0 \cos(\varphi_2^0) \end{bmatrix} \\
 &- T_{\dot{q}_0^m} + 0.5h(T_{q_0^m} - V_{q_0^m}) + f_0^- \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & -D_2 L(q_N, \dot{q}_N) + D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) + f_{N-1}^+ \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_N} T(q_N, \dot{q}_N) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_N} V(q_N, \dot{q}_N) + \frac{d}{dq_N} h L \left( \frac{q_N + q_{N-1}}{2}, \frac{q_N - q_{N-1}}{h} \right) \\
 &= - \begin{bmatrix} (J_1 + a_1^2 m_1 + l_1^2 m_2) \dot{\varphi}_1^N - (l_1 m_2 + a_1 m_1) \dot{y}^N \cos(\varphi_1^N) + a_2 l_1 m_2 \dot{\varphi}_2^N \cos(\varphi_1^N - \varphi_2^N) \\ (J_2 + a_2^2 m_2) \dot{\varphi}_2^N - a_2 m_2 \dot{y}^N \cos(\varphi_2^N) + a_2 l_1 m_2 \dot{\varphi}_1^N \cos(\varphi_1^N - \varphi_2^N) \\ (m_1 + m_2 + m_c) \dot{y}^N - (a_1 m_1 + l_1 m_2) \dot{\varphi}_1^N \cos(\varphi_1^N) - a_2 m_2 \dot{\varphi}_2^N \cos(\varphi_2^N) \end{bmatrix} \\
 &- T_{\dot{q}_N^m} + 0.5h(T_{q_N^m} - V_{q_N^m}) + f_{N-1}^+ \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Hierbei muss auf die zwei unterschiedlichen Terme der kontinuierlichen und der diskreten Lagrange-Funktion geachtet werden, da hier die Ableitungen einmal bezüglich des letzten Diskretisierungspunktes  $q_N$  bzw.  $\dot{q}_N$  und einmal bezüglich des letzten Terms der Mittelpunktregel  $q_N^m$  bzw.  $\dot{q}_N^m$  bestimmt werden. Die Werte  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0, y^0, \dot{\varphi}_1^0, \dot{\varphi}_2^0, \dot{y}^0)$  und  $(\varphi_1^N, \varphi_2^N, y^N, \dot{\varphi}_1^N, \dot{\varphi}_2^N, \dot{y}^N)$  sind dabei die Anfangs- bzw. Endwerte des Optimalsteuerungsproblems, die in die Gleichungen eingesetzt werden müssen.

### A.3.3 Bestimmung der exakten Geschwindigkeiten

Eine mittels DMOC berechnete optimale Steuerungstrajektorie besteht aus den Konfigurationen  $q_0, \dots, q_N$  und den optimalen Steuerungen  $f_0, \dots, f_N$ . Für die Approximation der Geschwindigkeiten kann dann z.B. der Differenzenquotient verwendet werden. Es gibt aber auch eine Möglichkeit, die Geschwindigkeiten aus den diskreten Konfigurationen exakt zu berechnen. Dies geht durch die Verwendung des Impulses  $p$ , der durch die Gleichung

$$\dot{q} = M^{-1}(q, \dot{q})p = M^{-1}(q, \dot{q}) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})$$

beschrieben werden kann.

Im Falle der diskreten optimalen Trajektorie muss entsprechend der diskrete Impuls durch die Anwendung der diskreten Legendre-Transformation verwendet werden. Es wird dabei deutlich, dass - wie gewünscht - der Impuls nur von der Konfiguration abhängt:

$$\begin{aligned} p_0 &= -D_1 L_d(q_0, q_1) - f_0^-, \\ p_{k-1}^- &= -D_1 L_d(q_{k-1}, q_k) - f_{k-1}^-, \\ p_k^+ &= D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + f_{k-1}^+, \\ p_N &= D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) + f_{N-1}^+. \end{aligned}$$

Um den Impuls an allen beliebigen Knotenpunkten  $k = 0, \dots, N$  berechnen zu können, muss sowohl die positive als auch die negative diskrete Legendre-Transformation verwendet werden. Damit lässt sich  $\dot{q}_k = M_k^{-1}(q_k, \dot{q}_k)p_k$  als exakte Geschwindigkeit am diskreten Knotenpunkt  $k$  berechnen. Für die Anfangsbedingung lässt sich folgern, dass

$$\begin{aligned} p_0 &= -D_1 L_d(q_0, q_1) - f_0^- \\ &= -\frac{d}{dq_0} h L \left( \frac{q_0 + q_1}{2}, \frac{q_1 - q_0}{h} \right) - f_0^- \\ &= -h \frac{d}{dq_0} \left( T \left( \frac{q_0 + q_1}{2}, \frac{q_1 - q_0}{h} \right) - V \left( \frac{q_0 + q_1}{2} \right) \right) - f_0^- \\ &= -h \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial q_0^m} - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_0^m} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V}{\partial q_0^m} \right) - f_0^- \\ &= -\frac{1}{2} h T_{q_0^m}(q_0^m, \dot{q}_0^m) + T_{\dot{q}_0^m}(q_0^m, \dot{q}_0^m) + \frac{1}{2} h V_{q_0^m}(q_0^m) - f_0^- \end{aligned}$$

gilt. Eine ähnliche Formel lässt sich als Endbedingung formulieren

$$\begin{aligned} p_N &= D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) + f_{N-1}^+ \\ &= h \frac{d}{dq_N} \left( T \left( \frac{q_N + q_{N-1}}{2}, \frac{q_N - q_{N-1}}{h} \right) - V \left( \frac{q_N + q_{N-1}}{2} \right) \right) + f_{N-1}^+ \\ &= \frac{1}{2} h T_{q_N^m}(q_N^m, \dot{q}_N^m) + T_{\dot{q}_N^m}(q_N^m, \dot{q}_N^m) + \frac{1}{2} h V_{q_N^m}(q_N^m) - f_{N-1}^+ \end{aligned}$$

Dabei ist die diskrete Legendre-Transformation wie in (3-18)-(3-21) bestimmt. Auf den 0-ten Knoten ist daher die Transformation  $\mathbb{F}^{f-} L_d$  anzuwenden und auf den  $N$ -ten Knoten dementsprechend die Transformation  $\mathbb{F}^{f+} L_d$ .

## B Literaturverzeichnis

- [AA98] Apkarian, P. und Adams, R. Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems. In *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Band 6, Seiten 21–32. 1998.
- [Ada09] Adamy, J. *Nichtlineare Regelungen*. Springer, 2009.
- [ÅF96] Åström, K. und Furuta, K. Swinging up a pendulum by energy control. In *13th IFAC World Congress*. San Francisco, USA, 1996.
- [ARS05] Aulbach, B., Rasmussen, M. und Siegmund, S. Approximation of attractors of nonautonomous dynamical systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B*, 5(2):215–238, 2005.
- [ARS06] Aulbach, B., Rasmussen, M. und Siegmund, S. Invariant Manifolds as Pullback Attractors of Nonautonomous Differential Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 15(2):579–596, 2006.
- [BBB<sup>+</sup>01] Binder, T., Blank, L., Bock, H., Bulirsch, R., Dahmen, W., Diehl, M., Kronseder, T., Marquardt, W., Schlöder, J. und Stryk, O. Introduction to Model Based Optimization of Chemical Processes on Moving Horizon. In Grötschel, M., Krumke, S. und Rambau, J., Herausgeber, *Online Optimization of Large Scale Systems: State of the Art*, Seiten 295–340. Springer, 2001.
- [BBLT12] Bielawny, D., Bruns, T., Loh, C. C. und Trächtler, A. Multi-Robot Approach for Automation of an Industrial Profile Lamination Process. In *Procedia Engineering*, Band 41, Seiten 981–987. 2012.
- [Ber01] Berglund, N. Geometrical theory of dynamical systems. Lecture Notes, 2001.
- [Bet05] Betsch, P. The discrete null space method for the energy consistent integration of constrained mechanical systems. Part I: Holonomic constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(33):31–43, 2005.
- [BL05] Bullo, F. und Lewis, A. *Geometric control of mechanical systems*. Springer, 2005.
- [BL06] Betsch, P. und Leyendecker, S. The discrete null space method for the energy consistent integration of constrained mechanical systems. Part II: Multibody dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(4):499–552, 2006.

- [BP84] Bock, H. und Plitt, K. A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems. In *9th IFAC World Congress*, Seiten 242–247. Pergamon Press, Budapest, 2.-6. Juli 1984.
- [Bär00] Bär, C. *Elementare Differentialgeometrie*. de Gruyter, 2000.
- [CWR01] Collins, S. H., Wisse, M. und Ruina, A. A Three-Dimensional Passive-Dynamic Walking Robot with Two Legs and Knees. *The International Journal of Robotics Research*, 20:607–615, 2001.
- [DFJ01] Dellnitz, M., Froyland, G. und Junge, O. The algorithms behind GAIO - Set oriented numerical methods for dynamical systems. In Fiedler, B., Herausgeber, *Ergodic Theory, Analysis, and Efficient Trajectories for Spacecraft*, Seiten 145–174. Springer, 2001.
- [DJ02] Dellnitz, M. und Junge, O. Set Oriented Numerical Methods for Dynamical Systems. In Broer, H., Takens, F. und Hasselblatt, B., Herausgeber, *Handbook of Dynamical Systems*, Band 2, Seiten 221–264. Elsevier, 2002.
- [DOBP<sup>+</sup>09] Dellnitz, M., Ober-Blöbaum, S., Post, M., Schütze, O. und Thiere, B. A multi-objective approach to the design of low thrust space trajectories using optimal control. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 105:33–59, 2009.
- [Ehr05] Ehrgott, M. *Multicriteria Optimization*. Springer, 2. Auflage, 2005.
- [FDF05] Frazzoli, E., Dahleh, M. A. und Feron, E. Maneuver-Based Motion Planning for Nonlinear Systems with Symmetries. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(6):1077–1091, 2005.
- [FL01] Fantoni, I. und Lozano, R. *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer, 2001.
- [FLS00] Fantoni, I., Lozano, R. und Spong, M. W. Energy Based Control of the Pendubot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45:725–729, 2000.
- [FOB12] Flaßkamp, K. und Ober-Blöbaum, S. Energy efficient control for mechanical systems based on inherent dynamical structures. In *Proceedings of American Control Conference*. Montréal, Canada, 27.-29. Juni 2012.
- [FOBK12] Flaßkamp, K., Ober-Blöbaum, S. und Kobilarov, M. Solving optimal control problems by exploiting inherent dynamical systems structures. *Journal of Nonlinear Science*, 22(4):599–629, 2012.
- [Föl93] Föllinger, O. *Nichtlineare Regelungen II*. Oldenbourg Verlag, 7. Auflage, 1993.

- [FöI08] Föllinger, O. *Regelungstechnik - Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig, 2008.
- [FTOB<sup>+</sup>12] Flaßkamp, K., Timmermann, J., Ober-Blöbaum, S., Dellnitz, M. und Trächtler, A. Optimal control on stable manifolds for a double pendulum. In *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Band 12, Seiten 723 – 724. 2012.
- [GBLV12] Gasparetto, A., Boscariol, P., Lanzutti, A. und Vidoni, R. Trajectory Planning in Robotics. *Mathematics in Computer Science*, 6(3):269–279, 2012. ISSN 1661-8270.
- [Gee07] Geering, H. P. *Optimal Control with Engineering Applications*. Springer, 2007.
- [GEK13] Glück, T., Eder, A. und Kugi, A. Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation. *Automatica*, 49(3):801–808, 2013.
- [GH83] Guckenheimer, J. und Holmes, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields*. Springer, 1983.
- [GJ09] Grüne, L. und Junge, O. *Gewöhnliche Differentialgleichungen - Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme*. Vieweg+Teubner, 2009.
- [GTZ05] Graichen, K., Treuer, M. und Zeitz, M. Fast Side-Stepping of the Triple Inverted Pendulum via Constrained Nonlinear Feedforward Control Design. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. Sevilla, Spanien, 12.-15. Dezember 2005.
- [GTZ07] Graichen, K., Treuer, M. und Zeitz, M. Swing-up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation. In *Automatica*, Band 43, Seiten 63–71. 2007.
- [Hai73] Haimes, Y. Integrated system identification and optimization. *Control and Dynamic Systems: Advances in Theory and Application*, 10:435–518, 1973.
- [Han76] Han, S. Superlinearly convergent variable-metric algorithms for general nonlinear programming problems. *Mathematical Programming*, 11:263–282, 1976.
- [Hil01] Hillermeier, C. *Nonlinear Multiobjective Optimization - A Generalized Homotopy Approach*. Birkhäuser, 2001.
- [Hor63] Horowitz, I. M. *Synthesis of feedback systems*. Academic Press New York and London, 1963.

- [Isi95] Isidori, A. *Nonlinear Control Systems*. Band 1. Springer-Verlag, 3. Auflage, 1995.
- [JMOB05] Junge, O., Marsden, J. E. und Ober-Blöbaum, S. Discrete mechanics and optimal control. In *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*. Prag, Tschechien, 3.-8. Juli 2005.
- [JMOB06] Junge, O., Marsden, J. E. und Ober-Blöbaum, S. Optimal Re-configuration of Formation Flying Spacecraft - a Decentralized Approach. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*. San Diego, USA, 13.-15. Dezember 2006.
- [JOB05] Junge, O. und Ober-Blöbaum, S. Optimal reconfiguration of formation flying satellites. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC*. Sevilla, Spanien, 12.-15. Dezember 2005.
- [Kar39] Karush, W. *Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions*. Doktorarbeit, University of Chicago, 1939.
- [KH95] Katok, A. und Hasselblatt, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [Kie10] Kielhöfer, H. *Variationsrechnung*. Vieweg+Teubner, 2010.
- [KLMR00] Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E. und Ross, S. D. Dynamical Systems, the Three-Body-Problem and Space Mission Design. In *International Conference on Differential Equations*, Seiten 1167–1181. World Scientific, Berlin, 2000.
- [Koh09] Kohl, S. Konstruktiver Entwurf eines Laborprüfstandes für ein inverses Mehrfachpendel. Studienarbeit, 23. August 2009.
- [Kra85] Kraft, D. On converting optimal control problems into nonlinear programming problems. In Schittkowski, K., Herausgeber, *Computational Mathematical Programming*, NATO ASI, Seiten 261–281. 1985.
- [Kre99] Kreisselmeier, G. Struktur mit zwei Freiheitsgraden. *at – Automatisierungstechnik*, 6:266 – 269, 1999.
- [KS72] Kwakernaak, H. und Sivan, R. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, 1972.
- [KT51] Kuhn, H. und Tucker, A. Nonlinear Programming. In *Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Seiten 481–492. 1951.

- [KT11] Khatab, S. und Trächtler, A. Differential dynamic programming and the optimal control of vehicle lateral dynamics. In *Steuerung und Regelung von Fahrzeugen und Motoren AUTOREG*. November 2011.
- [LBS08] Leyendecker, S., Betsch, P. und Steinmann, P. The discrete null space method for the energy consistent integration of constrained mechanical systems. Part III: Flexible multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 19:45–72, 2008.
- [Leß09] Leßmann, J.-S. Untersuchung von Antriebskonzepten für den Modellaufbau einer Verladebrücke mit modellbasiertem Reglerentwurf. Studienarbeit, 27. Mai 2009.
- [LFB00] Lozano, R., Fantoni, I. und Block, D. J. Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit. *Systems and Control Letters*, 40(3):197–204, 2000.
- [LFSM09] La Hera, P. X., Freidovich, L. B., Shiriaev, A. S. und Mettin, U. New approach for swinging up the Furuta pendulum: Theory and experiments. *Mechatronics*, 19:1240–1250, 2009.
- [LHK<sup>+</sup>12] Leyendecker, S., Hartmann, C., Koch, M., Johnson, G. und Ortiz, M. Variational collision integrators in forward dynamics and optimal control. In *Proceedings of the 7th International Conference of the Croatian Society of Mechanics*. Zadar, Kroatien, 22.-25. Mai 2012.
- [Lin76] Lin, J. Multiple objective problems: Pareto-optimal solutions by method of proper equality constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21:641–650, 1976.
- [LJO12] Leyendecker, S., Johnson, G. und Ortiz, M. Planned contacts and collision avoidance in optimal control problems. In *The second Joint International Conference on Multibody System Dynamics*. Stuttgart, 29.Mai - 1.Juni 2012.
- [LL98] Leith, D. und Leithead, W. Gain-scheduled controller design: an analytic framework directly incorporating non-equilibrium plant dynamics. In *International Journal of Control*, Band 70, Seiten 249–269. 1998.
- [LL00] Leith, D. und Leithead, W. Survey of gain-scheduling analysis and design. In *International Journal of Control*, Band 73, Seiten 1001–1025. 2000.
- [LOBMO07] Leyendecker, S., Ober-Blöbaum, S., Marsden, J. E. und Ortiz, M. Discrete Mechanics and Optimal Control for Constrained Multibody Dynamics. In *Proceedings of ASME 2007 International Design*

*Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference.* Las Vegas, USA, 4.-7. September 2007.

- [LOBMO10] Leyendecker, S., Ober-Blöbaum, S., Marsden, J. E. und Ortiz, M. Discrete mechanics and optimal control for constrained systems. *Optimal Control, Applications and Methods*, 31(6):505–528, 2010.
- [MAK<sup>+</sup>08] Münch, E., Adelt, P., Krüger, M., Kleinjohann, B. und Trächtler, A. Hybrid Planning and Hierarchical Optimization of Mechatronic Systems. In *International Conference on Control, Automation and Systems*. Seoul, Korea, 14.-17. Oktober 2008.
- [Mar67] Marglin, S. *Public Investment Criteria*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.
- [McG90] McGeer, T. Passive dynamic walking. *International Journal of Robotics Research*, 9(2):62–82, 1990.
- [MH90] Murray, R. M. und Hauser, J. A Case Study in Approximate Linearization: The Acrobot Example. In *Proceedings of the American Control Conference*. 1990.
- [Mie99] Miettinen, K. *Nonlinear multiobjective optimization*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [MOBM08] Moore, A., Ober-Blöbaum, S. und Marsden, J. E. Optimization of spacecraft trajectories: a method combining invariant manifold techniques and discrete mechanics and optimal control. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Pasadena, California, USA, 19.-23. Mai 2008.
- [MOBM11] Moore, A., Ober-Blöbaum, S. und Marsden, J. E. Mesh Refinement Strategies for Spacecraft Trajectory Optimization using Discrete Mechanics and Optimal Control. In *In Proceedings of the 21st AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*. New Orleans, Louisiana, USA, 13.-17. Februar 2011.
- [MR05] Marsden, J. und Ratiu, T. Introduction to Mechanics and Symmetry - A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems. 2005.
- [MR06] Marsden, J. E. und Ross, S. D. New methods in celestial mechanics and mission design. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 43:43–73, 2006.
- [MSL11] Maas, R., Siebert, T. und Leyendecker, S. Structure Preserving Optimal Control of Finger Movements. In *EUROMECH Colloquium 511 on Biomechanics of Human Motion*. Portugal, 9.-12. März 2011.

- [MW01] Marsden, J. E. und West, M. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 10:357–514, 2001.
- [Nat13] National Algorithms Group. <http://www.nag.com>, 2013.
- [OB08] Ober-Blöbaum, S. *Discrete Mechanics and Optimal Control*. Doktorarbeit, Universität Paderborn, 2008.
- [OBJM11] Ober-Blöbaum, S., Junge, O. und Marsden, J. E. Discrete mechanics and optimal control: an analysis. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 17(2):322–352, 2011.
- [OBT09] Ober-Blöbaum, S. und Timmermann, J. Optimal Control for a Pitcher’s Motion Modeled as Constrained Mechanical System. In *Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*. San Diego, USA, 30. August - 2. September 2009.
- [OLT04] Osinga, H. M., Lamooki, G. R. R. und Townley, S. Numerical approximations of strong (un)stable manifolds. *Dynamical Systems*, 19(3):195–215, 2004.
- [ORF12] Ober-Blöbaum, S., Ringkamp, M. und zum Felde, G. Solving Multi-objective Optimal Control Problems in Space Mission Design using Discrete Mechanics and Reference Point Techniques. In *Proceedings of the 51th IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, HI, USA, 10.-13. Dezember 2012.
- [PBGM62] Pontryagin, L., Boltyanski, V., Gamkrelidze, R. und Miscenko, E. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. John Wiley & Sons, 1962.
- [Pd82] Palis, J. und de Melo, W. *Geometric Theory of Dynamical Systems*. Springer, 1982.
- [Pin93] Pinch, E. *Optimal Control and the Calculus of Variations*. Oxford University Press, 1993.
- [Pli81] Plitt, K. *Ein superlinear konvergentes Mehrzielverfahren zur direkten Berechnung beschränkter optimaler Steuerungen*. Diplomarbeit, Universität Bonn, 1981.
- [Pow77] Powell, M. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. In Watson, G., Herausgeber, *Numerical Analysis*, Band 633 von *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1977.
- [Rao09] Rao, S. S. *Engineering Optimization: Theory and Practice*. John Wiley & Sons, 4. Auflage, 2009.

- [RNH10] Rucco, A., Notarstefano, G. und Hauser, J. Optimal control based dynamics exploration of a rigid car with longitudinal load transfer. In *IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 4934–4939. Atlanta, USA, Dezember 2010.
- [RRA02] Rubí, J., Rubio, Á. und Avello, A. Swing-up control problem for a self-erecting double inverted pendulum. In *IEE Proceedings of Control Theory and Applications*, Band 149, Seiten 169–175. 2002.
- [SB95] Spong, M. und Block, D. The pendubot: a mechatronic system for control research and education. In *35th IEEE Conference on Decision and control*, Seiten 555–556. New Orleans, USA, 1995.
- [Sch99] Schlör, M. *Die Berechnung stark (in-)stabiler Mannigfaltigkeiten*. Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik und Physik, Universität Bayreuth, 1999.
- [Sch04] Schütze, O. *Set Oriented Methods for Global Optimization*. Doktorarbeit, Universität Paderborn, 2004.
- [SGWY92] Shinbrot, T., Grebogi, C., Wisdom, J. und Yorke, J. A. Chaos in a double pendulum. *American Journal of Physics*, 60:491–499, 1992.
- [SK11] Schwarz, R. und Köckler, N. *Numerische Mathematik*. Vieweg+Teubner, 8. Auflage, 2011.
- [SO06] Stachowiak, T. und Okada, T. A numerical analysis of chaos in the double pendulum. *Chaos, Solitons and Fractals*, 29:417–422, 2006.
- [SPLE00] Shiriaev, A., Pogromsky, A., Ludvigsen, H. und Egeland, O. On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10:283–300, 2000.
- [Spo95] Spong, M. W. The Swing Up Control Problem For The Acrobot. In *IEEE Control Systems Magazine*, 15, Seiten 49–55. 1995.
- [Spo96] Spong, M. W. Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. In *Proceedings of 1996 IFAC World Congress*, Seiten 431–435. San Francisco, 1996.
- [Spo97] Spong, M. Underactuated mechanical systems. In Siciliano, B. und Valavanis, K., Herausgeber, *Control Problems in Robotics and Automation*. Springer, London, UK, 1997.
- [Spo98] Spong, M. W. Underactuated Mechanical Systems. In *Control problems in Robotics and Automation*, Seiten 135–150. Springer, 1998.

- [TKOBT11] Timmermann, J., Khatab, S., Ober-Blöbaum, S. und Trächtler, A. Discrete Mechanics and Optimal Control and its Application to a Double Pendulum on a Cart. In *Inproceedings of the 18th IFAC World Congress*. Mailand, Italien, 28. August - 2. September 2011.
- [VT08] Vöcking, H. und Trächtler, A. Self-optimization of an Active Suspension System Regarding Energy Requirements. In *International Conference on Control, Automation and Systems*. Seoul, Korea, 14.-17. Oktober 2008.
- [Wik] [www.de.wikipedia.org/wiki/mannigfaltigkeit](http://www.de.wikipedia.org/wiki/mannigfaltigkeit).
- [Wik13] [www.en.wikipedia.org/wiki/furuta\\_pendulum](http://www.en.wikipedia.org/wiki/furuta_pendulum), 2013.
- [Xin11] Xin, X. Analysis of the energy-based swing-up control for the double pendulum on a cart. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21:387–403, 2011.
- [Zad63] Zadeh, L. Optimality and non-scalar-valued performance criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 8:59–60, 1963.
- [ZR01] Zhong, W. und Röck, H. Energy and Passivity Based Control of the Double Inverted Pendulum on a Cart. In *Proceedings of the 2001 IEEE International conference on Control Applications*. Mexico City, Mexico, 5.-7. September 2001.