Für Stefan und Enno

Begründen im Mathematikunterricht der Grundschule am Beispiel Substanzieller Aufgabenformate

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
für das Fach Mathematik und ihre Didaktik

vorgelegt von
Kordula Knapstein, geb. in Arnsberg
Paderborn, 2014

Zusammenfassung

In der vorliegenden Studie wird untersucht, wie Grundschüler bei Aufgabenstellungen der Substanziellen Aufgabenformate „Zahlengitter“ und „Zahlenketten“ ihre mathematischen Erkenntnisse begründen. Dabei wird eine Begründung im Sinne einer schlüssigen Argumentation verstanden, die nicht notwendig den fachmathematischen Ansprüchen an formale Strenge genügen muss.

Die empirischen Daten wurden mittels Leitfadeninterviews mit Viertklässlern erhoben und anschließend, den methodischen Ansätzen der Grounded Theory folgend, hinsichtlich der vier Aspekte „Struktur der Wenn-dann-Aussage“, „Vorgehensweise der Kinder beim Begründen“, „Art der verwendeten Argumente beim Begründen“ und „Umgang mit Allgemeingültigkeit“ qualitativ analysiert.

Es gelang letztlich hinsichtlich jedes genannten Aspekts empirisch begründete Typen zu identifizieren. Basierend auf dieser Typisierung werden abschließend Konsequenzen für den Mathematikunterricht in der Grundschule herausgearbeitet und mögliche weitere Forschungsperspektiven aufgezeigt.

Abstract

The present study examines how children in primary school reason and justify their mathematical decisions while working on Substantial Problem-Formats (“Substanzielle Aufgabenformate”), namely *number grids* (“Zahlengitter”) and *number chains* (“Zahlenketten”). Reasoning and justification is here understood as a logical argumentation which not necessarily has to satisfy the standards of formal rigor of mathematics.

The empirical data of the study were collected in guided interviews with fourth-graders. Following the methods of the Grounded Theory, a qualitative analysis of these data afterwards led to several empirically based types with regard to the aspects “Structure of the If-Then-Statement”, “Procedure Used by the Children When Reasoning”, “Type of Arguments Used When Reasoning”, and “Treatment of Generality”.

As a conclusion consequences for teaching mathematics in primary school are developed based on the empirical results, and ideas for further studies are proposed.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Beweisen hat einen zentralen Stellenwert in der Mathematik. Daher spielt es von jeher eine bedeutende Rolle im Mathematikunterricht. Nach Winter ist die rationale Argumentation „eines der zentralen Lernziele der Schule überhaupt, speziell des Mathematikunterrichts“ (Winter 1975, S.109). Doch wann fängt das Beweisen an? Freudenthal beantwortete diese Frage mit „Jedenfalls, ehe es einen Namen hat“ (Freudenthal 1979, S.187). Damit wollte er sagen, dass das Beweisen seine Wurzeln bereits weit vor der Schulzeit eines Kindes hat (vgl. ebd. S.194). Winter fordert, dass „die Erziehung zum argumentativen Verhalten […] mit dem 1. Schultag beginnt“ (Winter 1983, S.91). Aber wie können Grundschulkinder mit ihren Fähig- und Fertigkeiten die alles entscheidende Frage nach dem „Warum?“ beantworten? Freudenthal ist der Ansicht, dass man auf allerlei Niveaus beweisen kann (vgl. Freudenthal 1979, S.200). Winter plädiert für eine lernstufengerechte Argumentation (vgl. Winter 1975, S.109) und Hanna und Jahnke sind ebenfalls der Meinung, dass jede Rechtfertigung eines Sachverhaltes der Jahrgangsstufe angemessen sein soll (vgl. Hanna und Jahnke 1996, S.903).

Die hier angeführten Ansichten und Forderungen finden sich auch in dem alten und neuen Lehrplan und den Bildungsstandards für die Primarstufe in NRW wieder. So gilt das Argumentieren in dem Lehrplan von 1985 als eines der drei allgemeinen mathematischen Lernziele (vgl. Kultusministerium des Landes NRW 1985, S.21), und in dem Lehrplan von 2003 werden dann die Fähigkeiten zum Begründen in altersgemäßer Weise ausdifferenziert (vgl. MSJK 2003, S.71). In den dem Lehrplan übergeordneten Bildungsstandards für die Primarstufe zählt das Argumentieren zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die von zentraler Bedeutung für das mathematische Arbeiten sind (vgl. KMK 2005). Ähnliches gilt auch für den Aspekt des „Begründens und Beweisens“, der in den US-amerikanischen NCTM-Standards durchgängig vom Vorschulkindergarten bis zu Klasse 12 erwartet wird (vgl. NCTM 2000).

Im Hinblick auf die hier dargestellten Ansichten und Forderungen ist es verwunderlich, dass sich (zumindest die meisten deutschsprachigen) Forschungsvorhaben der letzten drei Jahrzehnte zum Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht fast ausschließlich auf den Bereich der Sekundarstufe I und II beziehen. So wurden Argumentationstypen und –niveaus sowie mathematikspezifische Argumente analysiert (vgl. Vollrath 1980 und Schwarzkopf 2000 und 2003), Beweisstrategien und Denkmuster interpretiert (vgl. Hennes und Schmidt 1981) und Beweisfähigkeiten und Beweisvorstellungen herausgearbeitet (vgl. Stein 1988). Im Rahmen eines Projektes zum logischen Denken und Argumentieren von Grundschülern beim Problemlösen wurde festgestellt, dass Grundschulkinder „zu Argumentationen fähig sind, die auch nach sehr strengen Kriterien Beweis-Charakter haben“ (Stein 1999, S.3). Hennes und Schmidt (1982) untersuchten die Fähigkeiten des logischen Schließens am Ende der Sekundarstufe I im Hinblick auf die Wenn-dann-Struktur mathematischer Sätze. Schwarzkopf (2000 und 2001) wiederum analysierte den real stattfinden Argumentationsprozess im Mathematikunterricht der Klassen 4-6 in Bezug auf dessen Initiierung und Lenkung sowie die darin vorgebrachten Argumente. Eine ähnliche Fragestellung untersuchte Knipping (2003a) vergleichend im deutschen und französischen Mathematikunterricht der Klassen 7 und 8 und arbeitete zwei idealtypische Beweisprozesse und passend dazu zwei Idealtypen von Beweisdiskursen heraus. Healy und Hoyles (1996) analysierten in einer großen landesweiten Studie in England und Wales Wesensmerkmale von mathematischen Rechtfertigungen und Beweisen am Ende der Sekundarstufe I. In einer weiteren großen Studie wurden argumentative Fähigkeiten in Abhängigkeit zu dem Beweisverständnis und in Bezug auf das wissenschaftliche Denken untersucht (vgl. Hellmich, Hartmann, Reiss 2002). Zudem identifizierten Heinze und Reiss (2004) Defizite im Unterrichten von Beweisen. Auch Kuntze (2003) untersuchte den Erarbeitungsprozess von Beweisen im Unterricht genauer, indem er den Grad der Beteiligung der Schüler bei der Beweisredaktion und den Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das mathematische Beweisen analysierte.

Was im Wesentlichen fehlt, ist Forschung zum Beweisen und Begründen in der Grundschule. Im deutschsprachigen Raum gibt es nahezu keine Befunde auf diesem Gebiet. Die bisherigen Untersuchungen lassen sich grob in die Erforschung von inhaltlichen Aspekten des Argumentierens und Begründens und in (schulische) Bedingungsfaktoren unterteilen. Der Schwerpunkt der hier vorliegenden Untersuchung bezieht sich mit der Forschungsfrage „Wie begründen Grundschulkinder?“ auf die inhaltlichen Aspekte des Begründens und wird auf der Grundlage der Forschungsmethode der Grounded Theory (Strauss und Corbin 1996) durchgeführt. In qualitativen, problemzentrierten Interviews zu den substanziellen Aufgabenformaten „Zahlengitter“ und „Zahlenketten“ werden Begründungen von Grundschulkindern evoziert. Die so gewonnenen Daten werden mit Hilfe der empirisch begründeten Typenbildung nach Kluge (1999 und 2000) detailliert hinsichtlich der Aspekte der Auffassung der Struktur einer Aussage, der Vorgehensweise beim Begründen, der Art der gewählten Argumente und dem Umgang mit Allgemeingültigkeit analysiert.

Die Arbeit beginnt mit einem theoretischen Teil (Kapitel 2 und 3), in dem zunächst eine begriffliche Abgrenzung der Begriffe „Beweisen“, „Begründen“ und „Argumentieren“ vorgenommen wird (Kapitel 2.1). Den stoffdidaktisch-orientierten Ausführungen zu einem Modell des Beweisens (Kapitel 2.2), Funktionen von Beweisen (Kapitel 2.3) und der Strenge eines Beweises (Kapitel 2.4) folgen kognitiv geprägte Darstellungen zu verschiedenen Typen von Beweisen (Kapitel 2.5). In Kapitel 2.6 werden zahlreiche, mehrheitlich deutschsprachige empirische Untersuchungen aus den letzten drei Jahrzehnten vorgestellt, die überwiegend im Bereich der Sekundarstufe I durchgeführt wurden.

In Kapitel 3 werden zunächst allgemeine Überlegungen zum Beweisen im Unterricht der frühen Jahrgangsstufen und die daraus resultierenden Ziele dargestellt (Kapitel 3.1). Aus den vorhandenen Aufgaben zum Begründen in der Grundschule werden für diese Untersuchung die substanziellen Aufgabenformate „Zahlengitter“ und „Zahlenketten“ ausgewählt (Kapitel 3.2) und insgesamt Konsequenzen für die vorliegende Untersuchung gezogen sowie die Forschungsfrage weiter spezifiziert (Kapitel 3.3).

In dem praktischen Teil der Arbeit (Kapitel 4 und 5) werden zunächst die Untersuchungsmethode (Kapitel 4.1), die konkreten Aufgabenstellungen (Kapitel 4.2 und 4.3) und Motive und Gründe für das tatsächlich durchgeführte Untersuchungsdesign (Kapitel 4.4) dargelegt.

Die Ergebnisse der empirischen Analysen werden in Kapitel 5 hinsichtlich der einzelnen zu untersuchenden Aspekte herausgearbeitet. In Kapitel 5.1 werden Typen im Hinblick auf die Auffassung der Struktur einer Aussage charakterisiert. In Kapitel 5.2 werden die unterschiedlichen Vorgehensweisen von Grundschülern beim Begründen analysiert. Die verschiedenen Arten von verwendeten Argumenten werden in Kapitel 5.3 identifiziert, und in Kapitel 5.4 wird der unterschiedliche Umgang mit Allgemeingültigkeit interpretiert.

Die daraus entstandenen empirisch begründeten Typen werden abschließend in Kapitel 6 noch einmal zusammengefasst, diskutiert und in den aktuellsten Forschungsstand eingeordnet. Zudem wird ein Ausblick auf mögliche anschließende oder angrenzende Forschungsfragen gegeben.

Redaktionelle Anmerkungen:

- Aus Gründen der einfacheren Lesbarkeit werden Personengruppen nicht nach männlicher und weiblicher Form getrennt (z.B. Lehrerinnen und Lehrer…) bezeichnet, sondern das weibliche Pendant soll in der Nennung der männlichen Form impliziert sein.
- Alle im Text auftretenden Personen wurden anonymisiert (Pseudonyme).
- Die Nummerierung der Abbildungen erfolgt nach Kapitelnummern und dann fortlaufend numerisch. So bezeichnet z.B. die „Abb. 4.2“ die zweite Abbildung im vierten Kapitel.

2 Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht

2.1 Begriffliche Abgrenzung

> *„Über den Begriff „Beweis“ bestehen keine einheitlichen Vorstellungen. Dieser Begriff kann in der Umgangssprache unterschiedlich aufgefaßt werden, er wird in verschiedenen Wissenschaften nicht in gleicher Weise verwendet und auch in der Mathematik wird im Allgemeinen nicht mit einem definierten Beweisbegriff gearbeitet.“ (Bürger 1979, S.103)*

Diese Aussage von Bürger trifft für die Mathematikdidaktik auch heute noch zu. Deshalb ist es wichtig, die unterschiedlichen Begrifflichkeiten im Umfeld des Begriffes „Beweisen“ für die weitere Arbeit festzulegen.

Dass das „Beweisen“ in den verschiedenen Wissenschaften unterschiedlich verstanden wird, ist hinlänglich bekannt: Während in der Mathematik nur deduktive Begründungen als „Beweis“ anerkannt werden, ist es in den Naturwissenschaften durchaus üblich, Gesetze durch Experimente zu „beweisen“, obwohl diese das Gesetz nur in Einzelfällen bestätigen (vgl. Bürger 1979, S.105). Dieses Verständnis eines „Beweises“ stellt Pólya am Beispiel eines Physikers, der einen mathematischen Sachverhalt beweisen will, passend folgendermaßen dar:

> *„‘Ein Physiker glaubt‘, sagt der Mathematiker, ‚daß 60 durch alle Zahlen teilbar ist. Er bemerkt, daß 60 durch 1, 2, 3, 4, 5 und 6 teilbar ist. Er untersucht noch ein paar Fälle wie 10, 20 und 30, die wie er sagt, aufs Geratewohl herausgegriffen sind. Da 60 auch durch diese teilbar ist, betrachtet er seine Vermutung als hinreichend durch den experimentellen Befund bestätigt.‘“* (Pólya 1962, S.32)

„Beweise“ werden zudem auch beispielsweise in den Rechtswissenschaften vor Gericht erbracht. Allerdings unterscheidet sich die Art der Argumente, die die Juristen einsetzen, von denen der Mathematiker. Während bei einem Prozess Gesetzesparagraphen, eine Bundesgerichtsentscheidung, die Meinung einer Autorität oder eine Zeugenaussage anerkannt werden können, gelten in der Mathematik nur Definitionen oder bereits bewiesene Sätze als Argumente (vgl. Freudenthal 1979, S.184).

Umgangssprachlich betrachtet lassen sich dem Beweisen auch Begrifflichkeiten wie das Begründen, Erklären, Argumentieren oder ähnliches zuweisen. Diese Begriffe möchte ich im Folgenden wie Mittelstraß (2005) verstehen. Dabei ist eine

> **Argumentation** *eine „Bezeichnung für eine Rede mit dem Ziel, die Zustimmung oder den Widerspruch wirklicher oder fiktiver Gesprächspartner zu einer Aussage oder Norm (<für> bzw. <gegen> deren Wahrheit bzw. Gültigkeit […] dann argumentiert wird) durch den schrittweisen und lückenlosen Rückgang auf bereits gemeinsam anerkannte Aussagen bzw. Normen zu erreichen. Jede im Verlauf einer solchen Rede erreichte Zustimmung zu einer weiteren Aussage oder Norm (über die Ausgangssätze hinaus) kennzeichnet einen Schritt der Argumentation; die einzelnen Schritte heißen die für (bzw. gegen) die zur Diskussion gestellte Aussage bzw. Norm vorgebrachten <Argumente>. Geht in einer Argumentation jedem Argument genau* ein *anderes unmittelbar voraus und macht jedes Argument vom Ergebnis des ihm unmittelbar vorhergehenden Gebrauch, so liegt eine <Argumentationskette> vor. Kann niemand, der den Ausgangssätzen (Aussagen oder Normen) einer Argumentation zugestimmt hat, irgendeinem ihrer Schritte die Zustimmung verweigern, ohne mindestens einer von ihm akzeptierten Aussage oder Norm zu widersprechen, so heißt die betreffende Argumentation <schlüssig>. Eine schlüssige Argumentation* für *eine Aussage bzw. Norm heißt eine <Begründung> derselben, im Falle der Aussagen auch ein <Beweis>.“* (Mittelstraß 2005, S.202, Stichwort „Argumentation“)

Dieses Verständnis deckt sich mit dem argumentationstheoretischen Ansatz von Schwarzkopf. Er unterscheidet in Anlehnung an Klein (1980) zwischen einer Argumentation und einem Argument wie folgt:

> *„Der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, diesen Begründungsbedarf zu befriedigen, wird als Argumentation bezeichnet. Die in diesem Prozess hervorgebrachten Begründungsangebote werden mathematikspezifisch als Argumente analysiert.“* (Schwarzkopf 2000, S.240)

Während Mittelstraß zwischen der schlüssigen Argumentation einer Aussage („Beweis“) und der einer Norm („Begründung“) unterscheidet, verwende ich im Weiteren diese beiden Begrifflichkeiten in Bezug auf die Mathematik synonym:

In der Aussagenlogik beschreibt Gerster das „Beweisen“ folgendermaßen (Gerster 1972, S.56):

> *„Streng genommen wird nicht das Behauptete bewiesen, sondern daß dieses Behauptete <u>aus den Voraussetzungen</u> folgt. Beweisen heißt, aus Voraussetzungen (Prämissen) Folgesätze (Konklusionen) gewinnen. Beweisen heißt also, eine Implikation, eine Folgebeziehung beweisen.“*

Somit besteht ein mathematischer Beweis aus deduktiven Schlussfolgerungen von anerkanntem Wissen (der Voraussetzung) auf noch nicht anerkanntes Wissen (der Behauptung), und die dabei verwendeten Argumente sind wahre bzw. anerkannte Voraussetzungen und Theoreme (mathematische Sätze oder Definitionen). Da mit einer solchen Definition eines Beweises im Allgemeinen ein mathematisch formaler Beweis assoziiert wird, ziehe ich im Hinblick auf eine empirische Untersuchung in der Grundschule den Begriff „Begründung“ für diese Art der Argumentation vor, da dieser zwar auch das Hervorbringen von schlüssigen Argumenten beinhaltet, jedoch keine formale Strenge assoziiert.

2.2 Ein Modell des mathematischen Beweisens

Boero beschreibt in einem Modell die Fähigkeiten und Verhaltensweisen eines Mathematikers beim Führen eines Beweises. In diesem Modell identifiziert und strukturiert er die folgenden sechs Phasen der Beweisführung (vgl. Boero 1999):
Die erste Phase beinhaltet die Entwicklung einer Vermutung. In dieser Phase wird zunächst die Problemstellung erkundet. Diese Erkundung dauert meist recht lange, da eine mathematische Vermutung häufig erst nach einer intensiven Auseinandersetzung mit der Problemstellung entsteht. Ein Teil des Erkundens der Problemstellung kann die Identifikation plausibler Argumente sein, die die Vermutung beweisen können. Es können Gesetzmäßigkeiten erkannt oder Bedingungen gefunden werden, die Voraussetzung für diese Gesetzmäßigkeiten sind.
Die zweite Phase entspricht der Formulierung der Vermutung gemäß den formalen Konventionen. Diese Phase führt gewöhnlich zu einer Formulierung, die veröffentlicht werden kann und die damit das Ziel des Beweisprozesses anzeigt. Zudem dient diese Phase dazu, die Bedingungen einer Aussage nachvollziehbar zu definieren (vgl. Reiss 2002b, S.7).

In der dritten Phase werden der Inhalt und die Gültigkeit der aufgestellten Vermutung exploriert. Der Inhalt der Vermutung wird mit Hilfe von semantischen und heuristischen Strategien geprüft. Zudem werden mögliche Argumente für die Gültigkeit der Vermutung identifiziert und in Beziehung zueinander gesetzt.
Reiss sieht in dieser dritten Phase „einen Kernbereich mathematischen Arbeitens“:

> *„Die Betrachtung der Inhalte und die Betrachtung geeigneter Methoden zur Lösung einer Beweisaufgabe sind ein Kernbereich mathematischen Arbeitens. Ergebnisse dieser Phase müssen entsprechend auch nicht nur auf das spezifische Problem bezogen sein. Genauso können Einsichten über Einschränkungen, Spezialfälle, Verallgemeinerungsmöglichkeiten im Hinblick auf Inhalte und Methoden aus dieser Phase resultieren.“* (Reiss 2002b, S.7f)

Diese ersten drei Phasen sind durch das individuelle Denken und Vorgehen des Mathematikers gekennzeichnet („…belong[…] to the private side of mathematicians‘ work“ (Boero 1999)). Sie sind der Exploration zuzuordnen. Die nächsten drei Phasen dagegen beinhalten die Formulierung des Beweises nach den gegebenen Standards der *math community* (vgl. Reiss 2002b, S.8).
In der vierten Phase werden für den Beweis relevante Argumente identifiziert, ausgewählt und zu einer Kette von Deduktionsschlüssen verknüpft. Dieses geschieht beispielsweise, wenn der Mathematiker den Beweis informell seinen Kollegen vorstellt.
Die fünfte Phase führt dann zu der Produktion eines Textes, der nach den aktuellen Standards veröffentlicht werden könnte. Dabei ist es ein Unterschied, zu welcher Zeit (heute oder im 18. Jahrhundert) und für welche Zielgruppe (Schulbuch oder Lehrbuch für die Universität) dieser Beweis formuliert wird. In dieser Phase werden die ausgewählten und verknüpften Argumente in einer Reihe von Deduktionsschlüssen angeordnet (vgl. Boero 1999). Des Weiteren müssen die Voraussetzungen genau formuliert sein.
Die sechste Phase ist letztendlich die Annäherung an einen formalen Beweis, der auch von mathematischen Experten im Allgemeinen nicht vollständig realisiert wird (Ein historisches Gegenbeispiel dazu ist die rein formale Ausführung von Russel & Whitehead in den Principia Mathematica zur Gründung von „1+1=2“ (Russell und Whitehead 1963, Volume I, Part II – Prolegoma To Cardinal Arithmetic, S.362)).
Boero beschreibt mit diesen sechs Phasen den Prozess der Beweisführung als ein *„Ineinandergreifen von induktiven und damit explorativen Lösungsschritten und*

deduktiven, eher hypothesenprüfenden Anteilen“ (Reiss 2002b, S.8). Er betont, dass der dargestellte Prozess normalerweise nicht geradlinig, sondern über Umwege oder gar Schleifen abläuft (vgl. Boero 1999).

2.3 Funktionen von Beweisen

Beweise haben verschiedene Funktionen. Traditionell dienen sie der Verifikation von mathematischen Aussagen und damit der Wissenssicherung. Mormann betont, dass dem Beweisen eine Doppelfunktion zukommt: *„Es dient der Sicherung und der Entwicklung des mathematischen Wissens zugleich“* (Mormann 1981, S.14). Winter hebt hervor, dass Beweise, wenn sie lediglich der Wissenssicherung dienen, ein mangelndes Beweisbedürfnis mit sich bringen, da die Funktion der Wissensvermehrung nicht gesehen wird und ein Beweis damit nur noch der Form halber notwendig zu sein scheint (vgl. Winter 1983, S.73). Um Beweise im Zusammenhang mit einer Wissensvermehrung zu sehen, sollen die Schüler seiner Meinung nach anhand geeigneter Beispiele erfahren, dass Beweise (auch) dem tieferen Verständnis von Begriffen und Verfahren dienen. Des Weiteren sollen aus einem mathematischen Satz möglichst viele Folgerungen gezogen werden können, damit sein Beweis den Schülern lohnenswert erscheint. Ebenso wichtig ist es, dass nicht nur der Inhalt des zu beweisenden mathematischen Satzes gehaltvoll, sondern auch die gewählte Beweismethode zukunftsweisend, d.h. auch bei anderen Beweisen einsetzbar ist (vgl. Winter 1983, S.75f). Somit stellt Winter neben der Wissenssicherung die Funktion der Wissensvermehrung und diesbezüglich vor allem die Vertiefung von Verständnis heraus. de Villiers ist der Ansicht, dass die Schüler ein Beweisbedürfnis entwickeln, wenn Sie die die Notwendigkeit von Beweisen einsehen; d.h. wenn sie verstehen, warum sie etwas beweisen sollen. Dazu ist es seiner Meinung nach grundlegend, dass den Schülern die verschiedenen Funktionen von Beweisen angemessen vermittelt werden (vgl. de Villiers 1990, S.17). Er stellt dazu als geringfügige Erweiterung von Bells (1976) formulierten Funktionen der Verifikation, Erläuterung und Systematisierung in seinem Modell folgende fünf zentrale Funktionen von Beweisen zur Diskussion: Ein Beweis soll Aussagen verifizieren, erklären, systematisieren, entdecken und kommunizieren (vgl. de Villiers 1990, S.18).

Ein Beweis verifiziert, wenn er die Wahrheit einer mathematischen Aussage nachweist. Ein Beweis ist allerdings nicht notwendigerweise die Voraussetzung für eine Überzeugung. Im Gegenteil: Die Überzeugung ist möglicherweise sogar häufiger die Voraussetzung für einen Beweis (vgl. de Villiers 1990, S.18). So ist beispielsweise Pólya der Meinung, dass man erst dann nach einem Beweis sucht, wenn man sich in der induktiven Phase der Auseinandersetzung mit einem Sachverhalt ausgiebig davon überzeugt hat, dass die Aussage wahr ist (vgl. Pólya 1954, S.83f). In einem solchen Fall beruht die Motivation für den Beweis auf der Überzeugung der Wahrheit der Aussage. Damit hat der Beweis selbst keine verifizierende Funktion mehr. Seine Funktion liegt dann eher in der Suche nach einer Begründung (vgl. de Villiers 1990, S.18ff).

Des Weiteren besteht das Problem, dass keine absoluten Standards für das Führen von Beweisen oder für die Akzeptanz in der ‚mathematical community' bestehen. Versuche, strenge und vollständige Beweise zu konstruieren, führen zu langen, komplizierten Beweisen, die zum einen den Überblick nahezu unmöglich machen und zum anderen sehr fehleranfällig sind. Deshalb scheint die Begründung einer Aussage Vorrang vor der Existenz eines strengen und vollständigen Beweises zu haben (vgl. de Villiers 1990, S. 19).

Ein Beweis erklärt, wenn er die Einsicht vermittelt, warum eine mathematische Aussage wahr ist. Empirische Verifikationen bieten die Möglichkeit, anhand von einzelnen Beispielen die Wahrheit einer Aussage zu überprüfen. Eine Begründung für die Gültigkeit der Aussage bieten diese Beispiele allerdings nicht; sie bestätigen sie nur. Beweise dagegen eröffnen die Möglichkeit der Einsicht, warum die Aussage wahr ist. de Villiers ist der Ansicht, dass die Begründung einer Aussage für die meisten Mathematiker wichtiger ist als deren Verifikation (vgl. de Villiers 1990, S.20). Hanna (1989b) unterscheidet ‚Proofs that Prove' und ‚Proofs that Explain' und ergänzt damit das Verifizieren ebenfalls um die Funktion des Erklärens. Beide Funktionen dienen dazu, die Wahrheit von Aussagen zu bestätigen, aber während ‚Beweise, die beweisen', nur zeigen, dass eine Aussage wahr ist, zeigen ‚Beweise, die erklären', auch, warum diese Aussage gültig ist (vgl. Hanna 1989b, S.47). Hanna hält es gerade in Bezug auf den Mathematikunterricht für sinnvoll, diese Unterscheidung zu berücksichtigen und die verifizierenden Beweise durch erklärende zu ersetzen oder zumindest die erklärenden zu bevorzugen (vgl. Hanna 1989b, S.49). Leider lässt sich nicht für jede Aussage ein Beweis finden, der Einsicht in den gegebenen Sachverhalt vermittelt. Hanna und Jahnke plädieren aber dafür, verifizierende Beweise nur in den begrenzten Situationen einzusetzen, in denen sich kein erklärender Beweis finden lässt, da erklärende Beweise verständiger machen (vgl. Hanna & Jahnke 1996, S.905). Für Hanna ist damit das Verständnis einer Aussage weitaus bedeutungsvoller als ihre Bestätigung in einer Kette von richtigen, deduktiven Schlussfolgerungen (vgl. Hanna 1989b, S.50).

Ein Beweis systematisiert, wenn er bekannte Ergebnisse in einem deduktiven System von Axiomen, Definitionen und Sätzen in Beziehung zueinander setzt. Das bedeutet, dass einzelne bewiesene Aussagen in ein zusammenhängendes, vereinigtes Ganzes („a coherent unified whole" – de Villiers 1990, S.21) eingeordnet werden. Dabei können nicht explizit gegebene Voraussetzungen identifiziert, oder eine mathematische Theorie kann vereinfacht werden, indem unzusammenhängende Aussagen und Konzepte in diese integriert werden. Des Weiteren liefert eine Systematisierung eine globale Perspektive auf die bekannten Sachverhalte. Häufig führt sie sogar zu einem alternativen deduktiven System, das eine neue Perspektive auf das Wissen bietet und ökonomischer, eleganter oder aussagekräftiger ist (vgl. de Villiers 1990, S.20f).

Ein Beweis hilft entdecken, wenn durch den Beweisprozess neue Aussagen gefunden werden. In der Mathematik werden Sätze nicht immer durch Intuition oder quasi-empirische Methoden entwickelt, bevor sie bewiesen werden. Nach de Villiers lassen sich, historisch gesehen, zahlreiche Beispiele finden, in denen neue Aussagen durch Beweise gefunden wurden. In diesen Beispielen geht nicht die Entdeckung den mathematischen Sätzen voraus, sondern die Beweise gehen der Entdeckung voraus. Vor allem die Einordnung eines neuen Beweises in das übergreifende System von Axiomen, Definitionen und Sätzen führt häufig zu der Entdeckung einer neuen Aussage (vgl. de Villiers 1990, S.21).

Ein Beweis wird kommuniziert, indem er dargestellt und mitgeteilt wird. Diese Kommunikation ruft ein Forum für eine kritische Auseinandersetzung mit dem Beweis hervor. So diskutieren beispielsweise professionelle Mathematiker, Studierende oder auch Lehrer und Schüler darüber, ob der vorgestellte Beweis richtig ist bzw. akzeptiert wird. Dieser regulierende Einfluss des sozialen Kommunikationsprozesses bietet den Vorteil, dass bisher keine katastrophalen Fehler in offiziell anerkannten Beweisen auftraten (vgl. de Villiers 1990, S.22).

Obwohl diese fünf Funktionen von Beweisen voneinander unterschieden werden können, sind sie in bestimmten Fällen durchaus komplex miteinander verknüpft. Ebenso gibt es Situationen, in denen einige dieser Funktionen überwiegen, oder solche, in denen manche Funktionen gar nicht zu finden sind (vgl. de Villiers 1990, S.23.)

Hanna und Jahnke möchten den von de Villiers aufgestellten Funktionen folgende drei Funktionen hinzufügen (Hanna & Jahnke 1996, S. 903):

- die Konstruktion einer empirischen Theorie,
- die Erforschung der Bedeutung einer Definition oder der Konsequenzen einer Vermutung und
- die Eingliederung einer wohl bekannten Tatsache in ein neues System und somit deren Betrachtung aus einer neuen Perspektive

2.4 Strenge eines Beweises

> *„In einer <u>offenen</u> Mathematik kann man immer wieder „warum?" fragen […] Einen definitiven Beweis gibt es da nicht. Und doch hört man einmal auf zu fragen, und wann das geschieht, hängt von der Situation, dem sachlichen und menschlichen Kontext ab, und in ihm ist es dann auch recht wohl bestimmt. Lokales Ordnen habe ich das genannt, lokal bis zu einem – wechselnden - Horizont hin."* (Freudenthal 1979, S.199f)

Wittmann und Müller (1988) entwerfen ein ähnliches Bild vom Beweisen in der Mathematik: Für sie gibt es „absolut strenge" Beweise nicht (Wittmann und Müller 1988, S.254). Es ist wichtig, dass die vorgebrachten Argumente stichhaltig sind. Zwar ist in der *„höheren Mathematik […] ein entsprechender Grad von formaler Darstellung unerlässlich"* (ebd, S.253), aber in erster Linie dienen Beweise ihrer Ansicht nach dazu, den zu beweisenden Sachverhalt zu verstehen (vgl. ebd. S.254).

Lakatos (1979) betont den quasi-empirischen Charakter des Beweisens. Seiner Ansicht nach entwickeln sich Beweise im Diskurs und dienen dazu, die Diskursteilnehmer von der Gültigkeit einer Aussage zu überzeugen. Diese soziale Gemeinschaft legt dabei die Kriterien fest, nach der ein Beweis anerkannt wird (vgl. Hefendehl-Hebeker und Hußmann 2003, S.98). In seinem Buch „Beweise und Widerlegungen" (1979) stellt Lakatos einen solchen Diskurs am Beispiel des Eulerschen Polyedersatzes dar. In diesem Diskurs wird der Begriff des Polyeders immer genauer festgelegt und eine Theorie ausgearbeitet. Damit ist die Strenge eines Beweises ein Kriterium für seine Gültigkeit, welches die soziale Gemeinschaft formuliert (Hefendehl-Hebeker und Hußmann 2003, S.102). Auch Long formuliert, dass *„ein Beweis […] in der Mathematik seinen Status erst [erhält], wenn er als Beweis akzeptiert worden ist. Dieser Anerkennungsprozess findet unter den praktizierenden Mathematikern statt“* (Long 1986, S.616). Seiner Meinung nach ist es die Aufgabe eines Beweises, zu überzeugen. Des Weiteren ist er der Ansicht, dass *„Beweise, die Einsicht […] vermitteln, […] für […] Forscher und Lehrer interessanter und wertvoller [sind] als Beweise, die nur die Gültigkeit der Behauptung belegen“* (ebd. S.616).

Für Hanna ist die Akzeptanz eines mathematischen Satzes ein sozialer Prozess, bei dem das Verständnis und die Bedeutung des Inhaltes wichtiger sind als die (formale) Strenge (vgl. Hanna 1989a, S.21). Weitere wichtige Kriterien für die angestrebte Akzeptanz sind ihres Erachtens die Vereinbarkeit des Theorems mit den bisher akzeptierten mathematischen Sätzen, der gute Ruf des Autors als Experte und überzeugende Argumente für die Stichhaltigkeit des Inhaltes des zu beweisenden Satzes (vgl. ebd. S.21f).

Von diesen Kriterien ist ihr das des Verständnisses am wichtigsten. In Ihrem Beitrag „Proofs that Prove and Proofs that Explain“ teilt sie Beweise in die beiden Gruppen „Beweise, die beweisen“ und „Beweise, die erklären“ ein (vgl. Hanna 1989b). Später betont sie zusammen mit Jahnke noch einmal, dass das Hauptziel des Beweisens das Verstehen ist (*„the key goal is understanding“*, Hanna und Jahnke 1996, S.903). Somit soll jede Rechtfertigung eines Sachverhaltes in ihrer Form dem entsprechenden „Level“ derjenigen angemessen sein, die einen Beweis aushandeln. Dabei kann eine solche Rechtfertigung in der Schule sowohl eine Rechnung, als auch eine visuelle Demonstration oder eine geleitete Diskussion sein, bei der auf ‚richtige‘ Argumentationsregeln geachtet wird. Ebenso zählen für sie auch präformale oder informelle Beweise zu den akzeptierten Rechtfertigungen, sowie Beweise, die den Normen der Strenge entsprechen. (vgl. Hanna und Jahnke 1996, S. 903) Diese Forderung lässt sich gut in dem folgenden Zitat Hannas zusammenfassen:

> *„Rigour is a question of degree in any case. In the classroom one need provide not absolute rigour, but enough rigour to achieve understanding and to convince.”* (Hanna 1997, S.183)

Freudenthal behauptete bereits 1979, dass man auf allerlei Niveaus beweisen kann (vgl. Freudenthal 1979, S. 200). Er stellte sich die Frage, ob er auf einen echten Beweis drängen sollte, wenn ein Schüler so zu seiner Zufriedenheit erklärt, dass er merkt, dass der Schüler den Sachverhalt verstanden hat. (vgl. ebd. S.190). Hannas Antwort darauf kann eindeutig als ein „Nein“ interpretiert werden. Sie fordert im Mathematikunterricht das richtige Klassenraum-Klima für den Einsatz von Beweisen. Ihrer Meinung nach zeichnet dieses sich nicht durch streng geführte Beweise aus, sondern dadurch, dass die Lehrer ermutigt werden, Erklärungen zu fokussieren und die Schüler ihre Entdeckungen und Vermutungen rechtfertigen sollen. Damit werden Beweise nicht nur als ultimative Form von mathematischen Rechtfertigungen eingesetzt, sondern als erklärendes Werkzeug. Dazu müssen die Schüler mit den Standards der mathematischen Argumentation vertraut werden. Das bedeutet, dass sie mathematische Argumente erkennen und produzieren sollen. Und die Lehrer müssen Wege finden, die Schüler in der Entwicklung dieser Fähigkeiten zu unterstützen. (vgl. Hanna 1997, S. 183)

Während die bisherigen Ausführungen mehrheitlich stoffdidaktisch geprägt waren, erfolgt in dem nun folgenden Kapitel ein gewisser Perspektivwechsel in Richtung kognitionspsychologischer Überlegungen.

2.5 Typen von Beweisen

Begründen kann man auf allerlei Niveaus (vgl. Freudenthal 1979; Hanna und Jahnke 1996; Hanna 1997). Allerdings existieren in der Mathematikdidaktik unterschiedliche Ansichten, welche Arten von Begründungen als Beweis gelten. Diese werden im Folgenden dargelegt.

Balacheff unterscheidet vier Haupttypen, die er bei seinen empirischen Untersuchungen identifiziert hat: der naive Empirismus, das kritische Experiment, das generierende Beispiel (pragmatische Beweise) und das Gedankenexperiment (konzeptueller Beweis). Für ihn stellen diese vier Typen eine Hierarchie in der kognitiven Entwicklung von Beweisen dar (vgl. Balacheff 1988, S.218).

Auf der Stufe des naiven Empirismus wird eine Aussage nach der Verifizierung einiger Fälle für wahr gehalten. Bei dem kritischen Experiment wird die Verallgemeinerung anhand eines einzigen Beispiels vorgenommen. Dieses Beispiel wird so gewählt, dass es möglichst keine besonderen Eigenschaften aufweist. Der Typ des generierenden Beispiels geht auch von einem Beispiel aus. Dieses weist aber repräsentative Charakteristiken für alle Beispiele seiner Klasse auf. Es werden Begründungen für die Wahrheit einer Aussage in Form von Handlungen oder Umformungen gegeben. Bei dem Typ des Gedankenexperimentes ist die Begründung von der Handlung losgelöst. Es werden nur gedankliche Operationen durchgeführt und Beziehungen hergestellt (vgl. ebd. S.218ff).

Während die ersten beiden Typen die Wahrheit einer Aussage nicht begründen, sondern nur anhand von Beispielen zeigen, dass die Aussage stimmt, weil ‚sie geht', werden bei den anderen beiden Typen Gründe für die Gültigkeit der Aussage angegeben. Diese Tatsache birgt eine fundamentale Trennung zwischen dem naiven Empirismus und dem kritischen Experiment auf der einen und dem generierenden Beispiel und dem Gedankenexperiment auf der anderen Seite auf. Trotzdem bezeichnet Balacheff alle vier Typen als ‚Beweise'. Die ersten beiden Typen von empirischen Validierungen deshalb, weil sie von ihren ‚Machern' als solche anerkannt werden (vgl. ebd. S.218). Damit ist für Balacheff für den Begriff des Beweises die Akzeptanz seiner Gültigkeit durch die Gemeinschaft zu einem bestimmten Zeitpunkt wesentlicher als seine Allgemeingültigkeit.

Wittmann und Müller (1988) orientieren sich in ihrer Einteilung von Beweistypen an den unterschiedlichen Beweisarten von Branford (1913). Branford führt neben experimentellen und wissenschaftlichen Beweisen auch „intuitiv-anschauliche" Beweise an. Zu den experimentellen „Beweisen" zählen zum Beispiel Plausibilitätsbetrachtungen, empirische Verifikationen oder an Beispielen erläuterte Regeln. Diesem Beweistyp stehen die beiden anderen gegenüber. Den wissenschaftlichen Beweisen dient die formale Universitätsmathematik als Vorbild. Die intuitiv-anschaulichen Beweise werden als vorläufige und weniger strenge wissenschaftliche Beweise angesehen. Somit weisen die wissenschaftlichen und intuitiv-anschaulichen Beweise nur eine Unterscheidung in ihrem Grad formaler Strenge auf, nicht jedoch eine scharfe Trennung (vgl. Wittmann und Müller 1988, S.248). Eine Trennung jedoch wird zwischen den experimentellen „Beweisen" auf der einen und den intuitiv-anschaulichen Beweisen auf der anderen Seite gezogen:

> *„Die experimentellen „Beweise" bestehen in der Verifikation einer endlichen Zahl von Beispielen, was natürlich keine Allgemeingültigkeit sichert. Inhaltlich-anschauliche, operative Beweise stützen sich dagegen auf Konstruktionen*

und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, daß sie sich auf eine ganze Klassen von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen." (Wittmann und Müller 1988, S.249)

Eine Art „Arbeitsdefinition" von inhaltlich-anschaulichen Beweisen liefern Blum und Kirsch in Anlehnung an Semadenis Konzept „prämathematischer Beweise". Sie verstehen unter einem inhaltlich-anschaulichen Beweis…

> *„… eine Kette von korrekten Schüssen […], die auf nicht-formale Prämissen zurückgreifen, d.h. insbesondere auf inhaltich-anwendungsbezogene Grundideen […] oder auf intuitiv evidente, „allgemein geteilte" […] Aussagen. Die Schlüsse sollen in ihrer „psychologisch natürlichen" Ordnung aufeinanderfolgen. Sie müssen vom konkreten, inhaltlich-anschaulich gegebenen Fall direkt verallgemeinerbar sein, wobei diese Übertragbarkeit auf den allgemeinen Fall intuitiv erkennbar sein soll, und sie müssen bei Formalisierung der jeweiligen Prämissen korrekten formal-mathematischen Argumenten entsprechen."* (Blum und Kirsch 1989, S.202)

Zudem erweitern Blum und Kirsch (1989) die von Wittmann und Müller (1988) vorgenommene Einteilung in Beweistypen noch um den handlungsbezogenen Beweis („action proof" – Semadeni (1984)). Unter einem handlungsbezogenen Beweis verstehen Blum und Kirsch – in Anlehnung an Semadeni - einen Beweis, der aus konkreten Handlungen besteht, die zuerst wirklich ausgeführt und dann nur vorgestellt (verinnerlicht) werden und die korrekten mathematischen Handlungen entsprechen (vgl. Blum und Kirsch 1989, S.203). Diese handlungsbezogenen („prämathematischen") Beweise sind keineswegs zu verwechseln mit *„unzulänglichen Begründungen „nur für Kinder", nur experimentellen Verifikationen, nur „anschaulichen" Begründungen, (unvollständiger) Induktion nach Verifikation einiger Sonderfälle oder plausiblen Begründungen im Sinne von G. Pólya"* (Kirsch 1979, S.262). Handlungsbezogene Beweise sind ‚echte' Beweise, die in einer besonderen Art dargestellt werden (vgl. Kirsch 1979, S.262). Da sowohl die Prämissen als auch die Schlüsse enaktiv dargestellt werden, kann man auch von einer enaktiven Repräsentation eines formal-exakten Beweises sprechen (vgl. Blum und Kirsch 1989, S.203). Allerdings gibt es ohne Zweifel in allen Teilgebieten der Mathematik Aussagen, die nicht handlungsbezogen bzw. „prämathematisch" beweisbar sind (vgl. Kirsch 1979, S.271). Da weder die inhaltlich-anschaulichen, noch die handlungsbezogenen Beweise formal sind, aber dennoch allgemeingültigen Charakter aufweisen, haben Blum und Kirsch beide Beweisarten als „präformal“ bezeichnet. Demnach unterscheiden sie folgende vier Stufen von Beweisen (Blum und Kirsch 1989, S. 203):

- Experimentelle „Beweise“

- Handlungsbezogenen Beweise
- Inhaltlich-anschauliche Beweise

Präformale Beweise

- Formale Beweise

Während Balacheff (1988) empirische Validierungen als Beweise bezeichnet, akzeptieren Wittmann und Müller (1988) und Blum und Kirsch (1989) experimentelle „Beweise“ aufgrund der fehlenden Allgemeingültigkeit nicht als solche.

In der weiteren Arbeit wird das Beweisen im Mathematikunterricht zum einen im Hinblick auf den Lernenden – also niveauangemessen im Sinne Freudenthals (1979), Hanna und Jahnkes (1996) und Hannas (1997) – erfolgen. Zum anderen soll es aber auch in Anlehnung an Wittmann und Müller (1988) und Blum und Kirsch (1989) unter dem Gesichtspunkt mathematischer Verallgemeinerung verstanden werden.

2.6 Empirische Untersuchungen zum Beweisen

Das Thema „Beweisen“ ist zentral im Mathematikunterricht und war immer schon Gegenstand von empirischen Untersuchungen. Ich stelle einige wesentliche, vor allem deutschsprachige Studien vor, die seit den 1980er Jahren veröffentlicht wurden. In den überwiegenden Fällen beziehen sich diese Forschungen auf Schülerinnen und Schüler aus der Sekundarstufe I. Ein großer Teil der Fragen und Aufgabenstellungen stammt aus dem Bereich der Geometrie.

Vollrath (1980) thematisierte das Argumentieren an elementaren mathematischen Aussagen im Unterricht mit Hauptschülern. Er wählte eine stark problemhaltige Situation, die zu unterschiedlichen Argumentationen führen sollte. So wurden die Schüler aufgefordert, zu erklären, warum ½ kleiner ist als ¾. Vollrath war der Ansicht, dass die wesentliche Funktion des Beweisens die Vermittlung von Einsichten ist. Die meisten Antworten der Probanden bezogen sich tatsächlich auf

Einsichten; nur wenige verwiesen auf Autoritäten, Erfahrung oder gar die Vorstellung (vgl. Vollrath 1980, S.33ff). Die wichtigsten Typen, die identifiziert werden konnten, waren der Zählervergleich, der Vergleich von Vielfachen oder Teilen, das Ergänzen, die Betrachtung des Unterschieds (auch in Bezug auf die Zahl 1) und der Vergleich von Dezimalbrüchen oder Prozenten (vgl. ebd. S.35f). Diese Typen konnten auf verschiedenen Niveaus beobachtet werden: So wurde mit der Bruchzahl als Maßzahl stärker formal oder ausschließlich formal argumentiert (vgl. ebd. S.38). Auch eine Wiederholung der Untersuchung mit Siebtklässlern von Gymnasien zeigte im Wesentlichen dieselben Ergebnisse: Auch diese Probanden stützten sich fast ausschließlich auf Einsichten, wendeten dieselben Argumentationstypen an und begründeten auf den bereits festgestellten Niveaus (vgl. ebd. S.39). So wie sich die dargestellte Typisierung von Argumenten von Vollrath auf die vorgegebene Aufgabenstellung bezog, identifizierte auch Schwarzkopf (2000) im Rahmen seiner Fallstudien zu Argumentationsprozessen im Mathematikunterricht (4.-6. Klasse) unter anderem diverse hervorgebrachte Argumente, die zum Kontext einzelner in dem jeweiligen Unterricht behandelten Aufgabenstellungen passen, aber keine Typisierung darstellen. Er analysierte die Argumente mathematikspezifisch und konnte den Verweis auf unterschiedliche Erfahrungen (z.B. im geschickten Rechnen, in der Anwendung mathematischer Begriffe, aus dem außermathematischen Alltag oder mit sozialen Regelmäßigkeiten des Unterrichts) beobachten. Ebenso wendeten die Schüler Rechengesetze oder Rechenalgorithmen zur Begründung an; zum Teil auch explizit formulierte Definitionen. Sie nutzten aber auch Beziehungen zwischen Rechenoperationen, Veranschaulichungen oder schulische Gewohnheiten mit mathematischen Zusammenhängen (vgl. Schwarzkopf 2000, S. 436ff).

Eine theoretische Klassifizierung von Begründungen und Beweismustern mit Beispielen aus der Grundschule und der Sekundarstufe I stammt von Müller (1995). Dieser skizzierte eine Stufenfolge hinsichtlich der Komplexität von Beweisen (vgl. Müller 1995, S.51). Eine Begründung wurde dabei als Elementarform des Beweisens (als „einschrittiger“ Beweise) aufgefasst. Als Grundtypen des Begründens wurden die „Identifizierung und Realisierung eines Begriffs“, die „Anwendung eines Satzes“, die „Anwendung der Kontraposition eines Satzes“ und die „Wiederlegung der Universalaussage durch ein Gegenbeispiel“ angenommen (ebd. S.54ff). Einfach zusammengesetzte Begründungen (wie z.B. „Einfache lineare Herleitungen“, „Rückschlüsse“ oder „Einfache Fallunterscheidungen“ – ebd. S.59ff) wurden bzgl.

ihrer Komplexität höher eingestuft. Einfache Beweise stellten das höchste Anforderungsniveau dar, da sie zusätzlich zu den einzelnen Begründungsschritten eine Darstellung des Beweisganges erfordern. Einige charakteristische Beweismuster dieser Niveaustufe sind beispielsweise „Beweise, die in analoge Teilschritte zerfallen“, „Komplexere Fallunterscheidungen“, „Einfache Äquivalenz-beweise“, oder „Einfache indirekte Beweise“ (ebd. S.65ff).

Schwarzkopf klassifizierte in seiner Veröffentlichung (2003) Argumentationstypen von Begründungen. Er fächerte am Beispiel der Aufgaben an Streichquadraten, die aus Steinbring (2000) stammen, ein mögliches Spektrum von Typen von Argumenten auf (empirisches, empirisch-konstruktives und strukturell-mathematisches Argument), die er in Bezug zu dem jeweiligen Lernprozess des Probanden setzte, der diese Argumentationstypen anwendete (vgl. Schwarzkopf 2003, S.222ff).

Hennes und Schmidt (1981) untersuchten Beweisstrategien und Denkmuster von Hauptschülern aus 10. Klassen. Beim Begründen mathematischer Aussagen aus dem Bereich der Arithmetik konnten sie herausarbeiten, dass den Probanden die Konstruktion von Gegenbeispielen als Argumentation zu einer Aussage geläufig war; der Rückgriff auf bereits bewiesene Sätze und Definitionen allerdings nicht. Während keine Ansätze zu gängigen Beweisschemata zu beobachten waren, ließ sich bei ähnlich gestellten Aufgaben eine Gewöhnung an ein mathematisches Beweismuster feststellen (vgl. Hennes und Schmidt 1981, S.348ff). Dabei konnte „der Gebrauch von Variablen […] zur Zusammenfassung von konkret-numerischen Erfahrungen […] durchaus […] erwartet werden“ (ebd. S.343).

Stein weist in seiner Studie zu Beweisfähigkeiten und Beweisvorstellungen von 11- bis 13-jährigen Hauptschülern (1988) darauf hin, dass „die ausschließliche Betrachtung von schriftlichen Beweisleistungen eines Schülers zu einer grundsätzlich anderen Einschätzung seiner Beweisfähigkeit führen kann, als dies bei einer Gesamtschau seines Problemlöseprozesses der Fall wäre“ (Stein 1988, S.32). Er fand heraus, dass der Ausschluss von möglichen Problemlösemöglichkeiten (bei der von ihm gewählten Aufgabenstellung war es das konkrete Messen) die Beweisleistung von Schülern verbessern kann. Allerdings konnte er keinen Einfluss auf die Beweisleistung feststellen, wenn der Aufforderungscharakter (z.B. statt „Erkläre.“: „Begründe.“) oder der Abstraktionsgehalt der Aufgabenstellung (z.B. statt „24cm“: „doppelt so lang“) variiert wurden (vgl. ebd. S.32).

Später untersuchte Stein (1999) das logische Denken und Argumentieren von Grundschülern beim Lösen von Problemen. Er stellte ihnen unlösbare Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Mathematik. Die Notwendigkeit zu Begründungen sollte aus der unlösbaren Situation heraus entstehen. Stein fand heraus, dass bereits in der Grundschule die Problemlöseprozesse in der Regel logisch gesteuert sind. Logische Schlüsse können dabei sowohl implizit, als auch explizit eingesetzt werden (vgl. Stein 1999, S.3f). So wurden zum Beispiel bei fast allen Probanden Phasen einer impliziten logischen Steuerung bei dem unlösbaren Problem aus dem Bereich der Geometrie (unlösbares Pentomino-Puzzle) beobachtet. Phasen expliziter Steuerung sind dagegen nicht sehr häufig nachzuweisen (vgl. ebd. S.16). Hinsichtlich des Argumentierens stellte Stein fest, dass Grundschulkinder „zu Argumentationen fähig sind, die auch nach sehr strengen Kriterien Beweis-Charakter haben“ (ebd. S.3). Dieses ist zum Beispiel der Fall, wenn die Kinder zur Begründung der Unlösbarkeit Bedingungen formulieren, unter denen die Aufgabe doch lösbar wäre (vgl. ebd. S.25).

Hennes und Schmidts Ergebnisse zu den Fähigkeiten des Logischen Schließens von Hauptschülern in der 10. Klasse (1982) beziehen sich auf die Behandlung der Wenn-dann-Struktur mathematischer Sätze und deren Umkehrung beim Argumentieren. Sie fanden heraus, dass ein Großteil der Probanden die Inversionsregel wie eine korrekte Schlussregel handhabt. Zudem wurde vor allem dann die Subjunktion im Sinne der Bijunktion betrachtet, wenn der mathematische Sachverhalt nicht leicht zu überschauen war. Die richtige Negation von Subjunktionen gelang in ihrer Untersuchung in großem Maße (vgl. Hennes und Schmidt 1982, S.162f).

Schwarzkopf (2000 und 2001) wollte die im Mathematikunterricht real stattfindenden Argumentationsprozesse transparent machen. Dazu entwickelte er einen begrifflichen Rahmen, durch den diese Prozesse beschrieben und verstanden werden können. Er fand heraus, dass Argumentationen in interaktiven Prozessen von Lehrperson und Schülern gemeinsam initiiert werden. Dabei sollen die Schüler eigenständiger im Argumentieren werden, indem sie selbst begründen müssen (vgl. Schwarzkopf 2001, S.273). In den meisten Fällen lenkte die Lehrperson den Argumentationsprozess, indem sie Begründungen zu Aussagen der Schüler einforderte, auf ausführliche Begründungen achtete oder auch zum Teil die Befriedigung des Begründungsbedarfes anzeigte (vgl. Schwarzkopf 2000, S.432f). Solche Prozesse verfolgen das Ziel, mathematikspezifisches Argumentieren zu erlernen (vgl. ebd. S.433f). Dass die Analyse der hervorgebrachten Argumente hinsichtlich dieses Ziels allerdings noch einige mathematisch-inhaltliche Mängel identifiziert, ist an den herausgearbeiteten, bereits weiter oben erwähnten Argumenten ersichtlich, die zum Teil auf Erfahrungen, Gewohnheiten oder Veranschaulichungen beruhen (vgl. ebd. S.436ff).

Knipping analysierte vergleichend „typische“ Unterrichtsstunden zur Behandlung des Satzes des Pythagoras in deutschem und französischem Mathematikunterricht in der 8./9. Klasse. Hinsichtlich der Fragestellung, wie Beweisprozesse initiiert, realisiert und fortgeführt werden, kristallisierten sich zwei Arten von idealtypischen Beweisprozessen heraus. Während in Deutschland ausgehend von dem Berechnungsproblem Formulierungen und Begründungen des Zusammenhanges entwickelt wurden (Typ „einsehen, dass“), wurde in Frankreich eine allgemeine Aussage formuliert und danach eine öffentliche Begründung für diese gesucht (Typ „begründen, warum“) (vgl. Knipping 2003b, S.201ff). Passend zu diesen idealtypischen Beweisprozessen kristallisierten sich zwei Idealtypen von Beweisdiskursen heraus: In den Unterrichtsstunden in Deutschland waren visuelle Repräsentationen Ausgangspunkt für die Argumentationen (Typ „anschauendes Deuten“). In den Unterrichtsstunden in Frankreich wurden dagegen die einzelnen Bestandteile einer Argumentation sprachlich geäußert und danach schriftlich an der Tafel fixiert (Typ „öffentliches Begründen“) (vgl. ebd. S.203ff). Somit ergaben sich sowohl bezüglich der Kontextanalyse (Beweisprozesse), als auch im Hinblick auf die Argumentationsanalyse (Beweisdiskurse) idealtypische Charakterisierungen, die zudem den beiden vergleichenden Ländern zugeordnet werden konnten.

Healy und Hoyles führten 1996 eine große, landesweit angelegte Studie mit etwa 2500 Schülern der 10. Klasse in England und Wales durch, um Charakteristiken von mathematischen Rechtfertigungen und Beweisen herauszuarbeiten (Healy & Hoyles 1998). Die Aufgabenstellungen stammten aus den Themenbereichen Arithmetik/Algebra und Geometrie. Die Ergebnisse der Untersuchung waren insgesamt enttäuschend (vgl. ebd. S.2ff): Viele der Schüler waren nicht in der Lage, einen Beweis überhaupt zu beginnen. Wenn begründet wurde, so waren empirische Verifikationen die beliebteste Form der Argumentation. Zudem war es auffällig, dass die Schüler eher in narrativer Form argumentierten, als eine formale Darstellung zu wählen. Es waren signifikant mehr Probanden in der Lage, einen richtigen Beweis aus vorgegebenen Möglichkeiten auszuwählen, als selbst einen Beweis zu erbringen. Dabei erbrachten Schüler mit einem besseren mathematischen Faktenwissen nicht nur bei der Beurteilung, sondern auch im Führen von Beweisen bessere Leistungen. In beiden Modi waren die Leistungen im Bereich der Arithmetik/Algebra besser als im Bereich der Geometrie.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung und das eher geringe Leistungsniveau, das sich im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich in der gymnasialen Oberstufe bei der Auswertung der TIMSS-Studie (Baumert, Bos, Watermann 1998) zeigte, waren Ausgangspunkt für eine Studie von Reiss und Heinze (2000) mit 81 Abiturienten. Diese wurden zu ihrem Geometriewissen und ihrem Begriffsverständnis befragt und sollten zudem vorgegebene Beweise beurteilen. Die zu bearbeitenden Aufgaben waren aus dem TIMSS-Pool entnommen bzw. lehnten sich an die Aufgaben von Healy und Hoyles an. Zudem wurde mit Hilfe einer weiteren Aufgabe das räumliche Vorstellungsvermögen erfasst. Es zeigte sich, dass die Kenntnisse im Bereich der elementaren Geometrie und das geometrische Begriffsverständnis eher gering waren. Dabei bedingt natürlich ein gutes geometrisches Begriffsverständnis gute Leistungen in der elementaren Geometrie. Die Bewertung von Beweisen fiel den Probanden leichter als das selbstständige Führen von Beweisen. Es wurde ein Zusammenhang zwischen der Güte der selbst geführten Beweise und der richtigen Bewertung von Beweisen festgestellt. Formal dargestellte Beweise wurden deutlich häufiger als korrekt beurteilt als Beweise, die in narrativer Form geführt wurden. Hinsichtlich des räumlichen Vorstellungsvermögens wurde ein Zusammenhang von diesem zu guten Kenntnissen im Bereich der elementaren Geometrie identifiziert (vgl. Reiss und Heinze 2000, S.520f). Diese letzte Erkenntnis fügt sich in die Ergebnisse der Untersuchung von Reiss, Klieme und Heinze (2001) ein. Diese arbeiteten heraus, dass die geometrische Kompetenz (gemeint sind hier die Kenntnisse in (elementarer) Geometrie) von den Aspekten des Methodenwissens (z.B. dem Führen von Beweisen), des geometrischen Begriffsverständnisses, der Metakognition und des räumlichen Vorstellungsvermögens abhängig ist (vgl. Reiss, Klieme, Heinze 2001, S.100ff).

In einer weiteren groß angelegten Studie mit etwa 650 Schülern am Ende der 7. Klasse wurden deren argumentative Fähigkeiten in Abhängigkeit von ihrem Beweisverständnis in Geometrie untersucht (Hellmich, Hartmann, Reiss 2002 und Reiss, Hellmich, Thomas 2002). Die Probanden zeigten in Bezug auf ihre argumentativen Fähigkeiten ein sehr heterogenes Leistungsbild (vgl. Hellmich, Hartmann, Reiss 2002, S.232f): Bei vier vorgegebenen möglichen Beweisen zu einer mathematischen Aussage fiel es den Schülern schwerer, die nicht korrekten Beweise zu beurteilen als die korrekten. Sie hielten die narrative Version des Beweises am geeignetsten, um einem Mitschüler den entsprechenden Sachverhalt zu erklären. Auch in dieser Studie zeigte sich wieder, dass die Beurteilung von vorgegebenen Beweisen einfacher ist, als selbstständig Argumentations- oder Begründungsschritte aufzuschreiben. Somit konnte ein deutlicher Zusammenhang zwischen guten argumentativen Fähigkeiten und einem guten Beweisverständnis herausgearbeitet werden.

Argumentative Fähigkeiten sind aber nicht nur in der Mathematik wichtig, sondern werden als maßgeblich für die Entwicklung des (nicht nur wissenschaftlichen) Denkens überhaupt angesehen. Der zweite Aspekt, der in dieser Studie untersucht wurde, war der Bezug der argumentativen Fähigkeiten zu der Kompetenz des wissenschaftlichen Denkens. Es stellte sich heraus, dass die „Fähigkeiten im wissenschaftlichen Denken [die] Leistungen im Bereich des mathematischen Argumentierens und Begründens beeinflussen“ (Hellmich, Hartmann, Reiss 2002, S.234).

In der Untersuchung von Healy und Hoyles (1998) zeigte sich, dass die Schüler mit dem ausgeprägteren mathematischen Faktenwissen auch bessere Leistungen in den geforderten Bereichen des Beweisverständnisses erbrachten. Dieses mathematische Faktenwissen stellt eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für mathematisches Beweisen und Begründen dar. Aus diesem Grund sind Reiss und Thomas (2000) in ihrer Studie mit 26 Abiturienten der Frage nachgegangen, was neben dem mathematischen Faktenwissen das Verständnis von Beweisen und die Fähigkeit zur Beweisführung beeinflusst (vgl. Reiss und Thomas 2000 und Reiss und Heinze 2001). Sie ließen die Probanden schwierige Aufgaben aus der elementaren Geometrie (entnommen aus der TIMSS-Studie, vgl. Baumert, Bos, Lehmann 2000) bearbeiten, die selbstständiges Argumentieren und fortgeschrittene Problemlösefähigkeiten erforderten. Dabei war ihnen bewusst, dass die Schüler formale Beweise als Ideal betrachten, dieses Ideal aber keinen Lösungsprozess abbildet, sondern das Endprodukt eines Beweisprozesses darstellt. Die besondere Schwierigkeit besteht darin, dass insbesondere die explorativen Schritte und all die Irrwege, die auch Experten beim Führen von Beweisen gehen, für die Schüler im Unterricht intransparent bleiben. Zudem gehen sie selbst eher narrativ als formal vor.

Damit unterscheidet sich ihre eigene Arbeitsweise tiefgreifend von ihrem Ideal (vgl. Reiss und Thomas 2000, S.98ff).

In Bezug auf das Phasenmodell von Boero (1999) wurde von Reiss und Thomas (2000) und Reiss und Heinze (2001) herausgearbeitet, inwiefern sich die Herangehensweise der Probanden an eine Beweisführung von der eines Experten unterscheidet. Die Abiturienten zeigten einen wenig systematischen Umgang mit Hypothesen und Argumenten. Meistens explorierten sie nur die Problemstellung. Die Erkundung möglicher Argumentverknüpfungen kam eher selten vor. Auch wurden die Argumente selbst kaum auf ihre Korrektheit überprüft. Nur wenige Probanden waren in der Lage, die wesentlichen Argumente des gesuchten Beweises in eine vollständige Argumentationskette zu bringen. Die komplette Organisation der Argumente zu einem Beweis wurde an keiner Stelle erbracht (vgl. Reiss und Thomas 2000, S.109 und Reiss und Heinze 2001, S.503).

Ein zweiter Aspekt in der Studie von Reiss und Thomas (2000) ist der Einfluss des wissenschaftlichen Denkens allgemein auf das mathematische Beweisen und Begründen. Das wissenschaftliche Denken von Heranwachsenden kann als empiristisch und intuitiv charakterisiert werden. Es zeigte deutliche Einschränkungen (vgl. Reiss und Thomas 2000, S.101f): Häufig wurden Argumentationsketten auf empirische und intuitive Argumente aufgebaut und nicht auf ihre Schlüssigkeit hin geprüft. Die Annahme von Hypothesen erfolgte oft ohne vollständige Prüfung, und meistens wurden eigene Annahmen nicht mehr in Frage gestellt. Auch Widersprüche zwischen der Theorie und der Praxis wurden einfach hingenommen. Eine vollständige Bearbeitung der gegebenen Problemstellung konnte nur selten beobachtet werden. Insgesamt wurde deutlich, dass das Begründen und Beweisen mathematischer Sachverhalte auch für Abiturienten ungewohnte Aktivitäten sind (vgl. Reiss und Thomas 2000, S.109 und Reiss und Heinze 2001, S.103).

Diese Befunde legten die Vermutung nahe, dass sich die gezeigten Fähigkeiten der Schüler durch die Art und Weise des erlebten Mathematikunterrichts ergeben haben könnten (vgl. Reiss und Thomas 2000, S.110). Der Unterricht an deutschen Gymnasien wird häufig durch das fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch geprägt. Reiss ist der Ansicht, dass dieses kleinschrittige lehrergesteuerte Verfahren eher ergebnis- als prozessorientiert ist und ein echtes Verständnis eines mathematischen Problems mehr behindert, als dass es dieses fördert (vgl. Reiss 2002a, S.41). Diesem Unterrichtsstil stellt sie den diskursiven Unterricht gegenüber, der sich durch eher offene Aufgabenstellungen auszeichnet. Dabei übernimmt der Lehrer in diesem offenen Unterricht die Rolle eines Mediators, und die Schüler lernen eigenständig und verständnisorientiert. Sie werden häufig gefordert, Begründungen zu erbringen (vgl. ebd. S.42).

Die o.a. Studie mit etwa 650 Schülern am Ende der 7. Klasse wurde auch noch dahingehend ausgewertet, welche Unterrichtsbedingungen förderlich für das Verständnis vom Begründen und Beweisen sind (Reiss 2002a). Es zeigte sich, dass Probanden aus einigen Klassen häufiger auch Rechnungen begründeten, obwohl gar keine Begründungen gefordert waren. Es ist zu vermuten, dass das mathematische Argumentieren und Begründen in diesen Klassen zum (ggf. täglichen) Unterrichtsklima gehört. In dem gesamten Test lagen die Leistungen dieser Klassen deutlich über dem Durchschnitt (vgl. ebd. S.43). Es wurden hochsignifikante Unterschiede im argumentativen Verhalten zwischen leistungsstärkeren und leistungsschwächeren Klassen festgestellt. Diese Ergebnisse legen nahe, dass es einen diskursiven Mathematikunterricht in den leistungsstärkeren Klassen gibt (vgl. ebd. S.46). (Da Unterrichtsstile meines Erachtens aufgrund ihrer enormen Komplexität eine kaum zu kontrollierende Variable darstellen, ist ihr Einfluss auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler allerdings eher kritisch zu bewerten.)

Heinze und Reiss (2004) videografierten 20 Unterrichtsstunden in verschiedenen 8. Klassen von Gymnasien, in denen die Lehrer aufgefordert waren, „typische“ Beweisstunden zur Kongruenz in der Geometrie zu zeigen. Es wurde beobachtet, wie Beweise in den Klassen gelehrt und welche Phasen des Beweisprozesses vom Lehrer betont bzw. vernachlässigt werden (vgl. Heinze und Reiss 2004, S.99). Die Ergebnisse dieser Studie wiesen mehrere Defizite im Unterrichten auf. So mussten die Schüler dem Beweis folgen, den der Unterrichtende im Sinn hatte. Dieser plante und kontrollierte den Beweisprozess und erarbeitete den Beweis in einem fragend-entwickelnden Unterricht. Bei diesem Unterrichtsstil fand sich kein Platz, um wichtige und bedeutsame Stufen des Beweisprozesses, wie zum Beispiel die Erkundung der Problemsituation oder die Sammlung zusätzlicher Informationen, zu thematisieren. Für die Schüler wurde der Beweis in „Häppchen“ zerlegt, ein Überblick über den gesamten Prozess fehlte (vgl. ebd. S.101ff).

In einer ähnlich angelegten Studie von Kuntze (2003) wurde der Erarbeitungsprozess von Beweisen noch detaillierter untersucht. Es wurde analysiert, inwiefern eine Beweisredaktion, d.h. eine Rückschau oder ein Überblick über den geführten

Beweis, oder auch Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das mathematische Beweisen im Unterricht erbracht wurden. In jedem Fall wurde zudem der Grad der Beteiligung der Schüler festgehalten (vgl. Kuntze, 2003, S.373f). Die Ergebnisse zeigten, dass die Beweisredaktion zwar in den überwiegenden Fällen geleistet wurde, die Schüler aber nahezu nicht daran beteiligt wurden. Eine Rückschau oder ein Überblick über einen Beweis wurde fast gar nicht erbracht; und wenn, dann wurde dieser Teil von dem Unterrichtenden übernommen. Auch Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das mathematische Beweisen fehlten überwiegend (vgl. ebd. S.374ff). Das bedeutet, dass die Schüler ihre „beweisspezifische Methodenkompetenz hauptsächlich auf der Basis von Lehrermitteilungen oder implizit durch die Beobachtung konkreter Unterrichtsbeweise erwerben“ (ebd. S.376). Somit wurden auch in dieser Studie mögliche Ursachen für eine geringe Beweiskompetenz aufgezeigt, die auf Defizite in der Art und Weise des hier beobachteten Unterrichtens zurückzuführen sein könnten.

In diesen zahlreichen vorliegenden empirischen Studien wurden zum einen inhaltliche Aspekte des Begründens und Beweisens herausgearbeitet und zum anderen (schulische) Bedingungsfaktoren. Zu den inhaltlichen Aspekten zählen die identifizierten Argumentationstypen und –niveaus (vgl. Vollrath 1980; Schwarzkopf 2000 und 2003; Müller 1995), die Strategien und Vorgehensweisen der Probanden (vgl. Hennes und Schmidt 1981; Stein 1988) und deren Fähigkeiten im logischen Denken (vgl. Stein 1999; Hennes und Schmidt 1982). Einen anderen Schwerpunkt der Untersuchungen bilden die Bedingungen für das Argumentieren und Begründen (vgl. Reiss, Hellmich, Thomas 2002; Hellmich, Hartmann, Reiss 2002; Healy und Holyles 1998; Reiss und Heinze 2000; Reiss, Klieme, Heinze 2001), der Einfluss des wissenschaftlichen Denkens auf diese Tätigkeiten (vgl. Reiss und Thomas 2000; Reiss und Heinze 2001) und der erteilte und erlebte Unterricht (vgl. Schwarzkopf 2000 und 2001; Knipping 2003; Kuntze 2003; Heinze und Reiss 2004; Reiss 2002a).

Exkurs

Die im Weiteren aufgeführten empirischen Untersuchungen zum Thema Beweisen, Begründen und Argumentieren wurden nach der Durchführung der eigenen Studie veröffentlicht und konnten somit auf das Design dieser Studie keinen Einfluss mehr nehmen. Aus Gründen der Vollständigkeit werden sie an dieser Stelle aufgeführt und fließen ggf. in die Auswertung bzw. die Zusammenfassung der Ergebnisse der eigenen Studie an geeigneter Stelle mit ein.

Meyer (2007a und 2007b) erstellte ein Begriffsnetz zur Analyse von Entdeckungen und Begründungen, so dass es möglich war, Schüleräußerungen hinsichtlich der Plausibilität, der Kreativität und des Begründungsbedarfs von Entdeckungen, sowie die Schlüssigkeit bzw. die Überzeugungskraft von Begründungen zu rekonstruieren. Zudem sollten die Interaktionsprozesse zwischen Lehrern und Schülern beim Entdecken und Begründen erfasst werden. Meyers vorrangiges Ziel war die Schärfung des Begriffs „Entdeckung", da zur Analyse von Begründungen bereits Begriffe durch die mathematikdidaktische Argumentationstheorie gegeben sind. Meyer fasst Entdeckungen als Abduktionen im Sinne von Charles S. Pierce auf, der zwischen Deduktion, Induktion und Abduktion unterscheidet. Dabei ist die Deduktion ein sicherer und denknotwendiger Schluss, der allerdings nicht zur Generierung neuer Erkenntnisse beiträgt. Der Induktion kommt die Aufgabe zu, eine bereits vorhandene Hypothese zu bestätigen oder zu widerlegen. Dieses Vorgehen ist nicht erkenntniserweiternd. Durch den Einbezug der Abduktion verliert die Induktion damit das in der allgemeinen Literatur verbreitete Ansehen einer Schlussform zur Generierung neuer Gesetze. Die Abduktion hilft bei der Ermittlung einer erklärenden Hypothese bzw. Theorie. Sie ist kein sicherer Schluss, wird aber als einzige dieser drei Schlussformen als diejenige angesehen, die die Generierung neuer Erkenntnisse ermöglicht (vgl. Meyer 2007b, S.288ff). Die Abduktion selbst unterscheidet Meyer, in Anlehnung an Eco (1985), in 4 verschiedene Typen: Bei der kreativen Abduktion wird ein Gesetz zur Klärung eines vorhandenen Resultates neu erfunden. Dieses Gesetz kann ggf. auch falsch sein. Bei der über- und untercodierten Abduktion ist das zu verwendende Gesetz bekannt. Während es bei der übercodierten Abduktion „quasi auf der Hand" liegt, wird es bei der untercodierten Abduktion als das plausibelste unter vielen ausgesucht. Mit Hilfe der Meta-Abduktion „wird die abduktiv gewonnene Vermutung in einen Zusammenhang mit dem bisherigen Wissen gebracht" (ebd. S.293). Meta-Abduktionen laufen implizit ab und bleiben damit der wissenschaftlichen Analyse verschlossen. Es ist zu beachten, dass alle Abduktionstypen immer relativ zum Individuum zu sehen sind (ebd. S.292f).

Mit Hilfe der Theorie der Abduktion wurde der Begriff der „Entdeckung“ geschärft, und das erstellte Schema der Abduktion bewährte sich in dem empirischen Teil der Untersuchung mit Viert-, Siebt- und Zehntklässlern als Werkzeug zur Rekonstruktion von Entdeckungsprozessen (vgl. Meyer 2007a, S.236). Die hervorgebrachten Begründungen wurden mit Hilfe des Toulmin-Schemas (1996) analysiert. Bei den empirischen Analysen stellte sich heraus, „dass die Rekonstruktion von Entdeckungen als Abduktionen wesentlich komplizierter ist als diejenige von Begründungen nach Toulmin“ (Meyer 2007b, S.307). Hinsichtlich der Interaktionsprozesse zwischen Lehrern und Schülern beim Entdecken und Begründen zeigte sich ein vielseitiges interaktives Zusammenspiel. Aber auch die Bildung einer Abduktion selbst kann als interaktiver Prozess gestaltet werden, bei dem individuelle Gedanken mit von außen vorgegebenen Resultaten in Zusammenhang gebracht werden. Zudem können Abduktionen Begründungsprozesse auslösen. In den meisten Fällen wurde der Begründungsbedarf jedoch von den Lehrern erzeugt (vgl. Meyer 2007a, S.235).

Das von Meyer (2007a und 2007b) zugrunde gelegte Begriffsnetz zur Analyse und Rekonstruktion von Entdeckungen und Begründungen wendeten auch Meyer und Voigt (2008) bei ihrer Analyse von Schulbuchseiten an. Schulbücher stehen im Spannungsfeld zwischen der Wissenssicherung und der Wissensgewinnung. Zum einen wird ein verbindlicher und systematischer Aufbau der Schulmathematik repräsentiert (Wissenssicherung oder Intersubjektivität), und zum anderen soll das Prinzip des selbsttätigen Lernens (Wissensgewinnung oder Subjektivität) angewendet werden. Meyer und Voigt sind der Ansicht, dass es durch die Verbindung dieser beiden Ansprüche mit Hilfe von Entdeckungsaufgaben gelingen kann, „die Schüler [zu] veranlassen, auf dem Wege zur Entdeckung eines Satzes selbst eine latente Beweisidee zu gewinnen“ (Meyer und Voigt 2008, S. 124). Sie sprechen von einer „latenten“ Beweisidee bei einer Entdeckung, „weil sich der Schüler nicht bewusst sein muss, dass er einige Schritte auf seinem Weg zur Vermutung des Satzes als wesentliche Schritte im Beweis des Satzes nutzen könnte“ (ebd. S.127). Meyer und Voigt charakterisieren die mathematikdidaktischen Begriffe „Entdecken“, „Prüfen“ und „Begründen“ mit den Schlussformen Abduktion, Induktion und Deduktion, präzisieren diese und grenzen sie dabei voneinander ab. Des Weiteren arbeiten sie „verschiedene Strategien und Maßnahmen heraus[…], wie Aufgaben in Schulbüchern gestellt werden (müssen), damit die Schüler mit der

Entdeckung eines neuen mathematischen Satzes auch eine latente Beweisidee gewinnen, so dass subjektive Vermutungen durch Bezug auf bekannte Merksätze intersubjektiviert werden“ (ebd. S.148).

Für Krumsdorf steht das beispielgebundene Beweisen zum einen in Beziehung mit dem induktiven Prüfen und zum anderen mit dem formellen Beweisen (vgl. Krumsdorf 2009, S.712). Er sieht im beispielgebundenen Beweisen vordergründig das induktive Prüfen einer behaupteten Aussage. Wenn diese Prüfung mit einer latenten Beweisidee (im Sinne von Meyer und Voigt 2008) erfolgt, so kann dieses seiner Meinung nach als allgemeiner Beweis für den allen Beispielen zugrunde liegenden Sachverhalt gelten, den der Lernende allerdings noch subjektiv realisieren und dann in seiner Sprache äußern muss (vgl. Krumsdorf 2011, S.500). In einer exemplarischen Teilstudie mit 15 Grundschülern einer 4. Klasse und etwa 10 Gymnasiasten einer 7. Klasse fokussierte er die sprachlichen Aspekte beim beispielgebundenen Beweisen, denn bei dieser Beweisform muss nicht nur das Allgemeingültige im Besonderen erkannt, sondern auch sprachlich ausgedrückt werden. Es stellte sich heraus, dass den Schülern bei der subjektiven Realisierung und ggf. auch Manifestierung des Beweises selbstgeprägte, z.T. individuelle Begrifflichkeiten helfen. Zudem ist der Einsatz von Sprache überhaupt umso schwieriger, je einsichtiger den Schülern eine gegebene bildliche Darstellung ist (vgl. Krumsdorf 2011, S.501).

Vielen Lernenden fällt es auch zum Ende der Sekundarstufe I noch schwer, selbstständig mathematische Beweise zu führen. Für diese Beweise müssen sie zum einen auf ihr Wissen über Definitionen, Sätze, Regeln und Begriffe zurückgreifen und zum anderen auf spezifische Kriterien (sog. Methodenwissen; s.u.), aufgrund derer die Argumentation in der Mathematik als Beweis akzeptiert wird. Eine mögliche Erklärung für die auftretenden Schwierigkeiten im selbsttätigen Führen von mathematischen Beweisen könnte in der bei den Lernenden nicht vorhandenen Transparenz dieser Kriterien liegen. Aus diesem Grund untersuchten Ufer [u.a.] (2009) das vorhandene Methodenwissen von Schülern aus der Sekundarstufe I, sowie den Zusammenhang zwischen diesem Methodenwissen und der Beweiskompetenz allgemein. Heinze und Reiss (2003) gliederten die spezifischen Kriterien für akzeptable Beweise in die Aspekte „Beweisschema“, „Beweisstruktur“ und „Beweiskette“ und nannten dieses Wissen „Methodenwissen“. Das Beweisschema bezieht sich auf einzelne Schritte im Beweis; genauer gesagt: auf die zugelassenen Argumente im Sinne allgemeingültiger deduktiver Schlüsse. Dabei ist nicht die Darstellung (z.B. in formaler Form), sondern letztlich die Transparenz eines Argumentes für diesen Aspekt des Methodenwissens ausschlaggebend. Die Beweisstruktur beschreibt die Geschlossenheit des Beweises als Argumentation, d.h. dass die deduktiven Schlüsse so angeordnet sein müssen, dass sie mit der Voraussetzung beginnen und bei der Behauptung enden. Dabei müssen die Aussagen, die zur Stützung der Argumente eingesetzt werden, gesichert sein. Der Aspekt der Beweiskette bezieht sich auf die Verbindung der Beweisschritte untereinander. Das bedeutet, dass sich die aufeinanderfolgenden Beweisschritte zu einer logischen Kette formieren müssen (vgl. Ufer [u.a.] 2009, S.35f).

In ihrer empirischen Untersuchung im Bereich der Geometrie mit ca. 700 Schülern der achten Klassen an Gymnasien konnte ein Zusammenhang zwischen dem Methodenwissen und der (geometrischen) Beweiskompetenz bestätigt werden. Dabei war der Einfluss dieses Wissens nicht allzu groß, aber substanziell. Hinsichtlich des vorhandenen Methodenwissens der Schüler stellte sich heraus, dass die verschiedenen Aspekte (Beweisstruktur, Beweisschema, Beweiskette) unterschiedlich beherrscht werden. In allen Bereichen wurden jedoch Unsicherheiten festgestellt. Von den vorgegebenen Argumentationsbeispielen bewerteten die Schüler das korrekte Beispiel, das im formalen Stil gegeben war, am sichersten. Dagegen konnte nur etwa ¼ der Schüler einen Zirkelschluss als fehlerhaft erkennen. Diese Ergebnisse zeigen, dass die Beweisstruktur weniger sicher als das Beweisschema beherrscht wurde. Aber auch hinsichtlich des Beweisschemas traten Probleme in beiden Teilaspekte (Typ des verwendeten Arguments und sprachliche Darstellung) auf. So kam es zu Fehleinschätzungen bei Beweisen mit empirischen Argumenten, aber ebenso zu Ablehnungen von korrekten Argumenten, die in narrativer Form gegeben waren. Zum Aspekt der Beweiskette konnten mit dem eingesetzten Aufgabenformat keine direkten Erkenntnisse gewonnen werden. Die Analyse zusätzlicher Begründungen der Schüler legte aber nahe, dass dieser Aspekt von ihnen berücksichtigt wurde (vgl. ebd. S.39ff).

Der dargestellte Einfluss des Methodenwissens auf das Beweisen sollte seine Konsequenz im Unterricht finden. So wäre es wünschenswert, „die ganze Bandbreite (mathematisch) akzeptabler Argumentationsformen im Unterricht“ zu würdigen (ebd. S.47) und erarbeitete (falsche oder korrekte) Beweise bzw. die dazugehörigen Beweisideen immer wieder zu reflektieren (vgl. ebd. S.47f).

Auch Jahnke (2010) fordert, das Wissen über Beweise immer wieder explizit zu thematisieren. Neben dem dargestellten Methodenwissen erweitert er seine Forderung zusätzlich noch um folgende Einsichten:

1. *„Ein mathematischer Beweis beweist* keine Sachverhalte*, sondern „wenn-dann-Aussagen“. […]*
2. *Die* Sicherheit *der Mathematik liegt nicht in ihren Aussagen, sondern in ihren Schlüssen.*
3. *Die* Akzeptabilität der Hypothesen *[…] ist eine Sache der Bewertung. […]*
4. *In der* Arithmetik *(und Kombinatorik) hat man es mit Gedankenobjekten zu tun, über die wir hohe Kontrolle haben. Dagegen streift man in der* Geometrie *bereits den Bereich der Physik. Ihre Aussagen unterliegen daher im Prinzip der Kontrolle durch die Erfahrung. […]*
5. *[…] das mathematische Schließen [stellt] besondere Anforderungen der* Strenge*.“* (Jahnke 2010, S.57f)

Das Thema „Beweisen im Mathematikunterricht“ beinhaltet viele verschiedene Facetten. So untersuchten beispielsweise Heinze [u.a.] (2007) die Geschlechtereffekte im Bereich des Beweisens und Begründens. Sie reanalysierten Daten aus vier quantitativ-empirischen Studien mit knapp 2800 Gymnasiasten aus den Klassen 7 und 8 aus den Jahren 2001 bis 2005 zum geometrischen Beweisen und Begründen. Es zeigten sich nur bedeutungslose kleinste geschlechtsspezifische Unterschiede in der geometrischen Beweiskompetenz (vgl. Heinze [u.a.] 2007, S.163). Damit wurde für den Bereich Mathematik die „gender similarities hypothesis“ von Hyde (2005) bestätigt, die besagt, dass die Leistungsunterschiede zwischen den Geschlechtern so gering sind, dass sie für die Praxis kaum Bedeutung haben (vgl. ebd. S.149).

Später untersuchte Heinze (2010) den Aspekt der Akzeptanz eines Beweises. Ein neuer Beweis muss in der Mathematik zunächst veröffentlicht und dann von anderen Mathematikern geprüft und akzeptiert werden. Die Veröffentlichung kann in einem wissenschaftlichen Journal, als Präsentation auf einer Konferenz oder als Vorabdruck geschehen. Die Akzeptanz dieses neuen Beweises hängt von den mathematischen Kollegen ab, die Experten in demselben Forschungsgebiet sind, da viele Beweise auch nur für solche „Experten“ verständlich und nachvollziehbar sind. Wenn ein neuer Beweis dann von den „Experten“ akzeptiert wurde, ist es wahrscheinlich, dass die ganze mathematische Kommunität ihn akzeptiert. Dabei müssen „Nicht-Experten“ den „Experten“-Kollegen vertrauen (vgl. Heinze 2010, S.102). Heinze führte eine kleine empirische Studie mit 40 Mathematikern durch, von denen 15 „senior mathematicians“ (Professoren oder Privatdozenten) und 25 „junior mathematicians“ (Doktoranden oder Postdoktoranden) waren. Diese Probanden wurden nach ihren Akzeptanzbedingungen für neue mathematische Beweise in ihrem eigenen Forschungsgebiet, in einem fremden Forschungsgebiet (in dem sie nicht „Experte“ sind) und bei der Überprüfung eines wissenschaftlichen Artikels befragt (vgl. ebd. S.104f). Es stellte sich heraus, dass die wichtigsten Akzeptanzbedingungen für neue Beweise die eigene Prüfung (detailliert oder zumindest die Prüfung der Schlüsselargumente), die Sicherheit, dass andere Experten den Beweis geprüft haben, und die Annahme, dass der Beweis korrekt ist, weil er bereits lange existiert und noch nichts Entgegenstehendes gefunden wurde, sind. Dabei werden Beweise aus fremden Forschungsgebieten eher akzeptiert als die aus dem eigenen Forschungsgebiet. Allerdings akzeptieren die „senior mathematicians“ häufig nicht die von anderen Experten geprüften Beweise automatisch als korrekt (vgl. ebd. S.106f).

Die im Folgenden dargestellten Untersuchungen beschäftigen sich alle im weitesten Sinne mit den Argumentationsprozessen von Schülern. Cramer (2010) verwendete in ihrer Fallstudie ein Analyseinstrument, das zusätzlich zu der Struktur von Argumentationsprozessen im Sinne Toulmins (1996) auch deren „mathematische Qualität“ rekonstruieren kann. Bei der Analyse der Strukturen unterteilte sie die Schlussweisen nach Ottmers (2007) in alltagslogische und konventionalisierte Schlussweisen. Die alltagslogischen Schlussweisen (mit den Subkategorien Kausal-, Vergleichs-, Gegensatz- und Einordnungsschlüssen sowie Beispielargumentationen) ähneln stark den logischen Schlussweisen. Die konventionalisierten Schlussweisen sind konventionell festgelegte Schlussmuster, die im Alltag häufig vorkommen. Von großer Bedeutung für den Unterricht ist dabei der Autoritätsschluss, dessen Begründung in der Anerkennung einer Autorität liegt, die dieselbe Behauptung vertritt (vgl. Cramer 2010, S.229f). Zumindest für ihre Fallstudie mit 2 leistungsstarken Schülerinnen einer 10. Klasse des Gymnasiums, die eine spezielle logische Aufgaben lösen sollten, erwies sich ihr Analyseinstrument für die Rekonstruktion der von den Schülerinnen verwendeten Schlussregeln als geeignet. Die Schülerinnen zeigten bei der Lösung der Aufgabe ein strukturiertes Vorgehen mit Kombinationen aus Kausal- und Gegensatzschlüssen, sowie ein induktives Beispiel durch die

Verknüpfung von möglichen Fällen. Alle ihre Schlussweisen konnten den Subkategorien von Ottmers alltagslogischen Schlussweisen problemlos zugeordnet werden (vgl. ebd. S.231f). Es bleibt zu prüfen, inwiefern sich das verwendete Analyseinstrument auch in anderen Situationen und im Hinblick auf andere Aufgabentypen bewährt.

Scholz (2010) untersuchte in ihrer qualitativen Studie die Argumentationskompetenz am Ende der Sekundarstufe I mit Partnerinterviews zu Argumentationsaufgaben auf unterschiedlichem Niveau. In ihrer Auswertung unterschied sie verschiedene Verhaltensweisen zur Kompetenz des Vermutens (vgl. Scholz 2010, S.23ff) und zu der des Beweisens (vgl. ebd. S.32ff). Hinsichtlich des Vermutens stellte sie Beobachtungen auf unterschiedlichen Niveaus fest, arbeitete verschiedene Methoden zur Hypothesengenerierung heraus und analysierte qualitative Unterschiede in den Vermutungen (vgl. ebd. S.23ff). Die Verhaltensweisen beim Beweisen reichten von einem nicht vorhandenen Beweisbedürfnis über Beweise durch Umformulierungen oder Empirie, Anpassen oder mit Gegenbeispielen bis hin zu Beweisen durch algebraische Überlegungen (vgl. ebd. S.32ff). Zudem stellte sich in drei Bereichen ein Zusammenhang zwischen der Kompetenz des Vermutens und der des Beweisens heraus: So konnten Probleme beim Nachvollzug der Wenn-dann-Aussage sowohl aufgrund von mangelndem Fachwissen, als auch wegen der fehlenden Kompetenz, die „Voraussetzung und Behauptung in ihrer strukturellen Bedeutung zu verstehen und voneinander trennen zu können“ (ebd. S.52), gezeigt werden. Zudem gab es Schüler, die „Je-desto-Aussagen“ selbstständig formulierten und damit zeigten, dass sie durchaus Zusammenhänge erkannt haben und wissen, dass diese einander bedingen, aber nicht in der Lage waren, die gegebenen Aussagen mathematisch zu formulieren und zu begründen (vgl. ebd. S.52ff). Die Schüler, die die Wenn-dann-Aussage selbstständig formulieren konnten, waren auch in der Lage, die so geschaffene Struktur mit der Identifikation der entsprechenden Bedingungen und dem Nachvollzug des Zusammenhangs als Ausgangspunkt für einen logischen Beweis zu verwenden (vgl. ebd. S.54ff).

Bezold (2010) arbeitete ein Unterrichtskonzept zur Entwicklung der Argumentationskompetenz von Grundschülern und ein entsprechendes Modell für das Argumentieren zur Auswertung dieser Kompetenz aus. Der dieser Untersuchung zugrundeliegende Argumentationsbegriff lässt sich für die Primarstufe in die drei aufeinander folgenden Bausteine „Beschreiben von Entdeckungen (Vermutungen)“,

„Hinterfragen von Entdeckungen“ und „Begründen von Entdeckungen“ unterteilen (vgl. Bezold 2012, S.76). Das theoriebasierte Kompetenzmodell enthält die drei Stufen „Grundanforderungen“, „zusätzliche Anforderungen“ und „fortgeschrittene Anforderungen“, die jeweils die beiden Komponenten der Komplexität der Zahlbeziehungen und/oder des Begründungsniveaus enthalten (vgl. Bezold 2012, S.89ff). Somit ist jedes Kompetenzniveau mit und ohne Begründung erreichbar (vgl. Bezold 2010, S.162). Für ihr Vorhaben setzte Bezold Aufgaben ein, mit denen die Argumentation unabhängig vom Leistungsniveau der Schüler gefördert werden kann; wie zum Beispiel Forscheraufgaben zu Zahlengittern, die Anlässe und Potenzial zum Entdecken und Begründen enthalten und Anforderungen unterschiedlichen Niveaus trotz gleichem inhaltlichen Kontext aufweisen (vgl. Bezold 2010, S.163 und Bezold 2012, S.81). Diese Aufgaben wurden in dem ausgearbeiteten vierphasigen Unterrichtsmodell eingesetzt. Dabei wurde als erstes der Forscherauftrag initiiert, dann in einer individuellen Phase selbstständig und ohne Hilfestellung an der Aufgabe gearbeitet, danach in der gemeinsamen Phase des Forschertreffs die bisherigen Erarbeitungen einander vorgestellt, verglichen und diskutiert und ggf. strategische bzw. methodische Forschertipps gegeben und zum Abschluss die Forscherergebnisse der Klasse präsentiert und verglichen bzw. bewertet (vgl. Bezold 2010, S.162f und Bezold 2012, S.92ff).

Bei der Analyse der ca. 850 schriftlichen Schülerdokumente mit Argumentationen von Drittklässlern erwies sich Bezolds Kompetenzmodell als geeignetes Beurteilungsinstrument für die eingesetzten Forscheraufgaben. Es stellte sich heraus, dass die Grundschüler bei *einer* Forscheraufgabe Leistungen auf allen Niveaus zeigten. Dieses Ergebnis belegt, dass die Forscheraufgaben die nötigen Anforderungsdifferenzen beinhalten. Zudem waren nahezu 40% der Drittklässler in der Lage, ihre Entdeckungen (in ihrer individuellen Arbeitsphase) auch zu begründen (vgl. Bezold 2012, S.96ff). Das erarbeitete Unterrichtskonzept bewährte sich, da „83% der Kinder jeder Lernausgangslage […] ihre Argumentationskompetenz verbessern“ konnten (Bezold 2010, S.164). Durch die Methode des Forschertreffs konnten 46% der Kinder einen Lernzuwachs dokumentieren. Dabei profitierten die Kinder aus der höchsten Kompetenzstufe weniger als die Kinder, die anfangs nicht einmal in der Lage waren, Entdeckungen zu machen (vgl. Bezold 2012, S.98).

Fetzer (2011) arbeitete im Rahmen ihrer empirischen Studie heraus, wie Grundschulkinder im Mathematikunterricht argumentieren. Dazu rekonstruierte sie

Argumentationen, die sie als Datenmaterial aus einer Langzeitstudie gewonnen hatte. Die Schüler der ersten bis dritten Klasse hatten zuerst ihre Aufgabenlösungen verschriftlicht und dann präsentiert. Insbesondere die Daten aus diesen Veröffentlichungsphasen wurden mit Hilfe des Modells von Toulmin (2003) argumentationstheoretisch analysiert (vgl. Fetzer 2011, S.32f).

Dabei ließen sich die Argumentationen von Grundschülern durch die folgenden vier Aspekte charakterisieren:

1. **Einfache Schlüsse:** Einfache Schlüsse bestehen aus dem Datum (Ausgangspunkt der Argumentation) und der Konklusion (Behauptung). Ein Garant (Regel, die den Übergang zwischen Datum und Konklusion bildet und somit den Schluss legitimiert) für den Schluss wird nicht angeführt; häufig wird sogar die Konklusion nicht geäußert (vgl. ebd. S.33f).
2. **Substanzielle Argumentationen:** Substanzielle Argumentationen sind unsichere, vage Schlüsse. (Sichere, deduktive Schlüsse – sogenannte „analytische“ Argumentationen – waren bei den Daten gar nicht zu finden.) Der Garant dieser Schlüsse enthält nicht alle Informationen, die im Schluss übermittelt werden. Trotzdem besitzt diese Argumentation oft für andere Kinder eine hohe Überzeugungskraft (vgl. ebd. S.35ff).
3. **Geringe Explizität:** Bei Schlüssen mit geringer Explizität lassen sich zwei Ausprägungen identifizieren: Zum einen bleiben teilweise einzelne Elemente der Argumentation implizit. So kann es beispielsweise vorkommen, dass das Datum mehrdeutig und damit nicht explizit ist, so dass diese Deutungsdifferenzen für den Nachvollzug der Argumentation zunächst geklärt werden müssen. Häufig bleibt aber auch einfach der Garant implizit. Zum anderen sind Äußerungen oder Handlungen manchmal so diffus, dass es unklar ist, welche Funktion (Datum, Konklusion, Garant) ihnen in der Argumentation zugeordnet werden kann (vgl. ebd. S.37ff).
4. **Verbales und non-verbales Argumentieren:** Die Konklusion wird in der Regel verbal zum Ausdruck gebracht; das Datum und/oder der Garant hingegen sind in vielen Fällen non-verbal explizit. Durch diese non-verbalen Verhaltensweisen (wie z.B. das Zeigen oder Verweisen auf Material, die Tafel, das Heft o.ä.; das Zerschneiden von Papier; das Legen oder Verschieben von Plättchen und ähnlichem) „verdoppeln“ die Kinder die Chance auf die Explizität ihrer Argumentation (vgl. ebd. S.42ff).

Diese Charakterisierung von Argumentationsaspekten weist darauf hin, wie wichtig es ist, dass der Lehrer durch Fragen wie „Warum ist das so?“ oder „Gilt das immer?“ gezielt Garanten von Argumentationen einfordert oder auch Argumentationen erneut und expliziter bzw. präziser bespricht, indem er beispielsweise fragt „Wie rechnest du?“. Hinsichtlich der non-verbalen Aktivitäten beim Argumentieren, die zum einen ein hohes Maß an Explizitheit aufweisen können und zum anderen auf sprachlicher Ebene eine Entlastung in besonderer Weise darstellen, hält Fetzer es für untersuchenswert, inwiefern ein handelnder Umgang einen Zugang zur Tätigkeit des Argumentierens bieten kann (vgl. ebd. S.45ff).

Auch Krauthausen und Scherer (2010a) identifizierten unter anderem verschiedene Ebenen des Argumentierens. In dem internationalen EU-Projekt NaDiMa (Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht) wurden ausgewählte Lernumgebungen im Sinne der natürlichen Differenzierung konzipiert, erprobt und evaluiert. Es wurde untersucht, wie und unter welchen Voraussetzungen der Einsatz geeigneter Lernumgebungen ein tieferes mathematisches Verständnis hervorbringen, zur Entwicklung allgemeiner Lernstrategien beitragen, das gemeinsame Lernen inhaltlich und sozial befördern und die (intrinsische) Motivation erhöhen kann. Des Weiteren sollte das theoretische Konzept der natürlichen Differenzierung geschärft werden und konkrete Hinweise und Unterrichtsmaterialien zu dieser Thematik für die Lehrpersonen entstehen (vgl. Krauthausen und Scherer 2010b, S.507f und Krauthausen und Scherer 2010a, S.15f). In der deutschen Projektgruppe wurden substanzielle Lernumgebungen im Bereich Arithmetik für verschiedene Schuljahre konzipiert, erprobt und evaluiert (vgl. Krauthausen und Scherer 2010a, S.17 und Scherer und Krauthausen 2010, S.735). Am Beispiel einer problemorientierten Aufgabe zu Rechendreiecken wurden unter anderem verschiedene Niveaus hinsichtlich der Kompetenz des Argumentierens identifiziert. Die problemorientierte Aufgabe bestand darin, herauszufinden, welche der beiden Aussagen „Es gibt keine Rechendreiecke mit 3 geraden bzw. ungeraden Außenzahlen!“ wahr ist und dieses zu erklären (vgl. Krauthausen und Scherer 2010a, S.22). Die Analyse der Schülerbearbeitungen ergab folgende Ebenen der Argumentationen:

1. **„Based on concrete numbers“** („beispielgebunden / arithmetisch“):
   Zur Bestätigung oder Widerlegung der Aussagen wurden Beispiele mit konkreten Zahlen vorgerechnet (vgl. ebd. S.23f).

2. **„(Pre)algebraic level“** („(prä)algebraische Ebene“):
   Es wurde mit geraden und ungeraden Zahlen argumentiert. Dabei wurden entweder die Wörter „gerade“ und „ungerade“ oder deren Abkürzungen verwendet. (Die formale Darstellung 2n bzw. 2n+1 für gerade bzw. ungerade Zahlen ist in der Primarstufe noch nicht gegeben.) (vgl. ebd. S.24f)
3. **„Switching between levels“** („Wechsel zwischen den Ebenen“):
   In Abhängigkeit von dem eigenen Verständnis wird in der Argumentation zwischen einer Erklärung mit konkreten Zahlen (beispielgebunden) und einer Erklärung mit der Nutzung von allgemeinen Formulierungen (wie z.B. die Wörter „gerade“ und „ungerade“) (präalgebraische Ebene) gewechselt (vgl. ebd. S.25f).
4. **„Making the unsolvable solvable“** („Alternativen zur Unlösbarkeit“):
   Die Unlösbarkeit der Aussage kann nicht ausgehalten werden. Es wird nach alternativen Bedingungen gesucht. So wurden beispielsweise Dezimalzahlen oder Bruchzahlen als Innenzahlen eingesetzt. Es kam sogar vor, dass das Rechendreieck in ein Rechensechseck umgewandelt wurde, um eine Lösung zu erhalten (vgl. ebd. S.26f).

Die allgemeinen Ergebnisse dieser Studie zeigten, dass die Schüler „die den Lernumgebungen innewohnende Substanz, die ein Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus ermöglicht“, annahmen (Scherer und Krauthausen 2010, S.737). Die unterschiedlichen Gelegenheiten des Arbeitens im Sinne einer natürlichen Differenzierung waren in den konzipierten Lernumgebungen unter anderem durch die Wahl des Zahlmaterials, die Anzahl der bearbeiteten Beispiele, die verschiedenen Problemlösestrategien und die Suche nach Alternativen bei der Unlösbarkeit eines Problems offensichtlich. Zudem wurde aber auch durch das Unterrichtskonzept, das sowohl individuelle Bearbeitungen, als auch Partner- und Kleingruppenarbeit sowie zentrale Reflexions- und Integrationsphasen enthielt, das soziale Lernen nicht vernachlässigt (vgl. Krauthausen und Scherer 2010a, S.28f). In Bezug auf die hohe Motivation bei der Bearbeitung der konzipierten Aufgaben wurden von den Schülern mehrere Aspekte geäußert. So haben die Aufgaben ihnen zum Beispiel „mehr Spaß gemacht, weil dort Muster auftraten, weil man selbst etwas aussuchen konnte oder weil man erfolgreicher war als sonst im Mathematikunterricht“ (Scherer und Krauthausen 2010, S.737). Die konzipierten, erprobten und evaluierten Lernumgebungen gehen einher mit vielen konkreten Forderungen an die Lehrperson, unter anderem der eigenen mathematischen Durchdringung der Problemstellung, den Vorüberlegungen zu möglichen Schülerstrategien und -bearbeitungsniveaus und dem sachgerechten Umgang mit tatsächlichen Schülerbearbeitungen oder -äußerungen (vgl. Scherer und Krauthausen 2010, S.737f).

Akinwunmi (2013) untersuchte Verallgemeinerungsprozesse von Viertklässlern, denen Aufgaben zum Entdecken und Beschreiben mathematischer Muster vorgelegt wurden. Sie analysierte die Verallgemeinerungen der Grundschüler aus epistemologischer Perspektive und arbeitete hinsichtlich der Fokussierung auf die Verwendung der sprachlichen Mittel, die in den Beschreibungen die Rolle von Variablen und Termen einnehmen, folgende fünf Kategorien von Verallgemeinerungsweisen heraus (vgl. Akinwunmi 2013, S.81f):

1. **„Angabe eines repräsentativen Beispiels“:** Es wird ein Beispiel angegeben und als solches explizit gekennzeichnet. Diese explizite Kennzeichnung impliziert, dass noch andere Fälle existieren, die jedoch nicht dargestellt werden. Dieses fordert von dem Gegenüber, das gegebene Beispiel auch auf andere Fälle beziehen zu können.
2. **„Aufzählung mehrerer Beispiele“:** Es werden mehrere Beispiele aufgezählt. Dabei wird ggf. auf einen Fortlauf verwiesen. Damit wird sowohl die Existenz weiterer Fälle impliziert, als auch eine Beziehung der gegebenen Beispiele untereinander angedeutet. Hier wird von dem Gegenüber erwartet, dass es die Beispielfolge fortsetzen kann.
3. **„Quasi-Variablen“:** Es werden konkrete Zahlen zur Beschreibung der Muster verwendet und mit sprachlich verallgemeinernden Elementen (z.B. „immer dreimal …“) verbunden. Die konkreten Zahlen stehen in diesem Fall nicht nur für sich selbst, sondern sind als Variable zu verstehen.
4. **„Bedingungssätze“:** Es wird nur ein Fall unter den gegebenen Bedingungen beschrieben. Von dem Gegenüber wird aber erwartet, dass er diesen Fall verallgemeinern kann.
5. **„Variablen“:** Es werden Wörter oder Zeichen mit Variablencharakter verwendet.

Die ersten vier dargestellten Kategorien weisen hinsichtlich der Verallgemeinerung Grenzen auf, da sie nur Aussagen für ein oder mehrere konkrete Beispiele oder Aussagen unter besonderen Bedingungen treffen. Nur mit der fünften Kategorie, der Verwendung von Wörtern und Zeichen mit Variablencharakter, kann eine

Verallgemeinerung formuliert werden. Allerdings ermöglichen die ersten vier Kategorien den Grundschülern, den allgemeinen Charakter der zu beschreibenden Muster zu verdeutlichen und so in der Interaktion „‚Allgemein-verstanden[-zu]-Werden'" (Akinwunmi 2013, S.83).

3 Beweisen und Begründen in der Grundschule

3.1 Allgemeines und Ziele

Nach Winter ist die rationale Argumentation „eines der zentralen Lernziele der Schule überhaupt, speziell des Mathematikunterrichts“ (Winter 1975, S.109). Er ist der Ansicht, dass „der Mensch […] das Bestreben [besitzt], […] Zusammenhänge zu erkennen, Erklärungen zu finden [und] andere davon zu überzeugen“ (ebd. S.109) und dass die Argumentation ein zentraler Aspekt mathematischen Denkens ist. Diese Meinung vertritt auch Krauthausen (1998a und 2001). Er sieht in den Tätigkeitsfeldern in der Umgebung des Beweisens wie dem Erklären, dem Argumentieren, dem Überzeugen, dem Nachweisen und dem Begründen „nicht nur Kennzeichen mathematischer Aktivität, sondern auch [Kennzeichen] alltäglicher Anforderungssituationen“ (Krauthausen 2001, S.101). Dieser Ansicht nach leistet das Beweisen „einen fachspezifischen Beitrag zur allgemeinen Denkerziehung“ (Kultusministerium des Landes NRW 1985, S.21).

Freudenthal (1979) fragte sich, wann das Beweisen bei einem Individuum anfängt und beantwortete die Frage mit „jedenfalls, ehe es einen Namen hat“ (Freudenthal 1979, S.187). Obwohl ein Kind im Alter von etwa drei Jahren beginnt, mit der Frage „Warum?“ nach Begründungen zu fragen, wird es selbst eher mit der Frage „Woher weißt du das?“ nach einem Grund gefragt. Dies deutet darauf hin, dass das Beweisen von reflektivem Ursprung sein muss (vgl. ebd. S.194) und damit seine Wurzeln bereits weit vor der Schulzeit eines Kindes hat.

Im Hinblick auf diese von Freudenthal (1979) dargestellte Ansicht vom Reflektieren als „Zwischenglied zwischen reiner Konstruktion und regelrechtem Beweis“ (Winter 1983, S.91) plädiert Winter dafür, dass „die Erziehung zum argumentativen Verhalten […] mit dem 1. Schultag beginnt“ (ebd. S.91). Dieser Meinung war er bereits 1975, als er forderte, vom ersten Schultag an Sachverhalte zu hinterfragen oder zu verteidigen und Zusammenhänge, Erklärungen und Schlussfolgerungen zu formulieren (vgl. Winter 1975, S.109). Die Frage „Woher weißt du das?“ soll das widerspiegelnde Denken und damit das Reflektieren anregen und mit der Frage „Kannst du es uns denn erklären?“ weitergeführt werden (vgl. Winter 1983, S.91). Auch Hanna ist der Ansicht, dass der Eintritt jedes Schülers in die Welt der Mathematik mit Fragen zu elementaren Aspekten beginnt. Die fundamentale Frage hinsichtlich des Beweisens (auch im Unterricht) ist die Frage „Warum?“ („in the classroom, the fundamental question that proof must address is surely „why?“, Hanna 2005, S.141).

Hinsichtlich solcher Forderungen nach der Thematisierung des Argumentierens, Begründens und Beweisens bereits ab dem 1. Schultag arbeitete Stein (1999) in seiner Studie mit Grundschulkindern zum logischen Denken und Argumentieren heraus, „dass auch jüngere Kinder zu Argumentationen fähig sind, die auch nach sehr strengen Kriterien *Beweis-Charakter* haben“ (Stein 1999, S.3). So zeigte es sich, dass die Grundschüler über „logische Kompetenz und Sicherheit der Argumentation“ (ebd. S.20) verfügten und „alle benötigten Fähigkeiten [zur Argumentation] […] bei allen beobachteten Kindern bereits vorhanden“ waren (ebd. S.25).

Freudenthal ist der Ansicht, dass man auf allerlei Niveaus beweisen kann (vgl. Freudenthal 1979, S.200). Bereits einige Jahre zuvor plädierte auch Winter anstelle des Glaubens an „*eine* absolute und unveränderliche Strenge“ für eine lernstufengerechte Argumentation (vgl. Winter 1975, S.109). Hanna und Jahnke sind ebenfalls der Meinung, dass jede Rechtfertigung eines Sachverhaltes der Jahrgangsstufe angemessen sein soll (vgl. Hanna und Jahnke 1996, S.903). Sie begründen diese Einstellung damit, dass das Hauptziel einer Rechtfertigung das Verstehen ist („because the key goal is understanding“, Hanna und Jahnke 1996, S.903). Yackel und Cobb sehen die Angemessenheit einer Begründung sogar in dem interaktiven Aushandlungsprozess zwischen Lehrer und Schülern (Yackel und Cobb 1994, S.3, zitiert nach Hanna und Jahnke 1996, S.887):

> *„When students give explanations and arguments in the mathematics classroom their purpose is to describe and clarify their thinking for others, to convince others of the appropriateness of their solution methods, but not to establish the veracity of a new mathematical ‘truth’. […] The meaning of what counts as an acceptable mathematical explanation is interactively constituted by the teacher and the children.”*

Trotz allem bleibt die fundamentale Frage offen, wie das Beweisen gelehrt und gelernt wird. Diese beantwortete Freudenthal – dem Grundproblem ausweichend - folgendermaßen: „Das Beweisen wird nicht gelehrt, sondern gelernt, und zwar durch Selbsttätigkeit. Wie das Einspluseins und das Einmaleins soll der Schüler auch das

Beweisen von neuem erfinden. An geeignetem Material […]“ (Freudenthal 1979, S.197).

Krauthausen stellte einige allgemeine Rahmenbedingungen für das Lernen des Beweisens zusammen. Hierzu zählen ‚gute‘ Aufgabenstellungen mit mathematischem Gehalt, kompetente Lehrer, die aufgrund ihres fachlichen Hintergrundwissens im Unterricht angemessen auch auf unerwartete Gedankengänge der Kinder reagieren können, die Geläufigkeit adäquater Werkzeuge zum Beweisen (wie z.B. Vorerfahrungen mit Punktmusterdarstellungen), eine regelmäßige Thematisierung des Beweisens im Unterricht und soziales Lernen, da das Beweisen ein kommunikativer Akt ist (vgl. Krauthausen 2001, S.105f). Er ist der Ansicht, dass es bei dem komplexen Vorgehen des Beweisens „gewisse typische Merkmale [gibt], die die Wahrscheinlichkeit erhöhen, dass sich eine Beweisfähigkeit entwickelt“ (ebd. S.106f). Zu diesen Merkmalen zählen eine flexible und situationsangemessene Auswahl geeigneter Materialien oder Darstellungen, der Weg „von konkreten Beispielen zur Allgemeingültigkeit“, das Überprüfen von Hypothesen z.B. durch eine Verifizierung an modifizierten Beispielen, die „flexible Wahrnehmung verschiedener Zustände“ und ein „ganzheitlicher Blick auf verschiedene Zustände“ (vgl. ebd. S.107ff).

All diese hier angeführten Ansichten und Forderungen finden sich auch in den älteren und neuen Lehrplänen und Bildungsstandards für die Primar- bzw. Sekundarstufe wieder. So galt das Argumentieren im Sinne von „Aussagen begründen, Behauptungen überprüfen, Begründungen verlangen, […] zwischen Vermutungen und begründeten Aussagen unterscheiden, […] …“ (Kultusministerium des Landes NRW 1985, S.21) bereits 1985 in dem von Winter konzipierten Lehrplan für die Grundschule in NRW zu einem der drei allgemeinen Lernziele (vgl. ebd. S.21). In dem darauffolgenden Lehrplan für die Grundschule (MSJK 2003) wurden ähnliche Fähigkeiten für das mathematische Argumentieren in altersgemäßer Weise ausdifferenziert (vgl. ebd. S.71); das allgemeine Lernziel wurde allerdings „Begründen“ genannt. Die erwarteten Fähigkeiten zum Begründen bezogen sich am Ende der Klasse 2 auf das Erklären einfacher Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten und am Ende der Klasse 4 auf das Aufstellen von Vermutungen über mathematische Sachverhalte und das Bestätigen oder Widerlegen dieser Vermutungen mit Hilfe von repräsentativen Beispielen oder allgemeinen Überlegungen (vgl. ebd. S.84f). Mit diesen nach Altersstufen differenzierten Anforderungen kam man dem Bestreben nach einer „lernstufengerechten Argumentation“ (vgl. Winter 1975, S.109) oder einer „der Jahrgangsstufe angemessenen Rechtfertigung“ (vgl. Hanna und Jahnke 1996, S.903) nach. In diesem Lehrplan fanden sich auch Hinweise darauf, welche Aufgaben sich für einen Mathematikunterricht, der diese aufgestellten Ziele verfolgt, eignen. So wurden substanzielle Aufgaben als zentral für guten Unterricht herausgestellt, da sie neben den differenzierten Fragestellungen auf unterschiedlichem Niveau und der Möglichkeit von verschiedenen Lösungswegen unter anderem auch vielfältige Formen des Begründens ermöglichen (vgl. MSJK 2003, S.73). Der Lehrplan für die Realschule in NRW führt die im Lehrplan für die Grundschule (2003) begonnene Ausdifferenzierung des Begründens fort, indem in den Jahrgangsstufen 5 und 6 ein intuitives Begründen (wie z.B. das Beschreiben von Beobachtungen, Plausibilitätsüberlegungen oder das Angeben von Beispielen oder Gegenbeispielen (vgl. MSJK 2004, S.18)), in den Jahrgangsstufen 7 und 8 mehrschrittige Argumentationen und in den Jahrgangsstufen 9 und 10 Argumentationsketten im Sinne von Beweisen erwartet werden (vgl. ebd. S.32). Dieser Lehrplan unterscheidet nicht zwischen allgemeinen Lernzielen und inhaltlichen Bereichen des Faches Mathematik, sondern stellt diese als gleichgewichtige „Kompetenzen“ nebeneinander. In den den Lehrplänen übergeordneten Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK 2005) bzw. den Mittleren Schulabschluss (KMK 2004) wurden fachliche und fachübergreifende Basisqualifikationen formuliert. Der Bereich des Argumentierens zählt in allen Schulstufen zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die von zentraler Bedeutung für das mathematische Arbeiten sind. In den Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich wird das Argumentieren wie folgt verstanden (KMK 2005, S.8):

- *„mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen*
- *mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln*
- *Begründungen suchen und nachvollziehen“*

Ähnliches gilt für die Bildungsstandards Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (vgl. KMK 2004, S.8). Im Vergleich dazu finden sich in den US-amerikanischen NCTM-Standards (NCTM 2000) exakt durchgängig gewählte Formulierungen vom Vorschulkindergarten bis zur Klasse 12 („from prekindergarten through grade 12“) hinsichtlich des Aspekts „Begründen und Beweisen“ („Reasoning and Proof“) (NCTM 2000, S.56):

- Begründungen und Beweise als fundamentale Aspekte der Mathematik erkennen
- Mathematische Vermutungen aufstellen und untersuchen bzw. erforschen
- Mathematische Argumente und Beweise entwickeln und bewerten
- Verschiedene Begründungstypen und Beweismethoden auswählen und anwenden

Dabei beziehen sich der zweite und dritte Punkt auf konkrete Tätigkeiten beim Begründen und Beweisen und der erste und vierte Punkt sogar auf die Meta-Ebene des Verstehens des Begründens und Beweisens.

In dem aktuellen Lehrplan für Mathematik an Grundschulen in NRW (MSW 2008) werden die anzustrebenden Ziele in prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzen unterteilt. Das Argumentieren, als eine der zentralen prozessbezogenen Kompetenzen, soll in aktiver Auseinandersetzung mit konkreten Lerninhalten (den inhaltsbezogenen Kompetenzen) erworben und weiterentwickelt werden (vgl. MSW 2008, S.56). In diesem neuen Lehrplan wird das Argumentieren bei der Formulierung der Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 4 noch einmal in die vier Aspekte „vermuten", „überprüfen", „folgern" und „begründen" unterteilt und wie folgt ausdifferenziert (vgl. ebd. S.60):

Vermuten: „Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten an[stellen]"

Überprüfen: „[diese] Vermutungen anhand von Beispielen [testen] und hinterfragen, ob [die] Vermutungen, Lösungen, Aussagen etc. zutreffend sind"

Folgern: „[diese] Vermutungen anhand von Beispielen [bestätigen oder widerlegen] und […] – ausgehend von Beispielen – […] allgemeine Überlegungen [ansatzweise entwickeln] oder diese [nach]vollziehen"

Begründen: „Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen [erklären] und […] Begründungen anderer nach[vollziehen]"

Dieser Lehrplan war zum Zeitpunkt der empirischen Untersuchung noch nicht veröffentlicht. Somit können die hier dargestellten Aspekte lediglich in der späteren Diskussion der Ergebnisse der Studie zum Tragen kommen.

Hinsichtlich aller hier aufgeführten Ansichten und Forderungen habe ich geeignete Aufgabenstellungen zum Begründen in der Grundschule gesucht.

3.2 Aufgaben zum Begründen

Bei der Durchsicht diverser Materialien für den Grundschulunterricht - z.B. Schulbücher (vgl. Wittmann, Müller [u.a.] 2005, Rinkens und Hönisch 2004), Aufgabensammlungen zur Differenzierung (vgl. Wittmann und Müller 1992, Krauthausen 1998b, Käpnick 2003, S.54f, Bardy und Hrzán 2005), Praxisartikel in Fachzeitschriften (vgl. Krauthausen 1995 und 2006, Scherer 1996, 1997a,b,c und 2006, Scherer und Selter 1996, Selter 1997 und 2004, Steinbring 1997, Hartmann und Loska 2004) u.ä. (vgl. Steinbring 1995) – konnte ich nur äußerst geringe Anteile von Aufgaben finden, in denen überhaupt Entdeckungen und/oder Begründungen angedeutet, erwartet oder gar gefordert werden.
So fanden sich in Schulbüchern visuelle Muster oder Aufgabenserien, die nach bestimmten grafischen Vorgaben oder Rechenvorschriften fortgeführt werden sollten. Entdeckungen hinsichtlich sich ergebender Muster werden erfragt, Begründungen hingegen meist gar nicht gefordert oder selten nur vorsichtig formuliert wie z.B.: Wie könnte man das begründen? Kannst du deine Entdeckung auch begründen? Kannst du die Regel begründen? Versuche, es zu begründen (vgl. Rinkens und Hönisch 2004, S.57, 92, 115; Wittmann, Müller [u.a.] 2005, S.42f, 102f).
In Aufgabensammlungen zur Differenzierung reicht das Spektrum der gefundenen Aufgabenstellungen vom reinen Entdecken von Mustern und Gesetzmäßigkeiten (vgl. Käpnick 2003, S.46ff, 57ff, 67ff, 124ff, 130ff; Wittmann und Müller 1992, S.82f, 128f; Bardy und Hrzán 2005, S.40, 48), über erwartete Entdeckungen und Begründungen zu vorgegebenen Rechenvorschriften (vgl. Wittmann und Müller 1992, S.33, 38f, 80f, 155f) bis hin zu Teilbarkeitsbeweisen oder zu Beweisen zu Summen aufeinanderfolgender Zahlen (Bardy und Hrzán 2005, S.36ff).
In Praxisartikeln in Fachzeitschriften u.ä. (s.o.) wurden Substanzielle Aufgabenformate - wie z.B. Zahlenmauern, Rechendreiecke, Zahlenketten, Triff die 50! oder Zahlengitter - zur natürlichen Differenzierung von der Sache und vom Kind aus thematisiert, die in den Bereich des produktiven Übens und des aktiv-entdeckenden Lernens einzuordnen sind.
Ursprünglich charakterisierte Wittmann substanzielle Unterrichtseinheiten wie folgt (Wittmann 1995, S.528):

1. *„Sie repräsentieren zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts.*
2. *Sie bieten reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten von Schülern.*

3. *Sie sind flexibel und können leicht an die speziellen Gegebenheiten einer bestimmten Klasse angepasst werden.*
4. *Sie integrieren mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise und bieten daher ein weites Potential für empirische Forschungen."*

Im Laufe der Jahre wandelte sich der Begriff der substanziellen Unterrichtseinheiten in den Begriff der Substanziellen Aufgabenformate. Die von Wittmann formulierten Charakteristika wurden dabei auf den neuen Begriff übertragen. Wenn im Weiteren von Substanziellen Aufgabenformaten geschrieben wird, so sind diese im Sinne Wittmanns (1995) zu verstehen.

Nach den oben aufgeführten Charakteristika sind Substanzielle Aufgabenformate „mathematisch gehaltvolle Frage- und Problemkontexte, die vielfältige Wege und Lösungen auf verschiedenen Anspruchsniveaus zulassen" (Krauthausen 1995, S.9). Geeignete Beispiele für eine Fülle von Frage- und Problemstellungen zu einem einzelnen Aufgabenformat finden sich unter anderem bei Krauthausen (1995 und 1998b) und Scherer (1997a). Diese Substanziellen Aufgabenformate enthalten wegen ihrer zugrunde liegenden algebraischen Struktur Muster, so dass sich die Schüleraktivitäten nicht nur auf ein Rechnen auf verschiedenen Niveaustufen beschränken, sondern vielfältige Anlässe zum Beschreiben und Begründen von Zahlenmustern und arithmetischen Zusammenhängen bestehen (vgl. Scherer 1997c, S.55).

Für die Durchführung der Untersuchung habe ich Substanzielle Aufgabenformate gewählt, weil es ausreicht, sich einmalig in die Grundsituation des jeweiligen Aufgabenformates einzuarbeiten (hier die jeweilige Rechenvorschrift und die Darstellungsform des Aufgabenformates), um dann direkt zahlreiche Möglichkeiten zu haben, Zahlenmuster und arithmetische Zusammenhänge zu entdecken und zu begründen (vgl. Krauthausen 1998, S.120f). Im Gegensatz dazu stehen die Beweisaufgaben in Bardy und Hrzán (vgl. 2005, S.36ff), die häufig zu unterschiedlichen Themengebieten gestellt werden. Des Weiteren haben meine Erfahrungen als Lehrerin und als Mentorin von Lehramtsanwärtern und Praktikanten gezeigt, dass die Arbeit mit Substanziellen Aufgabenformaten angemessen für Grundschulkinder ist und eine Herausforderung hinsichtlich der Begründungen darstellt.

Zudem ist es von Vorteil, dass die Rechenvorschriften und geometrischen Darstellungen der Substanziellen Aufgabenformate leicht verständlich sind, sich ohne großen Aufwand erklären lassen (vgl. Krauthausen 1998b, S.120) und somit keine expliziten Vorerfahrungen für das Arbeiten mit ihnen notwendig sind. Es ist nicht nur möglich, den Zahlenraum der natürlichen Zahlen für die Aufgaben auszuwählen (vgl. Selter 2004, S.44), sondern sogar sinnvoll, mit möglichst kleinen Zahlen zu arbeiten, um bei der inhaltlichen Schwerpunktsetzung auf Begründungsaufgaben die Möglichkeiten für Fehler beim Rechnen zu minimieren und sich somit auf das Erkennen und Begründen von Mustern und arithmetischen Zusammenhängen konzentrieren zu können.
Eine weitere Form der Differenzierung ergibt sich durch die Wahl von verschiedenen Repräsentationsebenen (enaktiv, ikonisch, symbolisch). Scherer weist darauf hin, dass es Problemstellungen gibt, bei denen auch in höheren Jahrgangsstufen der Einsatz von Plättchen zur ikonischen Darstellung sinnvoll und notwendig sein kann (vgl. Scherer 1997c, S. 54). Eine ikonische Darstellung kann beispielsweise auch die Grundlage eines inhaltlich-anschaulichen Beweises bilden. Da die erwarteten Begründungen auf unterschiedliche Art und Weise gegeben werden können, beschränkt sich der Einsatz von Substanziellen Aufgabenformaten nicht nur auf die Grundschule. Er kann sich bis hin zur Lehrerausbildung erstrecken (vgl. Scherer 1997b, Steinbring 1995).
Die Rechenvorschrift und die geometrische Darstellung eines Aufgabenformates vereinfachen die übliche formale Darstellung der Aufgabenstellung. Dadurch sind diese Aufgabenformate überhaupt erst für Grundschulkinder handhabbar. So werden beispielsweise Kästchen anstelle von Rechenklammern verwendet (z.B. bei Zahlenketten) und die durchzuführenden Rechenoperationen nur mündlich in der Rechenvorschrift festgelegt. Damit wird trotz durchaus komplexer algebraischer Zusammenhänge der Blick auf das Wesentliche ermöglicht: Es ergibt sich eine gute Übersicht über Ausgangszahlen, Zwischenergebnisse und Zielzahlen.

Für die empirische Untersuchung hatte ich diverse Substanzielle Aufgabenformate zur Auswahl (z.B. Zahlenmauern, Rechendreiecke, Zahlenketten, Zahlengitter, Triff die 50!). Ich habe die Aufgabenformate „Zahlengitter“ und „Zahlenketten“ ausgewählt, da diese beiden Formate in der Grundschulliteratur nicht so weit verbreitet und dadurch weniger bekannt sind. Die Aufgabenformate „Zahlenmauern“

und „Rechendreiecke“ dagegen werden in zahlreichen Schulbüchern thematisiert, so dass es sein kann, dass Kinder bereits konkretes Vorwissen zu einzelnen Aufgabenstellungen mitbringen. Dieses sollte ausgeschlossen werden.

3.3 Konsequenzen für die empirische Untersuchung

Die theoretischen Ausführungen und bisherigen Forschungsergebnisse (vgl. Kapitel 2, 3.1 und 3.2) wirken sich auf die Planung, Durchführung und Auswertung der vorliegenden empirischen Untersuchung aus.

Es gibt nahezu keine Befunde zum Argumentieren und Begründen in der Grundschule. In den letzten drei Jahrzehnten wurden in den vorliegenden Studien überwiegend im Bereich der Sekundarstufe I sowohl inhaltliche Aspekte des Begründens und Beweisens herausgearbeitet, als auch (schulische) Bedingungsfaktoren untersucht (vgl. Kapitel 2.6). Letztere sollen in der vorliegenden Untersuchung keinen besonderen Stellenwert einnehmen. Demnach liegt der Schwerpunkt der Untersuchung auf den inhaltlichen Aspekten des Begründens in der Grundschule. Es werden durchweg narrative Begründungen erwartet, da der Umgang mit Variablen im Mathematikunterricht der Grundschule noch gar nicht thematisiert wird (vgl. auch Steinbring 2000, S.29). Zudem wurde selbst in der Sekundarstufe I trotz der Thematisierung von Variablen in diversen Untersuchungen überwiegend nicht algebraisch-formal, sondern narrativ argumentiert (vgl. Healy und Hoyles 1998, Hellmich, Hartmann, Reiss 2002; Reiss, Hellmich, Thomas 2002). Der inhaltliche Aspekt des Begründens wird in vier Unterpunkte unterteilt. Zum einen soll das logische Denken bzw. genauer die Fähigkeit des logischen Schließens in Bezug auf eine Wenn-dann-Struktur untersucht werden (vgl. Stein 1999; Hennes und Schmidt 1982). Die Vorgehensweise von Grundschülern beim Begründen ist der zweite Unterpunkt (vgl. Hennes und Schmidt 1981; Reiss und Thomas 2000). Die Typisierung der verwendeten Argumente ist ein weiterer zu untersuchender Aspekt (vgl. Vollrath 1980; Schwarzkopf 2000 und 2003). Obwohl die Kinder in der Grundschule bei ihren Versuchen, arithmetische Beziehungen zu verallgemeinern, nicht auf fertige algebraische Notationen zurückgreifen können, so sind sie doch in der Lage „im Besonderen das Allgemeine zu sehen und [dieses] mit eigenen Worten zu benennen“ (Steinbring 2000, S.29). Aufbauend auf diese Aussage von Steinbring und hinsichtlich der vorliegenden Untersuchungen zum wissenschaftlichen Denken

von Heranwachsenden (vgl. Reiss und Thomas 2000; Reiss und Heinze 2001) soll als letzter inhaltlicher Aspekt der Umgang der Kinder mit der Allgemeingültigkeit in ihren Begründungen untersucht werden.
Unter diesen vier inhaltlichen Gesichtspunkten zum Begründen hat sich während der Planung, Durchführung und Auswertung der vorliegenden Untersuchung die Forschungsfrage „Wie begründen Grundschulkinder?“ in die folgenden konkreten Fragestellungen spezifiziert (vgl. Kapitel 4.1):

- Welches Verständnis haben Grundschulkinder von der Struktur der Wenn-dann-Aussage?
- Wie gehen sie bei ihren Begründungen vor?
- Mit welcher Art von Argumenten stützen sie ihre Begründungen?
- Wie gehen sie mit der Allgemeingültigkeit der zu begründenden Aussage um?

Mit Hilfe eines geeigneten Untersuchungsdesigns zu Substanziellen Aufgabenformaten sollen in der vorliegenden empirischen Untersuchung Antworten auf diese Fragen gefunden werden.

4 Empirische Untersuchung

4.1 Untersuchungsmethode

Die Wahl der Untersuchungsmethode ist nicht beliebig, sondern hat mit der Auffassung von der Welt und dem Menschen zu tun (vgl. Jungwirth, 2003, S.189). Meine Untersuchung folgt dem Ansatz der interpretativen Forschung, die sich in der empirischen Forschung der deutschsprachigen Mathematikdidaktik seit Ende der 1970er Jahre entwickelt hat. Charakteristisch für die interpretative Forschung ist „das Tun und Denken der Menschen vor Ort, der Prozess, der zu dem nach außen hin sichtbaren Ergebnis führt. […] Die interpretative Forschung geht kurz zusammengefasst davon aus, dass die Menschen die soziale Welt in ihrem gemeinsamen interpretativen Handeln zu der machen, die sie für sie ist“ (ebd. S.189f). Die interpretative mathematikdidaktische Forschung geht von einer so verstandenen Welt aus und befasst sich mit „fachbezogenen unterrichtlichen Interaktionen, Beteiligungsstrukturen und kollektiven Themen- und Interessensentwicklungen“ (ebd. S.190). Die Ergebnisse der interpretativen Forschung sind Deutungshypothesen, die den Untersuchungsgegenstand auf einer begrifflich-theoretischen Ebene strukturieren. Dazu werden die Gemeinsamkeiten und Unterschiede im gewonnenen Datenmaterial rekonstruiert (vgl. ebd. S.192). Die von Glaser und Strauss in den 60er Jahren entwickelte Forschungsmethode der gegenstandsbezogenen Theorie, die Grounded Theory, ist dabei nicht nur in der qualitativen Sozialforschung, sondern auch in der interpretativen Mathematikdidaktik ein wichtiger Ansatzpunkt (vgl. Strauss & Corbin 1996; Jungwirth 2003).

Als zentrale Prinzipien der qualitativen Sozialforschung hat Lamnek (2005, S.20f) die Prinzipien „Offenheit“, „Kommunikation“, „Prozesscharakter“, „Reflexivität“, „Explikation“ und „Flexibilität“ herausgestellt.

Das Prinzip der „Offenheit“ bezieht sich auf die qualitative Sozialforschung als Hypothesen generierendes Verfahren. Dabei ist der Forscher während des gesamten Untersuchungsprozesses angehalten, neuen Entwicklungen und Dimensionen gegenüber so offen wie möglich zu sein, damit diese in die Formulierung der Hypothesen mit einfließen können. Der Entwicklungsprozess der entstehenden

Hypothesen ist dabei erst am Ende des gesamten Untersuchungszeitraumes abgeschlossen (vgl. ebd. S.21).

Das Prinzip der „Kommunikation“ basiert auf der unterschiedlichen Auffassung derselben in der quantitativen und der qualitativen Forschung: In der quantitativen Forschung wird die Kommunikation und Interaktion zwischen dem Forscher und dem zu Erforschenden „als Störgröße auf das Resultat der Untersuchung angesehen, die durch Verfeinerung der Methode und durch Standardisierung beseitigt werden soll“ (ebd. S.22). Im Gegensatz dazu gilt die Kommunikation in der qualitativen Forschung als konstitutiver Bestandteil des Forschungsprozesses (vgl. ebd. S.22).

Es ist ein zentrales Anliegen der qualitativen Forschung, die Handlungsmuster von Menschen zu dokumentieren, zu analysieren und zu erklären. Die Prozesshaftigkeit solcher sozialen Phänomene ist dabei wesentlich zu berücksichtigen. Zudem wird der Forschungsakt selbst als Kommunikation und damit als Interaktionsprozess begriffen. Dadurch ergibt sich das Prinzip der „Prozesshaftigkeit“ in zweierlei Hinsicht: zum einen ist sie dem Forschungsgegenstand und zum anderen dem Forschungsakt zuzuordnen (vgl. ebd. S.23).

Das Prinzip der „Reflexivität“ beruht darauf, dass den Bedeutungen von menschlichen Verhaltensweisen und Aussagen in der Soziologie eine prinzipielle Reflexivität unterstellt wird, da jede sprachliche und nonverbale Handlung an einen Kontext gebunden und somit erst im Rückbezug auf diesen zu verstehen ist (vgl. ebd. S.23).

Es ist wünschenswert, dass der Forscher die einzelnen Schritte seines Untersuchungsprozesses so weit wie möglich offen legt. Dabei ist das Regelwissen der Interpretation jedoch dem Forscher in der Regel nicht bewusst, so dass die Forderung nach dem Prinzip der „Explikation“ selten vollständig erfüllt werden kann (vgl. ebd. S.24).

Unter dem Prinzip der „Flexibilität“ versteht Lamnek (2005, S.25), dass der Blickwinkel in der Untersuchung zunächst weit ist und erst in ihrem Verlauf verengt wird. So können neue Beobachtungen einen Richtungswechsel in der Betrachtung bedingen, der vor der Untersuchung gar nicht gedacht war, oder sich die Definition dessen verändern, was als relevante Daten angenommen wird.

Die Datengewinnung erfolgt in der qualitativen Forschung z. B. in Form einer Sammlung von Dokumenten, einer Befragung oder einer (teilnehmenden)

Beobachtung. Ich habe die Methode des qualitativen Interviews gewählt, das in seiner Form den oben genannten zentralen Prinzipien der qualitativen Forschung entspricht (vgl. Lamnek 2005, S. 348ff). Da der Begriff des Interviews eine mündlich-personale Kommunikation bezeichnet, ist das Prinzip der Kommunikation offenkundig gegeben. Das Prinzip der Offenheit ergibt sich daraus, dass die Befragung in einem qualitativen Interview nicht unbedingt vorab strukturiert oder gar standardisiert ist. Somit bleibt die theoretische Strukturierung des Forschungsgegenstandes bis zum Ende des Auswertungsprozesses offen. Die Befragungssituation selbst ist in einem qualitativen Interview als prozesshafte Konstruktion von Wirklichkeit anzusehen. Die Impulse des Interviewers und die Erzählungen des Interviewten strukturieren den Ablauf des Interviews. Der Interviewer ist angehalten, so flexibel zu reagieren, dass sich im Verlauf des Interviews eine permanente Informationserweiterung und -vertiefung ergibt. Dabei hat der Interviewer durch Paraphrasieren, Nachfragen oder vorsichtiges Interpretieren der Äußerungen des Interviewten die Möglichkeit, diesen anzuregen, seine Äußerungen zu explizieren, zu präzisieren oder zu reflektieren.
Da sowohl der Interviewer als auch der Interviewte versuchen, sich an die Erwartungen und Bedürfnisse des jeweiligen anderen, sowie an die jeweiligen Sinndeutungen anzupassen, ist die Kommunikationsbeziehung zwischen den beiden reflexiv. Das hat zur Folge, dass die Äußerungen des Interviewten nur dann sinnvoll und gültig interpretierbar sind, wenn sie im Kontext der Erhebungssituation analysiert werden.

Aus diesen methodologischen Überlegungen zum qualitativen Interview ergeben sich einige methodische Konsequenzen für dessen Durchführung (vgl. Lamnek 2005, S.352ff): Die Formulierung der Fragen ist nicht vorweg festgelegt, sondern erfolgt der Befragungssituation entsprechend mit dem alltagssprachlichen Vokabular des Interviewten. Auch die Reihenfolge der zu stellenden Fragen ist nicht vorab festgelegt. In einem Leitfaden können jedoch die wichtigsten anzusprechenden Fragen stichpunktartig notiert werden. Der Zeitpunkt ihres Einsatzes ergibt sich allerdings aus dem konkreten Gesprächsverlauf. In jedem Fall werden die Fragen offen gestellt. Das Interview selbst sollte eine möglichst alltagsnahe Gesprächssituation darstellen und in einer vertraulichen und entspannten Atmosphäre stattfinden. Der Interviewer bleibt in der Regel möglichst passiv, während der Interviewte erzählt, bis ihm zu der jeweiligen Frage nichts mehr einfällt. Erst dann greift der Interviewer ein und gibt dem Gespräch einen Impuls. Diese ungleiche Verteilung der Gesprächsanteile ist in Alltagssituationen durchaus üblich, z.B. wenn einer erzählt und der andere interessiert zuhört. Die Dauer der einzelnen Interviews kann erheblich variieren. Um die Äußerungen und Handlungen des Interviewten möglichst genau festhalten zu können, ist eine Videoaufzeichnung sinnvoll. Da dem Interviewer kein konkreter Fragebogen, sondern bestenfalls ein Leitfaden zur Verfügung steht, muss er mit dem Gegenstand des Interviews sehr gut vertraut sein. Diese Qualifikation ist meist nur bei dem Forscher selbst zu finden.

In Bezug auf den zu untersuchenden Forschungsgegenstand sollen qualitative Interviews in Anlehnung an das „problemzentrierte Interview" nach Witzel (1982, 1989, 2000) durchgeführt werden. Dessen Konstruktionsprinzipien zielen „auf eine möglichst unvoreingenommene Erfassung individueller Handlungen sowie subjektiver Wahrnehmungen und Verarbeitungsweisen gesellschaftlicher Realität" (Witzel 2000). Damit lehnt sich das problemzentrierte Interview „weitgehend an das theoriegenerierende Verfahren der „Grounded Theory" (Glaser & Strauss 1998) an" (Witzel 2000).

Die vier Instrumente „Kurzfragebogen", „Tonträgeraufzeichnung", „Leitfaden" und „Postskripte" ermöglichen und unterstützen die Durchführung eines problemzentrierten Interviews (vgl. Witzel 2000). Der Kurzfragebogen, der zur Ermittlung von Sozialdaten dient, entfällt bei der Arbeit mit Grundschulkindern. Anstelle der bloßen Tonträgeraufzeichnung werden Videoaufnahmen eingesetzt, um auch die nonverbale Kommunikation erfassen zu können. Diese werden anschließend vollständig transkribiert. In dem Leitfaden ist „das Hintergrundwissen des Forschers thematisch organisier[t], um zu einer kontrollierten und vergleichbaren Herangehensweise an den Forschungsgegenstand zu kommen" (Witzel 1989, S. 236). Der Leitfaden dient als Gedächtnisstütze und Orientierungsrahmen und enthält einige Frageideen zur Einleitung oder Ausdifferenzierung einzelner Themenbereiche. Als Postskripte werden die Notationen von spontanen Auffälligkeiten und Interpretationsideen bezeichnet, die Anregungen für die Auswertung des Datenmaterials geben können (vgl. Witzel 2000).

Zur Gestaltung des Interviewgespräches stehen dem Interviewer diverse Gesprächstechniken zur Verfügung, die er flexibel einsetzt, um seinen eigenen

Erkenntnisfortschritt zu optimieren (vgl. Witzel 2000): Zu den erzählungsgenerierenden Kommunikationsstrategien zählen der Gesprächseinstieg, allgemeine Sondierungen und Ad-hoc-Fragen. Zum Gesprächseinstieg sollte eine vorformulierte, aber möglichst offene Frage gestellt werden, die zum Erzählen auffordert. Die Kommunikationsstrategie der allgemeinen Sondierungen hat die Aufgabe, mit entsprechenden Nachfragen den roten Faden, der in der Antwort auf die Einstiegsfrage erkennbar ist, weiterzuspinnen und einzelne Sachverhalte und Zusammenhänge detaillierter darzustellen. Mit Ad-hoc-Fragen werden die Themenbereiche angesprochen, die im Leitfaden enthalten, aber von dem Interviewten noch nicht erwähnt worden sind. Des Weiteren hat der Interviewer die Möglichkeit, verständnisgenerierende Strategien wie Zurückspiegeln, Verständnisfragen und Konfrontationen einzusetzen. Dabei ermöglicht das Zurückspiegeln von Äußerungen dem Interviewten, seine eigene Sichtweise zu behaupten. Verständnisfragen werden zur Klärung von ausweichenden oder widersprüchlichen Antworten gestellt, und Konfrontationen können eine weitere Detaillierung von Sichtweisen des Interviewten fördern (vgl. ebd. 2000).
Mit den erzählungsgenerierenden Fragen fördert der Interviewer die Erzählungen des Interviewten. Durch die verständnisgenerierenden Fragetechniken können neue Muster des Sinnverstehens entstehen oder alte Muster korrigiert werden. Somit stellt die Gesprächsführung eine hohe Anforderung an den Interviewer dar. Aus diesem Grund sollte der Forscher möglichst selbst die Interviews durchführen (vgl. ebd. 2000).

Zur Analyse der in problemzentrierten Interviews gewonnenen Daten stehen „dem Prinzip der Gegenstandsorientierung entsprechend […] verschiedene Auswertungsmethoden“ (Witzel 2000) zur Verfügung.
Diese empirische Untersuchung basiert auf der Forschungsmethode der Grounded Theory (Glaser und Strauss 1998, Strauss und Corbin 1996), mit deren Hilfe aus den Daten schrittweise eine empirisch begründete Theorie entwickelt werden kann. Dabei stehen die „Datensammlung, [die] Analyse und die Theorie in einer wechselseitigen Beziehung zueinander“ (Strauss und Corbin 1996, S.8). Am Anfang der Untersuchung steht eine weite Fragestellung. Diese wird durch die Analyse der Daten immer weiter verfeinert und spezifiziert (vgl. ebd. S.24). Bei der Analyse der Daten spielt auch die theoretische Sensibilität eine Rolle. Damit ist die persönliche

Fähigkeit des Forschers gemeint, zu erkennen, was an den Daten wichtig ist und was nicht. Diese theoretische Sensibilität liegt in der Kenntnis des Forschers in Bezug auf die Fachliteratur und in dessen professioneller und persönlicher Erfahrung begründet (vgl. ebd. S.30). Sie wird aber auch „während des Forschungsprozesses durch die kontinuierliche Auseinandersetzung mit den Daten erworben“ (ebd. S.30). Zudem fordern Strauss und Corbin (1996, S.38) ein Wechselspiel zwischen dem Lesen von Literatur und dem Analysieren von Daten zum Zwecke immer neuerer Forschungsanregungen.

Die Auswertung der gewonnen Daten nehme ich nach dem Stufenmodell der empirisch begründeten Typenbildung nach Kluge (1999 und 2000, Kelle und Kluge 2010) vor. Dieses Stufenmodell weist eine große Offenheit und Flexibilität auf, da „jede Auswertungsstufe mit Hilfe unterschiedlicher Auswertungsmethoden und –techniken realisiert werden kann“ (Kluge 2000). Das Ziel der Bildung von Typen ist zum einen die Strukturierung des Untersuchungsbereiches und zum anderen die Formierung von Theorie durch die inhaltliche Analyse von Sinnzusammenhängen zwischen und innerhalb der gebildeten Typen (vgl. Kluge 1999, S.43).
Bei einer Typologie handelt es sich „um das Ergebnis eines Gruppierungsprozesses, bei dem ein Objektbereich anhand eines oder mehrerer Merkmale in Gruppen bzw. Typen eingeteilt wird“ (Kluge 2000). Dabei versteht man unter einem Typus „die gebildeten Teil- oder Untergruppen […], die gemeinsame Eigenschaften aufweisen und anhand der spezifischen Konstellation dieser Eigenschaften beschrieben und charakterisiert werden können“ (Kluge 2000). Innerhalb eines Typus sollen sich die Merkmale möglichst ähnlich sein (interne Homogenität auf der „Ebene des Typus“), damit das Charakteristische des Typus klar herausgestellt werden kann. Die Typen selbst dagegen sollen sich möglichst stark voneinander unterscheiden (externe Heterogenität auf der „Ebene der Typologie“), damit man einen Überblick über die Breite des Untersuchungsgegenstandes erhält (vgl. Kluge 1999, S.42, und Kluge 2000).
Der Typenbildungsprozess besteht aus vier Auswertungsstufen (Kluge 1999; Kluge 2000; Kelle und Kluge 2010, S.91ff). Als erstes müssen Merkmale bzw. Vergleichsdimensionen gefunden werden, mit denen sich die untersuchten Fälle beschreiben und miteinander vergleichen lassen (vgl. Kluge 1999, S.89). Dazu bietet es sich an, dass die Kodierkategorien zur Systematisierung des Datenmaterials

möglichst „offen“ sind, so dass mit ihnen das gesamte Spektrum der relevanten Phänomene des Untersuchungsgegenstandes auf der Grundlage der Daten selbst erfasst werden kann (vgl. ebd. S.71). Dazu eignet sich das Verfahren des „offenen Kodierens“ nach Strauss und Corbin (1996, S.43ff). „Während des offenen Kodierens werden die Daten in einzelne Teile aufgebrochen, gründlich untersucht, auf Ähnlichkeiten und Unterschiede hin verglichen, und es werden Fragen über die Phänomene gestellt, wie sie sich in den Daten widerspiegeln“ (Strauss und Corbin 1996, S.44). Die Daten werden dabei aufgebrochen (konzeptualisiert), d.h. Phänomene werden identifiziert und benannt: „Mit Aufbrechen und Konzeptualisieren meinen wir das Herausgreifen einer Beobachtung, eines Satzes, eines Abschnitts und das Vergeben von Namen für jeden einzelnen darin enthaltenen Vorfall, jede Idee oder jedes Ereignis – für etwas, das für ein Phänomen steht oder es repräsentiert“ (ebd. S.45). Die Benennungen stammen dabei vom Forscher selbst; können aber auch in Anlehnung an wissenschaftliche oder fachliche Begrifflichkeiten vergeben werden (vgl. ebd. S.49). Diese identifizierten und benannten Phänomene (Konzepte) werden dann gruppiert (kategorisiert). Dieses Vorgehen dient dem Reduzieren der Anzahl der Einheiten, mit denen gearbeitet werden muss. Die so entstandenen Kategorien werden ihrerseits hinsichtlich ihrer Eigenschaften bzw. Charakteristika untersucht. Dabei kann jede dieser Eigenschaften „dimensionalisiert werden; d.h. sie variiert entlang eines Kontinuums“ (ebd. S.51). Die Kategorie „Farbe“ beispielsweise hat die Eigenschaften „Schattierung“, „Intensität“, „Farbton“ usw. In ihrer Eigenschaft „Intensität“ kann die Farbe dann wiederum von „hoch“ bis „niedrig“, in der Eigenschaft „Farbton“ von „dunkel“ zu „hell“ usw. variieren (vgl. ebd. S.51).

Im zweiten Schritt des Typenbildungsprozesses werden die untersuchten Fälle anhand der so gefundenen Merkmale bzw. Vergleichsdimensionen gruppiert und hinsichtlich ihrer empirischen Regelmäßigkeit untersucht (vgl. Kluge 2000). Fälle, die einer Gruppe zugeordnet werden, müssen miteinander verglichen und hinsichtlich der internen Homogenität der gebildeten Gruppe überprüft werden. Zudem müssen die Gruppen untereinander verglichen und bezüglich der externen Heterogenität überprüft werden (vgl. ebd. 2000).

Da die untersuchten Phänomene nicht nur beschrieben, sondern auch verstanden und erklärt werden sollen, werden im dritten Schritt des Auswertungsprozesses die

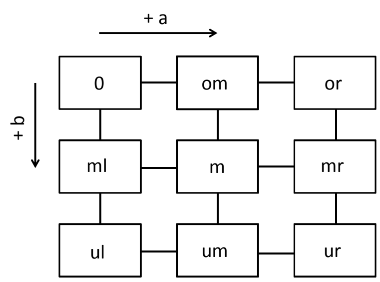
den ermittelten Gruppen zugrundeliegenden inhaltlichen Sinnzusammenhänge analysiert. Diese umfangreichen Analysen führen zur Bildung von Typen.
Die vierte und letzte Stufe des Typenbildungsprozesses bildet die detaillierte Charakterisierung der ermittelten Typen (vgl. Kluge 1999, S.89).

Transkriptionsregeln

(…)	kurze Pause; max. 3 Sekunden
(4 Sek. Pause)	Sprechpause; Länge in Sekunden
(leise) u.ä.	Charakterisierung der Sprechlautstärke
(murmelnd) u.ä.	Charakterisierung der Sprechweise
(nickt) u.ä.	Charakterisierung der Handlung
[…?]	unverständliche Äußerung
[hier]	undeutliche Äußerung
[vier?]	sehr undeutliche Äußerung, deren Inhalt vermutet wird
vierund-	Sprecher unterbricht sich selbst bzw. wird unterbrochen
Mhm. / Mhmh.	zustimmende Äußerung
Eheh. / Hmhm.	ablehnende Äußerung
eh / äh / mh /ehm	Füllwörter (überlegende Äußerung)
Ja! / Nein!	vehement / überzeugt geäußerte Zustimmung / Ablehnung

Abkürzungen und Bezeichnungen in den Transkripten

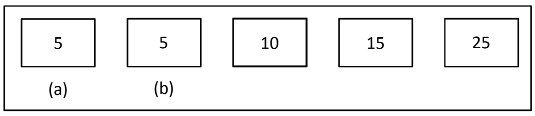
ZG	Zahlengitter
wPZ / sPZ	waagerechte Pluszahl / senkrechte Pluszahl
$ZG_{x/y}$	Zahlengitter mit wPz x und sPz y
	Bei Zahlengittern mit gleichen Zahleinträgen werden diese unterschieden, indem die Position der konkreten Zahl (z.B.: oben, Mitte, unten, links, rechts) als Abkürzung angegeben wird:



So bezeichnet z.B. ‚8or' die Zahl 8 oben rechts im Zahlengitter.
Zur einfacheren Lesbarkeit wird die Zielzahl mit ihrer Position, also als ‚ur' bezeichnet.

ZK — Zahlenkette
1.SZ / 2.SZ — 1. Startzahl / 2. Startzahl

Bei Zahlenketten mit gleichen Startzahlen werden diese folgendermaßen unterschieden:



So bezeichnet z.B. 5 (a) die 1.SZ und 5 (b) die 2.SZ der Zahlenkette $ZK_{5/5}$.

4.2 Das substanzielle Aufgabenformat „Zahlengitter"

Zahlengitter bestehen aus einem rechteckigen nxm-Feld von Zahlen (n Zeilen und m Spalten), denen folgende Rechenvorschrift zugrunde liegt:
Ausgehend von einer gewählten Startzahl im linken oberen Feld des Zahlengitters gelangt man durch Addition in waagerechter wie in senkrechter Richtung zu den benachbarten Feldern des Zahlengitters. In waagerechter Richtung wird dabei die gewählte waagerechte Pluszahl, in senkrechter Richtung die gewählte senkrechte Pluszahl addiert. Die Zahl im rechten unteren Feld wird als Zielzahl bezeichnet. Die Abb. 4.1 zeigt ein Zahlengitter mit einem 3x3-Feld.

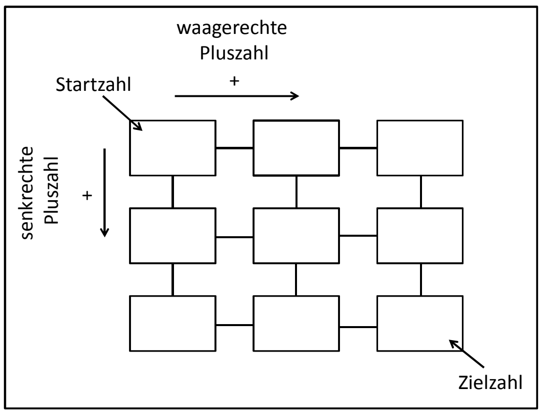


Abb. 4.1: 3x3 Zahlengitter allgemein

Die Variationsmöglichkeiten von Zahlengittern liegen in ihrer Dimensionierung (z.B. n Zeilen, m Spalten), in der Wahl des Zahlenraums (z.B. natürliche Zahlen, ganze Zahlen, Bruchzahlen usw.), in der Wahl der Startzahl (z.B. für jedes Gitter eine fest definierte oder bei jedem Gitter eine neu definierte Startzahl), in der Wahl der Pluszahlen (z.B. gleiche Pluszahlen oder allgemeiner: Pluszahlen, die in Beziehung zueinander stehen; etwa Vielfache voneinander sind), in der Anwendung anderer Grundrechenarten als der Addition etc.

Aus dieser Vielzahl von Varianten habe ich für die anstehende Untersuchung solche ausgewählt, die für Grundschüler handhabbar sind: Grundlage aller gestellten Aufgaben waren 3x3-Zahlengitter im Bereich der natürlichen Zahlen (in dieser Arbeit verstanden als N_0) mit der Addition als Grundrechenart (vgl. Abb. 4.2).

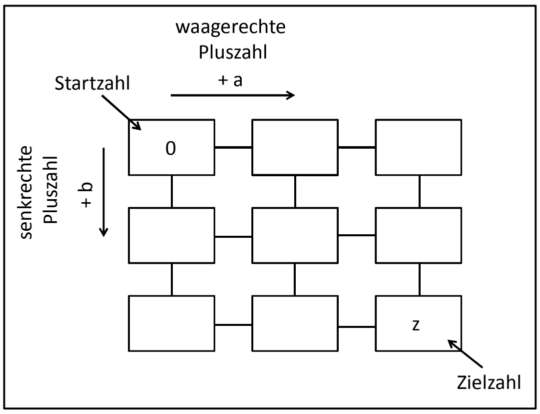


Abb. 4.2: 3x3-Zahlengitter mit Startzahl Null

Die Startzahl wurde Null gesetzt, um eine ‚einfache' algebraische Struktur in den Feldern des Zahlengitters zu erzeugen. Die waagerechte und senkrechte Pluszahl durften dabei beliebig aus den natürlichen Zahlen, jedoch ungleich Null, gewählt werden. Diese Festlegung verhindert, dass eine ‚nur eindimensionale' Ausprägung des Zahlengitters entsteht (im Fall $a = 0$ ergeben sich drei identische Spalten, im Fall $b = 0$ drei identische Zeilen). Die Abb. 4.3 zeigt die Werte der einzelnen Felder des Zahlengitters. Für die Zielzahl ergibt sich dabei insbesondere stets der Wert: $z = 2a + 2b$.

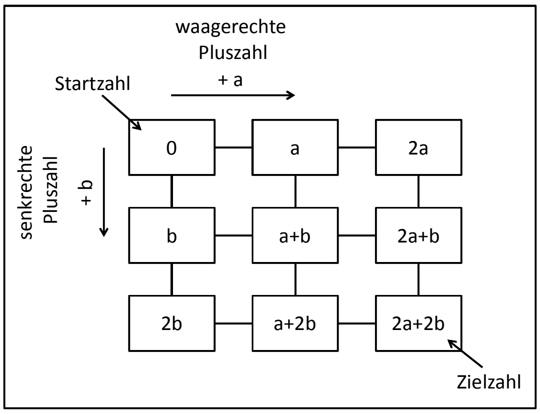


Abb. 4.3: 3x3 Zahlengitter mit algebraischer Struktur

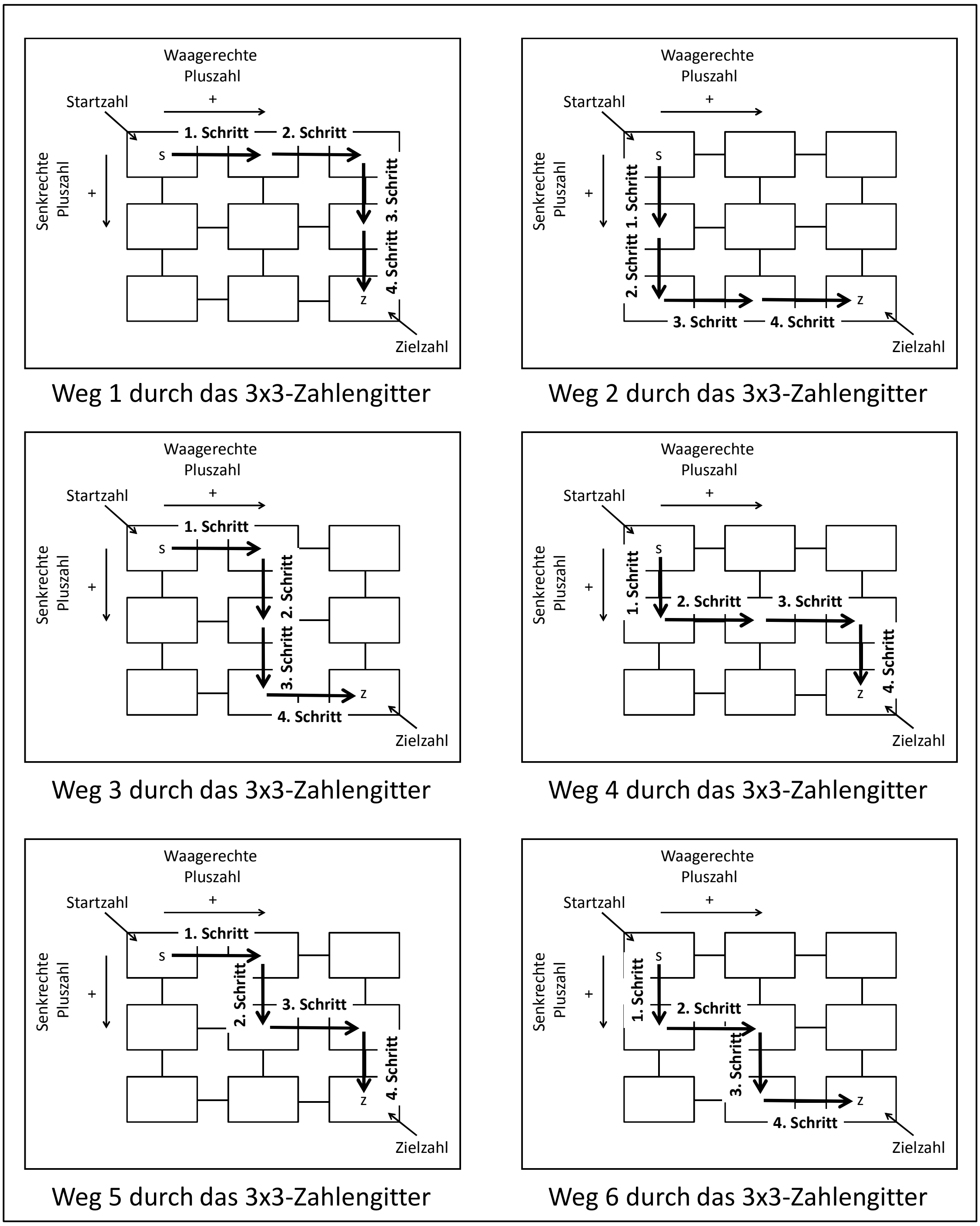


Abb. 4.4: Verschiedene Wege durch das 3x3 Zahlengitter

Um von der Startzahl zur Zielzahl zu gelangen, gibt es verschiedene kürzeste Wege durch das Zahlengitter. In jedem Fall geht man vier Schritte von der Startzahl bis zur Zielzahl; davon werden 2 Schritte waagerecht und 2 Schritte senkrecht gemacht. Wählt man in einem kombinatorischen Modell ‚Wege im Gitternetz' aus den 4 Schritten 2 Schritte in eine Richtung aus, so erhält man $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ verschiedene kürzeste Wege. Diese 6 verschiedenen Wege sind in Abb. 4.4 dargestellt. Im Folgenden werden die Bezeichnungen ‚Weg 1‘ bis ‚Weg 6‘ wie angegeben benutzt.

Aus den zahlreichen möglichen Aufgabenstellungen zu Zahlengittern habe ich für diese Untersuchung die im Folgenden aufgeführten Aufgaben ausgewählt.

Zahlengitter - Gleiche Pluszahlen

Die Aufgabe für die Kinder

Heute arbeiten wir nur mit besonderen Zahlengittern. Das Besondere daran ist, dass die Zahlengitter jeweils dieselbe waagerechte und senkrechte Pluszahl haben (vgl. Abb. 4.5). Berechnet die vorgegebenen Zahlengitter $ZG_{3/3}$, $ZG_{4/4}$, $ZG_{5/5}$ und einige selbst gewählte Zahlengitter mit gleichen Pluszahlen. Was fällt euch auf? Warum ist das so? (vgl. Anhang E: Zahlengitter - Arbeitsblatt 5)

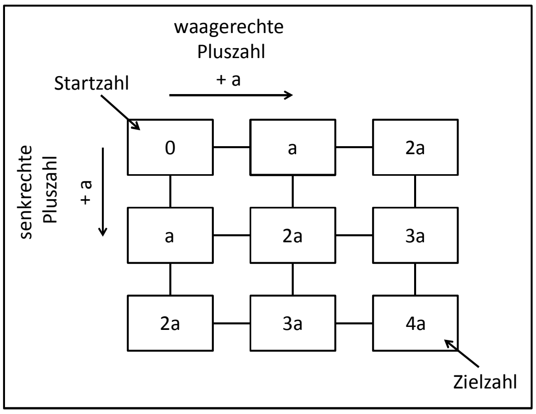


Abb. 4.5: Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen

Intendierte Entdeckung

Wenn in einem 3x3-Zahlengitter die waagerechte und senkrechte Pluszahl gleich sind, dann ist die Zielzahl das Vierfache der Pluszahl.

Beweis

Vorauss. (1): Gegeben ist ein 3x3-Zahlengitter mit $z = 2a + 2b$.

Vorauss. (2): $a = b$

Behauptung: $z = 4a$

Beweis:

	$z = 2a + 2b$	nach Vor(1)
$\Rightarrow$	$z = 2a + 2a$	nach Vor(2)
$\Rightarrow$	$z = 4a$	(Distributivität)

Zahlengitter - Benachbarte Pluszahlen

Die Aufgabe für die Kinder

Heute arbeiten wir nur mit besonderen Zahlengittern. Das Besondere daran ist, dass in den Zahlengittern die waagerechte und die senkrechte Pluszahl Nachbarzahlen sind. Die kleinere der beiden Zahlen ist die waagerechte Pluszahl (vgl. Abb. 4.6). Berechnet die vorgegebenen Zahlengitter $ZG_{3/4}$, $ZG_{4/5}$, $ZG_{5/6}$ und einige selbst gewählte Zahlengitter mit Pluszahlen, die Nachbarzahlen sind. Was fällt euch auf? Warum ist das so? (vgl. Anhang F: Zahlengitter - Arbeitsblatt 6)

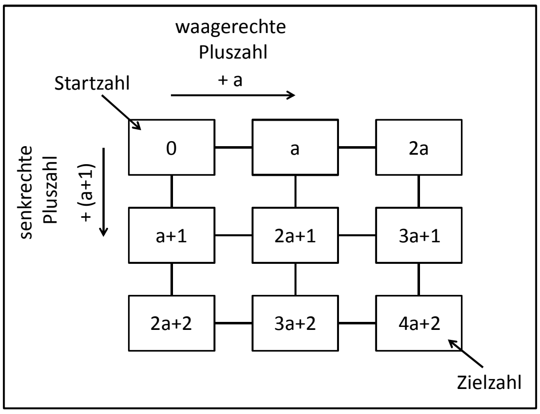


Abb. 4.6: Zahlengitter – Benachbarte Pluszahlen

Intendierte Entdeckung

Wenn in einem 3x3-Zahlengitter die waagerechte und senkrechte Pluszahl benachbarte Zahlen sind, dann ist die Zielzahl das Vierfache der waagerechten Pluszahl plus 2.

Beweis

Vorauss. (1): Gegeben ist ein 3x3-Zahlengitter mit $z = 2a + 2b$.

Vorauss. (2): a und b sind Nachbarzahlen, a ist die kleinere der beiden Zahlen; also $b = a + 1$

Behauptung: $z = 4a + 2$

Beweis:

$z = 2a + 2b$ nach Vor(1)

$\Rightarrow\ z = 2a + 2(a + 1)$ nach Vor(2)

$\Rightarrow\ z = 4a + 2$ (Distributivität, Assoziativität)

Zahlengitter - Pluszahlen verändern

Die Aufgabe für die Kinder

Heute wollen wir beobachten, was passiert, wenn man bei einem Zahlengitter die waagerechte Pluszahl um 1 erhöht (vgl. Abb. 4.7). Berechnet jeweils zuerst das vorgegebene Zahlengitter $ZG_{5/2}$ ($ZG_{7/6}$, $ZG_{9/3}$, $ZG_{10/8}$) und schreibt dann in rot das Zahlengitter darüber, das ihr erhaltet, wenn ihr die waagerechte Pluszahl um 1 erhöht (also $ZG_{6/2}$, $ZG_{8/6}$, $ZG_{10/3}$, $ZG_{11/8}$). Die senkrechte Pluszahl bleibt gleich. Wie verändern sich die Zielzahlen? Warum ist das so? (vgl. Anhang G: Zahlengitter - Arbeitsblatt 7)

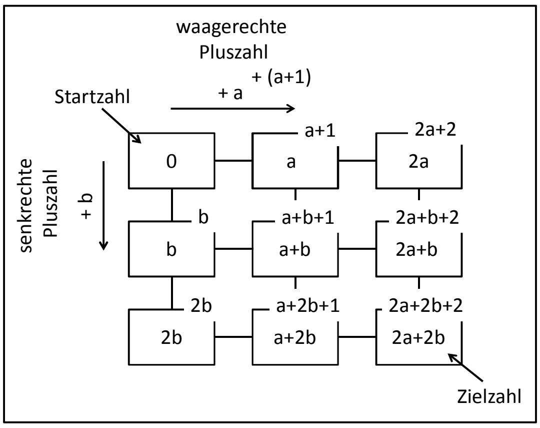


Abb. 4.7: Zahlengitter – Pluszahl erhöhen

Intendierte Entdeckung

Wenn in einem 3x3-Zahlengitter die waagerechte Pluszahl um 1 erhöht wird, dann erhöht sich die Zielzahl um 2.

Beweis

Vorauss. (1): Gegeben ist ein 3x3-Zahlengitter mit $z = 2a + 2b$.

Vorauss. (2): Setze $a' = a + 1$ und $b' = b$

Behauptung: $z' = z + 2$

Beweis:

$z' = 2a' + 2b'$ nach Vor(1)

$z' = 2(a + 1) + 2b$ nach Vor(2)

$\Rightarrow\ z' = (2a + 2b) + 2$ (Distributivität, Assoziativität, Kommutativität)

$\Rightarrow\ z' = z + 2$ nach Vor(1)

4.3 Das substanzielle Aufgabenformat „Zahlenketten“

Zahlenketten sind Zahlenfolgen, die auf die rekursive Bildungsregel der Fibonacci-Folge zurückgreifen: Das erste und zweite Folgenglied sind beliebig wählbar. Jedes nachfolgende Folgenglied ist die Summe der beiden vorhergehenden Folgenglieder. Es wird festgelegt, welches Folgenglied die letzte Zahl der Zahlenkette ist. Das erste und zweite Folgenglied werden als erste und zweite Startzahl bezeichnet. Das letzte Folgenglied nennt man Zielzahl. Die Abb. 4.8 zeigt eine fünfgliedrige Zahlenkette.

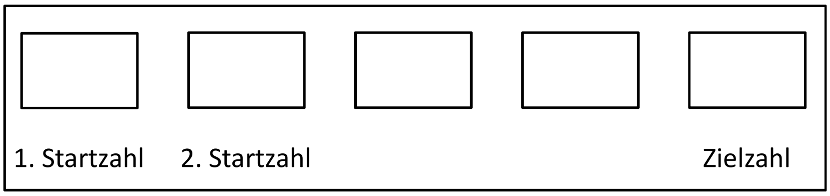


Abb. 4.8: Fünfgliedrige Zahlenkette allgemein

Die Variationsmöglichkeiten von Zahlenketten liegen in ihrer Länge (z.B. viergliedrig oder siebengliedrig), in der Wahl des Zahlenraums (z.B. natürliche Zahlen, ganze Zahlen, Bruchzahlen usw.), in der Wahl der Startzahlen (z.B. gleiche Startzahlen oder allgemeiner: Startzahlen, die in Beziehung zueinander stehen; etwa Vielfache voneinander sind), in der Anwendung anderer Grundrechenarten als der Addition etc. Aus dieser Vielzahl von Varianten habe ich für die anstehende Untersuchung solche ausgewählt, die für Grundschüler handhabbar sind: Grundlage aller gestellten Aufgaben waren fünfgliedrige Zahlenketten im Bereich der natürlichen Zahlen (in dieser Arbeit verstanden als N_0) mit der Addition als Grundrechenart.

Die erste und zweite Startzahl dürfen beliebig aus dem Bereich der natürlichen Zahlen inklusive Null gewählt werden. Die Abb. 4.9 zeigt die entstehenden Werte der einzelnen Felder der Zahlenkette. Für die Zielzahl ergibt sich dabei insbesondere stets der Wert: $z = 2a + 3b$.

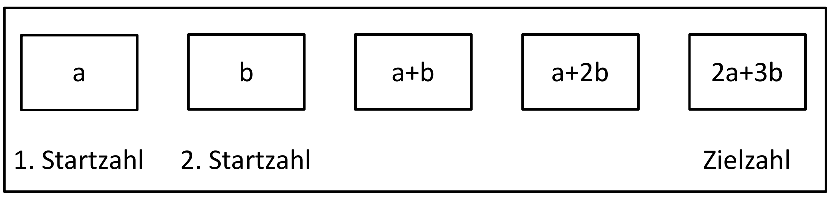


Abb. 4.9: Fünfgliedrige Zahlenkette mit algebraischer Struktur

Aus den zahlreichen möglichen Aufgabenstellungen zu Zahlenketten habe ich für diese Untersuchung die im Folgenden aufgeführten Aufgaben ausgewählt.

Zahlenketten - Gleiche Startzahlen

Die Aufgabe für die Kinder

Heute arbeiten wir nur mit besonderen Zahlenketten. Das Besondere daran ist, dass die Zahlenketten dieselben Startzahlen haben (vgl. Abb. 4.10). Berechnet die vorgegebenen Zahlenketten $ZK_{3/3}$, $ZK_{4/4}$, $ZK_{5/5}$ und einige selbst gewählte Zahlenketten mit gleichen Startzahlen. Was fällt euch auf? Warum ist das so? (vgl. Anhang L; Zahlenketten: Arbeitsblatt 5)

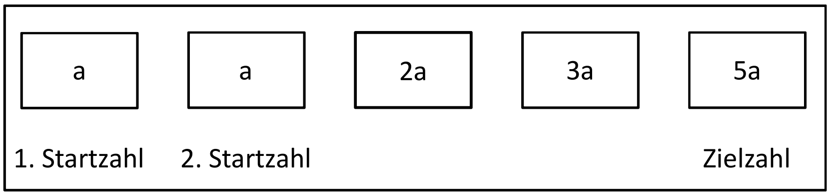


Abb. 4.10: Zahlenketten – Gleiche Startzahlen

Intendierte Entdeckung

Wenn in einer fünfgliedrigen Zahlenkette die erste und die zweite Startzahl gleich sind, dann ist die Zielzahl das Fünffache der Startzahl.

Beweis

Vorauss. (1): Gegeben ist eine fünfgliedrige Zahlenkette mit $z = 2a + 3b$.

Vorauss. (2): $a = b$

Behauptung: $z = 5a$

Beweis:

	$z = 2a + 3b$	nach Vor(1)
$\Rightarrow$	$z = 2a + 3a$	nach Vor(2)
$\Rightarrow$	$z = 5a$	(Distributivität)

Zahlenketten - Startzahlen vertauschen

Die Aufgabe für die Kinder

Heute arbeiten wir mit Zahlenketten. Es werden immer zwei Zahlenketten miteinander verglichen. In der oberen Zahlenkette werden zwei Startzahlen gewählt. Die kleinere der beiden Zahlen wird die erste Startzahl, die größere die zweite Startzahl. In der unteren Zahlenkette werden dieselben Startzahlen verwendet,

allerdings werden sie vertauscht, so dass die größere der beiden Zahlen dann die erste Startzahl wird und die kleinere die zweite Startzahl (vgl. Abb. 4.11).
Berechnet so die vorgegebenen Zahlenketten $ZK_{2/5}$ und $ZK_{5/2}$, $ZK_{8/9}$ und $ZK_{9/8}$, $ZK_{6/11}$ und $ZK_{11/6}$ und einige selbst gewählte Zahlenketten mit vertauschten Startzahlen. Was fällt euch auf? Warum ist das so? (vgl. Anhang M: Zahlenketten - Arbeitsblatt 6)

a	b	a+b	a+2b	2a+3b
1. Startzahl	2. Startzahl			Zielzahl
b	a	a+b	2a+b	3a+2b

Abb. 4.11: Zahlenketten – Startzahlen vertauschen

<u>Intendierte Entdeckung</u>

Wenn in einer fünfgliedrigen Zahlenkette die erste und zweite Startzahl vertauscht werden, dann unterscheiden sich die Zielzahlen um die Differenz der Startzahlen.

<u>Beweis</u>

Vorauss. (1): Gegeben ist eine fünfgliedrige Zahlenkette
mit $z = 2a + 3b$ und $a < b$.

Vorauss. (2): Setze $a' = b$ und $b' = a$.

Behauptung: $z = z' + (b - a)$

Beweis:

$$\begin{aligned} & z = 2a + 3b && \text{nach Vor (1)} \\ \Rightarrow\ & z = (3a - a) + (2b + b) && \\ \Rightarrow\ & z = (3a + 2b) + (b - a) && \text{(Kommutativität, Assoziativität)} \\ \Rightarrow\ & z = z' + (b - a) && \text{nach Vor (2)} \end{aligned}$$

Zahlenketten - Startzahl verändern

<u>Die Formulierung für die Kinder</u>

Heute wollen wir beobachten, was passiert, wenn man bei einer Zahlenkette die erste Startzahl um 1 erhöht (vgl. Abb. 4.12). Berechnet jeweils zuerst die vorgegebene Zahlenkette $ZK_{4/6}$ ($ZK_{7/10}$, $ZK_{15/20}$), und schreibt dann in rot die

Zahlenkette darüber, die ihr erhaltet, wenn ihr die erste Startzahl um 1 erhöht. (also entsprechend: $ZK_{5/6}$, $ZK_{8/10}$, $ZK_{16/20}$). Die zweite Startzahl bleibt gleich. Wie verändern sich die Zielzahlen? Warum ist das so? (vgl. Anhang N: Zahlenketten - Arbeitsblatt 7)

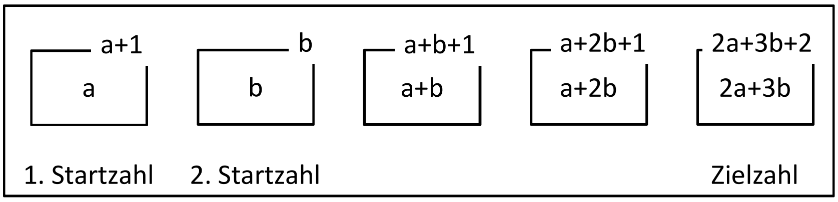


Abb. 4.12: Zahlenketten – Startzahl erhöhen

<u>Intendierte Entdeckung</u>

Wenn in einer fünfgliedrigen Zahlenkette die erste Startzahl um 1 erhöht wird, dann erhöht sich die Zielzahl um 2.

<u>Beweis</u>

Vorauss. (1): Gegeben ist eine fünfgliedrige Zahlenkette $z = 2a + 3b$.

Vorauss. (2): Setze $a' = a + 1$ und $b' = b$.

Behauptung: $z' = z + 2$

Beweis:

$z' = 2a' + 3b'$ nach Vor(1)

$z' = 2(a + 1) + 3b$ nach Vor(2)

$\Rightarrow \; z' = (2a + 3b) + 2$ (Distributivität, Assoziativität Kommutativität)

$\Rightarrow \; z' = z + 2$ nach Vor(1)

4.4 Durchführung der Untersuchung

Für die Untersuchung wurden zwei analog aufgebaute Unterrichtseinheiten zum Begründen am Beispiel der substanziellen Aufgabenformate „Zahlengitter“ und „Zahlenketten“ konzipiert.

Diese Unterrichtseinheiten wurden im 2. Halbjahr des Schuljahres 2005/06 in einem 4. Schuljahr einer ostwestfälischen Grundschule im Mathematikunterricht durchgeführt. Von Januar bis März wurde das Aufgabenformat „Zahlengitter“, von Mai bis Juni das Aufgabenformat „Zahlenketten“ bearbeitet.

Aufbau der Unterrichtseinheiten

Jede der beiden Unterrichtseinheiten bestand aus den folgenden sieben Sequenzen:

Sequenz	Zahlengitter	Zahlenketten
1	Aufbau und Regeln	Aufbau und Regeln
2	Ausfüllen von Zahlengittern	Ausfüllen von Zahlenketten
3	Anzahl der Lösungsmöglichkeiten	Anzahl der Lösungsmöglichkeiten
4	Zielzahl 20	Zielzahl 60
5	Gleiche Pluszahlen	Gleiche Starzahlen
6	Benachbarte Pluszahlen	Startzahlen vertauschen
7	Pluszahl verändern	Startzahl verändern

In der ersten Sequenz wurden die Definition, die Bezeichnungen und die Rechenvorschrift des jeweiligen Aufgabenformates thematisiert. So wurden zunächst das Aussehen, die Bezeichnungen, die Wahl des Zahlenraums und die Rechenvorschrift mit allen Kindern anhand einiger Zahlengitter bzw. Zahlenketten besprochen. Danach wurden die Zahlengitter bzw. Zahlenketten nach der Rechenvorschrift gemeinsam ausgefüllt. Im Anschluss daran berechneten die Kinder vorgegebene und selbst gewählte Zahlengitter bzw. Zahlenketten (vgl. Anhänge A und H).

In den Sequenzen 2 und 3 standen die Einarbeitung und Vertiefung, sowie ggf. erste Entdeckungen an der algebraischen Struktur der Aufgabenformate im Vordergrund. Die Kinder bearbeiteten in Sequenz 2 Aufgaben, in denen nur einige ausgewählte Zahlen des Zahlengitters bzw. der Zahlenkette vorgegeben waren. Sie sollten nun durch ihr Wissen über die Rechenvorschrift durch Kombinieren (wie z.B. Vorwärts- oder Rückwärtsrechnen) die fehlenden Zahlen herausfinden. Dabei konnte es vorkommen, dass es keine Lösung gab (vgl. Anhänge B und I). Die Aufgaben aus Sequenz 3 waren grundsätzlich genauso aufgebaut. Allerdings waren (außer der Startzahl bei Zahlengittern) höchstens zwei Zahlen gegeben, und es konnte vorkommen, dass es keine, genau eine, endlich viele oder unendlich viele Lösungen gab (vgl. Anhänge C und J).

Die Sequenz 4 beinhaltete die Problemstellung, alle Zahlengitter bzw. Zahlenketten mit einer bestimmten Zielzahl zu finden und die Anzahl aller gefundenen Zahlengitter bzw. Zahlenketten zu begründen (vgl. Anhänge D und K). Die Bearbeitung dieser Aufgabenstellung ermöglichte eine Systematisierung aller gefundenen Zahlengitter bzw. Zahlenketten und erforderte eine Vollständigkeitsbegründung, die über die Randfallbetrachtung der systematisch angeordneten Zahlengitter bzw. Zahlenketten auf kindgerechtem Niveau mit Hilfe des Nachrechnens durchführbar ist. Diese Vollständigkeitsbegründung in Sequenz 4 wurde als Übergang zu den Begründungsaufgaben in den Sequenzen 5 bis 7 gewählt.

In den Sequenzen 5 bis 7 wurden Begründungsaufgaben bearbeitet. Dazu wurde für jedes Zahlengitter bzw. für jede Zahlenkette eine zusätzliche Voraussetzung festgelegt. In Sequenz 5 handelte es sich um die Wahl gleicher Plus- bzw. Startzahlen (vgl. Anhänge E und L), in Sequenz 6 um die Wahl benachbarter Pluszahlen bzw. das Vertauschen von Startzahlen (vgl. Anhänge F und M) und in Sequenz 7 um das Verändern einer Plus- bzw. Startzahl (vgl. Anhänge G und N).
Die drei Sequenzen waren analog aufgebaut. So wurden zunächst immer erst einige vorgegebene und dann einige selbst gewählte Zahlengitter bzw. Zahlenketten mit der jeweiligen zusätzlichen Voraussetzung von den Kindern berechnet. Daraufhin wurden die Kinder mit dem Impuls „Was fällt dir auf?“ zum Entdecken angeregt. Die gemachten Entdeckungen sollten dann mit der Antwort auf die Frage „Warum ist das so?“ begründet und ggf. mit der Antwort auf die Nachfrage: „Ist das bei allen Zahlengittern bzw. Zahlenketten so?“ noch verallgemeinert werden.

Methodisches Vorgehen

Die Einarbeitungs- und Vertiefungsaufgaben der Sequenzen 1 bis 4 waren methodisch für die ganze Klasse gleich aufgebaut: Zu Beginn erfolgte ein gemeinsamer Einstieg in die Thematik an der Tafel. Die Aufgabenstellung wurde wahlweise in Einzel- oder Partnerarbeit mit Hilfe von Arbeitsblättern bearbeitet. Zum Reflexionsgespräch trafen sich alle Kinder der Klasse in einem Sitzhalbkreis vor der Tafel. So konnten einzelne Aufgaben gut demonstriert und gemeinsam diskutiert werden.

Die Begründungsaufgaben in den Sequenzen 5 bis 7 wurden methodisch wie folgt bearbeitet: Sechs ausgewählte Kinderpaare bearbeiteten alle drei Sequenzen jeweils in Form eines Leitfadeninterviews in einem separaten Raum. Mit den übrigen Kindern der Klasse wurde ein kurzer, erläuternder, gemeinsamer Einstieg in die Aufgabenstellung an der Tafel durchgeführt. Danach bearbeiteten diese „Klassenkinder" die Aufgaben schriftlich auf vorbereiteten Arbeitsblättern. Dabei konnten sie zwischen Einzel- oder Partnerarbeit wählen. Am Ende jeder Sequenz erfolgte ein gemeinsames Reflexionsgespräch mit allen Kindern der Klasse (also sowohl mit den „Interviewkindern" als auch mit den „Klassenkindern") im Sitzhalbkreis vor der Tafel.

Sowohl die Interviews als auch die schriftlichen Erarbeitungen der „Klassenkinder" fanden während der Wochenplanarbeitszeit der Klasse statt. Dabei wurden die Interviews in einem separaten Raum durchgeführt, so dass alle Kinder ungestört arbeiten konnten. Diese Interviews wurden, wie in Kapitel 4.1 beschrieben, auf Video aufgenommen und anschließend transkribiert.

Die Kinderpaare

Für die Interviews wurden von der Lehrperson 12 Kinder ausgewählt und zu sechs jeweils leistungshomogenen Paaren zusammengefasst, so dass sich schließlich zwei leistungsstarke, zwei leistungsschwache und zwei Kinderpaare von mittlerem Leistungsniveau ergaben. Durch die unterschiedlichen Leistungsstärken der Kinderpaare sollten sich Daten zu einem möglichst großen Leistungsspektrum der Klasse ergeben.

Die Paare wurden leistungshomogen zusammengesetzt, damit die beiden Kinder sich bei der Bearbeitung der Aufgaben gegenseitig unterstützen, aber auch gedanklich folgen können. Dabei soll jedem Kind genügend Zeit für eigene Überlegungen zur Verfügung stehen. Bei einer heterogenen Zusammensetzung der Kinderpaare könnte es passieren, dass das leistungsstärkere Kind nicht nur schneller in seinen Gedankengängen ist, sondern vielleicht sogar Erklärungsschnitte, die für das Kind selbst „klar" sind, auslässt.
Im weiteren Verlauf dieser Untersuchung ist die homogene Zusammensetzung der Kinderpaare jedoch irrelevant, da es nicht von Interesse ist, einen Bezug zwischen

dem allgemeinen mathematischen Leistungsstand und den Fähigkeiten und Vorgehensweisen beim Begründen herzustellen.

Ein Interview mit Kinderpaaren ermöglicht vor allem auch den Austausch der Kinder untereinander. Es war erwünscht, dass die Kinder sich untereinander ihre Gedankengänge mitteilen und sich dadurch gegebenenfalls gegenseitig in ihrem Denken unterstützen. Sie haben die Gelegenheit, die Gedankengänge ihres Partners nachzuvollziehen und diese mit ihrem eigenen Verständnis in Verbindung zu bringen. Bei einer solchen Zusammenarbeit kann es vorkommen, dass die Kinder als Paar bei der Bearbeitung einer Fragestellung ‚weiter kommen', als es dem jeweils einzelnen Kind gelungen wäre. Zudem kann das gemeinsame Arbeiten den Arbeitsfluss und die Motivation – gerade bei ungewohnten und nicht auf Anhieb zu lösenden Fragestellungen – aufrechterhalten oder sogar steigern.

Das Interview

Im Interview haben die Kinder die Möglichkeit, ihre Gedanken mündlich zu äußern. Dieses ist für sie bei weitem leichter als eine Verschriftlichung und zudem in den meisten Fällen viel detaillierter.

Die Interviews wurden als Leitfadeninterviews durchgeführt (vgl. Kapitel 4.1). Die Kinder sollten mit eigenen Worten auf die Fragen und Impulse des Interviewers reagieren. Dabei war es wichtig, dass der Interviewer die Gesprächsführung übernimmt, sich aber nicht in die Bearbeitung der Aufgabe einbringt. Die Struktur des Interviewgesprächs ergab sich aus den einzelnen Themengebieten des Leitfadens: dem Ausfüllen von vorgegebenen und eigenen Zahlengittern bzw. Zahlenketten, dem Stellen von Fragen zu Auffälligkeiten bzw. Entdeckungen und zu Begründungen und ggf. noch zur Verallgemeinerung der Begründung. Der Interviewer sollte auf die individuellen Antworten der Kinder flexibel reagieren und insbesondere an geeigneten Stellen des Gesprächs ggf. mit Tipps auf die gewünschte Entdeckung hin lenken. Wenn der Interviewer dann aus der Situation heraus der Meinung war, dass beide Kinder den zu begründenden Sachverhalt entdeckt haben, sollte er eine Begründung dazu einfordern. In den Antworten darauf habe ich eine große Bandbreite von Gedankengängen erwartet. Daher war dieser Teil des Interviews am flexibelsten zu gestalten. Hier war es dann Aufgabe des Interviewers, Verständnisfragen zu stellen, Begründungen zu hinterfragen oder sie nochmal mit anderen Worten wiederholen zu lassen. Er sollte Impulse zum Weiterdenken geben oder, wenn erforderlich, die Kinder in einen gedanklichen Konflikt bringen. War der Interviewer der Auffassung, dass die Kinder die Begründung geben konnten, sollte er noch eine Verallgemeinerung dieser Begründung einfordern. Wenn er dagegen den Eindruck hatte, dass die Kinder in der Bearbeitung der Aufgabe nicht mehr weiter kamen, sollte er die bisherigen Antworten in jedem Fall würdigen und das Interview mit dem Hinweis auf ein gemeinsames inhaltliches Reflexionsgespräch mit der ganzen Klasse am Ende der jeweiligen Sequenz beenden.

5 Auswertung der Untersuchung

Für die Auswertung der Untersuchung wurde eine Auswahl aus der großen Datenmenge von 36 Partnerinterviews getroffen. Dabei wurden jeweils gleich viele Interviews aus jedem der Aufgabenformate „Zahlengitter“ und „Zahlenketten“ ausgewählt, und zwar je 6 Interviews zu „Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen“, „Zahlengitter – Pluszahl verändern“, „Zahlenketten – Gleiche Startzahlen“ und „Zahlenketten – Startzahl verändern“. Insgesamt standen damit 24 Partnerinterviews, also 48 Kinderbearbeitungen zu Begründungsaufgaben in Form von Transkripten zur detaillierten Auswertung zur Verfügung. Auf die übrigen Interviews wurde in einigen Fällen zur Validierung erster Deutungshypothesen zurückgegriffen.

Nach der Arbeitsdefinition eines Beweises aus Kapitel 2.1 (vgl. S.7) besteht ein Beweis aus deduktiven Schlussfolgerungen von der Voraussetzung auf die Behauptung. Dabei müssen die vorausgesetzten Aussagen wahr sein und zur Legitimation der Schlussfolgerung dürfen nur mathematische Sätze und Definitionen verwendet werden.

Im Rahmen der vorliegenden empirischen Untersuchung wurden nur Begründungen von „Wenn-dann-Aussagen“ gefordert, die von wahren Voraussetzungen auf eine Behauptung schließen. Es musste also folgender Schluss gezogen werden: *Wenn die Voraussetzungen wahr sind, dann ist auch die Behauptung wahr.*

In einem ersten Schritt wurden die ausgewählten Transkripte daraufhin analysiert, ob bei den Begründungen der Kinder diese logische Struktur zu finden ist.

5.1 Struktur der Wenn-dann-Aussage

Die Transkripte wurden entlang der folgenden Leitfragen analysiert:

- Verwenden die Kinder in ihrer Begründung die Voraussetzungen?
- Ist den Kindern die Behauptung der Aussage klar?
- Besteht für die Kinder ein Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung? Wenn ja, weist der Zusammenhang zielgerichtet von

den Voraussetzungen auf die Behauptung in dem Sinne, dass die Voraussetzungen Bedingungen für das Eintreten der Behauptung sind bzw. dass die Behauptung abhängig von den Voraussetzungen ist?

Im Folgenden werden einige Transkriptausschnitte entlang dieser Fragen diskutiert: Als Vita und Leo die Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Startzahl erhöhen' bearbeiten, antwortet Vita auf die Nachfrage der Interviewerin hin, warum die Zielzahl immer um 2 höher wird, anhand der Zahlenkette $ZK_{4/6}$ und der entsprechend erhöhten Zahlenkette $ZK_{5/6}$ wie folgt:

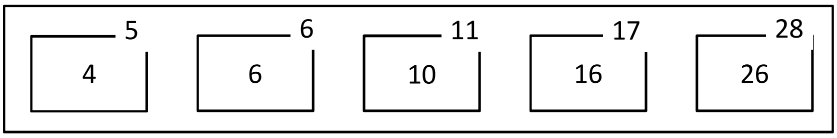


Abb. 5.1: Zahlenkette $ZK_{4/6}$ mit erhöhter Zahlenkette $ZK_{5/6}$

8 V: Ja, also, weil hier ist jetzt also. Hier ist ja eine Zahl *(zeigt auf die 2. Startzahl)*, hier wird's ja um 1 höher *(zeigt auf 5 der $ZK_{5/6}$)*. Da hat man 1 mehr *(zeigt von 4 auf 6 der $ZK_{4/6}$)*. Da hat man, dann ist das also 1 mehr, immer noch *(zeigt auf 11 der $ZK_{5/6}$)*.

9 Und dann rechnet man noch mal 1 *(zeigt auf 11 der $ZK_{5/6}$)* mehr plus die Zahl *(zeigt auf 6 der $ZK_{4/6}$)*, dann wird's noch mal 1 mehr hier *(zeigt auf 17 der $ZK_{5/6}$)*. Dann ist hier *(zeigt von 16 der $ZK_{4/6}$ auf 17 der $ZK_{5/6}$)* 1 mehr und hier *(zeigt von 10 der $ZK_{4/6}$ auf 11 der $ZK_{5/6}$)* 1 mehr. Und dann rechnet man zweimal 1 mehr *(zeigt auf 11, dann auf 17 und dann auf 28 der $ZK_{5/6}$)*. Deshalb werden's dann zweimal mehr.

Vita beginnt ihre Erklärung mit dem Aufzeigen der Voraussetzung (2): Die zweite Startzahl bleibt unverändert („Hier ist ja eine Zahl *(zeigt auf die 2. Startzahl)*" – 8). Die erste Startzahl wird um 1 erhöht („hier wird's ja um 1 höher *(zeigt auf 5 der $ZK_{5/6}$)*" – 8). Die Rechenvorschrift bei Zahlenketten deutet Vita in Abschnitt 8 nur durch eine Geste („*(zeigt von 4 auf 6 der $ZK_{4/6}$)*") an, später verbalisiert sie die einzelnen Rechnungen aber auch noch konkreter: „Und dann rechnet man noch mal 1 […] mehr plus die Zahl" und „Und dann rechnet man zweimal 1 mehr" (9). Nach diesen durchgeführten Rechenschritten ist das Ziel ihrer Begründung die Erhöhung der Zielzahl um 2 („Deshalb werden's dann zweimal mehr." – 9). Daraus wird ersichtlich,

Redaktionelle Anmerkungen:
Die im Weiteren verwendeten Bezeichnungen „Voraussetzungen (1) und (2)" beziehen sich auf die „Voraussetzungen (1) und (2)" aus den Kapiteln 4.2 und 4.3.

dass Vita auch die Voraussetzung (1) und die Behauptung der Aussage klar sind. Durch ihr schrittweises Vorgehen von den Voraussetzungen (1) und (2) zur Behauptung stellt sie einen zielgerichteten Zusammenhang zwischen diesen beiden Teilen der Wenn-dann-Aussage in dem Sinne her, dass die Voraussetzungen Bedingungen für das Eintreten der Behauptung sind.

Vita und Leo bearbeiten die Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen'.
Sie haben entdeckt, dass die Startzahl jeweils einmal in der Zahl des ersten und zweiten Kästchens, zweimal in der Zahl des dritten Kästchens, dreimal in der Zahl des vierten Kästchens und fünfmal in der Zahl des fünften Kästchens enthalten ist. Sie fragen sich, warum es kein Kästchen gibt, in dessen Zahl die Startzahl viermal enthalten ist. Leos Vermutungen zu dieser Frage basieren auf der Anzahl der vorhandenen Kästchen. Auf die Aufforderung der Interviewerin hin, zu begründen, warum die Zielzahl das Fünffache einer Startzahl ist, verschiebt Leo gedanklich die zweite Startzahl zwischen das vierte und fünfte Kästchen, so dass bei der Addition der Zahlen aus dem vierten (4x8=32) und dem zwischengeschobenen Kästchen (+8) das Fünffache der Startzahl als Ergebnis herauskommt.
Vita hat eine andere Idee. Sie bezieht sich dabei auf die folgende Zahlenkette $ZK_{8/8}$:

8	8	16	24	40

Abb. 5.2: Zahlenkette $ZK_{8/8}$

74 V: Ich hab' was anderes.
I: Vita, dann sag du mal.
V: Hier *(zeigt auf 8 (b) der $ZK_{8/8}$)* ist ja einmal die 8.
75 Plu- und eh, und zweimal einmal die 8 *(zeigt von 8 (a) zu 8 (b) der $ZK_{8/8}$ hin und her)* ist zweimal die 8 *(zeigt auf 16 der $ZK_{8/8}$)*. Und dann einmal *(zeigt auf 8 (b) der $ZK_{8/8}$)* plus zweimal *(zeigt auf 16 der $ZK_{8/8}$)* die 8 ist ja dreimal die 8 *(zeigt auf 24 der $ZK_{8/8}$)*. Und dann 2-mal *(zeigt auf 16 der $ZK_{8/8}$)* plus 3-mal die 8 *(zeigt auf 24 der $ZK_{8/8}$)* ist schon 5-mal die 8 *(zeigt auf 40 der $ZK_{8/8}$)*. Und deshalb fehlt die 4.

In Abschnitt 75 zeigt sich, dass Vita die Voraussetzung (1) und (2) klar sind. Sie beginnt ihre Begründung mit den beiden gleichen Startzahlen (Vor(2)) und addiert – der zugrunde liegenden Rechenvorschrift folgend (Vor(1)) - die Zahlen in den Kästchen. Dabei zeigt sie auf die konkreten Zahlen der Zahlenkette, bezeichnet diese aber jeweils als das n-Fache der Startzahl. Die letzte Addition des Zweifachen mit dem Dreifachen der Startzahl 8 ergibt dabei „schon 5 mal die 8“ (75).

In ihrer Argumentation kommt also das gesuchte 4-Fache der Startzahl nicht vor. Sie findet aber damit eine von der Interviewerin geforderte Begründung für die Behauptung. Da Vita ihre Argumentation an dieser Stelle beendet, liegt es nahe, anzunehmen, dass ihr auch die Behauptung klar ist.

Durch ihre schrittweise Vorgehensweise stellt Vita auch in dieser Begründung einen zielgerichteten Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen (1) und (2) und der Behauptung der Wenn-dann-Aussage her. Für sie ist die Behauptung abhängig von den gegebenen Voraussetzungen.

Ein ähnliches Verständnis der Struktur der zu beweisenden Wenn-dann-Aussage findet sich bei Christine. Sie bearbeitet zusammen mit Tobias die Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen‘. Nach der Aufforderung der Interviewerin zu begründen, warum die Zielzahl das Vierfache der Pluszahl ist, führt Tobias zuerst seine Begründung an dem Zahlengitter $ZG_{20/20}$ aus. Dann wird Christine gebeten, den Sachverhalt noch einmal an einem anderen ihr vorliegenden Zahlengitter zu erklären. Sie bezieht sich dann auf das Zahlengitter $ZG_{120/120}$:

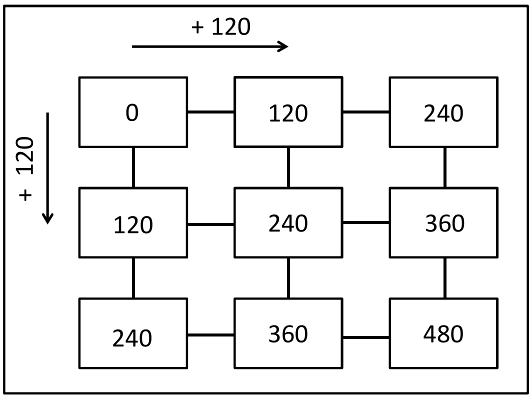


Abb. 5.3: Zahlengitter $ZG_{120/120}$

	C:	Ehm, hier *(zeigt auf 240ul des $ZG_{120/120}$)* das sind eh…
	T:	120 plus 120.
65	C:	Ja, 120 plus 120 *(zeigt auf 240ul des $ZG_{120/120}$)* sind zwei-
	T:	-oder zwei[…?]. Oder zweimal 120.
	C:	Das sind 240. Und dann 240 plus 120 sind 360.
66		Und dann 360 plus 120 sind 480. Und dann sind das wieder vier.

Christines Begründung ist das schrittweise Nachrechnen der Entstehung des Weges 2 des vorliegenden Zahlengitters. Dabei verwendet sie in Abschnitt 65 ‚automatisch‘

die beiden gleichen Pluszahlen (Vor(2)) und folgt in den Abschnitten 65 und 66 der vorgegebenen Rechenvorschrift (Vor(1)). Ihr abschließender Satz „Und dann sind das wieder vier.“ (66) bezieht sich auf die Behauptung, dass die Zielzahl das Vierfache einer Pluszahl ist. Durch ihr schrittweises Nachrechnen der Entstehung des Weges 2 des Zahlengitters stellt also auch Christine einen zielgerichteten Zusammenhang von den Voraussetzungen (1) und (2) zur Behauptung der Wenn-dann-Aussage her.

Die bisher interpretierten Transkripte von Vita und Christine weisen hinsichtlich der Struktur der zu beweisenden Wenn-dann-Aussage Gemeinsamkeiten auf: Beide Kinder verwenden die Voraussetzungen (1) und (2) der Aussage. Zudem ist ihnen die Behauptung der jeweils zu beweisenden Aussage klar. Sie stellen einen zielgerichteten Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung in dem gewünschten Sinne her, dass die Voraussetzungen Bedingungen für das Eintreten der Behauptung sind.

Anja bearbeitet zusammen mit Edwin die Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Startzahl erhöhen‘. Direkt nach ihrer Entdeckung, dass sich die Zielzahl immer um 2 erhöht, gibt Anja am Beispiel der Zahlenketten $ZK_{4/6}$ und $ZK_{5/6}$ folgende Begründung:

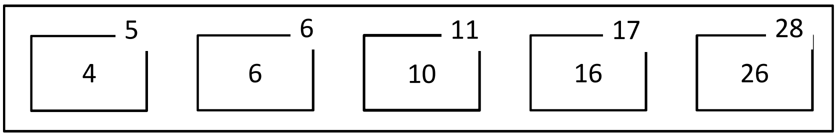


Abb. 5.4: Zahlenkette $ZK_{4/6}$ mit erhöhter Zahlenkette $ZK_{5/6}$

7	I:	Das geht immer darum, zu gucken, was passiert dann hinten mit den Zielzahlen. Schon `ne Idee? *(Anja nickt)*
8	A:	Also hier *(zeigt von 26 der $ZK_{4/6}$ auf 28 der $ZK_{5/6}$)* ist immer 2, also hier *(zeigt von 10 der $ZK_{4/6}$ auf 11 der $ZK_{5/6}$)* ist ein, also das *(zeigt auf 11 der $ZK_{5/6}$)* ist einer mehr als das *(zeigt auf 10 der $ZK_{4/6}$)*. Und das ist auch einer mehr als das *(zeigt zwischen 16 der $ZK_{4/6}$ und 17 der $ZK_{5/6}$ hin und her)*. Und wenn man die beiden Einer *(deutet locker vom 3. zum 4. Kästchen hin und her)* zusammenrechnet, dann sind das 2 *(zeigt auf 28 der $ZK_{5/6}$)*.

Anja ist die Behauptung der zu beweisenden Aussage klar. In Abschnitt 8 formuliert sie „Also hier ist immer 2.“ und zeigt dabei von der Zielzahl 26 der Zahlenkette $ZK_{4/6}$ auf die Zielzahl 28 der Zahlenkette $ZK_{5/6}$. Sie drückt damit aus, dass sich die Zielzahlen der Zahlenketten, deren erste Startzahlen um 1 erhöht wurden, immer um

2 erhöhen. Der Grund für diese Behauptung liegt für sie in der Addition der Erhöhungen der dritten und vierten Zahl der ‚erhöhten Zahlenkette': „also hier *(zeigt von 10 der $ZK_{4/6}$ auf 11 der $ZK_{5/6}$)* ist ein, also das *(zeigt auf 11 der $ZK_{5/6}$)* ist einer mehr als das *(zeigt auf 10 der $ZK_{4/6}$)*. Und wenn man die beiden Einer *(deutet locker vom 3. zum 4. Kästchen hin und her)* zusammenrechnet, dann sind das 2 *(zeigt auf 28 der $ZK_{5/6}$)*." (8). Damit wendet Anja die Rechenvorschrift für die dritte und vierte Zahl der ‚erhöhten Zahlenkette' an. Die Anwendung der Rechenvorschrift für diese beiden Zahlen entspricht einem Teil der Voraussetzung (1). Anja geht allerdings nicht darauf ein, dass die Rechenvorschrift mit den beiden Startzahlen beginnt und dann entsprechend weiter geführt wird (Vor (1)). Ebenso erwähnt sie die Voraussetzung (2) – die Erhöhung der ersten Startzahl - nicht.

Das Ziel ihrer Begründung („dann sind das 2 *(zeigt auf 28 der ZK5/6)*" – 8) ist die Behauptung der zu beweisenden Aussage. Zu dieser Behauptung stellt sie unter Einbeziehung der Rechenvorschrift für Zahlenketten - also unter Verwendung eines Teiles der Voraussetzung (1) - einen zielgerichteten Zusammenhang her.

Patrick und Christoph bearbeiten die Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen'. Sie argumentieren mit Hilfe der ihnen vorliegenden Zahlenkette $ZK_{7/7}$:

7	7	14	21	35

Abb. 5.5: Zahlenkette $ZK_{7/7}$

53	P:	Jedenfalls sind das 5 [mal?] 5 Päckchen *(zeigt von links nach rechts über die $ZK_{7/7}$)* und jedes Mal wird ehm, quasi plus 7 so gerechnet.
54		Aber bei, in jedem Päckchen wird quasi mal gerechnet. Und wenn man schon hier ist *(zeigt auf 21 der $ZK_{7/7}$)* dann wird mal 4 gerechnet. Und hier wird mal 5 gerechnet *(zeigt auf 35 der $ZK_{7/7}$)*. Weil es 5 Päckchen bis da, weil man mit der 7 anfängt.
55		Zweimal der 7, deswegen. Wenn's jetzt \`ne 7 und \`ne 8 wären, dann würde was anderes rauskommen.

Patrick zeigt durch seine Äußerung in Abschnitt 53 („Jedenfalls sind das [...] 5 Päckchen *(zeigt von links nach rechts über die ZK7/7)*"), dass ihm klar ist, dass es sich bei den zu behandelnden Zahlenketten um fünfgliedrige Zahlenketten handelt (Vor(1)). Seine Formulierung „quasi plus 7 so gerechnet" (53) lässt einerseits darauf schließen, dass er weiß, dass zur Entstehung der einzelnen Zahlen der Zahlenkette die Rechenvorschrift (in diesem Fall die Addition) angewendet wurde (Vor(1)).

Andererseits deutet die Verwendung des Ausdruckes „quasi plus 7“ auf eine Ungenauigkeit hinsichtlich der zu addierenden Summanden hin. Patrick wendet also nicht die exakte Rechenvorschrift der Voraussetzung (1) an.

In Abschnitt 55 verbalisiert er deutlich die Voraussetzung (2), dass es sich bei den vorliegenden Bearbeitungen um Zahlenketten mit gleichen Startzahlen handelt („weil man mit der 7 anfängt. Zweimal der 7, deswegen.“ – 54).

Ihm ist bewusst, dass sich jede Zahl der Zahlenkette als ein Vielfaches von 7 darstellen lässt („in jedem Päckchen wird quasi mal 7 gerechnet“ – 54). Das Ziel seiner Ausführungen ist das fünfmalige Enthaltensein der 7 in der letzten Zahl der Zahlenkette – der Zielzahl („Und hier wird mal 5 gerechnet *(zeigt auf 35 der ZK$_{7/7}$)*.“ - 54). Dieses Ziel seiner Begründung entspricht der Behauptung der Aussage. Die Behauptung ist ihm also klar. Er versucht direkt, einen zielgerichteten Zusammenhang von den Voraussetzungen auf die Behauptung herzustellen („Weil es 5 Päckchen bis da, weil man mit der 7 anfängt. Zweimal der 7, deswegen.“ – 54/55). Dabei bezieht er sich auf Teile der Voraussetzung (1) und auf die Voraussetzung (2). Damit ist die Behauptung abhängig von Teilen der tatsächlich gegebenen Voraussetzungen (1) und (2).

Bei ihrer Bearbeitung der Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen‘ haben Tobias und Christine nach der Aufforderung der Interviewerin, zu überlegen, wie denn die Zielzahl und die Pluszahlen „zusammen passen“, entdeckt, dass die Zielzahl immer durch die Pluszahl teilbar ist, und dass das Ergebnis dieser Division bei allen ihnen vorliegenden Zahlengittern immer 4 ist. Auf die Nachfrage der Interviewerin nach einer Begründung für diese Entdeckung reagieren Christine und Tobias wie folgt:

57	I:	Woher kommt das denn?
	C:	Vielleicht an den Pluszahlen. Weil 20 *(deutet auf 20wPZ des ZG$_{20/20}$)*, 120 *(deutet auf 120wPZ des ZG$_{120/120}$)* oder 1200 *(deutet auf 1200wPZ des ZG$_{1200/1200}$)*…
58	T:	Nein! Weil die Pluszahl *(zeigt von 20wPZ auf 20sPZ des ZG$_{20/20}$)* immer gleich ist.
	I:	Deshalb kommt da immer 4 raus?
59	T:	Weiß nicht. Ja! Ja…

Christines erste Idee ist es, dass die Begründung mit den Pluszahlen 20, 120, und 1200 der Zahlengitter ZG$_{20/20}$, ZG$_{120/120}$ und ZG$_{1200/1200}$ zusammenhängt (57). Diese Idee weist Tobias in Abschnitt 58 mit einem vehementen „Nein!“ zurück und führt als

Begründung die eigentliche Voraussetzung (2) der zu beweisenden Aussage an: „Weil die Pluszahl *(zeigt von 20wPZ auf 20sPZ des ZG$_{20/20}$)* immer gleich ist.“ (58) Die Interviewerin fragt noch einmal konkret nach, ob Tobias‘ Antwort die Begründung für die zuvor gemachte Entdeckung ist (58). Tobias reagiert daraufhin zunächst mit Unsicherheit („Weiß nicht.“ – 59), bestätigt dann aber zuerst sehr deutlich und direkt danach etwas nachdenklicher („Ja! Ja...“ – 59) diese Nachfrage. Dadurch wird deutlich, dass Tobias die (wenn auch in dieser Phase der Bearbeitung etwas abgewandelte) Behauptung und die Voraussetzung (2) – gleiche Pluszahlen – klar sind. Er setzt diese beiden Bausteine der Struktur der zu beweisenden Aussage direkt miteinander in Verbindung, indem er die Behauptung in alleiniger Abhängigkeit von der Voraussetzung (2) und damit nur von einem Teil der gegebenen Voraussetzungen sieht.

Die drei Transkriptausschnitte von Anja, Patrick und Tobias weisen folgende Gemeinsamkeit auf: Die Behauptung der zu beweisenden Aussage ist klar. Sie ist das Ziel der Begründungen und damit abhängig von den Voraussetzungen. Die verwendeten Voraussetzungen entsprechen allerdings nicht vollständig den tatsächlichen Voraussetzungen (1) und (2), sondern nur Teilen von ihnen.

In einigen Transkripten (z.B. Michelle in ‚Kai und Michelle: Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen‘ oder Anja in ‚Anja und Edwin: Zahlengitter – Pluszahl erhöhen‘) finden sich keinerlei Äußerungen, die auf die Behauptung oder die Voraussetzungen der zu beweisenden Aussage hinweisen. Deshalb ist in diesen Transkripten nicht ersichtlich, inwieweit den Kindern diese Elemente der Wenn-Dann-Aussage überhaupt klar sind. Demzufolge stellen diese Kinder auch keinen Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung auf.

Zusammenfassend lassen sich drei verschiedene Typen hinsichtlich der Struktur der zu beweisenden Wenn-dann-Aussage finden:

WdA 1: „Zusammenhang von den Voraussetzungen auf die Behauptung“
Sowohl die Voraussetzungen, als auch die Behauptung der zu beweisenden Aussage sind klar. Es wird ein zielgerichteter Zusammenhang von diesen Voraussetzungen auf die Behauptung hergestellt.

WdA 2: „Zusammenhang von Teilen der Voraussetzungen auf die Behauptung“

Die Behauptung der zu beweisenden Aussage ist klar. Sie ist das Ziel der Begründungen und demnach abhängig von den Voraussetzungen. Dabei entsprechen die verwendeten Voraussetzungen nur Teilen der gegebenen Voraussetzungen (1) und (2).

WdA 3: „Keine Äußerungen“

Es ist nicht ersichtlich, in wieweit die Behauptung oder die Voraussetzungen der zu beweisenden Aussage klar sind, da sich keine Äußerungen zu diesen Elementen der Wenn-Dann-Aussage finden lassen.

Es ist interessant zu beobachten, dass alle Kinder, die einen Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung hergestellt haben (WdA 1 und WdA 2), diesen in der Richtung von den Voraussetzungen auf die Behauptung aufgestellt haben. Für sie ist die Behauptung abhängig von den Voraussetzungen.

Es ist möglich, dass der Grund für diese spezielle Beobachtung in dieser empirischen Untersuchung in den Aufgabenformaten selbst und dem Umgang mit ihnen zu finden ist: Die Rechenvorschrift in den Zahlengittern und Zahlenketten legt die Rechen-Richtung fest. Sie hat jeweils einen definierten Anfang und ein definiertes Ende, deren Bedeutung zusätzlich durch die sprachlichen Bezeichnungen „Start- und Zielzahlen“ unterstrichten wird. Während der Arbeit mit Aufgabenformaten werden sowohl in den einführenden Sequenzen, als auch später zur Entdeckung der Behauptung immer wieder Zahlengitter bzw. Zahlenketten selbst ausgerechnet. In diesem Prozess des wiederholten Ausrechnens in der vorgegebenen Rechenrichtung von den Start- zu den Zielzahlen wird die Wenn-dann-Struktur immer wieder von den Kindern selbst erzeugt. Diese wiederholte eigene Herstellung der Wenn-dann-Struktur könnte sehr förderlich für ihre Nutzung in einer später geforderten Begründung zu einer Wenn-dann-Aussage sein.

Bis jetzt konnten verschiedene Typen hinsichtlich der Struktur der zu beweisenden Wenn-dann-Aussage herausgearbeitet werden. Bereits in den ausgewählten Transkriptausschnitten ist aber erkennbar, dass sich die Vorgehensweisen der Kinder bei ihren Begründungen z.T. erheblich unterscheiden.

In einem zweiten Schritt habe ich daher die Daten hinsichtlich der verschiedenen Vorgehensweisen der Kinder beim Begründen interpretiert.

5.2 Vorgehensweise der Kinder beim Begründen

In diesem zweiten Schritt wurden die Transkripte entlang der folgenden Leitfrage analysiert:

- Wie gehen die Kinder bei der Suche nach dem Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung vor?

Edwin und Anja bearbeiten die Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen'. Edwin hat bereits an den Zahlenketten $ZK_{8/8}$ und $ZK_{30/30}$ begründet, warum die Zielzahl das Fünffache der Startzahl ist. Anjas Begründung basiert auf der Anzahl der Kästchen. Sie ist der Meinung, dass Edwins Begründung anders ist, weil er mit „Zweierzahlen" arbeitet. Sie meint damit zweistellige Zahlen. Nun versucht Edwin am Beispiel der Zahlenkette $ZK_{110/110}$ zu zeigen, dass seine Art der Begründung auch für „Dreierzahlen" (dreistellige Zahlen) gilt:

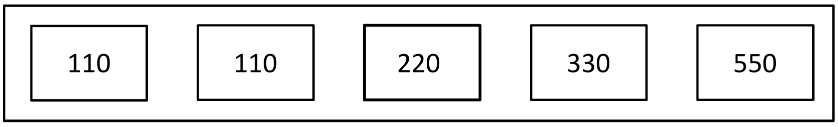


Abb. 5.6: Zahlenkette $ZK_{110/110}$

52 E: Mh, weil die 110 *(zeigt auf 110 (a) der $ZK_{110/110}$)* plus 110 *(zeigt auf 110 (b) der $ZK_{110/110}$)* sind 220 *(zeigt auf 220 der $ZK_{110/110}$)*.

53 Da hat man schon zweimal. Weil man das zwei *(zeigt gleichzeitig auf 110 (a) und 110 (b) der $ZK_{110/110}$)*, weil man zwei[mal], eh 110 plus 110 das ist die 220 und das sind dann zweimal.

54 Wegen das *(zeigt auf 110 (a) der $ZK_{110/110}$)* und das *(zeigt auf 110 (b) der $ZK_{110/110}$)*. Und dann sind, ist die da *(zeigt auf 330 der $ZK_{110/110}$)* dreimal, weil da *(zeigt auf 220 der $ZK_{110/110}$)* steckt sie ja zweimal drin und da *(zeigt auf 110 (b) der $ZK_{110/110}$)* steckt sie ja einmal drin.

55 Und zw-, und das *(zeigt auf 110 (b) der $ZK_{110/110}$)* plus das *(zeigt auf 220 der $ZK_{110/110}$)* ist das *(zeigt auf 330 der $ZK_{110/110}$)*. Und da 1 *(zeigt auf 110 (b) der $ZK_{110/110}$)* plus 3 *(zeigt auf 220 der $ZK_{110/110}$)*. Also kommt, steckt sie da dreimal drin. Und da ist sie zweimal *(zeigt auf 220 der $ZK_{110/110}$)* und da dreimal *(zeigt auf 330 der $ZK_{110/110}$)*. 3 und 2 *(zeigt gleichzeitig auf 220 und 330 der $ZK_{110/110}$)* sind 5 *(zeigt auf 550 der $ZK_{110/110}$)*.

56 Und da *(zeigt auf 220 der $ZK_{110/110}$)* sind zweimal und da *(zeigt auf 330 der $ZK_{110/110}$)* sind dreimal. Und das ist 5.

I: Und deshalb sind sie ganz hinten fünfmal drin.

E: Ja *(nickt)*

Edwin beginnt damit, die beiden Startzahlen zu addieren (52) und erhält im dritten Kästchen der Zahlenkette „zweimal" (53) die Startzahl. Das Dreifache der Startzahl

im vierten Kästchen ergibt sich, indem er die einfache Startzahl im zweiten Kästchen zu der zweifachen Startzahl im dritten Kästchen addiert (54 und 55). Und da die Startzahl im dritten Kästchen zweimal und im vierten Kästchen dreimal enthalten ist und „3 und 2 [...] 5 sind“ (55), ist die Zielzahl das Fünffache der Startzahl (55 und 56).
Um den Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung der Aussage herzustellen, beginnt Edwin seine Begründung mit den Voraussetzungen und teilt dann seine Argumentation entlang der Rechenvorschrift (jede Zahl ist die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen) in drei Teilschritte auf, bis er die Behauptung erreicht hat („Und das ist 5.“ – 56)

Die Vorgehensweise bei Tobias‘ Begründung zur Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen‘ ist dieselbe. Tobias argumentiert beim ersten Mal mit Hilfe des Zahlengitters ZG$_{20/20}$:

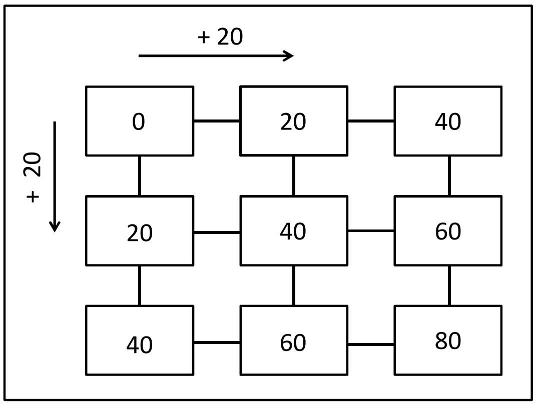


Abb. 5.7: Zahlengitter ZG$_{20/20}$

60 Ich frag’s mal anders rum: Es ist ja dann so, dass ich viermal die Pluszahl nehmen kann, ne? Und komme auf die Zielzahl. Wieso geht das?
61 T: Weil das wird immer, 20 *(zeigt auf 20ml des ZG$_{20/20}$)* wird immer viermal genommen.
62 I: Zeig mal genau.
T: Also, zweimal 20 *(zeigt auf 20ml des ZG$_{20/20}$)* sind 40 *(zeigt auf 40ul des ZG$_{20/20}$)*. Dann zzz-, dann 40 *(zeigt auf 40ul des ZG$_{20/20}$)* plus 20 sind 60 *(zeigt auf 60um des ZG$_{20/20}$)*. Und dann 80 *(zeigt auf 80ur des ZG$_{20/20}$)*. Das waren dann viermal.

Daraufhin wird Christine zunächst aufgefordert, den Sachverhalt zu begründen und dann Tobias gebeten, seine Erklärung noch einmal zu formulieren. Dieses Mal argumentiert er anhand des Zahlengitters ZG$_{1200/1200}$:

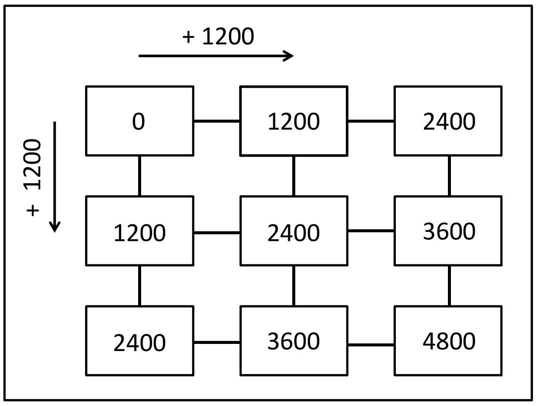


Abb. 5.8: Zahlengitter $ZG_{1200/1200}$

67 I: Tobias, erklärst du's auch noch mal?

T: Ja! Zweimal 1200 *(zeigt auf 1200ml des $ZG_{1200/1200}$)* sind 2400 *(zeigt auf 2400ul des $ZG_{1200/1200}$)*.

68 Und dann noch mal 2400 *(zeigt auf 2400ul des $ZG_{1200/1200}$)* get-, mal zw-, äh, plus 1200 sind 3600 *(zeigt auf 3600um des $ZG_{1200/1200}$)*. Das waren dann schon dreimal.

69 Und dann noch mal plus 1200 *(zeigt auf 4800ur des $ZG_{1200/1200}$)* sind 4800. Das waren dann viermal.

Tobias zerlegt seine Gesamtargumentation in Teilschritte. Diese Teilschritte entsprechen den Rechnungen, die man auf dem Weg 2 durch das jeweilige Zahlengitter von der Start- zur Zielzahl durchführt. Bei dieser Vorgehensweise geht Tobias ‚automatisch' von den Voraussetzungen aus, da er neben der vorgegebenen Rechenvorschrift auch die gleichen Pluszahlen benutzt. Er interpretiert die erste Rechnung direkt als das Zweifache der senkrechten Startzahl („zweimal 20 *(zeigt auf 20ml des $ZG_{20/20}$)*" – (62) und „Zweimal 1200 *(zeigt auf 1200ml des $ZG_{1200/1200}$)*" – (67)). Beim Zahlengitter $ZG_{1200/1200}$ interpretiert er das nächste Zwischenergebnis als das Dreifache einer Startzahl („Das waren dann schon dreimal" - 68). Bei diesem Zahlengitter führt er die zum Erlangen der Zielzahl notwendige letzte Addition sogar explizit aus („Und dann noch mal plus 1200 *(zeigt auf 4800ur des $ZG_{1200/1200}$)* sind 4800." – 69). In jedem Fall interpretiert er die erreichte Zielzahl als das Vierfache einer Startzahl („Das waren dann viermal." (analog in 62 und 69)).

Damit stellt Tobias – genau wie Edwin – einen zielgerichteten Zusammenhang von den Voraussetzungen zu der Behauptung der Aussage auf und teilt seine Argumentation dabei entlang der Rechenvorschrift des Zahlengitters in einzelne Teilschritte auf.

Auch Michelles Argumentation zur Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Startzahl erhöhen‘ unterteilt sich analog zu den einzelnen Rechenschritten, die von der Start- zur Zielzahl durchgeführt werden müssen. Sie hat die Zahlenkette $ZK_{4/6}$ und die erhöhte Zahlenkette $ZK_{5/6}$ vor sich liegen und führt ihre Idee einer Argumentation folgendermaßen aus:

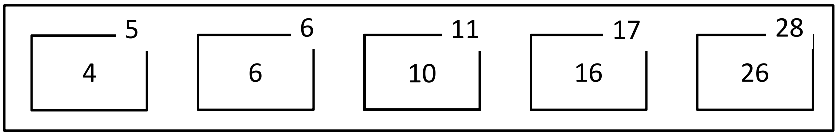


Abb. 5.9: Zahlenkette $ZK_{4/6}$ mit erhöhter Zahlenkette $ZK_{5/6}$

33 M: Vielleicht ist ja so, wie ehm, ich weiß nicht, wer das gesagt hat, aber wo wir uns das letzte Mal ehm,

34 hier so in der Klasse gesessen haben, hat doch irgendjemand gesagt, dass ehm, ehm, ich weiß jetzt nicht mehr genau was.

35 Hier *(zeigt auf 4 der $ZK_{4/6}$)* wird das um 1 erhöht. Hier *(zeigt auf 6 der $ZK_{4/6}$)* ist dann, dann steht da *(deutet mit dem Stift rund um das 1. Kästchen der $ZK_{4/6}$)* sozusagen \`ne 1 und hier *(zeigt auf 6 der $ZK_{5/6}$)* das bleibt \`ne 0. Weil da wird's ja nicht erhöht.

36 Und dann: 1 *(zeigt auf 4 der $ZK_{4/6}$)* plus 0 *(zeigt auf 6 der $ZK_{4/6}$)* sind wieder 1 *(zeigt auf 10 der $ZK_{4/6}$)*, weil hier *(zeigt rund um das 3. Kästchen der $ZK_{4/6}$)* ist das auch um 1 erhöht. Ich weiß aber nicht, warum.

37 Und dann, weil hier *(zeigt auf 6 der $ZK_{4/6}$)* ja \`ne 0 steht, muss man hier *(zeigt auf 6 der $ZK_{4/6}$)* 0 plus 1 *(zeigt auf 10 der $ZK_{4/6}$)* sind wieder 1 *(zeigt auf 16 der $ZK_{4/6}$)*. Hier *(zeigt auf 10 der $ZK_{4/6}$)* steht ja jetzt keine 0 und 1 *(zeigt auf 10 der $ZK_{4/6}$)* plus 1 *(zeigt auf 16 der $ZK_{4/6}$)* ergibt dann 2 *(zeigt auf 26 der $ZK_{4/6}$)*. Und das ist dann um 2 erhöht.

Michelle beginnt ihre Ausführung mit der Voraussetzung (2), dass die erste Startzahl um 1 erhöht wird (35). Im Weiteren betrachtet sie nicht die konkreten Zahlen der vorliegenden Zahlengitter, sondern ersetzt die Zahlen in den Kästchen durch den Wert ihrer Erhöhungen („Hier *(zeigt auf 6 der $ZK_{4/6}$)* ist dann, dann steht da *(deutet mit dem Stift rund um das 1. Kästchen der $ZK_{4/6}$)* sozusagen \`ne 1 und hier *(zeigt auf 6 der $ZK_{5/6}$)* das bleibt \`ne 0. Weil da wird's ja nicht erhöht.“ – 35). Sie addiert diese Werte analog zu der geltenden Rechenvorschrift in Zahlenketten (36 und 37), d.h. sie wendet die Voraussetzung (1) an, und erhält dabei im letzten Kästchen das Ergebnis 2 (37). Dieses Ergebnis des letzten Rechenschritts ist für Michelle die Erhöhung der Zielzahl („Und das ist dann um 2 erhöht.“ – 37) und damit das Ziel ihrer Argumentation.

Die Vorgehensweisen von Edwin, Tobias und Michelle weisen damit folgende Gemeinsamkeiten auf: Die drei Kinder stellen einen zielgerichteten Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung der Aussage her, indem sie ihre Argumentation entlang der Rechenvorschrift des jeweiligen Aufgabenformates in einzelne kleine Teilschritte zerlegen.

Diese Vorgehensweise wurde bei der Analyse der Transkripte häufig vorgefunden. Diese Auffälligkeit könnte in den Aufgabenformaten selbst begründet sein, denn die einzelnen Teilschritte der Argumentation verlaufen parallel zu der Rechenvorschrift des jeweiligen Formates. Bei ihren Begründungen verfolgen die Kinder demnach den Konstruktionsweg (die Rechenvorschrift) von der Start- zur Zielzahl, um einen argumentativen zielgerichteten Zusammenhang von den Voraussetzungen auf die Behauptung der Aussage herzustellen.

Eine andere Vorgehensweise zeigt sich bei Tobias. Er bearbeitet zusammen mit Christine die Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Pluszahl erhöhen'. Sie haben gerade an den ihnen vorliegenden Zahlengittern entdeckt, dass die Zielzahl in den erhöhten Zahlengittern „zwei mehr ist". Nun begründet Tobias diese Entdeckung direkt an dem Zahlengitter $ZG_{5/2}$ und dem erhöhten Zahlengitter $ZG_{6/2}$:

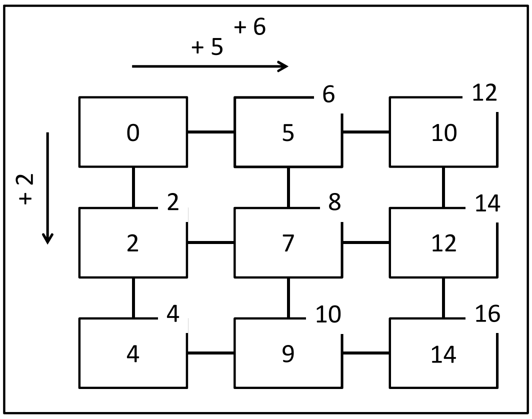


Abb. 5.10: Zahlengitter $ZG_{5/2}$ mit erhöhtem Zahlengitter $ZG_{6/2}$

T: Es sind zwei mehr, weil, man nimmt ja zweimal die 6 *(zeigt über 6om des $ZG_{6/2}$ auf 10or des $ZG_{5/2}$)* und nicht einmal die 6 *(zeigt über 5om auf 10or des $ZG_{5/2}$)*. Also zwei-, zweimal fünf *(zeigt auf 5om des $ZG_{5/2}$)* sind ja 10.
21 Und zweimal 6 sind ja 12. Also immer zwei sechs, eine 6 ist ja höher als eine 5. Also einen höher und dann noch mal das Gleiche und das sind dann zwei mehr.

Tobias' Argumentation beginnt mit der Zusammenfassung der ersten Addition entlang des Weges 1 durch das erhöhte Zahlengitter zu einer Multiplikation: „man

nimmt ja zweimal die 6 *(zeigt über 6om des $ZG_{6/2}$ auf 10or des $ZG_{5/2}$)*" (20). Hier wendet er den ersten Teil der Rechenvorschrift (und damit einen Teil der Voraussetzung (1)) an. Später verbalisiert er die Voraussetzung (2) explizit: „eine 6 ist ja höher als eine 5" (21) und bringt diese dann mit dem durchgeführten ersten Teil der Rechenvorschrift in Zusammenhang („Also einen höher und dann noch mal das gleiche" (21). Das Resultat dieser Kombination ist das angestrebte Ziel seiner Argumentation („und das sind dann zwei mehr" – 21). Den zweiten Teil des Konstruktionsweges bei dem Weg 1 durch das erhöhte Zahlengitter, die zweimalige Addition der senkrechten Pluszahl, erwähnt Tobias nicht. Vermutlich bringt er sein Resultat in direkten Zusammenhang mit der Behauptung, da es dieser sehr ähnelt und ihm nicht bewusst ist, dass es sich um ein „Zwischenergebnis" auf dem Weg zur Zielzahl handelt. Es ist aber ebenso denkbar, dass er seine Argumentation nicht fortsetzt, weil die „fehlenden" Additionen keine weiteren erhöhten Summanden beinhalten und sich somit für ihn kein weiterer Erklärungsbedarf ergibt.
Damit lässt sich seine Vorgehensweise als die Herstellung eines zielgerichteten Zusammenhangs zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung beschreiben, bei der er einen Teil der Voraussetzung (1) verwendet und mit der Voraussetzung (2) kombiniert. Als das Ergebnis dieser Kombination der Aussage der zuvor entdeckten Behauptung entspricht, beendet Tobias seine Argumentation.

Ein sehr ähnliches Vorgehen lässt sich bei Christoph erkennen. Er bearbeitet zusammen mit Patrick die Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Pluszahl erhöhen'. Christoph hat entdeckt, dass sich die Zielzahl des Zahlengitters um 2 erhöht. Zuerst begründet Patrick diese Entdeckung. Direkt im Anschluss daran argumentiert Christoph anhand des ihm vorliegenden Zahlgitters $ZG_{7/6}$ und des erhöhten Zahlengitters $ZG_{8/6}$ wie folgt:

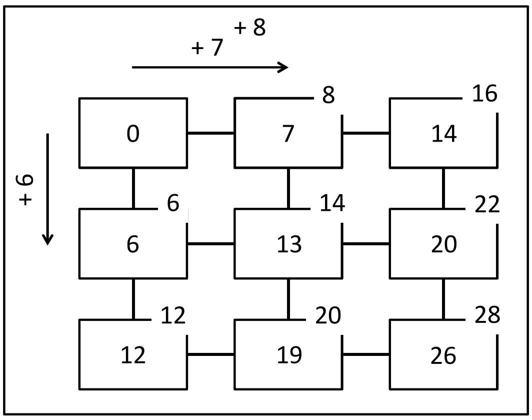


Abb. 5.11: Zahlengitter $ZG_{7/6}$ mit erhöhtem Zahlengitter $ZG_{8/6}$

C: Ah! Also, man geht ja immer zwei Schritte *(zeigt von 7om auf 14or des* $ZG_{7/6}$*)* mit einer Pluszahl *(zeigt zwischen 8wPz und 6sPz des* $ZG_{8/6}$ *hin und her)*.
28 Weil ja hier *(zeigt auf 8wPz des* $ZG_{8/6}$*)* ehm, plus 1 gerechnet wird, ist es dann, ehm, kann man hier *(zeigt auf 8wPz des* $ZG_{8/6}$*)* einfach, ehm, halt hier *(zeigt auf 14or des* $ZG_{7/6}$*)* 2 mehr rechnen, weil man ja da *(zeigt von 7om auf 14or des* $ZG_{7/6}$*)* dann zwei Schritte geht.
29 P: Also weil das ist ja hier *(zeigt auf 10or des* $ZG_{5/2}$*)* 2 mehr-
C: 2 mehr als es das *(zeigt auf 14or des* $ZG_{7/6}$*)*, als beim alten.

In seiner ersten Äußerung verbalisiert Christoph die Rechenvorschrift in einem 3x3-Zahlengitter und zeigt dabei zwischen der waagerechten und der senkrechten Pluszahl hin und her („man geht ja immer zwei Schritte […] mit einer Pluszahl *(zeigt zwischen 8wPz und 6sPz des* $ZG_{8/6}$ *hin und her)*“ - 27). Hinsichtlich eines möglichen Weges durch dieses Zahlengitter deutet er dabei zusätzlich auf den ersten Teil des Weges 1 durch das Zahlengitter („man geht ja immer zwei Schritte *(zeigt von 7om auf 14or des* $ZG_{7/6}$*)*“ - 27). Dieses verdeutlicht, dass ihm die Voraussetzung (1) klar ist. Die Voraussetzung (2) führt er danach explizit aus („Weil ja hier *(zeigt auf 8wPz des* $ZG_{8/6}$*)* ehm, plus 1 gerechnet wird“ – 28) und kombiniert sie im Weiteren mit dem ersten Teil der Rechenvorschrift; also mit der Voraussetzung (1) („weil man ja da *(zeigt von 7om auf 14or des* $ZG_{7/6}$*)* dann zwei Schritte geht“ – 28). Das Ergebnis dieser Kombination ist die Erhöhung der Zahl im Kästchen oben rechts um zwei (28 und 29). An dieser Stelle wird Christoph von Patrick unterbrochen, und Christophs Begründung wird nicht weiter verfolgt. So bleibt offen, ob Christoph von sich aus die Begründung an dieser Stelle erfolgreich beendet hätte.
Festzuhalten ist, dass er seine Begründung wie Tobias mit der Kombination des ersten Teils der Voraussetzung (1) und der Voraussetzung (2) beginnt.

Leo und Vita bearbeiten gemeinsam die Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen‘. Sie haben entdeckt, dass die Zielzahlen das Fünffache einer Startzahl sind. Nun diskutieren sie die Begründung dieser Entdeckung an der vorliegenden Zahlenkette $ZK_{5/5}$ wie folgt:

5	5	10	15	25

Abb. 5.12: Zahlenkette $ZK_{5/5}$

46	I:	Das heißt, wenn ich die Startzahlen. Wenn ich die so wähle, dass sie dieselben sind, ich nehm sie fünfmal, krieg ich meine Zielzahl raus. Könnte stimmen. Leo sagt ja, das sieht hier so aus.
47		Wir wissen aber noch nicht, warum. Jetzt müssen wir uns mal angucken, wieso die Startzahlen, die da gleich sind, fünfmal in der Zielzahl stecken.
48	L:	1, 2, 3, 4, 5. 5 Kästchen *(tippt nacheinander von links nach rechts auf alle Kästchen der $ZK_{50/50}$)*.
	I:	Na, das hätt' ich gern genauer erklärt.
49	V:	Mh, hier *(zeigt auf 5 (b) der $ZK_{5/5}$)* ist einmal. Da *(zeigt auf 10 der $ZK_{5/5}$)* ist zweimal, hier *(zeigt auf 15 der $ZK_{5/5}$)* dreimal und hier *(zeigt auf 25 der $ZK_{5/5}$)* fünfmal.
	I:	Wie kommt das denn?
	V:	Warum die 4 ausgelassen wird, weiß ich auch nicht.
	L:	Ja, weil die beiden Startzahlen *(legt seinen Stift über 5(a) und 5 (b) der $ZK_{5/5}$)* doch gleich sind.
50	V:	Ja und? Da könnte hier *(zeigt auf 25 der $ZK_{5/5}$)* doch viermal am Ende sein und nicht [unbedingt] fünf.
	L:	\`Türlich fünfmal. 5 Kästchen. Die beiden *(zeigt auf 5(a) und 5 (b) der $ZK_{5/5}$)* zählen doch mit.
51	V:	Da kann doch genauso gut die, die, die Zweierreihe oder da-, oder das Dritte fehlen.
	L:	Ja, aber die beiden *(zeigt auf 5(a) und 5 (b) der $ZK_{5/5}$)* sind doch mitgezählt. Die addieren sich doch auch.
52	V:	Ja, ich weiß.
	L:	Ja, sag ich doch. Also.

Leo zählt als Begründung der Entdeckung die fünf Kästchen der vor ihm liegenden Zahlenkette $ZK_{50/50}$ ab und fasst zusammen: „5 Kästchen“ (48). Aufgrund der Aufforderung der Interviewerin in Abschnitt 48 und Vitas zusätzlichen Beobachtungen und ihrer Fragestellung in Abschnitt 49 ergänzt Leo seine Begründung in Abschnitt 49 so: „Ja, weil die beiden Startzahlen *(legt seinen Stift über 5 (a) und 5 (b) der $ZK_{5/5}$)* doch gleich sind.“ Vitas Einwand, dass trotzdem am Ende der Zahlenkette das Vierfache und nicht das Fünffache stehen könnte, bringt Leo dazu, seine erste Antwort in Abschnitt 50 zu differenzieren: „\`Türlich fünfmal. 5 Kästchen. Die beiden *(zeigt auf 5 (a) und 5 (b) der $ZK_{5/5}$)* zählen doch mit.“ Als Vita immer noch nicht überzeugt ist, ergänzt Leo auch diese Differenzierung noch durch die Äußerung „Die addieren sich doch auch.“ (51). Damit bezieht sich Leo in seiner Begründung auf die Teile der Voraussetzung (1), dass die vorgegebenen Zahlenketten fünfgliedrig sind (48 und 50) und dass bei der Rechenvorschrift addiert wird (51). Die exakte Rechenvorschrift nutzt er allerdings nicht. Die Voraussetzung (2) ist ihm klar (49). Er kombiniert die Voraussetzung (2) mit der Anzahl der Kästchen (50) und der nicht ganz exakten Rechenvorschrift (51), um einen Zusammenhang zu der entdeckten

Behauptung (50) herzustellen. Somit erkundet auch Leo das Umfeld der Voraussetzungen in dem Bestreben, einen zielgerichteten Zusammenhang auf die Behauptung herzustellen.

Bei Anjas und Edwins Bearbeitung der Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen' hat Edwin gerade eine Begründung für den Sachverhalt am Beispiel der Zahlenkette $ZK_{110/110}$ gegeben. Anja reagiert auf die Aufforderung, diese Begründung noch einmal mit eignen Worten zu erklären, folgendermaßen:

110	110	220	330	550

Abb. 5.13: Zahlenkette $ZK_{110/110}$

57 I: Kannst du es noch mal mit deinen Worten erklären?

A: Also das ist ja, ehm, hier sind ja die gleichen Zahlen *(zeigt auf 110 (a) und 110 (b) der $ZK_{110/110}$)*. Und das sind ja auch die Startzahlen. Und dann wird das ja mehr. Und dann wird das ja wieder mehr. Und dann muss das ja noch <u>viel</u> mehr ergeben.

Zu Beginn zeigt sie die beiden gleichen Zahlen in den ersten beiden Kästchen der vorliegenden Zahlenkette (57). Sie bezeichnet sie als „die Startzahlen" (57). Damit verdeutlicht sie, dass ihr die Voraussetzung (2) klar ist. In ihrer weiteren Ausführung „Und dann wird das ja mehr. Und dann wird das ja wieder mehr. Und dann muss das ja noch viel mehr ergeben." (57) deutet sich an, dass ihr auch die Rechenvorschrift in Zahlenketten und damit die Voraussetzung (1) klar ist. Die dreimalige Nutzung des Ausdrucks „und dann" könnte auf die 3 Rechenschritte von den Startzahlen zur Zielzahl einer Zahlenkette verweisen. Demnach könnten die Formulierungen „dann wird das ja mehr" bzw. „wieder mehr" und „dann muss das ja noch viel mehr ergeben" (57) auf die wachsende Summe bei den durchzuführenden Additionen hindeuten.

Anja macht sich also für ihre Begründung die gegebenen Voraussetzungen noch einmal bewusst, auch wenn sie sie nicht miteinander kombiniert. Auch sie erkundet somit das Umfeld der gegebenen Voraussetzungen. Sie ist aufgefordert, zu begründen, dass die Zielzahl das Fünffache einer Startzahl ist. Dazu kann sie nachvollziehen, dass die Zahlen in den Kästchen der Zahlenkette von den Start- zu der Zielzahl wachsen. Ihr ist allerdings nicht einsichtig, welchen Zahlwert diese Zahlen konkret erreichen, so dass sie auch nicht auf das geforderte Fünffache einer Startzahl trifft.

Als Gemeinsamkeit in der Vorgehensweise lässt sich zusammenfassend bei Tobias, Christoph, Leo und Anja festhalten, dass sie alle das Umfeld der gegebenen Voraussetzungen erkunden (explorieren). Tobias trifft dabei auf ein Resultat, dass für ihn mit der Behauptung gleichzusetzen ist und stellt daraufhin den direkten Zusammenhang mit dieser auf. Christoph unterbricht (durch äußere Einflüsse) seine Argumentation an der Stelle, an der sein Zwischen-Ergebnis der Behauptung der Aussage sehr ähnelt. Leo kombiniert einen Teil der Voraussetzung (1) mit der Voraussetzung (2), um einen Zusammenhang zu der Behauptung aufzustellen. Und Anja findet keinen Hinweis auf einen konkreten Zusammenhang zwischen ihren Erkundungen und der Behauptung der Aussage. Ihre Erkundungen zielen jedoch wenigstens in die Richtung der Behauptung.

Bei allen diesen Vorgehensweisen ist folgende Grundstrategie zu beobachten: Die gegebenen Voraussetzungen und die Behauptung werden in einen zielgerichteten Zusammenhang gebracht, indem man das Umfeld der Voraussetzungen in dem Bestreben erkundet, dass sich die ‚Lücke' zwischen den beiden Polen ‚Voraussetzung' und ‚Behauptung' schließen lässt.

Anja bearbeitet zusammen mit Edwin die Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Startzahl erhöhen'. Direkt nach ihrer Entdeckung, dass sich die Zielzahl immer um 2 erhöht, gibt Anja am Beispiel der Zahlenketten $ZK_{4/6}$ und $ZK_{5/6}$ folgende Begründung:

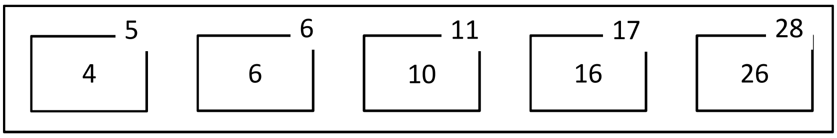


Abb. 5.14: Zahlenkette $ZK_{4/6}$ mit erhöhter Zahlenkette $ZK_{5/6}$

7 I: Das geht immer darum, zu gucken, was passiert dann hinten mit den Zielzahlen. Schon `ne Idee?
(Anja nickt)

8 A: Also hier *(zeigt von 26 der $ZK_{4/6}$ auf 28 der $ZK_{5/6}$)* ist immer 2, also hier *(zeigt von 10 der $ZK_{4/6}$ auf 11 der $ZK_{5/6}$)* ist ein, also das *(zeigt auf 11 der $ZK_{5/6}$)* ist einer mehr als das *(zeigt auf 10 der $ZK_{4/6}$)*. Und das ist auch einer mehr als das *(zeigt zwischen 16 der $ZK_{4/6}$ und 17 der $ZK_{5/6}$ hin und her)*. Und wenn man die beiden Einer *(deutet locker vom 3. zum 4. Kästchen hin und her)* zusammenrechnet, dann sind das 2 *(zeigt auf 28 der $ZK_{5/6}$)*.

Zu Beginn verdeutlich Anja noch einmal die Entdeckung und damit die Behauptung der Aussage „Also hier *(zeigt von 26 der $ZK_{4/6}$ auf 28 der $ZK_{5/6}$)* ist immer 2“ (8). Die Begründung für diese Behauptung sieht sie in der Addition der Erhöhungen der dritten und vierten Zahl der ‚erhöhten Zahlenkette‘. Diese Addition entspricht dem letzten Schritt der gegebenen Rechenvorschrift. Sie addiert jedoch nicht die konkreten Zahlen der vorliegenden Zahlenkette, sondern verwendet nur die beobachteten Erhöhungen dieser konkret gegebenen Zahlen. Das Ziel ihrer Begründung („dann sind das 2 *(zeigt auf 28 der $ZK_{5/6}$)*“ – 8) ist die Behauptung der zu beweisenden Aussage. Damit erkundet Anja das Umfeld der Behauptung und stellt einen zielgerichteten Zusammenhang zu dieser her. Dazu führt sie den letzten Schritt der gegebenen Rechenvorschrift mit der Sichtweise auf die Erhöhungen der konkreten Zahlen durch.

Bei der Bearbeitung der Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen‘ nickt Nina zustimmend zu Johanns Erklärung und wird daraufhin aufgefordert, eine Begründung mit eigenen Worten zu geben. Sie bezieht sich dabei auf die vor ihr liegende Zahlenkette $ZK_{7/7}$:

7	7	14	21	35

Abb. 5.15: Zahlenkette $ZK_{7/7}$

48 I: Sagst du’s noch mal mit deinen Worten, Nina?

N: Hier ist einmal *(zeigt auf 7 (b) der $ZK_{7/7}$)*, da zweimal *(zeigt auf 14 der $ZK_{7/7}$)* und da dreimal *(zeigt auf 21 der $ZK_{7/7}$)* und so. Und dann muss man diese zwei *(zeigt auf 14 der $ZK_{7/7}$)* plus die drei *(zeigt auf 21 der $ZK_{7/7}$)* mal.

49 Das ergibt *(zeigt auf 35 der $ZK_{7/7}$)* 5. Und dann muss man das mal 5 rechnen. Also dann, eh, ich hab hier zum Beispiel mal 7 mal 5 muss man dann rechnen.

Nina beginnt ihre Begründung mit der Verbalisierung und dem Zeigen der Beobachtung, dass die gegebene Startzahl in der zweiten Startzahl einmal, in der dritten Zahl der Zahlenkette zweimal und in der vierten Zahl der Zahlenkette dreimal enthalten ist (48). Dann gibt sie eine Art Rechenanweisung, dass die „zwei“ und die „drei“ von dem beobachteten „zwei“- bzw. „drei“maligem Enthaltensein der gegebenen Startzahl in der dritten und vierten Zahl der Zahlenkette addiert werden müssen (48). Das Ergebnis dieser Addition ist 5. Dieses Ergebnis steht in Zusammenhang mit der Behauptung der zu beweisenden Aussage, dass die Zielzahl das Fünffache einer Startzahl oder anders formuliert, dass die Zielzahl „die Startzahl mal 5" ist („Und dann muss man das mal 5 rechnen. […] hier zum Beispiel mal 7 mal 5 muss man dann rechnen" – 49).

Für Nina ist die Behauptung der zu beweisenden Aussage also abhängig von der Addition der dritten und vierten Zahl der Zahlenkette. Sie addiert die Multiplikatoren der Vervielfachungen der gegebenen Startzahlen, die in der dritten und vierten Zahl der Zahlenkette enthalten sind, um einen zielgerichteten Zusammenhang auf die entdeckte Behauptung zu finden. Das bedeutet, dass sie nicht die konkreten Zahlen der vorliegenden Zahlenkette addiert, sondern diese Zahlen auf einer abstrakteren Ebene (fast schon als Terme mit Variablen) betrachtet. Dabei wendet sie den letzten Schritt der Rechenvorschrift für Zahlenketten an.

Die Vorgehensweisen von Anja und Nina lassen sich dahingehend zusammenfassen, dass beide Kinder nach einem zielgerichteten Zusammenhang auf die entdeckte Behauptung suchen. Dazu erkunden sie das Umfeld der Behauptung und führen den letzten Schritt der jeweiligen Rechenvorschrift unter Beachtung der abstrakt zu betrachtenden Zahlen durch.

Kai begründet bei der Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen' die gerade entdeckte Behauptung, dass die Zielzahl das Vierfache einer Pluszahl ist, folgendermaßen:

48	I:	Das kann man also doch sehen, ne? Wenn man ein bisschen genauer hinguckt. Jetzt wär' natürlich noch meine Frage: Habt ihr \`ne Idee, warum das so ist, dass man die mal 4 nehmen muss, diese Pluszahl?
49	K:	Weil das immer die gleichen Zahlen sind.

Damit bringt Kai die entdeckte Behauptung in einen direkten Zusammenhang mit der Voraussetzung (2). Die Voraussetzung (1) erwähnt und nutzt er in seiner Argumentation überhaupt nicht.

Tobias argumentiert bei der gleichen Aufgabenstellung ebenso:

	I:	Woher kommt das denn?
	C:	Vielleicht an den Pluszahlen. Weil 20 *(deutet auf 20wPZ des $ZG_{20/20}$)*, 120 *(deutet auf 120wPz des $ZG_{120/120}$)* oder 1200 *(deutet auf 1200wPz des $ZG_{1200/1200}$)*…
58	T:	Nein! Weil die Pluszahl *(zeigt von 20wPz auf 20sPz des $ZG_{20/20}$)* immer gleich ist.
	I:	Deshalb kommt da immer 4 raus?
59	T:	Weiß nicht. Ja! Ja…

Für ihn liegt die Begründung für die Behauptung direkt in der Voraussetzung (2). Auch er erwähnt und nutzt die Voraussetzung (1) nicht.

Vita reagiert bei der Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Pluszahl erhöhen' ähnlich:

18 I: Dann ist die Frage: Warum?
V: Also um 1 höher, wär ja logisch, weil's hier *(zeigt von 7wPz des $ZG_{7/6}$ auf 8wPz des $ZG_{8/6}$)* eine Zahl mehr ist. Aber um 2 höher…

Die Frage der Interviewerin in Abschnitt 18 bezieht sich auf die Entdeckung, dass die Zielzahl in dem erhöhten Zahlengitter 2 größer ist als die in dem Ausgangszahlengitter. Vita fände es logisch, wenn die Zielzahl „um 1 höher" (18) wäre. Sie begründet diese Aussage damit, dass die erste Startzahl um 1 erhöht wurde („weil's hier *(zeigt von 7wPz des $ZG_{7/6}$ auf 8wPz des $ZG_{8/6}$)* eine Zahl mehr ist" – 18). Damit wäre für sie der direkte Zusammenhang zwischen der Voraussetzung (2) und der Erhöhung der Zielzahl um 1 „logisch". Die tatsächliche Erhöhung der Zielzahl um 2 dagegen bringt sie bezüglich ihrer Begründung zum Nachdenken („Aber um 2 höher…" – 18).
Bis zu diesem Gedankenkonflikt würde damit auch Vita einen direkten Zusammenhang zwischen der Voraussetzung (2) und der Behauptung herstellen. Auch sie erwähnt und nutzt die Voraussetzung (1) nicht.

Damit ist für alle drei Kinder (Kai, Tobias und Vita) die Behauptung direkt abhängig von der Voraussetzung (2). Die Voraussetzung (1) wird von ihnen ignoriert.

Insgesamt habe ich demnach vier verschiedene Typen hinsichtlich der Vorgehensweise der Kinder beim Begründen herausgearbeitet:

Vorg 1: „Argumentation in Teilschritten"
Es wird ein zielgerichteter Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung der Aussage hergestellt, indem die Argumentation ausgehend von den gegebenen Voraussetzungen entlang der Rechenvorschrift des jeweiligen Aufgabenformates bis hin zur Behauptung der Aussage in einzelne kleine Teilschritte zerlegt wird.

Vorg 2: „Exploration der Voraussetzungen“
Das Umfeld der gegebenen Voraussetzungen wird erkundet (exploriert). Dabei wird ein zielgerichteter Zusammenhang von den Voraussetzungen zur Behauptung angestrebt.
Vorg 3: „Exploration der Behauptung“
Das Umfeld der Behauptung wird erkundet. Dabei wird ein zielgerichteter Zusammenhang auf die Behauptung hergestellt, indem der letzte Schritt der gegebenen Rechenvorschrift unter Beachtung der abstrakt betrachteten Zahlen durchgeführt wird.
Vorg 4: „Direkte Abhängigkeit von Voraussetzung (2)“
Die Behauptung wird in direkter Abhängigkeit von Voraussetzung (2) gesehen. Die Voraussetzung (1) wird dabei nicht beachtet.

In diesem zweiten Schritt der Datenanalyse lag der Schwerpunkt auf den unterschiedlichen Vorgehensweisen der Kinder beim Begründen. Es fiel aber auf, dass die Kinder dabei verschiedenartige Argumente verwendeten. Deshalb habe ich die Daten in einem dritten Schritt hinsichtlich der Art der verwendeten Argumente beim Begründen analysiert.

5.3 Art der verwendeten Argumente beim Begründen

Grundsätzlich lassen sich zwei Situationen unterscheiden, in denen Argumentationen auftreten: Zum einen kann eine Strittigkeit aufgetreten sein, und das Ziel der Argumentation ist das einer rationalen Konsensfindung. Dieser Ansatz ist vor allem in der Linguistik (stark) verbreitet (u.a. Öhlschläger 1977, Klein 1980). Zum anderen kann eine Argumentation auf der Begründung eines unstrittigen Sachverhaltes beruhen. Dieses ist vor allem im Mathematikunterricht zu finden, wenn die Lehrperson die Schüler auffordert, eine Aussage zu begründen (vgl. Schwarzkopf 2000, S.428).

In der vorliegenden Arbeit wird wie bei Schwarzkopf (2000) in Anlehnung an Klein (1980) zwischen einer Argumentation und einem Argument wie folgt unterschieden:

> *Der im Unterricht stattfindende* soziale Prozess*, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch diesen Begründungsbedarf zu befriedigen, wird als* Argumentation *bezeichnet. Die in diesem Prozess hervorgebrachten* Begründungsangebote *werden mathematikspezifisch als* Argumente *analysiert. (Schwarzkopf 2000, S.240)*

Die Rekonstruktion von Argumenten erfolgt in dieser Untersuchung anhand des Schemas von Toulmin (1975). Dieses Schema hat sich in der mathematikdidaktischen Forschung in mehreren empirischen Untersuchungen zur Analyse von Mathematikunterricht bereits als geeignet erwiesen (u.a. Knipping 2003, Meyer 2007a und 2007b, Schwarzkopf 2000, Krummheuer 1997). Es findet Verwendung in der Analyse von Argumentationen im täglichen Leben (vgl. Toulmin 1975, S.9), ist aber schwerpunktmäßig für Argumentationen entwickelt worden, die zur Rechtfertigung von Behauptungen vorgebracht werden (vgl. ebd. S.17). Mathematische Argumente können so als Spezialfall behandelt werden.

Ein Argument wird hervorgebracht, um die Gültigkeit einer Aussage zu belegen. Nach Toulmin (vgl. 1975, S.88ff) besteht ein Argument aus mehreren Bestandteilen, die jeweils bestimmte Funktionen erfüllen. Den Ausgangspunkt eines Arguments bildet dabei das „Datum“ (D). Dieses Datum besteht aus Tatsachen, die als Begründung für die Behauptung herangezogen werden (vgl. ebd. S.89); also aus unbezweifelten Aussagen. Die zu rechtfertigende Aussage bzw. die Behauptung wird als „Konklusion“ (K) bezeichnet. Die „Regel“ (R) – eine allgemeine, hypothetische Aussage – übernimmt die Brückenfunktion von dem Datum (D) auf die Konklusion, das heißt, mit ihrer Hilfe wird versucht, die Gültigkeit des Datums auf die Gültigkeit der Konklusion zu übertragen (vgl. ebd. S.89). Im Mathematikunterricht zum Beispiel können Regeln mathematischen Gesetzen oder Definitionen entsprechen.
In Anlehnung an Meyer (2007a und 2007b) wird auch in dieser Untersuchung der Begriff „Regel“ verwendet, um Missverständnissen hinsichtlich der Unterscheidung zu einer Schlussfolgerung vorzubeugen. In der Literatur sind noch andere Bezeichnungen für die Beziehung zwischen den Bestandteilen „Datum“ und „Konklusion“ zu finden: zum Beispiel „Schlussregel“ (Toulmin 1975), „Garant“ (z.B. in Krummheuer 1997; Knipping 2003; Fetzer 2011) oder „Argumentationsregel“ (Schwarzkopf 2001).

Ein erstes Skelett für ein Schema zu Analyse von Argumenten sieht nach Toulmin (vgl. 1975, S.90) wie folgt aus:

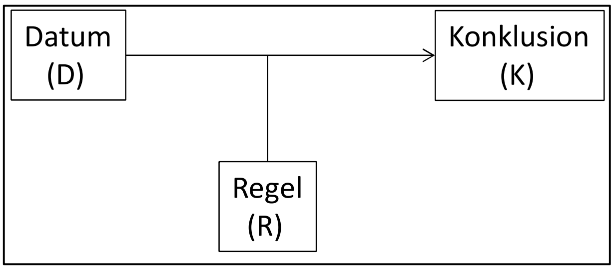


Abb. 5.16: Erstes Skelett des Toulmin-Schemas

Wenn die allgemeine Gültigkeit der verwendeten Regel hinterfragt wird, muss die Regel zusätzlich abgesichert werden. Solche Absicherungen bezeichnet Toulmin als „Stützung“ (vgl. ebd. S.94).

Insbesondere in Alltagsargumenten ist es möglich, dass die Konklusion unter Anwendung der Regel nicht notwendig, sondern nur „wahrscheinlich“ oder „vermutlich“ aus dem Datum folgt. Solche Situationen, in denen eine Regel nicht zutrifft, bezeichnet Toulmin als „Ausnahmebedingungen“ (AB) (vgl. ebd. S.92). Diese Ausnahmebedingungen konkretisieren die „modalen Operatoren“ (O), die den Grad der Sicherheit angeben, mit der die Konklusion aus dem Datum gefolgert werden kann (vgl. ebd. S.92 und 97).

Insgesamt ergibt sich damit folgendes Schema (vgl. Toulmin 1975, S.92ff):

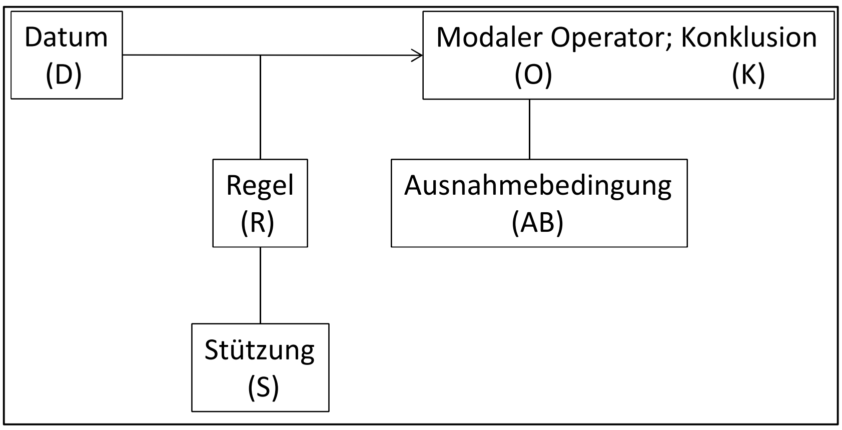


Abb. 5.17: Das vollständige Toulmin-Schema

Da der subjektive Erkenntnisweg, der ein Kind zu seiner Begründung gebracht hat, nur äußerst kompliziert und vielschichtig und damit schwierig zu interpretieren ist, werden im Weiteren lediglich die öffentlich gemachten Begründungen der Kinder betrachtet (vgl. Meyer 2007a, S.107). Diese werden – soweit möglich - mit Hilfe des oben vorgestellten Schemas von Toulmin (1975) analysiert.

In diesem dritten Schritt wurden die Transkripte nun entlang der folgenden Leitfrage interpretiert:

- Mit welcher Art von Argumenten stützen die Kinder ihre Begründung?

Christoph argumentiert bei der Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Pluszahl erhöhen', warum die Zahl oben rechts im erhöhten Zahlengitter $ZG_{8/6}$ gegenüber der Zahl oben rechts im Ausgangs-Zahlengitter $ZG_{7/6}$ um 2 erhöht ist, wie folgt:

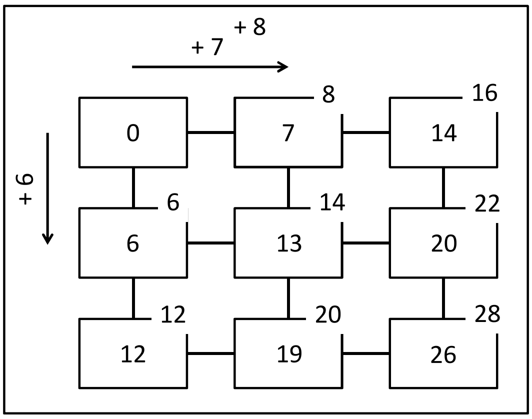


Abb. 5.18: Zahlengitter $ZG_{7/6}$ mit erhöhtem Zahlengitter $ZG_{8/6}$

86 C: Jetzt weiß ich's. Weil ehm, die Zahl *(zeigt auf 7wPz des $ZG_{7/6}$)*, zu der das zugerechnet wird, die wird ja hier lang *(zeigt von links nach rechts über die obere Zeile des $ZG_{7/6}$)* zweimal gerechnet.

87 Also muss ich auch ehm, zweimal dieses *(zeigt auf 8wPz des $ZG_{8/6}$)* ehm, zweimal ehm, das, was dann mehr ist *(zeigt auf 8wPz des $ZG_{8/6}$)*, ehm, dazu rechnen *(zeigt von links nach rechts über die obere Zeile des $ZG_{7/6}$)*.

88 Weil ich ja schon zwei Schritte *(zeigt von 7om auf 14or des $ZG_{7/6}$)* gehe. Mit der alten Zahl. Und das, was es dann mehr wird, das muss ich dann auch zweimal nehmen *(zeigt von links nach rechts über die obere Zeile des $ZG_{7/6}$)*, weil es ja zwei Schritte *(zeigt von 7om auf 14or des $ZG_{7/6}$)* sind.

89 Und dann, ja, dann sind's immer halt das Doppelte mehr, was dazu kommt.

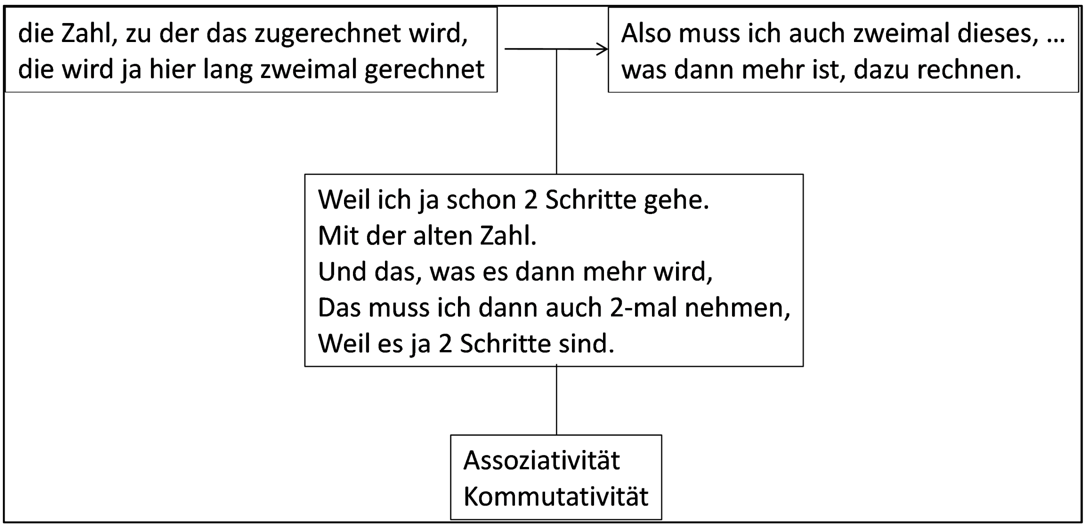


Abb. 5.19: Toulmin Schema zu Christoph: Zahlengitter $ZG_{7/8}$ – waagerechte Pluszahl erhöhen

Christoph beginnt seine Argumentation in Abschnitt 86 mit dem Datum (D) (vgl. Abb. 5.19). In diesem Datum (D) sind die Erhöhung der waagerechten Pluszahl („die Zahl *(zeigt auf 7wPz des $ZG_{7/6}$)*, zu der das zugerechnet wird“ – 86) und die Rechenvorschrift in Zahlengittern („die wird ja hier lang *(zeigt von links nach rechts über die obere Zeile des $ZG_{7/6}$)* zweimal gerechnet“ – 86), also die Voraussetzungen (2) und (1) enthalten. Von diesem Datum (D) schließt Christoph in Abschnitt 87 direkt auf die Konklusion (K), dass zu der Zahl oben rechts im Ausgangs-Zahlengitter „zweimal dieses, […] was dann mehr ist, dazu[ge]rechne[t]“ (86) werden muss. Die Begründung für diesen Schluss liefert er in Abschnitt 87. Er verbalisiert dabei die zweifache Addition der waagerechten Pluszahl als „2 Schritte“ (87) und bezeichnet die waagerechte Pluszahl des Ausgangs-Zahlengitters als „alte Zahl“ (87). Außerdem betrachtet er nur die Erhöhung der waagerechten Pluszahl („das, was es dann mehr wird“ – 87). Seine Begründung basiert auf der differenzierten Betrachtung der „alten Zahl“ und der Erhöhung der waagerechten Pluszahl. Mit jeder dieser Zahlen geht er „2 Schritte“. Für die Erhöhung der waagerechten Pluszahl bedeutet das, dass er sie für die Ergebnisbetrachtung „dann auch zweimal nehmen [muss]“ (87). Seine zweite Konklusion (K2) in Abschnitt 88 bezieht sich genau darauf. Mit seiner differenzierten Betrachtung der „alten Zahl“ und der Erhöhung der waagerechten Pluszahl zerlegt Christoph die ‚neue‘ waagerechte Pluszahl des erhöhten Zahlengitters $ZG_{8/7}$. Dass er dann auch noch zwischen der zweifachen Addition der „alten Zahl“ und der der Erhöhung der waagerechten Pluszahl unterscheidet, lässt darauf schließen, dass Christoph in seiner Begründung die Assoziativität und die Kommutativität der natürlichen Zahlen anwendet. Er bezeichnet diese Rechengesetze nicht explizit, versucht aber, sie zu beschreiben.

Auch Tobias wendet bei derselben Aufgabenstellung (‚Zahlengitter – Pluszahl erhöhen') in seiner Begründung Rechengesetze an. Er argumentiert wie folgt:

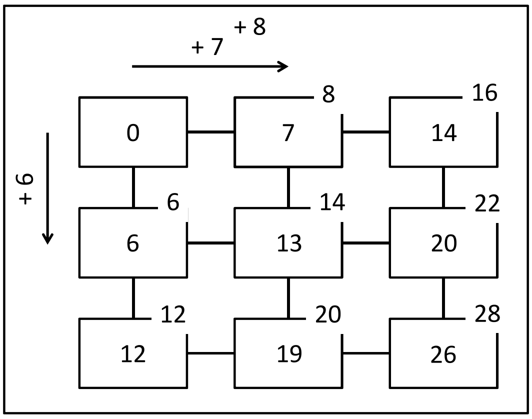


Abb. 5.20: Zahlengitter $ZG_{7/6}$ mit erhöhtem Zahlengitter $ZG_{8/6}$

25	I:	Bei dir. Kannst du \`s bei Christine auch erklären? *(Tobias nickt)* Die hat mit 7 angefangen, ne?...
26	T:	Also die 8 *(zeigt auf 6om des $ZG_{6/2}$)* ist ja einer höher als die 7. Und man nimmt ja zweimal die 8 und nicht einmal die 8. Und ehm, einmal die 8 ist me-, einer mehr als die 7.
27		Und wenn man noch einmal die 8 nimmt und hat noch einmal die 7. Das sind dann noch mal einer mehr. Also 2 mehr.

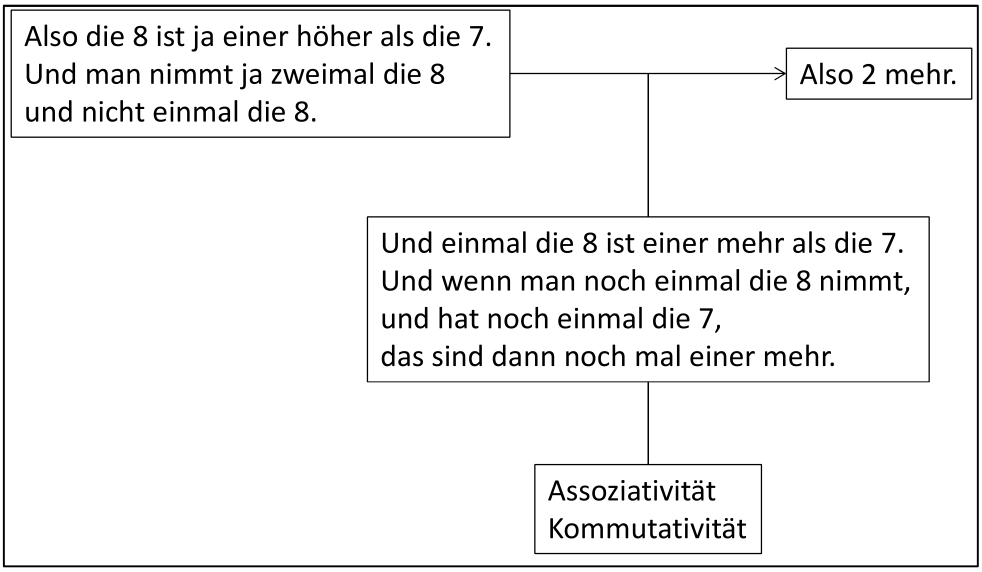


Abb. 5.21: Toulmin Schema I zu Tobias: Zahlengitter $ZG_{7/8}$ – waagerechte Pluszahl erhöhen

Zunächst stellt Tobias das Datum (D) dar („Also die 8 *(zeigt auf 6om des $ZG_{6/2}$)* ist ja einer höher als die 7. Und man nimmt ja zweimal die 8 und nicht einmal die 8." - 26, vgl. Abb. 5.21). Die waagerechte Pluszahl ist um eins erhöht und diese Pluszahl wird waagerecht zweimal addiert (Voraussetzungen (2) und (1)). Diese zweifache Addition der waagerechten Pluszahl ist ihm wichtig, da er im Weiteren noch einmal einzeln auf diese beiden Summanden eingeht. Er zerlegt den ersten Summanden - die erhöhte waagerechte Pluszahl - in die Summe aus der ‚alten' waagerechten Pluszahl und der Erhöhung der Pluszahl um 1 („Und einmal die 8 ist einer mehr als die 7" - 26) und wiederholt diesen Gedankengang ausführlich für den zweiten Summanden. Dabei betont er, dass auch der zweite Summand „einer mehr" ist als die ‚alte' Pluszahl („Und wenn man noch einmal die 8 nimmt und hat noch einmal die 7. Das sind dann noch mal einer mehr." – 27). Aufbauend auf diese Begründung der zweifachen Addition der erhöhten Pluszahl, die jeweils als ‚alte' Pluszahl plus die vorgegebene Erhöhung um 1 betrachtet wird, schließt er auf die Konklusion (K), dass es „also 2 mehr" (27) sind. In seinem Schluss auf die Konklusion (K) verwendet Tobias die Assoziativität und Kommutativität der Addition der natürlichen Zahlen an. Ebenso wie Christoph bezeichnet er diese Rechengesetze nicht explizit, versucht aber, sie in Ansätzen zu beschreiben.

Im weiteren Verlauf des Interviews (40-42) wird die Verwendung der Rechengesetze durch seine erläuternde Verschriftlichung der zweifach durchzuführenden Addition der erhöhten Pluszahl noch deutlicher:

39	I:	Vielleicht geht das ja. *(Tobias nickt)* Wir probieren 's einfach mal. Ich hab' hier noch ups, Zettel und du schreibst das auf, was du meinst. *(legt Tobias einen leeren Zettel hin)*
40		Wenn du die 7 hast von der Christine und die um einen erhöhst.
	T:	Also zweimal die 8 *(schreibt zweimal eine 8 nebeneinander)* und zweimal die 7 *(schreibt zweimal die 7 nebeneinander, jede 7 genau unter eine der vorherigen Achter)*.
41		Und hier, also hier ist es immer einer mehr *(macht einen waagerechten Strich unter eine 8 und die zugehörige 7 und schreibt eine 1 unter den Strich)* und hier ist es auch immer einer mehr *(macht einen waagerechten Strich unter die andere 8 und die zugehörige 7 und schreibt eine 1 unter den Strich)*. Und man muss ja zweimal die 8 nehmen *(zeigt von links nach rechts über die beiden Achter)* und zweimal die 7 *(zeigt von links nach rechts über die beiden Siebener)*.
42		Und zweimal die 8 sind äh, dann zweimal mehr. Zwei mehr, meine ich. Nicht zweimal.

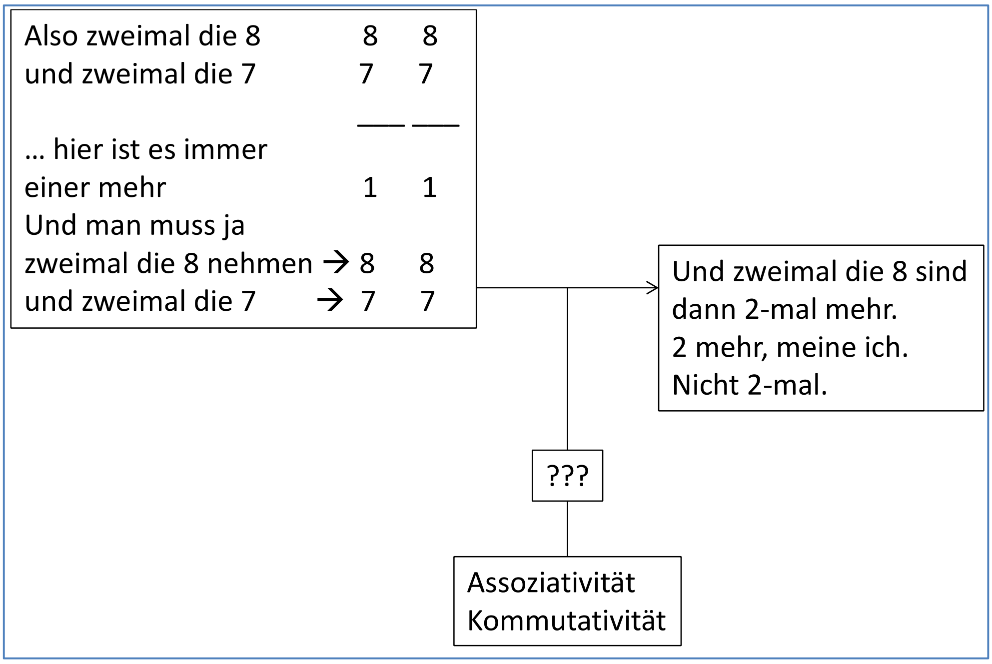


Abb. 5.22: Toulmin Schema II zu Tobias: Zahlengitter $ZG_{7/8}$ – waagerechte Pluszahl erhöhen

Tobias zerlegt die erhöhte Pluszahl in die ‚alte' Pluszahl 7 und die vorgegebene Erhöhung dieser Pluszahl um 1 (40 und 41). Daraufhin vergleicht er die zweifache Addition der erhöhten Pluszahl mit der der ‚alten' Pluszahl (41) und schließt daraus, dass die zweifache Addition der erhöhten Pluszahl „zweimal mehr" (42) – gemeint ist zweimal die Erhöhung um eins mehr – ist. Insgesamt ist das Ergebnis dieser zweifachen Addition demnach um zwei größer („Zwei mehr, meine ich." – 42) als das Ergebnis der zweifachen Addition der ‚alten' Pluszahl. Indem Tobias bei diesem Gedankengang die zweifachen Additionen der erhöhten Pluszahl, der ‚alten' Pluszahl und der Erhöhungen separat betrachtet, nutzt er die Assoziativität und Kommutativität der Addition in den natürlichen Zahlen (vgl. Abb. 5.22).

Patrick argumentiert bei der Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen' an dem vorliegenden Zahlengitter $ZG_{5/5}$ folgendermaßen:

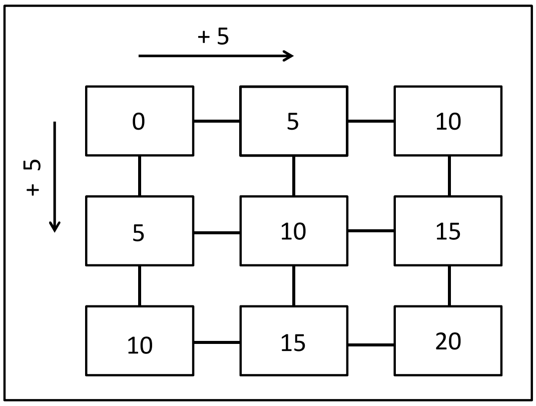


Abb. 5.23: Zahlengitter $ZG_{5/5}$

62 I: Warum ist das denn so?

P: Mh, 1 *(zeigt auf 5ml des $ZG_{5/5}$)*, 2 *(zeigt auf 10ul des $ZG_{5/5}$)*, 3 *(zeigt auf 15um des $ZG_{5/5}$)*, 4 *(zeigt auf 20ur des $ZG_{5/5}$)*.

63 Es muss viermal plus gerechnet werden *(zeigt von 5ml auf 10ul auf 15um auf 20ur des $ZG_{5/5}$)*, da, um dahin zu kommen.

I: Bisschen genauer. Viermal plus gerechnet, was denn?

P: Ja, viermal 5 *(zeigt auf 5sPz des $ZG_{5/5}$)*, plus 5 gerechnet.

64 I: Ja.

P: Und äh, viermal 5 ist ja das Gleiche wie plus 5, plus 5, plus 5, plus 5.

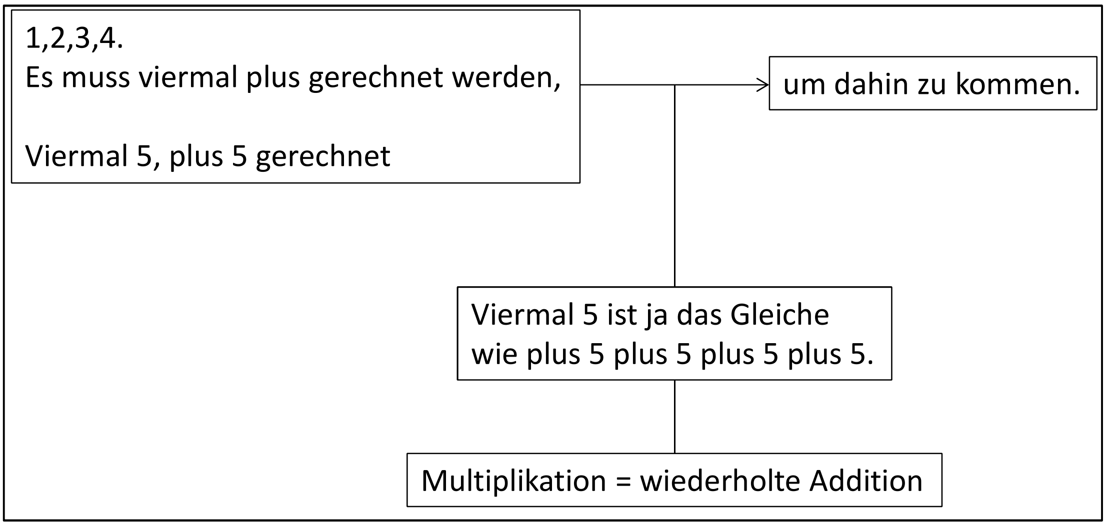


Abb. 5.24: Toulmin Schema zu Patrick: Zahlengitter $ZG_{5/5}$ – Gleiche Pluszahlen

In Abschnitt 62 zählt Patrick zunächst die Kästchen auf dem Weg 2 durch das Zahlengitter von der Start- zur Zielzahl ab. Daraufhin betont er, dass auf dem Weg 2 „viermal plus gerechnet werden [muss] *(zeigt von 5ml auf 10ul auf 15um auf 20ur des $ZG_{5/5}$)*" (63), um zur Zielzahl zu gelangen („um dahin zu kommen" – 63). Damit betrachtet er exemplarisch an dem Weg 2 durch das Zahlengitter die vier Additionen, die nach der Rechenvorschrift von Voraussetzung (1) von der Start- zur Zielzahl durchgeführt werden. Durch das Abzählen aller Kästchen auf dem Weg zur Zielzahl und seiner Formulierung „viermal plus gerechnet“ (63) unterscheidet er nicht zwischen den zwei Additionen mit der senkrechten und der waagerechten Pluszahl. Das könnte ein Indiz dafür sein, dass ihm die Voraussetzung (2) – die gleichen Pluszahlen - klar ist. Damit hat Patrick das Datum (D) aufgestellt. Nach der Aufforderung zu einer genaueren Erläuterung der vierfachen Addition konkretisiert Patrick diese an seinem vorliegenden Zahlengitter $ZG_{5/5}$ so: „viermal 5 *(zeigt auf 5sPz des $ZG_{5/5}$)*, plus 5 gerechnet“ (63). Mit dieser Äußerung wird deutlich, dass ihm klar ist, dass viermal dieselbe Pluszahl addiert wird. Die Voraussetzung (2) komplettiert also sein Datum (D). Patrick formuliert keine explizite Konklusion (K). Die Äußerung in Abschnitt 64 („Und äh, viermal 5 ist ja das Gleiche wie plus 5, plus 5, plus 5, plus 5.“) wird aber als Begründung für den Schluss auf die Konklusion angesehen, da Patrick die zugrunde liegende Definition der Multiplikation als wiederholte Addition verbalisiert. Er benennt sie allerdings nicht explizit (vgl. Abb. 5.24).

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Christoph, Tobias und Patrick in ihren Begründungen Rechengesetze oder Definitionen anwenden. Diese bezeichnen sie allerdings nicht explizit, beschreiben sie aber mehr oder weniger ausführlich.

Der Grund dafür, dass die angewendeten Rechengesetze und Definitionen nicht explizit benannt werden, liegt möglicherweise in ihrer Behandlung im Unterricht. Während ihrer Thematisierung werden die Rechengesetze der natürlichen Zahlen in den meisten Fällen nicht bezeichnet. Sie werden beschrieben, erläutert und veranschaulicht, um ihre Gültigkeit einsichtig zu machen, bezeichnet werden sie jedoch häufig nicht. Bei der Behandlung von Definitionen verhält es sich ähnlich. Diese Festlegungen werden im Unterricht besprochen und angewendet. Sie erhalten aber häufig keine explizite Bezeichnung.

Christine bearbeitet zusammen mit Tobias die Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Startzahlen‘. Im bisherigen Interviewverlauf hat Tobias am Beispiel des Zahlengitters $ZG_{20/20}$ bereits erklärt, warum die Zielzahl das Vierfache einer Startzahl ist. Christine antwortet auf die Aufforderung, den Sachverhalt noch einmal an einem anderen Beispiel zu erklären, am Beispiel des Zahlengitters $ZG_{120/120}$ folgendermaßen:

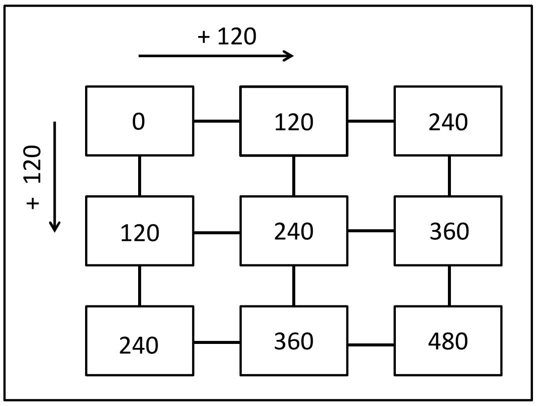


Abb. 5.25: Zahlengitter $ZG_{120/120}$

65 C: Ja, 120 plus 120 *(zeigt auf 240ul des $ZG_{120/120}$)* sind zwei-
T: -oder zwei[…?]. Oder zweimal 120.
C: Das sind 240. Und dann 240 plus 120 sind 360.
66 Und dann 360 plus 120 sind 480. Und dann sind das wieder vier.

Christines Erklärung besteht darin, die Entstehung der Zielzahl entlang des Weges 2 durch das Zahlengitter („*(zeigt auf 240ul des $ZG_{120/120}$)*“ – 65) anhand der konkret vorgegebenen Zahlen ihres Beispiel-Zahlengitters $ZG_{120/120}$ vorzurechnen (65 und 66). Dabei lässt sie den ersten Schritt auf diesem Weg, die Addition „0 +120 = 120“, vermutlich deshalb weg, weil er ihr zu trivial erscheint. Nachdem sie das Ergebnis ihres Vorrechnens erhalten hat, stellt sie fest: „Und dann sind das wieder vier.“ (66). Diese Feststellung ist wahrscheinlich ein Versuch, die konkret errechnete Zielzahl mit der Behauptung der Aussage in Verbindung zu bringen. Damit rechnet Christine den Entstehungsprozess der Zielzahl mit den konkret gegebenen Zahlen vor.

Bei der Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen‘ verfährt Christine in ihrer Erklärung am Beispiel der Zahlenkette $ZK_{8/8}$ genauso:

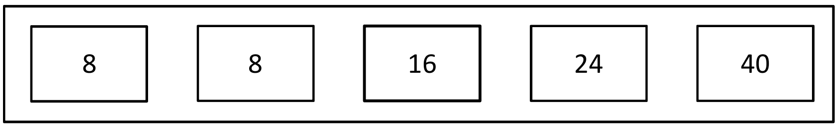


Abb. 5.26: Zahlenkette $ZK_{8/8}$

48 C: Also, äh, kann ich 8 plus 8, das sind 16. Und dann ehm, kann ich das ja immer so weiter.
49 Also dann muss ich das einfach, also muss ich noch mal 16 plus 8 *(zeigt dabei auf 16 und 24 der $ZK_{8/8}$)* sind 24. Und dann 24 plus 16 sind 40.
50 Und dann ehm, sind da ja also 5 mal *(zeigt von links nach rechts auf die $ZK_{8/8}$ und tippt dabei dreimal auf die ZK)* und dann kann man das einfach mal 5.

Christine rechnet wieder die Entstehung der Zielzahl mit den konkreten Zahlen der Zahlenkette $ZK_{8/8}$ vor und stellt am Ende fest, dass das Ergebnis ihrer Rechnungen mit der Behauptung der gemachten Entdeckung in Zusammenhang steht.

Eine solche Art der Begründung – das Vorrechnen des Ergebnisses mit konkreten Zahlen – kommt im Unterricht immer wieder vor. Gerade, wenn Kinder bei einer Aufgabe zu unterschiedlichen Ergebnissen gekommen sind, wird die Richtigkeit eines Ergebnisses über das ggf. erläuternde Vorrechnen begründet. So überrascht es nicht, dass auch an dieser Stelle die Begründung mit dem Vorrechnen gleichgesetzt wird.

Es ist zum Teil sehr schwierig, eine Grenze zwischen der Anwendung von Rechengesetzen und dem Vorrechnen der Entstehung einer Zielzahl zu ziehen; z.B. wenn die verwendeten Rechengesetze nicht beschrieben werden oder die Entstehung der Zielzahl nicht mit den konkret vorgegebenen Zahlen, sondern ihre Veränderung mit Hilfe einer abstrakten Sichtweise auf die Zahlen vorgerechnet wird.

Vita ist beispielsweise bei der Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen' klar, dass die Startzahl in der ersten und zweiten Startzahl jeweils einmal, im mittleren Kästchen zweimal, im vierten Kästchen dreimal und im fünften Kästchen fünfmal enthalten ist. Sie argumentiert anhand der vorliegenden Zahlenkette $ZK_{8/8}$ folgendermaßen:

8	8	16	24	40

Abb. 5.27: Zahlenkette $ZK_{8/8}$

74 V: Ich hab' was anderes.

I: Vita, dann sag du mal.

V: Hier *(zeigt auf 8 (b) der $ZK_{8/8}$)* ist ja einmal die 8.

75 Plu- und eh, und zweimal einmal die 8 *(zeigt von 8 (a) zu 8 (b) der $ZK_{8/8}$ hin und her)* ist zweimal die 8 *(zeigt auf 16 der $ZK_{8/8}$)*. Und dann einmal *(zeigt auf 8 (b) der $ZK_{8/8}$)* plus zweimal *(zeigt auf 16 der $ZK_{8/8}$)* die 8 ist ja dreimal die 8 *(zeigt auf 24 der $ZK_{8/8}$)*. Und dann 2-mal *(zeigt auf 16 der $ZK_{8/8}$)* plus 3-mal die 8 *(zeigt auf 24 der $ZK_{8/8}$)* ist schon 5-mal die 8 *(zeigt auf 40 der $ZK_{8/8}$)*.

Vita zeigt zu Beginn auf die 2. Startzahl und sagt, dass „hier […] ja einmal die 8 [ist]“ (74). Der Wortbaustein „Plu-„ (75) im darauffolgenden Satz deutet darauf hin, dass sie zu der benannten und gezeigten Zahl 8 etwas hinzuaddieren möchte. Dann unterbricht sie sich allerdings und stellt fest, dass „zweimal einmal die 8 *(zeigt von 8 (a) zu 8 (b) der ZK$_{8/8}$ hin und her)* […] zweimal die 8 *(zeigt auf 16 der ZK$_{8/8}$)* [ist]“ (75). Damit ersetzt sie vermutlich die vorab angedachte Addition der beiden gleichen Startzahlen, die der Nutzung der Voraussetzungen (1) und (2) entspricht, durch eine Verzweifachung/-dopplung der jeweils vorzufindenden „einmal die 8“ (75). Ihre Aussage gleicht dadurch einer Feststellung, dass das Ergebnis ihrer Verzweifachung in ihrer gewählten Formulierung einfach so „ist“ (75). Für Vita scheint an dieser Stelle der Argumentation die Distributivität der Multiplikation und Addition in den natürlichen Zahlen eine Selbstverständlichkeit zu sein. Dieser Anschein wird in den folgenden Aussagen bestätigt: Vita vollzieht auch die nächsten beiden Schritte der Rechenvorschrift („Und dann […] plus […]“ – 75) mit ihrer abstrakten Sichtweise des Enthaltenseins der Startzahlen („einmal […], zweimal […] die 8 […] dreimal die 8“ und „2 mal […] 3 mal […] 5 mal die 8“ – 75) nach. Dabei nutzt sie die Distributivität der Multiplikation und Addition der natürlichen Zahlen weiterhin wie eine Selbstverständlichkeit („ist ja“, „ist schon“ – 75). Das bedeutet, dass Vita in ihrer Argumentation sowohl die Voraussetzungen (1) und (2), als auch die notwendige Distributivität der Multiplikation und Addition der natürlichen Zahlen verwendet. Allerdings bezeichnet sie dieses Rechengesetz nicht, und versucht auch nicht, es zu beschreiben.

Michelle argumentiert bei der Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Startzahl erhöhen‘ am Beispiel der Zahlenkette ZK$_{4/6}$ und der erhöhten Zahlenkette ZK$_{5/6}$ wie folgt:

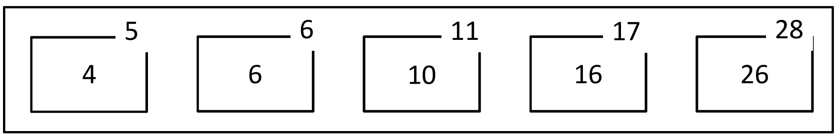


Abb. 5.28: Zahlenkette ZK$_{4/6}$ mit erhöhter Zahlenkette ZK$_{5/6}$

33 M: Vielleicht ist ja so, wie ehm, ich weiß nicht, wer das gesagt hat, aber wo wir uns das letzte Mal ehm,

34 hier so in der Klasse gesessen haben, hat doch irgendjemand gesagt, dass ehm, ehm, ich weiß jetzt nicht mehr genau was.

35 Hier *(zeigt auf 4 der ZK$_{4/6}$)* wird das um 1 erhöht. Hier *(zeigt auf 6 der ZK$_{4/6}$)* ist dann, dann steht da *(deutet mit dem Stift rund um das 1. Kästchen der ZK$_{4/6}$)*

sozusagen `ne 1 und hier *(zeigt auf 6 der $ZK_{5/6}$)* das bleibt `ne 0. Weil da wird's ja nicht erhöht.

36 Und dann: 1 *(zeigt auf 4 der $ZK_{4/6}$)* plus 0 *(zeigt auf 6 der $ZK_{4/6}$)* sind wieder 1 *(zeigt auf 10 der $ZK_{4/6}$)*, weil hier *(zeigt rund um das 3. Kästchen der $ZK_{4/6}$)* ist das auch um 1 erhöht. Ich weiß aber nicht, warum.

37 Und dann, weil hier *(zeigt auf 6 der $ZK_{4/6}$)* ja `ne 0 steht, muss man hier *(zeigt auf 6 der $ZK_{4/6}$)* 0 plus 1 *(zeigt auf 10 der $ZK_{4/6}$)* sind wieder 1 *(zeigt auf 16 der $ZK_{4/6}$)*. Hier *(zeigt auf 10 der $ZK_{4/6}$)* steht ja jetzt keine 0, und 1 *(zeigt auf 10 der $ZK_{4/6}$)* plus 1 *(zeigt auf 16 der $ZK_{4/6}$)* ergibt dann 2 *(zeigt auf 26 der $ZK_{4/6}$)*. Und das ist dann um 2 erhöht.

Michelle stellt bereits zu Beginn ihrer Erklärung klar heraus, dass die Idee ihrer Erklärung von einem Mitschüler bzw. einer Mitschülerin aus dem letzten gemeinsamen Klassengespräch stammt (33 und 34). Bereits in Abschnitt 35 wird ersichtlich, dass sie ihre Erklärung auf die additive Sichtweise der einzelnen Zahlen der Zahlenkette aufbaut (z.B. „dann steht da […] sozusagen ´ne 1" oder „hier […] das bleibt `ne 0"). Sie betrachtet die erste und zweite Startzahl der Zahlenkette nicht nur additiv als ‚erste Startzahl plus 1' bzw. ‚zweite Startzahl plus 0', sondern ordnet den beiden Startzahlen den Wert ihrer additiven Erhöhungen zu. Mit dieser abstrakten Betrachtungsweise der konkreten Zahlen rechnet sie in Abschnitt 36 und 37 mit Hilfe der Rechenvorschrift die Erhöhung der entstehenden Zielzahl um 2 vor: „1 […] plus 0 […] sind wieder 1" (36), „0 plus 1 […] sind wieder 1" und „1 […] plus 1 […] ergibt dann 2" (37). Sie stellt jedoch explizit fest, dass sie den tatsächlichen (mathematischen) Grund für die Übereinstimmungen der Additionen der Erhöhungen der Zahlen mit den beobachteten Erhöhungen nicht kennt („Ich weiß aber nicht, warum." – 36). Somit reduziert sich Michelles Begründung - trotz ihrer abstrakten Sichtweise auf die konkreten Zahlen - auf das Vorrechnen des Entstehungsprozesses der veränderten Zielzahl.

Der Grund für solche Beschreibungen anstelle von Argumenten liegt vermutlich darin, dass die Unterrichtskultur in der Grundschule narrativ geprägt ist.

> *„Inhalte werden häufig in einem erzählenden Stil präsentiert, und die soziale Konstitution unterrichtlichen Lernens äußert sich entsprechend in Modellen der Partizipation an Erzählsituationen. Dies trifft auch auf den Mathematikunterricht zu." (Krummheuer 1997, S.11)*

Die Funktion einer solchen narrativen Unterrichtskultur ist die der Argumentation:

> *„In den narrativ gearteten Lösungsprozessen zu vorgegebenen mathematischen Problemaufgaben […] und in den gleichermaßen strukturierten Vorstellungen von Bearbeitungsprozessen […] spiegelt sich der Anspruch und das Bemühen der Beteiligten wider, die Rationalität der eigenen Lösungsbemühungen zu demonstrieren.*
> *Die Argumentation löst sich in den narrativen Darstellungen auf und wird als* ***reflexive Argumentation*** *bezeichnet.“ (ebd. S.11)*

Die Narrativität im Unterricht deckt damit die Funktion des Erklärens, Begründens und Argumentierens mit ab. Während aus erzähltheoretischer Sicht zwischen einer ‚Explikation‘ und einer ‚Argumentation‘ unterschieden wird, scheint es im Unterricht häufig so zu sein, dass in jedem Fall eine Geschichte erzählt wird. Diese scheint eine argumentative Funktion auszuüben. Der so beschriebene argumentative Aspekt der unterrichtlichen Narrativität wird von Krummheuer als wesentlich für das Lernen in der Grundschule angesehen (vgl. ebd. S.13).
Meyer fordert demgegenüber, dass der Argumentationsbegriff von anderen Kommunikationsformen, wie zum Beispiel dem Erzählen unterschieden werden soll, um den Besonderheiten des mathematischen Argumentierens gerecht zu werden. So soll beispielsweise das Vorrechnen einer Aufgabe mit Hilfe eines Rechenverfahrens nicht als Argumentation angesehen werden (vgl. Meyer 2007a, S.82). Diese Forderung Meyers soll auch für die hier dargestellte Untersuchung gelten.

Leo und Vita bearbeiten gemeinsam die Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen‘. Sie haben entdeckt, dass die Zielzahlen das Fünffache einer Startzahl sind. Nun diskutieren sie die Begründung dieser Entdeckung an der vorliegenden Zahlenkette $ZK_{5/5}$ wie folgt:

5	5	10	15	25

Abb. 5.29: Zahlenkette $ZK_{5/5}$

46	I:	Das heißt, wenn ich die Startzahlen. Wenn ich die so wähle, dass sie dieselben sind, ich nehm sie fünfmal, krieg ich meine Zielzahl raus. Könnte stimmen. Leo sagt ja, das sieht hier so aus.
47		Wir wissen aber noch nicht, warum. Jetzt müssen wir uns mal angucken, wieso die Startzahlen, die da gleich sind, fünfmal in der Zielzahl stecken.
48	L:	1, 2, 3, 4, 5. 5 Kästchen *(tippt nacheinander von links nach rechts auf alle Kästchen der $ZK_{50/50}$)*.

	I:	Na, das hätt' ich gern genauer erklärt.
49	V:	Mh, hier *(zeigt auf 5 (b) der $ZK_{5/5}$)* ist einmal. Da *(zeigt auf 10 der $ZK_{5/5}$)* ist zweimal, hier *(zeigt auf 15 der $ZK_{5/5}$)* dreimal und hier *(zeigt auf 25 der $ZK_{5/5}$)* fünfmal.
	I:	Wie kommt das denn?
	V:	Warum die 4 ausgelassen wird, weiß ich auch nicht.
	L:	Ja, weil die beiden Startzahlen *(legt seinen Stift über 5(a) und 5 (b) der $ZK_{5/5}$)* doch gleich sind.
50	V:	Ja und? Da könnte hier *(zeigt auf 25 der $ZK_{5/5}$)* doch viermal am Ende sein und nicht [unbedingt] fünf.
	L:	\`Türlich fünfmal. 5 Kästchen. Die beiden *(zeigt auf 5(a) und 5 (b) der $ZK_{5/5}$)* zählen doch mit.
51	V:	Da kann doch genauso gut die, die, die Zweierreihe oder da-, oder das Dritte fehlen.
	L:	Ja, aber die beiden *(zeigt auf 5(a) und 5 (b) der $ZK_{5/5}$)* sind doch mitgezählt. Die addieren sich doch auch.
52	V:	Ja, ich weiß.
	L:	Ja, sag ich doch. Also.

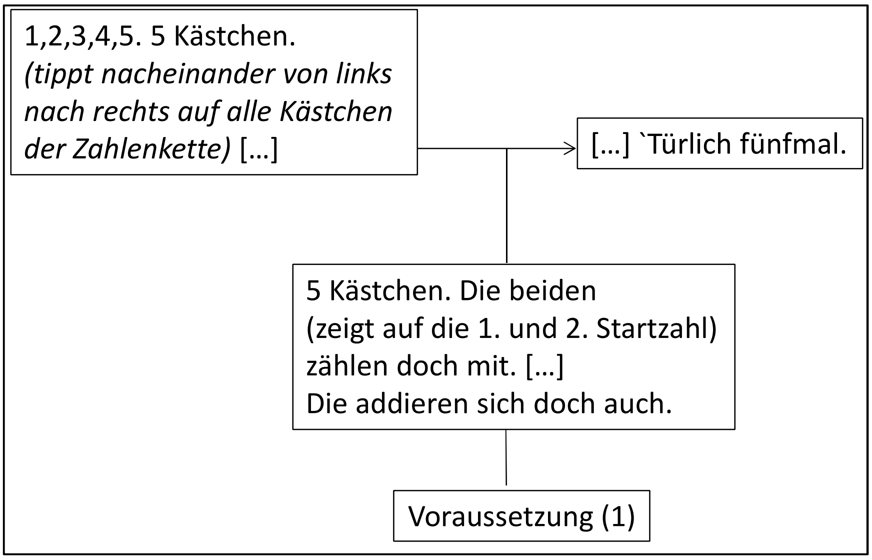


Abb. 5.30: Toulmin Schema zu Leo: Zahlenkette $ZK_{5/5}$ – Gleiche Startzahlen

Leo zählt zu Beginn seiner Argumentation die fünf Kästchen der vorliegenden Zahlenkette von links nach rechts ab (48). Auf die Forderung nach einer genaueren Erklärung zeigt Vita noch einmal in Abschnitt 49 das jeweils mehrfache Enthaltensein der Startzahl in den einzelnen Kästchen der Zahlenkette. Als die Interviewerin die Kinder auffordert, diese Entdeckung zu begründen, antwortet Vita, dass sie nicht wisse, warum die 4 ausgelassen wird (49). Leo sieht die Begründung in der Gleichheit der beiden Startzahlen („Ja, weil die beiden Startzahlen […] doch gleich sind." – 49). Es ist denkbar, dass Leo das vierfache Vorhandensein der Startzahl deshalb ausschließt, da das einfache Vorhandensein der Startzahl durch die gegebenen

gleichen Startzahlen bereits zweimal vorkommt und es somit eine Vervielfachung – in diesem Fall die mit der Zahl 4 – in den 5 Kästchen nicht gibt. Doch Vita ist gedanklich weiterhin damit beschäftigt herauszufinden, warum das vierfache Enthaltensein der Startzahl in den Kästchen der Zahlenkette nicht vorkommt. Sie merkt an, dass im letzten Kästchen „doch viermal [...] und nicht [unbedingt] fünf"mal die Startzahl stehen könne (50). Doch Leo ist sich sicher, dass die Zielzahl das Fünffache der Startzahl ist („`Türlich fünfmal." – 50). Sein wiederholtes Argument sind die 5 Kästchen der Zahlenkette („5 Kästchen" – 50), zu denen auch die ersten beiden Kästchen mit den Startzahlen gehören („Die beiden *(zeigt auf 5(a) und 5 (b) der $ZK_{5/5}$)* zählen doch mit." – Abschnitt 50). Inwieweit Leo an dieser Stelle die Andeutung auf die Startzahlen mit ihrer Gleichheit in Verbindung setzt, ist nicht genau ersichtlich. Nach Vitas erneutem kritischen Einwand konkretisiert er das ‚Mitzählen' dieser beiden ersten Kästchen noch, indem er die Rechenvorschrift für Zahlenketten andeutet („Die addieren sich doch auch" – 51). Auch hier ist nicht ersichtlich, in wieweit ihm die exakte Rechenvorschrift für Zahlenketten bewusst ist. Somit ist es möglich – aber nicht belegbar -, dass Leo gedanklich mit einer fünffachen (5 Kästchen) Addition (Rechenvorschrift) gleicher Zahlen (gleiche Startzahlen) argumentiert, um einen Zusammenhang zur Entdeckung herzustellen.
Leo beginnt seine Argumentation mit dem Datum (D), dass die Zahlenkette aus 5 Kästchen besteht (48). Die Konklusion (K) seiner Begründung ist das fünfmalige Enthaltensein der Startzahl in der Zielzahl (50). Den Schluss von dem Datum (D) auf die Konklusion (K) begründet mit der Voraussetzung (1) und ggf. der Voraussetzung (2); der Fünfgliedrigkeit der Zahlenketten, den beiden (ggf. gleichen?) Startzahlen und zumindest einer Andeutung auf die geltende Rechenvorschrift. Dabei ist allerdings durch seine Äußerungen und Handlungen nicht eindeutig belegbar, welche Teile der Voraussetzung (1) und ggf. der Voraussetzung (2) er miteinander kombiniert (vgl. Abb. 5.30).

Michelle und Kai finden bei ihrer Bearbeitung der Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen' heraus, wie die Zielzahlen mit den (gleichen) Startzahlen zusammenhängen. Michelle begründet diesen Zusammenhang direkt am Beispiel der Zahlenkette $ZK_{5/5}$:

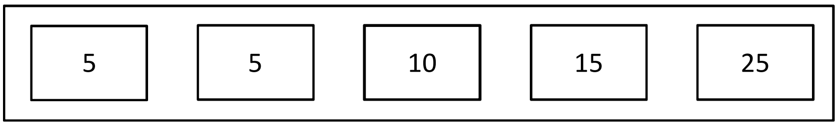


Abb. 5.31: Zahlenkette $ZK_{5/5}$

	M:	Man rechnet immer mal 5.
	I:	Was rechnet man mal 5?
28	M:	*(hustet)* Also hier ist ja die 5 *(zeigt auf 5a der $ZK_{5/5}$)*. Und hier sind dann 1 *(zeigt auf 5b der $ZK_{5/5}$)*, 2 *(zeigt auf 10 der $ZK_{5/5}$)*, 3 *(zeigt auf 15 der $ZK_{5/5}$)*, 4 *(zeigt auf 25 der $ZK_{5/5}$)*… äh, ja 5. 1 *(zeigt auf 5a der $ZK_{5/5}$)*, 2 *(zeigt auf 5b der $ZK_{5/5}$)*, 3 *(zeigt auf 10 der $ZK_{5/5}$)*, 4 *(zeigt auf 15 der $ZK_{5/5}$)*, 5 *(zeigt auf 25 der $ZK_{5/5}$)*. In dem ersten *(zeigt auf 5a der $ZK_{5/5}$)* steht die 5.
29		Und dann rechnet man, äh, die 1. Startzahl mal diese 5 Kästchen oder Ketten.
	K:	Vier. Mal 4.
30	M:	Dann kommt man aber nicht auf die 25 (zeigt auf 25 *der $ZK_{5/5}$*).
	K:	Ach so.
31	M:	Na, das nimmt man mal die 5 Ketten, dann kommt man auf die ehm, Zielzahl.
[…]		
	I:	Warum ist das denn so bei all diesen Zahlen?
39	M:	Vielleicht, weil hier immer ehm, 5 Kästchen sind *(zeigt nacheinander auf das 1. bis 5. Kästchen der $ZK_{7/7}$)*.
	I:	Wär ja `ne Idee.
	M:	Also weil, ehm wir machen ja nur mit 5 Ketten oder wie diese Kästchen heißen. *(hustet)*

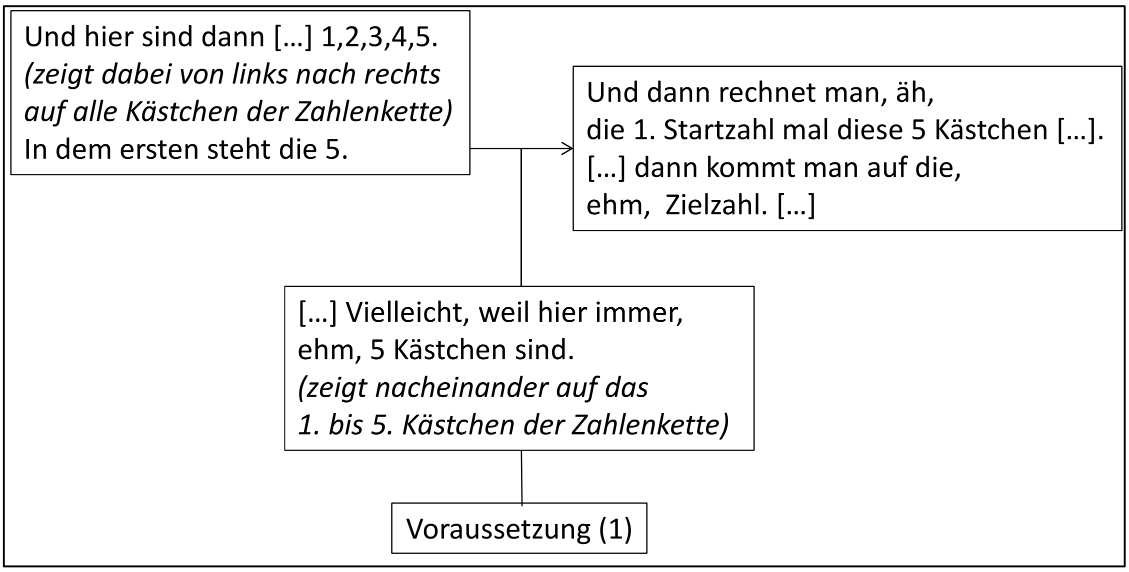


Abb. 5.32: Toulmin Schema zu Michelle: Zahlenkette $ZK_{5/5}$ – Gleiche Startzahlen

Michelle beginnt ihre Argumentation mit dem Datum (D) (vgl. Abb. 5.32). Sie zählt zunächst die 5 Kästchen der Zahlenkette von links nach rechts ab und stellt fest, dass in dem ersten (Kästchen) ihrer Zahlenkette die Zahl 5 steht (28). Die Abschnitte 29 und 31 enthalten die Konklusion (K), dass die erste Startzahl mit den 5 abgezählten Kästchen multipliziert werden muss, um die Zielzahl zu erhalten. Michelle formuliert den Schluss vom Datum (D) auf die Konklusion (K) wie eine Rechenregel („Und dann rechnet man“ – 29). Eine Begründung für ihren Schluss liefert sie auf ein erneutes Nachfragen der Interviewerin hin in Abschnitt 39: „Vielleicht, weil hier immer ehm, 5 Kästchen sind *(zeigt nacheinander auf das 1. bis 5. Kästchen der* $ZK_{7/7}$*)*“. Die Formulierung „vielleicht“ weist darauf hin, dass Michelle sich in ihrer Begründung nicht ganz sicher ist. Den Grund selbst sieht sie in der Anzahl der gegebenen Kästchen. Diese veranschaulichen die in Voraussetzung (1) gegebene fünfgliedrige Zahlenkette. Die Anzahl der dargestellten Kästchen entspricht dem entdeckten Multiplikator der ersten Startzahl in der Zielzahl. Dieser Zusammenhang ist die von Michelle verwendete Regel (R) für den Schluss vom Datum (D) auf die Konklusion (K). Ihre Regel entspricht damit einem Teil der Voraussetzung (1).

Tobias und Christine bearbeiten die Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen‘. Sie haben als Zusammenhang zwischen den Pluszahlen und der Zielzahl entdeckt, dass die Division der Zielzahl durch eine Pluszahl immer das Ergebnis 4 ergibt. Diese Entdeckung versuchen sie wie folgt zu erklären:

I: Woher kommt das denn?
C: Vielleicht an den Pluszahlen *(zeigt auf 20wPz des* $ZG_{20/20}$*)*. Weil 20 *(zeigt auf 20om des* $ZG_{20/20}$*)*, 120 *(deutet auf 120wPz des* $ZG_{120/120}$*)* oder 1200 *(deutet auf das* $ZG_{1200/1200}$*)*…
58 T: Nein! Weil die Pluszahl *(zeigt von 20wPz auf 20sPz des* $ZG_{20/20}$*)* immer gleich ist.
I: Deshalb kommt da immer 4 raus?
59 T: Weiß nicht. Ja! Ja…

Christine vermutet, dass die Erklärung für diesen Zusammenhang in den Pluszahlen liegt. Dabei benennt sie die Pluszahlen 20, 120 und 1200, die die beiden Kinder für die eigenen Zahlengitter-Beispiele gewählt hatten. Tobias bestreitet Christines Antwort vehement. Vermutlich interpretiert er Christines Äußerung so, dass sie die Ähnlichkeit der gewählten Pluszahlen als Besonderheit ansieht. Für ihn liegt die Begründung für ihre Entdeckung in der Gleichheit der Pluszahlen (58), also in der Voraussetzung (2) selbst. Die Voraussetzung (1) verwendet er nicht.

Bei der gleichen Aufgabenstellung antwortet Kai auf die Frage nach einer Begründung für die Entdeckung wie folgt:

48	I:	Das kann man also doch sehen, ne? Wenn man ein bisschen genauer hinguckt. Jetzt wär' natürlich noch meine Frage: Habt ihr `ne Idee, warum das so ist, dass man die mal 4 nehmen muss, diese Pluszahl?
49	K:	Weil das immer die gleichen Zahlen sind.

Obwohl Kai nicht explizit verbalisiert, dass er mit den „gleichen Zahlen" die gleichen ‚Plus'zahlen meint, und diese auch nicht wie Tobias zeigt, so liegt es doch äußerst nahe, dass auch er die Begründung für die Entdeckung in der Voraussetzung (2) selbst sieht. Ebenso wie Tobias verwendet auch er die Voraussetzung (1) nicht.

Somit verwenden Leo, Michelle, Tobias und Kai Teile der gegebenen Voraussetzungen als Argumente für ihre Begründungen. Leo argumentiert zumindest mit Teilen der Voraussetzung (1) und ggf. auch mit der Voraussetzung (2). Michelle gibt als Argument einen Teil der Voraussetzung (1) an und sieht in diesem einen Zusammenhang zu der Behauptung der Aussage. Die Voraussetzung (2) nutzt sie nicht. Für Tobias und Kai dagegen ist die Voraussetzung (2) das alleinige Argument. Die Behauptung der Aussage ist für sie direkt abhängig von dieser Voraussetzung (2). Die Voraussetzung (1) verwenden sie nicht.

Es ist durchaus nachvollziehbar, dass die Kinder (Teile der) Voraussetzungen als Begründung für ihre Entdeckung angeben. Während in den Einstiegsstunden zu dieser Unterrichtsreihe beliebige Zahlengitter und Zahlenketten berechnet wurden, gibt es in den Unterrichtseinheiten zum Begründen jeweils besondere Bedingungen, die bei der Berechnung der Zahlengitter bzw. Zahlenketten zu beachten sind. Diese besonderen Bedingungen sind die jeweiligen Voraussetzungen (2). Wenn die Kinder nun bei ‚besonderen' Zahlengittern bzw. Zahlenketten ‚besondere' Entdeckungen machen, so liegt es nahe, den Grund für diese Entdeckungen in den gegebenen Bedingungen zu sehen. Dabei unterscheiden sie nicht unbedingt, ob es sich um ‚allgemeine' Bedingungen (Voraussetzung (1)) oder ‚besondere' Bedingungen (Voraussetzung (2)) handelt.

Insgesamt lassen sich bezüglich der bei den Begründungen verwendeten Argumente folgende drei Typen unterscheiden:

Arg 1: „Rechengesetze oder Definitionen“

In den Begründungen werden Rechengesetze oder Definitionen angewendet. Diese werden nicht explizit bezeichnet, sondern mehr oder weniger ausführlich beschrieben.

Arg 2: „Vorrechnen“

Der Entstehungsprozess der Zielzahl wird entlang der vorgegebenen Rechenvorschrift vorgerechnet. Dabei werden in der Regel die konkret vorgegebenen Zahlen der jeweiligen Aufgabenstellung verwendet.

Arg 3: „Teile der Voraussetzung(en)“

In den Begründungen werden Teile der gegebenen Voraussetzungen als Argumente verwendet.

(1) Teile der Voraussetzung (1) werden mit der Behauptung der Aussage in Beziehung gesetzt.

(2) Die Voraussetzung (2) wird als alleiniges Argument angewendet.

5.4 Umgang mit Allgemeingültigkeit

Da die zu beweisenden Wenn-dann-Aussagen Allgemeingültigkeit besitzen, wurde in einem vierten Schritt auch der Aspekt des Umgangs der Kinder mit der Allgemeingültigkeit in ausgewählten Transkripten analysiert.

In diesem vierten Schritt wurden die Transkripte nun entlang der folgenden Leitfrage interpretiert:

- Wie gehen die Kinder mit der Allgemeingültigkeit der zu beweisenden Aussage um?

An dieser Stelle ist anzumerken, dass die Allgemeingültigkeit bis zu diesem Zeitpunkt im Unterricht noch nicht thematisiert wurde. Zudem standen für diese Analyse auch nicht mehr alle Transkripte zur Verfügung, denn im Interviewleitfaden (vgl. Kapitel 4.4) wurde festgelegt, dass der Interviewer nur dann eine Verallgemeinerung der Begründung einfordern sollte, wenn er der Auffassung war, dass die Kinder eine Begründung für die Aussage gegeben hatten. Eine genaue Fragestellung als Impuls für das Gespräch über die Verallgemeinerung wurde nicht festgelegt. Sie ergab sich für den Interviewer aus dem Gesprächsverlauf heraus. Im Nachhinein lassen sich grob folgende Fragevarianten unterscheiden:

- Gilt das / Geht das / Stimmt das / Ist das… immer (so)? / für jede/s Zahlenkette/Zahlengitter (so)? / bei allen (diesen) Zahlengittern/Zahlenketten (so)?
- Gilt das auch an irgendeinem anderen Beispiel? Oder: Geht das mit jeder Zahl? O.ä.

Des Weiteren gab es aber auch Transkripte, in denen Kinder direkt im Anschluss an ihre Entdeckung oder auf die Frage hin „Warum ist das so?" Begründungen gaben, die den Aspekt der Allgemeingültigkeit beinhalteten. Diesen Kindern wurde also keine konkrete Frage hinsichtlich der Allgemeingültigkeit gestellt.

Bei der Analyse der Transkripte hinsichtlich des Umgangs der Kinder mit der Allgemeingültigkeit wurde keinerlei Abhängigkeit der Antworten auf eine der oben differenzierten Fragestellungen festgestellt. Vor diesem Hintergrund werden nun einige Transkriptausschnitte diskutiert:
Bei der Bearbeitung der Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Pluszahl erhöhen' äußert sich Christoph in der Diskussion, ob die entdeckte Aussage immer gilt, an einer Stelle wie folgt:

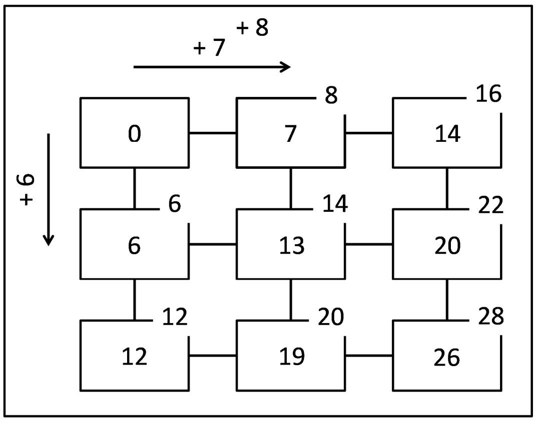


Abb. 5.33: Zahlengitter $ZG_{7/6}$ mit erhöhtem Zahlengitter $ZG_{8/6}$

86 C: Jetzt weiß ich's. Weil ehm, die Zahl *(zeigt auf 7wPz des $ZG_{7/6}$)*, zu der das zugerechnet wird, die wird ja hier lang *(zeigt von links nach rechts über die obere Zeile des $ZG_{7/6}$)* zweimal gerechnet.

87 Also muss ich auch ehm, zweimal dieses *(zeigt auf 8wPz des $ZG_{8/6}$)* ehm, zweimal ehm, das, was dann mehr ist *(zeigt auf 8wPz des $ZG_{8/6}$)*, ehm, dazu rechnen *(zeigt von links nach rechts über die obere Zeile des $ZG_{7/6}$)*.

88 Weil ich ja schon zwei Schritte *(zeigt von 7om auf 14or des $ZG_{7/6}$)* gehe. Mit der alten Zahl. Und das, was es dann mehr wird, das muss ich dann auch

zweimal nehmen *(zeigt von links nach rechts über die obere Zeile des $ZG_{7/6}$)*, weil es ja zwei Schritte *(zeigt von 7om auf 14or des $ZG_{7/6}$)* sind.

89 Und dann, ja, dann sind's immer halt das Doppelte mehr, was dazu kommt.

90 I: Warum sind's nicht noch mehr? Du gehst ja noch mehr Schritte, bis du zur Zielzahl kommst.

91 Weißt du, was ich meine? Du bist ja jetzt zwei Schritte gegangen, ne?

C: Mhmh.

I: Du musst ja noch einen dritten und `n vierten Schritt gehen.

92 Könnte es da nicht noch mal mehr werden und noch mal mehr werden?

C: Nee, weil es dann ja senkrecht geht und zu senkrecht ist ja keine ehm, ist ja nichts dazu gekommen.

Christoph beginnt seine Äußerung mit einer Begründung dafür, warum die Zielzahl bei Zahlengittern mit der um 1 erhöhten waagerechten Pluszahl immer 2 größer werden. Er gibt an, dass die waagerechte Pluszahl bei dem Weg 1 durch das Zahlengitter in den ersten beiden Rechenschritten zweimal gerechnet wird (86). Dabei zeigt er auf die waagerechte Pluszahl des Ausgangs-Zahlengitters $ZG_{7/6}$, benennt sie aber allgemein mit „die Zahl […], zu der das zugerechnet wird“ (86). Da diese waagerechte Pluszahl laut Rechenvorschrift bei dem Weg 1 durch das Zahlengitter zweimal addiert wird (86), muss […] auch […] das, was dann mehr ist *(zeigt auf 8wPz des $ZG_{8/6}$)*, […] dazu[ge]rechne[t]“ werden (87). Durch diese Geste und die dazugehörige Formulierung wird deutlich, dass Christoph die Erhöhung der waagerechten Pluszahl um 1 allgemein formuliert, ebenso wie deren wiederholte Addition. Indem er argumentiert, dass sowohl die waagerechte Pluszahl, als auch ihre Erhöhung jeweils einzeln betrachtet zweimal addiert werden, wendet Christoph selbstverständlich die Kommutativität und Assoziativität der Addition der natürlichen Zahlen an. In seiner Begründung hat er bislang keine konkreten Zahlwerte verwendet, sondern als Variable für die waagerechte Pluszahl die Formulierung „die Zahl […], zu der das zugerechnet wird“ (86) und für die Erhöhung der waagerechten Pluszahl die Formulierung „das, was dann mehr ist“ (87) eingesetzt. Diese Art der allgemeinen sprachlichen Formulierung anstelle einer Variablen behält er auch in seiner weiteren Begründung bei. In Abschnitt 88 spricht er davon, dass er „zwei Schritte […] mit der alten Zahl geh[t]“ und dass er „das, was es dann mehr wird, […] auch zweimal nehmen […] [muss], weil es ja zwei Schritte […] sind.“ Inhaltlich wiederholt er seine Argumentation aus den Abschnitten 86 und 87. Die waagerechte Pluszahl nennt er hier „alte Zahl“ (88); wohl, weil sie die Pluszahl aus dem Ausgangs-Zahlengitter ist. Die „neue Zahl“ ist vermutlich demnach die erhöhte waagerechte Pluszahl aus dem zu vergleichenden Zahlengitter. Die wiederholte Addition der waagerechten Pluszahl sieht er als „zwei Schritte“ an, und die Nutzung der Kommutativität und Assoziativität der Addition geht aus der Trennung der wiederholten Addition der „alten Zahl“ und dem, „was es dann mehr wird“ hervor. Die Schlussfolgerung seiner bisherigen Überlegungen formuliert er wieder allgemein: „dann sind’s halt das Doppelte mehr, was dazu kommt“ (89). An dieser Stelle wird deutlich, dass es nicht nur die waagerechte Pluszahl des Ausgangs-Zahlengitters mit Hilfe seiner sprachlichen Formulierung als Variable verwendet, sondern auch die Erhöhung der Zahl oben rechts im Zahlengitter. Bei der Erhöhung der waagrechten Pluszahl um 1 erhöht sich diese Zahl bis zu dieser Stelle der Argumentation unter Ausnutzung der Kommutativität und Assoziativität der Addition der natürlichen Zahlen um den Wert 2. Christoph nennt allerdings nicht diesen konkreten Wert, sondern drückt auch ihn allgemeingültig als „das Doppelte […], was dazu kommt“ (89) aus. Somit wendet er in seiner Begründung sogar zwei Variablen an. Die Nachfrage der Interviewerin, ob sich noch mehr verändert, wenn der noch fehlende dritte und vierte Rechen-Schritt ausgeführt werden (90 und 91), verneint Christoph mit der Begründung dass „es dann ja senkrecht geht und zu senkrecht ist […] ja nichts dazu gekommen“ (92). Damit meint er vermutlich, dass die fehlenden beiden Rechenschritte auf dem begonnenen Weg 1 durch das Zahlengitter senkrecht verlaufen, sich die senkrechte Pluszahl aber nicht verändert hat und somit bei den Additionen keine weiteren Erhöhungen zu erwarten sind. Insgesamt begründet Christoph die Aussage allgemeingültig. Er verwendet dabei individuelle sprachliche Formulierungen als Variablen.

Direkt nachdem Vita entdeckt hat, dass sich die Zielzahl bei der Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Startzahl erhöhen‘ immer um 2 erhöht, erklärt sie Folgendes:

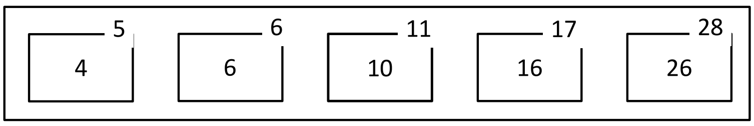


Abb. 5.34: Zahlenkette $ZK_{4/6}$ mit erhöhter Zahlenkette $ZK_{5/6}$

8	V:	Ja, also, weil hier ist jetzt also. Hier ist ja eine Zahl *(zeigt auf die 2.SZ der $ZK_{5/6}$)*, hier wird’s ja um 1 höher *(zeigt auf 5 der $ZK_{5/6}$)*. Da hat man 1 mehr *(zeigt von 4 auf 6 der $ZK_{4/6}$)*. Da hat man, dann ist das also 1 mehr, immer noch *(zeigt auf 11 der $ZK_{5/6}$)*.
9		Und dann rechnet man noch mal 1 *(zeigt auf 11 der $ZK_{5/6}$)* mehr plus die Zahl *(zeigt auf 6 der $ZK_{4/6}$)*, dann wird’s noch mal 1 mehr hier *(zeigt auf 17 der $ZK_{5/6}$)*. Dann ist hier *(zeigt von 16 der $ZK_{4/6}$ auf 17 der $ZK_{5/6}$)* 1 mehr und hier *(zeigt von 10 der $ZK_{4/6}$ auf 11 der $ZK_{5/6}$)* 1 mehr. Und dann rechnet man zweimal 1 mehr *(zeigt auf 11, dann auf 17 und dann auf 28 der $ZK_{5/6}$)*. Deshalb

werden's dann zweimal mehr.

In Abschnitt 8 legt Vita zunächst noch einmal die Voraussetzungen dar. Die zweite Startzahl der Zahlenkette benennt sie mit dem Ausdruck „eine Zahl" (8), und mit ihrer Gestik und den dazugehörigen Formulierungen „hier wird's ja um 1 höher *(zeigt auf 5 der $ZK_{5/6}$)*. Da hat man 1 mehr *(zeigt von 4 auf 6 der $ZK_{4/6}$)*." (8) bringt sie die Erhöhung der ersten Startzahl zum Ausdruck. Die Rechenvorschrift erwähnt sie nicht, wendet sie aber offenbar gedanklich an, denn in Abschnitt 9 formuliert und zeigt sie zumindest den zweiten und dritten Rechenschritt in der Zahlenkette explizit. Die dritte Zahl der Zahlenkette („da [...] *(zeigt auf 11 der $ZK_{5/6}$)*" – 8) wird als „1 mehr" (8) bezeichnet. Damit nutzt Vita keine konkreten Zahlenwerte für die einzelnen Zahlen der Zahlenkette, sondern bezeichnet erhöhte Zahlen mit dem Wert ihrer Erhöhung und die unveränderte zweite Startzahl als „eine Zahl" (8). Diesen Bezeichnungen bleibt sie in ihrer weiteren Begründung treu. Die Addition der dritten Zahl der Zahlenkette mit der zweiten Startzahl wird sprachlich so formuliert: „Und dann rechnet man noch mal 1[...] mehr plus die Zahl" (9). Dieses Mal wird die zweite Startzahl als „die Zahl" (9) und nicht als „eine Zahl" (8) bezeichnet. Sie wird aber nicht mit einer Erhöhung bzw. im konkreten Fall der zweiten Startzahl mit ‚keiner' Erhöhung in Verbindung gebracht. Das Ergebnis dieser zweiten Addition in der Zahlenkette ist eine erhöhte vierte Zahl, die analog mit „1 mehr hier" (9) bezeichnet wird. Auch bei der Durchführung des letzten Begründungsschrittes, der Addition der dritten und vierten Zahl der Zahlenkette, spricht Vita von um den Wert 1 erhöhten Zahlen („Dann ist hier [...] 1 mehr und hier [...] 1 mehr. Und dann rechnet man zweimal 1 mehr" – 9) und schlussfolgert somit am Ende, dass die Zielzahl „zweimal mehr" (9) - also um 2 größer - wird. Damit begründet Vita die gerade gemachte Entdeckung der Aussage direkt allgemeingültig und verwendet dabei individuelle sprachliche Formulierungen als Variablen.

Auf die Aufforderung der Interviewerin, die wiederholt an der Zahlenkette $ZK_{7/7}$ gegebene Begründung zu verallgemeinern, reagiert Patrick bei der Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen' wie folgt:

7	7	14	21	35

Abb. 5.35: Zahlenkette $ZK_{7/7}$

126 P: Ehm, ich nehm' [jetzt] mal das Beispiel 3 *(nimmt die Zahlenkette $ZK_{3/3}$ in die Hand)*.

127 Ehm, am Anfang verdoppelt sich die 3 *(deutet auf 3 (a) und 3 (b) der $ZK_{3/3}$)* ja sozusagen zur 6 *(zeigt auf 6 der $ZK_{3/3}$)*. Und dann verdreifacht se sich ja, weil die 6 *(zeigt auf 6 der $ZK_{3/3}$)* plus die 3 *(zeigt auf 3 (b) der $ZK_{3/3}$)* noch mal gerechnet werden muss.

128 Und das ist dann mal 9 *(zeigt auf 9 der $ZK_{3/3}$)*. Und dann verfünffacht sie sich mal *(zeigt abwechselnd von 6 auf 9 der $ZK_{3/3}$)* noch mal, weil, ehm, das Doppelte *(zeigt auf 6 der $ZK_{3/3}$)*, ehm, mit dem 3 mal *(zeigt auf 9 der $ZK_{3/3}$)* genom- genommen worden ist.

129 Und dann ist das 15 *(zeigt auf 15 der $ZK_{3/3}$)*.

130 Und das ist in, deswegen, weil. Das ist deswegen 5 mal, weil wenn es sich verdoppelt, dann hat man das, schon mal das Doppelte.

131 Und dann muss das noch mal mit dem Verdoppelten *(zeigt gleichzeitig auf 3 (b) und 6 der $ZK_{3/3}$)* und noch mal das da *(zeigt auf 3 (b) der $ZK_{3/3}$)* gerechnet werden. Und dann ist das das 3 mal genommen *(zeigt auf 9 der $ZK_{3/3}$)* und zusammen ist das 5 mal genommen (zeigt auf 15 *der $ZK_{3/3}$*).

132 Wenn man dann noch, wenn, wenn man's dann wieder damit *(zeigt zwischen 6 und 9 der $ZK_{3/3}$ hin und her)*, dann ist es zusammen 5 mal genommen. Weil dann das Doppelte *(zeigt auf 6 der $ZK_{3/3}$)* mit dem Dreimalgenommenen *(zeigt auf 9 der $ZK_{3/3}$)* genommen worden ist. Und zusammen ist das 5 mal.

Patrick wählt für seine Begründung ein anderes als das bisher in der Diskussion mit Christoph immer verwendete Beispiel der Zahlenkette $ZK_{7/7}$. Er „[nimmt] mal das Beispiel 3" (126). Allein dieser Einstieg in eine geforderte Verallgemeinerung der Begründung deutet darauf hin, dass Patrick eine beliebige der ihm vorliegenden Zahlenketten für seine Antwort auswählt. Im Folgenden (127 bis 129) gibt er eine schrittweise Begründung für die entdeckte Aussage, dass bei Zahlenketten mit gleichen Startzahlen die Zielzahl das Fünffache der Startzahl ist. Dass diese Begründung zunächst am Beispiel der Zahlenkette $ZK_{3/3}$ gegeben wird, bemerkt man in den Legitimationen der ersten beiden Begründungsschritte, in denen die tatsächlichen Zahlwerte der vorliegenden Zahlenkette addiert werden („am Anfang verdoppelt sich die 3 […] ja sozusagen zur 6" – (127) und: „weil die 6 […] plus die 3 […] noch mal gerechnet werden muss. Und das ist dann mal 9" – 127 und 128). Doch bereits in diesen beiden Begründungsschritten sind verallgemeinernde Formulierungen erkennbar. So spricht Patrick beispielsweise im zweiten Begründungsschritt nicht von der Verdreifachung der Zahl 3, sondern von der Verdreifachung ‚der Zahl' („und dann verdreifacht se sich ja" – 127). Die an dieser Stelle gewählte allgemeine Formulierung für seine gewählte Beispielzahl 3 verwendet er dann im Weiteren auch in seinem dritten Begründungsschritt („und dann verfünffacht sie sich […] noch mal" – 128).

Zudem nutzt er für die Addition dieses Schrittes nicht mehr – wie vorher – die konkreten Zahlen der vorliegenden Beispiel-Zahlenkette, sondern bezeichnet die dritte und vierte Zahl der Zahlenkette als „das Doppelte" bzw. das „3 mal […] genommen[e]" (128). Lediglich die Zielzahl bezeichnet er wieder mit dem konkreten Zahlenwert der Beispiel-Zahlenkette $ZK_{3/3}$ (129). Dass sein gewähltes Beispiel beliebig und damit verallgemeinerbar ist, wird in den Abschnitten 130-132 deutlich, in denen Patrick die Aussage ein weiteres Mal begründet und dabei zwar noch auf Zahlen der vorliegenden Beispiel-Zahlenkette $ZK_{3/3}$ zeigt, aber dieses Mal nur individuelle sprachliche Formulierungen als Variablen einsetzt („verdoppelt sich", „das Doppelte" – (130), „mit dem Verdoppelten", „das 3 mal genommen[e]", „das 5 mal genommen[e]" – (131), „das Doppelte […] mit dem Dreimalgenommenen […] genommen" und „zusammen ist das 5 mal" – (132)).

Vita und Leo arbeiten an derselben Aufgabenstellung. Leo hat gerade eine erste Begründung für die gefundene Entdeckung gegeben. Vita nimmt Leos Begründungsidee jedoch nicht auf, sondern argumentiert an der Zahlenkette $ZK_{8/8}$ wie folgt:

8	8	16	24	40

Abb. 5.36: Zahlenkette $ZK_{8/8}$

74	V:	Ich hab' was anderes.
	I:	Vita, dann sag du mal.
	V:	Hier *(zeigt auf 8 (b) der $ZK_{8/8}$)* ist ja einmal die 8.
75		Plu- und eh, und zweimal einmal die 8 *(zeigt von 8 (a) zu 8 (b) der $ZK_{8/8}$ hin und her)* ist zweimal die 8 *(zeigt auf 16 der $ZK_{8/8}$)*. Und dann einmal *(zeigt auf 8 (b) der $ZK_{8/8}$)* plus zweimal *(zeigt auf 16 der $ZK_{8/8}$)* die 8 ist ja dreimal die 8 *(zeigt auf 24 der $ZK_{8/8}$)*. Und dann 2 mal *(zeigt auf 16 der $ZK_{8/8}$)* plus 3 mal die 8 *(zeigt auf 24 der $ZK_{8/8}$)* ist schon 5 mal die 8 *(zeigt auf 40 der $ZK_{8/8}$)*.

Vitas Begründung der Aussage bezieht sich auf die ihr vorliegende Zahlenkette $ZK_{8/8}$. Sie schlussfolgert in ihren Ausführungen von den Voraussetzungen entlang der drei Rechenschritte in Zahlenketten bis hin zur Behauptung der Aussage. Dabei fällt auf, dass sie statt der Formulierungen „einmal 8", „zweimal 8", „dreimal 8" und „fünfmal 8" die Ausdrücke „einmal die 8", „zweimal die 8", „dreimal die 8" und „5 mal die 8" verwendet. Diese Hervorhebung der gewählten Beispielzahl („einmal <u>die</u> 8") könnte ein Hinweis darauf sein, dass die vorliegende Beispiel-Zahlenkette $ZK_{8/8}$ für Vita beliebig austauschbar und damit verallgemeinerbar ist. Im weiteren Interviewverlauf wiederholt Leo zunächst fast wörtlich – vor allem aber mit der Formulierung „einmal die 8“ – Vitas Begründung an derselben Zahlenkette. Bei der Aufforderung nach einer Verallgemeinerung dieser Begründung wählt Leo die Zahlenkette $ZK_{50/50}$ und formuliert seine Begründung analog zu der vorherigen mit den Ausdrücken „einmal die 50“, „zweimal die 50“ und „Und so weiter“. Vita dagegen zeigt in dem folgenden Abschnitt 86, dass sie sogar zu einer sprachlichen Verallgemeinerung ihrer Begründung in der Lage ist:

86 V: Ja. Also einmal die Zahl *(zeigt auf 8 (a) der $ZK_{8/8}$)* plus einmal die Zahl *(zeigt auf 8 (b) der $ZK_{8/8}$)* ist ja dann zweimal die *Zahl (zeigt über 8 (a) und 8 (b) auf 16 der $ZK_{8/8}$)*. Und dann noch mal einmal die Zahl *(zeigt auf 8 (b) der $ZK_{8/8}$)* plus noch mal zweimal die Zahl *(zeigt auf 16 der $ZK_{8/8}$)* ist ja dreimal die Zahl *(zeigt auf 24 der $ZK_{8/8}$)*. Dann zweimal die Zahl *(zeigt auf 16 der $ZK_{8/8}$)* plus dreimal die Zahl *(zeigt auf 24 der $ZK_{8/8}$)* ist fünfmal die Zahl *(zeigt auf 40 der $ZK_{8/8}$)*.

Damit begründet Vita die Aussage in den Abschnitten 74 und 75 anhand eines selbst gewählten Beispiels, in dem bereits Andeutungen hinsichtlich dessen Beliebigkeit erkennbar sind. Im weiteren Interviewverlauf (86) begründet sie dann die Aussage allgemeingültig. Dazu verwendet auch sie individuelle sprachliche Formulierungen als Variablen.

Somit hat sich in allen Transkriptausschnitten (Christoph, Vita und Patrick) gezeigt, dass die Kinder die jeweils entdeckte Aussage allgemeingültig begründen und dabei individuelle sprachliche Formulierungen als Variablen verwenden.

Patrick und Christoph bearbeiten die Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen‘. Sie haben beide mehrfach am Beispiel der Zahlenkette $ZK_{7/7}$ begründet, warum unter den gegebenen Voraussetzungen die Zielzahl das Fünffache der Startzahl ist. Nun fordert die Interviewerin sie auf, diese Begründung zu verallgemeinern:

7	7	14	21	35

Abb. 5.37: Zahlenkette $ZK_{7/7}$

110 I: Jetzt habt ihr's mit der 7 erklärt.
111 Geht das mit jeder Zahl, die ich vorne als Startzahl nehme und hinten kommt fünfmal diese Startzahl raus?
P: Ja.
(Christoph nickt)
112 P: Fünfmal drei 15, fünfmal vier 20, fünfmal fünf sind 25, sechsmal 5 sind 30, siebenmal fünf sind 35.
113 I: Jetzt hast du gesagt, mit der Startzahl 3 kann ich's dir vorrechnen. Mit den Startzahlen 4, mit den Startzahlen 5, 6 und 7. Ich hab' grad gefragt: Geht das mit jeder?
114 P: *(nickt)* Ich kann Ihnen alle Zahlen sagen, aber dann stehen wir…
[…]

Patricks Zustimmung in Abschnitt 111 weist darauf hin, dass er der Meinung ist, dass die Aussage allgemeingültig ist. In Abschnitt 112 rechnet er zur Bestätigung der Allgemeingültigkeit einige Beispiele des entdeckten Zusammenhangs zwischen den Start- und Zielzahlen vor. Dazu verwendet er die vorliegenden Beispiel-Zahlenketten $ZK_{3/3}$, $ZK_{4/4}$, $ZK_{5/5}$ und $ZK_{7/7}$ und ergänzt diese durch die Zahlenkette $ZK_{6/6}$ („Fünfmal drei 15, fünfmal vier 20, fünfmal fünf sind 25, sechsmal 5 sind 30, siebenmal fünf sind 35." – 112). Diese vorgerechneten Beispiele reichen der Interviewerin nicht aus. Sie möchte wissen, ob die Aussage für jede (natürliche) Zahl gilt (113). Patrick nickt daraufhin zustimmend und kommentiert: „Ich kann Ihnen alle Zahlen sagen" (114). Damit besteht Patricks Verallgemeinerung der Begründung in der Idee, den entdeckten Zusammenhang zwischen den Start- und Zielzahlen für alle Zahlen vorzurechnen. Er ist aber selbst hinsichtlich des Zeitfaktors für dieses Vorhaben skeptisch („aber dann stehen wir…" - (114).

Im weiteren Interviewverlauf versucht zunächst Christoph die Allgemeingültigkeit am Beispiel der Zahlenkette $ZK_{7/7}$ zu erläutern. Die Interviewerin gibt sich mit der Erklärung mit Hilfe eines Beispiels nicht zufrieden und fragt erneut nach:

[…]
121 I: Okay. Es war aber die Frage: Ist egal, welche Startzahl ich vorne nehme? Ich sag mal, ob ich 50 nehme oder 100 oder eine Millionen, also irgendwelche großen Zahlen. Oder ganz krumme Zahlen wie Patrick: 1233125.
122 Ich nehm' sie mal 5, und dann ist, muss das die Zielzahl sein?
P: Wir können 's ja hierdran testen (zeigt auf die $ZK_{1233125/1233125}$, dann wissen wir, ob's stimmt.
123 I: Ach, du meinst, wenn ich eine ganz große teste–
P: Dann ist es wahrscheinlich, dass es auch für die anderen gilt.

	I:	Aha. Und-
124	P:	Und [dann hat man ja? wenigstens] wahrscheinlich alle darunter.
	I:	Warum das denn?
	P:	Weiß ich auch nicht.

Patrick schlägt vor, den Zusammenhang zwischen den Start- und Zielzahlen an seiner Beispiel-Zahlenkette $ZK_{1233125/1233125}$ zu testen (122). Er scheint mit seiner Behauptung „dann wissen wir, ob's stimmt" (122) unterstellen zu wollen, dass die Aussage allgemeingültig ist, wenn sie für eine (beliebige) große Zahl wahr ist. So zumindest scheint die Interviewerin seine Äußerung verstanden zu haben, denn sie kommentiert: „Ach, du meinst, wenn ich eine ganz große teste" (123). Dabei wird sie von Patrick unterbrochen, der ihren Satz wie folgt beendet: „Dann ist es wahrscheinlich, dass es auch für die anderen gilt." (123). Diese Äußerung lässt darauf schließen, dass die Interviewerin mit ihrer Annahme Recht hatte. Patrick schränkt jedoch in Abschnitt 124 ein, dass der Zusammenhang wahrscheinlich wenigstens für alle Zahlen darunter gilt. Wirklich begründen kann er die Stichhaltigkeit dieser Einschränkung allerdings nicht (124). Damit bestätigt Patrick die Allgemeingültigkeit der Aussage, indem er einerseits andeutet, den entdeckten Zusammenhang für alle Zahlen des Gültigkeitsbereiches (hier der Bereich der natürlichen Zahlen) vorrechnen zu können, oder andererseits ein Beispiel mit beliebig großen Zahlen analysiert und dann unterstellt, dass die Wahrheit dieser Beispiel-Rechnung auf alle Beispiele – zumindest auf alle Beispiele mit kleineren Zahlen - übertragbar ist.

Diese zweite Idee verfolgt auch Nina, als sie bei der Bearbeitung der Aufgabenstellung ‚Zahlenketten – Gleiche Startzahlen' aufgefordert wird, ihre Begründung zu verallgemeinern:

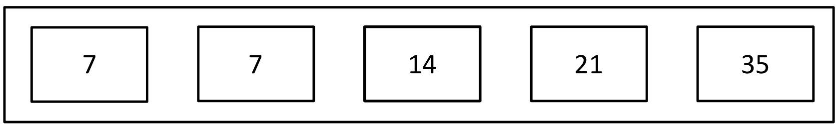


Abb. 5.38: Zahlenkette $ZK_{7/7}$

55	N:	Ich hab das so gedacht, wenn das schon bei den, bei Johann geht, dann können –
56	J:	Darf ich noch eine probieren?
	N:	- […?] machen. Dann, wenn das jetzt hier Johann hat ja schon \`ne ziemlich hohe Zahl, 250. Und dann könnte man das immer weiter steigern.
57		Und dann geht das immer noch, wie- weil man muss ja die bei-, die Startzahlen *(zeigt auf 7 (a) und 7 (b) der $ZK_{7/7}$)*, die müssen gleich sein. Ich

		kann ja jetzt auch eine Millionen nehmen. Und dann kann ich–
	J:	Ist dasselbe wie 1.
58	N:	- ja, dasselbe wie 1.
	I:	Erstmal zu Ende. Du könntest auch eine Millionen nehmen. Nina wollte noch weiter erklären.
59	N:	Ja und dann könnte ich hier immer. Da stehen ja die beiden Anfangszahlen *(zeigt auf 7 (a) und 7 (b) der $ZK_{7/7}$)*. Das ist dann 1 *(zeigt auf 7 (b) der $ZK_{7/7}$)*, 2 *(zeigt auf 14 der $ZK_{7/7}$)*, 3 *(zeigt auf 21 der $ZK_{7/7}$)* und wieder 5 *(zeigt auf 35 der $ZK_{7/7}$)*.

Nina hatte im ersten Teil des Interviews bei den selbst zu wählenden Zahlenketten die Zahlenkette $ZK_{7/7}$ und Johann die Zahlenkette $ZK_{250/250}$ berechnet. Auf diese von Johann gewählte, gerechnete und nun vorliegende Zahlenkette bezieht sich Nina in ihren Ausführungen. Ihre Idee („Ich hab das so gedacht" – 55) der Verallgemeinerung der Begründung basiert auf Johanns Beispiel-Zahlenkette $ZK_{250/250}$. Nina ist der Ansicht, dass Johann schon eine „ziemlich hohe Zahl, 250" (56) ausgewählt hat, und dass „[man das dann] immer weiter steigern [könnte]" – 56). Dass der Zusammenhang zwischen den Start- und Zielzahlen für die Startzahlen 250 und 250 stimmt, wurde von Johann bereits geprüft. Nina behauptet nun, dass man beliebige größere Beispiel-Zahlenketten wählen könne (56) und dass der entdeckte Zusammenhang auch weiterhin gilt („Und dann geht das immer noch" – 57). Es ist nur wichtig, dass gleiche Startzahlen gewählt werden (57). Zur Bestätigung ihrer Annahme wählt sie eine „beliebige" sehr viel größere Zahl („Ich kann ja jetzt auch eine Millionen nehmen." – 57) und rechnet in Abschnitt 59 vor, dass der entdeckte Zusammenhang auch für diese gewählte Zahl gilt. Damit bestätigt Nina die Allgemeingültigkeit der Aussage, indem sie ein Beispiel mit „beliebigen" sehr großen gleichen Startzahlen vorrechnet.

In diesen Transkriptausschnitten von Patrick und Nina wird die Allgemeingültigkeit der Aussage durch die Berechnung von Beispielen bestätigt; zum einen durch die Berechnung von vielen Beispielen und zum anderen durch die Berechnung eines Beispiels mit eine „beliebigen" sehr großen Zahl.

Patrick und Christoph bearbeiten die Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen'. Patrick erklärt Christoph ein weiteres Mal, warum bei diesen Zahlengittern die Zielzahl immer das Vierfache der Pluszahl ist:

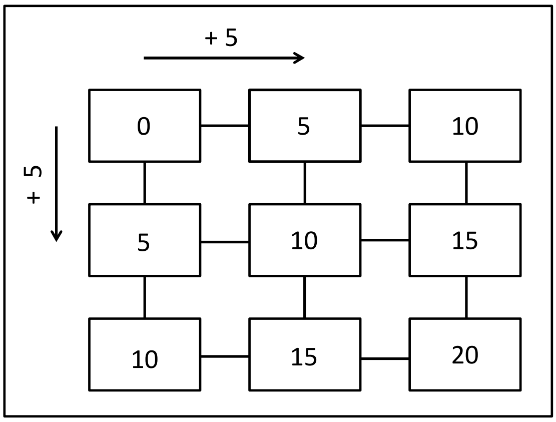


Abb. 5.39: Zahlenkette $ZK_{5/5}$

66 P: Also ist [eigentlich?] ganz logisch, weil von Null *(zeigt auf die Startzahl 0 des $ZG_{5/5}$)* angefangen, sind das, musst du 4 Schritte bis zur 20 machen, ne? *(Christoph nickt)*

67 Also 1 *(zeigt auf 5ml des $ZG_{5/5}$)*, 2 *(zeigt auf 10ul des $ZG_{5/5}$)*, 3 *(zeigt auf 15um des $ZG_{5/5}$)*, 4 *(zeigt auf 20ur des $ZG_{5/5}$)*. Und deswegen sind es ja auch immer 4. Wenn man \`n größeres Zahlengitter machen würde, was so gehen würde *(zeigt einmal rings um das $ZG_{4/4}$)*, dann wären 's wahrscheinlich wieder mehr, ne?

[…]

Daraufhin behauptet Christoph, dass er die Erklärung zwar verstanden habe, sie aber nicht selbst erklären könne. Er lässt sich aber im Weiteren darauf ein, doch eine Erklärung an einem der vorliegenden Beispiele abzugeben. Dazu wählt er das Zahlengitter $ZG_{1/1}$ aus. Nach dieser Erklärung fordert die Interviewerin die Verallgemeinerung der Begründung ein:

[…]

86 I: Mhmh. Das geht an dem Beispiel *(zeigt auf das $ZG_{1/1}$)*. Geht das auch an irgend\`nem anderen Beispiel?

C: Eigentlich schätze ich an jedem.

87 I: Das finde ich \`ne spannende Einschätzung. Glaubst du das da auch Patrick? Oder Christoph, kannst du das erklären?

P: Wie, an jedem?

I: Es geht an jedem Beispiel.

P: Eigentlich ja, weil's ja immer 4 Schritte sind. Sei denn, die Pluszahl wird eins größer.

88 I: Also was klar ist, ihr müsst über-

89 C: Wenn es 9 Felder sind, dann kommt auf jeden Fall, so weit ich weiß immer das Vierfachiger, wenn da zweimal dieselben Pluszahlen sind, kommt da immer das Vierfachige raus, von den Pluszahlen.

Zu Beginn der Transkriptausschnitte erklärt Patrick, warum bei Zahlengittern mit gleichen Pluszahlen die Zielzahl immer das Vierfache der Pluszahl ist (66 und 67). Er

beendet seine Erklärung mit der Äußerung „Und deswegen sind es ja auch immer 4.“ (67). Durch die Formulierung „immer 4“ bringt er selbst den Aspekt der Allgemeingültigkeit in die Begründung hinein. Im Weiteren grenzt er dann die gegebene Voraussetzung (1), dass mit 3x3-Zahlengittern gearbeitet wird, zu einer anderen, hier nicht relevanten Voraussetzung ab. Er vermutet, dass es bei einem größeren Zahlengitter mehr Schritte seien, die man von der Start- zur Zielzahl machen würde (67). Mit dieser Abgrenzung bekräftigt er noch einmal die festgelegte Voraussetzung (1), dass die Größe der 3x3-Zahlengitter konstant bleibt. Der zweite Teil der Voraussetzung (1) – die Rechenvorschrift für Zahlengitter – erwähnt er nicht explizit. Sie wird in den Ausführungen zu seiner vorher abgegebenen Erklärung gesehen, in denen er von Schritten (Rechenschritten) auf dem Weg von der Start- zur Zielzahl spricht („weil von Null *(zeigt auf die Startzahl 0 des $ZG_{5/5}$)* angefangen, sind das, musst du 4 Schritte bis zur 20 machen“ - 66). Damit sieht Patrick den Grund für die Allgemeingültigkeit der Aussage in der Bekräftigung der gegebenen Voraussetzung (1).
Als die Interviewerin zu einem späteren Zeitpunkt des Gesprächsverlaufs erneut auf die Allgemeingültigkeit der Aussage eingeht (86 und 87), erweitert Patrick seine Begründung noch damit, dass er auch die Voraussetzung (2) bekräftigt, indem er sie von einer veränderten Voraussetzung abgrenzt („Sei denn die Pluszahl wird eins größer.“ – 87).
Zum Abschluss fasst Christoph noch einmal zusammen, unter welchen Bedingungen die Aussage für ihn allgemeingültig ist (89). Er ist also der Meinung, dass ein Teil der Voraussetzung (1) („9 Felder“) – also die 3x3-Zahlengitter - und die Voraussetzung (2) („wenn da zweimal dieselben Pluszahlen sind“) die Gründe dafür sind, dass die Zielzahl immer das Vierfache der Pluszahl ist („kommt da immer das Vierfachige raus, von den Pluszahlen“).

Auch Leo bekräftigt zur Bestätigung der Allgemeingültigkeit eine der gegebenen Voraussetzungen. Er äußert sich bei der Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen‘ folgendermaßen:

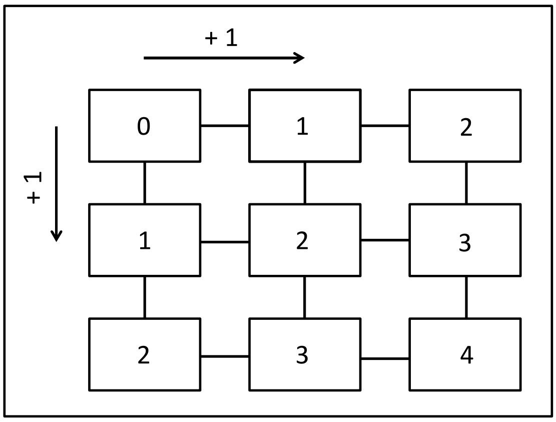


Abb. 5.40: Zahlenkette $ZK_{1/1}$

61	I:	Okay. Ehm, glaubt ihr, dass das immer geht. Auch bei anderen Beispielen mit gleichen Pluszahlen? Ihr habt ja jetzt von 1 probiert als Pluszahlen, 2, 3, 4, 5 und 6.
62	L:	Ja, ich glaube schon. Ich bin mir sogar ziemlich sicher.
63	V:	Machen wir über 10 oder nicht über 10? *(Interviewerin nickt)* Ich glaube-
	L:	Ich glaube, dass es immer so bleibt.
64		Weil die 4 *(zeigt über die obere Zeile von links nach rechts und über die rechte Spalte von oben nach unten des $ZG_{1/1}$ und zurück)*, wenn…, wir nehmen ja kein größeres *(deutet einmal um das Zahlengitter herum)* ehm,-
	I:	Zahlengitter, nein. Es bleiben 9 Felder.
65	L:	Ja, deswegen sind das, wird das eigentlich wieder stimmen *(zeigt über die obere Zeile von links nach rechts und über die rechte Spalte von oben nach unten des $ZG_{1/1}$)*. Weil das sind hier *(zeigt von 1om auf 2or des $ZG_{1/1}$)*, das Zahlengitter verändert sich nicht. Dann sind's da *(zeigt von 3mr auf 4ur des $ZG_{1/1}$)* immer wieder 4 *(zeigt über die linke Spalte von oben nach unten und über die untere Zeile von links nach rechts des $ZG_{1/1}$)*.

In Abschnitt 64 zeigt Leo den Weg 1 durch das Zahlengitter und bestätigt nochmal ausdrücklich, dass kein größeres als das gegebene Zahlengitter genommen wird. Dass er mit der ‚Größe' des Zahlengitters die Anzahl und Anordnung der Kästchen meint, wird durch seine Handlung in Abschnitt 64 deutlich, in der er „*einmal um das Zahlengitter herum*" zeigt. Die Interviewerin bestätigt ihm, dass es Zahlengitter mit 9 Feldern bleiben (64). Diese Voraussetzung (1), dass es sich um 3x3-Zahlengitter handelt, ist für Leo der Grund, dass die Aussage allgemeingültig ist: Er zeigt wiederholt den Weg 1 durch das Zahlengitter und kommentiert diese Handlung mit der Äußerung „Weil das sind hier […], das Zahlengitter verändert sich nicht. Dann sind's da […] immer wieder 4" (65). Somit begründet Leo die Allgemeingültigkeit der Aussage mit der Bekräftigung der gegebenen 3x3-Zahlengitter, die einen Teil der Voraussetzung (1) darstellen. Der zweite Teil der Voraussetzung (1), die Rechenvorschrift in Zahlengittern wird nicht explizit erwähnt, aber im wiederholten

Zeigen des Weges 1 - und am Ende auch des Weges 2 - durch das Zahlengitter gesehen.

Tobias bekräftigt zur Bestätigung der Allgemeingültigkeit der Aussage die Voraussetzung (2) bei der Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen‘:

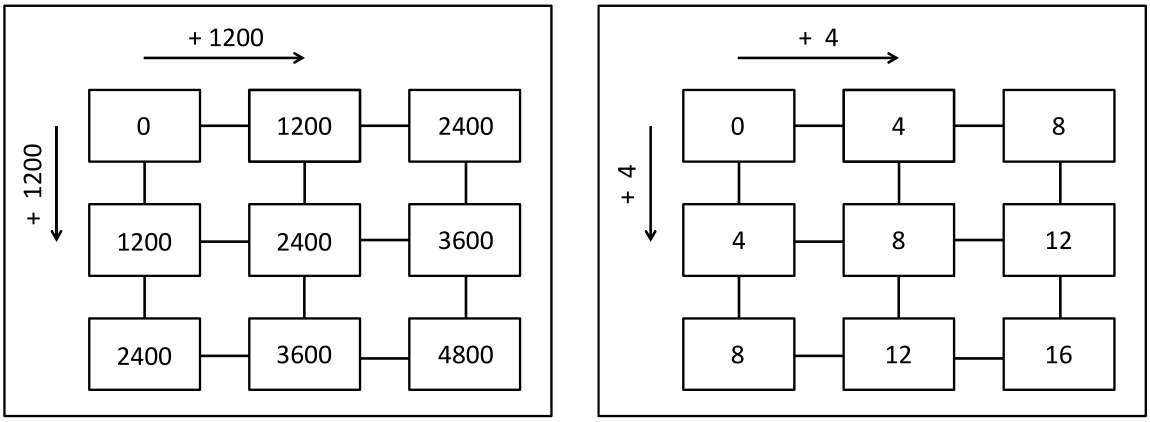


Abb. 5.41: links - Zahlenkette $ZK_{1200/1200}$; rechts - Zahlenkette $ZK_{4/4}$

69 I: Ist das immer so bei diesen Zahlengittern?
T: Mhmh. *(nickt)*
I: Warum?
70 T: Aber nur, wenn man da *(zeigt auf 1200om und 1200ml des $ZG_{1200/1200}$)* immer das gleiche.
I: Warum ist das wichtig, dass man immer die gleichen Pluszahlen hat, Tobias?
[…]
83 T: Okay. Würde das *(zeigt auf 4ml des $ZG_{4/4}$)* jetzt 3 sein und das *(zeigt auf 4om des $ZG_{4/4}$)* 4. Dann sind ja dreimal 4 *(zeigt von 4ml auf 4om des $ZG_{4/4}$)* zwölf *(zeigt auf 8or des $ZG_{4/4}$)*. Und dann ehm, noch mal plus 3 sind dann 15 *(zeigt auf 12mr des $ZG_{4/4}$)* und hier ist 16 *(zeigt auf 16ur des $ZG_{4/4}$)*. [einen weiter?]
84 Nee, doch nicht. Ich hab's doch nicht.

Auf die Aufforderung zur Verallgemeinerung der Begründung hin äußert Tobias in Abschnitt 70, dass die Aussage nur dann immer gilt, wenn die waagerechte und senkrechte Pluszahl gleich sind („Aber nur, wenn man da *(zeigt auf 1200om und 1200ml des $ZG_{1200/1200}$)* immer das gleiche.“). Dazu verwendet er nicht die Ausdrücke „waagerechte“ bzw. „senkrechte“ Pluszahl, sondern zeigt stattdessen auf ihre jeweiligen Plätze in einem der vor ihm liegenden Beispiel-Zahlengitter. Seine sonst allgemeingültige sprachliche Formulierung lässt vermuten, dass sein Beispiel völlig beliebig ist. Auf die Nachfrage der Interviewerin hin, warum die immer gleichen Pluszahlen wichtig seien (70), antwortet Tobias nach längerem Überlegen und dem Vorrechnen einiger Zahlengitter durch Christine (71 bis 82) damit, dass er an einem

Gegenbeispiel die Wirkung unterschiedlicher Pluszahlen analysiert („Würde das *(zeigt auf 4ml des $ZG_{4/4}$)* jetzt 3 sein und das *(zeigt auf 4om des $ZG_{4/4}$)* 4.“ – 83). Das Vorrechnen dieses geänderten Beispiels misslingt ihm allerdings, so dass er sich seiner Ausführungen nicht mehr sicher ist (84). Insgesamt gesehen bestätigt Tobias die Allgemeingültigkeit der Aussage durch die Bekräftigung der gegebenen Voraussetzung (2). Diese formuliert er in seiner ersten Antwort fast wörtlich (70) und grenzt sie in seinen weiteren Ausführungen (83) nochmal zu Veränderungen hin ab.

Damit weisen die Transkriptausschnitte von Patrick, Christoph, Leo und Tobias folgende Gemeinsamkeit auf: Die Allgemeingültigkeit der Aussage wird dadurch bestätigt, dass Teile der gegebenen Voraussetzungen (1) und / oder (2) bekräftigt werden.

Es ist interessant, dass ein derartiger Umgang mit der Allgemeingültigkeit nur bei der ersten Aufgabenstellung (‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen‘) der Interviewserie zu Zahlengittern zu beobachten war. Die Bekräftigung der Voraussetzung(en) der Aussage zur Bestätigung der Allgemeingültigkeit ebendieser Aussage konnte im Weiteren weder bei den folgenden Aufgabenstellungen zu Zahlengittern noch bei einer der Aufgabenstellungen zu Zahlenketten beobachtet werden.
Es ist möglich, dass diese Beobachtung mit einem oder mehreren der folgenden Aspekte in Zusammenhang steht:
Bis zu dieser Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen‘ wurden in der Untersuchung entweder konkrete Rechnungen zu Zahlengittern ausgeführt (vgl. Phase 1 der Durchführung: Aufbau und Regeln von Zahlengittern) oder problemorientierte Aufgaben zu ihnen bearbeitet (vgl. Phase 2-4 der Durchführung: Ausfüllen von Zahlengittern, Anzahl der Lösungsmöglichkeiten und „Zielzahl 20“). In keinem dieser Fälle wurde eine allgemeingültige Aussage thematisiert.
Zudem musste in den ersten Interviews erst einmal eine gemeinsame sprachliche Basis für ein Gespräch über die Allgemeingültigkeit der Aussage geschaffen werden. Die Bedeutung der Formulierungen ‚Ist das <u>bei allen Zahlengittern</u> bzw. <u>immer</u> so?‘ (o.ä.) war den Kindern nicht bekannt. So ist es nicht weiter verwunderlich, dass die Formulierung ‚bei allen Zahlengittern‘ auch so verstanden werden kann, dass Zahlengitter eines anderen Formates (z.B. 4x4- oder 3x4-Zahlengitter) verwendet werden könnten.

Dass diese Aufgabenstellung die erste war, in der der Voraussetzung (1) auch noch die Voraussetzung (2) hinzugefügt wurde, war sicherlich ebenfalls nicht gerade hilfreich für eine gemeinsame sprachliche Basis der Formulierung ‚immer so'. Bisher gab es bei der Bearbeitung von Zahlengittern noch keine Voraussetzung (2). Somit könnte auch die Unsicherheit in der Unveränderlichkeit dieser Voraussetzung zu erklären sein.

In den folgenden beiden Transkripten sind keine Äußerungen ersichtlich, die auf den Umgang der Kinder (Vita und Christine) mit der Allgemeingültigkeit der Aussage hinweisen:

Als Vita und Leo nach ihrer Begründung zur Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen' nach der Verallgemeinerung der Aussage gefragt werden, antwortet zuerst Leo (62-66), dass er glaube, dass die Entdeckung immer so bleibe, da sich das Zahlengitter nicht in seiner Größe verändere und es immer wieder 4 seien. Um seine Annahme zu untermauern, rechnet er noch als Beispiel das Zahlengitter $ZG_{100/100}$ vor. Daraufhin reagiert Vita in Abschnitt 67 wie folgt:

61	I:	Okay. Ehm, glaubt ihr, dass das immer geht. Auch bei anderen Beispielen mit gleichen Pluszahlen? Ihr habt ja jetzt von 1 probiert als Pluszahlen, 2, 3, 4, 5 und 6.
[…]		
67	I:	Geht das mit jeder größeren Zahl auch?
	V:	Ich glaube 's nicht. Aber ich weiß auch nicht, warum. Irgendwie kommt mir das so vor, als ob's nicht geht.

Im Gegensatz zu Leo glaubt Vita nicht, dass die entdeckte Aussage auch für jede größere als die von ihnen getesteten Zahlen gilt (67). Sie möchte ihre Annahme gerne begründen, kann es aber nicht („Aber ich weiß auch nicht, warum" – 67). Es bleibt also bei einem Gefühl, auf dass sie ihre Annahme stützt („Es kommt mir so vor, als ob […]" – 67). Einen Hinweis darauf, wie sie mit der Allgemeingültigkeit der Aussage selbst umgeht, ist allerdings nicht ersichtlich.

Christine äußert sich noch weniger als Vita. Nachdem Tobias zuvor behauptet und begründet hat, dass es bei der zu bearbeitenden Aufgabenstellung ‚Zahlengitter – Gleiche Pluszahlen' egal sei, welche gleichen Pluszahlen man auswählt, die Zielzahl sei dann immer das Vierfache der Pluszahl, wird Christine nach ihrer Meinung zu dieser Verallgemeinerung der Aussage gefragt:

101 I: Glaubst du, dass das immer so ist?
C: Es könnte sein, aber ich bin mir nicht sicher-

Mit ihrer Antwort deutet Christine an, dass Tobias‘ Behauptung stimmen könne, sie sich aber nicht sicher ist, ob das wirklich so ist (Abschnitt 101). Im Gegensatz zu Vita äußert sie nicht einmal den Wunsch nach einer Begründung für ihre Annahme.

Weder bei Vita, noch bei Christine sind Äußerungen hinsichtlich des Umgangs mit der Allgemeingültigkeit der Aussage ersichtlich. Beide Kinder bringen lediglich Gefühle und vage Einschätzungen bezüglich der Allgemeingültigkeit hervor.

Insgesamt lassen sich somit hinsichtlich des Umgangs mit der Allgemeingültigkeit der Aussage folgende vier Typen unterscheiden:

Allg 1: „Allgemeingültige Begründung“

Die Aussage wird allgemeingültig begründet. Dabei werden individuelle sprachliche Formulierungen als Variablen verwendet.

Allg 2: „Berechnen von Beispielen“

Die Allgemeingültigkeit der Aussage wird durch das Berechnen vieler Beispiele oder eines Beispiels mit einer „beliebigen“ sehr großen Zahl bestätigt.

Allg 3: „Bekräftigung der Voraussetzung(en)“

Die Allgemeingültigkeit der Aussage wird durch die Bekräftigung der Voraussetzung(en) der Aussage bestätigt.

Allg 4: „Gefühle und vage Einschätzungen“

Hinsichtlich der Allgemeingültigkeit der Aussage sind keine Äußerungen ersichtlich. Es werden lediglich Gefühle und vage Einschätzungen bezüglich der Allgemeingültigkeit hervorgebracht.

Es mag verwunderlich sein, dass in dieser Auswertung nur wenig schwache Leistungen dargestellt werden. In dem inhaltlichen Bereich „Struktur der Wenn-dann-Aussage“ gibt es Kinder die „keine Äußerungen“ (Typ WdA 3) diesbezüglich machten. Da aber alle Kinder auf die Frage nach einer Begründung antworteten, konnte bei jedem Kind sowohl eine Vorgehensweise, als auch ein verwendetes

Argument analysiert werden. Hätten einige Kinder gar nicht geantwortet, so hätten sich trotzdem in diesen beiden Bereichen keine neuen Typen ergeben. In dem Bereich „Umgang mit Allgemeingültigkeit“ konnten auch nur diejenigen Interviews interpretiert werden, in denen die Kinder bereits eine Begründung gegeben hatten und die Frage nach der Allgemeingültigkeit überhaupt gestellt wurde (vgl. Kapitel 4.4). Unter diesen Kindern äußerten einige lediglich „Gefühle und vage Einschätzungen“ (Typ Allg 4). Somit sind durchaus schwache Leistungen in allen vier Bereichen vorhanden, aber nicht immer explizit ersichtlich.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Obwohl Begründungen und Beweise bereits von Beginn der Schulzeit an gefordert werden (vgl. Freudenthal 1979 und Winter 1983) und auch in den Lehrplänen und Bildungsstandards für die Primarstufe fest verankert sind (vgl. Kultusministerium des Landes NRW 1985, MSJK 2003 und 2008 und KMK 2005), existieren (zumindest im deutschsprachigen Raum) nahezu keine empirischen Untersuchungen zum Begründen und Beweisen von Grundschulkindern. In Bezug auf diese Schulstufe fehlt es an nahezu jeglicher Aussage zu Beweisvorstellungen, -fähigkeiten, Vorgehensweisen, Typen von Argumenten etc.; aber auch an Analysen von Argumentationsprozessen oder Unterrichtskonzepten.

Die vorliegende Untersuchung liefert einen Baustein zum Schließen dieser großen Forschungslücke, indem sie die Fragestellung „Wie begründen Grundschulkinder?“ bearbeitet. Diese empirische Untersuchung basiert auf der Forschungsmethode der Grounded Theory (Strauss und Corbin 1996). Die Auswertung der gewonnen Daten wurde nach dem Stufenmodell der empirisch begründeten Typenbildung nach Kluge (1999 und 2000, Kelle und Kluge 2010) vorgenommen. Das Ziel dieser Art der Datenanalyse war eine Strukturierung des Untersuchungsbereiches, und das Ergebnis dieser Analysen ist die Bildung und Charakterisierung von Typen (Kapitel 4.1).

Anhand von qualitativen, problemzentrierten Interviews (Kapitel 4.1 und 4.4) zu den substanziellen Aufgabenformaten „Zahlengitter“ und „Zahlenketten“ (Kapitel 4.2 und 4.3) wurden die Begründungen der Grundschulkinder im Hinblick auf die spezifizierte Forschungsfrage (Kapitel 3.3) bezüglich der Aspekte der ‚Struktur der Wenn-dann-Aussage‘, der ‚Vorgehensweise der Kinder beim Begründen‘, der ‚Art der verwendeten Argumente‘ und des ‚Umgangs mit Allgemeingültigkeit‘ interpretiert und die jeweils empirisch begründeten Typen herausgearbeitet (Kapitel 5). Diese Ergebnisse werden im Folgenden noch einmal zusammengefasst, diskutiert und in den aktuellen Forschungsstand eingeordnet.

Im Hinblick auf die **Struktur der Wenn-dann-Aussage** konnten drei verschiedene Typen herausgearbeitet werden (Kapitel 5.1). Bei dem Typ WdA 1 („Zusammenhang von den Voraussetzungen auf die Behauptung“) sind die Voraussetzung und die

Behauptung klar, und es wird ein zielgerichteter Zusammenhang von der Voraussetzung auf die Behauptung hergestellt. Der Typ WdA 2 („Zusammenhang von Teilen der Voraussetzungen auf die Behauptung“) charakterisiert die Äußerungen, in denen die Behauptung klar ist. Diese wird als Ziel der Begründung angesehen. Es wird ein Zusammenhang von Teilen der Voraussetzungen auf die Behauptung hergestellt. In dem Typ WdA 3 („Keine Äußerungen“) werden die Beiträge zusammengefasst, in denen es nicht ersichtlich ist, in wieweit die Behauptung oder die Voraussetzungen der zu beweisenden Aussage klar sind, da sich diesbezüglich keine Äußerungen finden lassen.

In dieser Studie wurden die Begründungen der Kinder analysiert. Die Entdeckungen der zu begründenden Aussagen wurden von der Interviewerin gelenkt. Im Rahmen ihrer Studie stellte Scholz (2010) in drei Bereichen einen Zusammenhang zwischen der Kompetenz des Vermutens und der des Beweisens fest. Dabei ist es für die Kompetenz des Beweisens anscheinend nicht nur von Bedeutung, den Zusammenhang zwischen der Voraussetzung und der Behauptung zu erkennen, sondern diesen auch selbstständig in einer Wenn-dann-Aussage formulieren zu können (vgl. Scholz 2010). Im Hinblick auf weitere Studien erscheint es daher sinnvoll, nicht nur den Begründungs-, sondern auch den Entdeckungsprozess zu analysieren. Zur Rekonstruktion von Entdeckungsprozessen steht beispielsweise ein von Meyer (2007a und b) erstelltes theoretisches Begriffsnetz zur Verfügung, das sich in dem empirischen Teil seiner Untersuchung bewährte. Mit Hilfe der Theorie der Abduktion schärfte er den Begriff der „Entdeckung“ aus. Es gilt aber ebenso, die konkrete unterrichtliche Umsetzung der Initiierung von Entdeckungs- und Begründungsprozessen in den Blick zu nehmen. So arbeiteten Meyer und Voigt (2008) beispielsweise „verschiedene Strategien und Maßnahmen heraus[…], wie Aufgaben in Schulbüchern gestellt werden (müssen), damit die Schüler mit der Entdeckung eines neuen mathematischen Satzes auch eine latente Beweisidee gewinnen“ (Meyer und Voigt 2008, S.148). In dem vorhandenen Unterrichtsmaterial für die Grundschule (vgl. Kapitel 3.2) ist es durchaus üblich, nach dem Berechnen von Beispielen zu einem Sachverhalt zunächst mit den Worten “Was fällt dir auf?“ nach der Entdeckung zu fragen, um dann zu der gegebenen Antwort mit der Frage „Warum ist das so?“ eine Begründung zu fordern. Die Antwort auf die Frage „Was fällt dir auf?“ ist dabei allerdings in den meisten Fällen keine Formulierung einer Wenn-dann-Aussage, sondern häufig die Be- oder Umschreibung der Behauptung;

also des „dann“-Teils der Aussage. Dieses Vorgehen war auch in der vorliegenden Untersuchung grundlegend. In dem Projekt PIK AS (vgl. Marx und Selter 2010) – einem Kooperationsprojekt zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Primarstufe – wurde zu dem Thema „Entdecken, Beschreiben, Begründen“ am Beispiel des Aufgabenformates „Entdeckerpäckchen“ Unterrichtsmaterial entwickelt, bei dem es Wesentlich ist, nicht nur die Voraussetzung und die Behauptung, sondern auch den Zusammenhang dieser beiden, also die Wenn-dann-Aussage, zu formulieren. Denn in der Mathematik werden „keine Sachverhalte, sondern „Wenn-dann-Aussagen“ [bewiesen]. Bewiesen wird nicht ein Sachverhalt B, sondern eine Implikation „Wenn A, dann B““ (Jahnke 2010, S.57).

Bei der **Vorgehensweise der Kinder beim Begründen** werden die Argumentationen in Teilschritten (entlang der Rechenvorschrift) von der Voraussetzung zur Behauptung unter dem Typ Vorg 1 („Argumentation in Teilschritten“) zusammengefasst. Bei dem Typ Vorg 2 („Exploration der Voraussetzungen“) werden die Voraussetzungen exploriert, um einen zielgerichteten Zusammenhang von der/den Voraussetzung/en zur Behauptung herstellen zu können. In dem Typ Vorg 3 („Exploration der Behauptung“) wird die Behauptung exploriert. Der zielgerichtete Zusammenhang auf diese wird hergestellt, indem der letzte Schritt der gegebenen Rechenvorschrift mit „abstrakten“ Zahlen durchgeführt wird. In dem Typ Vorg 4 („Direkte Abhängigkeit von Voraussetzung (2)“) wird die Behauptung in direkter Abhängigkeit von der Voraussetzung (2) gesehen. Dabei wird die Voraussetzung (1) nicht beachtet (vgl. Kapitel 5.2).

Hinsichtlich der **Art der** bei den Begründungen **verwendeten Argumente** ließen sich drei verschiedene Typen charakterisieren (Kapitel 5.3): Es werden Rechengesetze und Definitionen angewendet, die nicht explizit bezeichnet, aber mehr oder weniger ausführlich beschrieben werden (Typ Arg 1 „Rechengesetze oder Definitionen“). Bei dem Typ Arg 2 („Vorrechnen“) wird der Entstehungsprozess der Zielzahl entlang der Rechenvorschrift mit konkreten Zahlen vorgerechnet. In dem Typ Arg 3 („Teile der Voraussetzungen) werden Teile von Voraussetzungen verwendet; entweder werden Teile der Voraussetzung (1) in Beziehung mit der Behauptung gesetzt oder die Voraussetzung (2) als alleiniges Argument angesehen.

Aus diesen Analysen ergeben sich empirisch begründete Forderungen für den Unterricht. Die zu beobachtende Grundstrategie des Explorierens der Voraussetzung(en) oder der Behauptung auf der Suche nach einer erklärenden Hypothese für die entdeckte Behauptung ist in jedem Fall weiter zu unterstützen und auszubauen. Hierzu bieten sich reflexive Gespräche über (falsche oder richtige) Begründungsideen oder Begründungen an. Dabei ist das Ziel eine Argumentationskette, die mit der/den Voraussetzung/en beginnt und bei der Behauptung endet. Die einzelnen Schlüsse sollten mit mathematisch anerkannten Argumenten (wie Rechengesetzen und Definitionen) gesichert werden. Hierzu ist es notwendig, die Rechengesetze und Definitionen im Unterricht nicht nur einmalig zu thematisieren und sie dabei bewusst zu machen, sondern sie immer wieder spiralig im Unterricht aufzugreifen, damit sie bei einer Begründung angewendet werden können. Des Weiteren sollte von Beginn an Wert darauf gelegt werden, die Rechengesetze und Definitionen nicht nur zu beschreiben, zu veranschaulichen und zu erklären, sondern sie auch zu bezeichnen, damit sie sogar explizit gemacht werden können. Trotz dieser Forderung ist auch ein sensibler Umgang mit non-verbalen Äußerungen, die auf sprachlicher Ebene eine große Entlastung darstellen können, notwendig, denn z.B. das Zeigen auf konkrete Zahlen oder wichtige Stellen im Aufgabenformat kann ebenfalls (einen Teil) der Vorgehensweise oder des Argumentes enthalten. Diese Handlungen sollten im Reflexionsgespräch gewürdigt und diskutiert werden. Zudem ist es wichtig, in diesen Gesprächen darauf einzugehen, dass auch die Voraussetzung selbst in der Argumentationskette benötigt wird, sie aber nicht das alleinige Argument einer Begründung darstellt. Insgesamt wäre es erstrebenswert, die einzelnen Argumente explizit einzufordern und zu diskutieren, den Zusammenhang der Argumentationskette dabei jedoch nicht aus den Augen zu verlieren.

Ähnliche Forderungen nach expliziten, mathematischen Argumenten (die auch in narrativer Form gegeben sein dürfen) und einer zielgerichteten Argumentation von der Voraussetzung auf die Begründung stellen auch Fetzer (2011) und Ufer [u.a] (2009) an den Unterricht. Fetzer analysierte die Argumentationsweisen von Grundschulkindern und stellte bei den vier herausgearbeiteten Aspekten („einfache Schlüsse“, „substanzielle Argumentationen“, „geringe Explizität“ und „verbales und nonverbales Argumentieren“ – vgl. Kapitel 2.6) in Bezug auf die verwendeten Argumente fest, dass diese in einzelnen Schlüssen komplett fehlen können (z.B. in dem Aspekt „einfache Schlüsse“) oder die verwendeten Argumente unvollständig (z.B. in dem Aspekt „substanzielle Argumentationen“), implizit (z.B. in dem Aspekt „geringe Explizität“) oder non-verbal explizit (z.B. in dem Aspekt „verbales und non-verbales Argumentieren“) sind (vgl. Fetzer 2011). Ufer [u.a.] (2009) stellte bei der Analyse des Methodenwissens („Beweisschema“, „Beweisstruktur“ und „Beweiskette“ – vgl. Kapitel 2.6) von Schülern der Sekundarstufe I hinsichtlich des „Beweisschemas“ (Typ des verwendeten Argumentes und dessen sprachliche Darstellung) unter anderem fest, dass empirische Argumente falsch eingeschätzt und korrekte, aber narrativ formulierte Argumente abgelehnt wurden. Im Hinblick auf die „Beweisstruktur“ (Anordnung der deduktiven Schlüsse mit Beginn bei der Voraussetzung und dem Ende bei der Behauptung) wurde ein vorgegebener Zirkelschluss nur von 25% der Schüler als fehlerhaft erkannt (vgl. Ufer [u.a.] 2009).

Die von Krauthausen und Scherer (2010a) herausgearbeiteten Ebenen („beispielgebunden / arithmetisch“, „(prä)algebraische Ebene“, „Wechsel zwischen beiden Ebenen“, „Alternativen zur Unlösbarkeit“ – vgl. Kapitel 2.6) von Argumentationskompetenz zu einer problemorientierten Aufgabe des Aufgabenformates „Rechendreiecke“ finden sich zum großen Teil auch in meiner Analyse des **Umgangs mit der Allgemeingültigkeit** einer Aussage wieder. In der vorliegenden Untersuchung wurden zu diesem Aspekt die folgenden Typen charakterisiert (vgl. Kapitel 5.4): Bei dem Typ Allg 1 („Allgemeingültige Begründung“) wird die Aussage allgemeingültig begründet. Dabei werden individuelle sprachliche Formulierungen als Variablen verwendet. Die Bestätigung der Allgemeingültigkeit einer Aussage trat in zwei typischen Varianten auf: Sie erfolgte entweder durch das Berechnen vieler Beispiele oder eines Beispiels mit einer „beliebigen“ sehr großen Zahl (Typ Allg 2 – „Berechnen von Beispielen“) oder durch die Bekräftigung der Voraussetzungen (Typ Allg 3 – „Bekräftigung der Voraussetzung(en)“). In dem Typ Allg 4 („Gefühle und vage Einschätzungen“) sind keine konkreten Äußerungen hinsichtlich der Allgemeingültigkeit ersichtlich. Es werden lediglich Gefühle und vage Einschätzungen zum Ausdruck gebracht.

Die „(prä)algebraische Ebene“ bei Krauthausen und Scherer (vgl. 2010a, S.24f) beinhaltet Argumentationen mit geraden und ungeraden Zahlen. Dabei werden jedoch nicht die formalen Darstellungen 2n und 2n+1, sondern die Wörter „gerade“ und „ungerade“ oder deren Abkürzungen verwendet. Diese Ebene ist vergleichbar mit dem Typ Allg 1 der eigenen Untersuchung, in der bei der allgemeingültigen Begründung individuelle sprachliche Formulierungen als Variablen genutzt werden. Eine Zwischenstufe zwischen diesem Typ Allg 1 und dem Typ Allg 2, bei dem viele konkrete Beispiele der Aussage vorgerechnet werden, um deren Allgemeingültigkeit zu bestätigen, entspricht der „beispielgebundene / arithmetische Ebene“ bei Krauthausen und Scherer (vgl. ebd. S.23f), denn auf dieser Ebene werden ein oder mehrere Beispiele als Argumentation vorgerechnet; bei den begleitenden verbalen Erklärungen finden sich allerdings Ausdrücke, die auf eine Verallgemeinerung hinweisen (wie z.B. „it’s *always* the case…“ oder „if you have *one even, for example* 6, …“ (vgl. ebd. S.24). Unter dem „Wechsel zwischen beiden Ebenen“ (vgl. ebd. S.25f) sind die Argumentationen zusammengefasst, bei denen ein Schüler zunächst ein konkretes Beispiel vorrechnet und später eine Erklärung mit den abstrakten Begriffen „gerade“ und „ungerade“ gibt. Auch in meiner Untersuchung gab es Kinder, die ihre Begründung mit dem Vorrechnen von Beispielen begannen, später aber allgemeingültig argumentierten. (vgl. Kapitel 5.4, z.B. Transkriptausschnitte von Patrick und Vita). Diese wurden hinsichtlich ihres Endproduktes einer Begründung dem Typ Allg 1 zugeordnet.

Das Verständnis von Grundschülern, dass mathematisch allgemeingültige Argumentationen sich nicht im Vorrechnen von Beispielen erschöpfen, muss langsam wachsen. Die Erfahrungen zum Begründen und Beweisen, die Kinder mit in die Schule bringen, entsprechen eher dem naturwissenschaftlichen Zugang zum Beweisen, in dem es ausreicht, eine endliche Anzahl von Beispielen auszuprobieren, um eine Aussage zu bestätigen. Die letzte von Krauthausen und Scherer herausgearbeitete Ebene „Alternativen zur Unlösbarkeit“ (vgl. ebd. S.26ff) kommt aufgrund der anders gearteten Aufgabenstellungen in meiner Untersuchung gar nicht vor. Es ist aber interessant zu beobachten, dass in dem Typ Allg 3 die Voraussetzungen der Aussage ausdrücklich noch einmal bekräftigt werden, während bei der Suche nach alternativen Lösungen („Alternative zur Unlösbarkeit“) die Voraussetzungen der Aussage abgeändert werden.

Obwohl sich die von Akinwunmi (2013) herausgearbeiteten Kategorien von Verallgemeinerungsweisen auf die Verschriftlichung der Entdeckung und Beschreibung von mathematischen Mustern und nicht auf die Allgemeingültigkeit einer mündlichen Begründung beziehen, weisen ihre Kategorien und die in meiner Arbeit identifizierten Typen zu diesem Aspekt an einigen Stellen Gemeinsamkeiten auf: Bei meinem Typ Allg 1 („Allgemeingültige Begründung“) werden „individuelle sprachliche Formulierungen als Variablen“ (Kapitel 5.4) verwendet; in der Kategorie „Variablen“ von Akinwunmi „Wörter oder Zeichen mit Variablencharakter“ (Akinwunmi 2013, S.82). Da die Begründungen bei mir mündlich erbracht wurden, gibt es keinen Hinweis auf „Zeichen“ mit Variablencharakter, die bei Verschriftlichungen natürlich eher auftreten können. Eine weitere Gemeinsamkeit der Auffassung von Allgemeingültigkeit ist in den Kategorien „Angabe eines repräsentativen Beispiels“ und „Aufzählung mehrerer Beispiele“ von Akinwunmi (2013, S.81) und dem Typ Allg 2 („Berechnen von Beispielen“) erkennbar. In beiden Fällen geht es um ein „besonderes“ Beispiel oder mehrere Einzelbeispiele, die jeweils die Allgemeingültigkeit repräsentieren sollen. Zur Beschreibung der mathematischen Muster werden diese Beispiele z.T. nur angegeben; zur Begründung einer Aussage werden sie nicht nur angegeben, sondern auch überprüfend berechnet. Zu den Kategorien „Quasi-Variable“ und „Bedingungssätze“ wurde kein Pendant im Umgang mit der Allgemeingültigkeit bei den in meiner Studie gegebenen Begründungen gefunden.

Im Hinblick auf weiterführende Untersuchungen wäre es nicht nur interessant, das hier verwendete Design mitsamt der Forschungsfragen in der Sekundarstufe I (denkbar wäre es sogar in der Sekundarstufe II und in der Grundschullehrerausbildung in der Hochschule) durchzuführen, sondern auch, Entwicklungsforschung zum Begründen zu betreiben. So könnten beispielsweise die Entwicklungen einzelner Kinder bezüglich des Begründens analysiert werden. Gegebenenfalls sind Entwicklungsstufen hinsichtlich einzelner Aspekte zum Begründen erkennbar. Dabei wäre es reizvoll, eine solche Entwicklung durchaus längerfristig zu begleiten (auch über die Grundschulzeit hinaus).

In Bezug auf die Weiterentwicklung der Begründungsfähigkeit im Grundschulalter müssten geeignete Unterrichtskonzepte entwickelt und evaluiert werden (Eine erste Studie dazu führte Bezold (2010) durch.). Im Weiteren ist es zudem interessant, auf welche Weise die (so) entstandenen Unterrichtskonzepte auf die Sekundarstufe I übertragbar oder für diese Schulstufe fortsetzbar sind.

Es erscheint untersuchenswert, inwiefern die Begründungsfähigkeit abhängig von dem selbstständigen Entdecken ist, um diese Ergebnisse bei der Konzeption eines geeigneten Unterrichts zu berücksichtigen.

Zudem erscheint es sinnvoll, die Verbalisierungen der Begründungen von allgemeinen Aussagen eingehender in den Blick zu nehmen, da Grundschulkindern für Verallgemeinerungen noch keine Variablen zur Verfügung stehen. Im Hinblick darauf ist es interessant, welche sprachlichen oder darstellerischen Methoden Einfluss darauf haben können, dass Kinder verständlichere, ausführlichere oder allgemeinere Begründungen geben.

Begründungen werden kommuniziert. Sie müssen vorgestellt und von der Gemeinschaft akzeptiert werden. Eine solche Interaktion stellt eine große Herausforderung an die Lernenden und Lehrenden. So ist es nicht nur interessant, wie Kinder die Begründungen anderer verstehen oder inwiefern sie diese nachvollziehen können, sondern es gilt auch, die Rolle der Lehrperson in einer derartigen Interaktion zu untersuchen.

Außerdem könnte untersucht werden, inwiefern diese Phase des Vorstellens und Akzeptierens von Begründungen die Weiterentwicklung des mathematischen Wissens der Kinder in diesem Bereich beeinflusst.

In Bezug auf die Lehreraus- und -weiterbildung stellt sich die Frage, wie all diese Forschungsergebnisse sinnvoll und nachhaltig implementiert werden können.

7 Abbildungsverzeichnis

8 Literaturverzeichnis

Akinwunmi, Kathrin (2013): Mathematische Muster verallgemeinern in der Grundschule. In: Gilbert Greefrath, Friedhelm Käpnick und Martin Stein (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Münster: WTM Verlag, S. 80-83

Balacheff, Nicolas (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: David Pimm (Hg.): Mathematics, Teachers and Children. London: Hodder and Stoughton, S. 216–230.

Bardy, Peter; Hrzán, Joachim (2005): Aufgaben für kleine Mathematiker. Mit ausführlichen Lösungen und didaktischen Hinweisen. Köln: Aulis-Verlag Deubner.

Baumert, Jürgen; Bos, Wilfried; Lehmann, Rainer (Hg.) (2000): TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und natruwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Opladen: Leske und Budrich.

Baumert, Jürgen; Bos, Wilfried; Watermann, R. (1998): TIMSS/III. Schülerleistungen in Mathematik und den Naturwissenschaften am Ende der Sekundarstufe II im internationalen Vergleich. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Bell, A. W. (1976): A study of pupils' proof-explanations in Mathematical situations. In: Educational Studies in Mathematics 7, S. 23–40.

Bezold, Angela (2010): Kinder argumentieren - eine empirische Studie auf der Grundlage selbstdifferenzierender Lernangebote. In: Astrid Lindmeier und Stefan Ufer (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM Verlag, Band 1(4), S. 161–164.

Bezold, Angela (2012): Förderung von Argumentationskompetenzen auf der Grundlage von Forscheraufgaben. Eine empirische Studie im Mathematikunterricht der Grundschule. In: mathematica didactica 35, S. 73–103.

Blum, Werner; Kirsch, Arnold (1989): Warum haben nicht-triviale Lösungen von f'=f keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum "Inhaltlich-Anschaulichen Beweisen". In: Hermann Kautschitsch und Wolfgang Metzler (Hg.): Anschauliches Beweisen. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky [u.a.], S. 199–209.

Boero, Paolo (1999): Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. In: International Newsletter of the Teaching and Learning of Mathematical Proof (7/8).

Boero, Paolo (2007): Theorems in school: An introduction. In: Paolo Boero (Hg.): Theorems in School. From History, Epistemology an Cognition to Classroom Practice, S. 19–26.

Branford, Benchara (1913): Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität. Leipzig, Berlin: Teubner.

Bürger, Heinrich (1979): Beweisen im Mathematikunterricht - Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II. In: Dörfler und Fischer (1979), S.103-134

Cramer, Julia (2010): Induktion durch vollständiges Zeigen. Schlussweisen in Argumentationsprozessen. In: Astrid Lindmeier und Stefan Ufer (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM Verlag, S. 229–232.

de Villiers, Michael (1990): The Role and the Function of Proof in Mathematics. In: Pythagoras (24), S. 17–24.

Dörfler, Willibald; Fischer, Roland (Hg.) (1979): Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für "Didaktik der Mathematik" von 26.9. bis 29.9.1978 in Klagenfurt. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky

Eco, Umberto (1985): Hörner, Hufe, Sohlen. Einige Hypothesen zu drei Abduktionstypen. In: Umberto Eco (Hg.): Der Zirkel oder im Zeichen der Drei. Dupin, Holmes, Pierce. München: Fink, S. 288–320.

Fetzer, Marei (2011): Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. In: Journal für Mathematik-Didaktik 32, S. 27–51.

Freudenthal, Hans (1979): Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht. In: Dörfler und Fischer (1979), S. 183–200.

Gerster, Hans-Dieter (1972): Aussagenlogik, Mengen, Relationen. Freiburg i.Br. [u.a.]: Herder

Glaser, Barney; Strauss, Anselm L. (1998): Grounded Theory. Strategien qualitativer Forschung. Bern: Huber.

Hanna, Gila (1989a): More than Formal Proof. In: For the learning of mathematics 9 (1), S. 20–23.

Hanna, Gila (1989b): Proofs that Prove and Proofs that Explain. In: G. Vergnaud, J. Rogalski und M. Artique (Hg.): Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Paris, S. 45–51.

Hanna, Gila (1997): The Ongoing Value of Proof. In: Journal für Mathematik-Didaktik 18, S. 171–185.

Hanna, Gila (2005): A Brief Overview of Proof, Explanation, Exploration and Modelling. In: Hans-Wolfgang Henn und Gabriele Kaiser (Hg.): Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festschrift für Werner Blum. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 139–151.

Hanna, Gila; Jahnke, Hans Niels (1996): Proof and Proving. In: Alan Bishop u.a. (Hg.): International Handbook of Mathematics Education. Dodrecht: Kluwer Academic Publishers, S. 877–908.

Hartmann, Mutfried; Loska, Rainer (2004): Übungsformate ausloten - Strukturen erkennen. Das Zauberdreieck erneut betrachtet. In: Günter Krauthausen und Petra Scherer (Hg.): Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik - Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung. Festschrift für Hartmut Spiegel. Donauwörth: Auer, S. 57–66.

Healy, Lulu; Hoyles, Celia (1998): Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report On the Nationwide Survey. London: Institute of Education, University of London.

Hefendehl-Hebeker, Lisa; Hußmann, Stephan (2003): Beweisen - Argumentieren. In: Timo Leuders (Hg.): Mathematik Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Skriptor, S. 93–106.

Heinze, Aiso (2010): Mathematicians' Individual Criteria für Accepting Theorems and Proofs: An Empirical Approach. In: Gila Hanna, Hans Niels Jahnke und Helmut Pulte (Hg.): Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives. New York: Springer Science+Business Media LLC, S. 101–111.

Heinze, Aiso; Kessler, Stephan; Kuntze, Sebastian; Lindmeier, Anke; Moormann, Marianne; Reiss, Kristina; Rudolph-Albert, Franziska; Zöttl; Luzia (2007): Kann Paul besser argumentieren als Marie? Betrachtungen zur Beweiskompetenz von Mädchen und Jungen aus differentieller Perspektive. In: Journal für Mathematik-Didaktik 28, S. 148–167.

Heinze, Aiso; Reiss, Kristina (2003): Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. Hg. v. Maria. A. Mariotti (International Newsletter of Proof, 4-6). Online verfügbar unter http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf, zuletzt geprüft am 13.01.2014.

Heinze, Aiso; Reiss, Kristina (2004): The teaching of proof at the lower secondary level - a video study. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 36 (3), S. 98–104.

Hellmich, Frank; Hartmann, Jens; Reiss, Kristina (2002): Bedingungen für das Argumentieren und Begründen im Geometrieunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 231–234.

Hennes, Clemens; Schmidt, Siegbert (1981): Beweisstrategien und Denkmuster von Hauptschülern beim Begründen mathematischer Aussagen. In: Journal für Mathematik-Didaktik 2, S. 321–350.

Hennes, Clemens; Schmidt, Siegbert (1982): Logisches Schließen bei Hauptschülern gegen Ende ihrer Schulzeit. In: Journal für Mathematik-Didaktik 3, S. 145–171.

Hyde, J. S. (2005): The Gender Similarities Hypothesis. In: American Psychologist 60 (6), S. 581–592.

Jahnke, Hans Niels (2010): Zur Genese des Beweisens. In: Astrid Lindmeier und Stefan Ufer (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM Verlag, S. 51–58.

Jungwirth, Helga (2003): Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik - ein Überblick für Irrgäste, Teilzieher und Standvögel. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 35 (5), S. 189–200.

Käpnick, Friedhelm (2003): Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr. Berlin: Volk und Wissen.

Kelle, Udo; Kluge, Susann (2010): Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung. 2., überarbeitete Auflage. Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Kirsch, Arnold (1979): Beispiele für "prämathematische" Beweise. In: Dörfler und Fischer (1979), S. 261–274.

Klein, Wolfgang (1980): Argumentation und Argument. In: Zeitschrift für Literaturwissenschaft und Linguistik (38/39), S. 9–57.

Kluge, Susann (1999): Empirisch begründete Typenbildung. Zur Konstruktion von Typen und Typologien in der qualitativen Sozialforschung. Opladen: Leske und Budrich.

Kluge, Susann (2000): Empirisch begründete Typenbildung in der qualitativen Sozialforschung. In: Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research 1 (1, Art. 14). Online verfügbar unter http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs0001145, zuletzt geprüft am 13.01.2014.

KMK - Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hg.) (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003. München: Wolters Kluwer Deutschland GmbH.

KMK - Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hg.) (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Wolters Kluwer Deutschland GmbH.

Knipping, Christine (2003): Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis. Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich. Hildesheim u.a: Franzbecker

Krauthausen, Günter (1995): Zahlenmauern im 2. Schuljahr - ein substantielles Übungsformat. In: Grundschulunterricht (10), S. 5–9.

Krauthausen, Günter (1998a): Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Grundschulzeitschrift (119), S. 54–61.

Krauthausen, Günter (1998b): Lernen - Lehren - Lehren lernen. Zur mathematik-didaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe. Leipzig: Klett Grundschulverlag

Krauthausen, Günter (2001): "Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat". In: Werner Weiser und Bernd Wollring (Hg.): Beiträge zur Didaktik der Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt. Hamburg: Kovac Verlag, S. 99–113.

Krauthausen, Günter (2006): Minusmauern - ein variiertes Aufgabenformat. In: Praxis Grundschule (1), S. 6–8.

Krauthausen, Günter; Scherer, Petra (2010a): Natural Differentiation in Mathematics (NaDiMa). Theoretical Background and Selected Arithmetical Learning Environments. In: B. Maj, E. Swoboda und K. Tatsis (Hg.): Motivation via Natural Differentiation in Mathematics. Rzeszow: University of Rzeszow, S. 11–37.

Krauthausen, Günter; Scherer, Petra (2010b): Heterogenität, Differenzierung, Individualisierung - Hintergründe des EU-Projektes NaDiMa (Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht). In: Astrid Lindmeier und Stefan Ufer (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM Verlag, S. 505–508.

Krummheuer, Götz (1997): Narrativität und Lernen. Mikrosoziologische Studien zur sozialen Konstitution schulischen Lernens. Weinheim: Deutscher Studien-Verlag.

Krumsdorf, Julian (2009): Beispielgebundenes Beweisen. In: Michael Neubrand (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster: WTM Verlag, S. 711–714.

Krumsdorf, Julian (2011): Sprachliche Aspekte beispielgebundenen Beweisens. In: Reinhold Haug und Lars Holzäpfel (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM Verlag, S. 499–502.

Kultusministerium des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg.) (1985): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule. Mathematik. Frechen: Ritterbach

Kuntze, Sebastian (2003): Wie beteiligen Lehrer ihre Schüler an Beweisen im Geometrieunterricht? Erste Ergebnisse einer Auswertung videografierter Unterrichtsstunden. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2003. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 373–376.

Lakatos, Imre (1979): Beweise und Widerlegungen. Braunschweig [u.a.]: Vieweg.

Lamnek, Siegfried (2005): Qualitative Sozialforschung. Lehrbuch. 4., vollständig überarbeitete Auflage. Weinheim, Basel: Beltz, PVU.

Long, Robert L. (1986): Remarks on the History and Philosophy of Mathematics. In: The American Mathematical Monthly 93, S. 609–619.

Marx, Andreas; Selter, Christoph (2010): PIK AS - Ein Projekt zur Unterstützung der Unterrichtsentwicklung. In: Astrid Lindmeier und Stefan Ufer (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM Verlag, S. 585-588

Meyer, Michael (2007a): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Meyer, Michael (2007b): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht - Zur Rolle der Abduktion und des Arguments. In: Journal für Mathematik-Didaktik 28, S. 286–310.

Meyer, Michael; Voigt, Jörg (2008): Entdecken mit latenter Beweisidee - Analyse von Schulbuchseiten. In: Journal für Mathematik-Didaktik 29, S. 124–151.

Mittelstraß, Jürgen (Hg.) (2005): Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Stuttgart, Weimar: Metzler.

Mormann, Thomas (1981): Argumentieren, Begründen, Verallgemeinern. Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Königsstein: Scriptor.

MSW - Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg.) (2008): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Frechen: Ritterbach.

MSJK - Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg.) (2003): Kernlehrplan für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Frechen: Ritterbach.

MSJK - Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg.) (2004): Kernlehrplan für die Realschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Frechen: Ritterbach.

Müller, Horst (1995): Zur Komplexität von Beweisen im Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik 16, S. 47–77.

NCTM - National Council Of Teachers of Mathematics (2000): Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Öhlschläger, Günther (1977): Über das Argumentieren. In: Michael Schecker (Hg.): Theorie der Argumentation. Tübingen: TBL-Verlag Narr, S. 11–25.

Ottmers, C. (2007): Rhetorik. Stuttgart: Metzler.

Polya, George (1954): Mathematics and Plausible Reasoning. Induction and Analogy in Mathematics. Princeton: Princeton University Press.

Pólya, George (1962): Mathematik und Plausibles Schließen. Band 1. 2. Auflage. Basel: Birkhäuser.

Reiss, Kristina (2002a): Beweisen, Begründen und Argumentieren. Wege zu einem diskursiven Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 39–46.

Reiss, Kristina (2002b): Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematik-unterricht. Projektserver Sinus. Bayreuth: Universität. Online verfügbar unter http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/59/beweis.pdf, zuletzt geprüft am 13.01.2014.

Reiss, Kristina; Heinze, Aiso (2000): Begründen und Beweisen im Verständnis von Abiturienten. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2000. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 520–523.

Reiss, Kristina; Heinze, Aiso (2001): Aspekte des Wissensaufbaus beim Argumentieren, Begründen und Beweisen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001. Hildesheim: Franzbecker, S. 500–503.

Reiss, Kristina; Hellmich, Frank; Thomas, Joachim (2002): Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In: Manfred Prenzel und Jörg Doll (Hg.): Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen. 45. Beiheft der Zeitschrift für Pädagogik. Weinheim: Beltz, S. 51–64.

Reiss, Kristina; Klieme, Eckhard; Heinze, Aiso (2001): Perequisites for the Understanding of Proofs in the Geometry Classroom. In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (Hg.): Proceedings of the 25th Conference for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht: Utrecht University (Volume 4), S. 97–104.

Reiss, Kristina; Thomas, Joachim (2000): Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe. In: mathematica didactica 23 (1), S. 96–112.

Rinkens, Hans-Dieter; Hönisch, Kurt (Hg.) (2004): Welt der Zahl 4. Braunschweig: Schrödel Schulbuchverlag.

Russell, Bertrand; Whitehead, Alfred North (1963): Principia Mathematica. Volume I. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press

Scherer, Petra (1996): Zahlenketten. Entdeckendes Lernen im 1. Schuljahr. In: Grundschulzeitschrift (96), S. 20–23.

Scherer, Petra (1997a): Substantielle Aufgabenformate - jahrgangsübergreifende Beispiele für den Mathematikunterricht. Teil I. In: Grundschulunterricht (1), S. 34–38.

Scherer, Petra (1997b): Substantielle Aufgabenformate - jahrgangsübergreifende Beispiele für den Mathematikunterricht. Teil II. In: Grundschulunterricht (4), S. 36–38.

Scherer, Petra (1997c): Substantielle Aufgabenformate - jahrgangsübergreifende Beispiele für den Mathematikunterricht. Teil III. In: Grundschulunterricht (6), S. 54–56.

Scherer, Petra (2006): Rechendreiecke - Vertiefende Übungen zum Einmaleins. In: Grundschule (1), S. 40–43.

Scherer, Petra; Krauthausen, Günter (2010): Ausgestaltung und Zwischenergebnisse des EU-Projektes NaDiMa (Partner Deutschland). In: Astrid Lindmeier und Stefan Ufer (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM Verlag, S. 735–738.

Scherer, Petra; Selter, Christoph (1996): Zahlenketten - ein Unterrichtsbeispiel für natürliche Differenzierung. In: Mathematische Unterrichtspraxis (2), S. 21–28.

Scholz, Mareike (2010): Argumentationskompetenz von Mittelstufenschülern. Eine qualitative Studie zum Vermuten und Beweisen zum Ende der Sekundarstufe I. Paderborn: unveröffentlichte Staatsexamensarbeit. Betreuer: Prof. Dr. Peter Bender

Schwarzkopf, Ralph (2000): Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien. Hildesheim: Franzbecker.

Schwarzkopf, Ralph (2001): Argumentationsanalysen im Unterricht der frühen Jahrgangsstufen - eigenständiges Schließen mit Ausnahmen. In: Journal für Mathematik-Didaktik 22, S. 253–276.

Schwarzkopf, Ralph (2003): Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. In: Journal für Mathematik-Didaktik 24, S. 211–235.

Selter, Christoph (1997): Entdecken und Üben mit Rechendreiecken. Eine substanzielle Übungsform für den Mathematikunterricht. In: Friedrich Jahresheft 1997, S. 88–90.

Selter, Christoph (2004): Zahlengitter - eine Aufgabe, viele Variationen. In: Grundschulzeitschrift (177), S. 42–45.

Semadeni, Zbigniew (1984): Action Proofs in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training. In: For the learning of mathematics 4 (1), S. 32–34.

Stein, Martin (1988): Beweisfähigkeiten und Beweisvorstellungen von 11-13jährigen Schülern. In: Journal für Mathematik-Didaktik 9, S. 31–53.

Stein, Martin (1999): Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: logisches Denken und Argumentieren. In: Journal für Mathematik-Didaktik 20, S. 3–27.

Steinbring, Heinz (1995): Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da! In: Gerhard N. Müller und Erich Ch. Wittmann (Hg.): Mit Kindern rechnen, Bd. 96. Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule - Der Grundschulverband - e.V. (Beiträge zur Reform der Grundschule, 96), S. 225–239.

Steinbring, Heinz (1997): Beziehungsreiches Üben - ein arithmetisches Problemfeld. In: mathematik lehren (83), S. 59–63.

Steinbring, Heinz (2000): Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion - Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. In: Journal für Mathematik-Didaktik 21, S. 28–49.

Strauss, Anselm L.; Corbin, Juliet M. (1996): Grounded theory. Grundlagen qualitativer Sozialforschung. Weinheim: Beltz.

Toulmin, Stephen Edelston (1975): Der Gebrauch von Argumenten. Kronberg: Scriptor.

Toulmin, Stephen Edelston (1996): Der Gebrauch von Argumenten. 2. Auflage. Weinheim: Beltz.

Toulmin, Stephen Edelston (2003): The uses of argument. Updated edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Ufer, Stefan; Heinze, Aiso; Kuntze, Sebastian; Rudolph-Albert, Franziska (2009): Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von

Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. In: Journal für Mathematik-Didaktik 30 (1), S. 30–54.

Vollrath, Hans-Joachim (1980): Eine Thematisierung des Argumentierens in der Haupschule. In: Journal für Mathematik-Didaktik 1, S. 28–41.

Winter, Heinrich (1975): Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 3, S. 106–116.

Winter, Heinrich (1983): Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. In: Journal für Mathematik-Didaktik 4, S. 59–95.

Wittmann, Erich Ch. (1995): Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1995. Hildesheim: Franzbecker, S. 528–531.

Wittmann, Erich Ch.; Müller, Gerhard N. (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: Peter Bender (Hg.): Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. Berlin: Cornelsen, S. 237–257.

Wittmann, Erich Ch.; Müller, Gerhard N. (1992): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Ernst Klett Schulbuchverlag GmbH.

Wittmann, Erich Ch.; Müller, Gerhard N.; Berger, Albert [u a] (2005): Das Zahlenbuch 4. Leipzig: Klett Grundschulverlag.

Witzel, Andreas (1982): Verfahren der qualitativen Sozialforschung. Überblick und Alternativen. Frankfurt: Campus.

Witzel, Andreas (1985): Das problemzentrierte Interview. In: Gerd Jüttemann (Hg.): Qualitative Forschung in der Psychologie. Grundfragen, Verfahrensweisen, Anwendungsfelder. Weinheim: Beltz, S. 227–256.

Witzel, Andreas (2000): Das problemzentrierte Interview. In: Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research 1 (1, Art. 22). Online verfügbar unter http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs0001228, zuletzt geprüft am 13.01.2014.

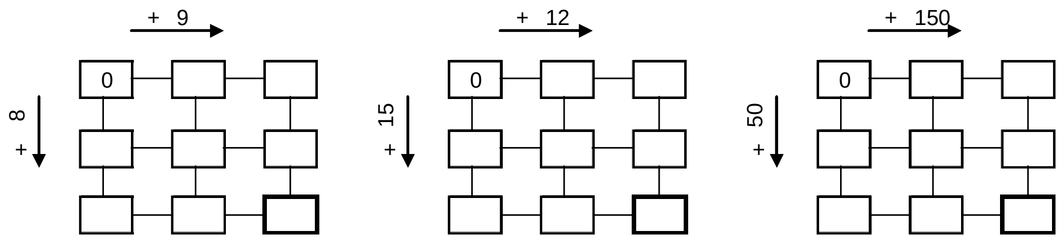
Yackel, Erna; Cobb, Paul (1994): The Development of Young Children's Understanding of mathematical Argumentation. In: Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.

9 Anhang

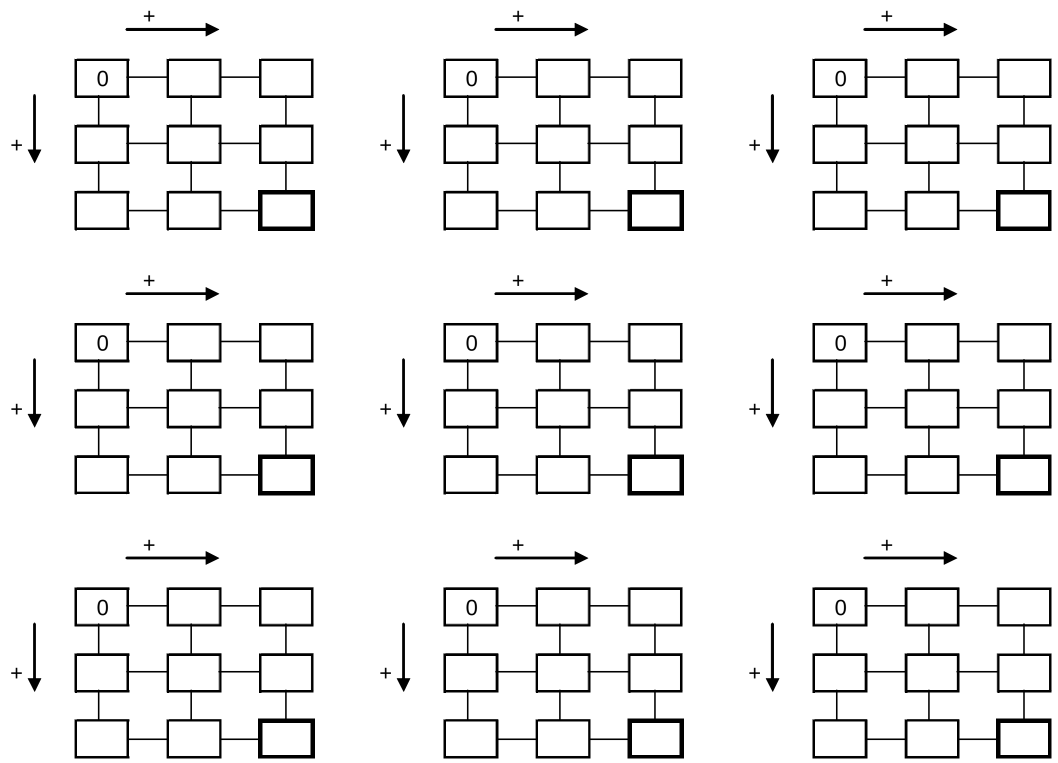
Anhang A: Zahlengitter – Arbeitsblatt 1 (Aufbau und Regeln)

Name: ______________________________ Datum: ______________

Berechne diese Zahlengitter.



Denke dir selbst Zahlengitter aus.
Kontrolliere anschließend mit deinem Partner.



Anhang B: Zahlengitter - Arbeitsblatt 2 (Ausfüllen von Zahlengittern)

Name: ______________________________ Datum: ______________

Fülle diese Zahlengitter aus.
Wie gehst du dabei vor?

0	3	6
12		
24		

0	9	
	20	
22	31	

0		
8	13	
16	21	

0		8
		15
14		

0		
10	18	26

0		
	19	
26	32	

0	7	
10		

0		
8		
	28	

0		
15		35

0		22
		28

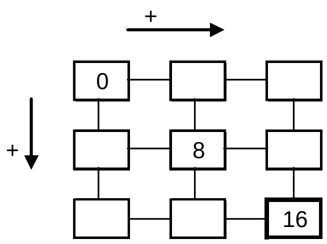
0		
30		70

0		
		12
	16	

Anhang C: Zahlengitter - Arbeitsblatt 3 (Anzahl der Lösungsmöglichkeiten)

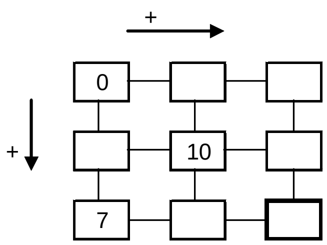
Name: ______________________________ Datum: ______________

Wie viele Lösungen findest du jeweils?
Warum sind es so viele?



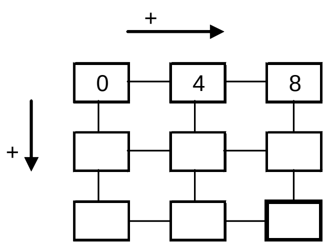
(1) Es gibt ______ Lösungen.
Warum sind es so viele?

____
____
____
____



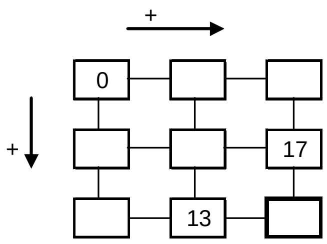
(2) Es gibt ______ Lösungen.
Warum sind es so viele?

____
____
____
____



(3) Es gibt ______ Lösungen.
Warum sind es so viele?

____
____
____
____



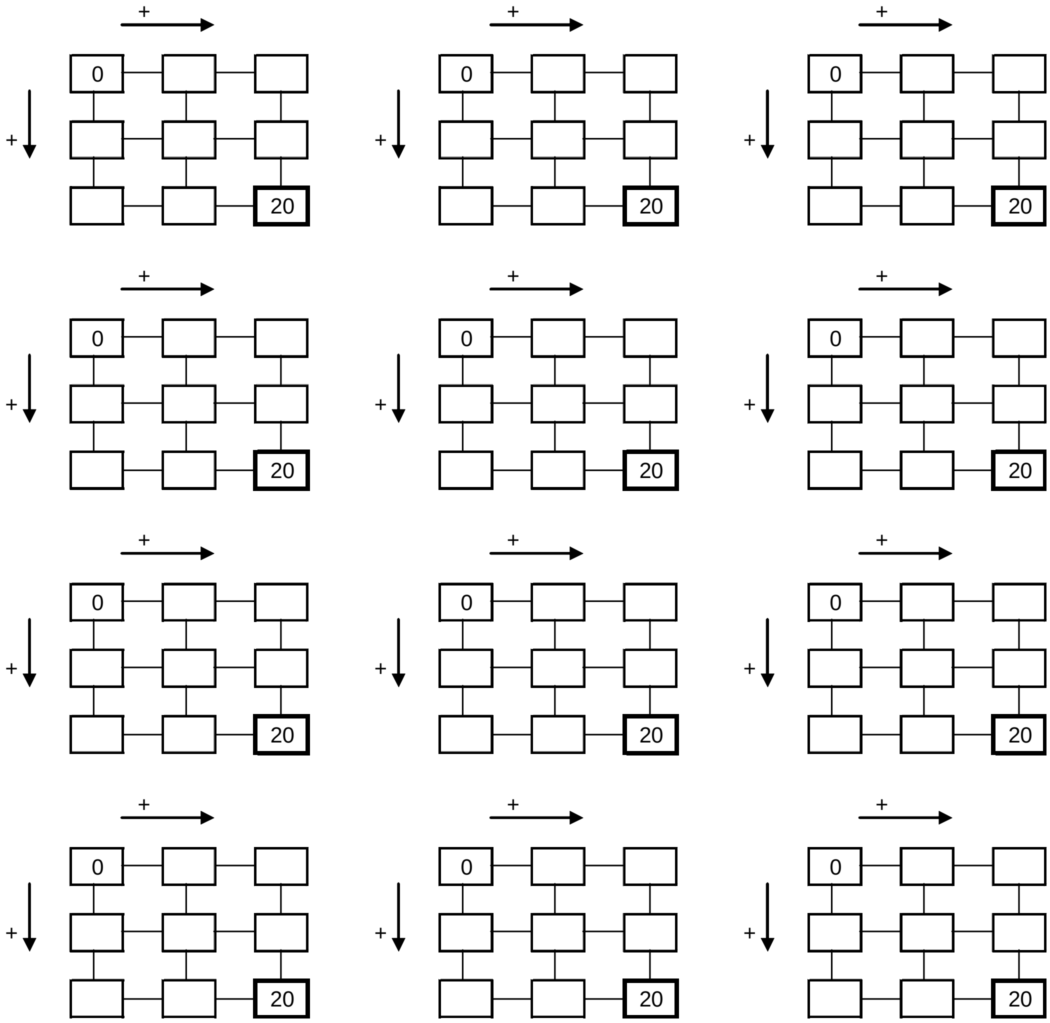
(4) Es gibt ______ Lösungen.
Warum sind es so viele?

____
____
____
____

Anhang D: Zahlengitter - Arbeitsblatt 4 (Zielzahl 20)

Name: ______________________________ Datum: ______________

Finde alle Zahlengitter mit der Zielzahl 20!



Warum sind das alle Zahlengitter mit Zielzahl 20?

____

____

____

____

____

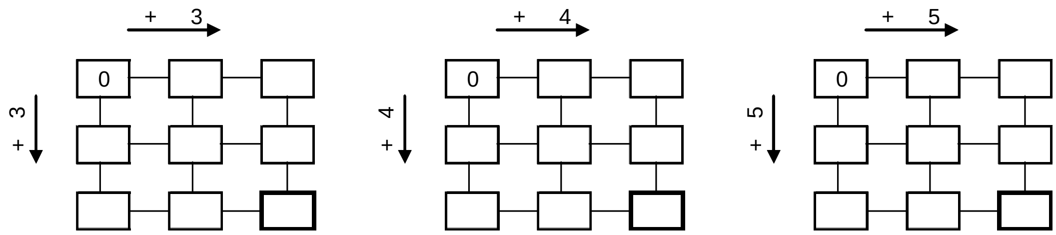
____

Anhang E: Zahlengitter - Arbeitsblatt 5 (Gleiche Pluszahlen)

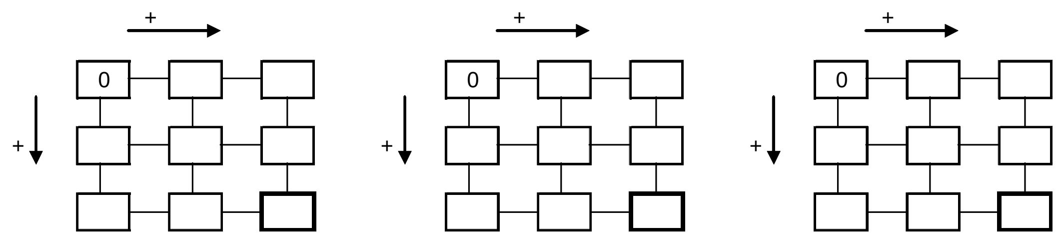
Name: ______________________________ Datum: ______________

Alle Zahlengitter haben dieselbe waagerechte und senkrechte Pluszahl!

Berechne diese Zahlengitter.



Berechne andere Zahlengitter mit gleichen Pluszahlen.



Was fällt dir auf?

____

____

____

Vergleiche jeweils die Pluszahlen mit den Zielzahlen.
Was fällt dir auf?

____

____

____

Warum ist das so?

____

____

____

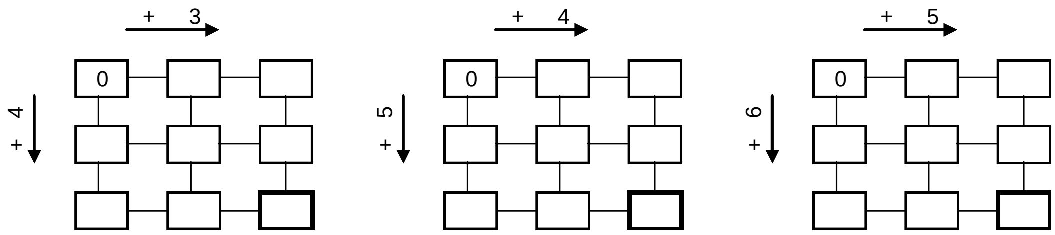
____

Anhang F: Zahlengitter - Arbeitsblatt 6 (Benachbarte Pluszahlen)

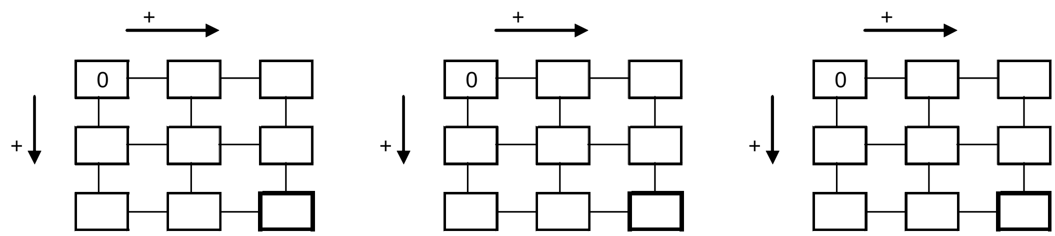
Name: ______________________________ Datum: ______________

Alle Zahlengitter haben benachbarte Pluszahlen!
Die kleinere der beiden Zahlen ist die waagerechte Pluszahl.

Berechne diese Zahlengitter.



Berechne andere Zahlengitter mit benachbarten Pluszahlen.



Vergleiche jeweils die Pluszahlen mit den Zielzahlen.
Was fällt dir auf?

____

____

____

____

Warum ist das so?

____

____

____

____

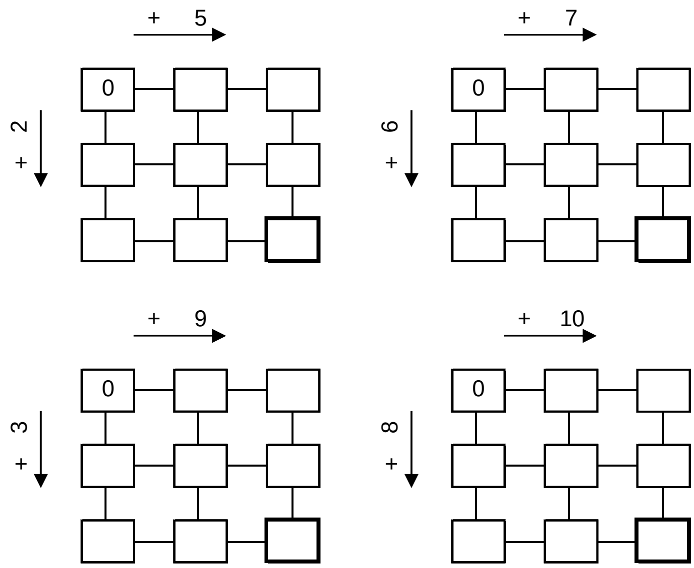
____

____

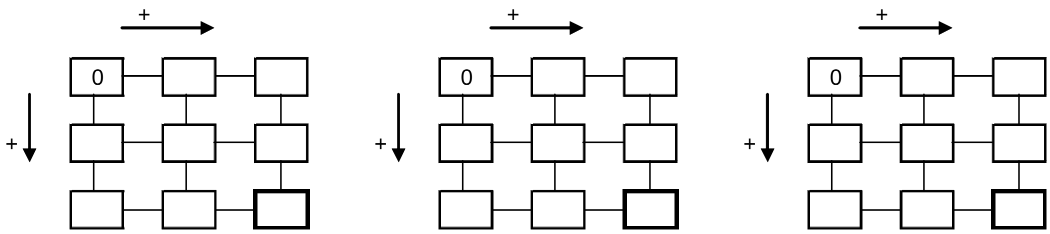
Anhang G: Zahlengitter - Arbeitsblatt 7 (Pluszahl verändern)

Name: ______________________________ Datum: _____________

Berechne jeweils zuerst das vorgegebene Zahlengitter.
Schreibe dann in rot das Zahlengitter darüber, das du erhältst, wenn du die waagerechte Pluszahl um 1 erhöhst. Die senkrechte Pluszahl bleibt gleich.



Probiere es an eigenen Zahlengittern aus.



Wie verändern sich die Zielzahlen?

____

____

____

Warum ist das so?

____

____

____

Anhang H: Zahlenketten – Arbeitsblatt 1 (Aufbau und Regeln)

Name: ____________________________ Datum: _____________

Berechne diese Zahlenketten.

20	34			
47	53			
31	16			
52	4			
0	17			

Denke dir selbst Zahlenketten aus.
Kontrolliere anschließend mit deinem Partner.

Anhang I: Zahlenketten - Arbeitsblatt 2 (Ausfüllen von Zahlenketten)

Name: ____________________________ Datum: _____________

Fülle diese Zahlenketten aus.
Wie gehst du dabei vor?

5		21		
	35	37		
	16		40	
13		13		
		43	56	
	18		28	
		34		80
		52		104
			37	56
			7	56

____

____

____

____

____

____

____

____

Anhang J: Zahlenketten - Arbeitsblatt 3 (Anzahl der Lösungsmöglichkeiten)

Name: ____________________________ Datum: _____________

Wie viele Lösungen findest du jeweils? Warum sind es so viele?

	21		48	

Es gibt ______ Lösungen. Warum sind es so viele?

____

____

____

		10		

Es gibt ______ Lösungen. Warum sind es so viele?

____

____

____

	10			

Es gibt ______ Lösungen. Warum sind es so viele?

____

____

____

13		11		

Es gibt ______ Lösungen. Warum sind es so viele?

____

____

____

Anhang K: Zahlenketten - Arbeitsblatt 4 (Zielzahl 60)

Name: ____________________________ Datum: _____________

Finde alle Zahlenketten mit der Zielzahl 60!

				60
				60
				60
				60
				60
				60
				60
				60
				60
				60
				60
				60

Warum sind das alle Zahlenketten mit Zielzahl 60?

____

____

____

____

____

____

____

Anhang L: Zahlenketten - Arbeitsblatt 5 (Gleiche Startzahlen)

Name: ____________________________ Datum: _____________

Alle Zahlenketten haben dieselben Startzahlen!

Berechne diese Zahlenketten.

3	3			
4	4			
5	5			

Berechne andere Zahlenketten mit gleichen Startzahlen.

Was fällt dir auf?

Vergleiche jeweils die Startzahlen mit den Zielzahlen.
Was fällt dir auf?

Warum ist das so?

Anhang M: Zahlenketten - Arbeitsblatt 6 (Startzahlen vertauschen)

Name: ____________________________ Datum: _____________

Bei diesen Zahlenketten sind die Startzahlen jeweils vertauscht worden.

2	5			
5	2			

8	9			
9	8			

6	11			
11	6			

Berechne andere Zahlenketten, bei denen du die Startzahlen vertauscht.

Vergleiche jeweils die Startzahlen mit den Zielzahlen.
Was fällt dir auf?

____

____

____

Warum ist das so?

____

____

____

Anhang N: Zahlenketten - Arbeitsblatt 7 (Startzahl verändern)

Name: ______________________________ Datum: ______________

Berechne jeweils zuerst die vorgegebene Zahlenkette.
Schreibe dann in rot die Zahlenkette darüber, die du erhältst, wenn du die 1. Startzahl um 1 erhöhst. Die 2. Startzahl bleibt gleich.

4	6			
7	10			
15	20			

Probiere es an eigenen Zahlenketten aus.

Wie verändern sich die Zielzahlen?

Warum ist das so?