Ziehen und Beweisen mit DGS

Welche Beweiskraft haben für Studierende die Erkenntnisse, die sie im Zugmodus gewinnen?

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

für das Fach Mathematik und ihre Didaktik

vorgelegt von

Gerda Werth, geb. in Fürstenau, Kreis Höxter

Paderborn, 2014

Zusammenfassung

Seit der Weltpremiere von Cabri Géomètre 1988 hat sich die Software für Dynamische Geometrie (DGS) als hilfreiches Werkzeug beim Treiben von Elementargeometrie etabliert. Von Anfang an ging es selbstredend auch um das Lehren und Lernen von Geometrie mit DGS. Hierbei hegte man hohe Erwartungen an das heuristische Potenzial beim Problemlösen, bei der induktiven Satzfindung usw. In der vorliegenden Arbeit gehe ich zwei Forschungsfragen nach: (i) Wie wirkt sich DGS auf das Beweisverständnis der Lernenden aus? (ii) Wie verwenden sie den Zugmodus, und welchen kognitiven Nutzen ziehen sie aus diesem? Bei meinen Lernenden handelte es sich um Studierende des Grund- und des Hauptschullehramts an der Universität Paderborn, deren Umgang mit der DGS ich im Rahmen eines teilstandardisierten Interviews nach Mayring beobachtete, um anschließend die Transkripte mit der Methode der Objektiven Hermeneutik nach Oevermann auszuwerten. Es ergaben sich folgende Befunde: (i) Wer überhaupt ein unangemessenes Verständnis vom Wesen mathematischer Beweise hat, neigt zum Glauben an eine - bekanntlich nicht vorhandene - Beweiskraft der DGS. (ii) Wer im Umgang mit dem Zugmodus unerfahren ist, hat oft ausgeprägte handwerkliche kognitive (!) Probleme mit diesem. Insgesamt werden entsprechende frühere Untersuchungen bestätigt, nach denen das unbestritten vorhandene didaktische Potenzial der DGS sich beim Geometrietreiben keineswegs von selbst realisiert.

Abstract

Since the appearance of the computer geometry program Cabri Géomètre in 1988, Dynamic Geometry Environments (DGE) have shown themselves to be useful tools for doing work in elementary geometry. From the beginning, it has been clear that these were tools for the teaching and learning of geometry as well. Thus, high expectations surrounded their heuristic potential to aid in problem solving, for inductive proofs, etc. In this thesis, I am investigating two research questions: (i) What are the effects of DGE on a learner's understanding of geometrical proofs? (ii) How do they use the drag mode and what cognitive benefit do they obtain from their use of it? The learners for this study were mathematics teacher students at the University of Paderborn. Their interaction with the DGE was observed and recorded within the framework of semi-structured interviews according to MAYRING; afterwards the transcriptions from the interviews were evaluated based on the principles of Objective Hermeneutics according to OEVERMANN. The results found were the following: (i) Those students with an inappropriate understanding of the nature of a mathematical proof tend to believe in an implicit ability of the DGE to prove statements - an ability which is known to be non-existent. (ii) Those students with little or no experience with the drag mode display technical cognitive (!) problems in using it. In general, the results of earlier studies have been confirmed, according to which the undeniable didactic potential of DGE will in no way realize by itself.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

> „Auch ist gerade dies für den Menschen am schwersten zu erkennen: das am meisten Allgemeine; denn es liegt am entferntesten von den Sinneswahrnehmungen“ (ARISTOTELES 1995)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Einsatz von Dynamische Geometrie Software in der Elementargeometrie, im weiteren abgekürzt als DGS. In der Literatur wird DGS zum Teil auch mit „Dynamische Geometrie Systeme“ gleichgesetzt, beispielsweise bei HISCHER (2002). Im Grunde genommen sind beide Sprachgebräuche nicht ideal, da nicht die Software oder das System dynamisch ist, sondern allenfalls die Geometrie. Und auch die Geometrie ist nicht im eigentlichen Sinne dynamisch, weil keine physikalischen Kräfte wirken, sondern beweglich, so dass die korrekte Terminologie „Software für bewegliche Geometrie“ lauten müsste. Wenn ich im weiteren Verlauf der Arbeit nur noch die Abkürzung „DGS“ verwende, wäre es mir am liebsten, der Leser und die Leserin würde dies mit der letztgenannten Deutung verbinden.

Für die Untersuchung habe ich Studierende der Universität Paderborn, die das Fach Mathematik auf das Lehramt Grund- bzw. Haupt-, Real- und Gesamtschule der entsprechenden Jahrgangsstufen (G bzw. HRG) studieren, beim Bearbeiten von Geometrieaufgaben unter Verwendung von DGS beobachtet und anschließend zu ihren Einschätzungen bezüglich des Einsatzes des Programms befragt. Die in diesem Zusammenhang zentralen Fragestellungen nehmen einerseits den Spannungsbogen zwischen dynamischer (eigentlich: beweglicher, s.o.) Visualisierung, Beweisvorstellungen und Beweisbedürfnis in den Fokus, andererseits den Einsatz des Zugmodus, der ja eines der prägnantesten Merkmale einer DGS ist.

In den Kernlehrplänen des Landes Nordrhein-Westfalen für das Unterrichtsfach Mathematik ist für die Schulformen Realschule, Gymnasium und Gesamtschule der Einsatz von DGS vorgeschrieben. So wird beispielsweise im Kernlehrplan für die Realschule unter der prozessbezogenen Kompetenz „Medien und Werkzeuge verwenden“ formuliert: „Sie [die Schülerinnen und Schüler, G.W.] setzen situationsangemessen den Taschenrechner ein und nutzen Geometriesoftware, Tabellenkalkulation und Funktionenplotter zum Erkunden inner- und außermathematischer Zusammenhänge“ (MSW 2004, S.14). Der Wortlaut im Kernlehrplan für Gymnasien ist gleichlautend (MSW 2007, S.20). Lediglich im Kernlehrplan für die Hauptschule wird der Einsatz nur fakultativ formuliert, und dies auch nur für den mittleren Scbulabschluss: „Die Schülerinnen und Schüler **sollen** Dynamische-Geometrie-Software zur Bearbeitung mathematischer Situationen nutzen **können**“ (MSW 2011, S.20).

An der Universität Paderborn wird die Erstsemesterveranstaltung „Elemente der Geometrie“, die Pflichtveranstaltung für Studierende des Lehramts Grundschule und HRG ist, seit dem Wintersemester 1998 mit Einsatz von DGS gelesen. Dabei kommt die Software Cinderella 1.4 sowohl in der wöchentlichen zweistündigen Vorlesung als auch im Übungsbetrieb, der im Computerraum stattfindet, zum Einsatz (für einen Überblick über die im deutschsprachigen Raum vorwiegend genutzen DGS siehe Hattermann & Strässer (2006)). Aufgrund der Forderungen der Kernlehrpläne sollte eigentlich davon ausgegangen werden können, dass die Studierenden bereits Erfahrungen im Umgang mit DGS haben, eine Einschätzung, die beispielsweise Haug (2012, S.55) teilt: „Der Einsatz dynamischer Geometriesysteme (DGS) im Mathematikunterricht ist inzwischen weitgehend gebräuchlich.“ Bei den in meiner Studie befragten Probanden ist dies allerdings nicht der Fall gewesen. Stattdessen gaben viele an, in der genannten Vorlesung erstmals in Kontakt mit einer DGS getreten zu sein.

Die Forschungslage über den Einsatz von DGS im Unterricht ist recht gut. Als Beispiel hierfür seien, um nur einige zu nennen, die Arbeiten von Laborde (1993), Hölzl (1994), Hölzl (1999), Henn (2001) und Arzarello *et al.* (2002) genannt. Das Problem allerdings ist, dass in den wissenschaftlich untersuchten Unterrichtssequenzen die DGS unter sehr unterschiedlichen Voraussetzungen und Bedingungen eingesetzt wurde, wie ich in Kapitel 2.2.2 zeigen werde, so dass auch die Konsequenzen aus dem Einsatz unterschiedlich ausfallen. Tendenziell kommen die meisten Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler allerdings zu dem Fazit, dass

die alleinige Anwendung von Technologie noch keinen Mehrwert darstellt. Stattdessen scheint trotz DGS immer noch der Ausspruch von EUKLID zu gelten: „Es gibt keinen Königsweg zur Geometrie.“ Auch STRÄSSER (2002, S.65) stellt fest, dass beim Einsatz von DGS immer noch viel zu überlegen ist, um sie gewinnbringend im Unterricht einzusetzen: „A lot of analytic and constructive work ist still to be done to make use auf DGS a success story in teaching and learning mathematics, especially Geometry.“
Ein interessanter Aspekt meiner Untersuchung besteht unter anderem darin, dass die befragten Studierenden entweder gerade erst mit ihrem Studium begonnen hatten oder kurz vor dem Examen standen. Die Erstsemesterstudierenden, die, wie erwähnt, in ihrer eigenen Schullaufbahn in der Regel keine Erfahrungen mit DGS gemacht haben, sind ganz klar als Lernende im Hinblick auf das Programm anzusehen. Ist nun bei den Studierenden in Examensnähe ein Perspektivwechsel hin zur Rolle des Lehrenden erkennbar? Zumindest müssten diese Studierende im Laufe ihres Studiums, besonders im didaktischen Bereich, schon Erklärungskompetenzen u.a. erworben haben. Dies könnte und sollte sich bedeutsam auswirken, da offensichtlich nur ein kritischer und reflektierter Umgang mit DGS gelehrt werden kann, wenn man in der Lage ist, seine eigene Interaktion mit dem Programm auf einer Metaebene abzuwägen. Insofern wäre es möglich, dass sich zwischen den beiden Gruppen Unterschiede bezüglich des Einsatzes der DGS in dem Sinne zeigen, dass die Älteren mehr von der Technologie profitieren können.

Im Zentrum dieser Arbeit stehen zwei wesentliche Fragestellungen. Zunächst einmal geht es darum, welche Beweisverständnisse sich bei den befragten Studierenden finden lassen und welche Anforderungen sie vor diesem Hintergrund an einen Beweis stellen, oder anders formuliert, auf welche Art für sie der Nachweis für eine mathematische Aussage erbracht werden kann, die dann von ihnen als allgemeingültig akzeptiert wird. Vor dieser Folie wird dann die Rolle der DGS betrachtet, die je nach Beweisvorstellung eine völlig unterschiedliche sein kann. Da auch in der mathematischen Kommunität die Frage, was ein Beweis ist und welchen Anforderungen er genügen muss, nicht eindeutig beantwortet wird, wird vor der Analyse der diversen Fallstudien in einem theoretischen Abriss reflektiert, warum überhaupt bewiesen wird und welche Alternativen zum streng deduktiven Vorgehen, zum einen aufgrund der grundsätzlichen Praktibilität, zum anderen, gerade im schulischen Kontext, aufgrund der vorhandenen Vorkenntnisse und verfügbaren Möglichkeiten, entwickelt wurden. Anschließend werden einige wissenschaftliche Untersuchungen zum Thema „Beweisen“, die in der Mathematikdidaktik

Beachtung gefunden haben, vorgestellt und kritisch beleuchtet.
Die zweite zentrale Fragestellung besteht in der Prüfung, ob die Studierenden den Zugmodus als das mächtige heuristische Werkzeug einsetzen, als das er vielerorts angesehen wird, z.B. von Hattermann (2011, S.5) im Rahmen seiner Untersuchung von 3D-Systemen:

> „Es ist unbestritten, dass der *Zugmodus* die entscheidende und bedeutendste Funktion in dynamischen Geometriesystemen darstellt, da er die dynamische Geometrie von der statisch geprägten Geometrie des Euklid unterscheidet. Die verschiedenen Funktionen des Zugmodus und das Erlernen seiner Handhabung ist jedoch bereits in 2D-Umgebungen alles andere als einfach."

Auch in diesem Zusammenhang werde ich allgemein anerkannte mathematikdidaktische Forschungsarbeiten vorstellen und kritisch hinterfragen.
Insgesamt ist ein Ziel dieser Arbeit, die „Risiken und Nebenwirkungen" beim Einsatz von DGS in der Elementargeometrie deutlich zu machen, um so ein Bewusstsein dafür zu schaffen, welche Ansprüche, Erwartungshaltungen und Vorstellungen, insbesondere auch Fehlvorstellungen bei Studierenden durch den Einsatz dieser Technologie entstehen können. Dies ist besonders vor dem Hintergrund wichtig, dass es sich bei den befragten Personen um zukünftige Lehrer und Lehrerinnen handelt, die in ihrem späteren eigenen Unterricht Schülerinnen und Schülern einen reflektierten und angemessenen Umgang mit der Software eröffnen können sollen, dabei allerdings sicher dazu neigen, ihre eigenen Ansprüche, Haltungen, Vorstellungen usw. offen oder unterschwellig auf die Schülerinnen und Schüler zu übertragen.

Kapitel 2

DGS und Beweis

2.1 Zur Rolle von Beweisen

> „Befragt man Lehramtsstudiernde oder auch beliebige Erwachsene nach ihren Assoziationen zum Beweisen im Mathematikunterricht, so wird man mit großer Wahrscheinlichkeit eine in weiten Teilen übereinstimmende Reaktion zwischen Skepsis und vehementer Abwehr erfahren. Begriff und Tätigkeit des Beweisens schrecken - meist bedingt durch eine individuelle Lernbiografie - offenbar ab: Beweise sind formal, Beweise *kann* man als Nicht-Mathematiker nicht verstehen. Und gar im Umkehrschluss: Ein *einsichtiger* Argumentationsgang kann schon deshalb kein Beweis sein, *weil* man ihn verstanden hat“ (Krauthausen 2001, S.99).

Die gefühlsmäßige Aversion gegen das Wort „Beweis“ ist nicht unbekannt und führt beispielsweise dazu, dass Dozentinnen und Dozenten in ihren universitären Lehrveranstaltungen bei der Aufgabenformulierung lieber das Wort „Begründung“ verwenden, obwohl damit meist dasselbe gemeint ist. Bei den Studierenden werden nicht nur die fehlenden Fähigkeiten zur Durchführung eines Beweises bemängelt, sondern zudem noch die oftmals völlig fehlende Einsicht in die Notwendigkeit eines Beweises:

> „Dem offensichtlich breiten Konsens über die Legitimität der Forderung, das Beweisbedürfnis zu wecken, steht nun aber die Tatsache gegenüber, dass es anscheinend nur sehr partiell gelingt, diese Forderung auch zu realisieren. Wir beobachten

> nämlich bei Studienanfängern durchgehend eine ganz unbefriedigend ausgebildetet Fähigkeit, einen Satz aus dem unverzichtbaren Kernbereich des Schulstoffes zu beweisen. [...] Die so bezeugte Beweisunfähigkeit scheint mir zugleich ein Indiz für ein unterentwickeltes Beweisbedürfnis zu sein. Meine Erfahrungen gehen jedenfalls dahin, dass der größere Teil der Studenten auch gegenüber Sätzen, die keineswegs klar sind, nicht unbedingt auf allgemeinen Begründungen besteht" (Winter 1983, S.60).

In dieser keineswegs neuen Situation kommt nun die DGS ins Spiel. Wie auch Elschenbroich feststellt (siehe Elschenbroich 1997), gibt es durchaus skeptische Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer, die befürchten, dass das ohnehin nur spärlich vorhandene Beweisbedürfnis durch den Einsatz dieses Mediums noch zusätzlich reduziert werden könnte. Dass das Beweisen elementarer Bestandteil des Mathematikunterrichts ist, steht außer Frage (vgl. beispielsweise Walsch 1975, Winter 1983, Bender 1989, Krauthausen 2001, Reiss *et al.* 2006). Die entscheidende Frage ist, inwieweit der Beweis auch als Mittel zum tieferen Verständnis erfahrbar gemacht werden kann und nicht nur als formales Anhängsel angesehen wird, das keine neuen Erkenntnisse bringt. Vor allen Dingen dann, wenn in der Geometrie Sachverhalte bewiesen werden „müssen", die auch anschaulich völlig evident sind, besteht die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler keinerlei Notwendigkeit für einen Beweis sehen. Um dem entgegenzusteuern, wird häufig mit negativ besetzten Praktiken gearbeitet: das Vertrauen der Lernenden in die eigene Wahrnehmung wird erschüttert, beispielsweise durch opitsche Täuschungen, Messergebnisse werden als Näherungswerte entlarvt und somit als ungenau erkannt. Die Reihe ließe sich beliebig fortführen. Holland (1996b, S.51) lehnt solche Praktiken entschieden ab:

> „Die in Schulbüchern vielfach geübte Praxis, die Schüler durch Hinweis auf optische Täuschungen in ihrem Evidenzerlebnis zu verunsichern, um dadurch ein Beweisbedürfnis zu begründen, ist aus zweierlei Gründen ungeeignet:
> - *Erstens* wird hier verkannt, daß es beim Beweis eines anschaulich evidenten Satzes gar nicht um die Wahrheitssicherung geht.
> - *Zweitens* müßte man nach dem Beweis eines solchen Satzes auch konsequenterweise die Wahrheit derjenigen Sätze in Zweifel ziehen, die zum Beweis benutzt werden. Damit manövriert man sich aber in eine Position, welche eine Verifikation

> geometrischer Aussagen überhaupt nicht mehr zuläßt“.

Auch Winter (1983, S.65f) hält den von Wahrnehmung und Anschauung abgekoppelten Beweis für problematisch und betont die Rolle der Intuition:

> „Und drittens bedarf es bei der Weiterentwicklung von Wissen stets intuitiv gehaltener Vorausschauen und Vorwegnahmen. Schon bei der Durchführung eines (strengen) Beweises geht man ja nicht mechanisch vor, sondern orientiert sich an einer groben, unelaborierten Beweisskizze. Die anschaulich intuitive Praxis befleckt eben nicht die reine Theorie [...].“

Die Spannung zwischen Anschauung und Beweis sollte nicht in der abwertenden Kontrastierung anschaulichen Beweisens gegenüber formalem Beweisen münden. Die Diskreditierung des Anschaulichen als ungenau, nicht wissenschaftlich und nur von heuristischem Wert gegenüber dem Formalen als präzise, streng und wissenschaftlich hat oftmals die fatale Folge, dass Schülerinnen und Schüler genauso wie Studierende der Ansicht sind, dass allein eine formal verdichtete Sprache einen Beweis ausmacht. „Vorrangiges Ziel ihrer „Beweise“ war offensichtlich die Symbolik oder das „korrekte“ Schließen, nicht aber die Herleitung der Beweisaussage“ stellt auch Beckmann (2001, S.22) fest. Zudem fällt auf, dass Schülerinnen und Schüler oftmals kein Vertrauen in den eigenen Beweis haben, denn trotz erfolgreich vollzogenem Beweis wird die Sachlage lieber noch „zur Sicherheit“ an einem Beispiel überprüft. „Der mathematische Beweis und der innere Glaube an die Wahrheit eines (mathematischen!) Sachverhalts sind zweierlei“ (Bender 1989, S.131).
Ein Fokus dieser Arbeit liegt in der Rolle, die eine DGS in diesem Kontext einnehmen kann. Grundsätzlich sind durchaus verschiedene Aspekte vorstellbar: Bender (2005, S.49) beispielsweise stellt fest, dass DGSe den „Glauben an den Beweis“ vertiefen, „indem sie ihn plausibler erscheinen lassen“. Genau dies kann die Gefahr beinhalten, dass der Anwender oder die Anwenderin den Eindruck hat, alles verstanden und durchschaut zu haben, gerade weil es durch die Visualisierung so plausibel und einleuchtend wirkt. Dabei könnte das Beweisbedürfnis komplett entfallen oder gar der Eindruck entstehen, dass die DGS den Beweis eigenständig liefern kann. In den meisten Fällen allerdings wird durch die DGS eben nur scheinbar die Allgemeingültigkeit eines Satzes gezeigt und nur in den seltensten Fällen wirklich bewiesen! Inwieweit der Einsatz von DGS dennoch beim Beweisen neue Impulse geben und Schwerpunkte

setzen kann, indem das Prinzip des entdeckenden Lernens gefördert und ein Beweisbedürfnis aufgrund natürlicher Neugier geweckt wird, gehört zu den Fragen dieser Arbeit. A priori ist meines Erachtens nicht ausschließlich davon auszugehen, dass ein Einsatz von DGS das Beweisbedürfnis automatisch verringert. Vielmehr halte ich es für denkbar, dass sich die Art und Weise der Beweise verändern wird.

> „Die Mathematik-Didaktik“ ist da eigentlich ein Stück weiter als die verbreitete Schul-Praxis und sieht die Rolle des Beweisens [...] im Herstellen von Zusammenhängen und deren Plausibel-Machen (durchaus auch in einer **positiven Gedanken-Disziplinierung**). Der Beweis soll also in erster Linie klären, warum ein Satz gilt und bestenfalls in zweiter Linie, **dass** er gilt“ (Bender 2005, S.48).

2.1.1 Was ist überhaupt ein Beweis?

In der zahlreichen Literatur, die es zum Thema „Beweisen“ gibt, finden sich Aussagen wie: „Beweise sind für Mathematikerinnen und Mathematiker essentieller Teil des Wissensbestandes und der Fortentwicklung der Mathematik“ (Ufer *et al.* 2009, S.30), „Proof is an essential characteristic of mathematics and as such should be a key component in mathematics education“ (Hanna & Jahnke 1996, S.877) oder: „Die Mathematik unterscheidet sich von anderen Wissenschaften nicht ausschließlich, aber ganz wesentlich darin, dass sie eine beweisende Disziplin ist“ (Reiss 2002, S.1). Die hier angeführten Zitate dienen alle dazu, den jeweils nachfolgenden wissenschaftlichen Text einzuleiten und setzen damit faktisch stillschweigend voraus, dass den Leserinnen und Lesern bekannt ist, was denn überhaupt unter einem Beweis zu verstehen ist. Es finden sich allerdings auch Versuche, zunächst erst einmal den Begriff „Beweis“ zu charakterisieren. So leitet beispielsweise Schupp (2010, S.97) einen seiner Texte mit den Worten ein: „“Beweisen“ heißt eine Warum-Frage vernünftig beantworten“; Knipping (2003, S.19) definiert: „Unter einem Beweis soll in der vorliegenden Arbeit eine Folge von öffentlichen Geltungsansprüchen verstanden werden, in der schrittweise die Gültigkeit von mathematischen Aussagen begründet wird“; und Holland (1996b, S.9) stellt fest: „Unter dem Aspekt von Geometrie als Lehre vom Anschauungsraum geht es beim Beweisen eines Satzes um die *Wahrheitssicherung*, d.h., um den Nachweis der *Allgemeingültigkeit* des Satzes. Unter dem Aspekt von Geometrie als deduktiver Theorie geht es beim Beweisen eines Satzes hingegen vordringlich um die *Deduzierbarkeit* des Satzes aus schon akzeptierten Sätzen der Geometrie“.

Die Zitate lassen das Problem erahnen, welches sich beim Versuch einer Charakterisierung der Begriffe „Beweis“ und „Beweisen“ ergibt: externe Faktoren, wie inhaltliche, soziale, pädagogische, didaktische oder auch philosophische Voraussetzungen, sind entscheidend daran beteiligt. Um an dieser Stelle Klarheit schaffen zu können, bedarf es zunächst einer Analyse der externen Faktoren. Hier besteht bei jedem Lehrenden das Risiko, dieser Begriffsklärung auszuweichen und den Begriff „Beweis“ zu verwenden, **ohne** sichergestellt zu haben, ob das eigene Verständnis mit dem des Adressatenkreises überhaupt übereinstimmt! Dies ist besonders in der Schule problematisch, da die Lehrerin und der Lehrer naturgemäß über eine ganz anderen Einbindung in das theoretische System der Mathematik verfügen, als der Schüler und die Schülerin. So stellt auch Jahnke (2009, S.26) fest:

> „Vielen Lehrerinnen und Lehrern fällt es schwer, altersgemäß zu erklären, was ein Beweis ist, welche Rolle das Beweisen in der Mathematik spielt und in welcher Weise es zum Verständnis unserer Welt beiträgt. Häufig beschränken sie sich auf Bemerkungen der Art, dass ein Beweis eine Aussage absolut sicher mache und ihre Gültigkeit für alle Fälle garantiere, im Gegensatz zu Messungen, die sich nur auf Einzelfälle beziehen. Die gegenwärtig auf dem Markt befindlichen Schulbücher äußern sich ähnlich vage oder sagen zum Beweisen nichts“.

So stellen auch Hanna & Jahnke (1996, S.884) fest: „As discussed above, there has never been a single set of universally accepted criteria for the validity of a mathematical proof.“
Klassisches Beispiel hierfür ist der Beweis des Vier-Farben-Satzes, der besagt, dass man in der euklidischen Ebene eine Landkarte mit maximal vier Farben derart einfärben kann, dass niemals zwei aneinander angrenzende Länder dieselbe Farbe haben. Der Satz, der erstmals 1853 von Francis Guthrie als Vermutung veröffentlicht wurde, konnte lange nicht bewiesen werden, es konnte lediglich gezeigt werden, dass fünf Farben immer ausreichend sind. Schließlich gelang es Apel und Haken im Jahr 1977, die Anzahl der zu untersuchenden Fälle auf 1936 Fälle zu reduzieren. Diese konnten dann anschließend einzeln mit dem Computer überprüft werden, so dass der Nachweis erbracht worden war. Dennoch wurde der Beweis von einigen Mathematikern nicht anerkannt, da er nur mit Einsatz von Computern geführt und nicht direkt vom Menschen kontrolliert werden konnte bzw. wurde. Zudem wurde eingewandt, dass das Risiko, dass Hardware oder Software fehlerhaft sein könnten, zwar minimiert, aber nicht ausgeschlossen werden könne. Und schließlich überzeuge der „Beweis“ zwar davon, dass tat-

sächlich vier Farben ausreichend seien, er helfe aber nicht zu verstehen, warum dies so sei, womit wir bei den verschiedenen Funktionen sind, die ein Beweis hat und auf die ich in Kapitel 2.1.2 eingehen werde.

Eine weitere faszinierende Neuerung in der Mathematik, die ebenfalls illustriert, dass es keine eindeutigen Kriterien für einen Beweis gibt, ist der sogenannte „Zero-knowledge-Beweis“ von Goldwasser *et al.* (1985). Bei diesem interaktiven Beweis agieren zwei Parteien miteinander; der „Beweiser“ und der „Verifizierer“. Dabei überzeugt der Beweiser sein Gegenüber davon, dass er einen Beweis von einem Theorem kennt, ohne irgendwelche Informationen über diesen Beweis preiszugeben. Als Ergebnis ist der Verifizierer davon überzeugt, dass das Theorem stimmt und der Beweiser in Kenntnis eines Beweises ist.

Ein klassisches Beispiel hierfür ist das Geheimnis von Ali Babas Höhle (s. Abbildung 2.1): Ali Baba möchte uns zeigen, dass er die verschlossene Tür zwischen R und S öffnen kann, ohne dass wir allerdings sehen können, wie er diese Tür öffnet. Dazu geht er in die Höhle,

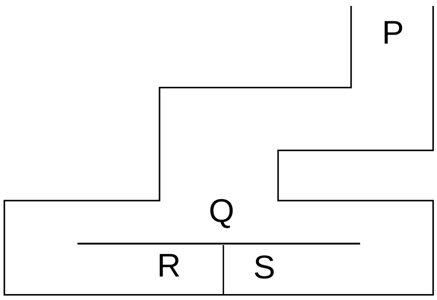


Abbildung 2.1 – *Ali Baba's Höhle*

während wir bei P warten, so dass wir nicht sehen können, auf welcher Seite der Tür er steht. Danach gehen wir zu Q und entscheiden, ob Ali Baba von links oder von rechts zurückkommen soll. Wenn Ali Baba immer aus der gewünschten Richtung erscheint, sind wir überzeugt davon, dass er die Tür öffnen kann. Wir sehen allerdings nicht, wie er es macht und können auch keine dritte Person davon überzeugen, dass er tatsächlich das Geheimnis kennt, da ja die Möglichkeit besteht, dass wir uns mit Ali Baba abgesprochen haben.

Obwohl man folglich davon überzeugt ist, dass ein Sachverhalt wahr ist und es auch einen Beweis dafür gibt, verfügt man nicht über die Möglichkeit, andere ebenfalls von der Richtigkeit des Theorems zu überzeugen oder über den Beweis zu kommunizieren.

Dennoch stellt Hanna (2007) fest, dass diese Beweise immer noch ein Stück weit traditionell sind, da ihnen eine analytische Vorgehensweise inhärent ist. Demgegenüber aber gebe es mittlerweile Mathematiker, die überhaupt nicht mehr deduktiv arbeiten würden:

> „More and more mathematicians appear to be doing all their work outside the bounds of deductive proof, however, confirming mathematical properties experimentally. A case in point is the Geometry Center at the University of Minnesota, where mathematicians use computer graphics to examine the properties of four-dimensional hypercubes and other figures, or to study transformations such as the twisting and smashing spheres" (ebenda, S.6).

Sicherlich gibt es noch sehr viel mehr Beispiele, die davon zeugen, dass innerhalb der mathematischen Gemeinschaft darüber gestritten wurde und wird, welche Regeln für einen Beweis gelten und welche Art von Beweisen akzeptiert werden. „A proof becomes a proof only after the social act of „accepting it as a proof." This is as true for mathematics as it is for physics, linguistics or biology"(Manin 2010, S.45).

Dennoch wird allgemein anerkannt, dass es einen weitgehenden Konsens darüber gibt, welchen Anforderungen dieses Regelwerk unterliegt. So urteilt beispielsweise Reiss (2002, S.2): „Auch wenn gerade in diesem speziellen Fall [beim Beweis des Vierfarbenproblems, G.W.] die Diskussion noch nicht als abgeschlossen bezeichnet werden kann, so kann man doch sagen, dass die Mathematiker sich zumeist bemerkenswert schnell geeinigt haben, welche neuen Regeln zu alten Regeln hinzugenommen werden und welchen Kriterien neues Wissen genügen muss". Und Ufer *et al.* (2009, S.31) folgern: „Grund für diesen breiten Konsens könnte die Orientierung der Mathematiker am „Idealbild" eines formalen Beweises sein". Dieses Idealbild eines formalen Beweises definiert Mac Lane (1981, S.465) wie folgt:

> „**Absolute Rigor.** This use of deductive and axiomatic methods focuses attention on an extraordinary accomplishment of fundamental interest: the formulation of an exact notion of *absolute rigor*. Such a notion rests on an explicit formulation of the rules of logic and their consequential and meticulous use in deriving from the axioms at issue all subsequent properties, as strictly formulated in theorems. Moreover, each derivation can be tested and understood in its own terms, independent of any reference to examples of the activity or the reality for which the axioms were designed. [...] This formal character of mathematics may serve

> to distinguish it from all other types of science. Once the axioms and the rules are fully formulated, everything else is built up from them, without recourse to the outside world, or to intuition, or to experiment. Examination of texts of theoretical physics, biology, or other sciences clearly indicates a real difference in this regard. Such texts do not hesitate to appeal at any time to experience or intuition, while a mathematical proof stands or falls on its own, without outside reference.“

Anschließend jedoch fährt er fort:

> „An absolutely rigorous proof is rarely given explicitly. Most verbal or written mathematical proofs are simply sketches which give enough detail to indicate how a full rigorous proof might be constructed. Such sketches thus serve to convey conviction - either the conviction that the result is correct or the conviction that a rigorous proof could be constructed“ (ebenda. S.465).

Warum dieses so gehandhabt wird, macht de Villiers (1990, S.19) deutlich: „In addition, attempts to construct rigourously complete proofs lead to such long complicated proofs that an evaluative overview becomes impossible, while the probability of errors becomes dangerously high at the same time“. Stattdessen wird auf einen sozial ausgehandelten Konsens darüber, welche Schritte wie detailliert erfolgen müssen, zurückgegriffen, immer im Bewusstsein, dass die dadurch entstehenden Lücken aus dem allen Beteiligten gemeinsamen Grundlagenwissen gefüllt werden könnten. „It is the teacher who must judge when more careful proving might be expected to promote the elusive but most important classroom goal of understanding“ (Hanna & Jahnke 1996, S.892).
Genau dieser Tatbestand macht, wie ich aus eigener Erfahrung aus der Leitung von studentischen Übungsgruppen berichten kann, Studierenden große Probleme, da ihnen oftmals nicht klar ist, welcher Detaillierungsgrad erforderlich ist und an welchen Stellen Aspekte explizit herausgearbeitet werden müssen und wann sie implizit bleiben können. Dieses Phänomen wird im Schulunterricht verstärkt auftreten, wie Jahnke (1978, S.212) herausstellt: „Das Problem der [in der Schule, G.W.] fehlenden Axiomatik hängt genuin mit dem Problem der Entwicklungsdynamik des Wissens zusammen, denn die Tatsache, daß das Wissen beim Schüler sich entwickelt, macht es unmöglich, sich auf den Standpunkt eines abgeschlossenen Systems zu stellen.“

Damit einhergehend wird der Aushandlungsprozess über die Detaillierung eines Beweises quasi unmöglich gemacht, da zwar die Lehrperson auf einer Metaebene über die diesbezüglichen Anforderungen reflektieren kann, nicht aber die Schülerinnen und Schüler. Daher besteht die Gefahr, dass diese sich an den potentiellen Erwartungen der Lehrerin oder des Lehrers als einer externen Instanz orientieren, und keine inhaltlichen Überlegungen dazu anstellen.
Bei den Studierenden sollte zu irgendeinem Zeitpunkt der Wechsel vom Lernenden zum Lehrenden erfolgen. Dabei müsste die genannte Metaebene erreicht werden. Inwieweit sich Anzeichen für diesen Wechsel bereits bei den von mir befragten Studierenden erkennen lassen, sollen die Analysen der von mir geführten Interviews zeigen.

2.1.2 Welche Funktionen erfüllen Beweise?

> „Traditionally the function of proof has been seen almost exclusively in terms of the **verification** (conviction or justification) of the correctness of mathematical statements. The idea is that proof is used mainly to remove either personal doubt and/or those of skeptics; an idea which has one-sidedly dominated teaching practice and most discussions and research on the teaching of proof" (de Villiers 1990, S.17).

Über diese scheinbar dominierende Funktion des Beweisens hinaus zählt de Villiers weitere auf und kommt zu folgender Liste (ebenda, S.18), die er später (de Villiers 2003, S.6) um eine sechste (s.u. die letzte) Funktion ergänzt:

- *verification* (concerned with the **truth** of a statement)
- *explanation* (providing insight into **why** it is true)
- *systematisation* (The **organisation** of various results into a deductive system of axioms, major concepts and theorems)
- *discovery* (the disovery or invention of **new** results)
- *communication* (the **transmission** of mathematical knowledge)
- *intellectual challenge* (the self-realization/fulfillment derived from constructing a proof)

Diese Funktionen möchte ich im Folgenden genauer analysieren.

Der Beweis als Mittel zur Verifikation

Durch einen mathematischen Beweis kann sichergestellt werden, dass eine Aussage wahr ist, wobei im allgemeinen die Vorstellung zugrunde liegt, dass ein „Beweis aus einer Kette deduktiver Schlüsse bestehen [sollte, G.W.], die von den Voraussetzungen zur Behauptung führt und dabei nur bekannte bzw. zuvor gezeigte Aussagen als Argumente in den deduktiven Schlüssen verwendet“ (Ufer *et al.* 2009, S.32). Konsequent zu Ende gedacht, bedeutet dies, dass die Wahrheit das Ergebnis einer Sequenz von logischen, durchweg nachvollziehbaren, Folgerungen ist.
Die Realität des Beweisens auf universitärem Niveau allerdings stellt sich durchweg anders dar. „Proof is not necessarily a prerequisite for conviction - to the contrary, conviction is probably far more frequently a prerequisite for the finding of a proof“ (de Villiers 1990, S.18). Kaum jemand würde Monate oder Jahre darauf verwenden, einen Beweis für eine bestimmte Vermutung zu finden, wenn diese Person nicht bereits im Vorfeld von der Wahrheit dieser Vermutung überzeugt sei. Ein populäres Beispiel hierfür ist der Beweis der Fermatschen Vermutung aus dem 17. Jhdt., der Andrew Wiles 1993 nach jahrelanger mühevoller Arbeit gelang, wobei von Anfang an die Überzeugung von der Richtigkeit der Fermatschen Aussage die entscheidende Triebfeder war.

Der Beweis als Mittel zur Begründung

Obwohl die Vokabel „explanation“ originär eher mit „Erklärung“ zu übersetzen wäre und dies beispielsweise auch von Wittmann (2009, S. 37) so gemacht wird (Kadunz & Strässer (2009, S.73) verwenden die Begrifflichkeit „erläutern“, was im Duden mit „näher erklären“ gleichgesetzt wird), habe ich mich für die Begrifflichkeit „Begründung“ entschieden, da eine Erklärung nicht unbedingt die Frage nach dem „Warum“ beantworten muss, eine Begründung hingegen schon (man kann einem Dritten erklären, wie eine Ableitung formal berechnet wird, so dass dieser dann eine derartige Handlungsanweisung ausführen kann, ohne jedoch zu verstehen, warum man so vorgeht und was dabei passiert).
Eine der prominentesten Vertreterinnen in der Didaktik, die zwischen Beweis als Mittel zur Verifiktation und Beweis als Mittel zur Begründung unterscheidet, ist sicherlich Hanna (1989b, S.47), die sagt:

> „One can even establish the validity of many mathematical assertions by purely

> syntactic means. With such a syntactic proof one can demonstrate that a statement is true without ever showing what mathematical property makes is true. Thus I prefer to use the term *explain* only when the proof reveals and makes use of the mathematical ideas which motivate it“.

Folglich ist nicht nur die Frage zu stellen, ob etwas gilt, sondern warum etwas gilt. Diese Frage hält de Villiers (1990, S.20) gerade dann für besonders bedeutsam, wenn der Wahrheitsgehalt eines Sachverhalts sowieso schon anschaulich klar ist und deswegen auch kaum angezweifelt wird: „Thus, in most cases when the results concerned are intuitively self-evident and/or they are supported by convincing quasi-empirical evidence, the function of proof for mathematicians is certainly not that of verification, but rather that of explanation“. Darüber hinaus hält De Villiers den Aspekt des Begründens sogar in den meisten Fällen für wichtiger als den des Verifizierens: „Furthermore, for probably most mathematicians the clarification/explanation aspect of proof is generally of greater importance than the aspect of verification“ (de Villiers 1990, S.20).
Aus didaktischer Perspektive ist die begründende Funktion eines Beweises besonders bedeutsam, da es im Unterricht um Verstehensprozesse geht, bei denen Antworten auf Warum-Fragen gesucht werden.

Der Beweis als Mittel zum Systematisieren

Mit einem Beweis kann neues Wissen mit altem Wissen in Bezug gesetzt und somit in das bestehende Wissensnetz eingebunden werden. So sagt de Villiers (1990, S.20): „Proof is therefore an indispensable tool in the systematisation of various known results into a deductive system of axioms, definitions and theorems“. Dabei unterscheidet Freudenthal (1973b) zwischen globalem und lokalem Ordnen: beim globalen Ordnen wird ein Teilgebiet der Mathematik derart dargestellt, dass alle Sätze, Schlüsse und Folgerungen vollständig aus dem zugrundeliegenden Axiomensystem deduziert sind. Beim lokalen Ordnen hingegen werden zwar Beziehungen zwischen Sätzen untersucht und damit eine systematische Analyse gemacht, doch werden die Sachverhalte oftmals nur auf für diesen Ordnungszusammenhang evidente Grundlagen zurückgeführt, die dann nicht weiter bewiesen werden. So werden auch Begriffe oftmals nur mit Hilfe von Beispielen eingeführt. Diesen evidenten Grundlagen wird dann im Prinzip der Status von Axiomen zugewiesen, so dass hierauf aufbauend durchaus in der formalen Art der Mathematik definiert und bewiesen werden kann (vgl. STEIN 1986, Kap. 1.2.3). Grundsätzliches Ziel des lokalen Ordnens ist, die Zusammenhänge in einem kleineren Gebiet sichtbar zu machen.

FREUDENTHAL hält die Geometrie für kein geeignetes Feld, um in der Schule einen deduktiv-axiomatischen Aufbau zu erlernen: „Es gibt zahlreiche Felder, in denen man Axiomatik lernen kann. Die Geometrie gehört jedenfalls nicht zu ihnen" (FREUDENTHAL 1973b, S.420). Stattdessen hält er hier das lokale Ordnen für geeignet:

> „Man analysiert die geometrischen Begriffe und Beziehungen bis zu einer recht willkürlichen Grenze, sagen wir, bis zu dem Punkte, wo man von den Begriffen mit dem bloßen Auge sieht, was sie bedeuten, und von den Sätzen, daß sie wahr sind. So räsonniert man immer in der Geometrie unseres Lebenraumes; niemals aus Axiomen, die viel zu weit weg liegen, sondern, nach einem verschwimmenden und sich verschiebenden Horizont von Sätzen hin, die jeweils als wahr angenommen werden. Das Feld wird auf kleine oder größere Strecken, aber nicht als Ganzes geordnet" (FREUDENTHAL 1973a, S.142).

Häufiges Beispiel, welches in der mathematikdidaktischen Literatur für das lokale Ordnen aufgeführt wird, sind die Winkelsätze im Dreieck (vgl. Abbildung 2.2).

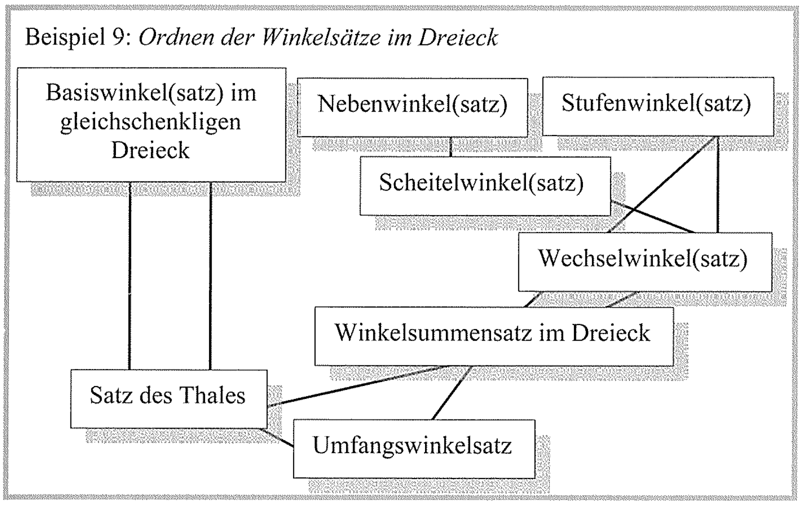


Abbildung 2.2 – *Winkelsätze im Dreieck als Beispiel für lokales Ordnen aus* WEIGAND *(2009, S.29)*

DE VILLIERS (1990) hält den systematisierenden Aspekt eines Beweises für herausragend, da diese Funktion weder vom empirischen Testen noch von der reinen Intuition geleistet werden kann. Beim Systematisieren könnten Inkonsistenzen, Zirkelschlüsse und versteckte Voraussetzungen sichtbar gemacht werden und es helfe dabei, Ergebnisse ökonomischer zu präsentieren. Gerade auch bei anschaulich-evidenten Sachverhalten könne ein Beweis das Zusammenfügen loser Fäden zu einem kohärenten und konsistenten Ganzen unterstützen. Dies solle gerade auch in der Schule offengelegt werden:

> „Thus, it is in reality a completely false perspective to say at school when proving self-evident statements such as those found in introductory Euclidean geometry, that one is „*making sure*“. In such cases, mathematicians are actually far less concerned about their truth, than with their systematisation into a deductive system“ (DE VILLIERS 1990, S.21).

Der Beweis als Mittel zum Entdecken

Vielfach wird angenommen, dass ein Beweis zwar neues Wissen sichern, begründen und strukturieren, nicht aber einen Beitrag zum Entdecken von neuem Wissen leisten kann. Hintergrund für diese Annahme ist die Vorstellung, dass Theoreme zunächst intuitiv oder empirisch entdeckt und erst anschließend deduziert werden, wie HANNA (1989a, S.22) es ausdrückt: „Mathematical ideas are discovered through an act of creation in which formal logic is not directly involved. They are not derived or deduced, but developed by a process in which their significance for the existing body of mathematics and their potential for future yield are recognized by informal intuition“. DE VILLIERS (1990, S.23) widerspricht dem jedoch vehement.

> „This view is however completely false, as there are numerous examples in the history of mathematics where new results were discovered/invented in a purely deductive manner; in fact, it is completely unlikely that some results (e.g. the non-Euclidean geometries) could ever have been chanced upon merely by intuition and/or only using quasi-empirical methods.“

Die Einschätzung „completely false“ erscheint mir zwar ein wenig übertrieben. Wohl verläuft wahrscheinlich in den meisten Fällen ein Beweis genau nach dem Schema, erst eine Entdeckung zu machen und diese anschließend zu beweisen. Dennoch kann es Fälle geben, in denen wirklich durch den Beweis eine Entdeckung gemacht wird. Als Beispiel hierfür führt de Villiers das Seitenmittenviereck in einem symmetrischen Drachen an: dies scheint immer ein Rechteck zu sein. Empirische Überprüfung kann die Überzeugung über den Wahrheitsgehalt der Aussage stärken, aber keine Erklärung liefern. Der deduktive Beweis hingegen macht unmittelbar klar, dass nicht die zwei Paar benachbarter Seitenlängen des Drachen das entscheidende Kriterium für die Form des Seitenmittenvierecks sind, sondern die Orthogonalität der Diagonalen, so dass auch allgemeinere Vierecke als ein symmetrischer Drachen ein Rechteck als Seitenmittenviereck haben können. Somit folgert de Villiers (1990, S.21):

> „In contrast, the general result is not at all suggested by the purely empirical verification of the original hypothesis. Even a systematic empirical investigation of various types of quadrilaterals would probably not have helped to discover the general case, since such a person would probably have restricted his/her investigation to the familiar quadrilaterals such as parallelograms, rectangles, rhombi, squares and isosceles trapezia".

Der Beweis als Mittel zur Kommunikation

Ein Beweis kann auch als Mittel zur Kommunikation angesehen werden, indem durch ihn mathematische Ergebnisse sowohl transportiert als auch diskutiert werden. Dabei können beispielsweise Beweisschritte auf Verständnis und Vollständigkeit hinterfragt oder mögliche Alternativen ins Spiel gebracht werden. Zudem findet ein sozialer Aushandlungsprozess über die Akzeptanz von Argumenten statt. So stellt auch de Villiers (1990, S.22) fest: „Proof as a form of social interaction therefore also involves the **subjective negotiation** of not only the meanings of concepts concerned, but implicitly also of the criteria for an acceptable argument". Diesen Diskurs über die Akzeptanz von Kriterien auf die Spitze getrieben hat Lakatos (1979), der ein fiktives Unterrichtsgepräch über den Beweis zur Eulerschen Gleichung schildert. Darin werden Beweise nicht als endgültige Wahrheiten dargestellt, sondern als fortlaufend Wissen generierende Prozesse, in denen ständig Präzisierungen aufgrund von Gegenbeispielen und Kontroversen erforderlich sind.

Der Beweis als Mittel zur intellektuellen Herausforderung

„Doing proofs could also be compared to the physical challenge of completing an arduous marathon or triathlon, and the satisfaction that comes afterward“ (DE VILLIERS 2003, S.10). Wer selbst schon mit kniffligen Problemen befasst war, der weiß, dass man oftmals keine Ruhe findet, bevor sie endlich gelöst sind. Insofern werden Theoreme auch einfach aus dem Grund bewiesen, dass es sie gibt und sie noch nicht bewiesen sind.

Diese verschiedenen Funktionen von Beweisen treten natürlich oftmals gemeinsam auf. Gewiss kann man diese Auflistung noch erweitern, wie auch DE VILLIERS einräumt. So schlagen beispielsweise HANNA & JAHNKE (1996, S.903) vor, sie um drei Funktionen zu ergänzen:

> „One should add to this model the function of:
>
> - construction of an empirical theory
> - exploration of the meaning of a definition or the consequences of an assumption
> - incorporation of a well-known fact into a new framework and thus viewing it from a fresh perspective“

HANNA und JAHNKE (1996) stellen fest, dass sich eine derartig differenzierte Perspektive auf das Beweisen natürlich erst als Ergebnis eines langen Prozesses herauskristallisiert hat, was zugleich bedeutet, dass auch jedes Individuum, für das die Welt der Mathematik eine neue ist, einen Verständnisprozess bezüglich der Funktionen von Beweisen durchlaufen muss.

Rolle der unterschiedlichen Beweisfunktionen in der Schule

DE VILLIERS (2003) und auch viele andere vor ihm, wie beispielsweise KIRSCH, halten es für geboten, bei den Schülerinnen und Schülern unterschiedliche Funktionen von Beweisen zu thematisieren und nicht nur einseitig zu vermitteln, dass ein Beweis zur Wahrheitssicherung diene. Dies sei besonders wichtig, wenn man im Geometrieunterricht mit DGS arbeite, da sich bei einer Reduktion auf die Funktion der Wahrheitssicherung hier durch die einfache Möglichkeit des Messens und der empirischen Überprüfung ansonsten leicht die falsche Vorstellung einstellen könne, dass ein Beweis obsolet sei.

Da die verschiedenen Funktionen eines Beweises allerdings unterschiedlichen kognitiven Ansprüchen unterlägen, schlägt de Villiers bei der Einführung eine bestimmte Reihenfolge vor, die in Abbildung 2.3 graphisch dargestellt ist. Dabei rät er: „It seems meaningful to initially introduce students to the various functions of proof more or less in the sequence given above, although not in purely linear fashion as shown, but in a kind of spiral approach where the other earlier introduced functions are revisited and expanded“ (de Villiers 2003, S.10).

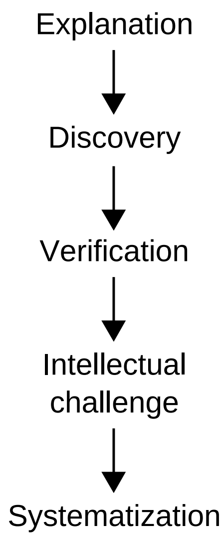


Abbildung 2.3 – *Hierarchische Anordnung von Beweisfunktionen“ (*de Villiers *2003, S.10)*

Dabei wird seine Auffassung, die Funktion des Begründens an den Anfang zu stellen, von Hanna & Jahnke (1996, S.903) unterstützt: „Such a process must start with fundamentals, and the fundamental question that proof addresses is ’why?’“

Auch ist klar, dass die systematisierende Funktion erst relativ spät eine Rolle spielen kann, da hierbei auf einer Art Metaebene über die zugrundeliegenden Zusammenhänge reflektiert wird, was eine gewisse Distanz erfordert und bestimmte Erfahrungen voraussetzt. Es überzeugt mich jedoch nicht, die Funktion des Entdeckens unbedingt vor diejenige des Verifizierens zu setzen und die der intellektuellen Herausforderung dahinter. Vielmehr halte ich es für sinnvoll, die beiden Funktionen eher parallel anzusiedeln, da beispielsweise je nach Aufgabentyp auch bereits sehr früh und auf eine eher spielerische Art der Ehrgeiz von Schülerinnen und Schülern geweckt werden kann und, um etwas entdecken zu können, möglicherweise ebenso

wie beim Systematisieren bestimmte Erfahrungen erforderlich sein können. Meines Erachtens ist die Reihenfolge, in der die unterschiedlichen Beweisfunktionen thematisiert werden, stark vom jeweiligen inhaltlichen Kontext und von der konkreten Situation abhängig, so dass ich weniger eine bestimmte Abfolge der Funktionen in den Fokus rücken würde, als vielmehr die Tatsache, **dass** die unterschiedlichen Funktionen thematisiert werden.
Auch FISCHER *et al.* (2009) fordern, dass in der Schule ein Beweis nicht ausschließlich als Mittel zur Verifikation dargestellt werde, vor allen Dingen vor dem Hintergrund, dass aufgrund der fehlenden Axiomatik in der Schulmathematik für die Schülerinnen und Schüler oftmals nicht eindeutig zu erkennen sei, welche Sachverhalte zum gesicherten Wissen zählen und welche erst noch bewiesen werden müssen: „Es liegt an dieser Stelle nahe, für den Bereich des Beweisens weniger die Validierungsfunktion in den Vordergrund zu stellen, sondern für Beweise vor allem deren erklärende Funktion und teilweise auch systematisierende Funktion hervorzuheben“ (ebenda, S. 251).

2.1.3 „Levels of thinking“ nach van Hiele

Der niederländische Mathematikdidaktiker Pierre VAN HIELE, der selbst lange Zeit als Lehrer an verschiedenen Schulen tätig war, musste die Erfahrung machen, dass er als Lehrer im Geometrieunterricht oftmals nur geringe Erfolge zu verzeichnen hatte, obwohl er sich in Erinnerung an seine eigene Schulzeit vorgenommen hatte, besseren Unterricht zu machen, als er ihn damals erlebt hatte.

> „When I began my career as a teacher of mathematics, I very soon realized that it was a difficult profession. There were parts of the subject matter that I could explain and explain, and still the pupils would not understand. I could see that they really tried, but they did not succeed. Especially in the beginning of geometry, when very simple things had to be proved, I could see they did their utmost, but the subject matter seemed to be too difficult. But because I was an inexperienced teacher, I also had to consider the possibility that I was a poor teacher. And this last annoying possibility was affirmed by what came next: Suddenly it appeared that they understood the subject matter: They could talk of it very sensibly. But very often they said: „It isn't so difficult, but why did you explain it to us with so much difficulty?“ In the years that followed I changed my explanation many

> times, but the difficulties remained. It always seemed as though I were speaking a different language. And by considering this idea I discovered the solution, the different levels of thinking“ (VAN HIELE 1986, S.39).

Diese Theorie, die VAN HIELE zusammen mit seiner Frau Dina VAN HIELE-GELDOF entwickelt hat, geht davon aus, dass alle Schülerinnen und Schüler beim Erlernen von Geometrie (und auch von anderen Inhalten, die nicht ausschließlich mathematischer Natur sein müssen) 5 Stufen (levels) in einer bestimmten Reihenfolge durchlaufen. Dabei ist es nicht möglich, Leistungen auf einer Stufe zu erbringen, ohne die darunterliegenden Stufen erfolgreich bewältigt zu haben. Die Vokabel „erfolgreich“ ist in diesem Zusammenhang so zu verstehen, dass ein echtes Verständnis vorliegt und nicht nur nach bestimmten Algorithmen gehandelt wird.
Die Stufen, die in früheren Arbeiten VAN HIELEs von 1 bis 4 durchnummeriert waren, werden mittlerweile mit 1 bis 5 gekennzeichnet. Dies hängt damit zusammen, dass die erste Stufe erst nachträglich hinzugekommen ist, da deren Bedeutung VAN HIELE nicht von vornherein klar war: „In the article of 1955, what was spoken of as the first level is now spoken as the second level. So in the continuation of the article, what was spoken of a second level, we now speak of as a third level, and so on. The difference is caused by our not having seen the importance of the visual level (which is now called the first) at that time“ (VAN HIELE 1986, S.41). Außerdem führt er aus, dass man nach oben noch weitere Stufen hätte ergänzen können. Im Zusammenhang mit Mathematikunterricht in der Schule hält er dies jedoch für entbehrlich, da man hier schon über die vierte Stufe nicht hinauskäme: „You see that we did not try to describe levels higher than the fourth. Those higher levels ar much more difficult to discern than Levels 2, 3 and 4. [...] In school we have to deal with Levels 2, 3, and 4. If our pupils do not understand us, it is these levels, not when we are speaking on the fifth or perhaps still higher levels“ (VAN HIELE 1986, vgl. S.47). In der folgenden Aufzählung sind die fünf Stufen dargestellt (ebenda, S.53).

- *First level:* the visual level
- *Second level:* the descriptive level
- *Third level:* the theoretical level: with logical relations, geometry generated according to Euclid
- *Fourth level:* formal logic; a study of the laws of logic

- *Fifth level:* the nature of logical laws

Dabei werden auf der ersten Stufe Formen, beispielsweise ein Quadrat oder ein Rechteck, einzig aufgrund ihrer visuellen Erscheinung erkannt. Die Formen können benannt und unterschieden, aber es können ihnen (noch) keine Eigenschaften zugeordnet werden. Auf der zweiten Stufe werden einzelne oder mehrere Eigenschaften der geometrischen Form erkannt, beispielsweise, dass bei einem Rechteck gegenüberliegende Seiten gleich lang sind oder dass sie parallel sind. Dabei stehen diese Eigenschaften allerdings (noch) unverbunden nebeneinander. Auf der dritten Stufe wird erstmals eine theoretische Ebene erreicht, indem die zuvor entdeckten Eigenschaften in Relation zueinander gesetzt werden, so dass nun auch Klassen gebildet werden können. Auf dieser Stufe finden bereits einfache deduktive Schlüsse statt; in Verbindung damit wird nun auch eine formale Sprache eingeführt und erlernt. Auf der vierten Stufe wird die Bedeutung des deduktiven Schließens erkannt, es wird das Wesen notwendiger und hinreichender Bedingungen verstanden, und die Schülerinnen und Schüler erkennen die Bedeutung von Axiomen und Definitionen. Auf dieser Stufe können Aufgaben bearbeitet werden, bei denen selbstständig entschieden werden muss, welche Argumente heranzuziehen sind. Dies bedeutet, dass aus dem vorhandenen Wissens- und Methodennetzwerk angemessene Problemlösestrategien generiert werden können. Auf der fünften Stufe schließlich können auf einer Art Metaebene das erworbene Wissen und die Wissensstrukturen überblickt werden. Symbole können nach den Regeln der formalen Logik manipuliert werden, ohne dass es eines anschaulichen Hintergrunds hierfür bedarf. Dabei geht van Hiele allerdings davon aus, dass die Schülerinnen und Schüler in der Regelschulzeit das Niveau der Stufe 5 im Allgemeinen nicht erreichen.

Der Übergang von einer Stufe zur nächsthöheren stellt sich nicht als natürlicher Prozess dar, wie beispielsweise bei den Phasen der kindlichen Entwicklung gemäß der Lehre Piagets, sondern verläuft in einem Lernprozess unter dem Einfluss der Lernumgebung und der Lehrperson. Dabei ist es erforderlich, innerhalb des Prozesses eine neue Sprache zu erlernen. van Hiele macht dies an einem Beispiel deutlich: Personen, die sich auf der ersten Stufe befinden, werden zu Recht bestreiten, dass ein Quadrat eine Raute ist, da ihr Wissenshintergrund nur auf visuellen Informationen basiert und ein Quadrat in der Regel nun einmal anders aussieht als eine Raute. Auf dieser Stufe macht der Sprechakt: „Dieses Viereck ist keine Raute, weil es ein Quadrat ist“ genausoviel Sinn wie der Sprechakt: „Dieses Viereck ist keine Raute, weil die vier

Seiten nicht gleichlang sind“. Erst wenn die Personen auf der dritten Stufe angelangt sind, können sie aufgrund der in Relation gesetzten Eigenschaften akzeptieren, dass ein Quadrat eine Raute ist. Dabei stellt VAN HIELE (1986, S.50) fest: „This acceptance must be voluntary; it is not possible to force a network of relations on someone. If you want to convince them, you can point out the difficulty of producing general statements about rhombuses that preclude squares. But if the pupils do not yield to this argument, there is little to be done.“
An dieser Stelle ist ein Blick in die Historie interessant: So findet man in den *Elementen* des EUKLID folgende Definitionen:

> „22. (30-34) Von den vierseitigen Figuren ist ein **Quadrat** jede, die gleichseitig und rechtwinklig ist,
> ein **längliches Rechteck** jede, die zwar rechtwinklig aber nicht gleichseitig ist,
> ein **Rhombus** jede, die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist,
> ein **Rhomboid** jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig ist;
> die übrigen vierseitigen Figuren sollen **Trapeze** heißen“ (EUKLID 2003, S.2).

Für EUKLID ist, ebenso wie für Personen auf dem ersten van-Hiele-Level, ein Quadrat keine Raute, während die Mathematiker von heute ein Quadrat als (besondere) Raute ansehen. Konsequenterweise muss es irgendwann einmal jemanden gegeben haben, der es erstmals für sinnvoll hielt, eine Raute so zu definieren, dass ein Quadrat durch die Definition nicht ausgeschlossen ist. Es wird aber auch sehr deutlich, dass es durchaus nicht alternativlos ist, derartig vorzugehen, so dass die Kenntnis der historischen Entwicklung hier ein größeres Bewusstsein für die Schwierigkeiten, die sich für Schülerinnen und Schüler an dieser Stelle ergeben können, schaffen kann.
Eine Kosequenz, die sich für VAN HIELE hieraus ergibt, ist, dass eine Person, die sich auf einer bestimmten Stufe befindet und auf dem sprachlichen Niveau dieser Stufe argumentiert, sich nicht mit einer Person verständigen kann, die sich auf einer niedrigeren Stufe befindet. Oder anders herum formuliert: eine Person, die sich auf einem niedrigeren Niveau befindet, kann die Sprache des nächsthöheren Niveaus nicht verstehen. Gleichzeitig erfordert das Sprechen über die Strukturen eines Niveaus, eine Art Metagespräch über dieses Niveau, die Sprache der nächsthöheren Stufe.
Der Lernprozess, der den Aufstieg von einer Phase zur nächsthöheren ermöglicht, findet nach

van Hiele in fünf Phasen statt. In der ersten Phase, die er „*information*" (vgl. ebenda, S.52) nennt, machen sich die Schülerinnen und Schüler mit dem neuen Thema vertraut. In der zweiten Phase, der „*guided orientation*", erkunden sie, eventuell durch die Lehrperson geführt, anhand von Aufgaben Eigenschaften und Beziehungen, die für das neue Thema relevant sind. In der dritten Phase, der „*explicitation*", versuchen sie, die Beziehungen in Worte zu fassen, so dass sie gleichzeitig die zugehörigen Fachwörter, d.h. die erforderliche Sprache, erlernen. Damit wird zugleich ein Wissens- und Begriffsnetzwerk, bezogen auf den jeweiligen Inhalt, aufgebaut. In der vierten Phase, der „*free orientation*", lernen sie anhand von allgemeinen Aufgaben, sich selbst in dem neu aufgebauten Netzwerk zurechtzufinden. In der fünften und letzten Phase schließlich, der „*integration*", erarbeiten sie sich einen Überblick über die neu erlernten Dinge und integrieren sie in ihr gesamtes Wissensnetz.

Für die Lehrperson ergeben sich aus der Stufentheorie van Hieles mehrere Konsequenzen. Zu wissen, auf welcher Stufe sich der jeweilige Schüler befindet, kann verhindern, dass dieser inhaltlich dadurch „abgehängt" wird, dass der Lehrer oder die Lehrerin die Sprache einer zu hohen Stufe verwendet. Vor allen Dingen macht es nach van Hiele wenig Sinn, einen Geometriekurs mit Axiomen und Definitionen zu beginnen (wie es in den Niederlanden zu seiner Zeit üblich gewesen war), nicht nur, weil die Schülerinnen und Schüler dies nicht verstehen können, sondern auch, weil die Rolle der Lehrperson nicht die eines Allwissenden sein sollte, der Instruktionen gibt. Van Hiele hält es für besser, wenn die Lehrperson gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Stufen durchläuft und sich selbst auf das Niveau dieser Stufen begibt. Hierdurch wird eine gewisse Ebenbürtigkeit zu den Schülerinnen und Schülern hergestellt, zumindest derart, dass deren Argumente ernst genommen werden.

> „The task of the teacher should not be the impartation of knowledge. On the contrary, each time a teacher has to make ideas clear he or she must be aware of the necessity of defending these ideas again and again. The teacher should treat pupils as dignified opponents, opponents capable of introducing new arguments"(Van Hiele 1986, S.56).

Diese Auseinandersetzung, bei der die Lehrperson natürlich Anregungen zum Nachdenken und Überdenken geben kann, ist erforderlich, zum einen, damit die Schülerinnen und Schüler die erkannte Beziehungsstruktur in eigenen Worten beschreiben (können und) müssen, zum anderen, um eine Art Versachlichung zu erreichen. An dieser Stelle angelangt, findet automatisch ein Aufstieg zur nächsthöheren Stufe statt. Und auf jeder höheren Stufe ist eine intensivere Form formal-logischen Denkens erforderlich. So stellt sich das logische Denken als ein Ergebnis dieser Lernprozesse dar, was noch einmal deutlich macht, dass man die Schülerinnen und Schüler nicht gleich zu Beginn des Geometrielernens mit dem deduktiv-formalen System konfrontieren darf, denn hier befinden wir uns bereits auf der vierten Stufe. Und diese kann nicht verstanden bzw. erfolgreich durchlaufen werden, ohne nicht die dritte Stufe bewältigt zu haben. In diesem Zusammenhang erhebt Van Hiele (1986, S.57) den Vorwurf, dass die mathematische Lehre aber genau dies oft ignoriert:

> „The above-mentioned working method is not usual in mathematics, nor in other sciences. It is customary to illustrate newly introduced technical language with a few examples, but these examples for the most part are too poor in structure to capture the point of the technical language. The error that is made is the supposition that the technical language itself is able to express our meaning; in reality the technical language only gets its meaning through the examples. If the examples are deficient, the technical language will be deficient too. With such poor language, all reasoning will be replaced by information *giving* in order to clarify what is being presented; instead, reasoning shoud *yield* information that follows from the given data: With such poor language, it is easy to come to an uncritical acceptance of assertions and systems. Too great a confidence about mathematical solving of problems is promoted by it. For by this method, one learns to give attention to the laws of systems of signs and not to their signification. The deductive presentation of subject matter generally neglects the importance of the third stage, the stage of explicitation. Research on the foundations of knowledge is highly obstructed by this circumstance."

2.1.4 Phasen mathematischer Beweisprozesse im Schulunterricht

Das Führen eines mathematischen Beweises ist ein komplexer Prozess, bei dem regelmäßig nicht geradlinig von der Voraussetzung zum Beweis hingearbeitet wird, sondern bei dem sich unterschiedliche Phasen, sowohl heuristischer als auch deduktiver Art, abwechseln. Lediglich die anschließende Dokumentation suggeriert meistens, dass der Beweis als linearer Prozess abgelaufen sei. Beim Versuch des Nachvollziehens verbleiben für viele Schülerinnen und Schüler entscheidende Aspekte im Dunkeln, und sie verzweifeln, weil sie keine Beweisidee und keinen Startpunkt entdecken können.

Boero (1999) analysiert, wie Experten einen Beweis durchführen, und unterscheidet dabei sechs verschiedene Phasen innerhalb einer Beweisführung, die aufeinander aufbauen, aber nicht unbedingt linear ablaufen müssen:

1. *Entwicklung einer Behauptung*: die Problemsituation wird untersucht, wichtige Informationen werden entnommen und Gesetzmäßigkeiten und Bedingungen, unter denen diese auftreten, werden identifiziert. In dieser Phase wird aufgrund von empirischen und induktiven Argumenten eine plausibel erscheinende Vermutung generiert.

2. *Formulierung der Behauptung nach Erfordernissen der formalen Konvention*: durch die exakte Formulierung soll Klarheit bezüglich der Voraussetzungen der Aussage geschaffen und gleichzeitig die Veröffentlichung des Textes vorbereitet werden.

3. *Untersuchung der Behauptung*: hier findet die eigentliche Hypothesenprüfung statt. Argumente, die die Behauptung stützen, aber auch solche, die ihr entgegen stehen können, werden gesucht; der Anschluss an die Theorie soll erfolgen. In dieser Phase wird sowohl induktiv als auch deduktiv gearbeitet. Zusammen mit den vorangegangenen Phasen findet bis hier die wesentliche Exploration bezüglich des Beweises statt.

4. *Bildung der Beweiskette*: die zuvor eruierten Argumente werden zu einer deduktiven Beweiskette verknüpft.

5. *Verfassen eines Beweises, der den mathematischen Standards entspricht*: je nach Art der Publikation (beispielsweise in Schulbüchern oder im universitären Kontext) liegen unterschiedliche Anforderungen zugrunde, die sich durchaus auch verändern können (die Veröffentlichungen im 18. Jahrhundert waren formal anders aufbereitet als aktuelle Publikationen).

6. *Annäherung an einen formalen Beweis*

Dabei ordnet Boero die ersten drei Phasen der „private side of mathematicians' work" zu, während die letzten drei Phasen öffentlich kommuniziert werden.

Dies bedeutet, dass ganz wesentliche Aspkete, die beim Beweisen eine entscheidende Rolle spielen, wie zum Beispiel, überhaupt eine Beweisidee zu bekommen, nicht offengelegt werden. Aber eine Dokumentation, die die „private side of mathematicians' work" übergeht, ist für Schülerinnen und Schüler nicht wirklich hilfreich ist. Dies stellen auch Reiss *et al.* fest:

> "Dieser Prozess [wie bei Boero dargelegt, G.W.], insbesondere die explorativen Schritte, bleiben für manchen Mathematiklehrer und dementsprechend auch für die Schüler weitgehend intransparent. Der Schüler sieht nur das (im Schulbuch gegebene) Endergebnis im Sinne einer eindeutigen Schlussfolgerungskette mit definiertem Anfangs- und Endzustand. Ein Einblick in das Problemlöseverhalten des Experten mit seinen explorativen Komponenten und Irrwegen bleibt ihm hingegen versagt. So gelangt der Schüler und oft schon der Lehrer zu einem idealisierten mentalen Modell der Beweisführung, das letztendlich die Entwicklung geeigneter Problemlöseheuristiken verhindert" (Reiss *et al.* 2002, S.53).

Nach Reiss könnte Boeros Modell dennoch hilfreich beim Lernen von Beweisen sein, nämlich wenn es gelänge, auch die ersten drei Phasen für die Schülerinnen und Schüler transparent zu machen. „Boeros's model describes an expert's proving process, but it might also be adequate as a model for learning to prove. The first four phases of the model are regarded particularly important for learners as they describe the process of finding a solution and seeking evidence that it is correct" (Reiss *et al.* 2008, S.457).
Hilbert *et al.* (2008, vgl. S.55) schlagen daher vor, eine modifizierte Version von Boeros Phasenmodell speziell für den Schulunterricht zu nutzen:

1. *Aufstellen einer Vermutung*: Untersuchung der Situation und Sammeln von (nützlichen) Informationen. Beispielsweise kann geprüft werden, ob der vermutete Sachverhalt in verschiedenen Beispielen zutrifft, wobei gleichzeitig nach Gründen dafür gesucht werden soll.

2. *Formulieren einer Behauptung*: Eine präzise Formulierung der Vermutung nach den zugrundeliegenden Konventionen soll als Grundlage für das weitere Vorgehen aufgestellt werden.

3. *Untersuchung der Behauptung*: Angemessene Argumente, um die Behauptung zu validieren, werden gesucht.

4. *Auswahl und Verknüpfung von angemessenen Argumenten zu einer Beweiskette*: Die Argumente werden nach Maßgabe der in der Klasse herrschenden Standards zu einem Beweis zusammengefügt.

Hilbert *et al.* (2008, S.55) verzichten auf die fünfte und sechste Phase Boeros und begründen dies wie folgt:

> „First, we wanted to address the main deficits that Reiss et al. (2001) found in their study (i.e., students' difficulties in finding a starting point for a proof or in identifying and using correct mathematical arguments) in a first step [Näheres zu dieser Studie in Abschnitt 2.2, G.W.]. Second, the last two phases mainly apply to formerly unsolved proofs that are to become accepted pieces of knowledge among mathematicians. Proofs in the classroom, on the other hand, are not destined for this degree of mathematical factuality and thus do not need to complete the entire process."

Auch die Unterteilung von Hilbert *et al.* ist nicht so zu verstehen, dass der Prozess linear abläuft. Stattdessen soll sowohl die Komplexität eines Beweises herausgestellt werden, als auch das Wechselspiel zwischen explorativen, induktiven und deduktiven Phasen. Hilbert *et al.* halten es für erforderlich, Lernumgebungen zu schaffen, die diese unterschiedlichen Phasen herausstellen und Unterstützung speziell auch für den heuristischen Aspekt des Beweisens liefern. Eine Möglichkeit, dieses zu leisten, sehen sie im Einsatz von heuristischen Lösungsbeispielen (s. Abschnitt 2.2).
Sowohl bei Boero als auch bei Hilbert *et al.* lassen sich die dritte und vierte Phase unter dem Titel „Beweisfindung" zusammenfassen, und dieses Finden eines Beweises kann auch als Problemlöseprozess angesehen werden. Hierzu hat Pólya (1949) in seinem berühmten Werk „Schule des Denkens" den Vorschlag gemacht, denselben in vier Phasen zu unterteilen:

1. Verstehen der Aufgabe
2. Ausdenken eines Plans
3. Ausführen des Plans
4. Rückschau

Für die zweite und dritte Phase, die den Kern ausmachen, gibt er bestimmte heuristische Fragestellungen an die Hand, die hilfreich sein können, wie zum Beispiel, den Beweis auf bereits bekannte Probleme zurückzuführen, zunächst erst verwandte Aufgaben zu lösen oder das Problem zu vereinfachen. Er schägt allerdings keine spezielle Sequenz von aufeinanderabfolgenden Schritten vor, die zu durchlaufen wären.

2.1.5 Alternativen zu streng-deduktiven Beweisen

> „Die deduktive Struktur der traditionellen Geometrie ist nicht gerade immer ein didaktischer Erfolg gewesen. Es gibt heute Leute, die glauben, es habe daran gelegen, daß sie nicht deduktiv genug war. Ich glaube vielmehr, der Grund war der, daß diese Deduktivität nicht als Nacherfindung gelehrt wurde, wie Sokrates es tat, sondern, daß man sie dem Schüler aufzwingen wollte. Jedenfalls wird heute von manchen die Abschaffung der Geometrie gepredigt und vorgeführt, und unter denen, die die Jugend dem Kulturerbe zuführen sollen, gibt es manche, die froh sind daß sie nun diese lästige Geometrie der kulturellen Müllabfuhr anvertrauen dürfen. [...] Am gefährlichsten aber waren die, die die alte Geometrie glaubten retten zu können, indem sie ihre deduktive Struktur verstärkten; es war ein ganz hoffnungsloses Unterfangen. Geometrie ist nicht nur Deduktivität“ (Freudenthal 1973b, S.376).

Die Frage danach, ob es Alternativen zum deduktiven Vorgehen gibt oder nicht, wird durchaus kontrovers beantwortet. So konstatiert beispielsweise Walsch (1975, S.7), einer der führenden Mathematikdidaktiker in der DDR: „In ihr [der Mathematik, G.W.] ist der deduktive Beweis die einzig mögliche Form der Erkenntnissicherung.“ Diese Aussage muss natürlich vor dem Hintergrund gesehen werden, dass in der DDR im Mathematikunterricht eine sehr viel stärkere Wissenschaftsorientierung als in der BRD vorherrschte, was sich beispielsweise im Gebrauch der Fachterminologie und im Stellenwert von Logik und Beweisen widerspiegelt (vgl. hierzu Griesel 2003). So wurden im Schulunterricht der DDR nur solche Begriffe verwendet, die auch in der mathematischen Wissenschaft üblich waren, und dies bereits vom ersten Schuljahr an und es wurde sehr viel Wert auf Wenn-dann-Formulierungen gelegt, wie überhaupt den korrekten Formulierungen von Anfang an große Bedeutung zugesprochen wurde. Auch

in Bezug auf das Beweisen gab es Unterschiede: „Während in der ehemaligen DDR auch die Reproduktion von Beweisen und das selbständige Finden von Beweisen von allen Schülern verlangt wurde, begnügte man sich in der BRD in den Haupt- und Realschulen weithin nur mit intuitiver Einsicht oder gar nur Plausibilitätsargumenten. In den Gymnasien wurden zwar Beweise geführt, meist entstanden in einem gemeinsamen Unterrichtsgespräch. Sie führten auch häufig zur Einsicht in die Gültigkeit des Satzes durch den Schüler. Eine Reproduktion durch den Schüler wurde jedoch meist nicht verlangt und erst recht dann auch nicht Beweisaufgaben, in welchen der Schüler selbständig Beweise führen mußte“ (Griesel 2003, S.168).
Die großen Schwierigkeiten, die Schülerinnen und Schüler beim Beweisen haben, führt Walsch allerdings nicht auf die Überforderung durch die formale Strenge zurück, sondern auf den diesbezüglich unzureichenden Mathematikunterricht: „Die Unklarheiten vieler Schüler hinsichtlich der Methoden zur mathematischen Erkenntnissicherung waren nicht auf mangelnde geistige Voraussetzungen, sondern auf Versäumnisse des Mathematikunterrichts zurückzuführen“ (Walsch 1975, S.129). Durch einen geeigneten Unterricht, der die Schülerinnen und Schüler von Klasse 1 an auf das Beweisen vorbereite, eine saubere Begriffsklärung trainiere (Unterscheidung von Begriffen, die eines Beweises bedürfen, also Sätzen, und von Begriffen, die nicht beweisbedürftig sind, wie Definitionen, Terme, Aussageformen etc.) und ihnen die erforderlichen Schlussweisen zur Verfügung stelle, könne das Beweisen, und zwar formal-deduktiv, erheblich verbessert werden. Dies sei auch im Hinblick darauf wichtig, den Abstand zur fachwissenschaftlichen Mathematik nicht zu groß werden zu lassen: „Es wäre schädlich, durch eine zu starke Normierung der im Unterricht verwendeten Sprechweisen eine ungerechtfertigte Kluft zwischen „Schulmathematik“ und mathematischer Wissenschaft zu schaffen“ (ebenda, S.145).
Demgegenüber ist in der Mathematikdidaktik allerdings auch viel Kritik an strengen, formal-deduktiven Beweisen im Schulunterricht geübt worden. So legen beispielsweise Wittmann & Müller (1988, S.240) an Beispielen dar, „wie hinderlich eine formalistische Beweisauffassung für die Entwicklung eines für den jeweiligen sozialen Kontext angemessenen Beweisverständnisses sein kann.“ Zudem stellt sich die Frage, inwieweit ausschließlich ein streng formalistischer Beweis der von Manin (2010, S.49) aufgestellten Forderung gerecht werden kann: „A good proof is one that makes us wiser.“
Aus dieser Haltung heraus entwickelten sich unterschiedliche Ansätze, alternative Arten von Beweisen zu etablieren, die für Schülerinnen und Schüler angemessener sind, denn **dass** das

Beweisen eine wichtige Tätigkeit des Mathematikunterrichts ist, ist unumstritten, wie auch Schupp (2010, S.97) herausstellt: „Nicht näher eingehen werde ich auf die wohl unumstrittene Tatsache, dass das Beweisen als fundamentale Idee der Mathematik und als typisch mathematische Methode des kritischen Vernunftgebrauchs unverzichtbar ist.“
Ausgehend von der Kritik am formalistischen Beweisen sind in der Mathematikdidaktik unterschiedliche Konzepte für alternative Vorgehensweisen ausgearbeitet worden. Im Folgenden möchte ich in Anlehnung an Elschenbroich (2005) eine kurze Übersicht über die in der Literatur entwickelten Alternativen geben. Dabei wird sich zeigen, dass die verschiedenen Bezeichnungen nicht immer so eindeutig definiert sind, dass trennscharf zwischen den einzelnen Beweisarten unterschieden werden kann. Zudem ist ein unterschiedlicher Grad an Strenge zu konstatieren.

„Siehe“-Beweise

Eine wichtige Rolle in Verständnisprozessen spielt die Anschauung, die, obwohl sie durchaus begrenzt sein kann (z.B. kann man sich die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ noch gut vorstellen, während dies beim $\mathbb{R}^n$ für n>3 wohl nur noch schwerlich gelingt), dennoch bedeutsam und hilfreich ist.

> „Für unsere Belange ist die Feststellung von Bedeutung, daß alle 3 Funktionen der Anschauung [gemeint sind: erkenntnisbegründende, -begrenzende und -fördernde Funktion, G.W.] eine produktive Komponente enthalten:
>
> 1. Anschauliche Konfigurationen können Fingerzeige, Hilfestellungen und sogar substantielle Beiträge zur Begründung mathematischer Sachverhalte enthalten.
> 2. Paradox erscheinende, die Anschauung offenbar übersteigende Situationen können den Anstoß zu vertiefteren Erkundungen bilden und zu subtileren Unterscheidungen führen.
> 3. Anschauliche Gegebenheiten können zu neuen Begriffsbildungen anregen und die Gedanken bei der Lösung von Problemen leiten.
>
> Ein Paradebeispiel für die begründende Funktion der Anschauung sind die bekannten „Siehe“-Beweise in der Geometrie, wie sie uns in etwa von Thales von

Milet (624-546 v.Chr.) überliefert sind“ (Winter 1991, S.136).

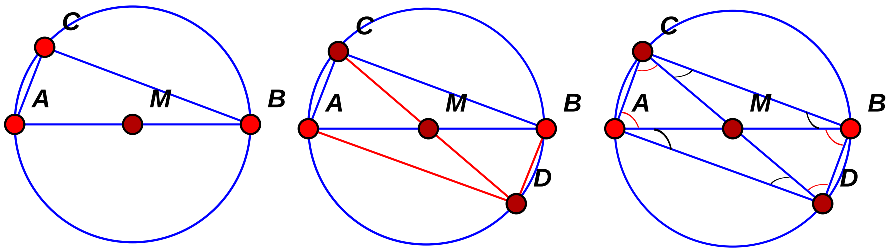


Abbildung 2.4 – *„Siehe“-Beweis zum Satz des Thales nach (*Winter *1991, S.137)*

In diesem Beweis ohne Worte wird anschaulich bewiesen, dass in jedem Dreieck, bei dem eine Seite Durchmesser des zugehörigen Umkreises ist, der dieser Seite gegenüberliegende Winkel ein rechter ist. Natürlich reicht bloßes Hinsehen nicht, sondern die Zeichnungen müssen der Reihe nach interpretiert werden: In der ersten Zeichnung wird ein Dreieck ABC gezeigt, dessen Seite AB Durchmesser des Umkreises ist. Dieses Dreieck kann zum punktsymmetrischen Sehnenviereck $ABCD$ ergänzt werden, indem man beispielsweise C an M spiegelt oder die Gerade durch C und M zeichnet und deren zweiten Schnittpunkt mit dem Kreis D nennt (s. zweite Zeichnung). Nun können in der letzten Zeichnung zwei Paare gleichschenkliger und kongruenter Dreiecke gesehen werden und damit zweimal vier gleich große Winkel. Daraus kann gefolgert werden, dass die Winkel des Vierecks $ABCD$ alle kongruent zueinander sind und damit jeweils 90 Grad groß, womit gezeigt ist, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
Winter (1991, S.137) resümiert wie folgt:

> „Wenn auch alle diese Gedanken nicht explizit ausgesprochen werden oder zu werden brauchen, so ist doch der anschauliche „Siehe“-Beweis nur insoweit ein Beweis, als das Sehen mit Denken (einschließlich des Erinnerns an Vorwissen) durchsetzt ist. Es muß zwar keine Deduktionskette (Berufung auf bewiesene Sätze/Axiome) bewußt ausgesprochen oder niedergeschrieben werden - und hierin könnte eventuell auch eine Entlastung für den Lernenden liegen -, jedoch handelt es sich gleichwohl um begründendes Denken. Freilich ist es ein <u>Denken beim Sehen</u>, und man sollte ohne falsche Scham zugeben, daß es (auch) ein leibliches, physiologisch-psychologisches Wahr-nehmen ist. Die Verachtung, die Plato und seine Anhänger

> bis heute den gezeichneten Figuren (als niedrigen Ersatzstücken der wahren Ideen), dem empirischen Messen und dem sinnlichen Wahrnehmen entgegenbringen, ist sachlich nicht zu rechtfertigen und pädagogisch geradezu destruktiv.“

Das Besondere beim Siehe-Beweis ist somit, dass alle zum Beweis benötigten Informationen bereits in der bzw. den Zeichnungen vorliegen und daraus abgelesen, **gesehen** und auch **eingesehen** werden können. Die Leistung, aus diesen Informationen aktiv eine schlüssige Beweiskette zu bilden, bleibt dem Interpreten überlassen. Insgesamt gesehen liegt der vollständige Beweis also bereits vor und soll dem Betrachter die zugrundeliegenden Zusammenhänge offenbaren.

Plausibles Schließen

Pólya (1975) verwendet den Begriff des „Plausiblen Schließens“ im Kontrast zum Begiff des „demonstrativen Schließens“, wobei letzterer für die übliche deduktive Vorgehensweise in der Mathematik steht. Das „Plausible Schließen“ hingegen geht induktiv vor: durch bestimmte Betrachtungen und Beobachtungen kann zwar nicht der Wahrheitsgehalt einer Aussage bestimmt werden, es kann aber eine erhöhte Sicherheit an die Glaubwürdigkeit der Aussage erreicht werden.
Dazu gibt es nach Pólya unterschiedlich Vorgehensweisen. Eine ist die „**Verifizierung einer Konsequenz**“ (ebenda, S. 13): habe ich eine Vermutung A und weiß, dass die Konsequenz B aus A folgt, so wird A glaubwürdiger, wenn es mir gelingt zu zeigen, dass B wahr ist. (Beispiel: Ich habe die Vermutung, dass bei jedem konvexen Polyeder die Anzahl der Flächen plus die Anzahl der Ecken gleich der Anzahl der Kanten plus zwei ist (A). Daraus kann ich die Konsequenz ziehen, dass dies auch für den Würfel so ist (B), und in der Tat gilt: 6 (Anzahl der Flächen) + 8 (Anzahl der Ecken) = 14 = 12 (Anzahl der Kanten) + 2 (Verifikation von B). Dadurch weiß ich zwar immer noch nicht, ob A stimmt, die Vermutung ist allerdings glaubwürdiger geworden.)
Eine Steigerung kann erzielt werden durch die „**Sukzessive Verifizierung mehrerer Konsequenzen**“ (ebenda, S. 15), dies umso besser, je verschiedener die Konsequenzen sind. Beispielsweise kann ich versuchen, die Vermutung A im oben genannten Beispiel zu erhärten, indem ich sie noch am Beispiel des Oktaeders oder eines anderen platonischen Körpers überprüfe. Dies wird mich zwar sicherer machen; eine wesentlich höhere Glaubwürdigkeit von A

bekomme ich allerdings, wenn ich sie noch an weniger regelmäßigen Körpern überprüfe, wie Pyramiden oder Körpern, bei denen Ecken abgestumpft sind (vgl. auch PÓLYA 1969). Daher sieht PÓLYA (1975, S.19) auch den höchsten Zuwachs an Glaubwürdigkeit beim „**Verifizieren einer unwahrscheinlichen Konsequenz**".

Eine weitere Möglichkeit ist die „**Folgerung auf Grund von Analogie**" (PÓLYA 1975, S.21): finde ich eine Aussage B, die analog zur Vermutung A ist, und kann ich B verifizieren, so wird die Vermutung A glaubwürdiger. In unserem oben genannten Beispiel ist das Analogon zum Polyeder im Raum das Polygon in der Ebene. Gelingt es, eine Aussage B zu finden, die analog zu A ist, sich aber auf Polygon und Ebene bezieht, und gelingt es, diese Aussage B zu verifizieren, so wird A glaubwürdiger. PÓLYA (1969, S.77) bewerkstelligt dies, indem er die urpüngliche Gleichung $E + F = K + 2$ umstellt und die Größen F, E und K in einer „natürlichen Reihenfolge" anordnet, nämlich nach Dimensionen. Damit kommt er bei den Polyedern auf die Gleichung: $E - K + F - 1 = 1$, weil die Ecken null-dimensional, die Kanten ein-dimensional und die Flächen zwei-dimensional sind. Die 1, die auf der linken Seite der Gleichung subtrahiert wird, steht für das einzige drei-dimensionale Element, das Polyeder selbst. Die analoge Gleichung für Polygone lautet: $E - K + 1 = 1$ und kann leicht verifiziert werden.

Auch hier gibt es noch eine Steigerung, die PÓLYA (1975, S.23) „**Vertiefung der Analogie**" nennt: „Es erscheint vernünftig, daß die Tragkraft eines Analogieschlusses gleichzeitig mit der Tragweite der Analogie, auf die er sich gründet, zunimmt" (PÓLYA 1975, S.26).

PÓLYA behauptet nicht, dass das plausible Schließen der Ersatz für einen Beweis ist. Er führt aber gute Gründe an, um das plausible Schließen im Unterricht zu lehren, gerade auch, weil die Schülerinnen und Schüler die rein deduktive Vorgehensweise oftmals nur als formales, sinnentleertes Vorgehen verstehen, welches man für Prüfungen lernt und danach getrost wieder vergessen kann:

> „Nun ist wohl das Resultat der schöpferischen Arbeit des Mathematikers demonstratives Schließen, ein Beweis, aber der Beweis wird durch plausibles Schließen, durch Erraten, entdeckt.
> Wenn es sich aber so verhält, dann sollte es im mathematischen Unterricht einen Platz für Erraten geben. Der Unterricht sollte auf Erfindung vorbereiten, oder doch wenigstens einen kleinen Begriff davon vermitteln. Auf keinen Fall sollte er die Keime des Erfindens in den Schülern ersticken. [...] Ich habe nicht gesagt, daß

> wir das Beweisen vernachlässigen sollen. Im Gegenteil, man muß beides lehren, beweisen und erraten, beide Arten des Schließens, die demonstrative und die plausible. Es ist weniger wichtig, daß der Schüler in dem mathematischen Unterricht spezielle Tatsachen oder Kunstgriffe, Sätze oder Techniken, als daß er die beiden folgenden Dinge lernt:
> Erstens, eine gültige Beweisführung von einem ungültigen Versuch, einen Beweis von einer Vermutung zu unterscheiden.
> Zweitens, eine vernünftigere Vermutung von einer weniger vernünftigen zu unterscheiden“ (PÓLYA 1975, S.241f.).

Folgt man PÓLYA, ist das plausible Schließen ein Mittel, nach Begründungszusammenhängen zu suchen, und stellt darüber hinaus einen wichtigen Schritt beim lokalen Ordnen dar. Insofern kann es durchaus als eine wichtige Vorstufe der Beweisfunktion des Systematisierens anerkannt werden.

Anschauliche Beweise

In der mathematikdidaktikschen Forschung wird immer wieder die Feststellung gemacht, dass Schülerinnen und Schüler zum einen große Probleme beim Führen eines Beweises haben und zum anderen oftmals auch nicht die Notwendigkeit sehen, einen Beweis führen zu müssen. BENDER (1989, S.118) sieht hierfür folgende Gründe als zentral an:

> „Die ursächlichen Faktoren seien noch einmal hervorgehoben:
>
> - Besonders am Anfang des systematischen Aufbaus (wo zugleich mit dem Beweisen begonnen wird) geht es um Aussagen, die anschaulich trivial sind und deswegen als Axiome verwendet werden oder jedenfalls die Auswahl von Axiomen so beeinflussen, daß sie leicht abgeleitet werden können.
> - Wegen dieser Evidenz kommt kein Beweisbedürfnis auf.
> - Es ist unklar, was alles als Prämissen in Frage kommt.
> - Die Voraussetzungen wirken häufig nicht vorgängiger als die Behauptungen.
> - Der Beweis liefert keine (zusätzliche) Einsicht.“

Bender schlägt alternativ vor, in der Schule keine axiomatische Geometrie zu betreiben, sondern stattdessen einige Axiome, wie Existenz-, Anordnungs- und Vollständigkeitsaxiome gar nicht zu thematisieren, evidente Sätze wie Stufenwinkelsatz und Kongruenzsätze nicht zu beweisen und andere (wie z.B. den Strahlensatz) rein qualitativ abzuhandeln (ebenda S. 119f.). Das weitere Vorgehen kann eng am Anschauungsraum, der als euklidisch angenommen wird, erfolgen:

> „Nach unserer Auffassung (s. Bender & Schreiber 1985) gehören zu einem geometrischen Begriff seine Realisate (u.a. Zeichnungen) wesentlich mit dazu, und diese, sowie der ganze reale Raum sind nicht bloße Modelle für eine ansonsten autonome mathematische Theorie. Es stellt sich also gar nicht erst die Frage nach Rechtfertigung, Zulässigkeit [...] oder prinzipieller Eignung der Objekte des Anschauungsraums zur Modellierung geometrischer Begriffe; - es besteht da vielmehr eine recht weit gehende (partielle) Identität“ (Bender 1989, S.100f.).

Auf dieser Grundlage können dann anschauliche Beweise geführt werden, die, wie der Name bereits besagt, eng an die räumliche Anschauung angebunden sind. Dabei ist von Vorteil, dass die Schülerinnen und Schüler anhand der zwei- oder dreidimensionalen konkreten Objekte eine sehr viel bessere Vorstellung entwickeln können als bei der bloßen Abarbeitung von linear-sequentiellen Zeichenketten. Dieses wiederum kann genutzt werden, um die anfänglich erkannte Problematik zu überwinden, bei Schülerinnen und Schülern überhaupt ein Beweisbedürfnis zu erzeugen: „Ein Mittel der Verallgemeinerung ist dann, mehrere Individuen zu betrachten und überhaupt die Aufmerksamkeit auf verschiedene Fälle, Sonderfälle, Einbettung in den allgemeinen Fall, Entartungsfälle zu lenken. Da ist dann zu prüfen, ob der behauptete Sachverhalt noch zutrifft, ab wann nicht mehr; und man stößt auf die Frage, woran es liegt, wenn er nicht mehr zutrifft, man wird also zu deduktivem Schließen motiviert“ (ebenda, S. 109f.). Damit regen anschauliche Beweise zur Beweisfindung und damit stark zur Verifikation eines mathematischen Sachverhalts an (anders als beispielsweise der Siehe-Beweis, bei dem der komplette Beweis schon in der Zeichnung enthalten ist).
Ein Beispiel für einen anschaulichen Beweis, den auch Bender erwähnt, findet sich bei Heidenreich (1987), nämlich der sogenannte „Rotwein-Beweis“ bezüglich des Satzes, dass das Kantenmittensechseck eines Würfels eben ist (vgl. Abbildung 2.5).

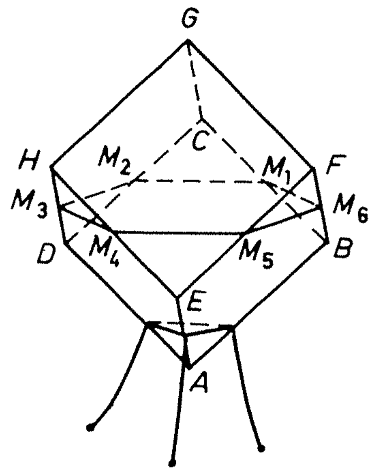


Abbildung 2.5 – *„Rotwein-Beweis“ aus (*HEIDENREICH *1987, S.137)*

HEIDENREICH schlägt vor, einen Würfel aus Plexiglas zu betrachten, welcher mit Hilfe eines Ständers so auf eine Ecke gestellt wird, dass eine Raumdiagonale senkrecht zum Fußboden steht. Dieser Würfel wird mit Rotwein gefüllt. Lässt man nun den Wein am Punkt A, an dem sich ein Zapfhahn befindet, wieder abfließen, so fällt die Rotweinoberfläche und erreicht zunächst gleichzeitig die Ecken C, F und H und später gleichzeitg die Punkte $M_1, ..., M_6$, womit gezeigt ist, dass diese in einer Ebene liegen. Dabei spielen natürlich die Überlegungen, dass der Würfel drehsymmetrisch bezüglich der Raumdiagonalen AG ist, damit die Kanten *GH*, *GF* und GC die gleiche Neigung gegenüber AG haben und damit **alle** Kanten die gleiche Neigung gegenüber AG (da die anderen Würfelkanten zu je einer der drei Kanten *GH*, *GF* oder GC parallel sind), eine entscheidende Rolle.
Nach HEIDENREICH ist der Rotwein-Beweis ein vollwertiger Beweis:

> „Im Rotwein-Beweis wäre ein tatsächlich durchgeführtes Experiment sicher hübsch anzuschauen (von der Verwendung des dabei anfallenden Rotweins ganz zu schweigen), aber das Experiment macht den Rotwein-Beweis nicht überzeugender. Für den Rotwein-Beweis genügt das Gedankenexperiment. Man stellt sich den Plexiglaswürfel und den Rotwein vor, folgt dem Fallen des Rotweinspiegels mit den entsprechenden Überlegungen und weiß zum Schluß, daß das Sechseck eben sein muß, weil der Rotweinspiegel gleichzeitig die sechs Punkte $M_1, ..., M_6$ erreicht. Das einzige Defizit (in meinen Augen ist es keines) des Rotwein-Beweises ist:

> Es fehlt die bei mathematischen Beweisen meist übliche formale Darstellung" (Heidenreich 1987, S.138).

Der Rotwein-Beweis ist ein Beispiel für die Betrachtung von stetigen Bewegungen, die Bender in diesem Zusammenhang als besonders hilfreich ansieht, da deren Visualisierungen in besonders großem Maße anschaulich sind. Zudem können sie dabei helfen, eine Zeichnung als Repräsentanten einer Figur zu deuten und damit den Variablencharakter der Zeichnung unterstützen, so dass man es, „besonders wenn man alle wesentlich verschiedenen Fälle durchlaufen hat, nicht mehr weit bis zur Allgemeingültigkeit" (Bender 1989, S.110) hat.
Diese Betrachtung von stetigen Bewegungen wird durch den Einsatz einer DGS natürlich sehr viel einfacher, als es zu der Zeit war, als Bender den hier zitierten Aufsatz schrieb (Cabri-géomètre als Vorreiter bei den DGS kam 1989 in Frankreich auf den Markt). Daher sind an dieser Stelle noch einmal die Vorteile, die Bender (1989, S.129) herausarbeitet, aufgelistet:

> „Folgende Funktionen stetiger Bewegungen bzw. Verformungen [lassen sich, G.W.] bei elementargeometrischen Beweisen ausmachen:
>
> A. Sie liefern den Beweis selbst (z.B. Existenznachweis mit Stetigkeitsargumenten).
>
> B. Sie vertiefen den Glauben an den Beweis, indem sie in plausibel bzw. plausibler machen [...].
>
> C. Sie unterstützen die Einsicht in die Allgemeingültigkeit einer Behauptung, indem sie viele Fälle zeigen, Sonderfälle in allgemeine Fälle einbetten (und sie so hervorheben) und überhaupt Übergänge zwischen Fällen demonstrieren.
>
> D. Sie erzeugen Vermutungen, Sätze, Beweisideen, indem sie Veränderungen und Invarianten zeigen [...].
>
> E. Sie visualisieren den Ablauf eines Beweises und strukturieren ihn, indem sie einzelne Beweis'stationen' verbinden und die Umstrukturierungsoperationen leiten (z.B. 'Scherungsbeweis' des Kathetensatzes).
>
> F. Sie stehen für Handlungen und machen die geometrischen Operationen dadurch zugänglicher, plausibler.
>
> G. Sie regen eine allgemeine Sichtweise geometrischer Figuren als beweglich

> bzw. veränderlich an, die grundsätzlich geometrischen und außergeometrischen Denkweisen förderlich ist.“

Der eigentliche Beweis werde nach Bender allerdings in der Regel nicht dynamisch, sondern im Nachgang an einem statischen Bild geführt. In dieser Einschätzung unterscheidet er sich deutlich von der weiter unten ausgeführten Einschätzung Elschenbroichs, der, im zeitlichen Abstand von ca. 10 Jahren, den Begriff des „visuell-dynamischen Beweisens“ verwendet und damit auf den sich anschließenden Beweis am statischen Bild verzichtet.

Tätigkeitsbeweise

Für viele Mathematikdidaktiker wie Wittmann, Kirsch oder Mormann nehmen Modelle in der Mathematik eine herausragende Rolle ein.

> „Das Wissen der wissenschaftlichen Mathematik wie das der Schulmathematik ist ein Wissen, das sich in Modellen darstellt. Die Modelle des mathematischen Wissens reichen vom abstrakten „Mengentheoriemodell“ der gesamten Mathematik bis zum physikalischen Raum als Modell der euklidischen Geometrie und den verschiedenen Urnenmodellen in der Wahrscheinlichkeitstheorie. [...] Modelle des mathematischen Wissens besitzen ihren Modellcharakter nicht von sich aus, sondern gewinnen ihn erst dadurch, daß man in ihnen gewisse theoretisch bedeutsame Tätigkeiten ausführt; sei es, daß man Zeichenreihen nach gewissen Regeln manipuliert, geometrische Konstruktionen durchführt oder Zufallsexperimente anstellt“ (Mormann 1981, S.81).

Das gemeinsame all dieser unterschiedlichen Modelle ist dabei, dass sie eine Beziehung zwischen mathematischem Wissen und mathematischer Tätigkeit herstellen. Dabei liegt die Bedeutsamkeit der Tätigkeit darin, das Wissen an die Anschauung anzubinden und somit in das globale Wissensnetz zu integrieren (beispielsweise ist es etwas anderes, eine Grundvorstellung vom Begriff „Variable“ zu haben, als einfach nach syntaktischen Regeln mit ihnen zu operieren). Gleichwohl müsse man sich im klaren darüber sein, dass die Modelle durchaus Grenzen bezüglich der Analyse des Gegenstandsbereich, den sie darstellen, haben. Daher muss der Umgang mit dem Modell reflektiert sein und die vom Modell gelieferten Ergebnisse müssen kritisch hinterfragt werden. Sollte ein Modell eine Aussage liefern, die nicht akzeptabel ist, muss es dementsprechend verworfen werden. Ein Beispiel für ein derartiges Modell, das den Beweis für die Aussage „168 = 169“ zu liefern scheint, findet sich in Abbildung 2.6.

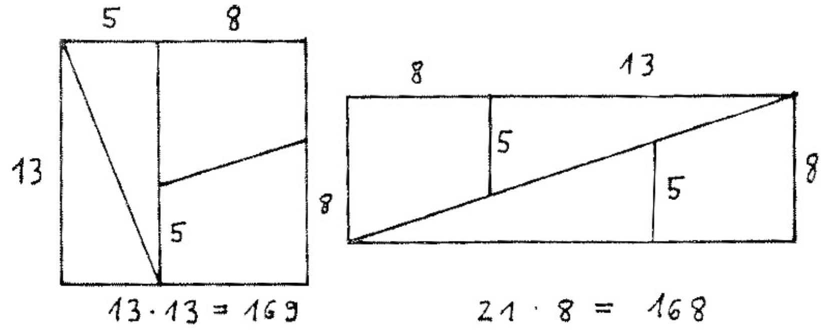


Abbildung 2.6 – *Geometrischer Beweis der Aussage 168 = 169? aus (*Mormann *1981, S.82)*

Die Bedeutsamkeit von Tätigkeiten in Zusammenhang mit dem Einsatz von Modellen stellt Mormann (1981, S.84) folgendermaßen dar:

> “Modelle sind keine bloßen Abbilder oder Vertreter der Gegenstände, sondern repräsentieren diese unter bestimmten Gesichtspunkten, die von den jeweiligen Interessen der Modellbenutzer abhängen. Will man die Bedeutung eines Modells verstehen, muß man es als einen Tätigkeitsbereich verstehen; die Modellhalftigkeit eines Modells rührt wesentlich von der Aktivität eines modellierenden Subjekts her. D.h., das Modell wird Modell erst durch die Tätigkeit des Modellbenutzers. Modelle eröffnen so eine theoretische Perspektive oder einen theoretischen Rahmen, in den das einzelne Faktum eingeordnet wird. Modelle haben verallgemeinernde Funktion.“

Diese verallgemeinernde Funktion zeigt sich darin, dass in einem guten Modell neue und grundlegende Gesichtspunkte des modellierten Objektbereichs entdeckt werden können, die dann im Modell durch eine der zahlreichen Handlungen, die darin möglich sind, bewiesen werden können. Wichtig bei der Beziehung zwischen Modell und Realität ist, dass das Modell der Realität von der globalen Struktur her ähnelt, wobei allerdings nicht alle Details realistisch interpretiert werden können. Damit wird nach Mormann „den Modellen eine gewisse Autonomie gegenüber der Realität“ (ebenda, S. 87) zugesprochen, was meistens nötig ist, um die

Handlungen im Modell richtig zu verstehen.

Besonders geeignet zur Nutzung von mathematischen Modellen und Modellierungen ist nach MORMANN die euklidische Geometrie als Modell des Anschauungsraums. Hier können konkrete Modelle von geometrischen Figuren erstellt und im Rahmen von Tätigkeitsbeweisen eingesetzt werden. Als Beispiel führt MORMANN den Tätigkeitsbeweis zum Satz: „Im gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen gleich lang“ an (vgl. Abbildung 2.7):

> „Ein Beweis durch Tätigkeit kann etwa folgendermaßen aussehen: Man schneidet das Trapez „aus der Zeichenebene aus“, dreht es und setzt es dann „umgekehrt“ wieder ein. Ein solcher „Tätigkeitsbeweis“ trägt bereits alle wesentlichen Züge eines echten mathematischen Beweises, weil er nämlich nicht auf den einzelnen isolierten Gegenstand des speziellen Trapezes fixiert ist, sondern Bezug nimmt auf eine allgemeine Tätigkeit des Subjekts (Drehung, Symmetrie usw.), wodurch dieses Problem als ein Anwendungsfall ganz allgemeiner Tätigkeitskategorien des Subjektes erscheint.“

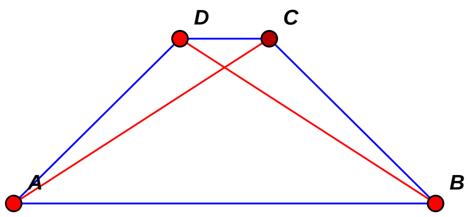


Abbildung 2.7 – *„Modell für den Tätigkeitsbeweis zum Satz: „Die Diagonalen im gleichschenkligen Trapez sind gleichlang“ nach (MORMANN 1981, S.90)*

An dieser Stelle zeigt sich die von mir zu Beginn dieses Kapitels genannte Unschärfe bezüglich der Bezeichnungen, die für die einzelnen Beweisarten gewählt sind. Das hier angeführte Beispiel könnte ebensogut eines für einen „Siehe“-Beweis darstellen, denn die Tätigkeit, auf die sich MORMANN bezieht, ist ja nur ein Modell für die Spiegelsymmetrie, die auch „gesehen“ werden kann, und diese ist das entscheidende Argument. Damit sind die „Siehe“-Beweise so viel und so wenig Modelle wie die „Tätigkeits“-Beweise und müssten eigentlich darunter subsumiert werden.

MORMANN misst der mathematischen Tätigkeit eine besondere Bedeutung zu, da sich seiner Ansicht nach ein echtes mathematisches Beweisverständnis nur bei demjenigen entwickeln kann, der Tätigkeit und Wissen verknüpft und die Zusammenhänge zwischen beiden Aspekten erkennt:

> „Wissen ist jedoch nur dann wirklich entwickelt und allgemein, wenn es weitreichende operative Anwendungsmöglichkeiten eröffnet - Operationen haben nur dann einen breiten Anwendungsbereich, wenn sie durch sehr allgemeine Konzepte gesteuert werden. Beide oben geschilderten Fälle eines unzureichenden Beweisverständnisses [ein ausschließlich rezeptives bzw. eines, bei dem zwar die Beweisidee verstanden ist, diese aber nicht auf den konkreten Beweis angewandt werden kann, G.W.] lassen sich als zwei Seiten eines Defizites beschreiben, des ungenügenden Zusammenhanges von Wissen und Tätigkeit“ (Mormann 1981, S.144).

Eine Konsequenz aus dieser Feststellung ist für Mormann, die Schülerinnen und Schüler nicht nur Beweise nachvollziehen zu lassen und auch nicht, ausschließlich über allgemeine mathematische Konzepte zu reflektieren, sondern zusätzlich dazu konkrete Tätigkeiten im Kontext des Beweisens durchzuführen.

Elschenbroich (2005), auf den ich mich im Wesentlichen bei der hier vorgenommen Aufzählung von alternativen Beweismethoden beziehe, bringt neben Mormann den Namen Malle mit dem Terminus „Tätigkeitsbeweise“ in Zusammenhang, da dieser den Ansatz der Handlungen im Modell verfolgt. Malle selbst verwendet allerdings nicht die Vokabel „Tätigkeitsbeweis“, sondern nutzt die Formulierung, dass man „durch Handeln an einer Zeichnung beweisen“ (Malle 1984, S.84) kann, wobei die Zeichnung Repräsentant eines Modelles ist. Bezogen auf das Beispiel zum Beweis der gleichlangen Diagonalen im gleichschenkligen Trapez (vgl. Abbildung 2.7) stellt Malle (1984, S.80) fest:

> “Man erkennt an diesem Beispiel, daß der Allgemeinheitscharakter des visuellen Beweises darin besteht, daß man sein Augenmerk von den konkreten O b j e k t e n der Zeichnung (Trapez, Ecken, Seiten, Diagonalen etc.) weglenkt und auf die H a n d l u n g e n richtet, die man mit ihnen vornehmen kann. Die konkreten Objekte sind bei jedem gleichschenkeligen Trapez andere, die Handlungen sind aber im Prinzip stets dieselben. Man kann auch sagen: es ist einunddasselbe H a n d l u n g s s c h e m a, das in allen Fällen angewendet wird. In dem Moment, wo man diese Einsicht erlangt, erlangt man Einsicht in die Allgemeingültigkeit der Argumentation.“

Kritisch kann hierzu angemerkt werden, dass die Handlungen so viel und so wenig dieselben sind, wie es die Objekte sind. Sie sind nur nicht so manifest wie die Zeichnungen, und deswegen sieht man leichter von den Unterschieden ab. Dem Handlungsschema entspricht die Repräsentationseigenschaft der konkreten Zeichnung für den Begriff des Trapezes.
Die Tätigkeiten des Ausschneidens, Wendens und Einpassens liefern einen Hinweis auf die Beweisidee und gehören so zur Funktion des Erklärens und des lokalen Ordnens.

Inhaltlich-anschauliche Beweise

Empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass Lehrerinnen und Lehrer oftmals eine formalistische Auffassung von Beweisen haben (vgl. WITTMANN & MÜLLER 1988). Dass durch diese Auffassung bei Schülerinnen und Schülern Schaden angerichtet werden kann, ist lange bekannt. So stellt BRANFORD (1913, S.328) fest:

> „Ich glaube, es ist Tatsache, daß die große Mehrheit der Lehrer fest überzeugt ist, daß sich die Mathematik von allen anderen Wissenschaften nicht so sehr durch das Maß an Strenge unterscheidet, als vielmehr dadurch, daß der mathematische Beweis a b s o l u t streng ist, während ein anderer Beweis nur a n g e n ä h e r t ist.
> Das Unheil, welches dieser Glaube auf allen Stufen des mathematischen Unterrichts angerichtet hat, ist, glaube ich, ganz unberechenbar. Daß die Strenge des Beweises der Reife des Schülers angepaßt werden muß, ist ein pädagogischer Grundsatz, der glücklicherweise langsam Boden gewinnt, obgleich er bis jetzt erst durch wenige Lehrer anerkannt und durch noch wenigere angewandt wird.“

Diese Anpassung der Strenge des Beweises an das jeweilige schulische Niveau veranlasst BRANFORD, zwischen drei Stufen von Beweisen zu unterscheiden: den *experimentellen „Beweisen“*, den intuitiven Beweisen und den wissenschaftlichen Beweisen (ebenda, S. 100ff, S. 239ff). Dabei zieht er die Grenze zwischen dem, was als Beweis anerkannt wird und was nicht, zwischen den experimentellen und den intuitiven Beweisen, also zwischen der ersten und der zweiten Stufe: da der experimentelle „Beweis“, der sich überwiegend auf die Sinneswahrnehmung stützt, nur einzelne, konkrete Fälle überprüft, kann er keine Allgemeingültigkeit sichern. Um dies hervorzuheben, ist der Ausdruck kursiv und in Anführungszeichen gesetzt, doch ist die Verwendung der Begrifflichkeit „Beweis“ in diesem Zusammenhang nicht unkritisch zu sehen.

Der intuitive Beweis hingegen bezieht darüber hinaus auch das begriffliche Denken mit ein und kann daher als Beweis anerkannt werden: „Diese Beweisstufe stellt allgemeine und streng gültige Wahrheiten auf, beruft sich aber dabei, wenn es nötig wird, auf Postulate der sinnlichen Erfahrung. Sie stellt die Wahrheit auf eine unabhängige Basis durch unmittelbare Berufung auf erste Prinzipien“ (ebenda S. 103).

In Anlehnung an BRANFORD treffen WITTMANN & MÜLLER (1988) die Unterscheidungen zwischen *experimentellen „Beweisen“*, inhaltlich-anschaulichen Beweisen und formalen Beweisen. Eine Beschreibung des Begriffs „inhaltlich-anschaulicher Beweis“ findet sich in WITTMANN (1987, S.50f): „Wir nehmen gewisse geometrische Beziehungen innerhalb bestimmter inhaltlicher Zusammenhänge (Kontexte) als anschaulich gegeben hin und leiten aus ihnen durch logische Schlüsse Sachverhalte ab, die uns als nicht evident erscheinen.“ Bei BLUM & KIRSCH (1989, S.202), die sich wiederum auf BRANFORD und WITTMANN berufen, findet man die damit übereinstimmende folgende Definition eines „inhaltlich-anschaulichen“ Beweises:

> „Wir [wollen, G.W.] hier unter einem inhaltlich-anschaulichen Beweis eine Kette von korrekten Schlüssen verstehen, die auf nicht-formale Prämissen zurückgreifen, d.h. insbesondere auf inhaltlich-anwendungsbezogene Grundideen (wie z.B. Ableitung als lokale Änderungsrate) oder auf intuitiv evidente, „allgemein geteilte“, „psychologisch offenkundige“ Aussagen (letzteres nach THOM 1973). Die Schlüsse sollen in ihrer „psychologisch natürlichen“ Ordnung aufeinanderfolgen. Sie müssen vom konkreten, inhaltlich-anschaulich gegebenen Fall direkt verallgemeinerbar sein, wobei diese Übertragbarkeit auf den allgemeinen Fall intuitiv erkennbar sein soll, und sie müssen bei Formalisierung der jeweiligen Prämissen korrekten formal-mathematischen Argumenten entsprechen.“

Dabei ist es sowohl erlaubt, induktiv zu argumentieren (beispielsweise derart, dass man sich klar macht, dass ein Verfahren beliebig oft fortgeführt werden könnte), als auch indirekt (beispielsweise derart, dass man sich „Was wäre wenn“-Fragen stellt). Maßgeblich dabei ist, dass der Bezug zu inhaltlich-anschaulichen Grundlagen hergestellt wird. „Was solch „inhaltlich-anschauliche“, „offenkundige“ etc. Argumentations-Grundlagen sind, entscheiden die jeweils betroffenen Individuen [...] auf der Basis ihres Wissens“ (BLUM & KIRSCH 1989, S.202). Diese Wissensbasis ist abhängig von der jeweiligen Entwicklungsstufe der Schülerinnen und Schüler:

> „But let us observe that despite recent progress in our technical civilisation, the

> stages of a young child's development (physical or intellectual) have not been altered. There is always a stage of necessary apprenticeship, genetic constraints to respect, in order to learn to walk, to speak, to read, to write, and it does not seem as if progress in psychology has been able to modify in any way the normal calendar which governs the acquisition of such knowledge. This is why one can legitimately ask whether the same kind of constraints are not operating in the learning of mathematics. [...] I personally believe that these genetic constraints do exist, that they form an integral part of pupil's temperament and personality, ant that, among many of the pupils [...] they will, by their nature, completely prevent the understanding of mathematics at the level of the rudiments of the differential calculus" (THOM 1973, S.196).

Hier wird noch einmal der Bezug zur „psychologisch natürlichen Ordnung" (s.o.) sichtbar, der sich von den erst später in den Fokus gerückten sozialen Aushandlungsprozessen unterscheidet. Für WITTMANN (1987, S.51) ist es wichtig, dass eine logisch-deduktive Vorgehensweise zwar an den inhaltlich-anschaulichen Beweis angeschlossen werden, diesen aber nicht substituieren kann:

> „Die inhaltlich-anschauliche Vorgehensweise ist auch in der heutigen Mathematik völlig legitim. Die arbeitenden Mathematiker benutzen sie mit offensichtlichem Erfolg in der Forschung und bei der informellen Kommunikation mit Kollegen. Zugegeben, wesentliche Fortschritte der Mathematik beruhen auf weitergehenden logischen Analysen anschaulicher Beweise und auf der axiomatischen Formulierung inhaltlicher Theorien. Beweisanalyse und Axiomatik sind jedoch <u>eigene</u> mathematische Methoden, die das inhaltlich-anschauliche Vorgehen wohl <u>fort</u>setzen, aber nicht <u>er</u>setzen können."

Ein Beispiel für einen inhaltlich-anschaulichen Beweis findet man im altindischen Beweis zum Satz des Pythagoras, der auf dem Prinzip der Ergänzungsgleichheit beruht. Die vorliegende Zeichnung habe ich WITTMANN (2009) entnommen (vgl. Abb. 2.8).

Bei diesem Beweis werden im mittleren Bild vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten der Länge a und b und der Hypotenuse der Länge c, ein Qudrat mit der Seitenlänge

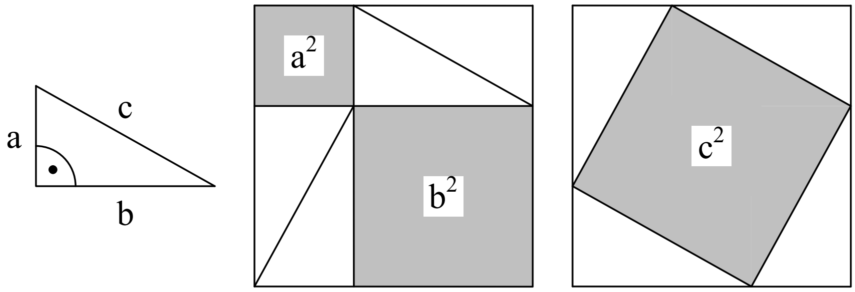


Abbildung 2.8 – *„Inhaltlich-anschaulicher Beweis zum Satz des Pythagoras“ nach (WITTMANN 2009, S.51)*

a und ein Qudrat mit der Seitenlänge b zusammengelegt, im rechten Bild dieselben vier Dreiecke, diesmal aber mit einem Quadrat der Seitenlänge c . Erforderliche Überlegungen, dass das Anlegen wirklich passt, münden in der Erkenntnis, dass sich beidesmal als Gesamtfläche ein Quadrat der Seitenlänge $a+b$ ergibt, womit gezeigt ist, dass $a^2 + b^2 = c^2$ (im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c) gilt.

Das von mir gewählte Beispiel beinhaltet bereits den komplette Beweis, so dass bei geeigneter Deutung die Begründungszusammenhänge offengelegt werden können und somit die Fragen nach dem „Warum“ beantwortet werden. Meines Erachtens liegt dies aber mehr an der ikonischen Darstellung des Beweises, als an der Zuordnung zur inhaltlich-anschaulichen Kategorie, so dass ich nicht den Schluss, dass inhaltlich-anschauliche Beweise im Wesentlichen eine begründende Funktion einnehmen, ziehen möchte. Vielmehr bin ich der Ansicht, dass inhaltlich-anschauliche Beweise genauso beim Verifizieren eines Sachverhalts eingesetzt werden können.

WITTMANN & MÜLLER (1988) stellen die Forderung auf, dass das inhaltlich-anschauliche Beweisen besonders in der Schule, aber auch in der Lehramtsausbildung gepflegt werden sollte, da nur so ein echtes Verständnis erzielt werden kann:

> „Im sozialen Kontext 'Schule' besteht für das Lehren und Lernen von Mathematik eine andere Verstehensgrundlage und ein anderer Kommunikationsrahmen als in der mathematischen Forschung. Eine sinngemäße Übertragung von Beweisaktivitäten in die schulischen Rahmenbedingungen erfordert daher eine Loslösung von formalen, deduktiv durchorganisierten Darstellungen der für die Schule relevanten elementarmathematischen Gebiete zugunsten inhaltlich-anschaulicher

> Darstellungen. Diese sind gekennzeichnet duch Einbettung in sinnvolle Kontexte, durch Entwicklung von Motivationen, durch ein Vorgehen gemäß heuristischen Strategien, durch die Verwendung bedeutungshaltiger, präformaler Darstellungen und durch entsprechende inhaltlich-anschauliche Beweise. „Rettet die Phänomene!“ muß auch die Parole der Mathematikdidaktik sein“ (WITTMANN & MÜLLER 1988, S.254).

Handlungsbezogene Beweise

Aufbauend auf den drei verschiedenen Ebenen eines Beweises bei BRANFORD (1913) ergänzen BLUM & KIRSCH (1989) diese um eine vierte Ebene, den sogenannten „handlungsbezogenen Beweis“. Dabei unterscheiden sie die vier Ebenen bzw. Stufen wie nachfolgend wiedergegeben (vgl. ebenda S.203). In der Darstellung bedeutet die gestrichelte Linie die Trennlinie zwischen dem, was als Beweis anerkannt wird und was nicht, wie beispielsweise die bloße Verifizierung an einzelnen Fällen oder eine sonstige empirische Überprüfung.

Experimentelle „Beweise“

– – – – – – – – – – – – – – –

$$\left.\begin{array}{l}\text{Handlungsbezogene Beweise}\\ \text{Inhaltlich-anschauliche Beweise}\end{array}\right\}\ \text{Präformale Beweise}$$

Formale Beweise

Den handlungsbezogenen Beweis, der in der Niveaustufe noch vor dem inhaltlich-anschaulichen Beweis rangiert, definieren sie wie folgt (ebenda, S. 203):

> „Ein solcher besteht [...] kurz gesagt aus gewissen konkreten Handlungen (zuerst wirklich ausgeführt, dann nur vorgestellt), die korrekten mathematischen Argumenten entsprechen. Hierbei sind sowohl die Prämissen als auch die Schlüsse enaktiv dargestellt, so daß man auch von einer enaktiven Repräsentation eines formal-exakten Beweises sprechen kann.“

Ergänzend führt KIRSCH (1979, S.261f) aus:

> „Sie [die Handlungen, G.W.] müssen korrekten mathematischen Argumenten entsprechen, die in ihrer psychologisch natürlichen Ordnung aufeinanderfolgen (also nicht, wie oft bei formalen Beweisen, von hinten aufgezäumt sind).“

Somit haben handlungsbezogene Beweise zwar einen konkreten Bezug zum Objekt, an dem gehandelt wird, verwenden allerdings Malles Handlungsschema (s.o.), das unmittelbar verallgemeinerbar ist.
Ein Beispiel für einen handlungsbezogenen Beweis findet sich in SCHÖNWALD (1989, S.217) zur Antwort auf die Frage, „warum 6 gleichseitige Dreiecke einen Vollwinkel bilden" (vgl. Abbildung 2.9), einen Beweis, der sich schon bei Martin WAGENSCHEIN findet:

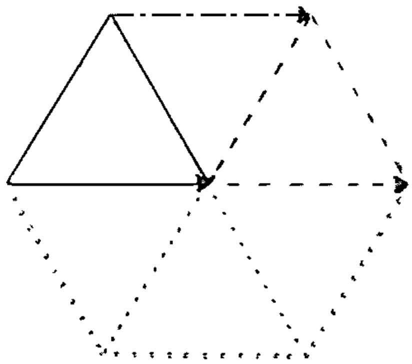


Abbildung 2.9 – *Handlungsorientierter Beweis aus* SCHÖNWALD *(1989)*

SCHÖNWALD schlägt vor, eine „dreieckig gleichseitige Klinker-Platte auf einen polierten Wohnzimmertisch" (ebenda, S. 217) zu legen und dann genau um eine Seitenlänge parallel zu einer ihrer Seiten zu verschieben. Damit liegt ein Eckpunkt dort, wo vorher ein anderer lag. Aufgrund der Eigenschaften einer Verschiebung haben alle Punkte der Fliese einen gleichlangen Weg zurück gelegt, insbesondere auch die dritte Fliesenecke, so dass die von der Fliese überstrichene Fläche ein zur Klinker-Platte kongruentes Dreieck bildet. Durch Spiegelung ergeben sich drei weitere Dreiecke, und die sechs Dreiecke zusammen decken genau den Vollwinkel ab.
In diesem Bespiel wird der Beweis gefunden und es werden Zusammenhänge offengelegt, so dass sowohl eine Verifikation stattfindet, als auch eine Warum-Frage beantwortet wird.
Die Einschätzung, dass durch konkretes Handeln ein vollwertiger Beweis geführt werden kann, ist durchaus nicht immer Konsens bei den Mathematikdidaktikern gewesen. So schreibt beispielsweise WALSCH (1975, S.67):

> „Zunächst dürfte klar sein, daß die Stufe der *materiellen* Handlungen für das Lernen des Beweisens nur *mittelbar* von Bedeutung ist. Sie spielt zwar eine wichtige

> Rolle beim Vertrautwerden der Schüler mit gewissen mathematischen Begriffen und Operationen, die ihrerseits in Beweisführungen auftreten können, das Beweisen selbst vollzieht sich aber nicht in der materiellen Ebene."

Hier haben wir ein weiteres Beispiel dafür, dass die Akzeptanz eines Beweises einem sozialen Aushandlungsprozess unterliegt und es dabei durchaus Kontroversen geben kann.

Visuell-dynamische „Beweise"

In Bezug auf den Einsatz von DGS redet ELSCHENBROICH (1999) von „visuell-dynamischen Beweisen", die er in Anlehnung an das Stufenmodell von BLUM & KIRSCH (1989) zu den „Präformalen Beweisen" zählt. Diese gehen für ihn über rein experimentelle 'Beweise' hinaus, da sie nicht am Einzelbeispiel empirisch prüfen, sondern eine Figur als Repräsentanten einer Klasse deuten. ELSCHENBROICH resümiert:

> „Sie [die visuell-dynamischen Beweise, G.W.] sind
>
> - *visuell*: anschaulich, auf eine Zeichnung bezogen als Figur, Eigenschaften und Bezeichnung,
> - *dynamisch*: keine einzelne, starre Zeichnung, sondern eine ideale Zeichnung, eine ganze Klasse von Figuren mit gleichen Eigenschaften, ermöglicht und sichtbar gemacht durch den Zugmodus von DGS.
> - *Beweis*: ein vollgültiger Beweis in dem Sinne, dass er nicht durch rationale Argumentationen zu erschüttern ist und in dem Sinne, dass eine Antwort auf die Frage nach dem ‚Warum' gegeben wird" (ebenda S. 159).

Um seine These zu stützen, führt ELSCHENBROICH (2002, S.57ff.) Beispiele für visuell-dynamische Beweise an, wie dasjenige vom arithmetischen und geometrischen Mittel in Abbildung 2.10: „Beim Vergleich von arithmetischem und geometrischem Mittel wird von Schülern oft vergessen, ob ein $\geq$ oder ein $\leq$ zu setzen ist. In der geometrischen Fassung ist offenkundig, welcher der beiden Fälle zutrifft. Der Sonderfall der Gleichheit offenbart sich im Zugmodus auch sofort" (ebenda S.57).

$$\overline{CM} = \frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq} = \overline{CF}$$

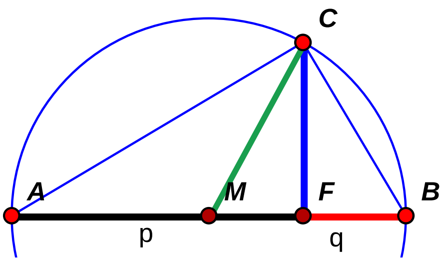


Abbildung 2.10 – *Arithmetisches und Geometrisches Mittel (nach* Elschenbroich *2002, S.57)*

Hier wird tatsächlich durch das Ziehen sofort klar, dass die Höhe CF und die Seitenhalbierende CM des Dreiecks ABC zusammenfallen müssen, wenn sie gleich lang sein sollen. Dies ist nur dann der Fall, wenn das Dreieck ABC nicht nur rechtwinklig, sondern auch noch gleichschenklig ist, so dass dann $p = q$ gilt.

Dies ist allerdings das einzige Beispiel, das Elschenbroich bringt, bei dem durch die Dynamik der Visualierung die Frage nach dem „Warum“ beantwortet wird. Beim zweiten Beispiel, der geometrischen Darstellung der 1. binomischen Formel, reicht dazu wie man weiß ein statisches Bild, wie Elschenbroich (2002, S.57) auch einräumt: „Dies kann natürlich auch ohne DGS erkannt werden. Im Zugmodus können dann noch a und b verändert und so auch auftretende Randfälle und Sonderfälle betrachtet werden“. Ein eigentlicher Mehrgewinn wird durch den Einsatz des Zugmodus aber meines Erachtens an dieser Stelle nicht erreicht.

Im dritten Beispiel betrachtet Elschenbroich den Schnittpunkt von Mittelsenkrechten im Dreieck (ebenda, S.57): Statt den Satz (die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt) statisch zu betrachten könne man den Satz auch dynamisch sehen (beim Dreieck liegt der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten immer auf der dritten Mittelsenkrechten). In diesem Zusammenhang schlägt er vor, die Schülerinnen und Schüler nur den Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten konstruieren zu lassen und dann anschließend an der Ecke des Dreiecks zu ziehen, die der Seite ohne gezeichnete Mittelsenkrechte gegenüberliegt. Dabei kann die Ortslinie des Schnittpunkts, bei der es sich natürlich um die dritte Mittelsenkrechte handelt, beobachtet werden. Elschenbroich räumt ein, dass es sich hierbei noch nicht um einen Beweis handelt:

> „Für einen strengen Beweis fehlt hier natürlich noch eine Begründung, warum die gezeichnete Ortslinie tatsächlich eine Gerade ist. Mit einem DGS wie Euklid-

> Dynageo ist es nur möglich, die vermutete Mittelsenkrechte zu konstruieren und im Zugmodus zu überprüfen, dass Ortslinie und Gerade zusammenfallen (genauer: dass es so aussieht). Weiter entwickelte DGS wie Cabri II und Cinderella bieten mit integriertem Eigenschafts-Check/stochastischem Beweiser die Möglichkeit, abzufragen, ob der die Ortslinie erzeugende Punkt auch tatsächlich auf der nachträglich konstruierten Linie liegt“ (ebenda, S.57).

Unabhängig davon, ob man akzeptiert, dass mit den neuen technischen Mitteln wirklich nachweisend gezeigt werden kann, oder ob es sich doch lediglich um ein darstellendes Zeigen handelt, ist allerdings in beiden Fällen keinesfalls die Frage danach zufriedenstellend beantwortet worden, „warum“ die drei Mittelsenkrechten einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Hier kann die DGS dem Lerner und der Lernerin nicht abnehmen, eigenständig nach Begründungszusammenhängen zu suchen, und ich meine, dass dies in den allermeisten Fällen so ist. Zudem verschwimmt in diesem Beispiel die Grenze zwischen empirischer Überprüfung und „Beweis“ derart, dass ich selbst an dieser Stelle eine solche dynamische Visualisierung nicht als Beweis anerkennen würde. Welche Rolle die DGS beim Beweisen spielen kann, wird im nächsten Abschnitt dieser Arbeit thematisiert.

2.1.6 Die Funktion einer DGS beim Beweisen

In Abschnitt 2.1.4 habe ich dargestellt, in welche Phasen Boero, nachdem er Experten beim Beweisführungen beobachtet hat, einen Beweis einteilt. Dieses sind: 1. *Entwicklung einer Behauptung*, 2. *Formulierung der Behauptung nach Erfordernissen der formalen Konvention*; 3. *Untersuchung der Behauptung*; 4. *Bildung der Beweiskette*; 5. *Verfassen eines Beweises, der den mathematischen Standards entspricht*; 6. *Annäherung an einen formalen Beweis.*
Obwohl diese Phaseneinteilung nicht direkt in den Mathematikunterricht übertragen werden kann (siehe die Diskussion in Abschnitt 2.1.4), stellt sie dennoch einen Orientierungsrahmen für das Beweisen in der Schule dar. Auch wenn im Unterricht genauso wie in diversen Untersuchungen, die die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler bezüglich des Beweisens abtesten wollen, ofmals Aufgaben im Stil von: „Gegeben ist... Beweise, dass...“ verwendet werden (vgl. Abschnitt 2.2), so dass die interessanten ersten beiden Phasen von Boero komplett entfallen, gibt es ja daneben auch noch Aufgaben, in denen Schülerinnen und Schüler selbstständig etwas zunächst entdecken sollen, bevor sie die entdeckten Zusammenhänge beweisen.

Es ist unmittelbar klar, dass eine DGS in den unterschiedlichen Phasen unterschiedliche Rollen spielt. So konnten viele Untersuchungen, wie beispielsweise die von OLIVERO (2002), ARZARELLO *et al.* (2002) oder HÖLZL (1999) feststellen, dass die DGS sehr stark unterstützend dabei wirkt, eine Behauptung aufzustellen und diese Behauptung anschließend zu untersuchen. Auch WEIGAND & WETH (2002, S.190) stellen fest: „Ein DGS eröffnet die Möglichkeit eines experimentellen Zugangs zu Sätzen und Begriffsbildungen. Darin liegt eine der großen Stärken dieses Werkzeugs.“ Dabei ist der Zugmodus von entscheidender Bedeutung (s. Kapitel 3).

Die DGS kann zwar nicht unmittelbar beim Aspekt *„Formulierung der Behauptung nach Erfordernissen der formalen Konvention“* unterstützend wirken, dennoch kann nach WEIGAND & WETH (2002) ein positiver Einfluss des Computers auf das Verbalisieren festgestellt werden. Dabei fassen sie unter den Begriff „Verbalisieren“ die Aspekte:

- „die sprachliche Korrektheit und Verwendung der jeweiligen Fachsprache,
- die korrekte Reihenfolge von Argumentationsschritten,
- eine sinnvolle Schrittweite von Argumentationsschritten sowie
- die Vollständigkeit der Angaben“ (WEIGAND & WETH 2002, S.165).

WEIGAND & WETH sehen in Konstruktionsbeschreibungen eine Möglichkeit, das Verbalisieren zu trainieren. Diese wären im herkömmlichen Unterricht ofmals unbeliebt, da die Schülerinnen und Schüler ihre Notwendigkeit nicht einsähen und sie stattdessen als unnötigen zusätzlichen Aufwand empfänden. Zudem wird eine hohe Genauigkeit eingefordert, die nicht eingesehen wird und zu der sie dadurch bedingt nicht bereit sind. Mit diversen DGS hingegen, wie beispielsweise GEOLOG, kann man sich nicht nur **nach** einer Konstruktion die Konstruktionsbeschreibung durch das Programm anzeigen lassen, sondern auch **vorab** eine Konstruktionsbeschreibung anfertigen, nach der der Rechner dann die Konstruktion erstellt. Hierbei ist es natürlich ebenso erforderlich, die richtige Reihenfolge der Konstruktionsschritte einzuhalten, als auch alle erforderlichen Konstruktionsschritte vorzunehmen. Damit wird den Schülerinnen und Schülern sofort einsichtig gemacht, dass eine Konstruktionsbeschreibung sinnvoll ist. Zudem wird der Fokus von unnötigen Ausschmückungen zu den wirklich notwendigen Angaben verschoben.

Ein besonders wichtiger Schritt auf dem Weg zu einem Beweis ist, überhaupt eine Beweisidee zu entwickeln. Gerade wenn „trickreiche“ Beweise im Schulunterricht oder auch in Vorlesungen vorgeführt werden, kommen häufig Äußerungen wie: „Da wäre ich ja nie drauf gekommen“, begleitet mit der bangen Frage: „Wird von uns in der Klausur erwartet, dass wir auch auf solche Sachen kommen?“

Ein Beispiel für einen derartig „trickreichen Beweis“ sehen WEIGAND & WETH (2002, S.196) im Beweis zum Satz des Pythagoras aus den Elementen des EUKLID (Abb. 2.11).

§ 47 (L. 33).

Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel BAC. Ich behaupte, daß $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Man zeichne nämlich über BC das Quadrat $BDEC$ (I, 46) und über BA, AC die Quadrate GB, HC; ferner ziehe man durch A $AL \parallel BD$ oder CE und ziehe AD, FC.

Da hier die Winkel BAC, BAG beide Rechte sind, so bilden an der geraden Linie BA im Punkte A auf ihr die zwei nicht auf derselben Seite liegenden geraden Linien AC, AG Nebenwinkel, die zusammen = 2 R. sind; also setzt CA AG gerade fort (I, 14). Aus demselben Grunde setzt auch BA AH gerade fort. Ferner ist $\angle DBC = FBA$; denn beide sind Rechte (Post. 4); daher füge man ABC beiderseits hinzu; dann ist der ganze Winkel DBA dem ganzen FBC gleich (Ax. 2). Da ferner $DB = BC$ und $FB = BA$ (I, Def. 22), so sind zwei Seiten DB, BA zwei Seiten FB, BC (überkreuz) entsprechend gleich; und $\angle DBA = \angle FBC$; also ist Grdl. AD = Grdl. FC und $\triangle ABD = \triangle FBC$ (I, 4). Ferner ist Pgm. $BL = 2 \triangle ABD$; denn sie haben dieselbe Grundlinie BD und liegen zwischen denselben Parallelen BD, AL (I, 41); auch ist das Quadrat $GB = 2 \triangle FBC$; denn sie haben wieder dieselbe Grundlinie, nämlich FB, und liegen zwischen denselben Parallelen FB, GC. [Von Gleichem die Doppelten sind aber einander gleich (Ax. 5).] Also ist Pgm. BL = Quadrat GB. Ähnlich läßt sich, wenn man AE, BK zieht, zeigen, daß auch Pgm. CL = Quadrat HC; also ist das ganze Quadrat $BDEC$ den zwei Quadraten $GB + HC$ gleich (Ax. 2). Dabei ist das Quadrat $BDEC$ über BC gezeichnet und GB, HC über BA, AC. Also ist das Quadrat über der Seite BC den Quadraten über den Seiten BA, AC zusamme[illegible]leich — S.

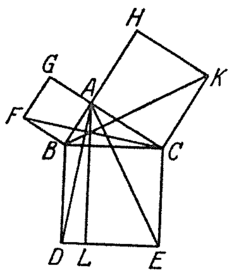


Fig. 46.

Abbildung 2.11 – *Beweis des Pythagorassatzes aus (*EUKLID *2003, S.32)*

Solche Beweise bezeichnet Schopenhauer als „Mausefallenbeweis“.

> „Auf die Anschauung beruft man also in der Geometrie sich eigentlich nur bei den Axiomen. Alle übrigen Lehrsätze werden demonstrirt, d.h. man giebt einen Erkenntnißgrund des Lehrsatzes an, welcher Jeden zwingt denselben als wahr anzunehmen: also man weist die logische, nicht die transscendentale Wahrheit des Lehrsatzes nach. [...] Diese aber, welche im Grund des Seyns und nicht in dem des Erkennens liegt, leuchtet nie ein, als nur mittelst der Anschauung. Daher kommt es, daß man nach so einer geometrischen Demonstration zwar die Ueberzeugung hat, daß der demonstrirte Satz wahr sei, aber keineswegs einsieht, warum was er behauptet so ist, wie es ist: d.h. man hat den Seynsgrund nicht, sondern gewöhnlich ist vielmehr erst jetzt ein Verlangen nach diesem entstanden. [...] Daher kommt es, daß er [der Beweis, G.W.] gewöhnlich ein unangenehmes Gefühl hinterläßt [...] Die Empfindung dabei hat Aehnlichkeit mit der, die es uns giebt, wenn man uns etwas aus der Tasche, oder in die Tasche, gespielt hat, und wir nicht begreifen wie“ (Schopenhauer 1977, S.152f).

Habe man darüber hinaus durch die Anschauung eine Einsicht erlangt (die Schopenhauer „cognitio“ im Gegensatz zu „convictio“ nennt), gebe dies Befriedigung, weil man das Gefühl einer echten Erkenntnis habe, auf die man sich dann auch im Weiteren alleinig stützen würde (ebenda, S.152f).

An dieser Stelle sehen Weigand & Weth den entscheidenden Vorteil bei der Durchführung des Beweises mit Hilfe einer DGS. Hiermit könne man die zentrale Beweisidee verdeutlichen, die darin besteht, das durch die Diagonale halbierte Kathetenquadrat zu betrachten, also nur ein Dreieck. Ebenso wird nur das halbe Rechteck unter dem entsprechenden Hypotenusenabschnitt betrachtet, demzufolge ein weiteres Dreieck. Diese beiden Dreiecke können durch eine flächeninhaltserhaltene Umformung, nämlich durch Scherung, in jeweils ein anderes Dreieck umgewandelt werden, und von diesen letzten beiden Dreiecken kann gezeigt werden, dass sie kongruent sind.

Auch wenn die verbale Beschreibung kompliziert klingt, können mit Hilfe einer DGS die einzelnen Schritte sehr schön anschaulich dargestellt werden (vgl. Abbildung 2.12). Damit können die Schülerinnen und Schüler wahrscheinlich sehr viel leichter erkennen, **warum** die einzelnen Schritte überhaupt gemacht werden. Dies ist ein wichtiger Schritt bei der von Schopenhauer geforderten Entwicklung von „cognitio“. Dennoch, und das stellen auch Weigand & Weth (2002, S.200) fest, ist mit dieser dynamischen Visualisierung noch kein Beweis erfolgt: „Natürlich sind das „nur“ Visualisierungen von Beweisideen, die durch entsprechende Begründungen und schließlich formale Beweise ergänzt werden müssen.“

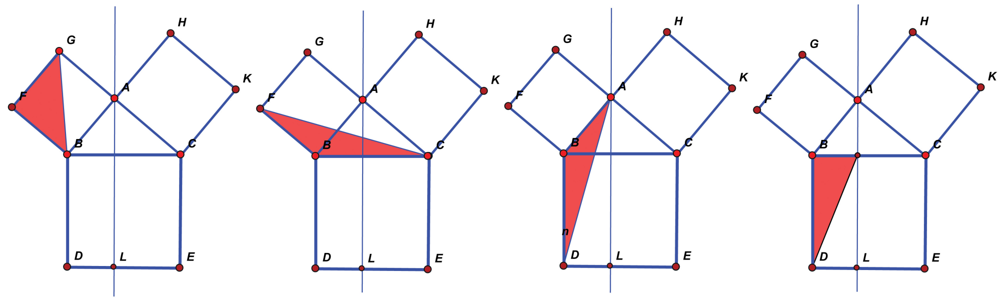


Abbildung 2.12 – *Dynamische Visualisierung des Beweises von Euklid*

Eine weitere wichtige Rolle, die Weigand & Weth (2002) dem Computer im Zusammenhang mit Beweisen zugestehen, ist die „Erarbeitung von Beweisstrategien“ (ebenda, S.189). Hierbei zielen sie darauf ab, dass es Aufgaben gibt, bei denen „ein Beweis zum konstitutionellen Bestandteil einer Konstruktion wird“ (ebenda, S.201). Gemeint sind sogenannte „Einpassungsaufgaben“, bei denen bestimmte Figuren in einer bestimmten Art und Weise konstruiert werden müssen, so dass sie eine zuvor festgelegte Lage haben, beispielsweise ein gleichseitiges Dreieck derart, dass alle Eckpunkte auf drei bereits vorhandenen Geraden liegen. Hier können bestimmte Strategien und Heuristiken hilfreich sein: im eben genannten Beispiel könnte man zunächst ein gleichseitiges Dreieck konstruieren, bei dem nur zwei Eckpunkte die geforderte Bedingung erfüllen. Betrachtet man dann unter Nutzung des Zugmodus die Ortslinie des dritten Eckpunkts, kann es so gelingen, einen Hinweis auf die Lösung des Konstruktionsproblemes zu erhalten. Auch hier ist es allerdings erforderlich, die Form der Ortslinie nicht nur visuell zu beurteilen, sondern eine geometrische Begründung und damit einen Beweis zu führen.
So bleibt die Frage, ob man auch Beispiele finden kann, bei denen durch den Einsatz einer DGS tatsächlich ein vollwertiger Beweis geführt werden kann, oder ob die Rolle auf das Unterstützen auf dem Weg dahin beschränkt bleibt. Eine Möglichkeit wäre bei Existenzbeweisen, wie zum Beispiel beim Beweis dafür, dass jedes Dreieck einen Inkreis hat (dieses Beispiel ist

dem Vorlesungsskript von BENDER (2011) entnommen).

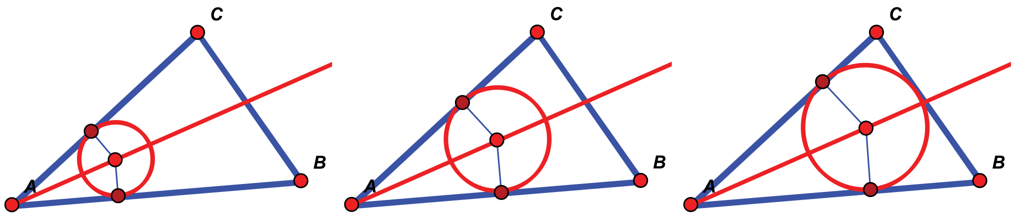


Abbildung 2.13 – *Jedes Dreieck hat einen Inkreis*

Alle Punkte auf der Winkelhalbierenden eines Dreiecks haben gleichen Abstand zu den entsprechenden Schenkel; das bedeutet, dass ich einen Kreis zeichnen kann, dessen Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden liegt und der die beiden Schenkel berührt. Vergrößere ich diesen Kreis, indem ich den Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden bewege, so dass die Berühreigenschaft erhalten bleibt, muss irgendwann eine Situation entstehen, in der der Kreis auch die dritte Seite des Dreiecks berührt. Hier liegt allerdings als Argument ganz wesentlich die Stetigkeit bei solchen Bewegungen zugrunde, eine Eigenschaft, die im Kontext der Geometrie nicht expliziert wird. Demzufolge **muss** jedes Dreieck einen Inkreis haben. Die dynamische Visualisierung kann folglich zeigen, **dass** ein Dreieck einen Inkreis hat. **Wann** dies der Fall ist, also bei welchen Lagen des Kreismittelpunkts, wird durch die Visualisierung allerdings nicht klar, sondern bedarf einer zusätzlichen Überlegung.

2.2 Ausgewählte Ergebnisse von empirischen Studien zum Beweisen im Unterricht

Im Folgenden möchte ich einen Überblick über den aktuellen Forschungsstand zum Beweisen im Schulunterricht skizzieren. Dabei werde ich zunächst auf Studien eingehen, die sich allgemein mit dem Thema des Beweisens im Unterricht befassen und anschließend auf solche, die den Einsatz von DGS im Fokus haben.

2.2.1 Einstellungen von Schülerinnen und Schülern zu Beweisen

> „To find the proof for a proposition we have to imagine all the propositions already known from which it can be deduced and choose the one that is relevant. On this method the most exact reasoner may be baffled if he is not inventive. The consequence is that instead of making us find the proofs for ourselves, the teacher dictates them to us; instead of teaching us to reason he reasons for us and only exercises our memory“ (Rousseau zitiert nach (Boyd 1956)).

In vielen Studien ist bereits untersucht worden, welche Einstellungen Schülerinnen und Schüler zu Beweisen haben, wie sie selbst Beweise durchführen und wie sie die Notwendigkeit derselben einschätzen. Fischbein & Kedem (1982) beispielsweise stellten fest, dass Schülerinnen und Schüler, obwohl sie einen mathematischen Sachverhalt im Vorfeld bewiesen hatten, dennoch auf einer nachträglichen Überprüfung, beispielsweise durch Nachrechnen, bestanden, da sie nicht an die Beweiskraft des Beweises glaubten.

Auch Healy & Hoyles versuchten, den Einstellungen von Schülerinnen und Schülern in einer breit angelegten Studie auf den Grund zu gehen (vgl. Healy & Hoyles 1999). Da sich viele spätere Erhebungen auf diese Untersuchung stützen, und zwar sowohl im Unterricht mit DGS-Einsatz, als auch im Unterricht ohne (beispielsweise Ufer *et al.* (2009), Kuntze (2006), Vincent (2002), Heinze & Reiss (2004b), Reiss *et al.* (2002), Reiss *et al.* (2001)), werde ich auf diese Arbeit im Folgenden näher eingehen.

In ihrem Projekt „Justifying and Proving in School Mathematics“, das Healy & Hoyles 1995 in Großbritannien starteten und zunächst an 182 Schülerinnen und Schüler der 10. Jahrgangsstufe pilotierten, befragten sie anschließend 2459 Schülerinnen und Schüler derselben Jahrgangsstufe aus 94 Klassen und 90 Schulen zum Thema „Beweisen“. Übergeordnete Frage-

stellung dabei war, wie Schülerinnen und Schüler selbst Beweise durchführen, aber auch, wie sie vorgegebene Beweise bewerten und einschätzen und welchen Anspruch sie an einen Beweis überhaupt haben.
Zunächst sollten Schülerinnen und Schüler die Frage: „What is proof for?“(HEALY & HOYLES 1999, S.9) beantworten. Dabei wurde die offene Frage gestellt: „Before you start, write below everything you know about proof in mathematics and what it is for“ (ebenda, Appendix 1), so dass die Schülerinnen und Schüler frei antworten konnten und nicht durch vorgegebene Antwortmöglichkeiten beeinflusst wurden. Hierfür wurden 5 Minuten Zeit eingeräumt. Danach wurden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, mit der Bearbeitung des weiteren Fragebogens fortzufahren.
Zur Codierung der Antworten wurden zunächst die in Abbildung 2.14 dargestellten Kategorien gebildet, unter die die Antworten der Schülerinnen und Schüler subsumiert werden sollten.

Student response	Code
Not answered	0
Answers relating to verification/"truth"	1
Answers relating to explanations, reasons	2
Answers relating to providing evidence	3
Answers relating to communication to others	4
Answers relating to discovering new theories/ideas	5
Answers relating to ability/achievement	6
Answers relating to general validity, completeness	7
Answers including some reference to logical thinking	8
Other	9

Abbildung 2.14 – *Codierungsanweisung zur Frage: „Wozu dient ein Beweis?“ (*HEALY & HOYLES *1999, S.12)*

Die zehn verschiedenen Kategorien wurden allerdings nach Auswertung der Antworten nicht aufrecht erhalten, sondern unter die Kategorien „Wahrheit“, „Entdecken“, „Erklärung“ und „Andere/Keine“ zusammengefasst, denn: „As some codes appeared very infrequently, initial coding of data was subsequently simplified into four categories: *Truth* (codes 1, 3, 7 and 8); *Discovery* (code 5); *Explanation* (codes 2 and 4); *Other/none* (codes 0, 6 and 9)“ (ebenda, S. 12). Dabei wurden Antworten, die mehreren Kategorien zuzuordnen waren, auch mehrfach erfasst. Die Abbildung 2.15 stellt die Verteilung der Antworten dar:

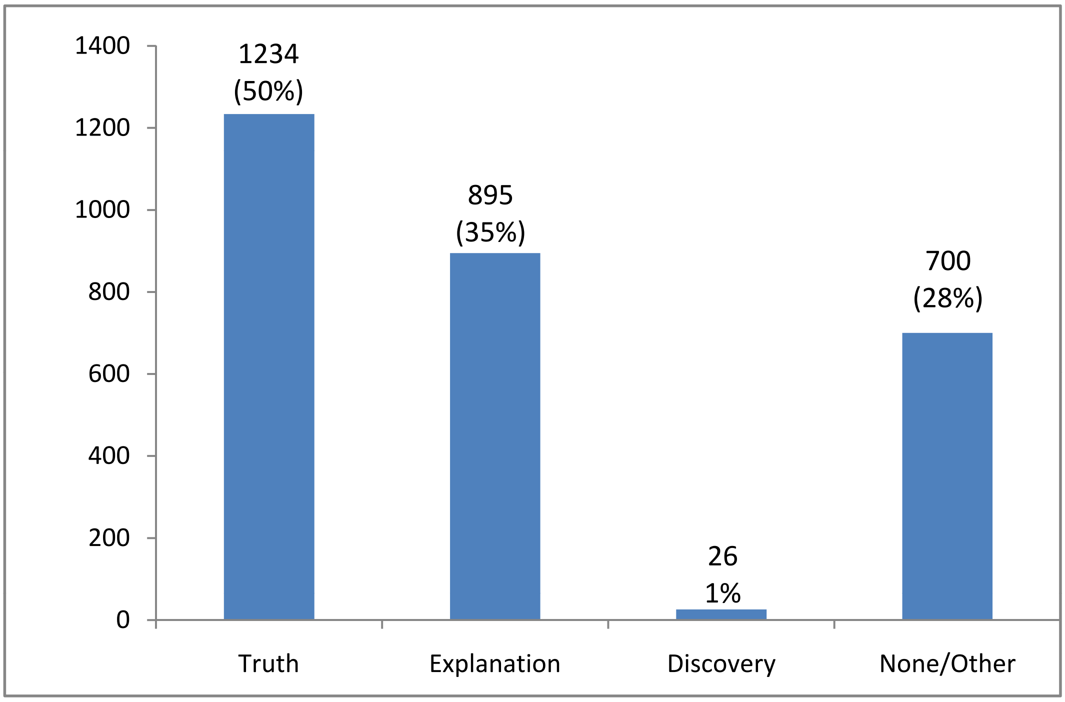


Abbildung 2.15 – *Schülerantworten auf die Frage: „Wozu dient ein Beweis?“ (*Healy & Hoyles *1999, S.17)*

Zusammenfassend wird die These formuliert, dass:

> „Students are most likely to describe proof as about establishing the truth of a mathematical statement, although a substantial minority ascribe it an explanatory function and a further large number have little or no idea of the meaning of proof and what it is for“ (Healy & Hoyles 1999, S.18).

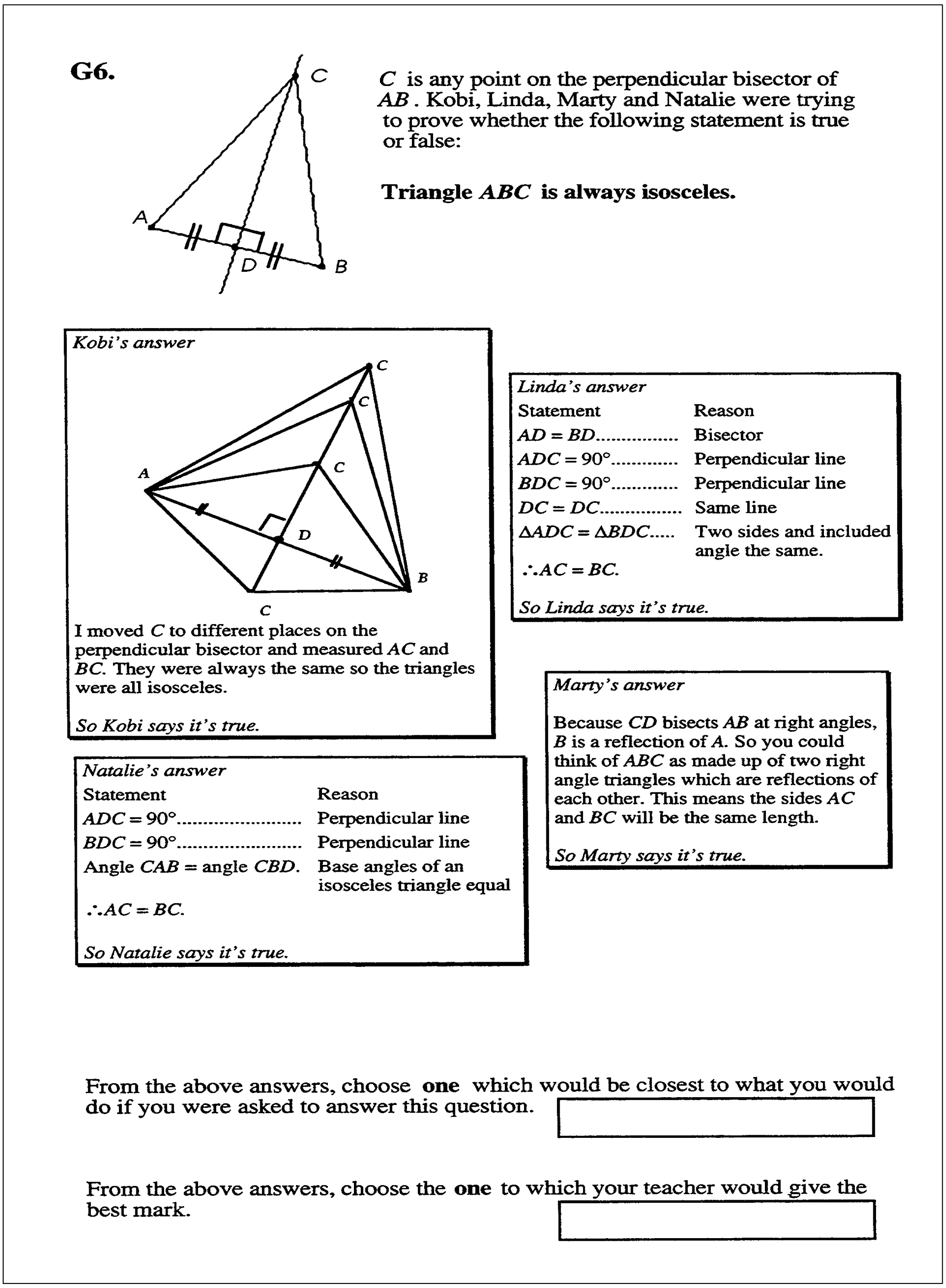
Von den in Abschnitt 2.1.2 dargestellten unterschiedlichen Funktionen, die ein Beweis haben kann, sind für die Schülerinnen und Schülern also nur einige wenige bedeutsam. Dabei spielt die verifizierende Funktion eines Beweises im Schulunterricht eine große Rolle.
Im nächsten Teil der Befragung wurden den Schülerinnen und Schülern Beweisaufgaben im multiple-choice-Format vorgelegt, wobei die eine Hälfte aus dem Bereich der Algebra (A),

die andere aus dem Bereich der Geometrie (G) stammte. Für jeden der beiden Aufgabenteile wurde 30 Minuten Bearbeitungszeit eingeräumt. Nach Ablauf der ersten 30 Minuten wurden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, mit der Bearbeitung des Fragebogens fortzufahren. Nach Ablauf der zweiten 30 Minuten wurden sie gebeten, nun noch einmal alles anzuschauen und bei eventuell ausgelassenen Anworten anzugeben, ob mangelnde Zeit oder mangelndes Wissen hierfür verantwortlich sei. In den Aufgaben wurden zu einer jeweils zu beweisenden Aussage „Lösungen“ vorgelegt, von denen einige korrekt und andere fehlerhaft waren und die unterschiedlichen Beweistypen zugeordnet werden können. Die dabei verwendeten Bezeichnungen gehen aus Abbildung 2.16 hervor, ebenso wie die Festlegung, ob der Beweis als zulässig anerkannt wird, oder nicht.

Form of Proof		Correctness in multiple-choice
Empirical	Unelaborated calculations or measurements	Incorrect
Exhaustive	All possible cases tested	Correct
Enactive	Unelaborated description of actions and observations	Incorrect
Naive	Restatement of givens; statements of unhelpful or wrong "facts"	Incorrect
Analytical Formal (correct)	Logical argument in formal mathematical language	Correct
Analytical Formal (incorrect)	Incorrect, incomplete or illogical argument in formal mathematical language	Incorrect
Analytical Narrative	Logical argument, not in symbolic form	Correct
Visual	Diagram with visual clues showing the logic of the proof	Correct
Counter-example	Production of a counter-example with no elaboration	Correct

Abbildung 2.16 – *Klassifizierung und Akzeptanz der Beweistypen nach* Healy & Hoyles *(1999, S.13)*

Die Schülerinnen und Schüler sollten beim Setzen ihres Antwortkreuzes die Einschätzung abgeben, ob die präsentierten „Beweise“ schlüssig sind und zulässig argumentiert wird, oder ob Fehler oder Beweislücken auftreten. Zudem wurden sie aufgefordert zu erläutern, ob der jeweilige „Beweis“ dafür geeignet ist, eine Begründung dafür zu liefern, warum die zu zeigende Aussage Gültigkeit hat, oder einem unsicheren Mitschüler die Zusammenhänge verständlich zu machen. Schließlich sollten die Schülerinnen und Schüler aus einem Pool von Lösungen diejenige aussuchen, die ihrer eigenen Vorgehensweise beim Lösen der Aufgabe am meisten entspräche, und diejenige, von der sie glauben, dass sie in einer Klassenarbeit die meisten Punkte bekommen würde. Exemplarisch zeigen die Abbildungen 2.17 und 2.18 die Frage G6 aus dem Bereich der Geometrie.



G6.

C is any point on the perpendicular bisector of AB. Kobi, Linda, Marty and Natalie were trying to prove whether the following statement is true or false:

Triangle ABC is always isosceles.

Kobi's answer

I moved C to different places on the perpendicular bisector and measured AC and BC. They were always the same so the triangles were all isosceles.

So Kobi says it's true.

Linda's answer

Statement	Reason
$AD = BD$................	Bisector
$ADC = 90°$............	Perpendicular line
$BDC = 90°$............	Perpendicular line
$DC = DC$...............	Same line
$\Delta ADC = \Delta BDC$.....	Two sides and included angle the same.
$\therefore AC = BC$.	

So Linda says it's true.

Marty's answer

Because CD bisects AB at right angles, B is a reflection of A. So you could think of ABC as made up of two right angle triangles which are reflections of each other. This means the sides AC and BC will be the same length.

So Marty says it's true.

Natalie's answer

Statement	Reason
$ADC = 90°$........................	Perpendicular line
$BDC = 90°$........................	Perpendicular line
Angle CAB = angle CBD.	Base angles of an isosceles triangle equal
$\therefore AC = BC$.	

So Natalie says it's true.

From the above answers, choose **one** which would be closest to what you would do if you were asked to answer this question.

From the above answers, choose the **one** to which your teacher would give the best mark.

Abbildung 2.17 – *Frage G6 aus Proof Questionnaire (*Healy & Hoyles *1999, Anhang 1)*

For each of the following circle whether you agree, don't know or disagree.

Please do not write in this space

The statement is:

Triangle ABC is always isosceles.

Kobi's answer:	agree	don't know	disagree
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** positions of *C*	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

Linda's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** positions of *C*	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

Marty's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** positions of *C*	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

Natalie's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** positions of *C*	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

Abbildung 2.18 – *Frage G6 aus Proof Questionnaire (*HEALY & HOYLES *1999, Anhang 1)*

Den Schülerinnen und Schülern wurden demnach Lösungen vorgelegt, die sich auf empirische Überprüfung berufen (Kobi), die formal korrekt argumentieren (Linda), die formal argumentieren, dabei allerdings einen Zirkelschluss machen (Natalie) und die narrativ und korrekt argumentieren (Marty). Bei der Auswertung der Antworten zeigte sich, dass die meisten Schülerinnen und Schüler zwar glaubten, dass ein formaler (deduktiver) Beweis von der Lehrperson am besten benotet werden würde, gleichzeitig aber selbst keinen formalen Beweis zur Lösung der Aufgabe gewählt hätten (siehe Abbildung 2.19).

	Own approach	Best mark
Empirical (Kobi)	40	19
Formal incorrect (Natalie)	13	18
Formal correct (Linda)	21	48
Narrative correct (Marty)	26	15

Abbildung 2.19 – *Prozentuale Verteilung der Antworten auf die Frage G6 (*Healy & Hoyles *1999, S.19, Abbildung 5)*

Bei den anderen Fragestellungen zeichnete sich ein ähnliches Bild ab: Es ordneten mehr Schülerinnen und Schüler dem formalen, nicht-korrekten Beweis die beste Notenvergabe durch die Lehrperson zu, als selbst diesen Weg zur Beweisführung gegangen wären. Dahingegen hätten weniger Schülerinnen und Schüler dem empirischen oder narrativen Beweisgang die beste Note gegeben, als selbst diesen Lösungsweg gegangen wären, auch, wenn der narrative Beweis korrekt war.

Grundsätzlich sehe ich in dieser Art der quantitativen Erhebung zwei Schwierigkeiten: In der Aufgabe G6 (und auch bei den anderen Aufgaben) hebt sich die narrative Bweisführung deutlich von den anderen Lösungsvorschlägen ab, da sie mit Begründungen aus einem anderen Kontext, nämlich dem der Abbildungsgeometrie, arbeitet. Auch wenn in England die Abbildungsgeometrie eine fundamentale Rolle im Unterricht spielte, sticht die Argumentation damit deutlich aus den vorgegebenen Lösungsvorschlägen heraus. Zudem gibt es keinen narrativen Lösungsvorschlag, der fehlerhaft ist. Wenn sich Schülerinnen und Schüler folglich für oder gegen die Lösung von Marty entscheiden, ist nicht erkennbar, ob deren narrative Darstellung oder aber das inhaltliche Argument für diese Entscheidung ausschlaggebend ist. Zudem wurde im Rahmen von empirischen Untersuchungen bereits sehr früh festgestellt, dass die Ablehnung oder Akzeptanz eines Beweises, die durch das Setzen eines Kreuzes in einer multiple-choice-Umgebung abgefragt wird, noch keinerlei Aufschluss darüber gibt, ob die Kriterien für diese Entscheidung auch zulässig sind.

So führte beispielsweise WALSCH (1975, S.125ff) in den Jahren von 1964 bis 1966 Untersuchungen durch, bei denen Schülern „Beweise“ zu vier geometrischen Problemen vorgelegt wurden. Dabei arbeitete der erste „Beweis“ mit einer Beweisskizze, griff allerdings auf empirische Argumente zurück, während der zweite Beweis ebenfalls mit Hilfe einer Beweisskizze arbeitete, im Unterschied zur ersten Lösung jedoch nur zulässige Schlüsse verwendete und somit korrekt war. Der dritte Beweis, ebenfalls korrekt, war sehr formal dargestellt, während sich der vierte „Beweis“ schließlich auf unvollständige Induktion stützte, so dass hier keine Allgemeingültigkeit nachgewiesen wurde. Die richtige Einschätzung, ob der Beweis zulässig ist oder nicht, gaben im ersten Fall 32 Prozent der Schülerinnen und Schüler, im zweiten Fall 79 Prozent, im dritten Fall 92 Prozent und im vierten Fall 27 Prozent. WALSCH (1975, ebenda, S. 126) deutet dies zunächst wie folgt:

> „Wie man sieht, wurden die untauglichen „Beweise“ (1) und (4) von einer relativ hohen Anzahl von Schülern nicht als unzulänglich erkannt. Das bedeutet, daß nicht wenige der damals befragten Schüler die Nachprüfung allgemeiner Aussagen an Einzelbeispielen für ausreichend hielten. Allgemein überwog eine recht unkritische Haltung der Schüler gegenüber Beweisführungen. Das wurde besonders deutlich bei jenen Schülern (34%), die alle vier vorgeführten Beweise ausnahmslos für richtig hielten.“

Im weiteren Verlauf seiner Untersuchung befragte WALSCH die Schülerinnen und Schüler, warum sie sich dafür entschieden hatten, den jeweiligen Beweis zu akzeptieren bzw. abzulehnen. Dabei wurden interessante Aspekte deutlich. So wurde der erste Beweis nicht unbedingt deshalb von den Schülerinnen und Schülern abgelehnt, (was bedeutet, dass diese ihr Kreuz an der richtigen Stelle gesetzt hatten), weil in ihm empirisch argumentiert wurde, sondern weil eine Beweisskizze verwendet wurde. Ebenso gab es Schülerinnen und Schüler, die sich dafür entschieden, einen Beweis zu akzeptieren, weil am Ende der Beweisführung die jeweilige Behauptung stand. Oder der Beweis wurde abgelehnt, weil die zu beweisende Behauptung gar nicht verstanden worden war. Formal korrekte Beweise wurden abgelehnt, weil bei den Beweisschritten Sätze hinzugezogen wurden, die nach Auffassung der Schülerinnen und Schüler ebenfalls eines Beweises bedurft hätten.

An dieser Stelle gibt Walsch nicht an, wie viele Antworten der Schülerinnen und Schüler auf einer adäquaten Begründung beruhten und wie viele auf einer fehlerhaften. Bei einer anderen Befragung allerdings stellt er fest, dass von den richtigen Antworten nur 9 Prozent auf einer angemessenen Begründung beruhten, was bedeutet, dass bei 91 Prozent der richtigen Kreuze nicht auf das erforderliche Verständnis geschlossen werden kann! Ich denke, dass dies ein eindrucksvolles Beispiel dafür ist, dass Untersuchungen (im Umfeld von Beweisen, aber nicht nur dort), die auf multiple-choice-Aufgaben beruhen, vorsichtig interpretiert werden müssen.

Auch Heinze & Reiss (2004b, S. 2f) konstatieren die Problematik, aus dem von einem Schüler oder einer Schülerin gesetzten Kreuz tiefergehende Rückschlüsse zu ziehen: „We will show later, that multiple choice items bear the risk to give only surface information and may not allow a deeper analysis of a student's problem solving process", und: „As already mentioned a multiple choice item is restricted to certain answers. There is hardly any information why a student selects a specific answer. Moreover, it ist not clear whether students understand a multiple choice item as expected by the researcher" (ebenda, S. 5). Ich werte diese Einschätzung, die ich im übrigen teile, deshalb als erstaunlich, da besonders die Untersuchungen von Reiss (beispielsweise in Reiss *et al.* (2006), Ufer *et al.* (2009)) genau das von ihr kritisierte Design haben.

Man muss dazu sagen, dass auch Healy & Hoyles sich dieser Situation bewusst sind, denn zusätzlich zur quantitativen Analyse führten sie bei einigen Schülerinnen und Schülern auch eine qualitative Befragung durch, in der die Kreuze begründet werden sollten.

So favorisierte beispielsweise ein Schüler bei der Aufgabe G1, bei der es um den Beweis zur Innenwinkelsumme im Dreieck geht (s. Abb. 2.20 und 2.21), eine Vorgehensweise wie Amanda, eingestuft als „Enactive: Unelaborated descripition of actions and observations" (Healy & Hoyles 1999, S.13). Als Lösung, die die beste Note erhalten hätte, nannte er die Antwort von Cynthia, eingestuft als „formal correct".

Er gab an, dass er Cynthias Antwort deshalb so gut eingeschätzt habe, weil „I wouldn't be as clever as Cynthia" und „I just don't quite follow it", was Healy & Hoyles folgendermaßen interpretieren: „he chose Cynthias's argument for best mark because he did not understand it" (Hoyles & Healy 2007, S.93). Der Grund, seine eigene Vorgehensweise an Amanda zu orientieren, lag darin, dass dies für ihn der einfachste Weg zu sein schien.

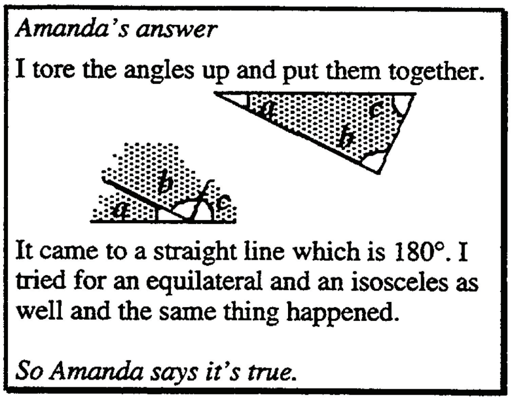


Abbildung 2.20 – *Amandas Antwort*

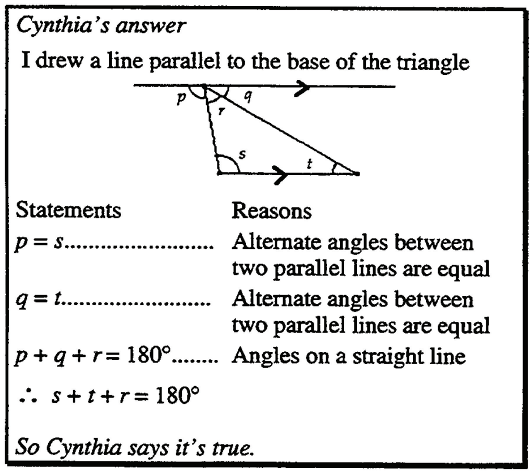


Abbildung 2.21 – *Cynthias Antwort*

Ein anderer Schüler, der ebenfalls Cynthias Lösung als diejenige einschätzte, die die beste Bewertung durch die Lehrperson bekäme, begründete dies damit, dass Cynthia in ihrer Lösung die einzelnen Winkel mit Buchstaben bezeichnet habe. Eine weitere Schülerin, die Amandas Lösung für sich gewählt hätte, gab als Begründung an, dass sie diese verständlich und überzeugend fände. Darüber hinaus war sie sich durchaus bewusst, dass keine Allgemeingültigkeit für jedes Dreieck gezeigt worden war, was aber für sie von untergeordneter Wichtigkeit war. Und 21 Prozent derjenigen, die meinten, dass Cynthias Lösung die beste Note bekommen würde, glaubten nicht, dass hierdurch ein allgemeingültiger Beweis geführt, sondern dass die Aussage nur für bestimmte Dreiecke gezeigt worden war. Dies macht deutlich, dass allein die Kenntnis darüber, **welche** Entscheidung getroffen wurde, oftmals wenig aussagt, wenn man nicht weiß, **warum** diese Entscheidung getroffen wurde.

Zum anderen muss festgestellt werden, dass die Bearbeitungszeit von 30 Minuten pro Themenkomplex sehr kurz ist, auch wenn überwiegend „nur“ angekreuzt werden muss.

Ein interessantes Phänomen, dass Healy & Hoyles beobachten konnten, wird bei der ebenfalls durchgeführten Lehrerbefragung sichtbar. 25 Prozent der Befragten gaben an, dass sie selbst so wie Amanda vorgegangen wären. Hoyles & Healy (2007, S.96f) interpretieren diesen Befund so:

> „This result may reflect a lack of familiarity with geometrical reasoning amongst teachers, many of whom would have learnt rather little geometry themselves be-

> cause of the decline in geometry in the school curriculum since the 70s. It might also stem from the importance teachers give to arguments that are felt to explain, with teachers believing Amanda's actions to be a particularly good way of thinking about the property being considered and valuing this over a deductive argument."

Dabei hätten 22 Prozent der Lehrerinnen und Lehrer erwartet, dass ihre Schülerinnen und Schüler Amandas Weg die beste Note zugeordnet hätten, während es tatsächlich nur 5 Prozent waren. „Teachers in this case were apparently „not in touch" with the aspirations of their students" (ebenda, S.97).
In einem letzten Aufgabenteil der Studie sollten die Schülerinnen und Schüler schließlich selbst Beweise durchführen. Hierbei wurde unterschieden zwischen Beweisaufgaben, die in ähnlicher Art bereits in den multiple-choice-Aufgaben vorkamen, was bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler die dort vorgeschlagenen Argumentationen hätten nutzen können, und solchen, die eher neuartig waren. Healy & Hoyles räumen allerdings ein, dass es in der Aufgabenstellung keinen Hinweis darauf gab, dass ein Teil der Probleme bereits im Vorfeld thematisiert worden war, und schließen daher nicht aus, dass dies übersehen worden sein könnte. Den Lösungen der Schülerinnen und Schüler wurden anschließend ganzzahlige Werte zwischen Null und Drei zugeordnet. Dabei legen Healy & Hoyles Wert darauf, dass die Bepunktung sich nur auf die Schlüssigkeit der Argumentation und nicht auf die Präsentation bezog (vgl. Healy & Hoyles 1999, S.2). Folgende Bewertungskriterien (vgl. Abbildung 2.22) wurden zugrunde gelegt:

Proof classification	Score
No basis for the construction of a correct proof.	0
No deducations but relevant informations presented	1
Partial proof, including all information needed but omitting some steps of reasoning.	2
Complete proof.	3

Abbildung 2.22 – *Kriterien für die Punkteverteilung bei Beweiskonstruktionen (*Healy & Hoyles *1999, S.13, Tabelle 3)*

Auch die hier durchzuführenden Beweise entstammten den Gebieten Algebra und Geometrie. Die Aufgaben A4 und G4 waren dabei solche, zu denen Kenntnisse aus dem multiple-choice-Test hätten herangezogen werden können, während die Aufgaben A7 und G7 die Schülerinnen und Schüler mit unbekannten Problemstellungen konfrontierten (s. Abbildung 2.23).

A4. Prove whether the following statement is true or false. Write down your answer in the way that would get you the best mark you can.

When you add any 2 odd numbers, your answer is always even.

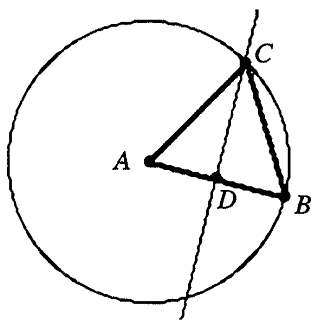
A7. Prove whether the following statement is true or false. Write your answer in a way that would get you the best mark you can.

If p and q are any two odd numbers, $(p+q)\times(p-q)$ is always a multiple of 4.

G4. Prove whether the following statement is true or false. Write your answer in a way that would get you the best mark you can.

If you add the interior angles of any quadrilateral, your answer is always 360°.

G7.



A is the centre of a circle and *AB* is a radius. *C* is a point on the circumference where the perpendicular bisector of *AB* crosses the circle. Prove whether the following statement is true or false. Write your answer in a way that would get you the best mark you can.

Triangle *ABC* is always equilateral.

Abbildung 2.23 – *Beweisaufgaben A4, A7, G4 und G7 aus* Healy & Hoyles *(1999)*

Wie nicht anders zu erwarten, wurden die Aufgaben A4 und G4 besser bearbeitet, wobei die Aufgaben aus dem Gebiet der Algebra signifikant besser gelöst bzw. bearbeitet wurden als diejenigen aus dem Bereich der Geometrie (vgl. Abbildung 2.24).

Score	Criteria for assigning scores	Question			
		A4	G4	A7	G7
0	No basis for proof	14	24	35	62
1	Some basis, no deductions	46	52	56	28
2	Partial proof	18	5	6	5
3	Complete proof	22	19	3	5
Mean Score		1.5	1.2	0.8	0.5

Abbildung 2.24 – *Prozentuale Verteilung der erreichten Punkte zu den Aufgaben A4, A7, G4 und G7 (*HEALY & HOYLES *1999, S.41-42)*

Dabei war den Schülerinnen und Schülern wichtig, dass ein Beweis zum Verständnis des Sachverhalts beitragen sollte, - eine grundsätzlich vernünftige Einstellung. Dies konnte allerdings das formal-deduktive Vorgehen in der Regel für sie nicht leisten, weshalb sie diesem zwar die besten Noten zuwiesen, es für sich selbst aber nicht nutzten.

> „What may well be different from responses in other countries is that students who had followed our curriculum preferred to construct a proof to a familiar conjecture in a narrative style, and in the process frequently showed considerable individuality and creativity. They rarely if ever acted out meaningless formal rituals when producing proofs, as reported in studies when students had followed a more traditional curriculum. Rather, their proofs were the products of struggle to mould their informal, even private, explanations into a more public communication of the lines of their arguments. The students displayed less creativity in the face of unfamiliar conjectures in geometry: they wanted their own proofs to satisfy the criterion of convincing and explaining but, unlike in the familiar case, could not find ways to express these needs“ (HOYLES & HEALY 2007, S.107).

Um wie auf S. 67 bereits erwähnt auch noch den Einfluss der jeweiligen Schule zu berücksichtigen, führten HEALY & HOYLES zusätzlich Befragungen bei den Lehrpersonen durch. Diese sollten beispielsweise dieselben Multiple-choice-Aufgaben bearbeiten und eine Einschätzung abgeben, welcher Aufgabenlösung die beste Beurteilung durch den Lehrer oder die Lehrerin zugewiesen werden würde. Abschließend mussten HEALY & HOYLES allerdings feststellen, dass durch die Studie der Einfluss der Lehrpersonen nicht eindeutig herausgearbeitet werden konnte, sondern lediglich Tendenzen festgestellt werden konnten:

> „F54. Students' responses are not influenced by their teacher's sex, years of teaching experience or qualifications, nor by their teachers' responses to the questionnaire.
> F17. Choices of proof in geometry are predominantly associated with student rather than school, curriculum and teacher factors" (HEALY & HOYLES 1999, S.67f).

Im Folgenden sind die für meine Arbeit interessantesten Ergebnisse, die HEALY & HOYLES herausgearbeitet haben, aufgelistet:

- Sowohl beim Durchführen als auch beim Evaluieren von Beweisen erbringen Schülerinnen und Schüler in Algebra bessere Leistungen als in Geometrie.

- Die Leistungen der Schülerinnen und Schüler im geometrischen Beweisen sind durchgehend schlecht und liefern großen Anlass zur Besorgnis.

- Die Entscheidung für eine bestimmte Vorgehensweise (narrativ, formal, etc.) ist abhängig davon, ob der Beweis selbst durchgeführt werden oder eine Einschätzung zur Bewertung durch die Lehrperson abgegeben werden soll.

- Schülerinnen und Schüler glauben, dass ein formal dargestellter Beweis die beste Note bekommt.

- Die Entscheidung, ob eine Argumentation einen schlüssigen Beweis liefert, basiert weniger auf deren Korrektheit, als vielmehr auf der Ausprägung des Formalismus bei der Notation und dem scheinbaren Grad an Allgemeingültigkeit. Letzteres führt dazu, dass Argumentationen, die nicht allgemeingültig zu sein scheinen, wie z.B. Gegenbeispielen, die Beweisfähigkeit abgesprochen wird.

- In Geometrie haben die äußeren Rahmenbedingungen wie Schule, Lehrplan und Lehrperson kaum Einfluss darauf, für welche Art der Beweisform (narrativ, formal, etc.) sich die Schülerinnen und Schüler entscheiden (vgl. HEALY & HOYLES 1999, S.64ff).

Sie fassen zusammen:

> “The major finding of the project is that most high-attaining Year 10 students after following the National Curriculum for 6 years are unable to distinguish and describe mathematical properties relevant to a proof and use deductive reasoning in their arguments. Most are inclined to rely upon empirical verification“ (Healy & Hoyles 1999, S.6),

und erheben anschließend die folgende Forderung:

> “Taken together the results of our study suggest that, in the forthcoming review of the National Curriculum for mathematics, attention should be paid to the coverage of geometry and more generally to the approach to proof. We suggest that more explicit efforts should be made to engage students with proof while discussing with them the idea of proof at a meta-level, in terms of its meaning, generality and purposes. This would involve finding ways of balancing the need to produce a coherent and logical argument with the need to provide one that explains, communicates and convinces. This implies that alongside the curriculum emphases on measurement, calculation and the production of specific (usually numerical) results, more consideration should be given to appreciating mathematical structures and properties, the vocabulary to describe them, and simple inferences that can be made from them. Our evidence suggests that students could well respond positively to the challenge of attempting more rigorous and formal proofs alongside informal argumentation, and that developing approaches where this might be accomplished in the context of geometry as well as of algebra, would be a useful way forward“ (Healy & Hoyles 1999, S.7).

Nachdem im Jahr 2000 in Großbritannien eine Reform des Curiculums stattgefunden hatte, wodurch geometrischen Begründungen und Beweisen ein höherer Stellenwert eingeräumt wurde, führte Holyes zusammen mit Küchemann von 2002 bis 2005 eine neue Untersuchung durch. Dabei wurden zum Teil dieselben Aufgaben wie 1996 eingesetzt, unter anderem die Aufgabe zur Winkelmaßsumme im Dreieck. Hoyles & Healy stellen vorsichtige Vergleiche zwischen den beiden Untersuchungen an. Bei der Schülerbefragung ergaben sich zur vorangegangenen Untersuchung nur marginale Abweichung. Die Antworten der Lehrpersonen hingegen hatten sich verändert. Nunmehr gaben nur noch 10 Prozent an, Amandas Lösung

entspreche der eigenen Vorgehensweise, und nur noch 6 Prozent glaubten, dass die Schülerinnen und Schüler für diese Lösung die beste Note erwarteten. Hoyles & Healy (2007, S.111) geben eine mögliche Erklärung an: „It could be that, whereas the curriculum changes had not yet motivated substantial changes in the mathematics classroom, the more explicit emphasis on deductive reasoning in the programmes of study for geometry had some impact on how teachers judged geometrical proofs.“
Auch bei der Durchführung von eigenen Beweisen durch die Schülerinnen und Schüler stellen Hoyles & Healy (2007, S.113) Unterschiede fest:

> “Despite the limitations in this comparative analysis because of the obvious problems in equivalence of samples of students and teachers, it does appear that the process approach to proof that characterised the pre-2000 version of the curriculum encouraged the production of empirical examples, which, though limited as not necessarily giving any focus to analytical or deductive argument, did have the advantage of affording to students some entry point into examining conjectures in geometry. The comparison also points to some risks in simply giving increased curriculum emphasis to geometrical reasoning, and leaves us with the challenge of finding a curriculum approach that allows teachers to support students in negotiating the passage from evidence that illuminates geometrical conjectures to reasoning which justifies them.“

Wie bereits eingangs erwähnt, greifen jüngere Studien auf das Aufgabenformat von Healy & Hoyles zurück. So versuchen beispielsweise Ufer *et al.* (2009) herauszufinden, über welches beweisspezifische Methodenwissen Schülerinnen und Schüler verfügen und wie sich der Zusammenhang zwischen diesem Methodenwissen und Beweiskompetenz darstellt. Dabei unterteilen sie das Methodenwissen in Anlehnung an Heinze & Reiss (2004b) in die drei Bereiche: 1. Beweisschema (Proof scheme), 2. Beweisstruktur (Proof structure) und 3. Beweiskette (Chain of conclusions), die ich im folgenden kurz erläutern möchte.

1. **Beweisschema**: Unter diesen Aspekt werden die Argumente bezüglich der einzelnen Beweisschritte subsummiert. Dabei wird zwischen zulässigen (allgemeingültige deduktive Schlüsse) und unzulässigen (empirische Nachweise, Anschauung, Berufung auf höhere Autoritäten) Argumenten unterschieden.

2. **Beweisstruktur**: Der Beweis soll bei den Voraussetzungen anfangen und bei der Behauptung enden. Eine Verletzung dieses logischen Aufbaus ist insbesondere in Zirkelschlüssen und Beweislücken zu sehen.

3. **Beweiskette**: Jeder Beweisschritt muss auf den vorangegangenen Beweisschritten aufbauen, falls erforderlich unter Bezugnahme auf zusätzliches gesichertes Wissen, so dass eine logische Kette gebildet wird.

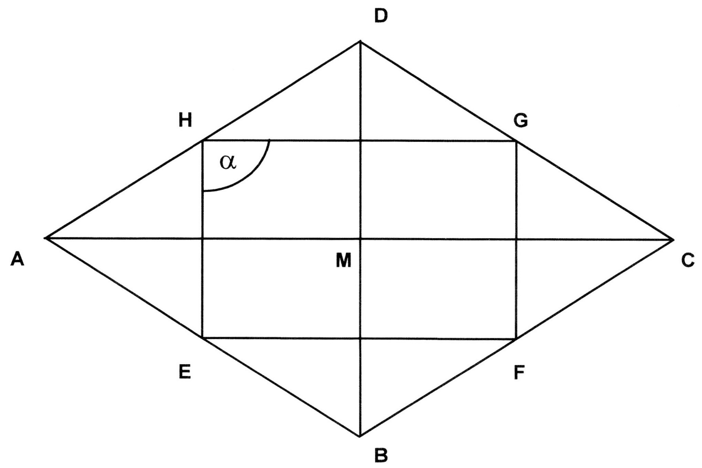
Dabei können die drei Bereiche in dem Sinn unabhängig voneinander betrachtet werden, dass es möglich ist, dass Schülerinnen und Schüler zwar in dem einen Fehler machen, die anderen aber korrekt abhandeln. Ufer *et al.* (2009, S.36) stellen die These auf, dass „das Wissen um die genannten Kriterien für mathematische Beweise [...] Voraussetzung für die Kompetenz, Beweise entsprechend dieser Kriterien zu beurteilen und zu konstruieren“ ist. Daher war ihre Studie darauf ausgerichtet, den vermuteten Zusammenhang zwischen Methodenwissen und Beweiskompetenz empirisch nachzuweisen und dabei gleichzeitig herauszufinden, in welchem Themenfeld die besonderen Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler liegen.

In Anlehnung an die Vorgehensweise von Healy & Hoyles (1999) sollten bei Ufer *et al.* (2009) die Schülerinnen und Schülern bei vier vorgeblichen Schülerlösungen zu einer Beweisaufgabe angeben, ob sie sie für richtig oder falsch hielten. Dabei wurde im ersten Lösungsvorschlag mit empirischen Argumenten gearbeitet, so dass der Aspekt des Beweisschemas von Bedeutung war, während im zweiten Lösungsvorschlag ein Zirkelschluss getätigt wurde, so dass hier die Beweisstruktur eine Rolle spielte. Die beiden letzten Lösungsvorschläge waren korrekt, wobei der eine eher formaler und der andere eher narrativer Art war.

Nur wenn die Schülerinnen und Schüler meinten, dass ein Beweis nicht korrekt sei, sollten sie eine Begründung liefern, und zwar in freier Formulierung. Um quantitativ auswerten zu können, wurden diesen Schülerantworten Punkte zugewiesen: Wurde ein korrekter Beweis (ohne Begründung) als korrekt eingeschätzt, wurden 2 Punkte vergeben; wurde ein falscher Beweis (ohne Begründung) als falsch erkannt, wurde 1 Punkt vergeben; wurde zusätzlich korrekt begründet, warum der falsche Beweis nicht in Ordnung ist, gab es einen weiteren Punkt. Wurde ein richtiger Beweis als falsch eingeschätzt bzw. ein falscher Beweis für richtig gehalten, gab es keine Punkte. Abbildung 2.25 zeigt die in der Studie eingesetzte Aufgabe (Originalaufgabenblätter im Anhang A.4 dieser Arbeit).

Rechteck in der Raute

Verbindet man die vier Seitenmitten einer Raute, so entsteht ein Rechteck.



Achims Antwort:

Ich habe drei Rauten gezeichnet: eine mit genau 7 cm Seitenlänge, eine mit 4,9 cm Seitenlänge und eine mit 2,75 cm Seitenlänge. Jedes Mal habe ich die Seitenmitten eingezeichnet und verbunden. Dann habe ich die Innenwinkel dieser Vierecke EFGH gemessen: sie waren immer genau 90° groß.

Also sind die Vierecke EFGH immer Rechtecke.

Die Behauptung ist wahr!

Christians Antwort:

Aussage	Begründung
Das Viereck *ABCD* hat die Geraden *AC* und *BD* als Symmetrieachsen.	*ABCD* ist eine Raute.
Das Viereck *EFGH* hat die Geraden *AC* und *BD* als Symmetrieachsen.	*E*, *F*, *G*, *H* sind die Seitenmitten.
$\alpha = 90°$	Winkel im Rechteck
Alle 4 Innenwinkel von *EFGH* sind kongruent, also ebenfalls 90°.	wegen der obigen Symmetrien
$\Rightarrow$ *EFGH* ist ein Rechteck.	

Die Behauptung ist wahr!

Brittas Antwort:

Aussage	Begründung
Das Viereck *ABCD* hat die Geraden *AC* und *BD* als Symmetrieachsen.	*ABCD* ist eine Raute.
Das Viereck *EFGH* hat die Geraden *AC* und *BD* als Symmetrieachsen.	*E*, *F*, *G*, *H* sind die Seitenmitten.
$\Rightarrow$ alle 4 Innenwinkel von *EFGH* sind kongruent	
(1) 4α = 360°	Innenwinkelsumme des Vierecks *EFGH* mit vier kongruenten Winkeln
(2) α = 90°	folgt aus (1)
EFGH ist ein Rechteck	folgt aus (2), denn alle Innenwinkel sind kongruent zu α

Die Behauptung ist wahr!

Doros Antwort:

Jede Raute ist ein Parallelogramm.

Weil ABCD eine Raute ist und E, G die Seitenmitten, entsteht [EG] durch Parallelverschiebung aus [AD] (oder aus [BC]). Genauso entsteht [FH] durch Parallelverschiebung aus [BA] oder [CD]. Daher sind alle diese Strecken kongruent und es folgt: $\overline{\mathbf{FH}} = \overline{\mathbf{CD}} = \overline{\mathbf{AD}} = \overline{\mathbf{EG}}$.

Weil die ganze Figur punktsymmetrisch zu M ist, halbieren sich [EG] und [FH] gegenseitig.

Also ist EFGH ein Viereck, dessen gleichlange Diagonalen sich gegenseitig halbieren. Ein solches Viereck muss ein Rechteck sein (folgt aus dem Haus der Vierecke).

Die Behauptung ist wahr!

Abbildung 2.25 – *Aufgabe aus der Studie von* Ufer *et al. (2009)*

Die Antwort von Achim gründet sich auf exemplarischen Messungen, so dass hier ein Fehler in der Kategorie „Beweisschema“ vorliegt, während die Antwort von Christian einen Zirkelschluss enthält, so dass hier eine fehlerhafte „Beweisstruktur“ zu verzeichnen ist. Die Antworten von Britta und Doro werden als korrekt akzeptiert, wobei Britta eher formal und Doro eher narrativ argumentiert.

Meiner Einschätzung nach sind die vorgegebenen Aufgabenlösungen insgesamt nicht unproblematisch.

- Die Antwort von Christian ist in den ersten zwei Zeilen wortgleich zur Antwort von Britta. Dieses könnte von den Schülerinnen und Schülern, die ja aufgefordert sind, nach Fehlern oder Lücken in der Beweisführung zu suchen, derart gedeutet werden, dass dieser Teil der Lösungen unproblematisch ist, so dass sie ihre Einschätzung hier nicht am Inhalt ausrichten.
- Christian, Britta und Doro argumentieren mit den Eigenschaften der Raute. Sie machen aber nicht explizit deutlich, mit welcher dieser Eigenschaften sie argumentieren. Beispielsweise bezieht sich die Aussage, dass das Viereck $ABCD$ die Geraden AC und BD als Symmetrieachsen hat, auf die Eigenschaft der Diagonalen einer Raute, während sich die Kongruenz der Strecken FH, CD, AD und EG auf die Eigenschaft bezieht, dass alle Seiten einer Raute gleich lang sind. Hier könnten Schülerinnen und Schüler zu einer falschen Einschätzung kommen, da ihnen nicht alle Eigenschaften einer Raute präsent sind. Genauso besteht das Problem, dass hier die Beweisschritte als zu groß und dadurch bedingt lückenhaft angesehen werden, eben weil der Bezug auf die konkrete Eigenschaft einer Raute fehlt. Diese Vermutung wird dadurch gestützt, dass von den 39 Schülerinnen und Schülern, die die Antwort von Britta als fehlerhaft ansahen, 15 einen Fehler in der Beweiskette vermuteten: „Bei dem korrekten Argumentationsbeispiel im formalen Stil vermuteten die meisten Schüler einen Fehler im Bereich *Beweiskette*, wenn sie das Beispiel fehlerhaft evaluierten. Die einzelnen Begründungen weisen darauf hin, dass die Schüler Probleme hatten, den Bezug zwischen einzelnen Schritten nachzuvollziehen. War ihnen dieser nicht eingängig, so wurde das Argumentationsbeispiel - mit einer zum Aspekt *Beweiskette* gehörenden Begründung - kritisiert und als Beweis abgelehnt“ (Ufer *et al.* 2009, S.43). Das bedeutet, dass die Ablehung hier möglicherweise

sogar positiv zu werten wäre, da die Schülerinnen und Schüler kleinere Beweisschritte für erforderlich hielten. Auch UFER *et al.* (2009) räumen dies ein, wenn sie ergänzen: „Obwohl dies wegen der geringen Anzahl an Fällen vorsichtig zu bewerten ist, scheint der Aspekt der *Beweiskette* einigen der hier untersuchten Schülern wenigstens implizit bekannt gewesen zu sein“ (ebenda, S.43).

- Doro gibt keinerlei Begründung dafür, warum die ganze Figur punktsymmetrisch zu M ist. Hier könnte sehr gut ein der Zeichnung entnommenes Anschauungsargument zugrundeliegen. Damit wäre der Beweis nicht als korrekt einzustufen, sondern wiese eine Verletzung der Kategorie „Beweisschema“ auf. (Bei den 57 Personen, die den Beweis als nicht korrekt einstufen, beziehen sich 21 auf Fehler im Beweisschema, wobei allerdings nicht gesagt wird, ob und wie oft der Aspekt der Anschauung eine Rolle spielt.) Genausogut könnte man argumentieren, dass Doros Beweis eine Lücke in der Beweiskette aufweist, da die Punktsymmetrie der ganzen Figur nicht aus vorangegangenen Beweisschritten geschlossen wird und auch nicht begründet als zusätzliches externes Wissen eingeführt wird. (Allerdings begründen nur 3 Schülerinnen und Schüler, die diesen Beweis als nicht korrekt einstufen, dies mit Fehlern in der Beweiskette.)

- Während Christian (formal, Zirkelschluss) und Britta (formal, korrekt) nahezu dieselben Argumente verwenden (natürlich bis auf den Unterschied, dass bei Christian die Behauptung $\alpha = 90°$ als Voraussetzung erscheint, während sie bei Britta eine Folgerung ist), verwendet Doro völlig andere Begründungen (Parallelverschiebung, Punktsymmetrie). Dies könnte zur Folge haben, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Einschätzung an inhaltlichen Argumenten und nicht an der narrativen Form festmachen. In der Auswertung der Daten ist zu sehen, dass von den 57 Personen, die diesen Beweis nicht als korrekt eingeschätzt haben, 12 dieses fehlerhaft begründet haben, weil bei ihnen ein Defizit im Begriffswissen erkennbar war. Zählt man die 14 Personen hinzu, die überhaupt nicht begründet haben, warum sie Doros Antwort für falsch halten und die 2, bei denen keine Zuordnung möglich war, so muss festgestellt werden, dass mindestens bei 28 von 57 Personen nicht festzumachen ist, ob die Ablehnung an der narrativen Darstellung liegt. Demgegenüber stehen 21 Schülerinnen und Schüler, die die Ablehung daran festmachen, dass das Beweisschema verletzt ist. Darunter fällt die Kritik, dass keine Formeln benutzt werden bzw. dass Doro die Antwort in ganzen Sätzen formuliert. Darunter würde allerdings ebenfalls die Kritik daran fallen, dass Doro ohne Begründung behauptet, dass M das Symmetriezentrum der ganzen Figur ist.

Damit werden zwei prinzipielle Schwächen des Reiss-Ufer-Ansatzes deutlich (besonders bei Doro):

1. Die Unterscheidung von Beweisschema und Beweiskette bleibt vom Grundsatz her unscharf.

2. Die Frage, was man warum voraussetzen oder auch nicht voraussetzen darf, bleibt unbeantwortet.

Zudem bleibt natürlich die bereits im Zusammenhang mit der Studie von Healy & Hoyles (1999) geübte Kritik bestehen, dass bei der Einschätzung einer Antwort als korrekten Beweis überhaupt keine Begründung von den Schülerinnen und Schülern verlangt wird, so dass insgesamt fraglich ist, ob die gewählte Aufgabe und die Vergabe der Punkte einen fundierten Rückschluss von der Punktzahl auf die Qualität des vorhandenen Methodenwissens zulassen. Immerhin können 6 von 8 Punkten allein durch das Setzen von Kreuzen, ohne jede explizite Begründung, erreicht werden. Zudem wird die Erfassung des Methodenwissens an der Bearbeitung einer einzigen Aufgabe festgemacht.
Um den Zusammenhang zwischen Methodenwissen und Beweiskompetenz nachweisen zu können, versuchen Ufer *et al.* (2009), die Beweiskompetenz auch qualitativ zu erfassen. Hierzu verwenden sie ein dreistufiges Kompetenzmodell des Beweisens (vgl. Reiss *et al.* 2002; Heinze & Reiss 2004a; Reiss *et al.* 2006). „Sie [Reiss und Kollegen, G.W.] entwickelten Leistungstests mit Aufgaben zu Basiskompetenzen und Argumentationsaufgaben, auf deren Grundlage ein theoretisches Kompetenzmodell mit drei Niveaus validiert werden konnte“ (Ufer *et al.* 2009, S.34). Dabei werden bestimmten Aufgabentypen bestimmte Niveaustufen zugeordnet: eine Aufgabe, bei der nur Basiswissen gebraucht, Regeln angewendet oder gerechnet werden muss, wird der Niveaustufe I zugeordnet; eine Beweisaufgabe, die einen einschrittigen Argumentationsschritt erfordert, der Niveaustufe II und eine Beweisaufgabe, die mehrschrittige Argumentatiosschritte erfordert, der Niveaustufe III. Dabei bedeutet ein Argumentationsschritt die Anwendung eines mathematischen Satzes.
Die Entscheidung, sich auf Aufgaben mit zwei Beweisschritten und damit auf Aufgaben auf

Niveaustufe III zu beschränken, wird damit begründet, dass bei Einsatz noch komplexerer Beweise, anders als bei Übergang von Niveaustufe II zu Niveaustufe III, kein nennenswerter qualitativer Unterschied mehr zu erwarten sei:

> „Zwischen Beweisaufgaben der Niveaus II und III besteht ein qualitativer Komplexitätsunterschied, da Beweise in der Regel nicht Schritt für Schritt konstruiert werden, sondern zum Finden einer „Beweisidee“ bereits mehrere mögliche Argumente und deren Kombinationen gleichzeitig betrachtet werden müssen. Eine weitere Erhöhung der Anzahl der Schritte über zwei hinaus erhöht zwar ebenfalls die Komplexität des Beweises, ein ähnlicher qualitativer Unterschied im Bearbeitungsprozess wie zwischen ein- und zweischrittigen Beweisen ist jedoch nicht zu erwarten“ (ebenda, S.34).

Untersuchungen in deutschen Gymnasien, bei denen über 2000 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 7 und 8 getestet wurden, ergaben (natürlich?), dass die Aufgaben der Niveaustufe I sehr viel besser gelöst wurden, als die Aufgaben der Stufen II und III. Dabei wurden die Aufgaben der Niveaustufe II noch relativ gut bearbeitet, während die Aufgaben der Niveaustufe III Probleme bereiteten (vgl. HEINZE & REISS 2004a; REISS *et al.* 2006; KUNTZE 2006; UFER & HEINZE 2008).

In der Befragung von UFER *et al.* (2009) wurden elf Aufgaben eingesetzt, vier auf der Niveaustufe I, drei auf der Niveaustufe II und vier auf der Niveaustufe III. Diese Aufgaben werden jedoch in dieser Arbeit von UFER *et al.* nicht vorgestellt. Auch in den Artikeln, auf die in diesem Zusammenhang verwiesen wird (vgl. HEINZE & REISS 2004a; REISS *et al.* 2006) werden die Aufgaben nicht veröffentlicht. Lediglich in UFER & HEINZE (2008) findet sich eine Aufgabe auf Niveaustufe I und eine auf Niveaustufe III, wobei die Einstufung auf die Beweiskompetenz in Klasse 7 bezogen ist. (Die Aufgabe, die bezüglich Klasse 7 auf Stufe III landet, ist eine sogenannte „Ankeraufgabe“, die sich auch im Testat der Klasse 9 wiederfindet. Hier ist sie dann auf das Niveau II herabgestuft, da ein Argumentationsschritt, der bei Klasse 7 als Anwendung eines Satzes gewertet wurde, nunmehr nur noch als Abrufen von Basiswissen gilt.) Die beiden Aufgaben habe ich in Abbildung 2.26 und Abbildung 2.27 dargestellt.

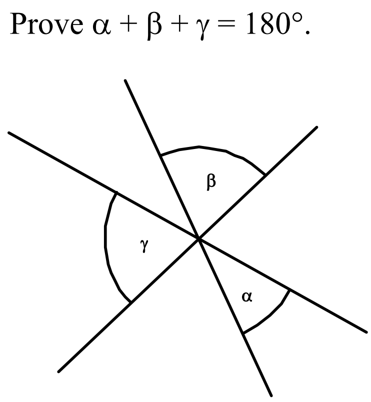


Abbildung 2.26 – *Aufgabe auf dem Niveau III für Klasse 7 aus* Ufer & Heinze *(2008, S.4)*

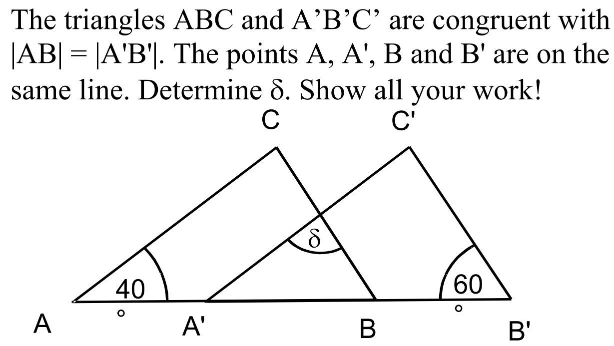


Abbildung 2.27 – *Aufgabe auf dem Niveau I für Klasse 7 aus* Ufer & Heinze *(2008, S.5)*

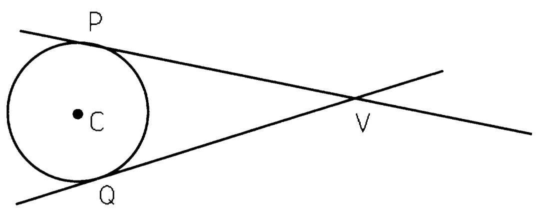
Ufer & Heinze begründen ihre Kategorisierung wie folgt: „For grade 7 this item [bezieht sich auf Abbildung 2.26, G.W.] was assigned to competence level III because it consists of two steps. As a first step the angle between β und γ has to be identified as the vertical angle of α which has the same size. The second step uses the fact that angles at a straight line add up to 180°" (ebenda. S. 4). Dahingegen wird die Aufgabe in Abbildung 2.27 unter die Kategorie „Rechenaufgabe" eingeordnet, was der Kategorie I entspricht, obwohl auch Ufer und Heinze feststellen: „This item is a calculation item, however, it requires an underlying argumentation with congruent triangles" (ebenda, S. 4).

Die Aufgabe in Abbildung 2.26 wird demnach dem Niveau III zugeordnet, weil zwei Sätze angewandt werden müssen (der Scheitel- und der Nebenwinkelsatz). Reiss *et al.* (2002, S.57) schreiben: „Auf dieser Stufe [Kompetenzsstufe III, G.W.] wird eigenständiges, zum Teil auch kreatives Problemlösen und Argumentieren verlangt." Einen derartigen Anspruch kann ich bei der Aufgabe aus Abbildung 2.26 nicht erkennen, selbst wenn man - mit gutem Willen - der o.g. Einschätzung folgt, dass zwei Sätze angewandt werden müssen. In der zweiten Aufgabe hingegen (vgl. 2.27), die der Niveaustufe I zugeordnet wird, muss sowohl mit Kongruenzen (entsprechende Winkel sind gleich groß) als auch mit der Innenwinkelmaßsumme im Dreieck argumentiert werden. Schaut man in die bayerischen Lehrpläne für die 7. Klasse des Gymnasiums, so findet man unter dem Unterpunkt „Winkelbetrachtungen an Figuren" die Stichpunkte

„Scheitelwinkel“, „Nebenwinkel“ und „Innenwinkelsumme beim Dreieck“ (siehe Anhang B.1). Diese Begriffe werden somit demselben Themenfeld zugeordnet, das nahelegt, sie auch zusammen im Unterricht zu thematisieren. Dennoch werten UFER & HEINZE den Bezug auf Scheitelwinkel und Nebenwinkel in Klasse 7 jeweils als Anwendung eines eigenständigen Satzes, während sie den Bezug auf die Innenwinkelmaßsumme im Dreieck nicht so sehen.
Es ist nicht nachvollziehbar, wenn das Wissen über Scheitelwinkel in Klasse 9 dem Faktenwissen hinzugerechnet und nun nicht mehr als Beweisschritt anerkannt wird („the vertical angle figure is recognized and retrieved as factual knowledge from memory“ (ebenda, S. 4), während das Wissen über Nebenwinkel nach wie vor als Beweisschritt gelten soll.
Die Probleme scheinen darin zu liegen, dass man, um operationalisieren zu können, durch einfaches Aufsummieren von zu verwendenden Sätzen auf eine Niveaustufe schließt und dabei zusätzlich nicht ausreichend begründete Unterscheidungen trifft, wann die Anwendung eines Satzes als Beweisschritt zählt und wann sie zum Abrufen von Gedächtniswissen trivialisiert wird. Dabei ist allerdings auch zu berücksichtigen, dass der Rückschluss durch die Analyse einer einzigen Aufgabe dieses Typs wenig zufriedenstellend ist.
Trotz der spärlichen authentischen Information erscheint das Ergebnis, dass es einen Zusammenhang zwischen Methodenwissen und Beweiskompetenz gibt, durchaus plausibel: „Mit etwa 10% aufgeklärter Varianz an der Punktzahl der Beweisitems hat das Methodenwissen einen Einfluss, der erwartungsgemäß nicht allzu groß, aber doch substanziell ist“ (UFER *et al.* 2009, S.45). Darüber hinaus wird die Vermutung aufgestellt, dass in allen Bereichen des Methodenwissens bei den Schülerinnen und Schülern Defizite zu verzeichnen sind, dass aber der Bereich *Beweisschema* besser beherrscht wird als der Bereich *Beweisstruktur*. Hier halten UFER *et al.* (2009) eine Veränderung im Unterricht für angebracht:

> „Für Fragen, die sich auf die Zusammenhänge zwischen den Beweisschritten beziehen, wie beispielsweise der *Beweisstruktur*, scheint eine stärkere Berücksichtigung im Unterricht notwendig. Sie kann beispielsweise durch nachvollziehendes Überprüfen erarbeiteter Beweise bzw. deren Beweisideen oder die Evaluation von vorgegebenen (falschen und korrekten) Beweisen umgesetzt werden. Im Rahmen solcher reflexiver Phasen könnte auch der Aspekt *Beweiskette* thematisiert werden“ (ebenda, S. 47f).

Dieser Forderung möchte ich mich durchaus anschließen. Zusätzlich ist anzumerken, dass immer wieder deutlich wird, dass der soziale Aushandlungsprozess bezüglich der Akzeptanz zulässiger Schlüsse von immenser Bedeutung ist. Hierzu gehört nicht nur die Art der zulässigen Schlüsse, auf die in allen Studien verwiesen wird (keine Zirkelschlüsse, keine empirischen Argumente, keine anschaulichen Argumente), sondern vor allen Dingen auch die Transparenz bezüglich der Granularität der einzelnen Beweisschritte (bezogen auf die Untersuchung von UFER *et al.* (2009): welche Schlüsse darf ich zulässig ziehen, wenn ich damit argumentiere, dass ich eine Raute vorliegen habe. Reicht die Nennung des Worts, um alle oder einige (welche?) ihrer Eigenschaften nutzen zu dürfen, oder muss man diese (welche?) explizit angeben?). Ich bin überzeugt, dass für viele Schülerinnen und Schüler diese Fragen völlig ungeklärt sind und diese Unklarheit eine wesentliche Ursache für ihre Unsicherheit ist, welche Schritte erlaubt sind und welche nicht. Zudem kann das Nachvollziehen oder Evaluieren von Beweisen zwar ein wichtiger Schritt zur Entwicklung von Beweiskompetenz sein, doch hinreichend sind diese Maßnahmen nicht, wie eine Studie von SCHOENFELD aus dem Jahr 1989 mit dem Titel: „Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behaviour" (SCHOENFELD. 1989) zeigt.
Dieser Studie vorangegangen war zu Beginn der 1980er Jahre ein Seminar zur mathematischen Kognition, das SCHOENFELD an der Universität Rochester, New York, abgehalten hatte. Die Seminarteilnehmer, die er als „mathematically and scientifically sophisticated" (SCHOENFELD 1989, S.338) einstuft, sollten zwei Probleme lösen, die in Abbildung 2.28 dargestellt sind:



The circle in the figure above is tangent to the two given lines at the points P and Q

Problem 1: Prove that the line segments PV and QV are the same length

Problem 2 Prove that the line segment CV bisects angle PVQ

Abbildung 2.28 – *Beweisprobleme 1 und 2 aus* SCHOENFELD *(1989, S.339)*

Die Bearbeitung der Aufgabe bereitete den Studierenden keinerlei Probleme, in weniger als drei Minuten erarbeiteten sie miteinander für beide Fragestellungen einen korrekten Beweis. Der Beweis wurde an die Tafel geschrieben, direkt anchließend an diese Dokumentation wurde das Plenum mit der nächsten Aufgabe, die sich unmittelbar auf die vorangegangene, offenbar leicht zu lösende Aufgabe in Abb. 2.28 bezog, konfrontiert (vgl. Abb. 2.29).

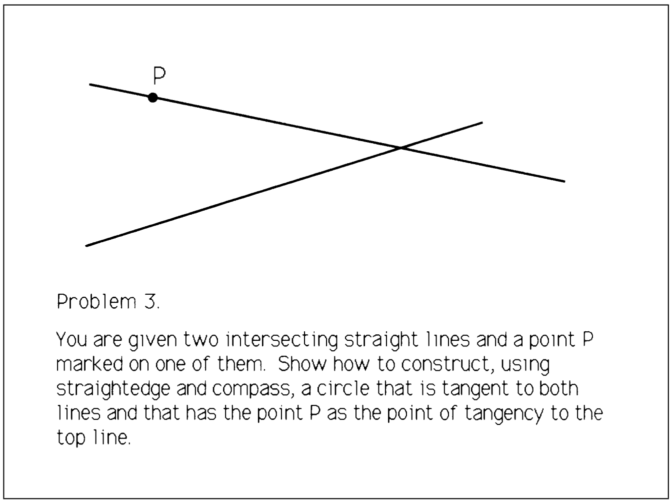


Abbildung 2.29 – *Ein Konstruktionsproblem (*SCHOENFELD *1989, S.339)*

Daraufhin ergab sich eine mehr als 10-minütige Diskussion, wie das Problem wohl zu lösen sei, und der chronologischen Reihenfolge nach wurden folgende vier Vermutungen entwickelt:

1. Sei V der Schnittpunkt der beiden Geraden und Q der Punkt auf der unteren Gerade, so dass die Strecke PV genausolang ist, wie die Strecke QV. Dann ist der Mittelpunkt der Strecke PQ der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

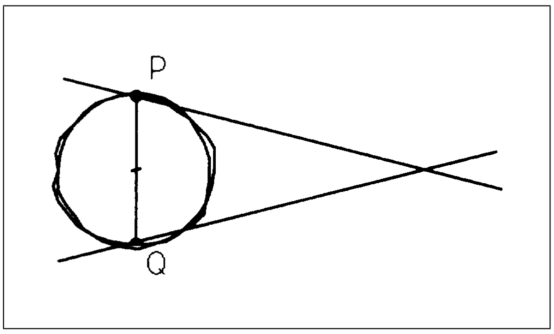


Abbildung 2.30 – *Erste Vermutung (*SCHOENFELD *1989, S.340)*

2. Sei V der Schnittpunkt der beiden Geraden. Zeichne einen Kreis um V mit dem Radius VP und nenne den Schnittpunkt mit der unteren Geraden Q. Der Mittelpunkt des Kreisbogens zwischen P und Q ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

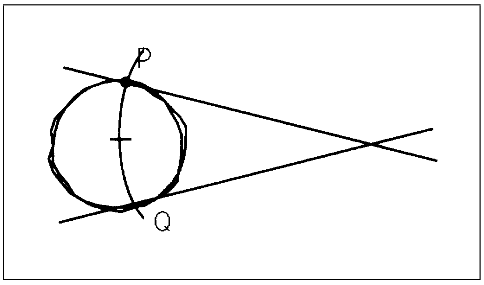


Abbildung 2.31 – *Zweite Vermutung* (SCHOENFELD *1989, S.340)*

3. Errichte von P aus das Lot auf die obere Gerade, dieses schneidet die untere Gerade. Der Mittelpunkt der so entstandenen Strecke ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

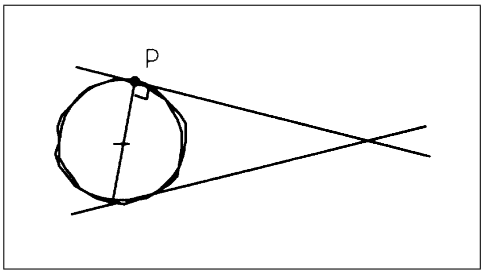


Abbildung 2.32 – *Dritte Vermutung* (SCHOENFELD *1989, S.340)*

4. Der Schnittpunkt des Lots durch P mit der Winkelhalbiernden des Winkels in V ist der Schnittpunkt des gesuchten Kreises.

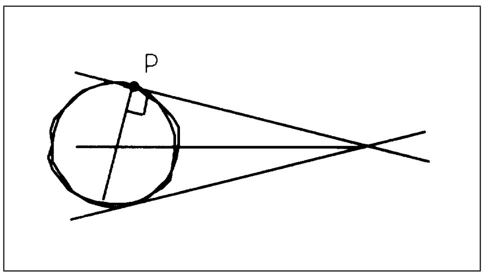


Abbildung 2.33 – *Vierte Vermutung* (SCHOENFELD *1989, S.340)*

Schoenfeld stellte fest, dass die Argumente der Studierenden dabei ausschließlich empirischer Art waren. So begründete bespielsweise die Person, die die zweite Vermutung formuliert hatte, ihre Vorgehensweise damit, dass der Mittelpunkt des gesuchten Kreises weiter links zu liegen habe, als in Vermutung 1 dargestellt. Obwohl noch immer der Beweis zu den Problemstellungen 1 und 2 an der Tafel stand, endete die Diskussion damit, dass keine der Vermutungen als Lösung für das Problem akzeptiert wurde, und die Studierenden räumten ein, die Aufgabe nicht lösen zu können. Schoenfeld sieht hierin eine Bestätigung für das überraschende, aber weitverbreitete Phänomen, dass Schülerinnen und Schüler zwar über mathematisches Wissen verfügen, dieses aber dennoch zu bestimmten Problemlösungen nicht heranziehen können: „This incident illustrates a curious but widespread phenomenon in which students give clear evidence of knowing certain mathematics but then proceed to act as if they are completely ignorant of it“ (Schoenfeld 1989, S.339f). Ebenso wurde die mangelnde Bereitschaft, sich auch einmal längere Zeit mit einem Problem zu beschäftigen, deutlich. Um diesem Phänomen weiter auf den Grund zu gehen, führte Schoenfeld bei 230 Schülerinnen und Schülern aus drei verschiedenen, jeweils hochangesehenen Highschools im Großraum Rochester (Bundesstaat New York) eine Befragung bezüglich ihrer Einstellungen zur Mathematik durch. Dabei konnte er grundsätzlich feststellen, dass die Schülerinnen und Schüler in der Regel leistungsbereit und hoch motiviert sind. Ihre Motivation gründet sich darauf, dass sie Mathematik als interessant empfinden und für hilfreich dabei halten, klar zu denken, und nicht auf extrinsischen Motiven wie „Ansehen bei der Lehrperson“ oder „Angst, als dumm zu gelten“. Darüber hinaus macht Schoenfeld eine eher erschreckende Feststellung:

> “Virtually all the problems the students were asked to solve were bite-size exercises designed to achieve subject matter mastery; the exceptions were clearly peripheral tasks that the students found enjoyable but that they considered to be recreations or rewards rather than the substance of what they were expected to learn. This kind of experience, year after year, has predictable consequences. Students come to expect typical homework and test problems to yield to their efforts in a minute or two, and most of them come to believe that any problem that fails to yield to their efforts in 12 minutes of work will turn out to be impossible. Despite their claims that proofs and constructions are closely related, they behave on construction problems as though their proof-related knowledge were nonexistent.

> Despite their assertions that mathematics helps one to think logically and that one can be creative in mathematics, they claim that mathematics is best learned by memorization - and in the case of memorization, they practice what they claim to believe“ (SCHOENFELD 1989, S.348f.).

Hier sieht SCHOENFELD vor allen Dingen auch die Unterrichtskultur in die Pflicht genommen: Ganz deutlich wurde, dass es für Schülerinnen und Schüler einen fundamentalen Unterschied zwischen „Schulmathematik“ und „abstrakter Mathematik“ gibt. Während erstere das ist, was sie im Klassenzimmer erleben, ist letztere „the discipline of creativity, problem solving, and discovery, about which they are told but which they have not experienced“ (SCHOENFELD 1989, S.349). Daher orientieren sich Schülerinnen und Schüler, oftmals sogar konträr zu ihren erklärten Einstellungen zur Mathematik, an ihren durch die schulische Sozialisation erworbenen Verhaltensweisen, die auf Auswendiglernen und Reproduzieren abzielen. Diese Diskrepanz in einer neuen Unterrichtskultur zu beseitigen, ist daher für SCHOENFELD eine der vorrangigsten Aufgaben des Mathematikunterrichts.

Auch HEINZE & REISS (2004c) üben Kritik am vorherrschenden Mathematikunterricht, obwohl sie einschränken, dass es bisher nur wenige Untersuchungen gibt, die die Besonderheiten der jeweiligen Klasse berücksichtigen. Daher versuchen sie, in einer Video-Studie herauszufinden, wie Beweise im Mathematikunterricht konkret unterrichtet werden, welche Schritte dabei von der Lehrperson betont werden und ob es Lücken gibt oder Beweisphasen, die zu wenig berücksichtigt werden. Hierzu wurden 20 Unterrichtsstunden in insgesamt acht Klassen der Jahrgangsstufe 8 von vier verschiedenen Gymnasien aufgezeichnet und ausgewertet. Dabei wurden die Lehrerinnen und Lehrer aufgefordert, „normalen“ Unterricht abzuhalten, und die Schülerinnen und Schüler anschließend befragt, ob die Stunde wirklich so gewesen sei, wie sie üblicherweise ablaufe. Anschließend wurde der Unterricht dahingehend analysiert, welche Beweisphasen vorkommen. Dabei bauen HEINZE & REISS auf den in Abschnitt 2.1.4 dargestellten Modell von BOERO auf. Im wesentlichen entspricht ihre Einteilung der von HILBERT *et al.* getätigten Modifizierung, mit der Einschränkung, dass sie die dortige Phase 4 (*Auswahl und Verknüpfung von angemessenen Argumenten zu einer Beweiskette*) nochmals unterteilen in: *Auswahl geeigneter Argumente gemäß der Beweisidee zu einer Beweisskizze* und *Dokumentation des Beweises in schriflicher Form gemäß der Klassenstandards*, so dass sie insgesamt fünf Phasen unterscheiden. Dabei wird in der letzten Phase Wert darauf gelegt, dass ein Rück-

blick über den Beweisprozess gegeben wird.
Der folgende Unterrichtsverlauf wird von Heinze & Reiss (2004c, vgl. S.101) als typisch identifiziert: die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst eine Zeichnung anfertigen, Linien und Winkel messen und vergleichen, sowie Beobachtungen äußern (Phase 1). Danach sollen eine Vermutung aufgestellt (Phase 2), Begründungen, die diese Vermutung stützen, gesucht (Phase 3) und diese anschließend zu einer Beweisidee verknüpft (Phase 4) werden. Heinze & Reiss stellen fest:

> „If the students are not able to generate the correct proof idea (i.e. the idea the teacher has in his/her mind), then the teacher gives some hints. After that the proof is organized step by step on the chalkboard. This takes place in a very special form of classroom discourse, during which the teacher leads the students through the proof by specific questions. In other words, the students have to follow the proof the teacher has in his/her mind“ (ebenda, S.101).

Eine Retrospektive, wie in Phase 5 gefordert, findet in den wenigsten Fällen statt.
Insgesamt ziehen Heinze & Reiss ein ernüchterndes Fazit (ebenda, S.103). Obwohl sie auch Unterricht beobachteten, der ihren Ansprüchen gemäß nahezu vorbildlich ist, muss bei dem überwiegenden Teil kritisiert werden:

- Wichtige Phasen innerhalb des Beweisprozesse werden von Lehrerinnen und Lehrern vernächlässigt.
- Den Schülerinnen und Schülern wird keine Zeit für tiefergehende Untersuchungen und Überlegungen gelassen. Daher haben sie nahezu keine Chance, Probleme wirklich selbstständig zu lösen.
- Für die Schülerinnen und Schüler entsteht der Eindruck, dass ein Beweis in kleine Teilschritte unterteilt werden kann, die erfolgreich gegangen oder zumindest nachvollzogen werden können. Dies führt letztlich dazu, dass sie den Überblick über den komplexen Beweisprozess verlieren.
- Viele Probleme bezüglich des Beweisens, die bei Schülerinnen und Schülern auftreten, sind Konsequenzen aus dem Unterricht, den sie erlebt haben.

Ein Versuch, den Beweisprozess und die dafür nützlichen Heuristiken für die Schülerinnen und Schüler transparenter zu machen, besteht nach Auffassung einiger Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker darin, „heuristische Lösungsbeispiele" im Unterricht einzusetzen (siehe Reiss & Renkl 2002; Reiss *et al.* 2006; Hilbert *et al.* 2008; Reiss *et al.* 2008). Diese „heuristischen Lösungsbeispiele" bilden eine Kombination aus ausgearbeiteten Lösungen zu Problemaufgaben, den sogenannten „worked-out examples" (vgl. Reiss & Renkl 2002, S.30), und heuristischen Elementen, die helfen sollen, Strategien zur Lösungsfindung zu generieren. Nach Auffassung von Reiss & Renkl können so die Vorteile der „worked-out examples" genutzt werden, ohne dass bei den Schülerinnen und Schülern der Eindruck entsteht, dass es sich beim Beweisen um einen linearen Prozess handele, was bei ausschließlichem Einsatz dieser Aufgabenformate passieren könne. Die Vorteile der „worked-out examples" bestünden darin, dass beim Agieren in neuen Kontexten keine Kapazitäten für das Erinnern der neuen Sachverhalte gebraucht würden, dass die Schülerinnen und Schüler motivierter seien, weil sie nicht dem Druck ausgesetzt sind, selbstständig ein Problem zu lösen, und schließlich, weil die „worked-out examples" sehr einfach in den üblichen Unterricht integriert werden könnten (vgl. ebenda, S. 31).

Reiss *et al.* (2006, S.196f) resümieren: „Konkret geht es bei den heuristischen Lösungsbeispielen darum, von Boero (1999) postulierte Phasen des mathematischen Beweisens zu implementieren, soweit sie im Rahmen des Mathematikunterrichts eine Rolle spielen. Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei lernen, Vermutungen zu entwickeln und aufzustellen, geeignete von weniger geeigneten Lösungsideen zu unterscheiden, eine Folge von Beweisschritten zu finden und sie in logisch kohärenter Form aufzuschreiben."

Ein Beispiel für ein „heuristisches Lösungsbeispiel", das der Arbeit von Reiss & Renkl (2002) entnommen ist, findet sich als Anhang A.3 in dieser Arbeit. Dabei geht es um die Feststellung, dass die Winkelmaßsumme in jedem Dreieck 180° groß ist (ich selbst halte diesen Beweis eher für ungeeignet für das Beweisenlernen, weil die Aussage fast als Axiom genommen werden könnte). Reiss & Renkl (2002, S.32) sehen dieses Bespiel als repräsentativ für das Format der „heuristischen Lösungsbeispiele an", wenn sie sagen: „The following heuristic worked-out example is intended to provide an overview of the most important aspects of this type of example. This specific example is not only meant to prove that the interior angles in any triangle add up to 180° but also helps demonstrate to students various aspects of proving in general."

Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, zunächst ein Dreieck zu zeichnen, die Winkel zu messen und die Summe der Winkelmaße zu bilden. (Es sollen drei Wiederholungen gemacht werden). Anschließend sollen sie ein Dreieck zeichnen, die Ecken abschneiden und diese zu einem Winkel zusammenlegen (drei bis vier Wiederholungen). Als nächstes soll ein Dreieck gezeichnet, ausgeschnitten und als Zeichenschablone genutzt werden, um so lauter kongruente Dreiecke herzustellen. Diese sollen ausgeschnitten und so aneinandergelegt werden, dass sich unten eine gerade Linie bildet. Dabei soll auffallen, dass sich auch oben eine gerade Linie bildet, so dass jetzt auf dreifache Art und Weise in mehrfachen Wiederholungen die Hypothese entstehen soll, dass die Winkelmaßsumme im Dreieck 180° beträgt. Anschließend soll der Beweis geführt werden, indem zunächst alle mögliche Informationen über Winkel rekapituliert werden, um schließlich den klassischen Beweis, bei dem eine Parallele zu AB durch C gezogen wird, so dass mit Wechselwinkel argumentiert werden kann, anzuschließen.
Insgesamt kommen Reiss *et al.* (2006, S.205) zu dem Ergebniss, dass die „heuristischen Lösungsbeispiele“ vor allen Dingen geeignet sind, die Leistungen bei Beweisaufgaben auf der Niveaustufe III zu verbessern, und hier besonders bei den schwächeren Schülerinnen und Schülern: „Die Ergebnisse der Studie deuten darauf hin, dass schwächere Schülerinnen und Schüler von dieser Lernumgebung ganz besonders profitieren könenn und damit besser zurechtkommen als mit den Angeboten in einem herkömmlichen Unterricht.“ Eine Erklärung hierfür finden sie darin, dass die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern bereits vor der Unterrichtseinheit mit den „heuristischen Lösungsbeispielen“ über ein gutes Methodenwissen verfügten und somit nicht mehr in dem Maße profitieren würden, wie diejenigen, die hier Schwierigkeiten hätten. Somit lautet das Fazit von Reiss *et al.* (2006, S.205): „Die heuristischen Lösungsbeispiele scheinen damit geeignet zu sein, Defizite des Unterrichts auszugleichen, indem sie Beweisverfahren transparent machen und dieses Methodenwissen damit auch schwächeren Schülerinnen und Schülern zugänglich werden lassen.“
Dass diese Vorgehensweise allerdings keine Inovation ist, stellt Führer (2009, S.170) fest: „Das hier geschilderte Vorgehen ist trotz des marktschreierischen Titels „self-explaining heuristic worked-out example“ (Reiss u.a. 2008, S.457) keineswegs neu, sondern eher typisch für Schrittfolgen in Schulbüchern. So findet es sich z.B. schon fast wörtlich 1939 im „Holzmüller-von der Seipen“ und dort noch mit zwei bemerkenswerten Ergänzungen: Nach einer Tabelle zum Arbeitsauftrag (a) wird als (b) erst noch das Messen abgesteckter Dreieckswinkel auf

dem Schulhof verlangt, bevor es zum Eckenabreißen (c) und Aneinanderlegen (d) geht, und in einer Fußnote vor dem „eigentlichen" Beweis wird auf dessen Motiv hingewiesen, die Unzulänglichkeiten realen Messens durch „rein gedankliches Begründen" zu übersteigen." (Die Schulbuchaufgabe aus Holzmüller-von der Seipen, die als Kopie aus Reichmann (2008, S.331) entnommen ist, findet sich als Anhang B.2 in dieser Arbeit.)

Führer (2009, S.168) kritisiert, dass solche Versuche, „wenn man Schüler am Nasenring in Richtung eines klassischen Beweises zottelt", von vornherein zum Scheitern verurteilt sein müssen, da sie nichts dazu beitragen können, einen Sachverhalt auch begründen zu wollen. Nachdem die Schülerinnen und Schüler auf verschiedene Arten immer wieder herausgefunden haben, dass die Winkelmaßsumme im Dreieck wohl 180° beträgt, kann ihnen ein Beweis offenbar keine neue Erkenntnis mehr bringen. Dennoch ist es anscheinend erforderlich, ihn zu führen, was lapidar mit: „Mathematical conjectures need to be proved" (Reiss & Renkl 2002, S.33) begründet wird. An dieser - von Teilen der Mathematikdidaktik schon immer propagierten - Vorgehensweise übt schon Winter (1983, S.72f.) Kritik: „Wenn das Beweisen als lediglich wissenssichernd angesehen wird - und das scheint leider verbreitet der Fall zu sein -, so darf man sich über mangelnde Beweisfreudigkeit der Schüler nicht wundern. Beweise erscheinen dann nämlich als den eigentlichen, d.h. wissensvermehrenden Überlegungen nachgerückte Prozeduren, die allenfalls der Form halber noch notwendig sind oder das (aus unerfindlichen Gründen) schlechte Gewissen des Lehrers beruhigen."

Zudem besteht in diesem Beispiel die bereits im einleitenden Kapitel 2.1 dargestellte Problematik, dass der Beweis nur eine Rechtfertigung erhält, indem die zuvor durch das Messen, Abreißen und Aneinanderlegen von Winkeln erfolgten Untersuchungen der Schülerinnen und Schüler indirekt diskreditiert werden. Auch diese Vorgehensweise wurde schon von Winter kritisiert:

> „Damit wird die Weckung des Beweisbedürfnisses hauptsächlich negativ bestimmt: Gewisse Argumentationsweisen soll der Schüler als unzulänglich verwerfen, sie werden diskreditiert, so daß sozusagen nur noch das Deduzieren als allein stichhaltige Begründungsweise übrig bleibt. Abgesehen davon, daß diese Methode zur Weckung des Beweisbedürfnisses offensichtlich nur geringe Erfolge zeitigt, greift sie zu kurz und sie k a n n daher auch gar nicht erfolgreich sein" (ebenda, S.65).

Winter begründet seine Kritik damit, dass es nicht möglich sei, Messen und Anschauung auf der einen Seite herabzuwürdigen und auf der anderen Seite gleichzeitig das räumliche Denken und die Anwendbarkeit der Mathematik hervorzuheben. Zudem sei die strikte Trennung von Wissensentdeckung einerseits, bei der Anschauung, Analogisieren, Beobachten, Messen usw. gefragt seien, und Wissenssicherung andererseits, bei der dies dann nicht mehr der Fall sei, im Schulunterricht in den Sekundarstufen überhaupt nicht zu realisieren. Stattdessen plädiert Winter dafür, das Spannungsverhältnis zwischen Anschauung und Deduktion fruchtbar zu nutzen:

> "Durch deduktives Ordnen, und dies besteht im wesentlichen in sprachlich gefaßten (symbolhaften) Verallgemeinerungen, wird das anschaulich-intuitive Handeln nicht abgeschafft oder überflüssig gemacht, sondern im Gegenteil verfeinert, erhöht, sublimiert, das sinnliche Wahrnehmen wird strukturiert, vergeistigt, theoretisiert. Und umgekehrt erhalten deduktive Ableitungen erst Sinn und Bedeutung durch das intuitiv gegebene Material, an dem es arbeitet. Insofern bedeutet Beweisen nicht Abkehr von der Empirie (Beobachten, Messen), sondern geradezu eine verstärkte Zuwendung.
> Demnach ist im Mathematikunterricht ein positives Verhältnis zum Wahrnehmen, Messen, Testen, allgemein: zum anschaulich-empirischen Tun, aufzubauen" (ebenda, S. 67).

Insgesamt scheint die o.a. Aufgabe folglich wenig geeignet, ein echtes Beweisbedürfnis bei den Schülerinnen und Schülern zu wecken. Eine entscheidende Voraussetzung, um dies zu tun, sieht Winter (1983, S.81) darin, genügend Zeit und Muße zu lassen, selbst tätig werden zu können: „Denn nur wenn der Schüler auch die Möglichkeit hat, beim Lernen von Mathematik selbst explorativ tätig zu sein, hier seine Neugier „auszuleben", kann man erwarten, daß sich theoretisches Interesse mit positiven Emotionen (Appetenzverhalten) besetzt, daß sich also ein subjektives Beweisbedürfnis entwickelt. Es gehört zum Begriff der Neugier, daß man das Verlangen hat, s e l b s t zu erkunden." Diese intrinsische Motivation und diesen Eigenantrieb gibt es in dem „heuristischen Lösungsbeispiel" von Reiss & Renkl nicht. Daher betitelt Führer die Aufgabe mit „Verordnete Beweiserei" (Führer 2009, S.168), die nur die „übliche Hierarchie suggeriert: vom Entdecken zum Vermuten, von dort zur empirischen Gewissheit und schließlich (?) über irgendeinen formalen Beweis zur glanzvoll überirdisch-überzeitlichen

Wahrheit“ (ebenda, S. 171).

Das Problem besteht letztlich in dem Dilemma, dass das Aufgabenformat „heuristisches Lösungsbeispiel“ nicht geeignet ist, ein echtes Beweisbedürfnis zu wecken (was Grundvoraussetzung dafür ist, die Notwendigkeit eines Beweises anzuerkennen und damit die Motivation zu schaffen, einen Beweis trotz aller vorhandenen Schwierigkeiten durchzuführen), dass es aber auch, nicht zuletzt aufgrund der vielen verschiedenen Beweismethoden, nicht möglich ist, einen Algorithmus zum Beweisen zu lehren.

2.2.2 Einstellungen zu Beweisen im Zusammenhang mit DGS

In mehreren Studien ist untersucht worden, inwieweit DGS einen Einfluss auf das Beweisbedürfniss von Schülerinnen und Schülern hat und ob die DGS einen Beitrag dazu leisten kann, eine verbesserte Beweiskultur in Klassenzimmern zu installieren (beispielsweise Hölzl 1994, Holland 1996a, Hölzl 1999, Olivero 2002, Vincent 2002, Kittel 2007). Dabei wird im Allgemeinen davon ausgegangen, dass in den Schulen die fortschreitende Entwicklung des „schlussfolgernden Denkens“ eine hierarchische ist, die, angefangen von empirischen Untersuchungen über induktives Schließen bis hin zum deduktiven Schließen reicht. Bewusst verwende ich an dieser Stelle nicht die Terminologie „Beweis“, da in den unteren Jahrgangsstufen oftmals noch auf einer Vorstufe argumentiert wird. Das deduktive Schließen bleibt den höheren Jahrgangsstufen vorbehalten. Healy & Hoyles (1999, S.1) konstatieren, dass das National Curriculum in Großbritannien

> „prescribes an approach to proving ... in which the introduction of formal proofs is reserved for 'exceptional performance', and thus delayed until after students have progressed through early stages of reasoning empirically and explaining their conjectures. Most of the requirements to explain and justify take place within investigations driven by numerical data.“

Hoyles bedauert dies und fordert, dass „we must resist the temptation to assume that situations that engage students with proof *must* follow a linear sequence from induction to deduction“ (Hoyles 1997, S.15). Dies ist vor allen Dingen im Zusammenhang mit der Kultivierung eines angemessenen Beweisbedürfnisses entscheidend, denn wie soll der Bruch zwischen empirischen Argumenten, die zunächst durchaus ausreichend zu sein scheinen, und einem deduktiven Beweisanspruch, welcher auf einmal scheinbar vom Himmel fällt, erklärt werden? So stellt auch VINCENT fest, dass

> „Students' readiness for formal proof may depend, then, on the laying down of appropriate foundations in the early years, where justifying goes beyond empirical evidence to include simple steps of deductive reasoning" (VINCENT 2002, S.34).

und schließt an, dass Schülerinnen und Schüler „are likely to find difficulty appreciating the role of proof if they do not experience a need for conviction" (ebenda, S.35).
In den USA, in denen zeitweilig das Beweisen aus den Lehrplänen verschwunden war, was zu erheblicher Kritik seitens vieler Mathematikdidaktiker geführt hatte, wurden mittlerweile die Curricula korrigiert. Stattdessen soll sich nun das Beweisen wieder über alle Jahrgangsstufen hinweg und in allen Themengebieten wiederfinden:

> „Reasoning and proof cannot simply be taught in a single unit on logic, for example, or by „doing proofs" in geometry. [...] Reasoning and proof should be a consistent part of students' mathematical experience in prekindergarten through grade 12. Reasoning mathematically is a habit of mind, and like all habits, it must be developed through consistent use in many contexts" (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS 2000, S.56).

Um diese Geisteshaltung zu etablieren, wird vor allen Dingen die Rolle der Lehrperson in den Fokus genommen, da deren Einstellung zu Beweisen naturgemäß in großen Teilen von den Schülerinnen und Schülern adaptiert wird. Demzufolge ist auch der von der Lehrperson vorgelebte Umgang mit einer DGS von entscheidender Bedeutung:

> „In many classrooms it appears that visual and numerical feedback from dragging screen drawings is usurping the role of proof as verification, with little or no attempt by teachers to introduce students to deductive reasoning. There are therefore conflicting viewpoints regarding the role of dynamic geometry software in the teaching and learning of geometric proof" (VINCENT 2002, S.2).

Auch OLIVERO (2002, S.243) kommt in ihrer Untersuchung zu dem Schluss, dass die Rolle der Lehrperson beim Einsatz mit DGS im Unterricht eine bedeutende Rolle spielt: „The role of teacher emerges as important, showing that dynamic geometry per se does not guarantee a successful management of the relation between the spatio-graphical field and the theoretical field".

Kittel (2007) kommt bei seiner Untersuchung zum Einsatz von DGS in der Hauptschule zwar zu dem Ergebnis, dass dieser auf jeden Fall empfehlenswert ist, beklagt aber, dass gerade bei Hauptschullehrerinnen und -lehrern eine erhebliche Skepsis bezüglich der DGS besteht, und sieht deshalb an dieser Stelle erheblichen Handlungsbedarf:

> „Als wichtigste Konsequenz dieser Studie zeigt sich, dass der Einsatz von DGS in der Hauptschule empfohlen werden kann. Die Lehrerinterviews haben jedoch gezeigt, dass momentan keine große Bereitschaft bei Hauptschullehrkräften vorhanden ist, solche Systeme im Unterricht einzusetzen. Dies liegt oftmals an der Unkenntnis der Lehrer über die Möglichkeiten von DGS. Genau an diesem Ansatzpunkt müssen weitere Konsequenzen folgen. Ohne die Kenntnis von DGS ist kein Einsatz im Schulunterricht möglich. Deshalb müssen Hauptschullehrer über diese Systeme informiert und für den Einsatz im Unterricht geschult werden. Aus diesem Grund ist es in naher Zukunft zwingend notwendig, massiv Lehrerfortbildungen zu diesem Thema anzubieten" (ebenda, S. 305f).

Ein zentrales Problem in diesem Kontext ist naturgemäß die Frage, wie trotz der empirschen Überprüfungsmöglichkeiten einer DGS ein Beweisbedürfnis geweckt werden kann. Eine Möglichkeit hierzu möchte Vincent in ihrer Studie „Mechanical linkages, dynamic geometry software, and argumentation: Supporting a classroom culture of mathematical proof" (Vincent 2002) aufzeigen, einer Arbeit, die im Rahmen des australischen „CAS-CAT-Programms" stattgefunden hat, welches seit dem Jahr 2000 den Einsatz von Computertechnologie im Schulunterricht zum Thema hat. Da die CAS-CAT-Gruppe international einen großen Namen hat, möchte ich auf diese Untersuchung etwas näher eigehen.

Vincent hat dabei Achtklässlerinnen und Achtklässler selbst unterrichtet und anschließend bei einer ausgesuchten Auswahl deren Fortschritte beim geometrischen Beweisen evaluiert. Bei den „mechanical linkages" handelt es sich um: „systems of hinged rods that can rotate about each other or about fixed pivot points according to the geometry underlying their construction" (Vincent 2002, S.95). Übersetzt werden könnte die Begriffskonstruktion mit „mechanische Verbindung", im weiteren werde ich aber den Ausdruck „mechanical linkages" weiter verwenden. Ein Sonderfall der „mechanical linkages", der von Vincent eingesetzt wird, ist das sogenannte „Tschebycheff's linkage“, ein überschlagenes Viereck $ABCD$ mit den fixen Punkte A und B, den mit fester Länge gleichlangen Seiten AC und BD und der festen Seitenlänge CD. Bei diesem wird im wesentlichen beim Ziehen an C oder D der Mittelpunkt P der Seite CD betrachtet (siehe Abb. 2.34):

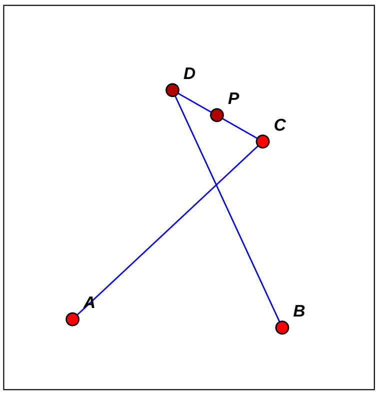


Abbildung 2.34 – *Tchebycheff's linkage* VINCENT *(2002, S.105)*

Im Mittelpunkt von VINCENTs Studie steht die Frage, ob in einer 8. Klasse durch Einsatz von DGS und mechanical linkages eine Kultur des Beweisens in der Geometrie motiviert, etabliert und unterstützt werden kann. Ein Mittel, um überhaupt Beweisbedürfnis zu erzeugen, ist dabei für sie, Zweifel am Sehen bei den Schülerinnen und Schülern zu säen: „To establish a need for proof I proposed to create a situation where visual evidence would mislead students into a false conjecture“ (ebenda, S.119) (Kritik an dieser Methode in Kapitel 2.1). Dieses „Misstrauen in die eigene Wahrnehmung“ wird durch den Einsatz von mechanical linkages verstärkt, die weniger präzise als die DGS konstruieren:

> „The use of Tchebycheff's linkage, where visual evidence conflicted with the more precise, although still empirical, feedback from Cabri, was designed therefore to sow a seed of doubt in the student's minds so that they could never be sure whether visual evidence was to be trusted“ (ebenda. S.119).

Zum Zwecke der Auswahl der Probandinnen und Probanden mussten alle 29 Schülerinnen und Schüler der Klasse zu den sechs geometrischen Themen „Quadrat“, „Rechtwinklige Dreiecke“, „Gleichschenklige Dreiecke“, „Parallele Geraden“, „Kongruenz“, „Ähnlichkeit“ und „Kreise“ einen van Hiele Test (siehe Anhang A.1) absolvieren. Dieser Test, der auf den „levels of thinking“ von VAN HIELE aufbaut (vgl. Abschnitt 2.1.3), stammt von MAYBERRY (1983). Darin werden zu unterschiedlichen Themengebieten (s.o.) Fragen gestellt, aufgrund deren Beantwortung die Schülerinnen und Schüler dann einer bestimmten Niveaustufe zugewiesen werden. Dabei ist zum einen möglich, dass eine Schülerin oder ein Schüler in dem einen Gebiet ein besseres Niveau erreichen kann als in einem anderen Gebiet; zum anderen soll durch die Konzeption der Fragen sichergestellt werden, dass bei Erreichen eines bestimmten Levels auch die darunter liegenden beherrscht werden.

Vincent nahm in ihre Studie diejenigen zehn Schülerinnen und Schüler auf, die in mindestens 3 Kategorien Level 3 erreicht hatten. Zusätzlich wurden vier Weitere, die in den meisten Kategorien nur Level 1 oder 2 erreicht hatten, zur Kontrolle mit hinzugezogen. Zunächst wurde der Proof Questionaire (vgl. Healy & Hoyles 1999, siehe Anhang A.2) zur Bearbeitung vorgelegt. Anschließend fand der Unterricht im Klassenverband statt, wobei die Schülerinnen und Schüler zunächst mit den „mechanical linkages“ vertraut gemacht wurden und danach gemeinsam einige Beweisaufgaben durchführten. Dabei ging es zum einen um Aufgaben, bei denen zunächst mit Einsatz eines „mechanical linkages“ die Spur eines Punktes beobachtet werden sollte. Anschließend wurde den Schülerinnen und Schülern eine Datei zur Verfügung gestellt, die dieselbe geometrische Situation darstellte. Nunmehr sollte die zuvor aufgestellte Vermutung mit Hilfe der exakteren Software überprüft und verworfen oder aber bewiesen werden. Des weiteren wurden auch Aufgaben gestellt, bei denen die „mechanical linkages“ nicht zum Einsatz kamen. Um den Schülerinnen und Schülern ein Beispiel zu geben, wie ein solcher Beweis ablaufen könnte, wurde exemplarisch ein Beweis zum Thema „Winkelmaßsumme im Dreieck“ vorgeführt, der für das weitere Vorgehen als Muster dienen sollte (s. Abbildung 2.35).

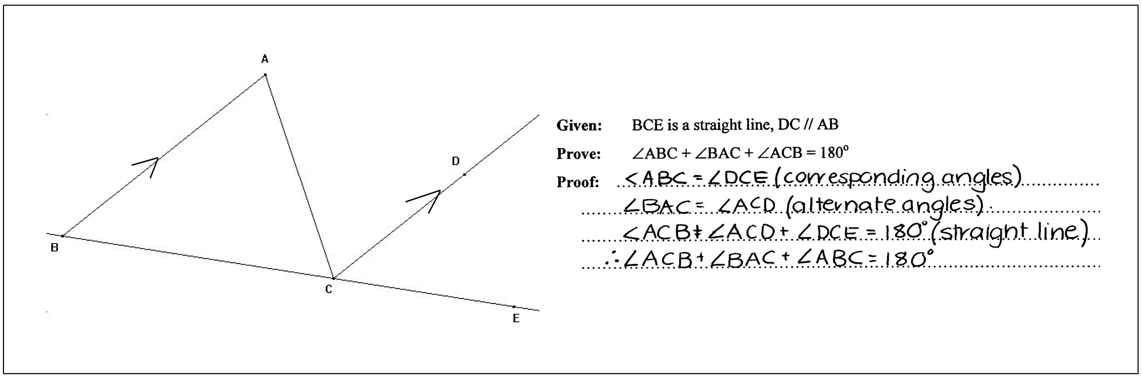


Abbildung 2.35 – *Modellhafter Beweis aus* Vincent *(2002, S.138)*

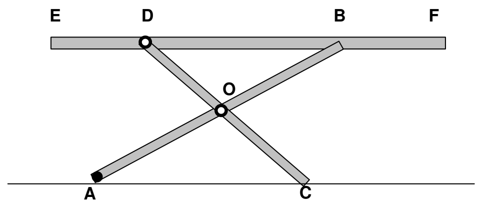
> „The students were shown how a proof for the conjecture could be constructed by using given and previously known information to deduce new relationships, and how the statement, once proved, could be used to deduce other relationships. I demonstrated one way writing a proof for the angle sum of a triangle [...], where the statements are written in a logical order, with the reason for each statement in brackets. This proof became the model for the students' subsequent proof writing“ (Vincent 2002, S.137f).

Die Schülerinnen und Schüler wurden zudem mit einer Liste von geometrischen Definitionen und zuvor bewiesenen Aussagen versorgt, damit sie diese dann in den durchzuführenden Beweisen verwenden konnten. Ein Beispiel für einen im Klassenverband gemeinsam erarbeiteten Beweis ist in Abbildung 2.37 dargestellt.

Nach der Arbeit im Klassenverband wurden die ausgewählten Schülerinnen und Schüler sequentiell paarweise herausgezogen, um „Beweisaufgaben“ zu bearbeiten. Diese Bearbeitungen wurden videographiert und ausgewertet. Dabei kamen dann auch Aufgaben mit „mechanical linkages“ zum Tragen. Exemplarisch ist in Abbildung 2.36 das Beispiel des „Bügeltisches“ dargestellt (dabei handelt es sich um einen Ausschnitt aus dem zweiseitigen Aufgabenblatt, die komplette Aufgabe kann im Anhang A.5 dieser Arbeit eingesehen werden).

Ironing table

- The legs, *AB* and *CD*, of the ironing table are pivoted at their midpoints, *O*.
- The top of the table, *EF*, is pivoted to *CD* at *D*.
- C slides along the floor and *B* slides along *EF*.



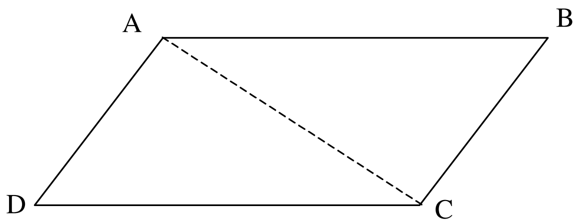
- 'Fold' the ironing table flat and raise it again by moving *C*. What do you notice about the top of the ironing table? Write your observation as a conjecture.

Abbildung 2.36 – *Beispiel für eine Aufgabe mit „mechanical linkages“ aus* Vincent *(2002, S.487)*

Parallelogram proofs

We define a parallelogram as *a quadrilateral with both pairs of opposite sides parallel.*

Given: $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$



- Prove the following properties of parallelograms. Remember that each statement you make must be justified in terms of one of the following:
    - the given information
    - your previous geometry knowledge
    - something you have shown to be true in a previous step of your proof.

1. The opposite angles of a parallelogram are equal, that is, $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle DAB = \angle DCB$

   Proof: …………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………

2. The opposite sides of a parallelogram are equal, that is, $AB = DC$ and $AD = BC$.

   Proof:…………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………..

   ……………………………………………………………………………………..

   ……………………………………………………………………………………..

   …………………..…………………………………………………………………...

   …………………..…………………………………………………………………...

Abbildung 2.37 – *Beweise im Parallelogramm aus* Vincent *(2002, S.484)*

Hierbei sollten die Schülerinnen und Schüler zunächst ein reales Modell aus „geo-strips" (feste Plastikstreifen bestimmter Länge, die an den Enden derart miteinander verbunden werden können, dass der eingeschlossene Winkel in der Größe veränderbar ist) bauen und bestimmte Beobachtungen machen. Auch ein reales Modell eines Bügeltisches befand sich im Klassenraum. Anschließend bekamen die Schülerinnen und Schüler eine Datei zur Verfügung gestellt, in der die Situation in einer DGS programmiert war, so dass sie ihre zuvor aufgestellten Vermutungen noch einmal überprüfen konnten (siehe Abbildung 2.38). Dabei wurden sie stark angeleitet. So sollten sie beispielsweise den Bügeltisch abzeichnen, „representing each link as a single line" (Vincent 2002, S.487). Zudem sollten sie die zwei Dreiecke, die sie in der Zeichnung sahen, benennen, was schon ein sehr zielführender Hinweis ist, da der zu beobachtende Sachverhalt (dass die „Tischplatte des Bügeltisches" immer parallel zum Fußboden ist) über die Kongruenz der Dreiecke ACO und DOB bewiesen werden kann.

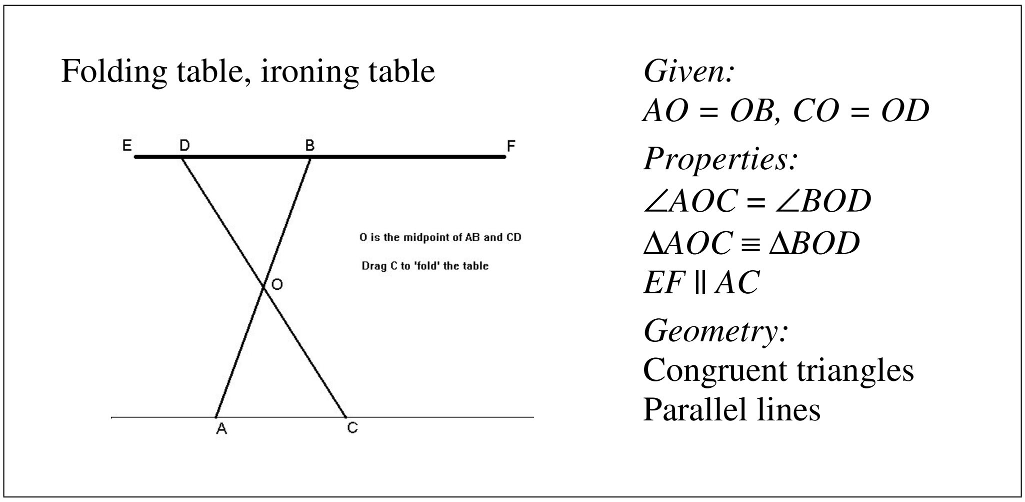


Abbildung 2.38 – *„Mecahnical Linkages and their associated Geometry" (Vincent 2002, S.133)*

Zuletzt wurde den Schülerinnen und Schülern derselbe Proof Questionaire wie eingangs vorgelegt und ein modifizierter van Hiele-Test mit ihnen durchgeführt. Aus den Unterschieden in den zwei Bearbeitungen der Proof Questionaires und der van Hiele-Tests wollte Vincent dann den Erfolg ihrer Unterrichtssequenz ablesen.
Sie kommt zu den folgenden Ergebnissen:

> “The progress made by students in their understanding of proof and their ability to construct geometric proofs is undeniable, and it would seem that the success of the tasks was related to a number of factors: the establishment of a need for proof, the motivating context provided by the linkages, the static and dynamic imagery associated with the linkages and Cabri, the students' engagement in argumentation, and my intervention“ (Vincent 2002, S.423).

Dass die Schülerinnen und Schülern zum Ende der Studie hin Beweise besser konstruieren und formulieren konnten als am Anfang, überrascht nicht weiter, da das Führen eines Beweises in den Übungsstunden sehr stark anhand von Aufgaben trainiert wurde, die zwar aus unterschiedlichen Kontexten entstammen, aber alle dasselbe Muster aufweisen. Die vorgefertigten Aufgabenblätter hatten bereits die Einträge „Given“, „Prove“ und „Proof“, und in vielen Fällen waren die Voraussetzungen eingetragen und das zu Beweisende formuliert. Zudem wurden die Schülerinnen und Schüler durch die Musterlösung und die zusätzlich gegebene Hilfsliste recht eng durch die Lernumgebung geführt. Damit ist die gesamte Lernumgebung sicherlich dafür geeignet, das Führen eines Beweise in verwandten Kontexten zu üben und hierbei Verbesserungen zu erzielen. Zu Kritisieren ist allerdings, dass von den Schülerinnen und Schülern zu wenig gefordert wurde, sich eigenständig zu überlegen, was denn überhaupt zu beweisen ist! Der Fokus wurde sehr stark darauf gelegt, schlüssige Argumentationsketten zu liefern beziehungsweise Fehler in Argumentationsketten aufzudecken. Auch im Proof Questionaire, mit dem der Fortschritt der Schülerinnen und Schüler beim Beweisen überprüft werden sollte, wurde ausschließlich damit gearbeitet, Behauptungen auf ihren Wahrheitsgehalt zu überprüfen und anzugeben, ob man bestimmten Äußerungen zustimmt, oder nicht, zum Beispiel: „Prove whether the following statement ist true or false“ (G1, G4, G5, G6, G7), „For each of the following circle whether you agree, don't know or disagree“ (G1, G3, G6). Dadurch werden zwar bestimmte Techniken trainiert, es wird aber weder das Erstellen eines kompletten Beweises gelehrt und gelernt, noch ein Beweisbedürfnis geweckt. Als Beispiel kann die o.a. Musterlösung zum Führen eines Beweises dienen: Hier bleibt völlig offen, ob die Schülerinnen und Schüler überhaupt auf einem Beweis zur Winkelmaßsumme im Dreieck bestanden hätten, oder ob für sie die empirische Überprüfung mit der DGS ausreichend gewesen wäre. Zwar kommt Vincent zu dem Schluss, dass:

> “In the case of the linkage tasks, experimentation with the physical and Cabri

> models led the students to their conjectures, but throughout the associated argumentations, static and dynamic feedback focused the students' attention on geometric porperties and relationships. All the elements of the proof were present in the argumentation, and these gradually assumed an ordered form. Consequently, when the students came to construct their written proofs, they already had a sound understanding of the logical order of statements and the relevant justifications. Rather than eliminating the need for proof, then, the convincing evidence and the unique opportunities for exploration and discovery that the software provided gave the students the confidence and desire to go ahead to prove their conjectures. From the introduction of Tchebycheff's linkage to the additional conjecturing-proving tasks, the mechanical linkages and dynamic geometry software together provoked intense argumentation, and established a culture of proving in this class of Year 8 students“ (Vincent 2002, S.424f).

Dennoch möchte ich an dieser Stelle bezweifeln, dass die Förderung des Beweisbedürfnisses gelungen sein soll, denn auch in dieser Aussage Vincents wird sehr deutlich, dass lediglich das formale Führen eines Beweises an exponierter Stelle steht. Dies wird unterstrichen dadurch, dass die Schülerinnen und Schüler nicht versuchen mussten, die mechanical linkages in die DGS zu übertragen, was natürlich nur funktionieren kann, wenn man die geometrischen Zusammenhänge erkannt hat, sondern mit einer fertigen DGS-Konstruktion der mechanical linkages versorgt wurden. Vincent begründet dies damit, dass: „Constructing mechanical linkages in Cabri so that they simulate the behaviour of the actual linkage is not straigthforward“ (Vincent 2002, S.143), und führt fort: „It is important to note that the aim of the current research was for students to explore the *geometry* of the linkages, rather than to be able to construct the linkages“ (ebenda. S. 144). Auch hier die Frage, ob nicht gerade durch die Konstruktion der mechanical linkages deren Geometrie erforscht werden kann und ob man nicht, wenn man die dahinter liegende Geometrie verstanden hat, auch in der Lage sein sollte, den Sachverhalt in eine DGS zu übertragen?
Insgesamt stelle ich nach wie vor in Frage, ob die Schülerinnen und Schüler, die zweifelsohne durch das intensive Training besser in der Lage sind, einzelne Argumentationsschritte schlüssig zu formulieren und aufzuschreiben, dieses deshalb tun, weil sie die Notwendigkeit eines Beweises erkennen und ein echtes Beweisbedürfnis haben. Stattdesssen vermute ich, dass sie es

tun, weil es durch die Aufgabengestaltung vorgegeben ist und von der Lehrperson so verlangt wird.

Olivero (2002), die ebenfalls die Rolle einer DGS untersucht hat, kommt zu dem Ergebnis, dass die DGS zwar beim Führen eines Beweises unmittelbar keine so große Rolle spielt, denn in ihrer Studie wurde der Beweis von allen Schülerinnen und Schüler am statischen Bild durchgeführt. Einige zogen hierfür sogar eine Zeichung auf Papier der Bildschirmdarstellung vor. Stattdessen spielt die Software im Vorfeld eine große Rolle: „Interpreting the proving process as a focusing process may provide a theoretical explanation for how Cabri is useful for the construction of proofs, even if it is not directly used in that phase [...]. The influence of Cabri in the construction of the proof relies on the fact that it gives you the idea for the proof“ (ebenda, S.236). Damit wird bestätigt, was Bender bereits 1989 gesagt hat, dass die Software in der Regel als Ideengeber fungiert, jedoch den Beweis in den wenigsten Fällen selbst leisten kann.

In Oliveros Untersuchung trat bei einer Schülerin das Ereignis ein, dass sie durch die DGS auf eine Vermutung kam und diese Vermutung auch beweisen konnte. Anschließend wollte sie den Sachverhalt nochmals mit der DGS überprüfen, doch da ihre Figur nur hingezogen und nicht echt konstruiert war, schien der Bildschirm ein Gegenbeispiel für die bewiesene Vermutung zu zeigen. Hierdurch wurde die Schülerin verunsichert, und sie meinte: „So it's all wrong!“ (Olivero 2002, S.170). An dieser Stelle musste die Autorität des Lehrers eingesetzt werden, um den Konflikt zu klären. Dies ist ein Indiz dafür, dass die Ausrichtung an äußeren Autoritäten, zu der sowohl die Lehrperson, als auch die DGS zählen, so stark sein kann, dass sie das Vertrauen in den eigenen Beweis erschüttern.

Ein weiteres Phänomen, das Olivero beobachten konnte, war die unterschiedliche Interaktion und Kommunikation zwischen den Schülerinnen und Schülern, die zu zweit oder zu dritt die Aufgabenstellung am Computer bearbeiteten. Dabei kam es vor, dass alle Beteiligten dieselbe Idee verfolgten und dabei auch in der Vorgehensweise übereinstimmten und sozusagen in ihrer Kommunikation „synchron“ waren. In dem Zusammenhang stellte Olivero (2002, S.229) fest: „In fact it seems that if there is a synchrony between the students they understand each other perfectly through the external space (mainly Cabri) without finding the need of developing a well-formed logical language. This can be seen and understood in Cabri, without any need for explicit logic and Cabri becomes part of students' interactions.“ An dieser Stelle besteht das Risiko, dass die Schülerinnen und Schüler scheitern, wenn sie den Sachverhalt, der mit Hilfe der dynamischen Visualisierung so einfach und vermeintlich durchschaubar dargestellt werden kann, verbal oder schriftlich vernünftig begründet ausdrücken sollen. Zudem könnte es passieren, dass die Notwendigkeit dieser verbalen oder schriflichen Begründung nicht erkannt wird, sondern diese nur als zusätzliche, scheinbar überflüssige Schwierigkeit eingeschätzt wird.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Autorinnen und Autoren empirischer Arbeiten zum Einsatz von DGS in Bezug auf das Beweisen diesen Einsatz positiv einschätzen; meines Erachtens etwas zu positiv, weil sie die möglichen Schwierigkeiten, die ich ja an einigen Stellen aufgezeigt habe, oft etwas bagatellisieren oder ignorieren (wenn sie sich ihrer überhaupt bewusst werden).

Kapitel 3

Der Zugmodus

3.1 Beweglichkeit durch den Zugmodus

Ein zentrales Element, welches die DGS von der Geometrie mit Bleistift und Papier unterscheidet, ist die Beweglichkeit des Systems, die unter „dynamisch" firmierend namensgebend für die Software ist. Unter Einsatz des Zugmodus können Zeichnungen verändert werden, ohne dass konstruktionsspezifische Eigenschaften dabei verloren gehen, so dass ganz ohne Mühe nicht nur ein einzelnes spezifisches Beispiel konstruiert werden kann, sondern man gleich eine ganze Klasse von Zeichnungen erhält. Henn (2001, S.95) nennt dies den „Übergang von der Zeichnung zur Figur". Die Differenzierung zwischen „Zeichnung" und „Figur" wurde zuvor bereits von anderen, beispielsweise Parzysz (1988) oder auch Laborde (1993) vorgenommen. Dabei wird der Zeichnung eine konkrete, materiale Entität zugesprochen, während die Figur sich auf das theoretische Objekt bezieht. Man könnte auch formulieren, dass die Zeichnung die konkrete Verwirklichung einer Konstruktionsvorschrift ist, während die Figur die Vorschrift **ist** und damit die Menge aller möglichen Verwirklichungen dieser Vorschrift repräsentiert. Daher gehen Talmon & Yerushalmy (2006, S.241) sogar noch weiter, und unterscheiden zwischen „figure-image" und „figure": „We use *figure-image* to describe the total cognitive structure that is associated with the *figure*. We refer to *figure-image* as the mental images that the user holds based on previous experience with the *figure* and with dragging."
Die Unterscheidung zwischen sichtbaren Figuren und den mentalen Objekten, die dahinter stehen, ist bereits sehr alt und findet sich in Platons Ideenlehre, in der er zwischen dem „wahrhaft Seiendem" und dem „Nichtseiendem" unterscheidet. Zwischen diesen beiden Polen

befinden sich die sinnlich wahrnehmbaren Dinge, die ihr wahres Sein durch die Teilhabe an der ihnen zugrundeliegenden Idee haben. So kann man bezogen auf die Geometrie im sechsten Buch der *Politeia* lesen:

> „Sie [„die Leute, die sich mit Geometrie, Rechnen und ähnlichem beschäftigen“, G.W.] behelfen sich mit sichtbaren Figuren und untersuchen sie, denken aber dabei nicht an die Figuren, sondern an die Urbilder, denen sie gleichen; so untersuchen sie das Viereck an sich und seine Diagonale, aber nicht die gezeichnete, und ähnlich bei allem andern; die Gebilde, die sie formen und zeichnen, von denen es wieder Schatten und Abbilder im Wasser gibt, diese gebrauchen sie nur als Abbilder und suchen die Urbilder an sich zu erkennnen, die man nur durch das reine Denken erkennt“ (PLATON 1958, S.311f).

Wird folglich eine Zeichnung mit bestimmten Eigenschaften einer Figur konstruiert, beispielsweise ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten (Raute), wird durch den Zugmodus nur die konkrete Zeichnung variiert, nicht aber die Figur (Raute). Auf diese Weise ist es einfach möglich, sich einen Überblick über die Gesamtsituation zu verschaffen, Sonder- und Randfälle zu betrachten und Vermutungen bezüglich Veränderungen und Invarianten aufzustellen. Durch die empirische Überprüfung dieser Annahmen kann deren Richtigkeit untermauert werden, wobei im Fall der Falsifikation sogar Beweiskraft gegeben ist. Im Fall der Bestätigung können durch die Beobachtung zumindest Beweisideen entstehen, die dann anschließend in einen Beweis gegossen werden können und müssen. Dies entspricht der klassischen Methode des heuristischen Arbeitens.

Die Unterscheidung zwischen konkreter Zeichnung und allgemeiner Figur kann allerdings bei Schülerinnen und Schülern auch große Probleme hervorrufen. YERUSHALMY & CHAZAN (1993, S.25) unterteilen die Schwierigkeiten, die sich ergeben können, in verschiedene Kategorien: „These obstacles can be grouped around three themes: diagrams are particular; common usage confuses certain standard diagrams with the classes of objects to which they belong; and a single diagram is often viewed in different ways.“ Die erste Schwierigkeit bedeutet, dass eine konkrete Zeichnung immer auch individuelle Eigenschaften hat, selbst wenn sie repräsentativ für eine allgemeine Figur stehen soll. Soll beispielsweise zu der Anweisung: 'Gegeben sei das Dreieck ABC' eine Zeichnung gemacht werden, wird man versuchen, ein allgemeines, d.h. kein besonderes Dreieck zu zeichnen. Dennoch muss man sich entscheiden, ob man ein spitzwinkliges oder ein stumpfwinkliges Dreieck zeichnet. Es ist nicht möglich, eine Zeichnung zu erstellen, die beide Eigenschaften umfasst, so dass die Zeichnung nicht die gesamte Klasse aller Dreiecke repräsentieren kann. Hierin birgt sich die Gefahr, dass die Besonderheit der konkreten Zeichnung mit den Eigenschaften der Figur identifiziert wird. Die nächste Schwierigkeit liegt darin, dass häufig gewisse Prototypen als Repräsentanten einer Figur genutzt werden. So werden beispielsweise gleichschenklige Dreiecke oftmals auf der Basis stehend abgebildet. Dies führt dazu, dass ein solches Dreieck in dieser Lage sehr viel schneller erkannt wird, als wenn es eine andere Lage hat. Die dritte Schwierigkeit schließlich liegt darin, in einer Figur sowohl das Ganze als auch einen Teil zu sehen. Wird beispielsweise in einem rechtwinkligen Dreieck die zur Hypotenuse gehörige Höhe gezeichnet, haben Schülerinnen und Schüler nicht selten Schwierigkeiten, in der Zeichnung nun drei Dreiecke zu sehen und die Höhe auch als Seite eines Dreiecks zu erkennen. „These three obstacles are part of the impetus to create The Geometric Supposer (Schwartz und Yerushalmy, 1985 - 1988), which attempts to reduce students' dependence on single diagrams presented in their geometry texts as models for classes of diagrams" (Yerushalmy & Chazan 1993, S.28f). Beim Geometric Supposer handelt es sich um einen Vorläufer von DGS, der allerdings noch nicht über den Zugmodus verfügt.

Mariotti (2000, S.27f) konstatiert aufgrund der „intrinsischen Logik", die ursächlich für den Erhalt der Eigenschaften einer Figur beim Ziehen ist, eine unmittelbare Beziehung zwischen DGS und der Theorie der euklidischen Geometrie: „Because of the intrinsic relation to Euclidean geometry, it is possible to interpret the control 'by dragging' as corresponding to theoretical control - 'by proof and definition' - within the system of Euclidean Geometry. In other words, it is possible to state a correspondence between the world of Cabri constructions and the theoretical world of Euclidean Geometry."

Auch Hölzl sieht den Zugmodus, wie seiner richtungsweisenden Arbeit aus dem Jahre 1999 mit dem Titel „Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software" zu entnehmen ist, als zentrales Element einer DGS an:

> „In ihm bündeln sich all die Aspekte, die im Zuge dieser Arbeit sowohl in den Sachanalysen als auch den Unterrichtsstudien mit wechselnden Gewichten betrachtet wurden: epistemologische, kognitive, heuristische und methodische Aspekte" (Hölzl 1999, S.295).

Zugleich aber stellt er die berechtigte Frage, ob in „gewöhnlichem“ Unterricht - soweit er in Publikationen der Öffentlichkeit zugänglich gemacht wurde - dieses Potential überhaupt genutzt wird:

> „Hinterfragt man dagegen kritisch die heuristische Rolle, die einer DGS in mancherlei publizierten Beispielen zugewiesen wird, so ist die Skepsis angebracht, ob die Software darin wirklich heuristisch, also den planmäßigen Erwerb von Wissen unterstützend, verwendet wird. Oftmals wir die DGS nur verifizierend eingesetzt, in dem Sinne, dass ein mehr oder weniger explizit vorgegebener Sachverhalt von den Lernenden am Computer zu variieren und empirisch zu bestätigen ist“ (Hölzl 1999, S.21).

Hölzl sieht vielmehr das Potential der Software darin, Besonderheiten von geometrischen Zusammenhängen erkennbar zu machen und einen geeigneten heuristischen Kontext zu schaffen, in dem diese Zusammenhänge nicht isoliert, sondern in enger Verknüpfung zu anderen gesehen und gedeutet werden können. Am Beispiel der Schnittpunkteigenschaften der Mittelsenkrechten im Dreieck macht Hölzl seinen Standpunkt deutlich: In der Literatur wird als Beispiel für eine „interaktive generalisierende Satzfindung“ die Aufgabe genannt, ausgehend vom gleichseitigen Dreieck und dessen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ein allgemeines Dreieck zu betrachten und dabei die Schnittpunkteigenschaften der Mittelsenkrechten zu beobachten. Hölzl bezweifelt, ob dabei wirklich die gewünschte Erkenntnis erlangt wird, und stellt vielmehr in Frage, ob für die Schülerinnen und Schüler überhaupt eine Besonderheit vorliege, wenn sich drei Geraden offensichtlich immer in einem Punkt schneiden. Besser sei, einen Kontrast zu schaffen, der deutlich macht, dass es durchaus nicht immer einen gemeinsamen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten geben muss! Beispielsweise sei der Zugang über das Viereck möglich, bei dem sich alle Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden können, aber nicht müssen. Hier werde eine geometrische Deutung verlangt, und dabei könne das heuristische Potential der Software zum Tragen kommen.

Auch Olivero (2002, S.243) kommt in ihrer Untersuchung zu dem Ergebnis, dass der Einsatz von DGS kein Selbstläufer ist: „From the above discussion, the role of the teacher emerges as important, showing that dynamic geometry per se does not guarantee a successful management of the relationship between the spatio-graphical field and the theoretical field, as shown in the case studies analysed.“ Ebenso wie Hölzl kommt sie zu dem Resümee, dass von der

Lehrperson sorgfältig ein angemessener Kontext für den Einsatz einer DGS gesucht werden muss, wie dies beispielsweise bei offenen Problemstellungen der Fall sein kann.

3.2 Klassifikationen des Zugmodus

Die Verwendung des Zugmodus kann aus unterschiedlichen Motivationen und mit unterschiedlicher Zielsetzung erfolgen. So stellt Hölzl grundlegend fest, dass es zunächst zwei prinzipiell verschiedene Einsatzfunktionen des Zugmodus gibt (Hölzl 1999, S.296f): „Sie [die Funktion des Zugmodus, G.W.] kann in zweierlei Hinsicht in Anspruch genommen werden:

1. der Zugmodus als *Testmodus*;
2. der Zugmodus als *Suchmodus*."

Während im ersten Fall eine Überprüfung von bestimmten Annahmen stattfindet und somit schon eine gewissen Erwartungshaltung vorliegt, die durch den Einsatz des Zugmodus bestätigt werden kann oder verworfen werden muss, sollen im zweiten Fall erst einmal Vermutungen aufgestellt oder Merkmale gefunden werden. Dies geschieht über das Erkennen der Invarianten innerhalb der Figur, also gerade über das, was sich durch das Ziehen **nicht** verändert. Dass die gezielte, nutzbringende Anwendung des Zugmodus erst erlernt werden muss und ein tieferes Verständnis erfordert, liegt auf der Hand. Daher differenziere ich bei der Datenanalyse in meiner Arbeit danach, ob die Probanden viel oder wenig Erfahrung im Umgang mit einer DGS haben.
Laborde (1993, S.66f) siedelt jede der beiden Hölzlschen Funktionen des Zugmodus mit diversen Wesensmerkmalen auf den ersten drei Stufen der „Levels of thinking" von van Hiele (vgl. Abschnitt 2.1.3) an, dem *visual level*, *descriptive level* und *theoretical level*:

> „It appears that in exploration phases as well as in validation phases, visualization plays a role related to the conceptual status of the notion of figure for the student. One can recognize the Van Hiele levels in the use of the variations of the drawing. At a low level the figure is viewed as an entity but not analysed into parts or elements: all parts of the drawing must move together under the drag mode. At an intermediate level the figure is viewed as a shape which can be distinguished from other shapes, the drawings are instances of the shape but not yet analysed.

> At a higher level the figure is made of elements linked by relations which remain invariant when dragging the drawing."

Auch HÖLZL unterscheidet drei Niveaustufen beim Zugmodus. Allerdings rückt er dabei nicht so sehr den kognitiven, als viel mehr den phänomenologischen Aspekt in den Vordergrund:

> "Auf einer *elementaren Stufe* sehen Lernende im Zugmodus eine Art *Zeichenwerkzeug*, mit dem sich das Aussehen einer DGS-Figur auch nachträglich noch verändern lässt [...]. Auf einer *mittleren Stufe* verwenden Lernende den Zugmodus auch *ohne* äußeren Anstoß, um in einer problemhaltigen, geometrischen Situation eine Vermutung zu überprüfen - und nicht nur, um die Richtigkeit der Konstruktion abschließend zu testen. *Der Zugmodus wird als Testmodus begriffen, ohne dass jedoch sein Gebrauch in dieser Hinsicht schon gefestigt wäre*[...]. Erst auf einer *dritten Stufe* wird die betrachtete geometrische Situation *variabel* erfasst. Eine Zeichnung, die variiert wird, ist nicht mehr nur eine Zeichnung, die sich bewegt und verformt, sondern eine Folge *unterschiedlicher* Zeichnungen mit gemeinsamen Eigenschaften" (HÖLZL 1999, S.296f).

Deutlich erkennt man hier die Hierarchie im Problemverständnis, die sich durch die unterschiedlich motivierte Nutzung des Zugmodus offenbart. Auf der elementaren Stufe dient die DGS zunächst lediglich als Ersatz für Zirkel und Lineal, dann aber auch darüber hinaus dafür, die „Echtheit einer Konstruktion" zu überprüfen, beispielsweise, ob eine Tangente eine „echt konstruierte" Tangente ist oder lediglich eine „herangezogene Gerade", die wie eine Tangente aussieht. Diese Nutzung des Zugmdodus kann in vielerlei Hinsicht sinnvoll sein und ist daher selbstverständlich legitim. Beispielsweise kann eine derartige Überprüfung, ob die Konstruktion tatsächlich den Aufgabenbedingungen genügt, vor Fehlschlüssen bewahren. Dennoch muss konstatiert werden, dass eine Reduktion des Zugmodus auf Kontrollfunktionen kaum Perspektiven für neue Erkenntnisse eröffnet.

Einen Übergang von der elementaren zur mittleren Stufe stellt das nachträgliche Abwandeln von Zeichnungen dar. Es ist gar nicht so leicht, beispielsweise ein „allgemeines" Dreieck zu zeichnen. Oftmals ähnelt die Konstruktion stark einem gleichschenkligen oder einem rechtwinkligen Dreieck. Dies birgt die Gefahr, von vornherein Eigenschaften zu vermuten, die nur im jeweiligen Sonderfall gelten. Hier kann der Zugmodus eingesetzt werden, um eine allgemeinere Situation zu schaffen. Vom rein rückwärts gerichteten Einsatz des Zugmodus auf der

ersten Stufe kommt hier eine weitere, vorwärts gerichtete Motivation ins Spiel: ist die erstellte Konstruktion überhaupt geeignet, die mathematischen Zusammenhänge darzustellen?
Auf der mittleren Stufe wird untersucht, an welchen Punkten gezogen werden kann bzw. welche Parameter verändert werden können und welche nicht. Außerdem wird versucht, hier Zusammenhänge zwischen möglichen Veränderungen zu erkennen, so dass nun auch ein funktionaler Aspekt zum Tragen kommt.
Auf der dritten Stufe schließlich wird der Transfer von der Zeichnung zur Figur vollzogen, Invarianten und Allgemeingültigkeiten werden erkannt. Der Zugmodus wird als Hilfsmittel genutzt, um Sätze zu finden und Beweisideen zu generieren. Diese Stufe kann allerdings nur nach intensiver Auseinandersetzung mit dem Medium und den mathematischen Inhalten erreicht werden:

> „Ein dauerhaftes handlungswirksames Verständnis des Zugmodus lässt sich in der Einführungsphase kaum erzielen, notwendig erscheinen systematische wiederholende Bezüge auf seine Wirkungs- und Verwendungsweisen“ (Hölzl 1999, S.300).

Den Ansatz von Hölzl nimmt die „Mathematics Education Research Group“ in Turin, zu der unter anderem Arzarello und Olivero gehören, zum Anlass, bei ihren eigenen Untersuchungen differenzierter herauszuarbeiten, wie und zu welchem Zweck Schülerinnen und Schüler den Zugmodus einsetzen, um nicht nur auf der phänomenologischen Ebene zu verbleiben: „This review [Darstellung der Stufen bei Hölzl, G.W.] shows a phenomenological analysis of dragging, that is an analysis of dragging as such, from the outside, without taking into account how the subject who is using dragging interprets it“ (Olivero 2002, S.60). Stattdessen möchte die Forschungsgruppe darüber hinaus nicht nur darstellen, welche Optionen durch den Einsatz des Zugmodus ermöglicht werden, sondern auch, wie das Zusammenspiel des Einsatzes auf den verschiedenen Ebenen mit den Ebenen der Argumentationsprozesse der Schülerinnen und Schüler korrespondiert. „A classification of different dragging modalities students might use in solving a problem in Cabri was produced and the cognitive counterpart of dragging investigated“ (Olivero 2002, S.66).
Die folgenden sieben Einsatzarten werden herausgestellt (vgl. Arzarello *et al.* 2002, 67):

- *Wandering dragging*: Hierbei werden Basispunkte ohne weiteren Plan gezogen, um interessante Konfigurationen oder Regelmäßigkeiten in der Zeichnung zu entdecken.

- *Bound dragging*: Ein halbfreier Punkt wird auf dem Objekt, an das er gebunden ist, bewegt.

- *Guided dragging*: Eine Figur wird in eine bestimmte Form gezogen, z.B. ein Viereck zu einem Quadrat.

- *Dummy locus dragging*, auch *lieu muet dragging*: Ein Punkt wird so gezogen, dass die Konstruktion eine bestimme Eigenschaft behält. Notwendigerweise bewegt sich der Punkt dabei auf einer bestimmten Bahn, die allerdings weder sichtbar wird noch im Bewusstsein des Akteurs ist. (In der überwiegenden Literatur wird die englische Begrifflichkeit „dummy locus“ (wörtlich übersetzt: blinder Ort) verwendet, einige, wie Olivero verwenden die französische Bezeichnung „lieu muet“, die wörtlich übersetzt „stiller Ort“ bedeutet. Die beiden Begriffen werden im selben Sinne eingesetzt.)

- *Line dragging*: Es werden neue Punkte zur Zeichnung hinzugefügt, die auf einer bestimmten Bahn liegen, so dass die Figur ihre Eigenschaft behält.

- *Linked dragging*: Ein Punkt wird an ein Objekt gebunden und dann auf diesem gezogen.

- *Dragging test*: Ein Test, ob die Figur zugmodus-“resistent“ ist. Auf diese Art wird überprüft, ob die Konstruktion wirklich die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Dabei ist offensichtlich, dass die verschiedenen Einsatzarten des Zugmodus zum Teil aufeinander aufbauen. Ich möchte dies am Beispiel des Thalessatzes erläutern: Wenn ich ein beliebiges Dreieck dahingehend untersuche, wo der Eckpunkt C liegen kann, damit in ihm ein rechter Winkel entsteht, könnte ich diesen, unter ständiger Messung des Winkels, zunächst so weit ziehen, bis das Winkelmaß 90 Grad beträgt. Diese Aktion fällt unter die Kategorie „*Guided dragging*“. Im Anschluss daran könnte ich versuchen, die Ecke C so zu verziehen, dass sie eine andere Lage bekommt, der rechte Winkel aber erhalten bleibt („*Dummy locus dragging*“, Abbildung 3.1 links). Um eine Idee davon zu bekommen, auf welcher Bahn sich C bewegt, könnte ich einige potentielle Lagen von C mit einem zusätzlichen Punkt versehen („*Line dragging*“, Abbildung 3.1 Mitte). Hierdurch kann die Idee entstehen, dass die Ortslinie von C ein Kreis ist, der AB als Durchmesser hat. Um dies zu überprüfen, zeichne ich den entsprechenden Kreis um AB, lege einen Punkt C auf diesen, und prüfe, ob der Winkel immer 90 Grad groß ist („*Linked dragging*“, Abbildung 3.1 rechts).

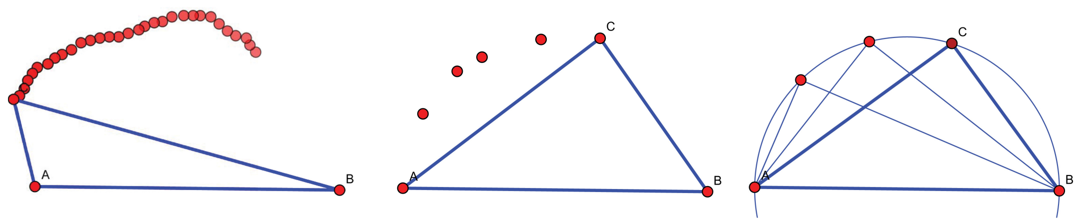


Abbildung 3.1 – *Dummy locus dragging, Line dragging, Linked dragging*

Die Forschungsgruppe verfolgt in diesem Zusammenhang den Grundgedanken, dass beim Bearbeiten von Aufgaben ein ständiges Wechselspiel von Wahrnehmen und Beobachten auf der einen und Ideenentwicklung und Theoriebezug auf der anderen Seite stattfindet. Dieses Wechselspiel ist äußerst komplex und in der Regel schwer festzumachen, da es sich im wesentlichen in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler abspielt, und sich höchstens durch Mimik, Gestik, Sprache und ähnliches bemerkbar macht. Um hier Zugänge zu finden, wurde zunächst in einer Vorstudie beobachtet, wie „Experten", nämlich Mathematiklehrerinnen und -lehrer an Highschools und Universitäten, geometrische Probleme lösen, wobei diese laut denken sollten. Die Vorstudie mündete in ein theoretisches Modell, das beschreibt, wie Expertinnen und Experten Vermutungen aufstellen und diese dann beweisen und wie sich der Übergang von dem einen zum anderen Modus vollzieht. Dabei werden die Gedankengänge und Vorgehensweisen jeweils als einer von zwei gegenläufigen Prozessen aufgefasst, nämlich entweder als „*ascending process*" oder als „*descending process*":

> "*ascending processes*, from drawings to theory, in order to explore freely a situation, looking for regularities, invariants, etc.
> *descending processes* from theory to drawings, in order to validate or refute conjectures, to check properties, etc." (Arzarello *et al.* 2002, S.67).

Den Übergang vom „Auf"- zum „Absteigen" leistet in diesem Zusammenhang das „abduktive Schließen". Diese Begrifflichkeit stammt von dem amerikanischen Philosophen Charles Sanders Peirce (1839-1914) in Unterscheidung von den geläufigen Formen der Erkenntnisgewinnung Deduktion und Induktion. Ganz kurz gefasst geht es um Folgendes: Deduktiv wird von einer gegebenen Regel und einer Fallaussage auf ein bestimmtes Resultat geschlossen, induktiv von einer Fallaussage und einem vorliegenden Resultat auf eine Regel, und abduktiv von einer

Regel und einem bestimmten Resultat auf eine Fallaussage.
Formallogisch bedeutet dies für die **Deduktion**:

- Aus p folgt q (Regel). Beispiel: Wenn die Kugel aus dieser Urne stammt, ist sie grün.
- p gilt (Fallaussage). Im Beispiel: Diese Kugeln stammen aus dieser Urne.
- Schließe, dass q gilt (Resultat). Im Beispiel: Diese Kugeln sind grün.

Die Deduktion führt zwar zu **sicheren** Resultaten, was besonders in der Mathematik wichtig ist, letzlich aber nicht zu **neuen** Resultaten, „da das Resultat eines deduktiven Schlusses bereits in allgemeiner Form im Gesetz enthalten ist" (Meyer 2007, S.33). Hier liegt ein erkenntnistheoretisches Grundproblem der Mathematik vor.
Bei der **Induktion** hingegen ist die Schlussweise folgendermaßen:

- p gilt (Fallaussage). Beispiel: Diese Kugeln stammen aus dieser Urne.
- q gilt (Resultat). Im Beispiel: Diese Kugeln sind grün.
- Schließe: aus p folgt q (Regel). Im Beispiel: Wenn die Kugel aus dieser Urne stammt, ist sie grün.

Die Induktion ist kein sicherer Schluss, da eine Gesetzmäßigkeit zwar unterstellt, aber nicht bewiesen wird. Es könnte auch ein Zufall sein, dass ausgerechnet nur grüne Kugeln aus der Urne gezogen wurden. „Mit einer Induktion beweist man daher nicht, dass etwas auf eine bestimmte Weise sein muss, sondern dass etwas ein wahrscheinliches Faktum hinsichtlich der vom Schluss unterstellten Regelmäßigkeit ist" (Meyer 2007, S.35).
Bei der **Abduktion** zu guter Letzt wird folgendermaßen geschlossen:

- Aus p folgt q (Regel). Beispiel: Wenn die Kugel aus dieser Urne stammt, ist sie grün.
- q gilt (Resultat). Im Beispiel: Diese Kugeln sind grün.
- Schließe, dass p gilt (Fallaussage). Im Beispiel: Diese Kugeln stammen aus dieser Urne.

Auch dieses ist offensichtlich formallogisch kein zulässiger Schluss. Dennoch hat das abduktive Schließen einen großen Wert und eine große Berechtigung, vor allen Dingen, wenn es gelingt, andere Alternativerklärungen auszuschließen. Ein Bereich, in dem sehr oft abduktiv geschlossen wird, ist die Medizin: der Arzt oder die Ärztin kennt die Symptome einer bestimmten

Krankheit, beobachtet diese an einem Patienten und schließt daraus, dass der Patient unter der besagten Krankheit leidet. Es wird folglich ein Schluss über einen konkreten Fall gezogen. In der Mathematik kann die Abduktion damit einen Beitrag leisten, plausible Hypothesen zu generieren:

> „The surprising fact, C, is observerd;
> But if A were true, C would be a matter of course,
> Hence, there is reason to suspect that A is true“ (Peirce 1963, 5.189).

Sofort wird natürlich die Schwierigkeit deutlich: es könnte sowohl sein, dass die Regel falsch ist, als auch, dass sie zwar wahr, aber dennoch nicht Grundlage der Fallaussage ist. Gleichwohl sieht Peirce (1963, 5.171) in ihr die einzige der vorgestellten Schlussformen, die in der Lage ist, auf der Generierung von plausiblen Hypothesen basierend **neue** Theorien zu entwickeln:

> „Abduction is the process of forming an explanatory hypothesis. It is the only logical operation which introduces any new idea; for induction does nothing but determine a value, and deduction merely evolves the necessary consequences of a pure hypothesis.
> Deduction proves that something *must* be; Induction shows that something *actually is* operative; Abduction merely suggests that something *may be.*
> Its only justification is that from its suggestion deduction can draw a prediction which can be tested by induction, and that, if we are ever to learn anything or to understand phenomena at all, it must be by abduction that this is to be brought about.“

Wird also mit einem abduktiven Schluss versucht, von einem gegebenen Fall auf eine erklärende Gesetzmäßigkeit zu schließen, um so den Fall begründen zu können, bedeutet dies für das konkrete Beispiel der Aufgabenbearbeitung durch die Expertinnen und Experten, dass diese ihr geometrisches Wissen auf einen Sachverhalt hin durchforsten, der einen Zugang zur Problemlösung liefern kann:

> „In the model, abduction means choosing 'which rule this is the case of', that is the subject browses his theoretical knowledge in order to find the piece of theorey that suits this particular situation“ (Olivero 1999, S.4).

Nach Arzarello und Olivero findet zwar sowohl in der klassischen Papier- und Bleistift-Geometrie, als auch in der DGS-Geometrie abduktives Schließen statt. Während dieses aber klassisch der Intuition und dem Einfallsreichtum der Geometrie-Treibenden zu verdanken war, ermöglicht nun das neue Medium mit seinem Zugmodus auch dem „Normalbürger“ solche Schlüsse.

> „In both [Geometrie mit Papier und Bleistift und Computergeometrie, G.W.] the transition is ruled by *abduction*; but while in the former the abductions are produced because of the ingenuity of the subjects, in Cabri the dragging process can mediate them. [...] Moreover, such a repeated switching supports the evolution from perceptions towards a more theoretical frame: this evolution is marked by a kind of rhythm from ascending to descending modalities and back“ (Arzarello *et al.* 2002, S.67).

Darüber hinaus lässt die Differenzierung des Zugmodus in unterschiedliche Nutzungsniveaus sogar einen Rückschluss auf den kognitiven Prozess, in dem sich ein Problemlöser aktuell befindet, zu: „[...] dragging in Cabri seems to show at a perceptive level what the students' cognitive processes are“ (Arzarello *et al.* 2002, S.68).
In Abbildung 3.2 findet sich noch einmal eine strukturierte Darstellung des Zusammenhangs zwischen den Einsatzarten des Zugmodus im Sinne von Azarello, u.a. ihren auf- und absteigenden Denkprozessen (sog. kognitiven Modalitäten) und der Rolle, die sie der Erkenntnisgewinnungsform des abduktiven Schließens dabei zuweisen.

Wandering, *bound* und *guided dragging* werden eingesetzt, um Dinge auszuprobieren und bestimmte Sachverhalte zu untersuchen; hier liegt ein *ascending process* vor. Beim *Dummy locus dragging* befindet man sich zwar immer noch in der Versuchsphase, arbeitet aber bereits etwas stärker zielorientiert, da man bestimmte Eigenschaften einer Figur beim Ziehen konstant erhalten will. Hierbei kann das heuristische Potential des Zugmodus zum Tragen kommen, da unterschwellig bereits die Bildung von Hypothesen abläuft, denn das Konstanthalten der jeweiligen Eigenschaften kann nur erreicht werden, wenn der gezogene Punkt auf einer bestimmten Bahn bewegt wird. Einen weiteren Schritt in diese Richtung stellt das *line dragging* dar, bei dem nun die Bahn des bewegten Punktes sichtbar gemacht wird. Das *linked dragging* erlaubt, Vermutungen zu überprüfen: wenn die Bahn eines Punktes durch die DGS konstruiert und der Punkt an diese Bahn gebunden werden kann, muss bei korrekter Vermutung die ent-

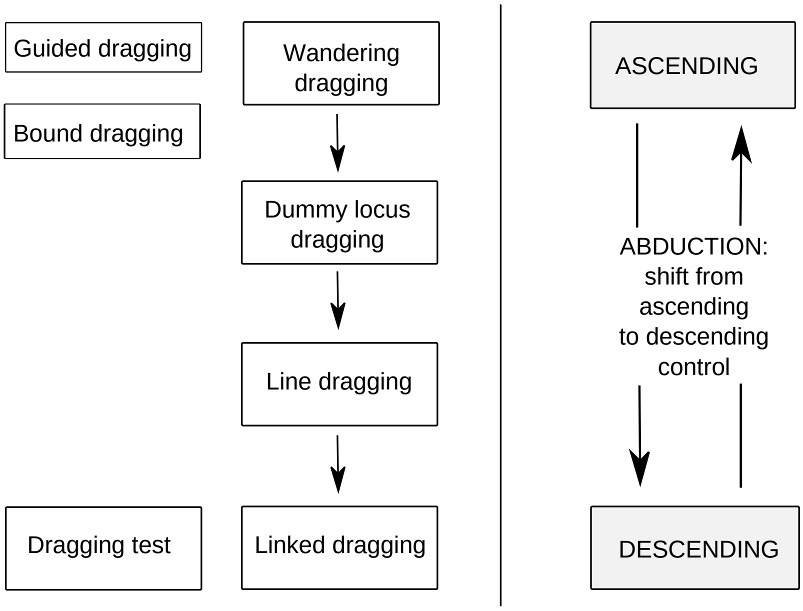


Abbildung 3.2 – *Kognitive Modalitäten nach* ARZARELLO *et al. (2002, S.69)*

deckte Eigenschaft der Figur erhalten bleiben, wenn der Punkt auf ebendieser Bahn bewegt wird. Auch diesen Überprüfungsvorgang ordnen Arzarello und Olivero dem *descending process* zu. Der *dragging test* schließlich ist für sie ein Mittel zur Validierung von Vermutungen, hat also eine Kontrollfunktion, und stellt daher einen *descending process* dar. ARZARELLO *et al.* (2002, S.68) folgern daraus, dass ein Rückschluss vom Einsatz des Zugmodus auf die kognitiven Modalitäten zulässig ist:

> „At the end of this analysis, it is clear that the transition from one dragging modality to another shows a 'genesis' which is connected with the cognitive ascending / descending modalities described above: for example wandering dragging is typical of an ascending modality, while a test dragging is typical of a descending modality".

Diese Genese verläuft allerdings nicht zwangsläufig in der geschilderten idealtypischen Abfolge, insbesondere werden nicht alle Problemlöser auch alle Zugmodusvarianten einsetzen. Diese Beobachtung hat z.B. KITTEL bei seiner Studie in der Hauptschule gemacht hat: „Dieser komplette Prozess konnte in der Untersuchung selten beobachtet werden" (KITTEL 2007, S.284). Selbst wenn der Prozess aber komplett durchlaufen wird, stellt sich die Frage, inwieweit damit den Ansprüchen an die Begründbarkeit schon Genüge getan ist. ARZARELLO *et al.* drücken sich in diesem Zusammenhang sehr vage aus; bei Schülerinnen und Schülern, die den *dragging test* einsetzen, um ihre Vermutung zu überprüfen, konstatieren sie: „At the end they check their conjecture. Now they are using the dragging test and their actions show descending control“ (Arzarello *et al.* 2002, S.70). Ob sie dies für ausreichend halten, bleibt zunächst offen. Die Zusammenfassung am Ende ihrer Ausführungen spricht allerdings dafür:

> „For example, dragging in Cabri allows students to validate their conjectures; therefore the function of convincing (themselves, a friend or an enemy) proof has in mathematics is no longer useful. The work in Cabri is enough for the students to be convinced of the validity of their conjectures. [...] However, if the teacher makes explicit the role of proof in justifying, then students will be motivated to prove *why* a certain proposition ist true (within a theory), after they know *that* it is true (within the Cabri environment)“ (Arzarello *et al.* 2002, S.71).

Die Tatsache, **dass** etwas gilt, kann demnach für Arzarello *et al.* durchaus mit Hilfe einer DGS gezeigt werden, auch wenn sie abschließend diese Aussage wieder relativieren:

> “If the teacher does not motivate students to find out *why* a conjecture (proposition) is true, then the justifications given by students may remain at a perceptive-empirical level: the proposition ist true because the property observed on the Cabri figure stays the same when dragging the drawing, given the hypotheses do not change. When such a belief is shared in the classroom, then Cabri might become an obstacle in the transition from empirical to theoretical thinking, as it allows validating a proposition without the need to use a theory“ (Arzarello *et al.* 2002, S.71).

Die Frage, wie die Lehrerin bzw. der Lehrer einen zusätzlichen Beweis einfordern oder motivieren soll, wenn doch der DGS die Fähigkeit zugesprochen wird, Vermutungen zu „checken“, wird nicht beantwortet. Auch Olivero argumentiert auf einem ähnlichen Niveau: nach einer Aufgabenbearbeitung, bei der die Schülerinnen und Schüler durch Einsatz des Zugmodus eine Hypothesenbildung vollziehen konnten, wird als letzter Schritt die konstruktive Überprüfung der Hypothese vollzogen: „At the end, they check their conjecture. Now they are using the dragging test and their actions show **descending control**“ (Olivero 1999, S.12). Damit endet die Beschreibung der Unterrichtsepisode, und es bleibt offen, ob sich nunmehr ein echter

Beweis des Sachverhalts anschließt oder zumindest thematisiert wird, dass an dieser Stelle noch kein Beweis im mathematischen Sinne erbracht worden ist.
Diesen Aspekt, den ich für äußerst problematisch halte, diskutiere ich ausführlich in dem Kapitel zum Thema „Beweisen und DGS“.

Kapitel 4

Untersuchungsmethode und -design

4.1 Konzeptionelle Rahmenbedingungen

Die Untersuchung steht im engen Zusammenhang mit der Vorlesung „Elemente der Geometrie“ für Erstsemesterstudierende der Mathematik für die Lehrämter Grund-, Haupt-, Realschule sowie die entsprechenden Jahrgangsstufen der Gesamtschule, die an der Universität Paderborn regelmäßig im Wintersemester gelesen und in der seit 1998 die DGS „Cinderella“ eingesetzt wird. Während zu Beginn die Vorlesung von Prof. Dr. Hans-Dieter Rinkens konzipiert und gehalten wurde, wird sie seit dem Wintersemester 02/03 kontinuierlich von Prof. Dr. Peter Bender gelesen und weiterentwickelt. Schon in der zweistündigen Vorlesung wird konsequent die DGS verwendet, der Übungsbetrieb findet im Computerraum statt und auch die Abschlussklausur, eine Leistung im Rahmen der Zwischenprüfung, wird am Rechner absolviert. Die Organisation dieser Klausur mit bis zu 450 Teilnehmerinnen und Teilnehmern ist - auch an der Paderborner Universität der Informationsgesellschaft - eine logistische Herausforderung ersten Ranges.

4.1.1 Auswahl der Untersuchungspersonen

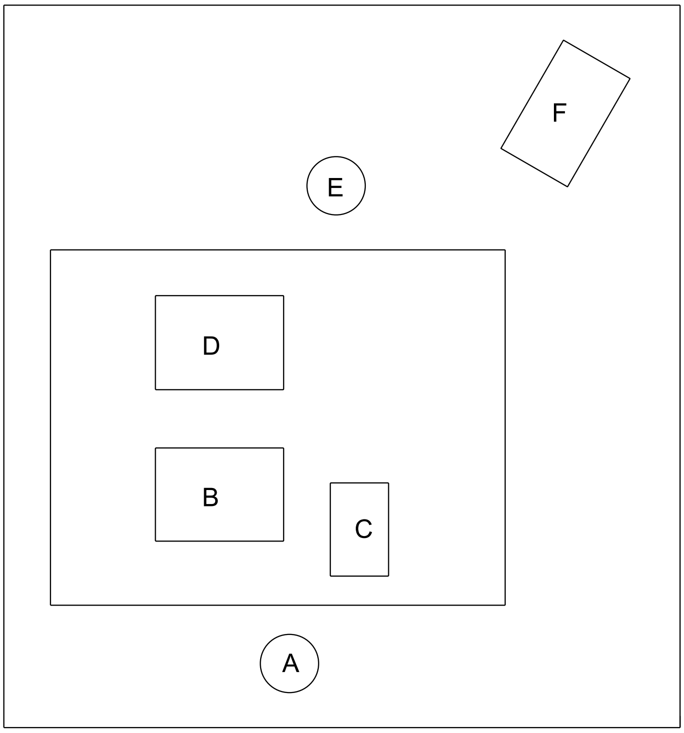
Da die „Elemente der Geometrie“ bis zur kürzlichen Umstrukturierung des Lehramtsstudiums in NRW eine Pflichtveranstaltung für alle Lehramtsstudierenden der genannten Schulformen war, konnte ich gezielt zwei Gruppen von Studierenden in meine Untersuchung einbeziehen: Studierende in Examensnähe, bei denen der Besuch der Vorlesung schon einige Zeit zurückliegt, und die im Laufe ihres Studiums eine Reihe von Kompetenzen erworben und diverse

Strategien ausgebildet haben sollten, und Erstsemesterstudierende, die aktuell den Umgang mit DGS in Vorlesung und Übung erleben bzw. praktizieren und sozusagen in „medias res“ sind. Ich erwartete, dass die erste Gruppe über ein höheres Maß an fachlichen Kompetenzen, ein breiteres Spektrum an Problemlösestrategien und Techniken der Beweisführung verfügen und vor allen Dingen über mehr Sicherheit in der Einschätzung der Korrekheit eines Beweises verfügen würde. Gleichzeitig kann geprüft werden, in wieweit sich der aktuelle Einfluss des Dozenten auf die Erstsemester auswirkt, ob sich bestimmte Vorgehensweisen und Argumentationsstrukturen unter dem unmittelbarem Eindruck von Vorlesungs- und Übungsbetrieb vermehrt bemerkbar machen und im weiteren Verlauf verlieren.
Die Kandidaten für die erste Gruppe akquirierte ich in den Fach- und Didaktikseminaren des Wintersemesters 08/09. Um mich zu vergewissern, dass sich nicht nur „gute“ Studierende in meiner Stichprobe eingefunden haben, überprüfte ich bei allen 24 Probandinnen und Probanden das Ergebnis ihrer Abschlussklausur in Geometrie.
5 Personen hatten die Klausur erst im zweiten Anlauf mit „ausreichend“ bestanden. 4 Probanden waren noch gar nicht erfolgreich, d.h. dass sie bislang keinen Leistungsnachweis erbracht haben, sondern nur Grundkenntnisse (entspricht „mangelhaft“ und ist besser als „ungenügend“) oder gar nichts. Von 5 Studierenden war die Klausur zwar im ersten Anlauf, aber sehr knapp bestanden, weitere 9 hatten befriedigende und 6 gute bis sehr gute Leistungen erbracht. Zur Vereinfachung habe ich drei Leistungsdrittel gebildet und jeden Studierenden in eines eingeordnet, wobei der prozentuale Anteil der erreichten Klausurpunkte maßgebend war. Insgesamt konnte ich mich somit davon überzeugen, dass ein breites Leistungspektrum abgedeckt worden ist.

Bei der Gruppe der Erstsemester konnte ich nicht auf Klausurdaten zurückgreifen, da die Befragung vor dem Klausurtermin erfolgte. Die Überprüfung im Nachhinein ergab, dass sich bei den 27 von mir ausgewählten Studierenden 8 im unteren, 13 im mittleren und 6 im oberen Leistungsdrittel befanden, so dass auch hier das gesamte Spektrum abgedeckt wurde.

4.1.2 Interviewsituation

Die Interviews fanden jeweils in einem Zweiergespräch statt und wurden von mir selbst durchgeführt. Dabei arbeitete die Probandin bzw. der Proband am Rechner, an den ein zusätzlicher externer Bildschirm angeschlossen war, so dass ich die Bildschirmaktivitäten verfolgen konnte, obwohl wir uns gegenüber saßen. Durch eine Videokamera, die auf das Gesicht der oder des Studierenden gerichtet war, wurde das Gespräch aufgezeichnet. Während in der Pilotierungsphase eine zweite Videokamera auf den Monitor gerichtet war, um das Arbeiten mit der DGS zu dokumentieren, stellte ich das Verfahren für die Erhebung dahingehend um, dass die Software „Screencorder 5.0“ im Hintergrund lief, die die zweite Videokamera in folgender Weise ersetzte: Durch die Software wurden pro Sekunde 8 Screenshots erstellt, so dass die Konstruktion am Bildschirm quasi gefilmt wurde. Dadurch konnte nicht nur auf die zweite Videokamera verzichtet werden, zudem wurde auch die Qualität der Aufzeichnung erheblich gesteigert.



A Interviewter
B Monitor I
C Papier
D Monitor II
E Interviewerin
F Kamera

Abbildung 4.1 – *schematische Interview-Situation*

Die Aufzeichnungen der Videokamera, die auf Mini DV erfolgten, wurden anschließend digitalisiert, die von Screencorder 5.0 aufgezeichneten Daten konnten direkt in das Transkriptionsprogramm Elan 3.7.1 eingelesen und weiterverarbeitet werden.

4.2 Ablauf der Interviews

Das Interview teilte sich in zwei Teilsegmente. Zunächst sollte die Probandin oder der Proband eine Aufgabe bearbeiten, wobei ausdrücklich darauf hingewiesen wurde, dass nicht so sehr eine erfolgreiche Lösung der Problemstellung, als vielmehr der Einsatz des Programms, die Möglichkeiten, die hierdurch induziert werden und das subjektive Empfinden im Hinblick auf den Grad der Unterstützung durch das Programm im Fokus des Interesses stehen. Ziel hierbei war, das Arbeiten mit der DGS beobachten und Fragen hierzu stellen zu können. Im anschließenden zweiten Teil fand dann die Befragung nach einem vorbereiteten Interviewleitfaden statt.

4.2.1 Aufgabenpool

Zu Beginn des Interviews bearbeiteten die Studierenden in der Regel eine (wenn die Zeit noch nicht zu weit fortgeschritten war, auch schon einmal zwei) zufällig ausgewählte Aufgabe aus einem Aufgabenpool, der insgesamt 4 Aufgaben umfasst. Die Motivation für den Einsatz mehrerer verschiedener Aufgaben lag schlicht in der Zielvorstellung, die Studierenden mit einer unbekannten Problemstellung zu konfrontieren. Mit dem Aufgabenpool wollte ich die Gefahr reduzieren, dass die Studierenden sich bereits im Vorfeld auf eine Aufgabe einstellten, die ihnen vielleicht von vorher interviewten Studierenden bekannt gemacht worden war. Diese Vorsichtsmaßnahme erwies sich im Wesentlichen als überflüssig, denn ich hatte nach Beendigung der Interviews darum gebeten, über die Aufgabe(n) Stillschweigen zu bewahren und nach den Rückmeldungen der Studierenden gehe ich auch davon aus, dass ihre jeweiligen Vorgänger sich an die Absprache gehalten haben. Im Folgenden möchte ich die Aufgaben kurz vorstellen und darlegen, warum sie mir für eine Bearbeitung mit DGS geeignet erscheinen.

Aufgabe 1)

Zeichne zunächst ein Dreieck mit rechtem Winkel in C und ein Quadrat über der Hypotenuse c.

- Konstruiere dann die Winkelhalbierende des rechten Winkels: diese zerlegt das Hypotenusenquadrat in zwei Teilflächen.
- Fällt dir irgendetwas auf, wenn du diese beiden Teilflächen betrachtest?

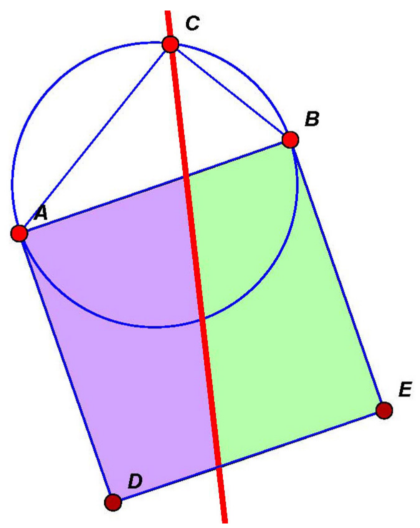


Abbildung 4.2 – *Die Winkelhalbierende in C zerlegt das Hypotenusenquadrat*

Bei dieser Aufgabe erwartete ich, dass noch nicht unmittelbar nach Erstellung der Konstruktion eine Vermutung über die Teilflächen geäußert wird, sondern dass zunächst an C gezogen und die Veränderung der Teilflächen dabei qualitativ bewertet wird. Es sollte auffallen, dass durch die Zerlegung zwei kongruente Vierecke zu entstehen scheinen (vgl. Abbildung 4.2). Besonders deutlich könnte diese Vermutung werden, wenn C fast bis auf A oder bis auf B gezogen wird. Die Winkelhalbierende, die ihre Lage verändert, wenn an C gezogen wird, scheint sich um einen Punkt im Inneren des Hypotenusenquadrats zu drehen, und es sollte die Frage aufkommen, ob das wirklich so ist und gegebenenfalls das Drehzentrum näher bestimmt werden kann. Dabei kann auch hier wieder die Strategie, Sonderfälle zu betrachten, hilfreich sein, zumal das Programm zulässt, den Punkt C auf A oder auf B zu ziehen, ohne dass die

Winkelhalbierende des nunmehr entarteten Winkel verschwindet: die Winkelhalbierende fällt mit der jeweiligen Diagonalen des Hypotenusenquadrats zusammen. Von den Diagonalen des Quadrats aber wissen wir, dass sie sich im Mittelpunkt schneiden. Somit liegt die Hypothese nahe, dass die Winkelhalbierende durch den Mittelpunkt des Hypotenusenquadrats geht, und zwar immer, unabhängig von der Lage vom Punkt C.

Bei ausschließlicher Betrachtung eines statischen Bildes wäre diese Vermutung wahrscheinlich weniger offensichtlich. Durch Einsatz des Zugmodus allerdings kann diese Beobachtung besonders dann gut gemacht werden, wenn zur Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks der Thaleskreis genutzt wurde, da auch dieser durch den Mittelpunkt des Hypotenusenquadrats geht. Damit hätten Winkelhalbierende und Thaleskreis einen Schnittpunkt, der bei Lageveränderung von C fest bleibt. Gelingt es, die Idee zu verifizieren, ist eine Beweisführung der Zerlegung in kongruente Vierecke über Symmetrie oder Kongruenz möglich.

Eine mögliche Vorgehensweise:

Ich verändere die Lage von C und beobachte, dass der Schnittpunkt M der Winkelhalbierenden mit dem Umkreis des Dreiecks ABC invariant bleibt. Ein Argument hierfür liefert der Umfangswinkelsatz bezogen auf den Winkel MCA über der Kreissehne AM: Der Winkel ändert seine Größe durch Ziehen an C nicht, folglich bleibt auch die Länge der Sehne AM konstant, und da A fest ist, bleibt auch M fest. Es bietet sich an, M mit einer Sonderlage von C zu bestimmen:

Wähle C so, dass $\mid CA \mid = \mid CB \mid$. Dann liegt C auf der Mittelsenkrechten von AB, und da im gleichschenkligen Dreieck ACB die Mittelsenkrechte von AB und die Winkelhalbierende in C übereinstimmen, liegt M auf dieser Mittelsenkrechten. Dies bedeutet, dass M gleichweit entfernt von A und B ist und damit den gleichen Abstand zu AD wie zu BE hat. Da M außerdem nach Voraussetzung auf dem Kreis um ABC liegt, dessen Radius halb so lang ist wie die Seite des Hypotenusenquadrats, hat M zudem den gleichen Abstand von AB wie von DE. (Die bisher angestellten Überlegungen waren Thema einer Übungsaufgabe im Rahmen der Veranstaltung, so dass hier die Studierenden das vermeintlich neue Problem auf ein bereits bekanntes hätten zurückführen können.) M ist also der Mittelpunkt des Hypotenusenquadrats. In diesem Sonderfall ist klar, dass die Winkelhalbierende das Hypotenusenquadrat in zwei gleichgroße Teilflächen (Rechtecke) teilt. (vgl. Abbildung 4.3).

Eine andere, möglicherweise nicht ganz so nahe liegende Möglichkeit, zu zeigen, dass die Winkelhalbierende den Thaleskreis tatsächlich im Mittelpunkt des Hypotenusenquadrats schneidet besteht in der Zerlegung in gleichschenklige Dreiecke (vgl. Abbildung 4.4). Ich verbinde M mit C und zeige, indem ich die Winkel in Teildreiecken betrachte, dass der Winkel MCA unabhängig von der Lage von C immer 45° groß ist und damit MC tatsächlich die Winkelhalbierende des Winkels BCA.

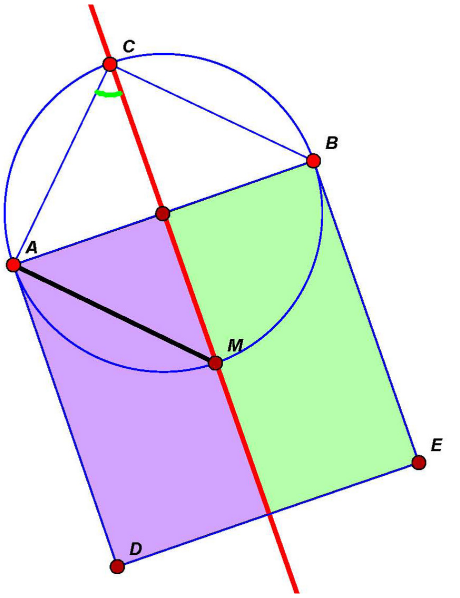


Abbildung 4.3 – *Betrachte die Sonderlage von C*

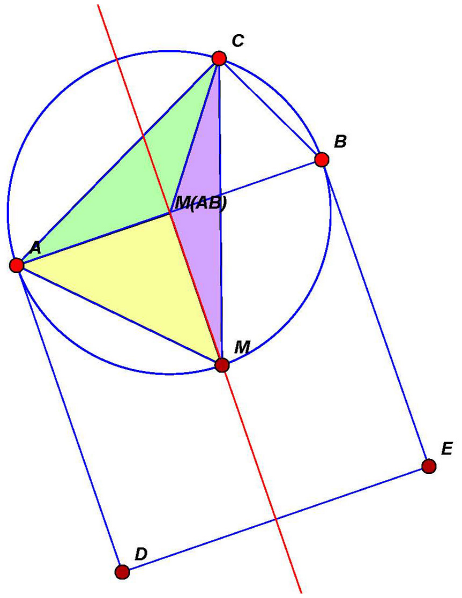


Abbildung 4.4 – *Betrachte gleichschenklige Dreiecke*

Wenn ich gezeigt habe, dass M der Mittelpunkt des Hypotenusenquadrats ist, steht mir das Argument der Symmetrie zur Verfügung, das besagt, dass die beiden Teilflächen gleich groß sein müssen, da das Quadrat in Bezug auf den Mittelpunkt punktsymmetrisch ist. Oder aber ich argumentiere über Kongruenz und zeige, dass die von Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende gebildeten Dreiecke im Hypotenusenquadrat kongruent sind und damit die beiden Teilflächen des Hypotenusenquadrats unabhängig von der Lage von C flächeninhaltsgleich (vgl. Abbildung 4.5).

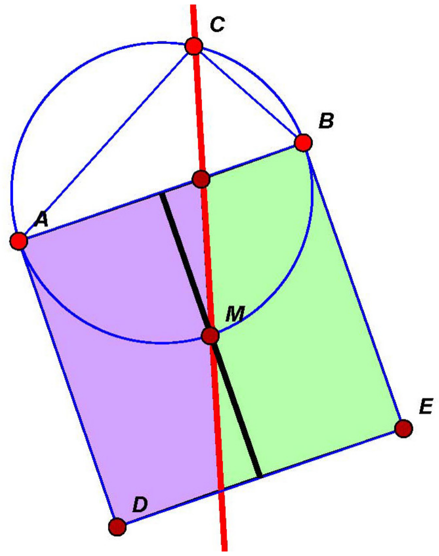


Abbildung 4.5 – *Verallgemeinere dann*

Die Aufgabe ist nicht trivial und erfordert je nach Lösungsweg Kenntnisse über den Umfangswinkelsatz und dessen Umkehrung, Kongruenzen, gleichschenklige Dreiecke, Symmetrien, Winkelsummensatz und andere. Die DGS kann als Suchmodus eingesetzt werden, um zunächst eine Vermutung zu bekommen und diese dann empirisch zu überprüfen. Dabei ist sowohl zu beobachten, was sich beim Ziehen verändert (ziehe ich beispielsweise nach rechts, wird die Seite des linken Teilvierecks von A in Richtung B länger, die dazu parallele vom Eckpunkt D aus kürzer), als auch nach Invarianten zu suchen, wie zum Beispiel dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Thaleskreis. Die durch die DGS initiierten Ideen können dann anschließend am festen Bild geometrisch begründet werden, so dass im Idealfall die Beweisidee beweglich, der Beweis selbst statisch fundiert ist.

Aufgabe 2)

> Zeichne die Strecke AB und einen Kreis um A mit beliebigem, aber festem Radius. Auf diesen Kreis lege einen Punkt P und zeichne die Gerade AP. Fälle von B aus das Lot auf AP, nenne den Schnittpunkt mit der Geraden C.
>
> - Versuche nun, dir folgendes vorzustellen: Wo würde C liegen, wenn du eine andere Lage von P auf dem Kreis gewählt hättest?
> - Kannst du dir für jede Lage von P (auf dem Kreis) die Lage des zugehörigen C vorstellen? Versuche, deine Vermutung zu begründen.
> - Nutze nun den Zugmodus, und betrachte die Bahn von C. Scheint sich deine Vermutung zu bestätigen?
> - Erzeuge nun die Ortslinie von C mit dem Ortslinienbutton. Hat sich deine Vermutung bestätigt? Wenn nein, wo war dein Denkfehler? Kannst du nun Gründe für den Verlauf der Ortslinie erkennen?

Erste Lösungsmöglichkeit ist, sich tatsächlich die Bahn von C vorzustellen. In der Situation in Abbildung 4.6 ist der Winkel PAB spitz und C liegt daher in der Halbebene oberhalb von AB. Unterteilt man darüber hinaus die Ebene mit Hilfe der beiden Lote auf g_{AB} durch A und durch D in drei Bereiche, nämlich den Bereich zwischen A und B, den Bereich jenseits von A und den Breich jenseits von B, so kann man sich klarmachen, dass C immer im Bereich zwischen A und B liegt. Begründung hierfür ist, dass der Winkel in C ein rechter ist, damit im Dreieck ABC der größte, und im Dreieck aufgrund der Seiten-Winkel-Korrespondenz der größere Winkel immer der größeren Seite gegenüberliegt, womit AB immer länger als AC und BC ist.

Lässt man P auf dem Kreis entgegen dem Uhrzeigersinn laufen, wird der Winkel PAB größer, bis er schließlich 90° erreicht und C auf A liegt. Wandert P weiter auf dem Kreis wird der Winkel PAB stumpf, der Nebenwinkel unterhalb von AB folglich spitz und da BC den Abstand zur Gerade AP darstellt, muss C unterhalb von AB und wiederum im Bereich zwischen

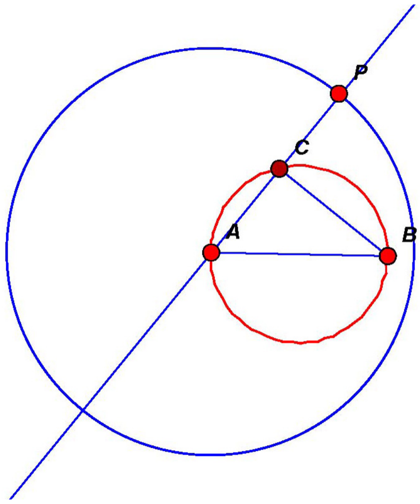


Abbildung 4.6 – *Auf welcher Ortslinie läuft C?*

A und B liegen. Lässt man P soweit wandern, dass der Winkel in A gestreckt ist, fällt C auf B, da B nun ein Punkt auf der Geraden AP ist. Befindet sich P in der Halbebene unterhalb von AB, findet analog dieselbe Bewegung von C statt. Die Ortslinie von C ist folglich eine geschlossene Kurve, die durch A und B geht und von C zweimal durchlaufen wird, während P einmal den Kreis durchläuft.

Interessanterweise macht man es sich durch diesen Visualisierungsversuch eigentlich nur unnötig schwer: Gehe ich sofort von der Tatsache aus, dass der Winkel BCA nach Konstruktionsvorschrift ein rechter ist und völlig unabhängig davon, wo P auf dem Kreis und sogar in der gesamten Ebene liegt, immer ein rechter Winkel bleibt, so ist natürlich völlig klar, dass die Ortslinie von C ein Kreis ist, und zwar der Thaleskreis über der Strecke AB.

Erste Fragestellung bei dieser Aufgabenbearbeitung ist, inwieweit es den Studierenden gelingt, sich die Bahn von C vorzustellen. Zweiter und noch interessanterer Aspekt ist, inwieweit diese Vorstellung mit der von Cinderella erzeugten Ortslinie korrespondiert und wie sich die Visualisierung mit Hilfe der DGS auswirkt: Wie wird mit eventuell vorhandenen Diskrepanzen zwischen der im Kopf und der mit der DGS erzeugten Ortslinie umgegangen? Wird die eigene Vorstellung sofort zugunsten des Programms verworfen? Wird die Ortslinie des Computers sofort als Kreis akzeptiert oder zumindest die Einschränkung gemacht, dass sie wie ein Kreis aussieht? Wird nach Gründen für die Form gesucht, oder ist die Visualisierung durch das Programm für die Studierenden eine hinreichende Begründung?

Hierbei wird also der kritische Umgang mit dem Programm hinterfragt, insbesondere, wie bereitwillig die Studierenden dem Computer die eigentliche Problemlösung überlassen. Wird dem Computer möglicherweise sogar zugestanden, mit der Visualisierung der Ortslinie auch die Zusammenhänge deutlich zu machen, und entsteht überhaupt noch das Bedürfnis nach Durchdringen dieser Zusammenhänge und letztendlich nach der Begründung für den Sachverhalt? Oder löst das „Sehen“ allein bereits die Überzeugung aus, den geometrischen Kontext durchschaut zu haben?

Aufgabe 3)

> Zeichne ein Dreieck ABC und dessen Umkreis, die Winkelhalbierende vom Winkel in C und die Mittelsenkrechte von AB.
>
> - Fällt dir etwas auf?

Wird der Schnittpunkt E der Winkelhalbierenden mit der Mittelsenkrechten wie in Abbildung 4.7 als Punkt markiert, wird offensichtlich, dass durch diesen Punkt noch eine dritte Linie geht, nämlich der Umkreis des Dreiecks ABC. Wird der Punkt nicht eingezeichnet, liegt das Phänomen nicht mehr ganz so klar auf der Hand. Hierbei spielt auch die gewählte Lage von C eine Rolle, da sich die Geraden auch unter einem sehr spitzen Winkel schleifend schneiden können, so dass die Lage des eigentlichen Schnittpunkts gar nicht so gut auszumachen ist. Intendierte Aufgabenbearbeitung in diesem Fall ist, dass die Studierenden auf die Vermutung kommen, dass sich in E drei Linien schneiden, diese Vermutung durch Einsatz des Zugmodus erhärten und sie anschließend begründen.

Hierfür könnte man den Umfangswinkelsatz heranziehen: Betrachte zunächst nur den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Umkreis des Dreiecks ABC, nenne ihn E. Da die Winkel ECA und BCE nach Voraussetzung gleich groß sind, besagt der Umfangswinkelsatz, dass die Sehnen AE und EB gleich lang sind. Damit ist E genausoweit von A wie von B entfernt und liegt demzufolge auf der Mittelsenkrechten von AB. Dasselbe Argument steht natürlich zur Verfügung, wenn ich zunächst voraussetze, dass E der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und des Umkreises ist, und anschließend zeige, dass E auch auf der Winkelhalbierenden des

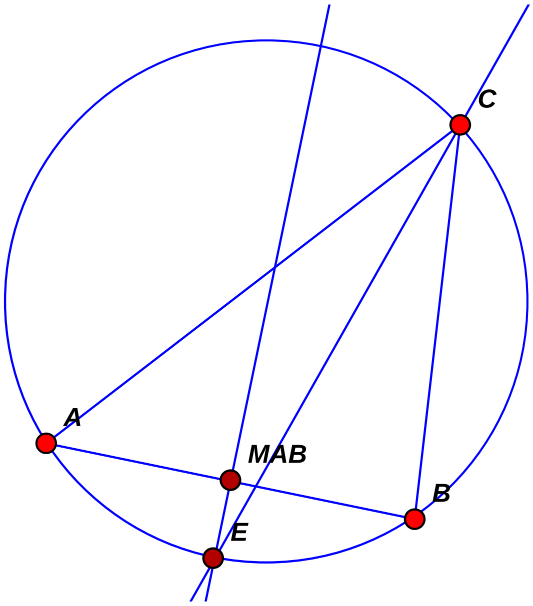


Abbildung 4.7 – *Gibt es eine Besonderheit in dieser Konstruktion?*

Winkels in C liegen muss, da die Sehnen AE und BE gleich lang sind.

Das Augenmerk bei dieser Aufgabenbearbeitung liegt zunächst darauf, ob die Studierenden den Schnittpunkt dreier sich in einem Punkt schneidenden Linien erkennen und ob sie dieses Phänomen als etwas Besonderes ansehen und damit für begründenswert erachten. Inwieweit wird dabei von den Studierenden die Konstruktion durch das Programm kritisch hinterfragt? Auf welchen Niveaustufen bewegt sich die Argumentation? Wird die Schnittpunkteigenschaft sofort akzeptiert, oder wird zumindest versucht, sie empirisch zu überprüfen? Werden möglicherweise auch andere, der Software inhärenten Überprüfungskriterien herangezogen, um zu zeigen, dass drei Punkte aufeinanderfallen? Oder wird nach den geometrischen Zusammenhängen gesucht, um unabhängig von der Konstruktion und der Darstelllung im DGS auch allgemeingültige Gründe für den Sachverhalt benennen zu können?

Aufgabe 4)

> Gegeben ist das spitzwinklige Dreieck ABC, dessen Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt M.
>
> - Gibt es eine Situation, in der die Punkte A, B, H und M auf einem Kreisbogen liegen?
> - (Kannst du dann eine Aussage über das Dreieck ABC machen?)

Die Zusatzfrage steht in Klammern, da sie nicht sofort bei Aufgabenstellung formuliert wurde, um nicht zu suggerieren, dass es auf jeden Fall möglich ist.
Mit der Voraussetzung der Spitzwinkligkeit wurde dafür gesorgt, dass H innerhalb des Dreiecks liegt und nicht zu viele Fallunterscheidungen gemacht werden müssen (vgl. Abbildung 4.8).

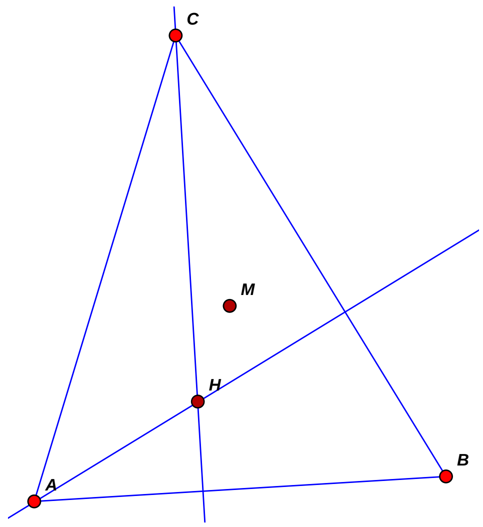


Abbildung 4.8 – *Können A, B, H und M auf einem Kreis liegen?*

Intendiert ist, dass die Studierenden zunächst einen Kreis durch drei der vier Punkte legen und anschließend den Zugmodus einsetzen, um zu überprüfen, ob auch der vierte Punkt unter Einhaltung der Aufgabenbedingungen auf den Kreis gezogen werden kann. Wenn auf diese Art und Weise eine Vermutung getroffen werden kann, ob es möglich ist, oder eben nicht, soll im ersten Fall versucht werden, eine Aussage über das Dreieck ABC zu treffen, im zweiten Fall zu begründen, warum es nicht sein kann. In der Tat können die vier Punkte A, B, H und M auf einem Kreis liegen, und zwar genau dann, wenn der Winkel in C 60° groß ist (vgl. Abbildung 4.9). Da diese Bedingung als solche beim Ziehen mit der DGS wohl weniger auffällt, könnte die DGS in geringerem Maße als bei anderen Phänomenen das Aufstellen einer Vermutung befördern.

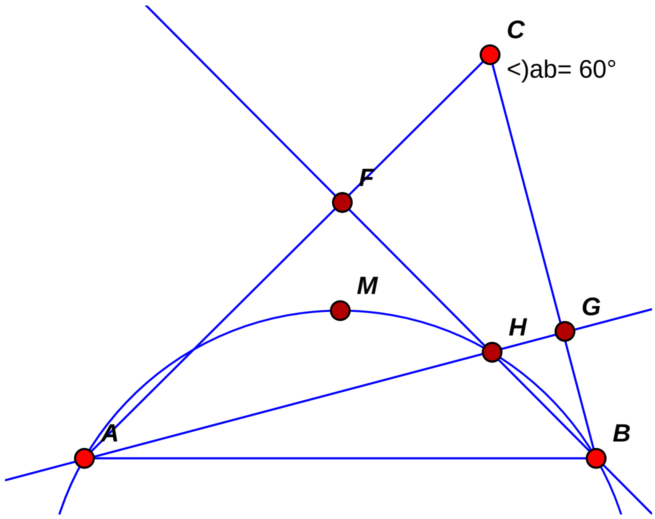


Abbildung 4.9 – *Der Winkel in C muss 60° betragen*

Eine Beweisidee könnte wie folgt aussehen: Wenn die vier Punkte A, B, H und M auf einem Kreis liegen, dann kann ich die Winkel BMA und BHA als Umfangswinkel im selben Kreisbogen über der Sehne AB auffassen, was bedeutet, dass beide Winkel gleich groß sind. Der Winkel BMA ist als Mittelpunktswinkel doppelt so groß wie der Winkel BCA als Umfangswinkel. Der Winkel BHA ist Scheitelwinkel zum Winkel FHG (mit den Höhenfußpunkten F und G) und damit so groß wie dieser. Im Viereck $FHGC$ gilt:
W (FHG) + W(GFC) = 360° - W(CFH) - W(HGC) = 180°, und wegen
W$(FHG) = 2 \cdot$ W(GCF) folgt W(GCF) = 60°.
Auch bei dieser Aufgabenbearbeitung kann die heuristische Strategie, zunächst Sonderfälle zu betrachten, hilfreich sein: Solange drei Punkte nicht kollinear sind, kann ich einen Kreis hindurch konstruieren. Gelingt es mir folglich, das Dreieck so zu konstruieren, dass zwei der betrachteten Punkte aufeinander fallen, so könnte dies zur Problemlösung führen. H kann nicht auf A oder B zu liegen kommen, weil dann in A oder B ein rechter Winkel vorläge, im Widerspruch zur Spitzwinkligkeit. Also probiert man es mit $H = M$. Dann sind die Höhen zugleich die Mittelsenkrechten, und das Dreieck ist gleichseitig (vgl. Abbildung 4.10).

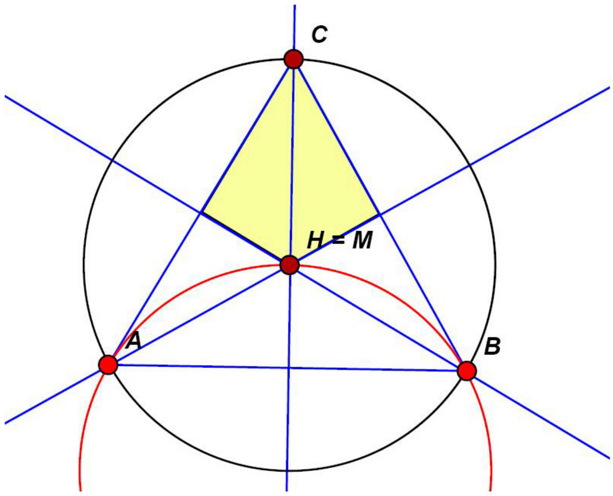


Abbildung 4.10 – *Betrachte den Sonderfall*

In diesem Fall ist klar, dass der Winkel in C (Umfangswinkel auf dem Umkreis des Dreiecks als Fasskreis über der Sehne AB) 60° und BMA als der zugehörige Mittelpunktswinkel 120° ist. Soll aber auch in anderen Fällen H auf dem Kreis durch A, M und B liegen, so muss BHA aufgrund der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes (zum Kreis durch A, H, B) immer 120° groß bleiben und damit der Winkel in C im Viereck $FHGC$ (mit den beiden rechten Winkeln in F und G) 60° groß. Ich kann folglich die Lage von C auf dem Fasskreis über der Sehne AB verändern und trotzdem alle in der Aufgabe genannten Bedingungen einhalten, solange ich gewährleiste, dass die Winkel in A bzw. B nicht 90° oder größer werden.

Zur Aufgabenlösung habe ich Kenntnisse über den Umfangswinkelsatz, den Mittelpunktswinkel, gleichseitige Dreiecke und Sehnenvierecke herangezogen. Hierbei handelt es sich um Inhalte, die in Vorlesung und Übung intensiv behandelt worden waren. Da aber kein Ziel der Befragung war, den gesamten Inhalt der Veranstaltung abzudecken, ist unproblematisch, dass die Aufgaben sich zum Teil ähneln. Eine große Schwierigkeit beim Bearbeiten ist vermutlich, die jeweiligen Figuren überhaupt in die Aufgabe hineinzusehen. Aber auch solche Dinge, wie beispielsweise Sehnenvierecke zu erkennen, sehen, dass Winkel Umfangswinkel über derselben Sehne und damit gleich groß sind, besondere Dreiecke erkennen u.a. wurde in Vorlesung und Übung intensiv behandelt.
Allen Aufgaben gemein ist die Intention, dass durch den Einsatz der Dynamik des Programms Sachverhalte beobachtet werden sollen und können und so Ideen zur Problemlösung generiert

werden. Da die eigentliche Begründung oder Beweisführung durchaus anspruchsvoll ist, war klar, dass die Studierenden die Lösung nicht sofort parat haben würden. Daher wurden sie zu Beginn darauf hingewiesen, dass nicht geometrisches Wissen abgeprüft werden sollte, sondern es darum ging, wie sie das Programm einsetzen und ob sie diesen Einsatz als hilfreich und erleichternd, oder aber als verwirrend und komplizierend empfinden. Desgleichen wurden die Studierenden aufgefordert, erforderlichenfalls Fragen zu geometrischen Sachverhalten zu stellen und selbst einzuschätzen, ob ihre Begründungen und Beweisführungen ausreichend und schlüssig oder noch lückenhaft und unzureichend waren.
Da sich im Nachhinein herausstellte, dass die Bearbeitung der unterschiedlichen Aufgaben unterschiedlich ergiebig war, kommen die Aufgaben in der Auswertung unterschiedlich oft vor. So war die Bearbeitung von Aufgabe 2, die in der Regel nicht sehr viel Zeit beanspruchte, weshalb sie meist als Zusatzaufgabe genutzt wurde, nicht sehr aufschlussreich, so dass ich mich dafür entschieden habe, keine Analyse dieser Aufgabe niederzuschreiben.

4.2.2 Das Leitfadeninterview

Im Anschluss an die Aufgabenbearbeitung stellte ich den Probanden Fragen entlang eines vorbereiteten Interviewleitfaden. Diese Methode wird in der qualitativen Sozialforschung den teilstandardisierten Interviews zugerechnet (vgl. beispielsweise Flick *et al.* 1995; Mayring 1999).
Beim standardisierten Interview werden die Reihenfolge und der Wortlaut der Fragen genau festgelegt, bei Verständnisproblemen wird auf Erklärungen verzichtet und stattdessen die Frage im gleichen Wortlaut wiederholt, mit dem Ziel, Vollständigkeit und Vergleichbarkeit der Antworten in hohem Maße zu garantieren. Häufig werden auch Antwortvorgaben gemacht, aus denen die oder der Interviewte dann die für sie oder ihn passende auswählen kann bzw. muss. Vielfach geht es dabei darum, die Ergebnisse zu quantifizieren und statistischen Auswertungsverfahren zugänglich zu machen. Demgegenüber ist das freie Interview ungelenkt. Das Leitfadeninterview liegt irgendwo zwischen diesen beiden Prototypen, indem ein Fragenkatalog vorhanden ist, aber keine Antwortauswahlen vorgegeben sind und die Reihenfolge der Fragen nicht zwingend eingehalten werden muss. Zudem ist es dem Interviewer jederzeit gestattet, nach eigenem Ermessen Nachfragen zu stellen oder auf bedeutsam erscheinende Aspekte, die vom Interviewten selbst eingebracht wurden, näher einzugehen. Dies unterstreicht die Bedeu-

tung, die Sprache und Kommunikation für die qualitative Forschung einnehmen. So formuliert Mayring (1999, S.49): „Subjektive Bedeutungen lassen sich nur schwer aus Beobachtungen ableiten. Man muß hier die Subjekte selbst zur Sprache kommen lassen; sie selbst sind zunächst die Experten für ihre eigenen Bedeutungsgehalte."

4.3 Auswertung der Interviews

4.3.1 Transkriptionsregeln

Im Anschluss an die Interviews wurden die Audioaufzeichnungen transkribiert. Dabei wurden als erstes die Klarnamen gegen Pseudonyme ausgetauscht, so dass bereits während des Transkribierens nicht mehr offensichtlich war, wessen Äußerungen gerade dokumentiert wurden. Die Äußerungen wurden, der deutschen Grammatik entsprechend, mit Satzzeichen versehen, d.h. Kommata eingesetzt und Betonungen am Satzende in einem Punkt, einem Fragezeichen oder auch einem Ausrufezeichen fixiert. Einflüsse von vorhandenen Dialekten wurden nicht beachtet (wenn beispielsweise ein Proband ein „g" wie „ch" ausspricht, was häufiger in Ostwestfalen zu hören ist, wurde dies nicht mit transkribiert. Statt des gesprochenen „der Schnittpunkt ist wech" ist im Transkript „der Schnittpunkt ist weg" zu lesen).
Im Folgenden werden die in den Transkripten verwendeten Kennzeichnungen dargestellt:

(.) Pause von einer Sekunde Dauer

(..) Pause von zwei Sekunden Dauer

(...) Pause von drei Sekunden Dauer

6 Sek. Pause Pause mit längerer Dauer als drei Sekunden

<u>sehen</u> betontes Wort

(lacht) Beschreibung einer Handlung, Geste oder ähnlichem

? Stimme hebt sich

! resolute Äußerung

. Stimme senkt sich

4.3.2 Die Interpretationstechnik der Objektiven Hermeneutik

Anschließend wurden die Transkripte in Anlehnung an die Objektive Hermeneutik interpretiert. In diesem Abschnitt möchte ich einige kurze Ausführungen zur Methodologie, den Prinzipien und der Praktischen Durchführung der Objektiven Hermeneutik machen.

Methodologie

Diese Interpretationstechnik, die wesentlich auf Ulrich Oevermann zurückgeht, ist nach Wernet (2009, S.11) „ein Verfahren der Textinterpretation mit dem Anspruch, die Geltung der Interpretation an intersubjektive Überprüfbarkeit zu binden". Dabei spielen Texte als „*Protokolle* der Wirklichkeit" (Wernet 2009, S.12) eine entscheidende Rolle:

> „Die Objetkive Hermeneutik geht davon aus, dass sich die sinnstrukturierte Welt durch Sprache konstituiert und in Texten materialisiert. Der Gegenstand der sinnverstehenden Wissenschaften bildet sich erst durch die Sprache und tritt in Texten in Erscheinung. Die soziale Wirklichkeit ist textförmig. Diese Annahme der Textförmigkeit sozialer Wirklichkeit markiert zugleich den methodischen Zugang. Eine verstehende, methodisch kontrollierte Wirklichkeitserforschung *ist* Texterforschung. *Wirklichkeitswissenschaft ist Textwissenschaft*" (ebenda, S. 11f).

„Dabei handelt es sich bei der schriftlichen Fixierung nicht um eine Neuschaffung, sondern um das Festhalten einer immer schon textförmig strukturierten Welt" (Wagner 2001, S.87). Da sich soziales Handeln regelgeleitet konstituiert, können die Texte als Protokolle dieses Handelns unter Kenntnis dieses Regelwissens interpretiert werden, wodurch die Interpretation eine gewisse Verbindlichkeit erlangt, so dass verschiedene Interpretinnen und Interpreten ein und desselben Textes, wenn sie keine groben Fehler begehen, prinzipiell zum selben Ergebnis kommen sollten.
Ein wesentliches Element der Objektiven Hermeneutik ist die Rekonstruktion der Fallstruktur:

> "Die Objektive Hermeneutik geht davon aus, dass die Handlungsoptionen einer je konkreten Lebenspraxis durch Regeln formuliert sind. Welche Möglichkeiten vorliegen und welche Folgen welche Möglichkeiten zeitigen, darüber befindet nicht die Handlungspraxis, sondern darüber hat die Welt der sozialen Regeln schon

> vorgängig befunden. Welche der durch Regeln eröffneten Handlungsoptionen realisiert wird; das entscheiden nicht die Regeln, sondern die Fallstruktur“ (Wernet 2009, S.15).

Wernet macht dies am Beispiel eines Versprechens deutlich: Durch unser Regelwissen können wir eindeutig sagen, was ein Versprechen ist. Die Regeln garantieren aber nicht, dass ein Versprechen auch eingelöst wird, sondern eröffnen zugleich die Handlungsoptionen des Einlösens und des Nichteinlösens. Die Wahl, die dann vom Subjekt getroffen wird, unterliegt nicht mehr den Regularien, sondern ihm. Kann bei dieser Wahl des Individuums eine gewisse Systematik entdeckt werden, spricht man von der *Fallstruktur*: „Der Strukturbegriff verweist darauf, dass die Selektionen, die eine Lebenspraxis vornimmt, nicht beliebig sind und nicht zufällig variieren. [...] *Die objektiv-hermeneutische Textinterpretation zielt auf die Rekonstruktion der Strukturiertheit der Selektivität einer protokollierten Lebenspraxis*“ (Wernet 2009, S.15). Und Oevermann (1993, S.115 f) führt aus: „So wie die Einzelhandlung schon immer eine Abstraktion von der Praxis der sozialen Kooperation darstellt, so gilt der objektiven Hermeneutik der subjektiv gemeinte Sinn als Derivat des schon immer objektiv gegebenen Sinns einer immer schon durch Regeln der Bedeutungsgenerierung koordinierten Sequenz von Einzelhandlungen, einer sequenzierten sozialen Kooperation also.“

Bei der Rekonstruktion der Fallstruktur geht die Objektive Hermeneutik davon aus, „dass ein Text Bedeutungsstrukturen generiert, die jenseits des Selbstverständnisses und Selbstbildes einer sozialen Praxis liegen und die sich nicht in den Meinungen, Intentionen oder Wertorientierungen dieser Praxis erschöpfen“ (Wernet 2009, S.18). Dies hat zur Folge, dass die Texte nicht im Hinblick darauf interpretiert werden, was Motive und Intentionen der Beteiligten gewesen sein könnten. Beim Interpretieren wird also nicht der Versuch unternommen, sich in die sprechende Person hineinzuversetzen und daraus Deutungen für die Äußerungen zu generieren. Stattdessen wird versucht, neben der manifesten auch die latente Sinnstruktur des Textes unter Anwendung des vorhandenen Regelwissens zu ergründen.

> “Zentraler Gegenstand der Methodologie der objektiven Hermeneutik sind die latenten Sinnstrukturen und objektiven Bedeutungsstrukturen von Ausdrucksgestalten, in denen sich uns die psychische, soziale und kulturelle Erfahrungswelt präsentiert. Latente Sinnstrukturen und objektive Bedeutungsstrukturen sind jene abstrak-

> ten, d.h. sinnlich nicht wahrnehmbaren Gebilde, die wir alle mehr oder weniger gut und genau „verstehen“, wenn wir uns verständigen, Texte lesen, Bilder und Bewegungsabläufe sehen, Ton- und Klangsequenzen hören, und die durch bedeutungsgenerierende Regeln erzeugt werden und unabhängig von unserer je subjektiven Interpretation objektiv gelten. Die objektive Hermeneutik ist ein Verfahren, diese objektiv geltenden Sinnstrukturen intersubjektiv überprüfbar je konkret an der les-, hör- und sichtbaren Ausdrucksgestalt zu entziffern“ (OEVERMANN 1996, S.1).

Als Beispiel für eine Verwerfung zwischen latenter und manifester Textstruktur sei das folgende Gespräch zwischen Lehrer und Schüler wiedergegeben, das WERNET (2009, S.47ff) anführt und interpretiert:

S: Wann geben Sie uns die Klassenarbeiten wieder?
L: Nächste Woche.
S: Oh, Sie haben sie doch schon 3 Wochen.
L: Und wenn ich sie 5 Wochen hätte.
S: Meine Mutter denkt schon, ich hätt die weggeschmissen.

Auf der latenten Ebene liegt diesem Dialog ein Problem zugrunde, welches sich in der manifesten Ebene nicht zeigt. Dennoch können wir als Mitglieder ein und derselben Sprachgemeinschaft und der daraus resultierenden Kenntnis des Regelwissens den Konflikt erkennen und interpretieren und den Sinn des Dialoges deuten. Dieses Verstehen wird nach MEYERHÖFER (2005) zwar nicht ausschließlich von der Objektiven Hermeneutik geleistet, gleichwohl:

> „Objektive Hermeneutik ermöglicht aber eine *systematische* Dechiffrierung auch der latenten Textebene und damit auch des *Zusammenspiels* von manifester und latenter Textebene, also der objektiven Bedeutungsstruktur des Textes. Sie ermöglicht außerdem eine *methodische Kontrolle* und damit eine *intersubjektive Überprüfung* dieser Dechiffrierung“ (ebenda, S. 67).

Prinzipien der Objektiven Hermeneutik

Zu den Prinzpien der Objektiven Hermeneutik gehören:
(1) Kontextfreiheit, (2) Wörtlichkeit, (3) Sequenzialität, (4) Extensivität und (5) Sparsamkeit. Nachfolgend möchte ich die Begriffe in aller Kürze vorstellen.

Kontextfreiheit

Wie gesagt, werden in der Objektiven Hermeneutik Texte als Protokolle der Wirklichkeit aufgefasst. Es ist ein wichtiges Prinzip der Textinterpretation im Sinne der Objektiven Hermeneutik, den Text zunächst kontextfrei zu interpretieren, so dass er damit quasi als „eigenständiges Wirklichkeitsgebilde" (WERNET 2009, S.22) gewürdigt wird. Zugleich soll damit der Gefahr begegnet werden, dass der Text ausschließlich im Zusammenhang mit dem Kontext gesehen und dass dadurch bedingt das damit einhergehende Vorwissen einbezogen wird und somit keine Textanalyse, sondern eine Kontextanalyse stattfindet. Erst nach einer kontextfreier Interpretation des Textes wird der Zusammenhang zum Kontext wieder hergestellt. „Die Kontextuierung ist der kontextfreien Bedeutungsexplikation systematisch nachgeordnet. Erst durch diese Nachordnung werden die beiden Dimensionen analytisch unabhängig" (ebenda, S. 21f). Denn wenn die Interpretation durch das Vorwissen beeinflusst werden würde, könnten dadurch Zirkelschlüsse entstehen oder Besonderheiten übersehen werden. „Wenn die Interpretation von dem Vorverständnis lebt und abhängig ist, dann ist sie in dessen Belieben gestellt. Diese Beliebigkeit gilt es zu vermeiden. Aus dieser Perspektive besteht der Sinn der kontextfreien Interpretation darin, gegenüber einem nicht-wissenschaftlich gewonnenen Vorverständnis größtmögliche Unabhängigkeit zu wahren" (ebenda. S. 23).

Wörtlichkeit

„Das Prinzip der Wörtlichkeit besagt, dass die Bedeutungsrekonstruktion den tatsächlich artikulierten Text in seiner protokolliert vorliegenden Gestalt nicht ignorieren darf, auch und gerade dann nicht, wenn innertextliche Widersprüch auftreten" (WERNET 2009, S.23). Dies bedeutet, dass man nicht einfach Textpassagen außer Aucht lassen oder Korrekturen, beispielsweise, wenn ein Versprecher vorliegt, vornehmen darf, da man durch diese Eignriffe „den Text als wissenschaftliche Datenbasis missachten" (ebenda, S. 24) würde.
In der Regel kommt das Prinzip der Wörtlichkeit nur dann zum Tragen, wenn es einen Bruch

zwischen intendiertem und tatsächlich gesprochenen Text gibt. Denn an dieser Stelle kann ein Bruch zwischen manifester und latenter Sinnstruktur des Textes vorliegen. Würde nur der intendierte Text interpretiert, ginge die latente Bedeutung der Äußerung verloren, was im Widerspruch zur Zielsetzung der Objektiven Hermeneutik steht: „Die methodologische Grundausrichtung der Objektiven Hermeneutik als Verfahren der Rekonstruktion *latenter Sinnstrukturen*, vor allem in Abgrenzung zu einer inhaltsparaphrasierenden und auf Aussage- und Sprecherintention orientierten Text- und Sinninterpretation, findet im Prinzip der Wörtlichkeit seinen methodentechnischen Niederschlag. Wer den Text beim Wort nimmt, hat schon durch diese einfache Operation den entscheidenden Schritt getan, die Beschränkungen einer intentional-deskriptiven Interpretation zu überwinden“ (ebenda, S. 26). Somit wirkt das Prinzip der Wörtlichkeit unterstützend bei dem Ziel, die erforderliche Distanz zum Text dadurch zu wahren, dass nicht die eigenes Lebenswelt und Blickweise mit in die Interpretation einfließen.

Sequenzialität

Das Prinzip der Sequenzialität ist für die Objektive Hermeneutik derart bedeutsam, dass die Vokabel „Sequenzanalyse“ von Oevermann häufig verwendet wird, um diese zu beschreiben (vgl. Wernet 2009). In der Praxis bedeutet das Prinzip schlicht, dass die Interpretation eines Textes streng dem Ablauf desselben folgt. Was sich zunächst trivial anhört, hat eine tiefer gehende Bedeutung: unzulässig ist so nämlich, für die Erklärung von Textpassagen den nachfolgenden Text zur Deutung heranzuziehen. Diese Versuchung entsteht beim Interpretieren eines Textes häufiger, als man denkt, gerade dann, wenn sich der Text sperrig gibt. Wenn man dieser Versuchung nachgibt, begeht man einen eklatanten Regelverstoß: „Damit verlässt man aber die methodisch kontrollierte Interpretation. Die eigene Interpretationsschwierigkeit delegiert man an die Interpretationsvorschläge, die der Text selbst ausspricht. Statt die Strukturlogik des Falls zu rekonstruieren, setzt man die Selbsteinschätzung des Falls als Interpretationsergebnis“ (Wernet 2009, S.29).

Die Forderung nach Sequenzialität wird verständlich, wenn man sich noch einmal die Grundannahme der Objektiven Hermeneutik vor Augen führt, dass ein Text Bedeutungsstrukturen geneniert (siehe Abschnitt Methodologie). Ein Sprecher entscheidet sich an jeder Sequenzstelle eines Textes für **eine** Möglichkeit, diesen fortzuführen, (und damit gegen viele andere Möglichkeiten), und gibt damit dem Text eine ganz bestimmte Bedeutungsstruktur. Diese

besteht bereits, bevor der nachfolgende Text gesprochen wird und könnte bei dessen vorzeitiger Betrachtung anders, schlimmstenfalls verfälscht analysiert werden. Wernet (2009, S.28f) macht dies an einem einfachen Beispiel klar: Bei einem aus Frage und darauf folgender Antwort bestehendem Dialog ist es wichtig, zunächst die Frage, ohne Blick auf die Antwort, zu interpretieren. Die Interpretation der Antwort hingegen macht nur Sinn, „wenn die Bedeutung der vorausgegangenen Frage geklärt ist."
In den Worten Meyerhöfers (2005, S.68f):

> „Nichtsequentiell arbeitende Hermeneutiken verzichten auf die konsequente Ausdeutung einer Knotenentscheidung, sie generieren aus einer Textstelle eine Hypothese und suchen dann im Text nach Beleg- oder Widerlegungsstellen für diese Hypothese. Sie benutzen den Text also als eine Art Selbstbedienungsladen oder Steinbruch für Argumente für oder gegen ihre Hypothese. Forschungspsychologisch birgt das die Gefahr eines auf die Hypothese verengten Blicks in sich: Von der Selbstkritikfähigkeit des Forschers hängt ab, ob der Text noch eine Chance hat, sich gegen die Hypothese durchzusetzen. Schwerer wiegt, dass auf diese Weise manifeste Textelemente eher wahrgenommen werden als latente, dass die Chance auf eine konsequente, detaillierte und erkenntnisreiche Feinanalyse der Knotenentscheidung verspielt wird und dass keine Strukturgesetzlichkeit erarbeitet wird - dass also die Erkenntnishaltigkeit einer solchen Erarbeitung nicht genutzt wird."

Extensivität

Mit der Methode der Objektiven Hermeneutik werden in der Regel nur kurze Textpassagen, diese aber sehr penibel interpretiert. Diese Vorgehensweise rechfertigt sich durch die bereits beschriebenen Strukturvorstellungen und die Grundannahme, dass es „keine Äußerungsform eines sozialen Gebildes" gibt, „das die Sinnstrukturiertheit verlassen könnte" (Wernet 2009, S.32). Damit findet sich diese Struktur prinzipiell in allen Äußerungen eines Individuums wieder und kann auch prinzipiell an einer beliebigen Äußerung des Individuums herausgearbeitet werden. „Die Rekonstruktion der Strukturlogik beansprucht, das Ganze des Gebildes im Sinne der dieses Gebilde hervorbringenden Strukturprinzipien zu rekonstruieren. Diese strukturrekonstruktive Operation lässt sich an geringen Datenmengen *vollständig* durchführen. Die Triftigkeit und Aussagekraft der *extensiven Feinanalyse* bemisst sich an der *Qualität* der Interpretation, nicht an der *Quantität* des einbezogenen Datenmaterials“ (ebenda, S.33). Zur Qualität der Interpretation, die das Extensivitätsprinzip verlangt, gehört aber nicht nur das Vollständigkeitsgebot, d.h. das Prinzip, **alles** zu interpretieren, sondern dies auch in aller Ausführlichkeit zu tun. Dies bedeutet, alle möglichen Lesarten für eine Sequenz in Betracht zu ziehen. Wernet (2009, S.34) unterstreicht dies in aller Schärfe: „Eine Textsequenz nicht auszuinterpretieren führt regelmäßig dazu, dass die sequenzanalytische Feinanalyse misslingt.“

Sparsamkeit

Das Prinzip, alle möglichen Lesarten für eine Textsequenz zu betrachten, wird jedoch durch das Prinzip der Sparsamkeit dahingehend eingeschränkt, „dass nur solche Lesarten gebildet werden dürfen, die ohne weitere Zusatzannahmen über den Fall von dem zu interpretierenden Text erzwungen sind“ (Wernet 2009, S.35). Dies bedeutet, dass eine Lesart nicht zulässig ist, wenn sie nur unter einer bestimmten Vorannahme Sinn macht, auf die die Textsequenz aber keinen Hinweis gibt. Wernet (2009, S.35f) erläutert dies am Beispiel des oben wiedergegebenen Dialogs von Schüler und Lehrer. Darin stellt der Schüler zu Beginn die Frage: „Wann geben Sie uns die Klassenarbeiten wieder?“ Hierbei ist es unzulässig, dies derart zu deuten, dass der Schüler diese Frage nur stellt, um den Lehrer zu ärgern und ihn vom eigentlichen Unterricht abzulenken, denn die Frage als solche gibt keinerlei Hinweis darauf, dass dies der Fall ist. Damit ist das Prinzip der Sparsamkeit ein Regulativ gegenüber den zuvor beschriebenen Prinzipien.

> „Aus forschungspsychologischer Perspektive stehen sich die Prinzipien der Wörtlichkeit, Kontextfreiheit und Extensivität einerseits und der Sparsamkeit andererseits eigentümlich entgegen. Insbesondere das Wörtlichkeitsprinzip ist dort von besonderer Bedeutung, wo der Interpret dazu neigt, „Fünfe-gerade-sein-zu-lassen“ und fordert ihn dazu auf, die tatsächliche Gestalt des Textes reichhaltig auszudeuten. Es ermutigt zu weitreichenden Schlussfolgerungen. Das Sparsamkeitsprinzip dagegen wendet sich gegen die Tendenz, weitreichende Schlussfolgerungen unbegründet und voreilig zu ziehen. Die alltagsweltlichen Gewissheiten neigen dazu, sich dem Datenmaterial überzustülpen. Das Sparsamkeitsprinzip arbeitet dieser Tendenz entgegen“(Wernet 2009, S.37).

Der Dreischritt bei der Objektiv-Hermeneutischen Interpretation

Die praktische Durchführung einer Objektiv-Hermeneutischen Textinterpretation gliedert sich in drei Schritte: (1) *Geschichten erzählen*, (2) *Lesarten bilden* und (3) *Konfrontation der Lesarten mit dem Kontext*. Diese Schritte sollen im Folgenden kurz erläutert werden.
(1) *Geschichten erzählen*
Zu einer vorliegenden Textsequenz werden Geschichten erzählt, in denen diese Textsequenz sinnhaft vorkommen könnte. Natürlich werden dabei die zuvor genannten Prinzipien der Objektiven Hermeneutik berücksichtigt. An die Geschichten werden dabei zwei Forderungen gestellt, nämlich:

1. Sie spielen sich in einem anderen Kontext als die zu interpretierende Textsequenz ab.

2. Die Textsequenz fügt sich sprachlich wohlgeformt in die jeweiligen Geschichten ein.

Auf diese Weise kann man viel über die Bedeutung der Textsequenz erfahren, ohne dass die durch den Kontext möglicherweise getätigten Vorannahmen einen Einfluss nehmen könnten.
(2) *Lesarten bilden*
Ist man dem Prinzip der Extensivität gerecht geworden und hat alle möglichen Geschichten gefunden, stellt man fest, welches ihre gemeinsame Struktur ist. Dabei kann es vorkommen, dass es keine Unterschiede innerhalb der Struktur gibt, es also nur ein Muster gibt. Es kann aber auch sein, dass es mehrere Strukturen gibt. Nach WERNET (2009, S.39) gibt es häufig zwei oder drei Bedeutungstypen, aber selten mehr. Auf diese Art und Weise wird die Bedeutung der Textsequenz unabhängig vom konkreten Fall und Kontext herausgearbeitet.
(3) *Konfrontation mit dem Kontext*
Zum Schluss werden die gefundenen Lesarten „mit dem tatsächlichen Äußerungskontext und der darin eingelassenen Aussageintention des Textes" (WERNET 2009, S.40) konfrontiert. Hierdurch erhellt sich die Besonderheit des Falls, und eine Fallstrukturhypothese kann generiert werden.
Im weiteren Verlauf der Interpretation werden die jeweils nachfolgenden Textsequenzen dann dahingehend interpretiert, ob die gefundene Fallstrukturhypothese bestätigt werden kann oder modifiziert oder gar falsifiziert werden muss. Im letzteren Fall ist dann eine neue Fallstrukturhypothese zu entwickeln, die selbstverständlich wieder am Text überprüft werden muss.
Der besseren Lesbarkeit von Objektiv-Hermeneutischen Interpretationen willen wird im all-

gemeinen auf die schriftliche Darstellung der erzählten Geschichten verzichtet. Dies halte ich im Folgenden genauso.

Kapitel 5

Fallstudien zu „DGS und Beweis“

Eine zentrale Fragestellung der Arbeit ist, inwieweit der Einsatz einer DGS das Beweisverständnis und/oder das Beweisbedürfnis der Studierenden beeinflusst oder verändert. In den Interviews wurde deshalb die Frage gestellt, ob eine dynamische Visualisierung durch eine DGS einen formalen Beweis ersetzen kann, wobei Bezug auf das Beispiel des Thalessatzes genommen wurde. Konkret wurde die Frage gestellt, ob man einen Beweis des Satzes dadurch führen kann, dass man ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel in C mit einer DGS konstruiert und anschließend den Punkt C auf dem Umkreis wandern lässt, während man beständig den Winkel in C misst.
Genau dieses Beispiel behandelt auch Schupp (2010, S.111).

> „Dazu zweierlei. Erstens ist ein derart erreichter Kenntnisstand (ich habe alle bzw. mir als alle erscheinenden Fälle überprüft, bin jetzt selbst überzeugt und kann auch andere davon überzeugen, dass es so ist) keineswegs als gering zu erachten und jedenfalls einem Induktionsschluss aus wenigen Fällen überlegen. Zweitens aber besteht durch den anschließenden Beweis, hier über die Zerlegung des rechtwinkligen Dreiecks in zwei gleichschenklige, die Chance, aufzuzeigen, warum es so sein *muss*. Dieser Übergang vom Assertorischen ins Apodiktische, dieser „dauernde Gedanke“ sollte im Geometrieunterricht der Sek I immer wieder versucht werden. Er muss es eigentlich schon deshalb, weil unsere Schüler in unterschiedlichem Maße und zu unterschiedlicher Zeit von seiner sinnstiftenden Notwendigkeit (eigentlich besser: „Scheinwendigkeit“) überzeugt werden. Nur so lässt sich übrigens auch rechtfertigen, dass wir zuweilen Mehrfachbeweise machen.“

Für Schupp stellt sich demnach überhaupt nicht die Frage, den anschließenden Beweis wegzulassen. Stattdessen liefert dieser für ihn andere Erkenntnisse als die Visualisierung. Die Überzeugung, **dass** der Sachverhalt stimmt, wird auch ohne formalen Beweis gewonnen, die Frage nach dem „**Warum?**“ und den Zusammenhängen hingegen wird von diesem, und nur von diesem geklärt. In diesem Zusammenhang regt Schupp an, zusätzlich Winkel in Punkten zu betrachten, die außerhalb des Thaleskreises liegen und immer spitz zu sein scheinen. Hier könne die Nutzung des Zugmodus, wie in Abbildung 5.1 dargestellt ist, einen wichtigen Schritt hin zum Beweis liefern: „Geeignetes Ziehen von C bringt die Lösung. △ CDB ist rechtwinklig und daher ∠ CDB spitz. Dynamisieren kann also durchaus auch zum Beweis hinführen“ (Schupp 2010, S.111)

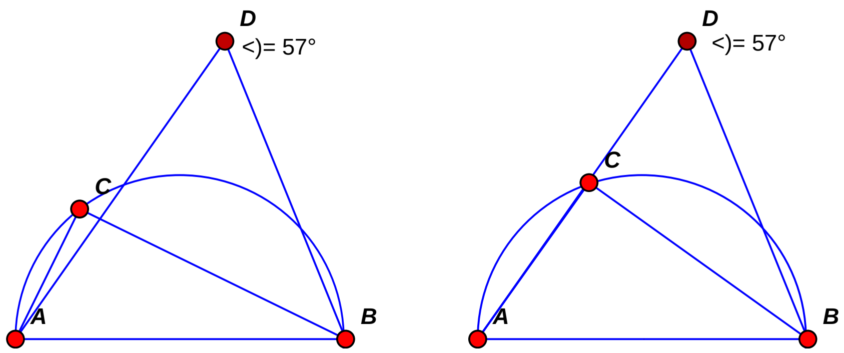


Abbildung 5.1 – *Hinführung zum Beweis durch Dynamisieren aus (*Schupp *2010)*

5.1 Ausgewählte Interpretationen

Im Folgenden führe ich an einigen ausgewählten Interviewsequenzen Interpretationen im Sinne der Objektiven Hermeneutik durch, um den Vorstellungen der Studierenden zum Beweisbegriff im Zusammenhang mit DGS auf den Grund zu gehen. Insbesondere steht dabei auch auf dem Prüfstand, inwieweit sich die Studierenden die o.a. optimistische Überzeugung Schupps zu eigen gemacht haben. Zunächst möchte ich aber auf meine konkrete Fragestellung und mögliche damit verbundene unterschwellige Prämissen eingehen.
Die Eingangsfrage lautet: „Kann die dynamische Visualisierung des Satzes des Thales für dich einen Beweis ersetzen?“ Dabei wird offen gelassen, welche Funktion ein Beweis hat und was überhaupt ein Beweis ist. Demzufolge ist auch der Anspruch, dem eine dynamische Visualisie-

rung genügen müsste, um einen Beweis ersetzen zu können, nicht eindeutig festgelegt. Daher ist es zunächst erst einmal grundsätzlich möglich, dass eine Person, für die ein Beweis ausschließlich ein Mittel zur Verifikation darstellt, diese Frage anders beantwortet, als eine Person, für die ein Beweis erklären soll, warum etwas gilt, oder die sich durch den Beweis einen Überblick über den Sachverhalt im Sinne des lokalen Ordnens verschaffen will. Der Zusatz „für dich" unterstreicht, dass eine persönliche Einschätzung der interviewten Person gefragt ist, und impliziert damit zugleich, dass verschiedene Antworten möglich sind. Hierdurch sollen sich die Probanden unbefangen äußern können, wobei natürlich eingeräumt werden muss, dass die Interviewten doch versuchen könnten, die Antwort an der potenziellen Erwartungshaltung der Interviewerin auszurichten. Durch die Methode des leitfadenzentrierten Interviews soll dies minimiert werden, da in dieser Nachfragen jederzeit möglich sind, so dass, falls ein solcher Eindruck entstünde, auf diese Art und Weise Klärung erreicht werden könnte.

Gleichzeitig wird durch die Formulierung der Frage eine Hierarchie zwischen Beweis und dynamischer Visualisierung aufgebaut: Die „Qualität" des zu Ersetzenden (des formalen Beweises) ist über jeden Zweifel erhaben, die „Qualität" des Ersatzes (der dynamischen Visualisierung) möglicherweise noch nicht so eindeutig zu verorten. Übersetzt in den inhaltlichen Kontext bedeutet dies, dass der Stellenwert eines Beweises aus fachmathematischer Sicht, bezogen auf die klassischen Sätze der Geometrie, unstrittig ist. Der Stellenwert der dynamischen Visualisierung jedoch könnte in diesem Zusammenhang für die Studierenden nicht so klar einzuschätzen sein. Die Interviewten werden folglich bereits durch die Formulierung der Frage latent damit konfrontiert, dass die Interviewerin dem Beweis Wertschätzung entgegenbringt, während die Würdigung, die sie einer dynamischen Visualisierung zuteil werden lässt, nicht eindeutig eingeschätzt werden kann.

5.1.1 Fallstudie „Charlotte“

Der folgende Interviewauszug entstammt dem Interview mit Charlotte, einer Studierenden im dritten Semester, die zum Zeitpunkt des Interviews die Vorlesung „Elemente der Geometrie“ zum zweiten Mal belegt, da sie die zugehörige Zwischenprüfungsklausur beim ersten Mal nicht bestanden hat.

```
 I: Kann die dynamische Visualisierung des Satz des Thales für dich einen Beweis ersetzen?
Ch: (...) Mmm (8 sec Pause). Also im ersten Moment würde ich ,,Ja‘‘ sagen,
 I: Ja.
Ch: weil man es eben (.) direkt vor sich hat,
 I: Hmh. Ja.
Ch: Aber (..) wenn man sich das genauer überlegt, und, wie ich eben auch schon gesagt hatte, wenn man einfach irgendetwas hinzieht, dann kann das ja auch ungenau sein, dann müsste man, glaube ich, das nochmal speziell beweisen.
 I: Hmh. Hättest du denn, wenn du es jetzt so siehst, auf dem Thaleskreis, es bleibt immer 90 Grad, noch Zweifel daran, dass es so ist?
Ch: (..) Mm. (.) Das ist schwierig zu sagen. Ehm, man ist da, glaube ich, auch so’n bisschen so, ja, wenn man’s sieht, dann wird es wohl schon so sein. Und, ehm, ja, vielleicht ist man da auch ein bisschen bequem und vertraut einfach auf das Programm und sagt sich dann: Ja, das stimmt schon, (..) aber ich (.) würde mal vermuten, wenn man (.) sich nochmal (.) das genauer hinterfragt, wär das schon besser.
 I: Was würd das noch zusätzlich bringen?
Ch: Ja, dann, da hätte man ne (.) Gewissheit, eben, dass das (.) wirklich so ist. Also man, wie ich schon sagte, man hat diese (.) mathematischen Sätze vorgegeben, und bestimmte (.) Regeln und das ist so und das ist so, und, wenn man das dann damit nochmal beweisen kann, (.) dann denke ich mal, dass das dann auch 100-prozentig so ist.
 I: Hmh. Also nur das Sehen würd dir jetzt nicht reichen?
```

```
Ch: Im ersten Moment schon, aber dann denke ich mal nicht, ne.
```

Charlotte zögert lange, bevor sie eine Antwort gibt. Schließlich erwidert sie:

```
Ch: (...) Mmm (8 sec Pause). Also im ersten Moment würde ich ,,Ja‘‘
    sagen,
```

Charlottes Äußerung lässt den Schluss zu, dass sie sich mit einer neuen inhaltlichen Überlegung konfrontiert sieht, wobei dieses Neue anscheinend überraschend von außen an sie herangetragen wird. Bei der Überraschtheit kann es sich grundsätzlich um eine zeitliche oder um eine inhaltliche handeln, was bemerkenswert ist, da Charlotte weder zeitlich noch inhaltlich von der Frage überrascht sein sollte: Zeitlich nicht, da sie vor ihrer Teilnahme an der Studie über die inhaltliche Ausrichtung der Interviews informiert worden ist, inhaltlich nicht, da die „Beweiskraft“ einer dynamischen Visualisierung in der von ihr besuchten Vorlesung an verschiedenen Stellen thematisiert worden ist.
Trotz ihrer, für ein Zwiegespräch sehr langen, Pause von 8 Sekunden sieht Charlotte sich nicht in der Lage, die Situation angemessen zu analysieren, sondern scheint das Gefühl zu haben, spontan oder zumindest zeitnah eine Einschätzung der Situation abgeben zu müssen, ohne diese einer sachlichen Untersuchung unterziehen zu können, sei es mangels Hilfsmittel oder fehlender zusätzlicher Informationen von außen. Die alternativen Aussagen: „Oh, lass uns mal überlegen, was ein Beweis ist“, oder etwas lapidar: „Ja, die DGS kann einen Beweis ersetzen“, zieht sie nicht in Betracht. Stattdessen gibt sie zu verstehen, dass sie mit der Antwort überfordert ist und keine fundierte Überlegung anstellen kann, sondern lediglich eine unsichere, bezüglich der Begründung nicht durchdachte Einschätzung, bei der deutlich die Ahnung mitschwingt, dass diese sich im Nachhinein als unangemessen erweisen kann. Die Nutzung des Konjunktivs („würde sagen“) signalisiert eine Distanzierung zum eigenen Sagen, hier zum „Ja“-Sagen. Dies spiegelt die Unsicherheit Charlottes bezüglich der Sache wider. Schon hier deutet sich die Existenz einer äußeren Instanz an, die in ihren weiteren Aussagen noch deutlicher hervortritt und die bei ihrer Entscheidung eine Rolle zu spielen scheint, ohne dass diese jedoch näher benannt wird. Denkbar wären beispielsweise der Professor aus Charlottes Lehrveranstaltung oder die „Community“ der Mathematikdidaktiker und -didaktikerinnen. Es kann auch

nicht ausgeschlossen werden, dass Charlotte der Erwartungshaltung der Interviewerin an dieser Stelle gerecht werden will, deren Wertschätzung gegenüber der dynamischen Visualisierung, wie eingangs herausgearbeitet, nicht klar bestimmt werden kann. Deutlich wird jedenfalls, dass Charlotte sich selbst nicht in der Lage sieht, zu entscheiden, welchen Anforderungen ein Beweis genügen muss, sie ist hier auf eine Vorgabe von außen angewiesen.

```
6   Ch: weil man es eben (.) direkt vor sich hat,
```

Das „weil“ verweist darauf, dass Charlotte davon ausgeht, ihre Einschätzung begründen zu müssen. Dabei fußt ihre Begründung auf dem direkten und umittelbarem Zugang, der durch die dynamische Visualisierung möglich ist. Dieser derart direkte Zugang bedarf demzufolge keines Mittlers, ist somit quasi „un-vermittelt“. Dabei hat die Wortwahl „eben“ in diesem Kontext einen bekräftigenden und abschließenden Charakter: ein Sachverhalt ist „eben“ so, was hinzunehmen ist und keine weitere Hinterfragung erforderlich macht. Für Charlotte scheint durch die Visualisierung das Handlungsobjekt in seiner Gesamtheit direkt vor ihr zu liegen, ist dadurch nach Belieben verfügbar und lässt keine weiteren Fragen mehr offen, so dass der „un-vermittelte“ Zugang für sie bereits der Beweis **ist**.
Im Folgenden fasse ich das bisherige Ergebnis der Interpretation zur „Fallstrukturhypothese Charlotte“ zusammen.

Fallstrukturhypothese „Charlotte“
Die Einforderung einer eigenen Stellungnahme zum Verhältnis von DGS und Beweis lässt deutlich Charlottes fachliche Unfähigkeit zu einer sachlichen Analyse zu Tage treten. Dabei ist ihre Haltung geprägt von Distanz zum eigenen Sagen. Gleichwohl zeigen sich in ihren Äußerungen Andeutungen des Bewusstseins um eine äußere Instanz, deren Ansprüchen ein Beweis unterliegt. In pseudo-bewusster Abgrenzung zu diesen Ansprüchen spricht sie der geometrischen Darstellung der Situation mit einer DGS aufgrund des un-vermittelten Zugangs abschließend die Qualtität eines Beweises zu.

Überprüfung der Fallstrukturhypothese in den weiteren Textsequenzen

Die Fallstrukturhypothese wird nun mit den weiteren Äußerungen, die Charlotte im Verlauf der Interviewsequenz macht, abgeglichen, gegebenenfalls differenziert und auf Falsifikationsstellen hin überprüft.

```
Ch: Aber (..) wenn man sich das genauer überlegt, und, wie ich eben auch schon gesagt hatte, wenn man einfach irgendetwas hinzieht, dann kann das ja auch ungenau sein, dann müsste man, glaube ich, das nochmal speziell beweisen.
```

Zunächst relativiert Charlotte ihre Ansicht dahingehend, dass sie nun eine „*genauere Überlegung*“ (Z.8) in Betracht zieht, durch die ihre Eingangsabschätzung revidiert werden könnte. Die Formulierung „*glaube ich*“ (Z.10) ist eine weitere Bestätigung für die Unsicherheit, die Charlotte damit hat, einzuschätzen, ob ein Beweis logisch schlüssig bzw. gültig ist. Die Wendung „*dann müsste man*“ (Z.10) verdeutlicht ihre Orientierung an einer äußeren Instanz, wobei sie deren Anspruch an einen Beweis allerdings nur erahnt. Denn dass Ansprüche an einen Beweis durchaus unterschiedlicher Natur sein und höheren oder geringeren Forderungen unterliegen können, wird durch ihre Rede vom „*speziell beweisen*“ (Z.11) offenbar. Hier eröffnet sich ein erweiterter Blick auf Charlottes Verständnis des Begriffs „Beweis“ (vgl. Abbildung 5.2).

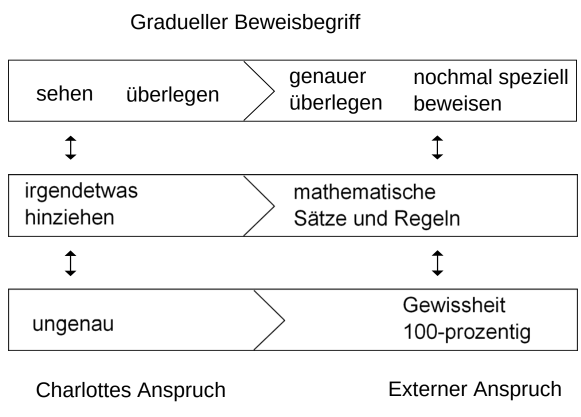


Abbildung 5.2 – *Rekonstruktion von Charlottes graduellem Beweisverständnis*

Das Beweisverständnis von Charlotte ist nicht dichotom in dem Sinne, dass eine Abfolge von Argumenten Beweiskraft oder keine Beweiskraft hat, sondern für sie existiert eine graduelle Abstufung zwischen diesen beiden Polen, indem es „Beweise“ unterschiedlicher „Genauigkeit“ gibt, abhängig vom jeweilig erforderlichen Bestätigungsgrad und vom jeweiligen Beweisbedürfnis.

I: Hmh. Hättest du denn, wenn du es jetzt so siehst, auf dem Thaleskreis, es bleibt immer 90 Grad, noch Zweifel daran, dass es so ist?

Ch: (..) Mm. (.) Das ist schwierig zu sagen. Ehm, man ist da, glaube ich, auch so'n bisschen so, ja, wenn man's sieht, dann wird es wohl schon so sein. Und, ehm, ja, vielleicht ist man da auch ein bisschen bequem und vertraut einfach auf das Programm und sagt sich dann: Ja, das stimmt schon, (..) aber ich (.) würde mal vermuten, wenn man (.) sich nochmal (.) das genauer hinterfragt, wär das schon besser.

Durch die Antwort: „*Das ist schwierig zu sagen*“ (Z.15) wird die Konfliktsituation, in der Charlotte sich befindet, deutlich. Wieder ist sie nicht in der Lage, die Frage mit „Ja“ oder „Nein“ zu beantworten, obwohl sie mit „*wenn man's sieht*“ (Z.16) auf den direkten Zugang verweisen kann. Stattdessen weicht sie einer Festlegung durch Formulierungen wie „*glaube ich*“, „*so'n bisschen so*“, „*wird es wohl schon so sein*“ und „*vielleicht*“ (Z.15-17) aus. Durch den mehrfachen Wechsel von der Ich-Form auf das unpersonale „man“ zeigt sich wiederum ihre Orientierung an einer äußeren Instanz. Schließlich ringt sie sich zu der Antwort „*wär das schon besser*“ (Z.18-21) durch. Dies ist sehr aufschlussreich in Bezug auf Charlottes ausgeprägte Passivität: Das genauere Hinterfragen *„wäre“* zwar *„schon besser“*, aber es wird deutlich, dass Charlotte keinen aktuellen Bedarf hat, dies dann auch tatsächlich umzusetzen, was durch die Nutzung des Konjunktivs noch unterstrichen wird. Die für sie fehlende Notwendigkeit einer „genaueren Hinterfragung“ bestätigt, dass für Charlotte durch das Sehen ein Status erreicht wird, der die Zweifel bezüglich der Rechtfertigung, dass der Winkel immer 90 Grad groß ist, ausräumt. Der Sachverhalt ist also für sie auch ohne „genaueres Hinterfragen“ bewiesen, so dass sich Charlottes Begriffsverständnis von Beweisen, wie es bereits in den vorangegangenen Aussagen angeklungen ist, an dieser Stelle bestätigt. In diesem Begriffsverständnis gibt es „Beweise“ unterschiedlicher Genauigkeit und unterschiedlicher „Beweis“kraft, die unterschiedlichen Ansprüchen genügen können, je nach dem, wie „genau“ man einen Beweis haben möchte. Die Formulierung: „*aber ich würde mal vermuten*“ (Z.18-19) weist darauf hin, dass dabei die „höhere Genauigkeit“ nicht von Charlotte selbst eingefordert wird, sondern dass sie die Erfahrung gemacht hat, dass in der „mathematischen Welt“, in der sie sich bewegt (Vorlesungen, Übungen, Klausuren) diese Forderung von außen an sie herangetragen wird. So zeigt sich auch an dieser Stelle bei Charlotte ein Bewusstsein um eine äußere Instanz, die die Autorität hat, einen bestimmten Grad an Genauigkeit einzufordern. Hier könnte es möglicherweise die Person der Interviewerin sein, der Charlotte unterstellt, einen höheren Anspruch an einen Beweis zu haben. Um dieser Instanz Genüge zu tun, *„wäre das schon besser, das genauer zu hinterfragen“* (Z.20-21).

```
I:  Was würd das noch zusätzlich bringen?
Ch: Ja, dann, da hätte man ne (.) Gewissheit, eben, dass das (.) wirklich so ist. Also man, wie ich schon sagte, man hat diese (.) mathematischen Sätze vorgegeben, und bestimmte (.) Regeln und das ist so und das ist so, und, wenn man das dann damit nochmal beweisen kann, (.) dann denke ich mal, dass das dann auch 100-prozentig so ist.
```

Auch hier zeigt sich wieder eine entfremdete und distanzierte Wahrnehmung von mathematischen Sätzen und Regeln. Diese sind von außen *„vorgegeben“* (Z.25) und sollen dafür verwendet werden, *„nochmal“* (Z.25) einen Beweis zu führen. Damit zeigt sich zum einen, dass Charlotte sich außerhalb dieser mathematischen Welt der Sätze und Regeln verortet: es wird von ihr verlangt, eine bestimmte Vorgehensweise an den Tag zu legen, ohne dass eine Sinnhaftigkeit dieser Vorgehensweise für sie deutlich wird. Stattdessen scheint Charlotte sich diesem Regelwerk bloß zu unterwerfen. Zum anderen wird zum wiederholten Mal das graduelle Beweisverständnis von Charlotte deutlich, in dem der erhöhte Anspruch gewisser Personen oder Autoritäten akzeptiert wird. Ebenso deutlich wird aber auch, dass Charlotte sich diesen höheren Anspruch nicht zu eigen macht, wodurch letztlich dessen Sinn für sie in Frage steht.

Auf die abschließende Frage, ob nur das Sehen jetzt nicht reichen würde, wählt Charlotte dieselben Worte wie eingangs: „*Im ersten Moment schon*“ (Z.30), und schließt dann an: „*aber dann denke ich mal nicht, ne*“ (Z.30). Die Erkenntnis, dass die Visualisierung allein nicht ausreichend sein wird, wird nicht von Charlottes innerer Überzeugung getragen, sondern von ihren Erfahrungen mit der „Mathematikwelt“, in der es einen höheren Anspruch als ihren eigenen gibt.

Modifizierte Fallstrukturhypothese „Charlotte“

Die Einforderung einer eigenen Stellungnahme zum Verhältnis von dynamischer Visualisierung und Beweis lässt offenkundig Charlottes fachliche Unfähigkeit zu einer sachlichen Analyse zu Tage treten. Dabei ist ihre Haltung geprägt von Passivität und Distanz zum eigenen Sagen. Deutlich zeigt sich in ihren Äußerungen, dass sie um eine etablierte äußere Instanz und deren Ansprüche weiß. In pseudo-bewusster Abgrenzung zu diesen Ansprüchen spricht sie der geometrischen Darstellung der Situation in einer DGS aufgrund des un-vermittelten Zugangs abschließend die Qualtität eines Beweises zu. Dabei gibt es in ihrer Vorstellung ein Spektrum von „Beweisen“ unterschiedlicher Genauigkeit und unterschiedlicher „Beweis“kraft. Während ihr eigener Anspruch an einen Beweis durch das „Sehen“, dem sie eine geringe Genauigkeit attestiert, befriedigt wird, ist ihr bewusst, dass in der „mathematischen Welt“ ein höherer Anspruch besteht. Die Existenz dieses höheren Anspruchs erkennt Charlotte an, ohne diesen sich selbst zu eigen zu machen.

5.1.2 Fallstudie „Diana“

Zum Zeitpunkt des Interviews studiert Diana auf das Grundschullehramt im zweiten Semester und besucht damit die Veranstaltung „Elemente der Geometrie“ zum ersten Mal. In der Klausur, die erst einige Wochen nach der Durchführung des Interviews geschrieben wurde, hat sie, gemessen am besten Klausurteilnehmer, nur ein Drittel der Punkte erzielt. Sie hat weder die Zwischenprüfung bestanden noch Grundkenntnisse nachgewiesen.

I: Kann diese dynamische Visualisierung für dich einen Beweis ersetzen?

D: Ja! Weil ich, äh, dadurch dass ich das sehe, ähäm, also zum Beispiel in der Vorlesung ...

I: Ja.

D: ...wurde das nochmal viel deutlicher als zum Beispiel, wir hatten das ja auch in der Schule. Aber da war das halt so, dass der Lehrer das (.) mit Kreide an die Tafel gemalt hat und dann halt seinen (.) Zirkel da hatte und sein Geodreieck, und (.) da konnte man sich halt diese Verschiebung nicht so vorstellen. Also zum Beispiel: Satz des Thales ist das ja, wie du eben gesagt hast, äh, wenn man den jetzt auf diesem, auf diesem Kreis bewegt, dass der Winkel sich nicht verändert, halt nur die Seitenlängen sich verändern.

I: Hhmm hhmm.

D: Und das konnte man sich halt damals an der Tafel nicht vorstellen, da hat man, manchmal hat er es in die linke Ecke gezeichnet, den rechten Winkel, und dann war das halt schon immer schwieriger vorzustellen wenn man das (.) jetzt auf die andere Seite (.) ziehen sollte. Also ich find, da ist das Programm natürlich sehr sehr vorteilhaft, weil man sich das viel besser (..), weil man das dadurch viel einfacher versteht und auch sich besser vorstellen kann, wenn man halt diesen Punkt (.) sehen kann.

I: Ja ja. Ähm (.) Also im Prinzip, wenn man das jetzt macht mit dem Programm, man guckt und lässt den Punkt da (.) den ganzen Kreis lang laufen, und sieht tatsächlich: ja, der Winkel bleibt immer 90

Grad, dann ist das im Prinzip
D: (unterbricht) Ein Beweis, dass der Satz des Thales anwendbar
I: Ja?
D: ist.
I: Ja. Und jetzt haben wir das in der Vorlesung gemacht, und wir haben aber trotzdem noch so'n formalen Beweis angeschlossen. Bringt das dann noch was an zusätzlicher Information oder hat das noch irgend..
D: Ja also ich find, also es gibt bestimmt Leute, die, ähäm, den Satz des Thales, sich also, die das dann nicht vorstellen können, aber die natürlich dann noch (.) mehr Informationen dazu brauchen. Also bei den Meisten, die haben dann diesen Aha- Effekt dann gleich, wenn die das da so sehen
I: Hmh (bejahend)
D: aber halt dieses, eh, (..) manche brauchen halt nochmal (.) nen extra (.) Anstoß oder (.) diesen extra Beweis, damit sie das nachvollziehen können. (...)
I: Weil sie hier damit noch nicht so, so zurecht kommen, oder?
D: Ja, und weil die einfach, ähä, das nicht umsetzen können, vielleicht? Also, ich weiß nicht, also, ob die das vielleicht, eh, nochmal als (.) Formel oder ich weiß nicht was brauchen, um das, also wirklich (.) später auch mal in einer Aufgabe anzuwenden.

Die Frage, ob die dynamische Visualisierung einen Beweis ersetzen kann, wird von Diana ohne zu zögern und sehr nachdrücklich mit „*Ja!*“ (Z.3) beantwortet. Zur Begründung führt sie an, dass durch das „Sehen“ (Z.3) „*das nochmal viel deutlicher*“ (Z.6) wird.
Bevor ich jedoch versuche, Dianas Verständnis von einem Beweis herauszuarbeiten, möchte ich zunächst analysieren, was Diana überhaupt unter dem Satz des Thales versteht. Hierzu äußert sie sich in den Zeilen 11 bis 14:

D: [...] Satz des Thales ist das ja, wie du eben gesagt hast, äh, wenn man den jetzt auf diesem, auf diesem Kreis bewegt, dass der Winkel sich nicht verändert, halt nur die Seitenlängen sich verändern.

Diana bezieht sich in Zeile 11 auf eine Äußerung der Interviewerin („*wie du eben gesagt hast*"), die vor dem hier abgedruckten Interviewauszug gefallen ist und in der die Aussage des Thalessatzes formuliert wurde. Diese greift Diana auf und gibt ergänzend einen Hinweis auf die Seitenlängen des Dreiecks. Für sie gehören demnach nicht nur die Konstanz des Winkels in C (vgl. Abb. 5.3) zum Thalessatz dazu, sondern auch die anliegenden Seiten, deren „Längen sich verändern", die folglich je nach Lage von C länger oder kürzer werden. Hierdurch wird ganz deutlich, dass für Diana ein deskriptives Moment stark im Vordergrund steht. Sie identifiziert den gesamten Komplex des Konstruierens, die Lageveränderung von C und das Beobachten der Winkelgröße und der Seitenlängen mit dem Satz des Thales. Damit bezieht sie Überlegungen, Beobachtungen und auch Heuristiken mit ein, die angewandt werden können, um überhaupt auf die Idee zu kommen, dass der Winkel in C konstant bleibt. Ihre Vorstellung geht damit über die rein inhaltliche Aussage des Thalessatzes „In einem Kreis sind alle Winkel über dem Durchmesser rechte." hinaus und ist deutlich dynamisch geprägt.
Diana erinnert sich daran, dass es ihr in der Schule schwergefallen ist, sich diese komplexe Situation vorzustellen. Dabei hat sich ihr eingeprägt, dass die Lehrperson, die in der Schule einen Thaleskreis mit Zirkel und Geodreieck an die Tafel gezeichnet hat, „*es manchmal in die linke Ecke gezeichnet hat*". Anscheinend bezieht sich Diana hier auf ein ihr verhaftetes Tafelbild, das prototypisch die „Thalessituation" darstellt (vgl. Abb. 5.3).

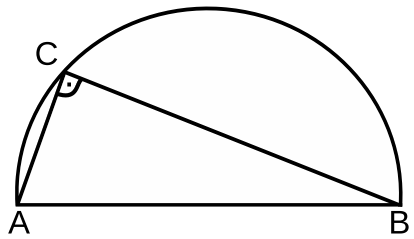


Abbildung 5.3 – *Prototypische Darstellung zum Satz des Thales*

In der damaligen Schulsituation hatte Diana Schwierigkeiten, sich eine andere Lage von C vorzustellen. In ihrer Erinnerung war sie damit konfrontiert, verschiedene Lagen von C „sehen" zu sollen, wie ihre Bemerkung, dass sie „das jetzt auf die andere Seite ziehen sollte" (Z.19-20) zeigt. Es kann zwar nicht ausgeschlossen werden, dass der Sprachgebrauch des „Ziehens" im damaligen Unterricht tatsächlich vorkam, doch ist zu vermuten, dass sie hier die Terminologie der computerbasierten Geometrie, die sie aktuell betreibt, auf die damalige Lernumgebung projiziert. Wie der nachfolgende Transkriptauszug zeigt, ist in dieser Situation für Diana das „*Programm*“ sehr hilfreich. Aus der Gegenüberstellung der schulischen Erfahrung mit der aktuellen Situation (Vorlesung und Übungsbetrieb mit Einsatz von DGS) kann geschlossen werden, dass sie an dieser Stelle das Programm mit der dynamischen Visualisierung gleichsetzt: Durch diese können die Veränderungen, die sie sich nicht vorstellen kann, gesehen werden.

`D: [...] Also ich find, da ist das Programm natürlich sehr sehr vorteilhaft, weil man sich das viel besser (..), weil man das dadurch viel einfacher versteht und auch sich besser vorstellen kann, wenn man halt diesen Punkt (.) sehen kann.`

Aber es ist nicht nur die „Vorstellung“ (Z.22), die Diana durch die Visualisierung ermöglicht wird. Darüber hinaus ist es für sie auch noch das „Verstehen“, das mit Hilfe des Mediums „*viel einfacher*“ (Z.22) erfolgen kann. Beides wird durch das „Sehen“ (Z.3) ermöglicht. Dabei deute ich ihre Aufzählung derart, dass für sie der Schwerpunkt auf dem „einfacheren Verstehen“ liegt, während das „bessere Vorstellenkönnen“ *auch* eintritt, aber eher als Nebenprodukt. Somit gelten für Diana die Implikationen:

„**Wenn** ich sehe, **dann** wird es deutlicher, und **wenn** es deutlicher wird, **dann** kann ich es einfacher verstehen und mir auch besser vorstellen.“

Diese Implikationen sind in der nachfolgenden Graphik strukturell dargestellt:

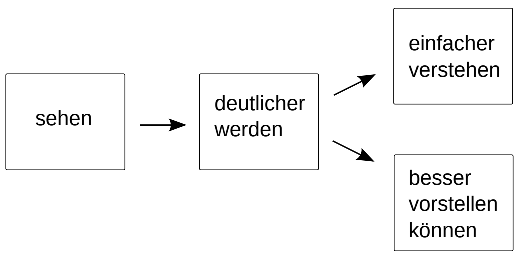


Abbildung 5.4 – *Rekonstruktion von Dianas Beweisverständnis*

Die urspüngliche Frage, ob die dynamische Visualisierung einen Beweis ersetzen kann, wird von Diana mit „*Ja!*“ beantwortet. Dabei führt sie als Begründung an, dass durch die Vi-

sualisierung die obige Implikationskette durchlaufen werden kann, was in einem „einfacheren Verstehen“ und „besserem Vorstellenkönnen“ resultiert.
Bender (1991) analyisert in seinen Ausführungen zur Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen (GVV) die Bedeutungen der Begrifflichkeiten „Vorstellungen“ und „Verständnisse“ und stellt zunächst fest, dass sie „unterschiedlich verstanden“ werden und „sich einer verbindlichen, einigermaßen scharfen Definition“ (ebenda, S.52) entziehen. In seinem Konzept der GVV sind sie jedoch fest miteinander verknüpft.

> „Mit ‚*Vorstellungen*‘ bezeichnet man traditionell (innere) anschauliche Repräsentationen eines Objekts, einer Situation, einer Handlung usw., deren sensorische Grundlagen im Langzeitgedächtnis gespeichert sind und die in bewußten Prozessen aktiviert werden. Dabei wird ein solcher Prozeß auf einen bestimmten Sinn hin organisiert, den der Vorstellende schon als Ziel mit einbringt [...]. Dieser konstituierende Beitrag von Sinn weist bereits darauf hin, daß Vorstellen ohne Verstehen (!) unmöglich ist“ (ebenda, S. 52).

Eine Vorstellung ist folglich von einem Subjekt gebildet und verinnerlicht und kann, falls erforderlich, aktiv ins Gedächtnis gerufen werden, um einen Verstehensprozess voranzubringen. Der Begriff des „Verstehens“ ist begrifflich diffuser, da er je nach Kontext unterschiedlich gedeutet werden kann. Bender (1991) unterscheidet vier verschiedene Gegenstandsbereiche, die in diesem Zusammenhang bedeutsam werden: (1) Menschen, Handlungen, Situationen verstehen, (2) Äußerungen medial verstehen, (3) Äußerungen inhaltlich verstehen und (4) einen Sachverhalt verstehen (vgl. ebenda, S.53f). Für das Konzept der GVV ist dabei (4) von relevanter Bedeutung, doch natürlich dürfen auch in den anderen Kategorien keine Dissonanzen auftreten, um Verständnis zu erzielen.
Seiler (1984, S.57) trifft drei Unterscheidungen hinsichtlich des Verstehens, indem er zwischen Verstehen von „Worten“, von „Ereignissen“ und „Sachverhalten“ differenziert. Das Verstehen von Worten durch den Hörer bedeutet hier, die Absicht des Sprechers zu erkennen und stellt damit „die gelingende und bewußt registrierte Einordnung eines Wortes oder der sprachlichen Äußerung eines Redenden in den begrifflichen Wissenskontext eines hörenden Subjektes“ dar (ebenda, S. 57). Gleichzeitig finden der Kontext der Äußerung und die umgebende Rahmen-

situation Eingang in die Interpretation durch den Hörer, ebenso, wie eine Wertung bezüglich der Angemessenheit der Äußerung, also der Konformität mit hergebrachten Erfahrungskategorien, erfolgt.
Beim Verstehen von Ereignissen hingegen „rekonstruieren, beschreiben, ordnen oder erklären [wir, G.W.] Phänomene begrifflich. Das trifft insbesondere zu, wenn wir bisher unverbundene Ereignisse in einen Zusammenhang bringen, indem wir entweder ein Erklärungsgefüge in sie hineininterpretieren oder aber einen weitergehenden Sinnzusammenhang herstellen“ (Seiler 1984, S.57). Die beobachteten Ereignisse werden demzufolge in das bestehende Begriffsnetz eingeordnet und eingebunden. Seiler stellt die individuelle Komponente hinsichtlich des Verstehens von Ereignissen besonders heraus: „Es handelt sich um die subjektive Seite eines als Problemlösungsprozeß objektivierten Geschehens, das von einem kognitiven Konflikt begleitet und bedingt war“ (ebenda, S. 58).
Beim Verstehen eines Sachverhaltes schließlich treffen Verstehen von Worten und Verstehen von Ereignissen aufeinander. Der Sachverhalt wird „als Beispielfall einer allgemeineren begrifflichen Kategorie oder Beziehung erkannt und eingeordnet [..]. Hier handelt es sich um Subsumptionen, d.h. um Verstehensakte eher logischer Art, die auf extensionalen Beziehungen beruhen und hierarchische Ordnungen konstituieren“ (ebenda, S. 58).
Seiler ist wichtig, die Gemeinsamkeiten der drei Bedeutungen des Wortes „Verstehen“ herauszustellen:

> „Erstens handelt es sich bei jeder Art des Verstehens um ein subjektives Geschehen. Wir bezeichnen damit einmalige, in ihrer situativen Bedingtheit nicht wiederholbare Akte eines individuellen Subjektes.
> Zweitens schreiben wir diesem Akt einen wenigstens minimalen Bewußtseinsanteil zu. Von Verstehen sprechen wir nur, wenn dem verstehenden Subjekt beim gedanklichen Begreifen, beim handelnden Problemlösen oder beim Verstehen sprachlicher Äußerungen sein eigenes begriffliches Bemühen und Handeln und wenigstens einige der zentralen Komponenten, auf die sich sein Verstehen stützt, bewußt sind. Noch anders: Der Verstehende registriert auf einer anderen Ebene, mit anderen Begriffen, wenigstens die Tatsache, daß sein Handeln Erfolg hat oder daß ihm eine begriffliche Einordnung gelingt“ (ebenda, S. 58f).

Das „Verstehen", das für Diana durch den Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware vereinfacht wird, ist für sie die epistemologische Grundlage dafür, die Visualisierung als Beweis zu akzeptieren. Demnach scheint sie einen Beweis mit dem Erzielen von „Verstehen" gewissermaßen gleichzusetzen. Doch die Frage, **warum** die Winkel im Halbkreis immer rechte sind, stellt sich für sie anscheinend nicht, denn darauf geht sie an keiner Stelle ein. Verstehen bedeutet demnach für sie nicht, zu wissen, warum eine Aussage gilt oder wie ein Sachverhalt in die bereits vorhandene Wissensstruktur eingebunden werden kann. Stattdessen bedeutet für sie, „*zu verstehen*", eine Vorstellung davon im Kopf zu haben, welche Komponenten des Dreiecks sich verändern und welche invariant sind. Dies ist sicherlich auch durch ihre deskriptive Sicht auf den Sachverhalt „Thalessatz" bedingt. Der Beweis ist nach den obigen Ausführungen insgesamt für Diana ein Zugang, der das Nachvollziehen dieser Veränderungen, Invarianten und Zusammenhänge ermöglicht. Dieses „Nachvollziehen" allerdings schließt nicht ein, sich bewusst zu machen und zu begreifen, welche Veränderungen an welcher Stelle und aus welchen Gründen erfolgen, sondern spielt sich ausschließlich auf der Ebene der visuellen Reproduktion ab, die nicht über die bloße Beobachtung und Beschreibung hinausgeht. Damit entspricht meiner Auffassung nach das, was Diana selbst als „Verstehen" bezeichnet, nicht den von SEILER aufgestellten Forderungen.

Fallstrukturhpyothese „Diana"

Dianas Vorstellungen zum Satz des Thales schließen neben der Kernaussage „In einem Kreis sind alle Winkel über dem Durchmesser rechte" auch Beobachtungen und Beschreibungen mit ein, die zunächst zur Aufstellung der Vermutung und im weiteren auf dem Weg zur Formulierung des Satzes erforderlich sind. Unter einem Beweis versteht sie die Eröffnung eines Zugangs, diese Beobachtungen und Beschreibungen nachzuvollziehen und somit eine bessere Vorstellung zu entwickeln. Diese bessere Vorstellung entwickelt sich allerdings lediglich auf der deskriptiven Ebene, so dass nicht von „besserem Verstehen" gesprochen werden kann, obwohl dies ihrer eigenen Wortwahl entspräche.

Auf die Nachfrage, ob ein formaler Beweis noch zusätzliche Informationen bringe, antwortet Diana:

D: Ja also ich find, also es gibt bestimmt Leute, die, ähäm, den Satz des Thales, sich also, die das dann nicht vorstellen können, aber die natürlich dann noch (.) mehr Informationen dazu brauchen.

Für Diana scheint sich überhaupt nicht die Frage zu stellen, ob sie selbst durch einen formalen Beweis einen Mehrgewinn haben könnte. Stattdessen sucht sie nach Gründen, warum **andere** Personen einen formalen Beweis benötigen und nicht mit der dynamischen Visualisierung hinreichend zufrieden gestellt werden könnten. Dieses erklärt sie sich damit, dass bei den anderen noch keine angemessene Vorstellung des Satz des Thales durch die Visualisierung erzeugt werden konnte. Dabei rekurriert sie mit der Formulierung „*das dann*“ (Z.36) auf ihre subjektive Vorstellung, die sie vom Satz des Thales hat. Hier zeigt sich erneut, dass in Dianas Vorstellung dem Thalessatz ein deskriptives Moment inhärent ist und ein Beweis dazu dient, dieses deskriptive Moment nachvollziehen zu können, wobei sich das Nachvollziehen auf das Beobachtenkönnen und das darauf aufbauende Beschreibenkönnen der Phänomene reduziert. Für diejenigen, die hier nur durch das Beobachten noch Probleme haben, kann dann der formale Beweis ein Mittel sein, um Abhilfe zu schaffen. Demnach liefert ein formaler Beweis für Diana „*mehr*“ (Z.37) Informationen als die dynamische Visualisierung, wobei das „*mehr*“ anscheinend für zusätzliche oder andere Informationen steht. Diese zusätzlichen Informationen sind aber nicht unbedingt erforderlich, um eine angemessene Vorstellung aufbauen zu können.

D: bei den Meisten, die haben dann diesen Aha- Effekt dann gleich, wenn die das da so sehen

I: Hmh (bejahend)

D: aber halt dieses, eh, (..) manche brauchen halt nochmal (.) nen extra (.) Anstoß oder (.) diesen extra Beweis, damit sie das nachvollziehen können. (...)

Bei den „*Meisten*“ (Z.38), zu denen Diana sich selbst auch zählt, tritt „*gleich*“ (Z.38) durch das Sehen der „*Aha-Effekt*“ (Z.38) ein. Ein Aha-Effekt kann sicherlich als Schlüsselerlebnis oder Initiator eines Erkenntnisgewinns gedeutet werden, der durchaus plötzlich und nach vorherigem Ringen, als Auflösung eines Konfliktes erfolgen kann. Die „*Meisten*“ benötigen folglich keine weiteren Informationen mehr. Bei den „*Manchen*“ (Z.41), die dieses Schlüsselerlebnis noch nicht haben, ist allerdings noch ein „*extra Anstoß*“ oder ein „*extra Beweis*“ (Z.42) erforderlich, wobei Diana diese zusätzlichen Erfordernisse mit dem „*formalen Beweis*“ (Z.32) aus der Nachfrage der Interviewerin identifiziert.
Der formale Beweis stellt folglich neben der dynamischen Visualisierung einen **anderen** Weg dar, um zum Erkenntnisgewinn zu kommen, einen anderen Weg, um den Sachverhalt „*nachvollziehen*“ (Z.43) zu können. Dieser Weg muss allerdings nicht zwingend gegangen werden, vielmehr bedeutet er eigentlich einen „Umweg“, da der Erkenntnisgewinn auch ohne den formalen Beweis erzielt werden kann. Für diejenigen, die dennoch allein mit der dynamischen Visualisierung Schwierigkeiten beim Nachvollziehen haben, kann der formale Beweis allerdings als eine Art Initiator dienen, dennoch „zum Ziel zu kommen“. Der formale Beweis hat also für Diana eine gewisse Funktionalität, ohne dass jedoch eine inhaltliche Klärung stattfindet, was genau bei einem formalen Beweis stattfindet und wie dieser zur Vorstellungserzeugung beitragen kann. Der in der ersten Fallstrukturhypothese erarbeitete Aspekt, dass ein Beweis ein Mittel zum „Verstehen“ ist, spielt in diesem Teil des Interviews keine Rolle mehr. Stattdessen wird der Aspekt des „Vorstellenkönnens“ gestärkt.

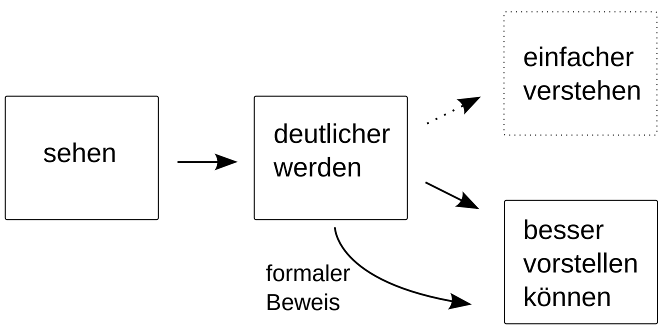


Abbildung 5.5 – *Implikationen der dynamischen Visualisierung für Diana*

Es bestätigt sich, dass in Dianas Vorstellung ein Beweis einen Zugang zum Nachvollziehen eines Sachverhalts darstellt. Dies bedeutet zum einen, **dass** die dynamische Visualisierung für sie ein Beweis ist, da sie dies leistet, zum anderen, dass ein formaler Beweis lediglich einen **alternativen Zugang** darstellt. Dieser alternative Zugang **kann** gewählt werden, wenn die dynamische Visualierung, aus welchen Gründen auch immer, nicht ausreichend sein sollte, muss aber nicht zwingend genutzt werden. Letztendlich ist das Ziel und damit der Wissensstand, bei dem man ankommt, beiden Zugängen gemeinsam.

Modifizierte Fallstrukturhpyothese „Diana“
Dianas Vorstellungen zum Satz des Thales schließen neben der Kernaussage „In einem Kreis sind alle Winkel über dem Durchmesser rechte“ auch Beobachtungen und Beschreibungen mit ein, die zunächst zur Aufstellung der Vermutung und im weiteren auf dem Weg zur Formulierung des Satzes erforderlich sind. Unter einem Beweis versteht sie die Eröffnung eines Zugangs, diese Beobachtungen und Beschreibungen nachvollziehen zu können, mit dem Ziel eines besseren Vorstellenkönnens, wobei sie allerdings auf der deskriptiven Ebene stehen bleibt. Die dynamische Visualisierung leistet es, diesen Zugang zu eröffnen, und wird deshalb von Diana als Beweis akzeptiert. Dem formalen Beweis weist Diana die Rolle eines alternativen Zugangs zu, der von anderen gewählt werden kann, die das Vorstellenkönnen allein mit der DGS nicht realisieren können.

5.1.3 Fallstudie „Joachim“

Joachim studiert Lehramt für Haupt-, Real- und Gesamtschulen und steht kurz vor dem Examen. In der Klausur zur Veranstaltung „Elemente der Geometrie“ hat er in seinem ersten Studiensemester als einer der Besten abgeschnitten.

```
I: Kann diese dynamische Visualisierung für dich einen Beweis ersetzen? Was für einen Wert hat es, wenn man es so visualisiert hat, den Beweis noch anzuschließen. Oder ist es (..) wirklich noch zwingend erforderlich, den Beweis dann anzuschließen?
J: Ja, natürlich. Wie gesagt,
I: Ja.
J: Hier bei Cinderella ist eine Ungenauigkeit drin. Einmal bei den Linien, durch die, durch die Generierung dieser, durch die Technik der Pixel usw. Es kann ja sein, dass die wirklich, in Wirklichkeit gar nicht aneinanderliegen.
I: Hmhm.
J: Wenn ich jetzt zum Beispiel, ich nehme jetzt mal nicht Cinderella, jetzt nicht Geometrie, sondern ich habe jetzt irgendein anderes Programm, was mir ne Funktion dargibt, 1 durch x.
I: Ja.
J: So. Die schmiegt sich asymptotisch an die x-Achse an. Irgendwann brauche ich ja, Bender sein Funktionenmikroskop.
I: Ja, ok.
J: Irgendwann liegen die (.) auf dem Bildschirm (.) aufeinander, weil, weil einfach die Auflösung nicht mehr da ist. So, aber wenn ich's mir in der Realität angucke, liegen die nicht aufeinander.
I: Hmhm (zustimmend).
J: Genau wie ich jetzt eben erzählte, dass, man kann vielleicht zwei Winkel, die nie gleich sind, so hinziehen, dass sie für Cinderella so nah beieinander liegen, dass er runden muss. (..) Also kann ich dem eigentlich so erst mal nicht trauen.
I: Hmhm (zustimmend).
```

J: Irgendwas nachmessen ist schon mal ein schlechter Ansatz. Und eigentlich, in der Geometrie brauche ich ja auch groß keine Maße, außer bei Verhältnisse: das ist doppelt so lang, wie das andere.

I: Ja.

J: Und ich finde schon wichtig, dass man (.) eh, eigentlich ohne Maßangaben arbeitet. Und dann brauche ich halt ’nen Beweis.

Für Joachim ist es selbstverständlich, dass sich an die Visualisierung ein Beweis anschließen muss, denn er antwortet auf die entsprechende Frage spontan und ohne zu zögern mit: „*Ja, natürlich*“ (Z.5). Er begründet seine Antwort damit, dass die Computerdarstellung einer geometrischen Zeichnung aufgrund der inhärenten Technik (Pixel, Auflösung) immer „*ungenau*“ (Z.7) ist. Gerade auch beim Messen von Winkeln könnten aufgrund von Rundungen Ergebnisse auftreten, die suggerieren, dass zwei Winkel gleich groß sind, obwohl dies nicht der Fall ist (Z.23-25). Das Fazit von Joachim lautet demzufolge, dass er „*dem eigentlich so erst mal nicht trauen*“ (Z.26) kann. (Anmerkung von G.W.: Im Rahmen der Veranstaltung „Elemente der Geometrie“ gab es eine Aufgabe, bei der in einem gleichschenkligen Dreieck die Basis gedrittelt wurde. Anschließend wurden die dadurch entstandenen Punkte mit der Spitze des Dreiecks verbunden. Inhalt der Aufgabe war es, zu beweisen, dass die drei Teilwinkel an der Spitze nie gleich groß sind. Die Messfunktion der DGS hingegen zeigte durchaus gleich große Winkelmaße an, wenn die Winkel nur genügend klein gezogen wurden. Möglicherweise bezieht sich Joachims Äußerung hierauf.)

Um seine Einschätzung zu verdeutlichen, gibt Joachim als weiteres Beispiel für eine ungenügende Computerdarstellung den Graph der Funktion $\frac{1}{x}$ an. Bei dieser Funktion, die als eine Asymptote $y = 0$ hat, ist die Auflösung der Computergrafik irgendwann nicht mehr hoch genug, um erkennbar darzustellen, dass die x-Achse sich dem Graphen zwar beliebig annähert, ihn aber nie berührt. Stattdessen scheint die Darstellung zu suggerieren, dass Graph und x-Achse irgendwann „*aufeinander liegen*“ (Z.19). Interessanterweise macht Joachim in seinen Ausführungen den Gegensatz zwischen „Anschauen im Programm bwz. auf dem Bildschirm“ (Z.19-20) und „Angucken in der Realität“ (Z.20-21) auf. Was auch immer Letzteres für ihn sein mag, die Visualisierung jedenfalls ist es nicht. Damit kann diese kein adäquates Abbild der „Realität“ liefern. Demzufolge sind alle Messungen, die in der Visualisierung vorgenommen werden, potenziell unzuverlässig und können somit nicht dazu herangezogen werden, Allgemeingültigkeit nachzuweisen. Diese kann nur ein Beweis liefern, der den Aussagen Joachims nach eine ausschließlich verifizerende Funktion hat.

Fallstrukturhypothese „Joachim"
Ein Beweis hat für Joachim ausschließlich verifizierenden Charakter; durch ihn soll die Allgemeingültigkeit eines Sachverhalts belegt werden. Die dynamische Visualisierung kann für ihn keinen Beweis ersetzen, da die DGS aufgrund der inhärenten Technologie die „Realtität" nur ungenau wiedergeben kann. Daher ist die suggerierte empirische Überprüfbarkeit nicht hinreichend, um die geforderte Allgemeingültigkeit zu zeigen.

5.1.4 Fallstudie „Melanie“

Zum Zeitpunkt des Interviews ist Melanie im 5. Semester. Die Veranstaltung „Elemente der Geometrie“ hat sie in ihrem ersten Semester besucht und mit einer sehr guten Klausur abgeschlossen. Mittlerweile hat sie fast alle erforderlichen Veranstaltungen ihres Mathematikstudiums erfolgreich besucht, so dass sie in Kürze ihr Examen machen möchte.

```
I: Also kann diese dynamische Visualisierung einen Beweis ersetzen?
   (..) Also, wie siehst du das?
M: (...) Ehm, also ich glaube, (...) also ich denke, dass es schon
   eine Art Beweis ist.
I: Hhmm
M: Äh, (..) ja durch diese dymnamische Verschiebung, also es wird
   mir schon klarer, dass der (.) rechte Winkel dann immer (.) gleich
   bleibt, über dem Durchmesser. Ähäm und ich denke, ähm wenn man es
   anders beweisen (.) wollte, müsste man ja, zum Beispiel mit Stift
   und Papier,
I: Hhmm
M: dann müsste man ja, äh ganz viele Dreiecke zeichnen,
I: Ja?
M: Ähm die, (.) ähäm über diesen Kreisbogen, äh an verschiedenen
   Stellen liegen.
I: Ja.
M: Also die Punkte im, (.) also ich meine jetzt den Punkt, wo der
   rechte Winkel ist, so. (lacht)
I: Ja ja, hhmm.
M: Ja und ehm, dann würde man sich ja viel Mühe machen und äh (..)
   hätte viele Dreiecke gezeichnet und es wäre dann eben immer
   dasselbe rausgekommen, dass der rechte Winkel (..) trotzdem immer
   90 Grad ist. Und mit der, ehm, (..) mit der Software
I: Ja?
M: kann ich das ja einfach, indem ich das bewege, so zeigen,
I: Ja.
M: dass der Winkel immer gleich bleibt und ich finde das ist erstmal
```

(.) Zeitersparnis und ehm, (.) ah, ja auch, und auch einleuchtend, also, es ist ja so, also.

I: Hhm... Wenn du jetzt auf dem Papier zeichnen würdest, wieviele Dreiecke (..) meinst du, müsstest du zeichnen, damit es (...) klar ist?

M: (...) Hmmmm, mindestens (.) drei? (lacht)

I: Ok (...) und ehm (...) hier (...) bei dem Programm wäre das dann (.) einfacher?

M: (..) Ja also, ehm, wenn man sich (.) schon länger mit dem Programm auskennt, das schnell zeichnen kann,

I: Ja.

M: (...) denke ich, ist das einfacher.

I: Ja. Und ehm bräuchtest du dann noch einen zusätzlichen Beweis, oder wäre das dann für dich so ok?

M: (..) Klar, man kann ja noch den klassischen Beweis machen (..), eh, wie in der Schule,

I: Ja.

M: wie man den da gelernt hat.

I: Ja

M: (...) Den könnte man ja, also, also man sollte sowieso die klassischen Beweise nicht außer Acht lassen, oder? In der Schule? Sollte ja jeder ihn gehört haben, auch.

I: Ja. (..) Aber wäre es noch nötig? Würde das noch zusätzlich was bringen, oder?

M: Es bringt ja eigentlich die gleiche Erkenntnis.

I: Hhmm

M: Also man könnte (...) ehm (...) also klar, man könnte es noch zusätzlich machen, aber ich denke, Cinderella eh veranschaulicht das schon ganz gut und (...) ehm, es müsste nicht gemacht werden, weil es wird ja dadurch auch gezeigt.

Melanie antwortet auf die Eingangsfrage zunächst relativ vorsichtig, indem sie, nach nur kurzer Überlegung, in ihrer Antwort die Formulierung wählt: „*also ich glaube, also ich denke, dass es schon eine Art Beweis ist*“ (Z.3-4). Mit der Wortwahl „*eine Art Beweis*“ (Z.4) scheint hier zunächst eine Einschränkung vorzuliegen, so als sei die dynamische Visualisierung etwas, das in der Sprachgemeinschaft, der sich auch Melanie zugehörig fühlt, nicht voll den etablierten Kriterien an einen Beweis genügt. Doch es ist möglich, diese Kriterien in einem vertretbaren Maße derart aufzuweichen, dass die dynamische Visualisierung dann unter diese so erweiterte Beweiskategorie gefasst werden kann. Damit wird der dynamischen Visualisierung von Melanie letztlich Beweiskraft zugesprochen. Durch ihre einleitenden Phrasen: „*Also ich glaube, also ich denke*“ (Z.3) schafft sie aber bereits vorab eine Distanzierung zu eben dieser Kategorisierung als Beweis und schwächt damit ihre Aussage sofort wieder ab. Weder das Verb „glauben“ noch das Verb „denken“ kann mit „wissen“ gleichgesetzt werden, da beiden nicht die Sicherheit des Wissens inhärent ist. Wenn eine Person allerdings sagt, dass sie einen Sachverhalt „glaubt“, ist diese Aussage sehr viel stärker von einer subjektiven Haltung durchtränkt und der Person sehr viel näher, als wenn sie nur „denkt“, dass ein Sachverhalt gilt. Dem „Denken“ hingegen wird mehr Rationalität unterstellt. (Vergleiche hierzu auch die Differenzierung zwischen „glauben“, „wissen“ und „erkennen“, die in der Erkenntnistheorie, beispielsweise bei von Kutschera (1982), getroffen wird). Dabei scheint der Wechsel in Melanies Wortwahl nicht zufällig zu sein, da sie immerhin eine Pause von 3 Sekunden zwischen der Formulierung „glauben“ und „denken“ macht.

Die nächste Äußerung „*Es wird mir schon klarer, dass der rechte Winkel dann immer gleich bleibt*“ (Z.6-8), gibt Aufschluss über Melanies Beweisverständnis: Melanie begründet ihre Entscheidung, die Visualisierung der erweiterten Kategorie „Beweis“ zuzuordnen, damit, dass die Gültigkeit eines Sachverhalts (hier: Konstanz des rechten Winkels) „*klarer*“ wird, was einen Beweis als verifizierend klassifiziert. Dabei deutet der Komparativ „klarer“ auf einen prozesshaften Verlauf hin. Wenn etwas „klarer“ wird, heißt das nicht, dass auf einer von „unklar“ bis „klar“ reichenden Skala bereits der Zustand „klar“ erreicht ist, es ist lediglich ein Schritt hin in diese Richtung. Damit kann an dieser Stelle wohl nur von einem Wachsen der Überzeugung die Rede sein und nicht von einer endgültigen Sicherheit, so dass die absolute Klarheit, die laut Melanies Aussage nur mit der Verifiaktion gleichgesetzt werden kann, durch die Darstellung mittels DGS allerdings nicht erreicht werden kann.

Fallstrukturhpyothese „Melanie“
Melanie identifiziert die dynamische Visualisierung mit einer DGS mit der Gültigkeit des zugrundeliegenden mathematischen Sachverhalts. Damit hat ein Beweis für sie eine verifizierende Funktion und soll belegen, dass eine mathematische Aussage gilt, wobei dies auch als ein erster Schritt im Verifikationsprozess verstanden werden kann.

Im Folgenden stellt Melanie dem DGS-Beweis einem „anderen Beweis“ (Z.9), nämlich dem mit Stift und Papier gegenüber. Bei letzterem hält sie es allerdings für erforderlich, „*ganz viele Dreiecke*“ (Z.12) zu zeichnen. Sie nennt nicht die Variante, anhand eines statischen, möglichst allgemeinen Bildes einen formalen Beweis zu führen.

```
M: Ja und ehm, dann würde man sich ja viel Mühe machen und äh (..)
   hätte viele Dreiecke gezeichnet und es wäre dann eben immer
   dasselbe rausgekommen, dass der rechte Winkel (..) trotzdem immer
   90 Grad ist.
```

Melanie äußert sich nicht dazu, wie „rauskommt“ (Z.22), dass der Winkel konstant 90 Grad groß bleibt, so dass der Hintergrund ihrer Überlegungen an dieser Stelle nicht geklärt werden kann. Es wird aber deutlich, dass der „Beweis mit Papier und Bleistift“ und der „Beweis mit der dynamischen Visualisierung“ letztlich zum selben Ergebnis führen werden, nämlich zum Ergebnis, „*dass der Winkel immer gleich bleibt*“ (Z.27). Dabei ist der Beweis mit Papier und Bleistift aufwändig, mit „*viel Mühe*“ (Z.20) verbunden und bringt „*trotzdem*“ (Z.22) nicht mehr Erkenntnis als der Beweis mit der DGS. Dieser ist deutlich bequemer und effizienter und bringt eine „*Zeitersparnis*“ (Z.28) mit sich, denn man kann „*das ja einfach, indem ich das bewege, so zeigen.*“ (Z.25).
Es stellt sich an dieser Stelle die Frage, welche Bedeutung Melanie dem Begriff „zeigen“ zukommen lässt. Im vorliegenden Kontext sind grundsätzlich zunächst die Verwendungen in Hinsicht auf „darstellendes Zeigen“ und „nachweisendes Zeigen“ im mathematischen Sinne möglich.
Zunächst bringt Melanie das „Zeigen“ mit dem „Bewegen“ in Zusammenhang: durch das „Be-

wegen“ kann sie „zeigen“. Dies deutet darauf hin, dass sie sich auf der darstellenden Ebene befindet: der Einsatz des Zugmodus erlaubt ihr, auf dem Pixelbild des Monitors die Konstanz des Winkels zu beobachten. Doch in ihren weiteren Ausführungen geht Melanie darauf ein, was das Ergebnis der dynamischen Visualisierung für sie ist:

29 `also, es ist ja so, also.`

Melanie beschreibt eine Kette von Ursache und Wirkung, an deren Ende das „sein“ steht. Indem sie „bewegt“ (Ursache) kann sie „einfach zeigen“ (Wirkung), dass der Winkel immer gleich bleibt. Der Sachverhalt erscheint „*einleuchtend*“ (Z.28) und lässt den Schluss zu, dass es „so ist“. Der Aspekt des Zeigens, der zunächst einen darstellenden Charakter zu haben schien, erhält so für sie einen nachweisenden Aspekt und lässt den Schluss zu, dass der Sachverhalt allgemeingültig „gezeigt“ und damit nachgewiesen ist.

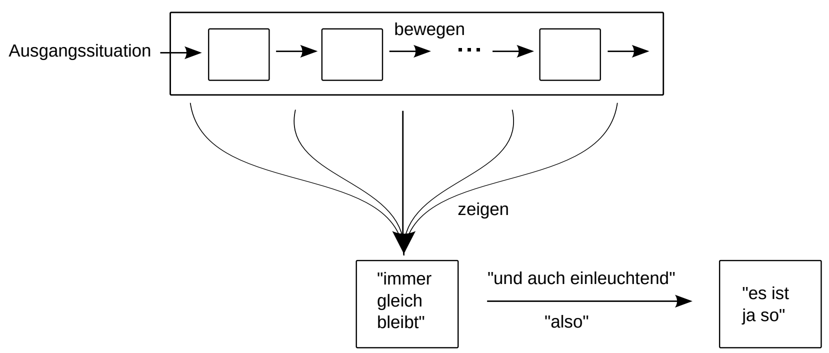


Abbildung 5.6 – *Vom darstellenden zum nachweisenden Zeigen*

Die Nachfrage, ob denn nun noch ein „*zusätzlicher Beweis*“ (Z.40) erforderlich sei, setzt Melanie sofort mit dem „*klassischen Beweis*“ (Z.42) in Bezug, wie man „den in der Schule gelernt hat“ (Z.43-45). Dabei redet sie bemerkenswerterweise nicht davon, dass sie „gelernt hat, zu beweisen“, sondern von „gelernten Beweisen“. Hier bestätigt sich die zu Beginn aufgestellte

These, dass es für Melanie althergebrachte, „*gelernte*“ Beweise entlang der strengen Kriterien der Mathematiker gibt und solche, die den aufgeweichten Kriterien genügen. Während in der Schule klassische Beweise, sicherlich mit tradierten Medien und Dokumentationsformen, geführt wurden, ergeben sich nun darüber hinaus mittels neuer Medien andere Möglichkeiten. Für Melanie scheinen die „*klassischen Beweise*“ eine Art „Kulturgut“ zu sein, das jeder im Rahmen einer guten Allgemeinbildung kennen sollte (Z.48-49). Wirklich erforderlich aber sind sie nicht, denn ein formaler Beweis „*müsste nicht gemacht werden, weil es wird ja dadurch* [durch Cinderella, G.W.] *auch gezeigt*“ (Z.56-57). An dieser Stelle hat das „Zeigen“ für Melanie endgültig den Sprung vom darstellenden Zeigen zum nachweisenden Zeigen gemacht: durch das darstellende Zeigen wird „*es*“ nachweisend gezeigt und damit bewiesen.

Modifizierte Fallstrukturhpyothese „Melanie“

Die Hypothese, dass ein Beweis für Melanie eine verifizierende Funktion hat, hat sich erhärtet. Sie setzt die DGS im Rahmen einer Ursache-Wirkungs-Kette zur vollständigen Verifikation ein, indem sie die Dynamik der Visualierung dafür nutzt, das darstellende Zeigen in ein nachweisendes Zeigen zu überführen. Damit ist für Melanie der Schluss zulässig, dass ein Sachverhalt gilt. Zudem kann die dynamische Visualisierung im Kontext des Thalessatzes schnell und effektiv zeigen, dass der rechte Winkel immer erhalten bleibt. Somit ist diese dem formalen Beweis, der nur mit Aufwand und Mühe geführt werden kann, stark überlegen.

5.1.5 Fallstudie „Kira“

Zum Zeitpunkt des Interviews ist Kira in ihrem zweiten Studiensemester. Sie besucht die Veranstaltung „Elemente der Geometrie“ zum ersten Mal. In der Klausur, die zeitlich nach dem Interview geschrieben wurde, schneidet sie sehr gut ab und besteht somit ohne Probleme diesen Teil der Zwischenprüfung.

I: Kann diese Visualisierung für dich den Beweis des Satzes ersetzen?
K: (...) Also, dass ich, wenn ich jetzt in diesem Beispiel *C* bewegen würde, außerhalb oder innerhalb des Kreises,
I: Ja.
K: dass ich dann quasi der Meinung bin, ich müsste es dann nicht mehr beweisen?
I: Ja.
K: Nee! 'Hm'hm (Verneinend). Also ich bin schon der Meinung, dass man beweisen sollte, warum da ein 90 Grad Winkel entsteht und nicht nur sagen braucht, ehm, wenn *C* auf dem Kreisbogen liegt, ist es 90 Grad und außerhalb ist er kleiner, der Winkel in *C*, oder innerhalb größer. Würde für mich nicht reichen, nein.
I: Was, was hättest du da noch zusätzlich für Informationen durch den Beweis? (..) Oder warum würdest du Wert auf den Beweis legen?
K: Ich glaube, um mir erstens bewusst zu machen, dass es eben immer nur dann so ist, wenn der, ehm, wenn die Sehne auch der Durchmesser des Kreises ist. Also ich finde, das würde ich jetzt nicht unbedingt so, oder ich weiß nicht, oder ist das Voraussetzung, wenn man die Konstruktion hat?
I: Wir können das ruhig so konstruieren, dass wir den Durchmesser, (..) also die Sehne (.) als Durchmesser des Kreises nehmen.
K: Hhmm.
I: Das können wir ruhig sagen, das konstruieren wir so, das wissen wir, dass es so ist.
K: (..) Also ich glaube, ich würde schon beweisen wollen, warum es ausgerechnet dann 90 Grad ist. Warum das nicht so ist, dass der, ehm, dass der 60 Grad ist, oder ehm nur 50 Grad, und dann größer

oder kleiner innerhalb und außerhalb des Kreises.

I: Hmh. Also die Frage nach dem „Warum“ wird für dich durch das Sehen nicht beantwortet?

K: Nee, nicht unbedingt. Also dann, dann sehe ich zwar, dass es ne Tatsache ist, aber warum diese Tatsache (..) auch gilt, also wäre für mich nicht unbedingt beantwortet.

I: Ok. (...) Aber hättest du denn, wenn du es jetzt siehst, ohne dass es bewiesen ist, na gut, du wüsstest jetzt nicht, warum es so ist. Aber hättest du, wenn du es siehst, ohne Beweis, noch Zweifel, dass es so ist?

K: Unterbricht. Nee, ne, das nicht, aber (lacht), ich glaub, ich würde trotzdem wissen wollen, warum. Nee, Zweifel hätte ich keine, aber, ehm ja.

Durch ihre Rückfrage vergewissert sich Kira zunächst, ob sie die Frage dahingehend richtig verstanden hat, ob durch das Ziehen und Beobachten ein Beweis unnötig werde. Als ihr bestätigt wird, dass genau danach gefragt wird, verneint sie die Frage vehement. Als Begründung führt sie an, dass ein Beweis zeigen sollte, „*warum da ein 90 Grad Winkel entsteht*“ (Z.9). Nicht ausreichend ist für Kira, auf der ausschließlich deskriptiven Ebene stehen zu bleiben und lediglich die Beobachtungen zu machen, wie sich der Winkel in C bei verschiedenen Lagen von C verändert.

Auf die Nachfrage, was ein Beweis an zusätzlichen Informationen über die dynamische Visualisierung hinaus bringen würde und warum sie Wert darauf legt, antwortet Kira, dass sie sich dadurch „*bewusst macht*“ (Z. 15), dass „*es eben immer nur dann so ist, wenn* [ ] *die Sehne auch der Durchmesser des Kreises ist*“ (Z. 15-17). Schlägt man im Duden die Bedeutung von „sich bewusst werden“ nach, so erhält man die Einträge: a) sich klar werden; Klarheit, Gewissheit erlangen und b) begreifen, verstehen. Dieses „Begreifen“ und „Verstehen, das für Kira zu einem Beweis dazu gehört, kann sie durch das bloße Sehen, das die dynamische Visualisierung ermöglicht, nicht erlangen:

K: [...] Also dann, dann sehe ich zwar, dass es ne Tatsache ist, aber warum diese Tatsache (..) auch gilt, also wäre für mich nicht unbedingt beantwortet.

Im Fokus von Kiras Interesse liegt demzufolge nicht nur die Frage, ob ein Sachverhalt gilt, sondern außerdem, warum ein Sachverhalt gilt. Die erste Frage kann für sie zwar durch die dynamische Visusalisierung beantwortet werden, die zweite allerdings nicht. So bestätigt sie, dass das Sehen ihre Zweifel ausräumt, **dass** ein Sachverhalt gilt (vgl. Z.39). Dennoch ist für sie dieser Sachverhalt noch nicht bewiesen, weil die Frage, **warum** er gilt, noch nicht beantwortet ist. Damit verhält sich Kiras Einstellung gegenüber einer DGS im Kontext des Beweisens genau so, wie Schupp es in seiner eingangs gemachten Einschätzung dargestellt hat: Die DGS leistet für Kira einen Beitrag, an die Gültigkeit eines Sachverhalts zu glauben, ohne sich damit zufrieden zu geben, sondern unmittelbar im Anschluss nach den Zusammenhängen und Gründen für diesen Sachverhalt zu fragen.

Fallstrukturhypothese „Kira“

Ein Beweis beantwortet für Kira die Frage, warum ein Sachverhalt gilt. Diese Frage kann für sie die dynamische Visualisierung nicht beantworten. Die Tatsache hingegen, dass ein Sachverhalt gilt, wird von Kira nicht mehr angezweifelt. Dennoch ist ihr dies für einen Beweis nicht ausreichend, so dass sie die dynamische Visualisierung nicht als Beweis akzeptiert.

5.1.6 Fallstudie „Verena“

Zum Zeitpunkt des Interviews ist Verena in Mathematik in ihrem 5. Fachsemester. Das Grundstudium und die Fachvorlesungen des Hauptstudiums hat sie bereits erfolgreich absolviert. Sollte die Teilnahme an den beiden Didaktikvorlesungen, die sie aktuell hört, erfolgreich sein, hätte sie damit alle erforderlichen Studienleistungen in 5 Semestern erbracht. Auch zur Vorlesung „Elemente der Geometrie“ hat Verena die Zwischenprüfung mit einer sehr guten Klausur bestanden, so dass sie wohl dem oberen Leistungsdrittel zugeordnet werden kann.

```
I: Kann die dynamische Visualisierung für dich einen Beweis ersetzen?
V: Ist für mich kein Beweis.
I: Was ist das dann für dich?
V: Das ist für mich ein Beispiel. Das ist für mich, (.) oder eine Veranschaulichung, ne Anwendung
I: Ja.
V: des Beweises.
I: Ja.
V: Aber ein Beweis ist das nicht (..). Für mich ist der Beweis der Umfangswinkelsatz.
I: Ja.
V: Dass ich halt sage, der Mittelpunktswinkel ist hier 180 Grad
I: Hhmm
V: und ehm, der, ich weiß, dass der ehm Umfangswinkel halb so groß ist. Und da gab es ja auch einen Beweis zu, wenn ich den jetzt gerade spontan wüsste, wäre es ganz toll. Ehm, das wäre für mich ein Beweis und der Thaleskreis ist ja einfach nur ne, ehm, ist ja im Grunde das gleiche, nur dass wir die Besonderheit haben, mit 90 und 180 Grad.
I: Hhmm hhmm (zustimmend). Aber wenn ich doch jetzt die Lage von C verändere auf dem Kreisbogen. Dann habe ich doch nicht nur ein Beispiel, ich kann doch ganz, ganz viele Beispiele betrachten.
V: Ja, das hilft mir auch zum Verständnis des Satzes, aber das ist trotzdem kein Beweis.
I: Aha.
```

```
V: Für mich.
I: Aha, ok?
V: Findest du, das ist ein Beweis?
I: Ich werd ja hier nicht befragt (lacht).
V: Für mich ist das kein Beweis. Es zeigt mir, es ist überall so, und es kann auch so, aber nur weil es überall so ist, heißt das nicht, dass es immer so, also gut, ok, das war ein bisschen blöd ausgedrückt. Aber nur weil das auf den Punkten, wo ich es gerade ausprobiert hab, so ist, heißt das nicht, dass es immer so sein muss.
I: Aha. Ok ok.
V: Das muss immer so sein, weil wir das ja mit dem Umfangswinkelsatz, eh, bewiesen haben.
I: Hhmm ok.
```

Verena antwortet ohne zu zögern, dass die dynamische Visualisierung für sie kein Beweis ist. Stattdessen ist es für sie ein „*Beispiel*“ beziehungsweise eine „*Veranschaulichung*“ oder eine „*Anwendung*“ (Z. 4-5). Der Beweis ist für Verena die Kenntnis und der Beweis des Umfangswinkelsatzes: Weil sie weiß, dass der Mittelpunktswinkel doppelt so groß wie der zugehörige Umfangswinkel ist, folgt für sie, dass zu einem gestreckten Mittelpunktswinkel ein Umfangswinkel von 90 Grad gehört (vgl. Z. 14-19).

Auf den Einwand der Interviewerin, dass mit Hilfe der dynamischen Visualisierung aber nicht nur ein einzelnes, sondern ganz viele Beispiele betrachtet werden können, erwidert Verena, dass ihr dies auch zum „*Verständnis des Satzes*“ helfe, aber „*trotzdem kein Beweis*“ sei (Z.23-24). Dies stimmt mit ihrer Auffassung überein, die Visualisierung als „Beispiel“ und „ Veranschaulichung“ einzustufen.

Als die Interviewerin nur mit „*Aha*“ (Z.25) antwortet, schiebt Verena zunächst einschränkend ein: „*Für mich*“ (Z.26) hinterher, und als auch hierauf nur ein weiteres „*Aha, ok*“ (Z.27) als Reaktion folgt, stellt Verena die Gegenfrage, ob es denn für die Interviewerin ein Beweis sei. Durch die ausbleibende Bestätigung ihrer Einschätzung lässt sich Verena zumindest an dieser Stelle durchaus verunsichern. Möglicherweise waren die Bemühungen, eine Atmosphäre zu schaffen, in der man sich unbefangen äußern konnte, an dieser Stelle bei Verena nicht so erfolgreich, so dass sie eine Hierarchie und keine Gleichberechtigung zwischen den Gesprächspartnern empfindet. Dennoch hält Verena an ihrer Einschätzung fest und versucht, diese mit neuen Argumenten zu stützen. Dass sie dabei zunächst eine etwas wirre Formulierung: „*aber nur, weil es überall so ist, heißt das nicht, dass es immer so* ...“ (Z.30-31) wählt, ist ein weiteres Indiz dafür, dass die mangelnde Zustimmung sie in gewisser Weise verunsichert. Im zweiten Anlauf aber ist ihre Argumentation dann schlüssig, indem sie sagt:

33 V: [..] Aber nur weil das auf den Punkten, wo ich es
34 gerade ausprobiert hab, so ist, heißt das nicht, dass es immer so
35 sein muss.

Im Lichte dieser Aussage kann nun auch die vorangegangene Textpassage verstanden werden: das „*überall*“ (Z.31), sind all die „Punkte, wo ich es gerade ausprobiert hab“ (Z.33-34), also alle Punkte auf dem Kreisbogen der vorliegenden Zeichnung, bei denen Cinderella das Messergebnis für das Winkelmaß geliefert hat. Das „immer“ (Z.32) hingegen ist als „immer“ im logischen Sinn zu verstehen, was bedeutet, als Nachweis von Allgemeingültigkeit.
Für Verena geht das Ziehen mit dem Programm folglich nicht über den Status des „Ausprobierens“ hinaus. Ihre weitere Äußerung, „*dass es immer so sein muss*“ (Z.34-35), macht deutlich, dass ein Beweis für Verena in jedem Fall eine verifizierende Funktion hat, denn sie stellt sich ja die Frage, ob ein Sachverhalt immer gilt. Diese Frage kann für sie die dynamische Visualisierung nicht beantworten, denn das Ausprobieren findet nur an endlich vielen Punkten statt, so dass, auch wenn das Ergebnis des Ausprobierens ist, dass der Winkel 90° groß ist, für Verena nicht der Schluss gezogen werden kann, dass dies immer der Fall sein muss. Dieser Schluss ist für sie nur durch die Kenntnis des Umfangswinkelsatzes zulässig, denn sie führt weiter aus:

37 V: Das muss immer so sein, weil wir das ja mit dem Umfangswinkelsatz,
38 eh, bewiesen haben.

Auch wenn Verena das Wort „warum“ nicht explizit in den Mund nimmt, ist meines Erachtens die Interpretation zulässig, dass der Beweis des Umfangswinkelsatzes, den sie einfordert, die Zusammenhänge offenlegt und damit die Frage nach dem Warum klärt. Damit geht Verenas Anspruch an einen Beweis über eine rein verifizierende Funktion hinaus, indem sie ihm auch eine begründende Funktion zuweist. Darüber hinaus setzt Verena den Thalessatz, indem sie ihn als Sonderfall des Umfangswinkelsatzes versteht, in einen größeren Gesamtkontext, so dass hier durchaus zusätzlich Aspekte des lokalen Ordnens zu erkennen sind. Dadurch, dass der Umfangswinkelsatz allgemein (für alle möglichen Winkelmaße) bewiesen wurde, ist gezeigt, dass alle Punkte, von denen aus ich eine Strecke unter einem bestimmten Blickwinkel sehe, auf einem Kreisbogen liegen. Damit ist natürlich insbesondere gezeigt, dass dies für ein Winkelmaß von 90° gilt, so dass hier gar kein zusätzlicher Beweis mehr erforderlich ist. Wie gesagt ordnet Verena den in der Fragestellung betrachteten Fall in einen größeren Kontext ein und kann somit für sich sowohl die Frage beantworten, **ob** der Sachverhalt gilt, als auch die Frage, **warum** er gilt. Überdies lassen sich bei ihr, über die verifizierende und die begründende Funktion eines Beweises hinaus, auch Ansätze des Systematisierens finden.

Fallstrukturhypothese „Verena“

Für Verena hat ein Beweis sowohl eine verifizierende als auch eine begründende Funktion. Dabei ist für sie der Satz des Thales nur ein Sonderfall des Umfangswinkelsatzes, so dass zudem auch die Tätigkeit des Systematisierens in Ansätzen bei ihr zu erkennen ist.

5.2 Beweis als Mittel zur Verifikation

Erwartungsgemäß spielt die Rolle der Verifikation beim Beweisen auch bei den Studierenden eine wichtige Rolle. Für viele ist dies die wichtigste, für manche auch - zumindest im Kontext der konkreten Fragestellung - die einzige Funktion eines Beweises.
Im Folgenden werde ich die Studierenden, für die dieser Aspekt am wichtigsten ist, die „Wahrheitssicherer" nennen. Diese Gruppe allerdings ist in sich nicht homogen, sondern trennt sich in zwei Lager, die einander diametral gegenüberstehen. Für das kleinere Lager der „Wahrheitssicherer" nimmt die DGS keine Beweisfunktion ein, weil sie dem Anspruch an Allgemeingültigkeit, den diese Gruppe einfordert, nicht gerecht werden kann. Bei meinen ausgewählten Interpretationen stellt Joachim einen Repräsentanten dieser Position dar. Für ihn kann die DGS keine Allgemeingültigkeit nachweisen, da in der Pixelgeometrie der Computerdarstellung immer nur endlich viele Fälle überprüft werden können und damit niemals alle. Eine ähnliche Position vertritt Lara, eine Studentin in Examensnähe, die dem oberen Leistungsdrittel zugeordnet werden kann, wenn sie sagt:

```
30  La: (..). Ja, man kann ja trotzdem nicht (.) jeden Fall wirklich
31      durchspielen, so, den es gibt. Man kann sich nur ganz, ganz viele
32      Fälle aussuchen, aber das ist ja immer noch kein Beweis dafür,
33      dann.
```

Dabei hat Lara allerdings nicht so sehr die endliche Menge der Pixel der Computerdarstellung vor Augen, als vielmehr die Tatsache, dass man unendlich viele Strecken AB als Durchmesser des Kreises und damit auch unendlich viele Kreise zur Verfügung hätte, so dass man niemals an allen Fällen nachmessen könnte, ob der Winkel wirklich immer 90° groß ist.
Auch die Einschätzung von Samuel, einem Erstsemesterstudierenden aus dem oberen Leistungsdrittel, geht in diese Richtung:

```
3    S: Nen, Beweis, nee! Also das ist ja nur ne, eh, ne Skizze und (.)
4       rein theoretisch könnte es passieren, dass da irgendwo 'nen Punkt
5       sein kann, weil man ja nicht genau ziehen kann. Und dann könnte es
6       sein, dass irgendwo unterhalb der Geraden, dann irgendwo ein Punkt
7       ist, auf dem Kreis, der dann nicht unbedingt 90° ist. D.h.,
```

das ist nur ’ne Skizze oder ’ne Zeichnung, mit der kann man es
veranschaulichen, aber niemals beweisen.

Im Wesentlichen sind bei den Äußerungen der Studierenden zwei Argumente bedeutsam. Das erste bezieht sich auf die potenzielle Überprüfung aller Fälle. Diese Möglichkeit wird aufgrund der Technik (nur endlich viele Pixel) oder aufgrund der Tatsache, dass das Winkelmaß an unendlich vielen Kreisen gemessen werden müsste, ausgeschlossen. Das zweite Argument bezieht sich auf die Darstellung innerhalb der DGS, die immer ungenau ist und bei der immer idealisiert werden muss. So werden Punkte durchaus mit einer relativ großen Fläche dargestellt, Geraden haben einen treppenförmigen Verlauf, und bei Messungen von Strecken oder auch Winkeln muss i.A. gerundet werden, so dass das Ergebnis im Allgemeinen nicht exakt ist. Aufgrund eines oder beider Argumente gibt es daher Studierende, die der DGS die Möglichkeit absprechen, einen Sachverhalt zu verifizieren. Der Anteil dieser Studierenden an allen, die von mir interviewt wurden, ist allerdings klein.

Diesem steht das zweite Teillager der „Wahrheitssicherer“ gegenüber, die der DGS eindeutig eine Beweisfunktion zusprechen. Als Repräsentantin für diese Gruppe steht in meinen ausgewählten Interpretationen Melanie, die die Auffassung vertritt, dass man mit einer DGS sehr leicht, mit wenig Aufwand und daher viel effizienter als mit einem formalen Beweis alle möglichen Fälle überprüfen kann. Damit ist ihrem Anspruch, einen Sachverhalt durch einen Beweis zu verifizieren, Genüge getan, so dass die dynamische Visualisierung von ihr als Beweis akzeptiert wird.

Besonders deutlich wird die Auffassung, mit einer DGS alle Fälle überprüfen und damit Allgemeingültigkeit nachweisen zu können, bei Juliane, einer Studentin in Examensnähe, die im unteren Leistungsdrittel ist, wenn sie sagt:

Ju: Also man hat ja auch die schöne Funktion, dass man ehm die
Winkelgrößen messen kann,
I: Hhmm.
Ju: und wenn man die einstellen würde, und dann wirklich jeden Punkt
(.) so einzeln abgehen würde, vom Kreis, so ganz langsam Schritt
nach Schritt, würde man ja sehen, dass sich der Winkel nicht
ändert.

```
 I: Hhmm.
Ju: Und dann würd mir das reichen.
```

Der Äußerung von Juliane kann entnommen werden, dass sie es für möglich hält, mit dem Programm **alle** Punkte des gezeichneten Kreises zu überprüfen. Dabei weist der Ausdruck „*ganz langsam*" (Z.9) auf besondere Sorgfalt und Konzentration bei dieser Prüfung hin. Eine Deutungsoption der Äußerung, dass es bei diesem Prozess möglich ist, „*jeden einzelnen Punkt abzugehen*" (Z.8-9) wäre diejenige, dass sie dem Kreis nur eine endliche Anzahl von Punkten zuspricht. Beim „*abgehen*", „*so ganz langsam Schritt nach Schritt*" (Z.9-10) würde dabei **jeder** Punkt erreicht und insgesamt der ganze Kreis durchlaufen, um schließlich „am Ende anzukommen". Dieses Vorgehen, welches zwar theoretisch, nicht aber praktisch realisierbar wäre, stellt für jemanden, in dessen Grundvorstellung ein Kreis nur endlich viele Punkte hat, eine echte Verifikation dar, da alle möglichen Fälle überprüft werden können. Die Vorstellung der endlich vielen Punkte könnte durch die Pixeldarstellung des Computers begünstigt werden. Es kann aber auch nicht völlig ausgeschlossen werden, dass für Juliane eine unendlich Anzahl von Schritten nötig sind, um den Kreis zu durchlaufen. In diesem Falle wäre ein Durchlaufen des Kreises und ein Ankommen an einem Endpunkt weder theoretisch noch praktisch realisierbar, so dass eine derartige Vorstellung nicht wirklich zu den anderen Äußerungen Julianes passt, die auf konkret durchführbare Handlungen rekurrieren. Letztlich ist aber irrelevant, ob an einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Punkten das Messergebnis des Programmes abgelesen wird: entscheidend ist, dass für Juliane **nach** Durchführung der Messung, was durch das zeitlich nachgeordnete „*dann*" (Z. 13) erkennbar wird, kein weiteres Beweisbedürfnis mehr besteht.

Auch Marietta, eine Erstsemesterstudierende aus dem mittleren Leistungsdrittel, akzeptiert die dynamische Visualisierung als Beweis, weil sie damit Allgemeingültigkeit nachweisen kann:

```
Ma: Also ich beweise ja damit, dass es überall, überall auf dem
    Kreisbogen, dass der 90° ist.
```

Zuletzt möchte ich noch die Äußerung von Rebecca anführen, einer Studierenden im höheren Semester, die die Zwischenprüfungsklausur zwar erst im zweiten Anlauf bestanden, dabei aber gut abgeschnitten hat und bezüglich dieser Leistung dem oberen Leistungsdrittel zuzuordnen ist.

```
R: Ja. Weil, wenn ich hier dran ziehe, dann sehe ich ja, dass das immer so bleibt. Das wär ja bei ner richtigen Zeichnung nicht.
I: Was ist jetzt ne richtige Zeichnung?
R: Ja, wenn ich es auf Papier so zeichne , dann könnte ich ja gar nicht sehen, wie das (.), also klar, ich könnte mehrere Zeichnungen machen, aber so ist das ja viel bequemer und ich kann es wirklich (..) sonst wo hinziehen und sehe das es wirklich (.) immer so bleibt.
```

Während nur wenige Studierende, die einen Beweis als ausschließliches Mittel zur Verifikation ansehen, einer DGS die Beweiskraft absprechen, ist der Anteil derjenigen, die ihr Beweiskraft zusprechen, sehr viel höher. Wenn es keine Zweifel mehr an einem Sachverhalt gibt und es bei einem Beweis nur darauf ankommt, die Allgemeingültigkeit dieses Sachverhalts zu zeigen, **ist** für viele Studierende die dynamische Visualisierung ein Beweis. Ganz deutlich wird dies noch einmal in der Äußerung von Arne, einem Studierenden in Examensnähe im unteren Leistungsdrittel:

```
A: Und wenn ich das jetzt so sehe und das bewege, ehm, (..) wenn man das sieht, (..) man schätzt es ja meist schon als rechten Winkel ein. Da würde ich dann einfach auch (...), würde ich dann schon davon ausgehen, dass das dann auch überall der rechte Winkel ist.
I: Hhm
A: Und würd das dann auch, aufgrund dass es die Tatsache ist, dass es ja im Programm so funktioniert, dann auch annehmen, dass es richtig ist. Dann müsste ich den Beweis jetzt nicht mehr (.) machen.
```

Auf die Nachfrage der Interviewerin, ob ein formaler Beweis denn überhaupt keinen Mehrwert mehr erbringen würde, ergänzt Arne:

```
A: Ich hab’s gesehen und ich weiß, dass es so ist, fertig. Und der Beweis bringt mir auch nichts anderes. Da muss ich auch nur akzeptieren, dass es so ist, und fertig.
```

Hier wird noch einmal ganz deutlich, dass die dynamische Visualisierung für Arne Beweiskraft hat. Sowohl die Visualisierung als auch ein Beweis haben als Ergebnis die Wahrheitssicherung; die Erkenntnis, dass ein Sachverhalt gilt. Während man jedoch beim Einsatz einer DGS „sieht“ und damit „weiß, dass es so ist“, muss es beim formalen Beweis „akzeptiert“ werden, „dass es so ist“. Damit geht die Visualisierung für Arne sogar über einen formalen Beweis hinaus: durch diese kann er wirklich „Wissen“ generieren. Der Beweis hingegen wird nur „akzeptiert“, was bestenfalls als „angenommen“, im Kontext aber sehr viel mehr als „hingenommen“ gedeutet werden kann. In jedem Fall wird der formale Beweis von außen an Arne herangetragen und nicht von ihm eigenständig erarbeitet.

5.3 Beweis als Mittel zur Begründung

Neben den Studierenden, die einen Beweis als Mittel zur Verifiaktion ansehen, gibt es andere, die darüber hinaus den Anspruch an einen Beweis haben, dass dieser eine Begründung dafür liefern soll, warum ein Sachverhalt gilt. Diese Studierenden sind in der Regel nicht damit zufrieden, einen Sachverhalt lediglich zu visualisieren. Eine Repräsentantin dieser Gruppe wird in meinen ausgewählten Interpretationen von Kira verkörpert. Für sie ist nicht nur von Interesse, dass der Winkel immer 90° groß ist (was sie nach der Visualisierung nicht mehr anzweifelt), sondern auch die Frage nach den Zusammenhängen.
Ebenso urteilt Cornelia, eine Studierende in Examensnähe aus dem oberen Leistungsdrittel:

C: Ja, also, ich hab ja schon die ganze Zeit eh so gesagt, dass
mir das (.) nicht (.) richtig ehm (..). Klar, ich seh das jetzt,
dass es so ist. Ich seh jetzt auch, dass es der Thaleskreis ist,
hab ich beim ersten (.), ehm, da war, das war ja noch irgendwas
anderes? Aber, ehm, also, das ist für mich kein Beweis. Also, wenn
ich, wenn ich das sehe.
I: Hhmm?
C: Gut, dann ist es halt so, aber, aber warum das alles so ist, wird
ja dadurch eigentlich (..) nicht ersichtlich, also.

Und auch Leo, ein Student in Examensnähe aus dem oberen Leistungsdrittel, argumentiert in dieselbe Richtung:

```
Le: (6 sec) Ähäm na gut, man sieht das ja hier, dass das halt so ist. Ich meine, was soll, ich glaube nicht, dass dann, dass man dann zweifeln würde, (..) dass das halt nicht so ist.
 I: Hhmm
Le: Man sieht ja, da ändert sich nichts.
 I: Hhmm
Le: Und bleibt so (..), aber (.) damit (.) ist halt wie gesagt, nicht erklärt, noch lang nicht erklärt, (..) warum das halt so ist.
```

Für die meisten Studierenden, für die ein Beweis eine Antwort auf eine „Warum-Frage“ geben soll, kann eine DGS demnach keine Beweisfunktion übernehmen. Darüber hinaus gibt es aber auch Studierende, die zusätzlich zu einem Beweis noch großen Wert auf das „Sehen“ in einer DGS legen. So stellt beispielsweise Franziska, eine Erstsemesterstudierende aus dem oberen Leistungsdrittel durchaus die Frage nach dem „Warum“, die für sie nicht durch die ausschließliche Visualisierung beantwortet werden kann. Dennoch ist die Visualisierung für sie sehr wichtig, so dass sie auf diese auch nicht verzichten möchte:

```
F: Also, ich wär’ schon davon überzeugt, dass das immer 90 Grad sind, aber ich würd’ dann wieder gerne die Begründung haben, warum das so ist. Ja.
I: Ja, okay. Und, ehm, die Begründung würde der Beweis dann liefern?
F: Ja.
I: Hmhm. Und wenn du jetzt nur den Beweis hättest, ohne die, die Anschaulichmachung, sage ich jetzt mal, in dem Programm, würde dir das dann auch reichen?
F: (... ) Nee, dann will ich es natürlich auch noch mal sehen (lacht). Mit meinen eigenen Augen.
```

Es wird deutlich, dass Franziska der Visualisierung eine hohe Überzeugungskraft attestiert. Und obwohl der formale Beweis die Antwort auf die Warum-Frage geben kann, ist dieser allein für sie nicht hinreichend, denn dieser kann das „mit den eigenen Augen sehen“ (Z.9-10), dass für sie unabdingbar ist, nicht leisten.

Bemerkenswert ist ebenso die Einschätzung von Thilo, einem Studenten im mittleren bis unteren Leistungsdrittel, der zwar feststellt, dass eine Begründung durch die Visualisierung nicht geliefert wird, diese aber dennoch als Beweis anerkennt. Auf die Frage, ob die dynamische Visualierung einen Beweis ersetzen kann, antwortet er:

```
T: (9 Sek. Pause) Für mich persönlich vielleicht schon. Aber, es muss
   ja wieder begründet sein, es reicht ja wieder nicht aus, wenn ich
   nur sage, dass ich, dass ich es sehe oder nachvollziehen kann,
   denn ich muss ja schon den Beweis liefern. Die Begründung.
```

Thilo setzt einen Beweis mit dem Liefern einer Begründung gleich. Das Begründungsbedürfnis allerdings scheint allerdings eher von außen eingefordert sein, als seinem eigenen inneren Bedürfnis zu entspringen. Für ihn selbst ist die Visusalisierung und das dadurch möglich gemachte Sehen und Nachvollziehen erst einmal in Ordnung. Es stößt dann auf Defizite, wenn der Sachverhalt gegenüber einem Dritten kommuniziert oder gerechtfertigt werden muss.
Und auch Henriette, eine Erstsemesterstudierende aus dem unteren Leistungsdrittel, stellt fest, dass die Frage nach der Begründung noch nicht beantwortet ist. Nachdem sie die dynamische Visualisierung für sich als Beweis akzeptiert hat, weil sie damit alle Fälle überprüfen kann, antwortet sie auf die Nachfrage der Interviewerin, ob denn dann noch etwas fehle, mit:

```
He: Weiß ich nicht. Eigentlich soll man ja alles begründen. Deswegen
    denke ich mal, müsste man es schon [begründen, G.W.].
```

Auf die Nachfrage, ob dies dann noch einen Mehrwert bringt, antwortet sie allerdings:

```
He: Nee! Eigentlich nicht. Eigentlich sieht man da ja, dass da ein 90°
    Winkel ist.
```

Und Sophie, eine Studentin in Examensnähe aus dem oberen Leistungsdrittel, äußert sich:

```
So: Das ist eher so die (...) Zeichnung, dies ist halt das Praktische
    eher dazu, wie es funktioniert, ehm, man kann's ausprobieren, man
    sieht, wie es ist, und (..) bei einem Beweis, da müsste man halt
    genau sagen, warum ist da jetzt ein 90° Winkel, [..], das Warum
    eher, das dann erklären.
```

Auf die Nachfrage der Interviewerin, ob die Frage nach dem Warum denn in dieser Situation wichtig sei, antwortet Sophie:

```
So: Also ich seh das jetzt schon ein, dass das hier ein 90° Winkel sein muss, damit der Punkt da drauf [auf dem Kreisbogen, G.W.] liegt. Mir würd’s persönlich jetzt reichen, aber ich weiß ganz genau, dass das den Dozenten in den Vorlesungen nicht reichen würde (lacht). Und so etwas merkt man sich dann eher, wenn man es halt selbst ausprobiert hat, und dadurch, eh, ja, habe ich jetzt festgestellt, dass es dann halt nur klappt, mit 90° und dann sehe ich das auch eher ein. Dann verstehe ich, ist es verständlicher. Würd ich jetzt sagen.
```

Sowohl Thilo, als auch Henriette und Sophie ist foglich klar, dass bei einem Beweis nicht nur die Frage nach der Gültigkeit eines Sachverhalts gestellt werden kann, sondern auch die Frage nach den Begründungszusammenhängen. Dieses hält sie allerdings nicht davon ab, die Aussage nach durchgeführter dynamischer Visualisierung zu akzeptieren und für sich selbst dadurch auch zufriedengestellt zu sein. Darüber hinaus schwingt sowohl bei Henriette als auch bei Sophie deutlich die Orientierung an einer äußeren Autorität mit, die das Stellen der „Warum-Frage“ oktroyiert. Es liegen keine Hinweise vor, dass diese Fragestellung bei den beiden intrinsisch motiviert ist. Ganz im Gegenteil gibt Henriette offen zu, dass sie für sich selbst keinen Mehrwert in deren Beantwortung sieht. Sophie hingegen hat für sich sogar das Gefühl, dass sie explizit durch die Visualisierung die Zusammenhänge versteht. Sie kann alles „*selbst ausprobieren*“ (Z.35) und dabei beobachten, dass der Winkel in C nur 90° groß ist, wenn der Punkt C auf dem Thaleskreis über AB liegt. Dieses Ausprobieren und Selbst-Erfahren hat für Sophie den Stellenwert, den Sachverhalt nun „*eher einzusehen*“ und ihn zu „*verstehen*“ (Z.36-37). Wenn man impliziert, dass eine Antwort auf eine „Warum-Frage“ genau dies liefert, nämlich Einsicht und Verständnis, so hat Sophie das Gefühl, genau dieses durch die dynamische Visualisierung zu bekommen, und zwar mehr, als durch einen formalen Beweis.

Das Gefühl, durch das Ziehen und Beobachten mit einer DGS auch eine Antwort auf die Frage nach dem „Warum“ zu erhalten, ist durchaus häufiger zu finden. So antwortet beispielsweise Helena, eine Erstsemesterstudierende aus dem mittleren Leistungsdrittel auf die Frage, ob sich auch das Warum durch das Sehen mit dem Programm erklärt, wie folgt:

```
H: (5 sec Pause) Ja irgendwie schon. (Lacht) Irgendwo schon. Weil,
   wenn man das zum Beispiel dann (.), man kann das ja alles so
   markieren, ähäm wie groß zum Beispiel der Winkel ist und der
   andere Winkel und dann, (.) wenn man das jetzt zieht, dann
   verändern sich ja auch die Winkel und, ja, dann kann man ja das
   dann auch schon (.) sehen.
```

Helena argumentiert hier ähnlich wie Diana in meinen Interpretationen. Diese hat im Kontext „Thalessatz“ das dynamische Bild vor Augen, wie sich beim Ziehen die Winkelmaße verändern, bestimmte Winkel größer oder kleiner werden. Auch Helena scheint ein ähnliches Bild vor Augen zu haben, denn ihre Äußerung „*man kann das ja alles so markieren*“ (Z.85-86) weist darauf hin, dass sie die Winkelmaße vom Programm anzeigen lässt und dann deren Veränderung beim Ziehen beobachtet. Dadurch stellt sich bei ihr das Gefühl ein, die Zusammenhänge durchschaut zu haben. In der Tat ist es ja auch, bezogen auf die klassische Thaleskreissituation, wie in Abbildung 5.3 dargestellt, so, dass die Veränderungen der Winkelmaße in A und in B anschaulich evident sind: bewege ich den Punkt C auf dem Halbkreis ausgehend von B in Richtung A, so ist aufgrund der Enthaltenseineigenschaft klar, dass der Winkel in A größer und der in B kleiner wird. Nicht klar allerdings ist, dass der Winkel in C gleich groß bleibt. Dies ist jedoch weder Helena noch Diana bewusst, denn beide haben das Gefühl, sich die komplexen Zusammenhänge durch die Visualisierung besser vorstellen zu können und damit auch durchschaut zu haben.
Insgesamt lässt sich sagen, dass somit zwar für die meisten Studierenden, für die ein Beweis die Frage nach dem „Warum“ beantworten soll, die Antwort nicht durch die dynamische Visualisierung gefunden werden kann, dass es aber auch hier wieder Ausnahmen gibt. Einige Studierende haben sogar das Gefühl, durch die Visualisierung sehr viel mehr Verständnis zu erlangen als durch einen formalen Beweis.

5.4 Beweis als Mittel zum Systematisieren

In meinen ausgewählten Interpretationen wurden bei Verena Ansätze deutlich, einem Beweis die Funktion des Systematisierens zuzuweisen. Auch bei Hannes, einem Erstsemesterstudenten aus dem mittleren Leistungsdrittel, werden Spuren dieser Beweisfunktion sichtbar. Auf die Frage, ob eine dynamische Visualierung einen Beweis ersetzen kann, antwortet er:

Ha: Also für mich ist der Beweis immer noch (.) dann die Tatsache, dass ein (..) über den Mittelpunktswinkel geht.

I: Ja

Ha: Also für mich ist entscheidend, wenn der Mittelpunktswinkel, (.) der ist ja fest, der ist einfach fest, ein fester Wert, der bleibt immer 120 Grad oder der bleibt halt immer 180 Grad, wenn er genau auf dieser (.) Geraden von *A* nach *B* aufliegt, ehm, dann weiß ich, dass alle anderen Punkte auf dem Kreisbogen für mich 90 Grad haben.

I: Hhmm

Ha: Aber, darauf dann zu schließen, wenn ich nur vorher erst die Bögen sehe und weiß, da, an dem Punkt ist das, an dem Punkt ist das, an dem Punkt ist das, das sind einfach dann zu viele Fakten. Also, für mich ist der Beweis dann viel wichtiger, dass wenn ich da 120 Grad habe, dann sind alle anderen so. Also dann brauche ich mir die anderen ja gar nicht mehr betrachten. Ich brauche ja nur, nur eine Ur-, ich muss ja nur eine Ursprungssituation kontrollieren. Ist da 180 Grad? Ja, dann ist alles andere 90 Grad.

Für Hannes ist der Thalessatz, ebenso wie für Verena, nur ein Sonderfall des Umfangswinkelsatzes. Durch den Beweis, dass der Mittelpunktswinkel immer doppelt so groß wie der zugehörige Umfangswinkel ist, weiß er für alle möglichen Winkelmaße, dass bei konstantem Mittelpunktswinkel auch der Umfangswinkel gleich groß bleibt. Darüber hinaus sieht Hannes im Beweis eine entscheidende Strukturierungshilfe: müsste er, bei Einsatz der DGS, an allen möglichen Punkten das Winkelmaß überprüfen, um dann doch nur viele Einzelfakten zu kennen, erlaubt ihm der Beweis des Umfangswinkelsatzes, „*nur eine Ursprungssituation kontrollieren zu müssen*“ (Z.21-22). Auf diese Weise kann Hannes einem Beweis einen unmittelbaren Nutzen abgewinnen, indem er damit eine zunächst sehr komplex erscheinende Situation auf einen einzigen Fall reduzieren kann. Daher kann er für sich auch aus einem Beweis sehr viel mehr Gewinn ziehen, als dies aus der dynamischen Visualisierung möglich wäre: zum einen kann er, bezogen auf den Kontext „Thalessatz“, anhand einer einzigen Situation

Allgemeingültigkeit nachweisen, zum anderen ist dieser Nachweis nicht nur der Beweis des Sonderfalls, in dem der Mittelpunktswinkel 180° groß ist, sondern sogar der Beweis für alle anderen Winkelmaße auch. Somit gehen Hannes' Überlegungen bezüglich eines Beweises über den konkreten Fall des Thalessatzes hinaus und setzen den vorliegenden Sachverhalt in einen größeren Kontext. Damit können in Hannes' Äußerungen durchaus Aspekte des lokalen Ordnens und Systematisierens gesehen werden.
Insgesamt gesehen kamen bei den von mir befragten Studierenden Bezüge zur Beweisfunktion des Systematisierens selten vor. Die überwiegende Mehrheit der Interviewten nahm mit ihrer Antwort unmittelbar Bezug auf den Thalessatz, ohne diesen in einen größeren Kontext zu setzen. Allerdings wurde ja in der Frage auch nur der Thalessatz thematisiert. Möglicherweise hätte sich bei einer etwas anderen Fragestellung auch das Ergebnis etwas anders dargestellt. Dennoch erscheint es mir im Gesamtkontext einleuchtend, dass für die Studierenden andere Beweisfunktionen deutlich im Vordergrund stehen.

5.5 Beweis als Mittel zur Kommunikation

Auch die Beweisfunktion der Kommunikation wird in den Interviews wiederholt sichtbar, z.B. bei Thilo (s. Abschnitt 5.3). Thilo erkennt für sich die dynamische Visualisierung als Beweis an, hält aber dennoch einen anschließenden formalen Beweis für erforderlich. Auf die Bitte der Interviewerin, dieses zu begründen, antwortet er:

T: (...) Ja, man weiß dann, dass man es richtig verstanden hat (..)
und andere können (.), ja, können es nachvollziehen (.), wie man
darauf kommt.

Thilo sieht in einem formalen Beweis für sich selbst den Gewinn, dass er nun überprüfen kann, ob er „*es richtig verstanden hat*“ (Z.5), denn nur dann wird er in der Lage sein, den formalen Beweis überhaupt führen zu können. Zudem wird dadurch die zugrundeliegende Argumentation für andere transparent gemacht. Damit spiegelt Thilo die Argumente, einem Beweis eine Kommunikationsfunktion zuzuweisen, fast vollständig wieder. Diese waren der Transport und die Diskussion von mathematischen Ergebnissen, die Hinterfragung von einzelnen Beweisschritten auf Verständnis und Vollständigkeit und ein sozialer Aushandlungsprozess über die Akzeptanz von Argumenten. Also lässt sich feststellen, dass die Überlegungen in der Theorie wirklich in der Vorstellung von Individuen zu finden sind (zumindest bei Thilo).

Allerdings werden auch andere Motive, einem Beweis Kommunikationsfunktion zuzuweisen, als die eben genannten, in den Interviews deutlich. Hierzu die Darlegungen von Elke, einer Erstsemesterstudierenden aus dem unteren Leistungsdrittel:

```
E: Nein. Also der Beweis, das ist für mich in der Hinsicht wichtig, dass ich, ehm, das halt so beweisstrukturmäßig sehen kann, sonst sehe ich es ja nur. Ich kann’s ja sonst, wie gesagt, wieder nur optisch sagen: es ist so. Und durch diesen formalen Beweis, den wir da dann gemacht haben, kann ich sagen: Ja, so kann ich es aber wirklich schriftlich auch irgendwie beweisen. (...) Weil, ich kann ja nicht sagen, in der Klausur, ja das ist so, weil, wenn ich das so verschiebe, ist das halt so, ne. (..) Das ist so eigentlich so mein Problem einfach, immer wenn ich, ehm, ich seh das hier so, und das ist auch für mich logisch, aber ich kann es niemals wirklich so auf’s Papier bringen, sagen, das ist deswegen so. Sondern nur, weil ich es halt sehe. [...] Ja, also, ich finde es einfach immer schwierig, das, was ich sehe und auch weiß, dass es so ist, auf’s Papier zu bringen, faktisch gesehen. Diese Bewegung festzuhalten. Weil ich ja nicht zeigen kann, z.B. ja, wenn ich das bewege, ist das so, und, eh, das muss ich ja dann auch irgendwie beweisen und festhalten. Und für mich ist es dann einfach, einfacher, wenn ich sage: Ja, hier, schau mal, und so ist das, und deswegen ist das so, ja.
```

Es wird deutlich, dass Elke sich in einem Konflikt befindet. Dass die dynamische Visualisierung ein Beweis ist, steht für sie außer Zweifel und wird von ihr auch ohne Zögern bejaht (gleich als erste Antwort auf die Frage, in einem Teil des Interviews, der hier nicht abgedruckt ist). Auch in dem oben angeführten Zitat wird dies noch einmal bestätigt, beispielsweise in der Äußerung: „*das, was ich sehe und auch weiß, dass es so ist*“ (Z.29-30). Dabei unterscheidet Elke allerdings zwischen „*optisch sagen*“ (Z.20) und „*schriftlich auch irgendwie beweisen*“ (Z.22). Das „*optische Sagen*“, was durch die DGS erfolgt, endet eindeutig in der Aussage: „*es*

ist so“ (Z.20). Damit ist Elke auch zufrieden, und es sind für sie keine Fragen mehr offen, wie ihre Äußerung „*und das ist auch für mich logisch*“ (Z.26) deutlich macht. Für sie selbst ergibt sich folglich nach der dynamischen Visualisierung kein Bedürfnis mehr nach weiteren Ergänzungen, wie dies ein formaler Beweis wäre. Durch die äußeren Umstände jedoch wird sie gezwungen, diesen dennoch zu führen, da es beispielsweise in der Klausur schlichtweg nicht möglich ist, die Visualisierung derart zu dokumentieren, dass auch der Korrektor auf den gleichen Wissensstand gebracht werden kann, den Elke durch den Einsatz der DGS - vermeintlich - erreicht hat. Ausschließlich das statische Bild, das Elke ihren Aufzeichnungen in der Klausur beifügen kann, kann nicht das leisten, was für sie die dynamische Visualisierung leistet, nämlich klar zu machen: „*schau mal, und so ist das, und deswegen ist das so, ja.*“ (Z.34-35).
An dieser Stelle werden zwei Gesichtspunkte deutlich: Zum einen hat Elke durch den Einsatz der DGS das Gefühl, die Zusammenhänge zu verstehen und zu sehen, „*deswegen ist das so*“ (Z.35). Dennoch ist sie „*niemals*“ (Z.26) in der Lage, schriftlich zu dokumentieren, „*das ist deswegen so*“ (Z.27). Elke ist sich folglich bewusst, das hier eine Diskrepanz offenbar wird. Sie weiß, dass ihr einziges Argument für die Richtigkeit der Aussage ist, zu sagen: „*nur, weil ich es halt sehe*“ (Z.28). Daher unterscheidet sie auch zwischen „*optisch sagen: es ist so*“ (Z.20) und „*schriftlich auch irgendwie beweisen*“ (Z.22). Obwohl die Beobachtungen, die sie mit Hilfe des Programms machen kann, „*logisch*“ (Z.26) für sie sind, kann sie sie nicht außerhalb des visuellen Kontextes schildern und begründen. Diese Unzulänglichkeit allerdings mündet für sie nicht in der Einsicht, dass die dynamische Visualisierung vielleicht doch nicht so ganz erklärt, warum ein Sachverhalt gilt. Stattdessen ist es für sie „*einfacher*“ (Z.34), die DGS einzusetzen und in ihrer Äußerung schwingt ein Bedauern mit, dass dies in bestimmten Situationen nicht möglich ist. Damit wird zum anderen deutlich, dass für Elke der formale Beweis nur aufgrund äußerer Rahmenbedingungen, genauer, aufgrund der Erfordernis der Kommunikation mit anderen, erforderlich ist. Sie selbst findet es „*immer schwierig*“ (Z.29), diesen durchzuführen und sieht für sich selbst offensichtlich auch keine Notwendigkeit, dies zu tun, denn sie weiß ja bereits durch das Sehen, „dass es so ist“ (Z.30).
Ähnliche Äußerungen finden sich auch bei Carla wieder, einer Erstsemesterstudierenden, die ihr Mathematikstudium mittlerweile abgebrochen und auch nie die Klausur in der Veranstaltung „Elemente der Geometrie“ mitgeschrieben hat. Sie antwortet auf die Frage, ob eine dynamische Visualisierung einen Beweis ersetzen könne, mit „*teilweise schon*“, so dass die

Nachfrage, ob sie ein Beispiel dafür benennen könne, erfolgt. Darauf antwortet sie:

Ca: (..) Also ein konkretes Beispiel jetzt nicht. Ich weiß nur, bei den Hausaufgaben halt, stand da halt, begründe oder beweise, und so, und wir haben das halt schon in der, ehm, in der Zeichnung gehabt, und wussten gar nicht, wie wir das (.) zusätzlich begründen sollten, weil man das halt sehen kann und (.) deswegen finde ich schon, dass man das (.) dadurch beweisen konnte.

Auch hier wird deutlich, dass die „*zusätzliche Begründung*“ (Z.7-8) für Carla selbst nicht notwendig ist und nur der Kommunikation mit den Tutoren der Veranstaltung geschuldet ist. Insgesamt lässt sich feststellen, dass somit zwar die Kommunikationsfunktion eines Beweises durchaus im Bewusstsein einiger Studierenden ist, dass aber nicht alle diese Funktion als Bereicherung und damit als hilfreich und notwendig ansehen, sondern in einigen Fällen auch als lästig und für den eigenen Erkenntnisgewinn nicht bedeutsam.

5.6 Rolle der DGS bei der Beweisfindung

In Kapitel 2.1.6 wurde die Rolle einer DGS beim Beweisen analysiert. Dies waren im Wesentlichen:

1. Eine Behauptung aufstellen und anschließend untersuchen
2. Eine Beweisidee entwickeln
3. Zentrale Beweisideen verdeutlichen
4. Das Erarbeiten von Beweisstrategien

Inwieweit die von mir befragten Studierenden in der Lage sind, die DGS für sich diesbezüglich gewinnbringend einzusetzen, wird in erster Linie bei der Untersuchung des Einsatzes des Zugmodus in Kapitel 6 herausgearbeitet. Doch auch bei der Fragestellung, inwieweit eine dynamische Visualierung einen Beweis ersetzen kann, kamen einge interessante Aspekte zu Tage, die ich hier kurz anführen möchte.

Diejenigen Studierenden, die nicht durch die Visualisierung in ihrem Beweisbedürfnis befriedigt waren, sondern noch einen formalen Beweis für notwendig erachteten, haben in der Regel im Einsatz der DGS eine Möglichkeit für sich gesehen, durch das Sehen eine Vermutung über einen Sachverhalt zu bekommen, um ihn dann anschließend zu beweisen. Als Beispiel hierfür sei Natalie genannt, eine Studentin in Examensnähe im mittleren Leistungsdrittel.

Auf die Frage nach der Ersetzbarkeit des Beweises durch die dynamische Visualisierung antwortet sie:

```
N: Ähäm es ist ja gut, dass ich erstmal das sehe, und vieles, was man
   sieht, dann nimmt man das erstmal an.
I: Hhmm.
N: Aber ja (..) vollkommend ausreichend (..) würde ich das jetzt auch
   nicht so sehen. Also da würde ich (.), da würd' man schon (.)
I: Was würd dir fehlen?
N: (...) Ja (...), 'ne Begründung, warum das so ist.
I: Hhmm.
N: Würd' mir fehlen. Ja, mir würd' auch der Beweis fehlen (..), weil,
   man will ja auch irgendwie beweisen (...), man will ja nicht nur
   alles glauben, was man sieht.
I: Hhmm.
N: Aber ich glaube, dass es grundlegend erstmal gut ist, wenn man es
   dann sieht, und dann kann man an den Schritt Beweis gehen.
```

Für Natalie ist die Visualisierung der Einstieg in den Beweis: sie hat dadurch etwas gesehen, was sie nicht nur „*glauben will*" (Z.17-18), sondern auch beweisen, und das bedeutet für sie, nach Begründungszusammenhängen suchen zu wollen.

Bei Helena allerdings, die ich bereits in Abschnitt 5.3 vorgestellt habe, wird eine Denkweise sichtbar, die der Auffassung von Natalie nahezu diametral gegenübersteht. Auf die Frage, ob die dynamische Visualisierung einen Beweis des Thalessatzes ersetzen kann, antwortet sie:

H: (unterbricht) Ja es hilft mir auf jeden Fall, wenn ich das (.), also, vielleicht (..), wenn echt so’n Satz da steht. Eh, (.) ja immer ein rechter Winkel, dann, vielleicht denkt man dann, das kann doch gar nicht sein. Da gibt es bestimmt irgendwo ’nen Punkt, wo es anders ist.

I: Aha.

H: Und wenn man das dann (.) echt mit dem Computer oder hier mit dem Programm sieht, dann (.) ok, dann glaubt man das doch, dass sich dann (.) vielleicht irgendwo anders der Winkel verändert, eh kleiner oder größer wird, und dann oben immer dieser 90 Grad Winkel (.) entsteht. Also doch, das hilft einem dann natürlich schon, ehm (.). Also dann (.) werden die anderen Gedanken quasi ausgelöscht, dass es eh, (.) eh, vielleicht irgendwo eine Möglichkeit gibt, wo der nicht 90 Grad ist.

[...]

H: Also das kann ich dann (.) ja besser behalten, wenn ich das, wenn ich, eh, quasi, wenn meine Zweifel, ja ausgelöscht werden (lacht).

I: Hhmm.

H: Und ich das echt sehen kann.

Ich denke, man kann Helenas Äußerung: „*Wenn echt so’n Satz da steht. Ja immer ein rechter Winkel*“ (Z.4-5) mit dem Wortlaut des Thalessatzes gleichsetzen. Allerdings wird in ihrer Erläuterung nicht deutlich, ob sie ausschließlich die Formulierung des Thalessatzes, oder zusätzlich einen formalen Beweis dafür vorliegen hat. Jedenfalls ist sie zunächst kritisch und meldet Zweifel an, ob der Sachverhalt denn wirklich allgemeingültig sei, oder ob es nicht doch „*irgendwo ’nen Punkt, wo es anders ist*“ (Z.6-7) gibt. Diese, für den Fall, dass kein formaler Beweis des Thalessatzes vorliegt, grundsätzlich berechtigten Zweifel werden für Helena dann allerdings durch die dynamische Visualisierung vollständig „*ausgelöscht*“ (Z.15), so dass sie nun von der Gültigkeit des Sachverhalts überzeugt ist.

Dieses - singuläre - Phänomen ist konträr zur originären Intention des Einsatzes einer DGS. Hierbei wird im Idealfall immer davon ausgegangen, dass ein interessantes Phänomen beobachtet wird und sich die Frage nach dem „Warum“ dadurch nahezu aufdrängt (vgl. das Zitat von Heinz SCHUMANN in der Einleitung zu diesem Kapitel). Für Helena ist es genau umge-

kehrt: Sie nutzt die DGS, und alle „*Zweifel*" (Z.34) und „*anderen Gedanken*" (Z.14) werden dadurch vollständig ausgeräumt.
Lehrende, die DGS in ihrem Unterricht einsetzen, sollten darum wissen, dass eine solche Einstellung durch den Einsatz von DGS erzeugt werden kann.

5.7 Orientierung an externen Autoritäten

Es besteht die Gefahr, dass für die Akzeptanz eines Beweises keine inhaltlichen Kriterien herangezogen werden, sondern eine Orientierung an einer äußeren Autorität stattfindet.
Dieser Aspekt tritt bei Charlotte deutlich zu Tage: sie erkennt an, dass es in der „mathematischen Welt" einen höheren Anspruch an einen Beweis gibt, als sie selbst ihn hat. Dies akzeptiert sie zwar, doch sie macht sich diesen höheren Anspruch nicht zu eigen. Damit sieht sie sich quasi außerhalb dieser „mathematischen Welt" verortet. Auch Thilo, Henriette und Sophie (s. Abschnitt 5.3) orientieren sich stark an äußeren Vorgaben und räumen freimütig ein, dass ihre eigenen Ansprüche durchaus von diesen abweichen.
Ebenso trifft Lara (s. Abschnitt 5.2) eine Unterscheidung zwischen „Mathematik" und „Alltag":

```
La: Also, als Mathematikerin würd' mich der Beweis natürlich, eh,
    mehr überzeugen, aber so (..) allgemein überzeugt es mich mehr,
    wenn ich sehe, dass es so ist. Weil es mir dann mehr vergegen-,
    vergegenwärtigt, weil, der Beweis, das sind dann ja Zahlen und so,
    und da rechnet man 'rum und (.) der ist nicht so anschaulich. Und
    (..), ja, natürlich weiß ich, wenn ich das beweise, dass es mir
    das deutlicher machen sollte, aber, ehm (.) ja eigentlich ist es,
    ist das Anschauliche (.) doch wichtiger, dann (lacht).
```

Hier wird deutlich, dass Lara eine deutliche Distanz zum Beweisen hat. Für sie verkörpert ein Beweis das „*Rumrechnen mit Zahlen*" (Z.56), was auf ein wenig zielgerichtetes Vorgehen hindeutet und zudem wenig mit Geometrie zu tun hat. Obwohl ihre Äußerung: „*wenn ich das beweise*" (Z.57) nahe legt, dass sie wohl dazu in der Lage ist, einen Beweis technisch durchzuführen, kann sie den Nutzen, „*dass es mir das deutlicher machen sollte* (Z.57-58), nicht daraus ziehen. Damit wird auch hier die Orientierung an externen Faktoren sichtbar:

Lara kann einen Beweis führen und macht dies auch, eben wenn es von ihr verlangt wird. Für sie selbst ist die Anschauung durch die dynamische Visualisierung wichtiger.
Besonders deutlich wird diese Orientierung an externen Autoritäten bei Juliane (s. Abschnitt 5.2):

```
26  Ju: (Lacht) Also, also ich stehe ja mit Beweisen generell auf
27      Kriegsfuß (lacht). Also ich finde das anschaulich, alles
28      konstruieren, immer sehr schön, und beim Beweisen tue ich mich
29      selber auch immer sehr schwer. Wo ich mir dann denke, warum machen
30      wir das? Ich sehe es hier doch, und wir sehen es alle (..) und
31      dann wissen es eigentlich auch alle.
32   I: Hhmm.
33  Ju: Aber für mich. Beweise gehören klar (..), gehören dazu, aber (.)
34      ich könnte auch gut ohne leben (lacht).
```

Auf die Nachfrage der Interviewerin, warum denn Beweise dazu gehören würden, antwortet Juliane, immer noch lachend:

```
36  Ju: (...) (Lachend) Es ist so! Das hat Herr Bender drei Semester lang
37      gepredigt (beide lachen). Ich hoffe, wenn er das liest: ,,Schöne
38      Grüße, (..) war sehr schön!‘‘ (beide lachen)
39   I: Das ist ein guter Satz.
40  Ju: (lacht) Und es gibt immer die meisten Punkte in der Klausur!
41      (lacht)
```

Trotz der fröhlichen Atmosphäre meint Juliane ihre Worte durchaus ernst: „Sehen“ bedeutet für sie „Wissen“, und ein allgemeingültiger Beweis wird von ihr nicht nur als mühsam, sondern als unnötig empfunden. Juliane findet keinerlei inhaltliche Gründe oder eigene Motive für einen Beweis, sondern fühlt sich ausschließlich durch äußere Faktoren wie Dozent und Klausurpunkte dazu verpflichtet, einen Beweis zu führen. Im Vergleich mit Charlotte (und auch Lara) stellt dies noch eine deutliche Steigerung dar, denn Charlotte erkennt immerhin an, dass es in bestimmten Kontexten und für bestimmte Personen sinnvoll erscheinen mag, eine höhere Genauigkeit und einen größeren Bestätigungsgrad einzuforden. In Julianes Äußerungen lässt sich diese Anerkennung nicht finden.

An dieser Stelle möchte ich noch eine etwas längere Ausführung von Greta, einer Studierenden aus dem oberen Leistungsdrittel, vorstellen. Auf die Frage, ob eine dynamische Visualisierung einen Beweis ersetzen kann, antwortet sie:

```
G: Ich würde sagen, es ist anschaulich klar [durch die dynamische
   Visualisierung, G.W.], aber, ehm, das reicht, meistens reicht
   es ja nicht, in der Mathematik, dass etwas anschaulich klar ist.
   Ich denke, dass ist die erste Idee, die man hat, dass man erstmal
   guckt, ist es denn immer so, wenn ich jetzt hier irgendwas bewege?
   Ja, es ist immer so. Und dann müsste ich aber trotzdem jetzt
   weiterfragen: warum ist das immer so?
I: Ja. (...) Ehm,
G: (unterbricht) Also zumindest, es ging ja auch immer so, in den
   Geometriehausaufgaben war es nun ja auch immer so, es ist ja
   anschaulich klar, aber warum ist das so? Welcher mathematische
   Hintergrund hat das Ganze? Also da wurde man schon eher auch immer
   in die Richtung getrieben, dass man das so und so machen müsste.
```

Auf die Nachfrage der Interviewerin, was das für Greta persönlich zusätzlich bringe und ob sie es dadurch besser verstanden habe, antwortet diese:

```
G: Eh, ich glaub, ich bin persönlich eher so'n Mensch, dass es mir,
   mir auf jeden Fall schon mal wichtig ist, dass es mir anschaulich
   klar ist, und wenn es mir anschaulich klar ist, dann bin ich
   eigentlich auch schon, eh, relativ (..) davon überzeugt. Also
   klar, um diese hundertprozentige Sicherheit zu haben, müsste man
   das dann nochmal thematisch machen, aber (..) ich bin oft, oft
   schon zufrieden, dass es, wenn es anschaulich klar ist, auch wenn
   es manchmal halt, eigentlich doch nicht ausreichend wäre.
```

Auf die erneute Nachfrage der Interviewerin, ob es ihr denn dann noch einen eigenen Mehrwert bringen würde, antwortet Greta mit der Gegenfrage:

```
G: Wenn ich das jetzt mathematisch bewiesen habe, noch?
```

Als die Interviewerin dies bestätigt, anwortet Greta mit:

G: Würd ich jetzt nicht sagen, ne.

Die Äußerungen von Greta sind zunächst so, wie man sie sich wünscht: Man bekommt durch die dynamische Visualisierung eine Idee, überlegt, ob das immer so ist, erhält durch den Einsatz des Zugmodus die Bestätigung, dass es wohl so zu sein scheint, und macht sich dann an die Klärung der Frage, warum das wohl immer so ist. Im weiteren Verlauf des Gesprächs aber wird deutlich, dass Greta zwar verinnerlicht hat, dass dies eine typische Vorgehensweise in der Mathematik ist, doch ihre Wortwahl zeigt deutlich, dass dabei eine starke Orientierung an externen Autoritäten vorliegt.
Schließlich noch ein Zitat von Helena (s. Abschnitte 5.3 und 5.6).

H: (...) Also, meinetwegen könnten wir den Beweis auch weglassen (lacht). Nein.
I: Also ja, nee, ich meine im Prinzip ist es doch, wenn man es sieht und wirklich ausprobieren kann,
H: Ja.
I: sagtest du ja gerade, dass dann doch die Zweifel eigentlich ausgeräumt sind. Oder?
H: Ja ähä, ich weiß jetzt auch nicht, (.) warum man den Beweis dann noch macht? (Lacht) (...) Ja, vielleicht, noch mal mathematischer an die Sache ran zu gehen, als wenn man das so einfach (..) zieht, also sich zurecht zieht, oder ich (.), weiß ich nicht (lacht).
I: Hhmm. Aber würde es dir persönlich noch irgendwas bringen, diesen formalen Beweis da anzuschließen?
H: Ich wüsste jetzt echt keinen Grund, so schnell (lacht) (..), also.

Für Helena ist der einzige Grund, der ihr für einen formalen Beweis einfällt, an die Sache „*mathematischer ran zu gehen*“ (Z.61-62) als durch die Nutzung des Zugmodus. Was genau dieses „*mathematischer*“ bedeutet, führt sie nicht aus, sie kontrastiert es lediglich mit dem sich „*zurecht ziehen*“ (Z.63), was offenbar für sie weniger mathematisch ist. Dennoch erkennt sie das Ziehen und Beobachten mit einer DGS als Beweis an. Auch hier sind wieder Parallelen zu

Charlotte zu erkennen, in deren Vorstellung es ein Spektrum von Beweisen unterschiedlicher Genauigkeit gibt (s. Abschnitt 5.2). Ebenso wie für Charlotte gibt es für Helena Beweise, die mehr oder weniger mathematisch sind, wobei sie sich selbst mit den weniger mathematischen zufrieden gibt. Gründe für einen höheren Anspruch kann Helena „*so schnell*“ (Z.66) nicht finden, was zeigt, dass ihr die unterschiedlichen Funktionen eines Beweises nicht bewusst sind.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass viele Studierende keine klare Vorstellung davon haben, warum Beweise in der Mathematik geführt werden. Im Umkehrschluss ist zu vermuten, dass diese Studierenden auch nicht wissen, wann ein Sachverhalt bewiesen ist. Sie selbst sind in der Regel damit zufrieden, wenn es ihnen, wie Greta sagt, „anschaulich klar“ ist. Darüber hinaus ist ihnen jedoch durchaus bewusst, dass dies in der „mathematischen Welt“ nicht hinreichend ist. Diese höheren Ansprüche werden mehr oder weniger akezeptiert, sich aber nicht selbst zu eigen gemacht.

5.8 Den Glauben an einen Beweis vertiefen

Bender (1989, S.129) führt, damals noch ohne Berücksichtigung von DGS, als mögliche didaktische Funktion von stetigen Bewegungen bzw. Verformungen für Beweise unter anderem den Aspekt an: „Sie vertiefen den Glauben an den Beweis, indem sie ihn plausibel bzw. plausibler machen [...]“ (ebenda, S.129).

Eine Studierende, bei der dieser Aspekt, nun auf DGS bezogen, besonders deutlich wird, ist Silke. Auf die Frage, ob die dynamische Visualisierung den Beweis ersetzen kann, äußert sie:

S: (.) Ersetzen nicht, aber vielleicht noch mal verdeutlichen, für
einige, die es sich nicht bildhaft vorstellen können, ist so ne
Konstruktion (.) nochmal vor sich zu sehen, auf jeden Fall nochmal
besser. Um zu sehen, dass der Winkel immer 90 Grad bleibt.
I: Ja?
S: Also zur Verdeutlichung auf jeden Fall. Aber den Beweis richtig
ersetzen (..) würde ich sagen, nicht.
I: Was, was ist der Vorteil, wenn man es jetzt mit Cinderella zeigen
kann?

S: Das man auch sieht, dass der Satz des Thales stimmt. Dass, dass
man noch mal einen Beweis hat. (..) Dass das stimmt.

Zunächst stellt Silke fest, dass die dynamische Visualierung einen Beweis nicht ersetzen kann. Dennoch sieht sie Vorteile in ihr, nämlich unter anderem den der „*Verdeutlichung*“ (Z. 8). Diese Verdeutlichung geht soweit, dass sie „*sieht, dass der Satz des Thales stimmt*“ und damit „*noch mal einen Beweis*“ (Z.12-13) vorliegen hat.
Obwohl also der Hinweis auf einen nochmaligen Beweis durch die dynamische Visualierung nahelegt, dass diese Beweischarakter für sie hat, wird letzteres von Silke abgelehnt: Für sie kann die DGS keinen formalen Beweis ersetzen. Stattdessen aber kann sie ihr helfen, Anknüpfungspunkte zwischen formalem, kalkülhaftem Beweis und der Vorstellung oder auch der Anschauung zu finden. Damit setzt Silke die Aspekte „formaler Beweis“ und „materiale Vorstellung“ einander gegenüber: dem formalen Beweis ist die Beweiskraft inhärent, doch die Erzeugung einer geeigneten, dazu passenden Vorstellung, ist nicht unbedingt gewährleistet. Die dynamische Visualierung hingegen hat keine Beweiskraft, wie Silke am Ende des Interviews ergänzt:

S: Aber alleine das Bild (.) würde für mich persönlich nicht (.)
reichen. Weil, man kann es ja auch einfach nur gezeichnet haben.
Man weiß ja gar nicht, ob es wirklich so (.) stimmt.

Und auf die Nachfrage, ob sie denn für sich nur den formalen Beweis, nur die dynamische Visualisierung, oder beides durchführen würde, antwortet Silke:

S: Wenn dann beides, zusammen.

Auf diese Art und Weise versucht Silke, eine angemessene Vorstellung über den formalen Beweis hinaus aufzubauen, um diesen dadurch noch besser verstehen zu können. Damit interpretiert sie den Einsatz der DGS genau in der von der Mathematikdidaktik intendierten und erhofften Art und Weise.
Jasmin, eine Erstsemesterstudierende aus dem mittleren Leistungsdrittel, argumentiert ähnlich wie Silke. Auf die Frage, ob die dynamische Visualisierung einen Beweis ersetzen kann,

antwortet sie ohne zu zögern:

Ja: Nein! (lacht) Das ist ja wie eben, also, das ist ja schön und gut, wenn ich es so und so hinziehe, und es ist so, aber (.) warum das so ist, habe ich ja trotzdem nicht gesagt.

I: Aha. Ehm, wir haben ja in der Vorlesung dann auch noch den Beweis angeschlossen, wir haben ja beides gemacht.

Ja: Ja.

I: Ehm. Ist für dich auch beides wichtig, oder hättest du gesagt: ‘‘Mir hätte auch der Beweis gereicht, ich hätte das gar nicht mehr (..) sehen müssen?‘‘

Ja: Doch, also ich finde es immer ganz wichtig, dass man das sieht. Irgendwie, weil man das sonst (..) ist das alles für mich immer, alles nicht so (.) greifbar,

I: Hhmm

Ja: also, das ist (..) schon wichtig, dass man das dann auch wirklich sieht, dass es immer so ist. Ich meine,

I: Hmh

Ja: Man kann uns ja viel erzählen (lacht).

I: Also dann glaubst du dem Beweis nicht, oder was?

Ja: Doch, definitiv, klar, aber es ist halt schon anschaulicher einfach. Wenn du es da, ehm, (..) ja da (.) mit dem Programm hast.

Auch für Jasmin stellt die dynamische Visualisierung keinen Beweisersatz dar, da die Frage nach dem „Warum“ durch das Ziehen für sie nicht beantwortet wird. Dennoch ist die Visualisierung für sie wichtig, da ohne diese „*alles nicht so greifbar*“ (Z. 15) wäre.

Für Jasmin ist, ähnlich wie für Silke, eine tragfähige Vorstellung sehr wichtig: der formale Beweis scheint zunächst noch außerhalb ihrer eigenen Anschauung zu liegen, noch nicht in ihr eigenes Wissensnetz eingebunden. Dies entnehme ich ihrer Äußerung: „*Man kann uns ja viel erzählen*“ (Z. 20), die eine deutliche Distanz zum formalen Beweis sichtbar werden lässt. Die Visualisierung stellt für Jasmin eine Brücke von der formalen zur materialen Darstellung dar, so dass sie nun auch ein Bild, eine Vorstellung vor Augen hat. Dadurch kann sie noch einmal „*wirklich sehen, dass es immer so ist*“ (Z. 17-18). Damit liegt hier genau der Fall vor, dass der „Glauben an den Beweis vertieft wird, weil er plausibler erscheint“.

Silke und Jasmin stellen durchaus keine Einzelfälle dar. Bei den von mir befragten Studierenden kam mehrfach die Aussage, dass formaler Beweis und dynamische Visualisierung jeweils für sich alleine nicht ausreichend seien, um sowohl der Wahrheitssicherung, der Begründung als auch einer adäquaten Vorstellung Genüge zu tun. (Inwieweit dabei die Einforderung eines formalen Beweises wirklich dem eigenen Anspruch oder dem externer Autoritäten geschuldet ist, steht, wie gesagt, dahin.)

5.9 Zusammenfassung und Konsequenzen

> „Proof is not merely to support conviction, nor to respond to a distrustful nature or self-doubt, nor to be done as a part of an obsessive ritual. Proof serves to provide *explanation*, and therefore is a central technique in research. [...] In real life, both in and out of mathematics, the distinction between empirical and theoretical investigations breaks down: We must move back and forth between „doing stuff" and understanding what we have done. Seen in this way, proof (or at least the precursors to proof) is a natural step in satisfying curiosity to *understand* what we have observed" (GOLDENBERG *et al.* 1998, S.41f).

In diesem Kapitel habe ich versucht, die Beweisvorstellung bzw. das Beweisverständnis der befragten Studierenden herauszuarbeiten, wobei dieser Aspekt logisch losgelöst vom Einsatz einer DGS zu sehen ist. Dabei hat sich gezeigt, dass hier ein breites Spektrum aufgespannt wird. Es geht im Prinzip um die Frage, **warum** ein Beweis geführt wird, und die jeweiligen Antworten, die auf diese Frage möglich sind.
Während einige der Studierenden einem Beweis eindeutig die Funktion des Verifizierens oder auch die Funktion des Begründens zuweisen und die demzufolge entscheiden können, ob ein Sachverhalt durch eine bestimmte Vorgehensweise bewiesen ist, haben demgegenüber andere ein eher diffuses Beweisverständnis. Für diese Studierende ist oftmals nicht klar, aus welcher Motivation heraus überhaupt irgendetwas bewiesen wird. Damit einhergehend besteht häufig kein eigenes, intrinsisch motivitiertes Beweisbedürfnis, sondern vielmehr die Auffassung, dass Beweisen eine lästige Pflichtaufgabe ist. GOLDENBERG *et al.* (1998, S.41) sehen eine Ursache hierfür in den vorhandenen Schulcurricula:

> „Conventional curricula may (or may not) emphasize that mathematicians „prove things", but rarely make clear to students *why* precise justification - the thing that separates mathematics from almost every other discipline - is so central to mathematical thinking. In fact, the lack of an apparent rationale - when proof is included at all, it tends to be treated as a kind of post hoc ritual - is one source of the popular calls to deemphasize or totally remove proof from the curriculum."

Auch wenn das „diffuse" Beweisverständnis bei Erstsemesterstudierenden stärker vertreten ist, gibt es bei diesen durchaus auch solche, die einen Beweis für sinnvoll erachten, weil sie durch ihn die Zusammenhänge besser verstehen können, und ihn deshalb für wichtig halten. Umgekehrt gibt es auch unter den Studierenden in Examensnähe etliche, die Beweise eher als unnötig empfinden und im wesentlichen als von außen eingefordert ansehen. Dies bedeutet, dass, unabhängig davon, inwieweit in der schulischen Laufbahn ein Beweisbedürfnis erzeugt und aufrechterhalten wurde, es auch der mathematischen Ausbildung in der Universität nicht gelingt, die verschiedenen Funktionen eines Beweises derart zu thematisieren, dass ein echtes Einsehen in die Notwendigkeit von und ein aus innerer Überzeugung heraus motiviertes Bedürfnis nach Beweisen erzeugt wird.

Eine erste Folgerung, die sich demnach aus den beobachteten Befunden ergibt, ist die konsequente Offenlegung der Motivation und Funktion von Beweisen. Wenn ein Beweis geführt wird, sollte immer auch die Frage im Raum stehen, warum dieser Beweis jetzt erforderlich ist. Zugleich sollte klar sein, dass je nach Kontext, diese Frage durchaus unterschiedlich beantwortet werden kann oder dass unterschiedliche Begründungen für das Führen des jeweiligen Beweises möglich sind. Nur so können die verschiedenen Funktionen eines Beweises deutlich und einsichtig gemacht werden, was ich für sehr wichtig halte. Denn nur, wenn die hier vorliegende Vielschichtigkeit transparent wird, kann echtes Verständnis generiert werden. Bekanntermaßen ist es immer noch die Rolle der Verifikation, die für viele Studierende im Vordergrund steht. Dies kann dann zum Problem werden, wenn sich diese Dominanz in einer Ausschließlichkeit manifestiert, da ein echter Zweifel an den vorliegenden Sachverhalten in den wenigsten Fällen besteht, so dass dann der Beweis wirklich die oben von Goldenberg *et al.* formulierte Bedeutung des „post hoc rituals" einnehmen würde.

Eine weiteres Problem für viele Studierende ist die Frage, **was** ein Beweis überhaupt ist bzw. was als Beweis akzeptiert wird. Allerdings spiegelt sich hier wieder: In der Schulmathematik ist oft unklar, was als Beweis gilt, zumal dies immer auch einem sozialen Aushandlungsprozess unterliegt. Z.B. stellt Mormann (1981, S.167) in diesem Zusammenhang fest:

> „Ein Beweis wird ein Beweis erst dadurch, daß er als Beweis anerkannt wird. Die Kriterien, wann ein Beweis als akzeptabel gelten kann, sind in gewissen Grenzen veränderlich. Es ist eine wichtige Aufgabe der Didaktik des Beweisens, Kriterien

dieser Art für Beweise der Schulmathematik zu entwickeln.“

Viele der von mir befragten Studierenden haben an dieser Stelle noch keine Möglichkeit gefunden, autark zu entscheiden, ob ein Sachverhalt bewiesen ist oder nicht. Stattdessen findet immer noch sehr häufig die Orientierung an den Anforderungen des Dozenten oder der Übungsleiterinnen statt. Dies ist nicht nur bei den Erstsemesterstudierenden, sondern auch bei Studierenden in Examensnähe noch zu beobachten, so dass man feststellen muss, dass das Studium sie in dieser Hinsicht nicht wesentlich vorangebracht hat. Man muss natürlich auch konstatieren, dass an der Universität Paderborn das geometrische Beweisen außerhalb der Veranstaltung „Elemente der Geometrie“ höchstens vereinzelt (in Seminaren oder ausgewählten Aufgaben) dran kommt. Demnach wäre eine weitere Konsequenz aus der vorliegenden Studie, beim Führen eines Beweises immer wieder auch die einzelnen Beweisschritte auf ihre Akzeptanz hin zu beleuchten. Im Prinzip wäre angebracht, bei jeder einzelnen Folgerung, die beim Beweisen gezogen wird, eine Art Rechtfertigung für die Legitimität derselben anzubringen. Gleichzeitig müsste kritisch überlegt werden, ob diese Rechtfertigung einen Dritten überzeugen würde, so dass damit zugleich das Problem der Kommunikation ins Spiel gebracht würde. Denn ein durchaus nicht kleiner Teil der Studierenden sieht sich mit der Schwierigkeit konfrontiert, einen Sachverhalt, der durch die dynamische Visualisierung klar geworden zu sein scheint, einer dritten Person, sei es bei den Hausaufgaben, sei es in der Klausur, kommunizieren zu müssen. Diese Kommunikation wird zum einen als unnötig empfunden, da durch das Sehen mit dem Programm alles so offensichtlich zu sein scheint. Zum anderen aber wissen diese Studierenden in der Regel nicht, wie sie überhaupt eine derartige Kommunikation aufbauen können. Die soeben beschriebene Vorgehensweise könnte hier vielleicht eine Hilfestellung sein.
In Abschnitt 2.1.5 habe ich einige Alternativen zu streng-deduktiven Beweisen vorgestellt. Dabei wurde deutlich, dass hier eine Vielzahl von Begrifflichkeiten kursieren, die durchaus ähnlich klingen und auch nicht immer trennscharf voneinander zu unterscheiden sind, wie beispielsweise Tätigkeitsbeweise und handlungsbezogene Beweise, oder anschauliche Beweise und inhaltlich-anschauliche Beweise, wobei erschwerend hinzukommt, dass die von mir vorgenommene Aufzählung keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann. Daher stellt sich mir an dieser Stelle die Frage, ob diese Vielzahl von Begriffen, die natürlich historisch gewachsen ist, sinnhaft ist. Bei den von mir befragten Studierenden konnte ich durchaus an der ein oder

anderen Stelle beobachten, dass die dynamische Visualisierung als „anschaulicher“ Beweis tituliert worden ist. Dabei wurde das Adjektiv „anschaulich“ allerdings klar alltagssprachlich verwandt, in dem Sinne, dass man etwas „sehen“ kann und es damit im wahrsten Sinne des Wortes „anschaulich“ ist, und nicht vor der Folie eines theoriegeleiteten wissenschaftlichen Begriffs. Dass dieses alleinige Sehen durch die DGS nicht den Kriterien eines anschaulichen Beweises genügt, ist klar. Auch hier kann ich nur die Forderung wiederholen, immer wieder zu problematisieren, ob eine Vorgehensweise als Beweis akzeptiert wird, oder nicht, und in letzterem Fall immer wieder zu klären, warum nicht.
Insgesamt gesehen hat sich bestätigt, dass das Thema „Beweis“ immer noch ein sehr schwieriges ist. Aber selbst bei Erfüllung aller oben genannten Forderungen und Kosequenzen kann nicht garantiert werden, dass ein Zugang zum Beweisen entstehen muss, da alle genannten Aspekte sich nur auf die Verhaltensweisen von Lehrkräften und Dozenten beziehen und die Eigeninitiative und Eigenleistung des Lernenden außer Acht lassen. Dass dieses unverzichtbar ist, hat schon Mormann (1981, S.34) festgestellt:

> „Ein Beweis ist aber erst dann verstanden, wenn er ein bestimmendes Moment der mathematischen Eigentätigkeit der Schüler geworden ist. Einen Beweis bloß kontemplativ zu wiederholen, hat wenig Sinn, es kommt darauf an, mit ihm zu arbeiten.“

Und noch eine Äußerung Mormann (1981, S.144), die im selben Kontext zu sehen ist:

> „Weder wird man darauf vertrauen dürfen, daß sich allein durch das häufige Nachvollziehen von Beweisen, die der Lehrer (vor)geführt hat, so etwas wie ein „höheres“ Verständnis von selbst einstellt, noch kann ein bloßes Reflektieren über allgemeine mathematische Konzepte das konkrete Operieren mit ihnen ersetzen.“

Damit ist der Lernende, hier der Studierende, immer auch selbst in die Pflicht genommen. Die Lehrperson kann zwar versuchen, durch ein hohes Maß an Transparenz und Reflexion so viele Dinge wie möglich offen zu legen; die Entwicklung eines adäquaten Beweisverständnisses und die Fähigkeit, über die Angemessenheit einzelner Beweisschritte zu urteilen, muss jeder und jede für sich selbst erarbeiten. Dies soll nicht bedeuten, dass die Rolle der Lehrperson damit auf eine passive reduziert wird. Vielmehr schließe ich mich Hanna & Jahnke (1996, S.887) an, die sagen:

> „Yet the constructivist theory of learning has been translated into classroom strategies which are inimical to the teaching of proof. As mentioned, recent studies confirm that it is crucial for the teacher to take an active part in helping students understand why a proof is needed and when it is valid. A passive role for the teacher also means that students are denied access to available methods of proving. It would seem unrealistic to expect students to rediscover sophisticated mathematical methods or even the accepted modes of argumentation. [...] We need to ensure that students develop the ability to assess each step in a proof and make an informed judgment on the validity of a mathematical argument as a whole. It would seem unwise to avoid methods that promise to help do this effectively, simply because they require active intervention by the teacher.“

Es leuchtet ein, dass die Situation nicht einfacher wird, wenn zu einem diffusem Beweisverständnis nun eine DGS mit den ihr zur Verfügung stehenden Visualisierungsmitteln hinzukommt. Damit möchte ich auch zum Ausdruck bringen, dass die Schwierigkeiten nicht in erster Linie durch die DGS initiiert, sondern sichtbar gemacht werden. Denn die Beweisvorstellung des Anwenders und der Anwenderin ist ja bereits in einer gewissen Weise ausgeprägt, wenn die DGS ins Spiel kommt, und es ist kaum vorstellbar, dass sie in der Lage wäre, hier eine angemessene Vorstellung zu zerstören oder negativ zu beeinflussen. Dazu sagt Hölzl (1999, S.33): „Doch ist die auf Fachtagungen durchaus häufig anzutreffende Einschätzung, der Computer verschlimmere einen ohnehin schon problematischen Zustand, noch zu allgemein, als dass sich damit wirklich etwas anfangen ließe. Denn ob das Beweisbedürfnis erschwert wird oder nicht, hängt weniger vom Computer ab, als vielmehr vom unterrichtlichen Kontext, in dem sowohl das Beweisen wie der Computereinsatz stattfindet.“
Gerade auch im Hinblick auf den Einsatz von DGS ist es wichtig, die verschiedenen Beweisfunktionen zu kennen und einen Beweis nicht ausschließlich auf die Verifikation zu reduzieren. Die meisten der von mir Befragten, die durch den Beweis ausschließlich die Richtigkeit eines

Sachverhaltes überprüfen wollen, können dies ihrer Ansicht nach mit der dynamischen Visualisierung realisieren und sehen demnach keine Notwendigkeit, noch einen formalen Beweis anzuschließen. Nur in wenigen Fällen wurde hier der DGS aufgrund der Tatsache, dass nur endlich viele Fälle überprüft werden können oder die Zeichnung infolge der Pixelgröße nicht genau ist, die Beweiskraft abgesprochen.
Damit zeigt sich erneut, wie wichtig die Auseinandersetzung mit den Fragen: „Was ist ein Beweis?“, „Was akzeptieren wir als Beweis?“, „Warum beweisen wir?“ ist. Eine sehr schöne Definition, die all dies zusammenfasst, findet sich bei Mormann (1981, S.171):

> „Beweisen könnte man also - bildhaft gesprochen - als die Tätigkeit bezeichnen, die Anzahl gedanklicher Brücken in bekannten Begriffsgefügen zu vermehren, was eine bessere Begehbarkeit des gesamten Systems zur Folge hat.“

Kapitel 6

Fallstudien zum „Zugmodus“

Neben der Analyse des Beweisverständnisses der Studierenden ist die zweite zentrale Fragestellung meiner Arbeit, wie der Zugmodus eingesetzt wird. Dabei liegt das Hauptaugenmerk darauf, ob die Studierenden es schaffen, das heuristische Potenzial der DGS für sich zu nutzen, so einzusetzen, dass ihnen die Bearbeitung von Aufgaben leichter als mit Papier und Bleistift fällt. Auch das jeweilige Beweisverständnis wird immer wieder eine Rolle spielen und ich werde stets Bezüge zu Kapitel 5 herstellen.

6.1 Ausgewählte Interpretationen

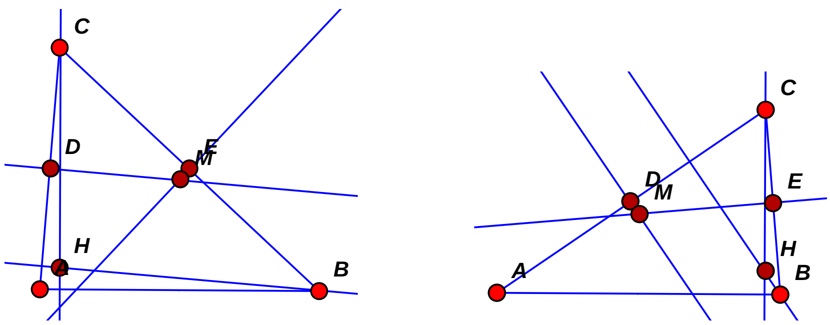
Vor der Durchführung des Interviews mit den Studierenden wurden diese gebeten, eine Aufgabe zu bearbeiten. Zunächst möchte ich bei einigen Probanden relativ detailliert darstellen, wie diese den Zugmodus einsetzen. Dabei orientiere ich mich an den in Kapitel 3.2 vorgestellten Klassifizierungen nach ARZARELLO *et al.* (2002).
Bei allem, was in dieser tabellarischen Form dargestellt und nicht andersartig gekennzeichnet ist, handelt es sich um eine Äußerung oder Handlung des/der Interviewten. Zudem sind wichtige und symptomatische Äußerungen wörtlich transkribiert. Die Transkripte sind fortlaufend zeilenmäßig nummeriert, auch wenn es zwischendurch Gesprächspassagen gibt, die

nicht wörtlich wiedergegeben sind. Um diese Lücken deutlich zu machen, sind alle Zitate mit Zeitangaben versehen.

6.1.1 Fallstudie „Hannes“

Für Hannes (s. Kapitel 5.4) hat ein Beweis eine ordnende und strukturierende Funktion, indem dieser einen konkreten Fall in einen größeren Kontext einbettet.
Zu Beginn bearbeitet Hannes Aufgabe 4, bei der es um die Frage geht, ob in einem spitzwinkligen Dreieck die beiden Eckpunkte A und B, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt M auf einem Kreisbogen liegen können.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
1:39 - 3:20		Konstruiert spitzwinkliges Dreieck, H und M.
3:35 - 3:50		**Behauptung**: Wenn $H = M$ geht es, weil Kreis durch 3 Punkte immer möglich ist.
3:51 - 4:01	Guided	Zieht an C, um H auf A zu ziehen. M wandert weg in Richtung Seitemitte von BC (Abb. 6.1a)).
4:01 - 4:08	Guided	Zieht an C, um H auf B zu ziehen. M wandert weg in Richtung Seitenmitte von AC (Abb. 6.1b)).
4:08 - 4:11		**Behauptung**: Einzige Möglichkeit, wenn $H = M$.



a) b)

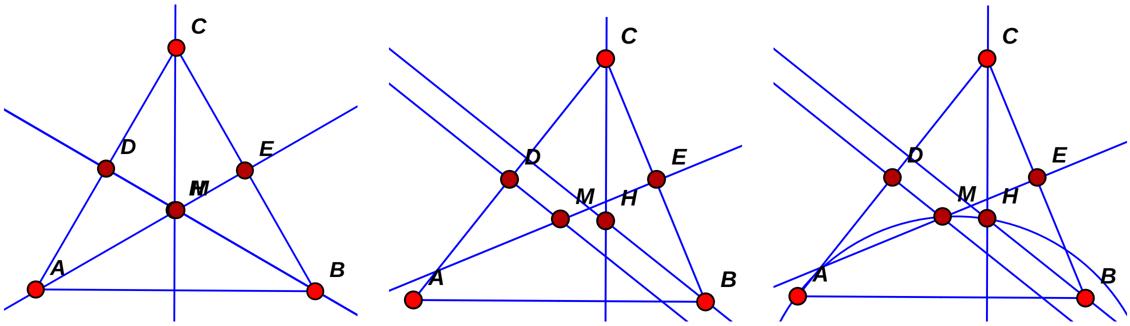
Abbildung 6.1 – *Ziehe H zu A bzw. zu B*

Gleich zu Beginn meint Hannes ohne weitere Überlegung, dass die Aufgabe nur lösbar ist, wenn Umfangsmittelpunkt und Höhenschnittpunkt zusammenfallen. Dann muss ja nur noch ein Kreis durch drei Punkte gezeichnet werden, und das ist seiner Aussage nach immer möglich. Das Erfordernis, dass die drei Punkte dabei nicht auf einer Geraden liegen dürfen, lässt

er allerdings außer Acht, und es wird nicht deutlich, ob er diese Konstellation einfach vergisst oder aber sich darüber im Klaren ist, dass nur im gleichseitigen Dreieck $H = M$ gilt und die Kolinearität der besagten drei Punkte somit eh unmöglich ist.
Das von Hannes zunächst konstruierte Dreieck ist fast gleichschenklig mit Basis AB geworden, so dass der Umkreismittelpunkt M fast auf der Höhe von C liegt. Ausgehend von dieser Situation zieht Hannes nun an C, und zwar zunächst so, dass H zu A, und dann, dass H zu B wandert (siehe Abbildung 6.1). In beiden Situationen beurteilt er nach Augenmaß, ob nun die vier Punkte A, B, H und M auf einem Kreis liegen, und kommt zu dem Schluss, dass dies nicht der Fall ist. Damit fühlt er sich in seiner anfänglichen Vermutung bestätigt und wiederholt diese nun als gefestigte: Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt müssen zusammenfallen.
Damit verfolgt Hannes eine relativ simple Strategie: Ausgehend von der Ursprungssituation, in der, wie bereits beschrieben, M und C beide nahezu mittig über AB liegen, zieht Hannes so, dass H, ohne aus dem Dreieck hinauszuwandern, möglichst weit links bzw. rechts zu liegen kommt. Da beide Fälle keine Lösung des Problems darstellen, er aber auch nicht weiter nach rechts bzw. links ziehen könnte, ohne dass das Dreieck recht- oder stumpfwinklig würde, ist für ihn somit klar, dass er die einzige Lösung bereits gefunden hat. Hinzu kommt, dass diese Ergebnisse des Ziehens komplett seiner Erwartungshaltung entsprechen.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
4:11 - 4:14	Guided	Zieht an C, so dass H auf M (Abb. 6.2a)). Interviewerin bittet um Begründung.
4:15 - 4:33		**Begründung**: $H = M$, wenn Höhen identisch mit Mittelsenkrechten, dann kann Kreis durch 3 Punkte gelegt werden.
4:34 - 4:36	Wandering	Zieht an C, stoppt, als $HMAB$ wie Trapez aussieht.
4:37 - 4:46	Guided	Zieht an A, versucht $HMAB$ zum Trapez zu ziehen (Abb. 6.2b)).
4:47 - 4:56		**Behauptung**: Einzige Möglichkeit, wenn $H = M$.

4:57 - 5:06		Zeichnet Kreis durch A, H und M: B liegt nicht auf Kreisbogen (Abb. 6.2c)). Sieht seine Vermutung bestätigt. Löscht Kreis wieder.



a) b) c)

Abbildung 6.2 – *Beginnend von $H = M$ (a) zieht Hannes das Viereck $ABHM$ zum Trapez (b) und prüft: B liegt nicht auf dem Kreis (c)*

Auf Nachfrage, ob er wirklich sicher sei, dass es nur die eine Lösung gebe, wenn H und M aufeinanderfallen, zieht Hannes erneut, so dass es aussieht, als sei das Viereck $ABHM$ ein Trapez (vgl. Abbildung 6.2b)). Er führt aus, dass er in dieser Situation beim vorangehenden Ziehen unsicher gewesen sei, doch nach optischer Beurteilung scheine kein Kreis durch die vier Punkte zu gehen. Zur Überprüfung konstruiert er den Kreis durch A, M und H und sieht seine Vermutung bestätigt, als dieser nicht durch B geht.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
5:07 - 5:14		Nachfrage, ob Dreieck besonders, wenn $H = M$.
5:15 - 5:25	Guided	Zieht an C, so dass $H = M$.
5:27 - 6:06		**Begründung**: Wenn H = M, dann Dreieck gleichseitig. **Behauptung**: Einzige Lösung.
6:07 - 6:24		Nachfrage: Warum ist es die einzige Lösung?
6:25 - 6:32	Wandering	Zieht an C. Urteilt nach Augenmaß, dass die vier Punkte nicht auf einem Kreis liegen.

6:32 - 6:34	Guided	Zieht an C, so dass Dreieck gleichschenklig mit Basis AB.
6:35 - 6:48		**Begründung**: H und M liegen beide auf MS zu AB, also kein Kreis möglich.
6:49 - 6:59	Guided	Zieht an C, so dass H nach B wandert: Nicht möglich, weil Kreis durch B, H und M Rechtskurve machen müsste und nach A Linkskurve.
7:01 - 7:02	Guided	Zieht an C, so dass H und M dicht beieinander ($HMAB$ sieht aus wie Trapez).
7:03 -7:16		Zweifel, ob es in diesem Fall nicht doch geht. **Vermutung**: eher nicht.
7:17 - 7:22		Konstruiert Kreis durch M, H und B, dieser geht nicht durch A.
7:23 - 7:31	Wandering	**Behauptung**: keine andere Lösung.

Hannes kann problemlos begründen, dass im Fall $H = M$ das Dreieck gleichseitig ist, da dann die Höhen mit den Mittelsenkrechten zusammenfallen. Auf die Nachfrage, warum dies die einzige Lösung sei, führt Hannes nahezu eine Kopie seiner vorangegangenen Zugmodusaktivitäten durch und rekapituliert die Fälle, die er betrachtet hat. Dabei begründet er, warum sie keine Lösung darstellen. Beginnend damit, dass er das Dreieck so zieht, dass es gleichschenklig mit Basis AB ist, legt er dar, warum nun kein Kreis durch die geforderten vier Punkte gehen kann. Anschließend zieht er so, dass H fast mit B zusammenfällt. Auch in dieser Situation begründet er, warum es keine Lösung gibt. Danach zieht er so, dass $ABMH$ wie ein Trapez aussieht. Der Kreis durch M, H und B geht nicht durch A, also ist dies auch keine Lösung.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
7:32 - 7:33	Wandering	Zieht eher planlos (dieses Mal, ohne den Kreis zu löschen). Kreis geht durch A, B, H und M.
7:34 - 8:05		Hannes äußert seine Überraschung, kann keine Besonderheit am Dreieck ABC erkennen.

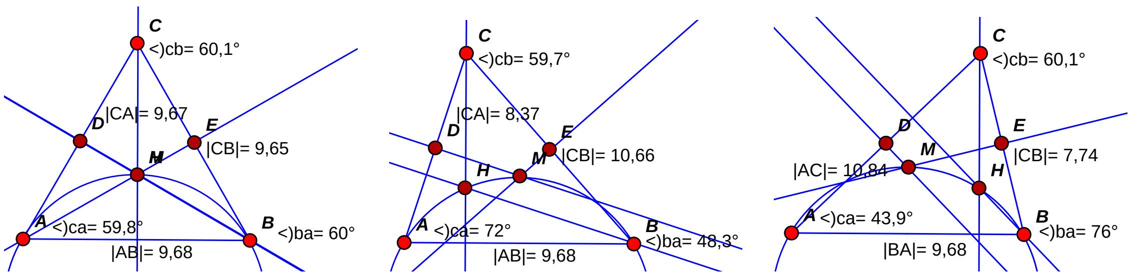
Während er bereits formuliert, dass seine Behauptung, es gebe nur eine Lösung, richtig sei, zieht er noch einmal, eher planlos an C, und völlig überraschend geht der zuvor gezeichnete und beim Ziehen nicht wieder gelöschte Kreis durch die gewünschten vier Punkte.
Damit ist Hannes klar, dass seine ursprüngliche Behauptung nicht weiter haltbar ist. Aus seinen Äußerungen wird deutlich, dass nicht nur die Tatsache, dass es eine weitere Lösung gibt, für ihn überraschend ist, sondern vor allen Dingen auch, dass er dem Dreieck ABC keine Besonderheit ansehen kann: das Dreieck ist nach optischer Beurteilung weder gleichschenklig noch rechtwinklig noch sonst wie auffällig. Möglicherweise ist dies darauf zurückzuführen, dass in vielen Aufgabenstellungen naturgemäß Betrachtungen der Art: „Wenn das Dreieck ABC gleichschenklig, dann... „ oder „Wenn das Viereck $ABCD$ eine Raute, dann...“ angestellt werden und ja auch dieser Aufgabe eine derartige Beziehung unterliegt, die nur nicht so offensichtlich ist.
Auch nachdem Hannes eine andere Situation hinzieht, in der M und H auf dem Kreis liegen, kann er keine Besonderheit am Dreieck erkennen. Daher richtet er nun seine Aufmerksamkeit auf das Viereck *ABMH*, dessen Eigenschaften als Sehnenviereck möglicherweise einen Hinweis auf die zugrundeliegenden Zusammenhänge liefern können.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
8:06 - 8:20	Guided	Zieht nochmals Sonderfall, dass $H = M$. Zieht dann, dass H ungleich M und M auf Kreis.
8:20 - 9:10		Beurteilt Seitenlänge und Winkelgröße nach Augenmaß, sieht keine Besonderheit im Dreieck.
9:11 - 9:30		**Reflexion**: Wenn *ABHM* Sehnenviereck, dann ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180°.
9:31 - 11:43		Zeichnet das Viereck *ABHM* ein. Misst nach Aufforderung Winkel und Seiten des Dreiecks.

Da Hannes an dieser Stelle nicht weiterzukommen scheint, gebe ich den Tipp, einmal die Seiten und Winkel des Dreiecks zu messen. Hannes befolgt diesen Tipp und nutzt anschließend erneut den Zugmodus. An dieser Stelle ergibt sich ein kleiner Nebenschauplatz (11:44 - 12:26), denn als Hannes nun wieder den Sonderfall $H = M$ hinzieht, geht der Kreis nicht wie erwartet durch A. Dies hat seine Ursache darin, dass Hannes den Kreis durch die Punkte M, H und B konstruiert hat. Als nun H und M zusammenfallen, hat der Kreis nur noch zwei Bezugspunkte und ändert je nach Ziehen sowohl Größe als auch Lage. Hannes erkennt diese Zusammenhänge problemlos, sucht aber den Ausweg darin, mit Hilfe des Buttons „Kegelschnitt“ einen Kreis durch vier Punkte konstruieren zu wollen. Der anschließende Test durch den Zugmodus offenbart aber schnell, dass dies nicht geklappt hat. Nachdem Hannes zunächst überlegt, wie man denn wohl einen Kreis durch vier Punkte konstruieren könne, kommt er schließlich zur Einsicht, dass dies wohl nicht geht, sein Problem aber dadurch zu lösen ist, dass er einen Kreis durch A, H und B konstruiert.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
11:44 - 11:58	Guided	Zieht an C, so dass $H = M$, aber Kreis geht nicht durch A.
11:59 - 12:03		**Begründung**: Kreis ist nur durch M, H und B konstruiert, nicht durch A.
12:04 - 12:06	Wandering	Zieht kurz an C, so dass H ungleich M.
12:07 - 12:20		Versucht mit Button „Kegelschnitt“ Kreis durch 4 Punkte zu konstruieren.
12:21 - 12:26	Test	Zieht an C, um zu sehen, ob der Kreis nun an 4 Punkte gebunden ist. Dies ist nicht der Fall. Weiß nicht, wie er einen Kreis durch 4 Punkte konstruieren soll.
12:27 - 13:02	Wandering	Zieht an C, so dass H ungleich M.
13:03 - 13:09		Konstruiert Kreis durch A, H und B.
13:10 - 13:20	Guided	Zieht an C, so dass $H = M$ (Abb. 6.3a)). (Kreis geht durch A, B, H und M).
13:21 - 13:44	Guided	Zieht an C, so dass H und M auf Kreis, aber H ungleich M (Abb. 6.3b)).
13:45 - 14:04	Guided	Zieht an C, so dass H und M auf Kreis, aber anders als vorher (Abb. 6.3c)).

14:05 - 14:20	Guided	Zieht an C, so dass H und M auf Kreis, aber anders als vorher.



a) b) c)

Abbildung 6.3 – *Hannes prüft verschiedene Situationen, in denen H und M auf dem Kreis liegen*

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
14:21 - 14:23		**Vermutung**: Der Winkel in C muss 60° groß sein.
14:24 - 14:33	Dummy locus	Versucht so an C zu ziehen, dass M auf dem Kreis bleibt.
14:34 - 14:55		Behauptung: der Winkel in C muss 60° groß sein, die anderen Winkel können beliebig groß sein.
16:11 - 24:30		Versuch der Begründung am statischen Bild mit Umfangswinkelsatz und Eigenschaften von Sehnenvierecken.

Hannes schildert seine Überlegungen, die er dabei angestellt hat, wie folgt:
(15:20 - 16:00)

Ha: Vorher war es Zufall für mich, dass der eine 60 hatte, und dass die beiden anderen, ja halt, irgendwelche willkürlichen Werte haben, aber dann später bei der zweiten (.) Mal, wo ich dann versucht habe, zu konstruieren, war's auf einmal wieder 60, dass der obere so war, und dass es nur bei 60 war, das hab' ich dann halt noch mal getestet, indem ich C in 'nen ganz anderen Punkt

```
      schiebe, ob es dann wirklich auch nur bei 60 Grad ist. Und es war
      halt nur bei 60 Grad, auf einmal, dass die, eh, dass der Kreis auf
      einmal durch die beiden durchgeht. Aber (..), also jetzt würde ich
      sagen, ich hab’ jetzt dreimal getestet, in drei Fällen war es 60
      Grad, und damit wäre es für mich (..) ausschlaggebend, dass es bei
      den anderen auch 60 Grad (.) sein, sein sollte.
```

An dieser Stelle kann Hannes die DGS hilfreich für sich einsetzen: Auch wenn er nicht aus eigenem Antrieb heraus die Messfunktion bezüglich Winkelgrößen und Seitenlängen aktiviert hat, nutzt er nun das *Dummy locus dragging*, um nicht nur punktuell, sondern dynamisch und stetig die Größe des Winkels in C zu überprüfen. Dabei irritiert es ihn auch nicht, dass die gemessenen Werte durchaus zwischen 59,7 und 60,4 Grad schwanken, obwohl es so aussieht, als liege M auf dem Kreis. Auf die Aufforderung, seine Sicherheit bezüglich des Zusammenhangs von Winkelgröße in C und der Lage der vier Punkte auf einem Kreisbogen auf einer Skala von 1 bis 10 zu verorten, gibt er den Wert 7 bis 8. an. Die Stufe 10 könne nur durch einen formalen Beweis erreicht werden. Hierzu führt er Überlegungen zum Umfangswinkelsatz, zum zugehörigen Mittelpunktswinkel und zu Eigenschaften des Sehnenvierecks an, ohne dass sich jedoch bereits eine konkrete Beweisidee abzeichnet.

Da es in diesem Teil der Befragung weniger um das Durchführen eines Beweises, als vielmehr um den Einsatz des Zugmodus ging, wurde die Aufgabenbearbeitung an dieser Stelle schließlich abgebrochen und Hannes erläuterte sein Vorgehen.

(32:46 - 33:25)

```
  Ha: Also für mich war die Konstruktion am Anfang (.) da wo ich
      wirklich gesagt hätte, es kann niemals sein, dass diese Punkte
      ’nen Viereck, eh, dass das ein Kreis ergibt. Nur aus diesem
      optischen heraus, eh, dass ich es halt so gesehen habe. Und als
      ich dann hin- und hergezogen habe, war es immer noch so, dass
      halt (..), ja, (...) es war immer noch sch..., noch, noch, ich
      hatte halt durch Zufall bin ich ja dann darauf gekommen, dass es
      auf einmal irgendwann gepasst hat, und dass ich überhaupt in die
      Nähe kam. Hätte ich immer irgendwelche anderen Konstruktionen,
      irgendwelche anderen Dreiecke gehabt, wo H und M immer so (.)
```

schräg zueinander stünden, dass man schon, dass es gar nicht
möglich gewesen wäre, dann wäre ich wahrscheinlich immer noch
überzeugt davon, dass es gar nicht ginge.

An dieser Stelle treffen zwei Problematiken aufeinander: Zum einen ist es sicherlich schwerer, ergebnisoffen eine Situation mit dem Zugmodus zu untersuchen, wenn man bereits eine feste Überzeugung bezüglich des Ergebnisses hat. Zum anderen hat Hannes für sich keine heuristische Strategie entwickelt, wie man sie beispielsweise bei PÓLYA (1949) findet (s. Abschnitt 2.1.5). Er ist er nicht in der Lage, den Zugmodus so einzusetzen, dass er anschließend die Gewissheit haben kann, alle möglichen Fälle überprüft zu haben. Damit kann er natürlich auch nicht das heuristische Potenzial einer DGS für sich nutzbar machen.
Zuletzt wurde die Frage gestellt, ob ein formaler Beweis an der Stelle, an der durch das Ziehen die Sicherheit von 7 bis 8 erreicht wurde, noch erforderlich sei.
(35:17 - 36:50)

Ha: Ja klar, weil ich könnte es ja jetzt noch nicht beweisen, dass,
wenn jetzt in (.), bei mir jetzt in C 60 Grad sind, dass ich dann
aus dem (..), ehm, (.) aus H und M (.) mit den beiden anderen
Eckpunkten des Dreiecks 'nen (.) Kreis bilden könnte, könnte
ich nicht beweisen. Ich wüsste jetzt zwar, okay, bei 60 Grad ist
es so, aber wie ich da halt jetzt 'nen logischen Beweis drauf
aufbaue, würde ich nicht hinkriegen.
I: Also würde dir da noch was fehlen, jetzt?
Ha: Ja. Ja, also es würde auf jeden Fall noch fehlen.
I: Und ehm, aber das würde nicht mehr, deine Überzeugung würde es
jetzt nicht mehr (..)
Ha: verändern?
I: verändern (.) können, oder jetzt doch
Ha: (unterbricht) Also ich glaube, wenn ich, wenn ich jetzt auf einmal
noch irgendetwas Anderes sehen würde, dann (.), dann würde das,
würde schon meine Überzeugung ins Wanken kommen, weil am Anfang
war ich ja auch fest davon überzeugt, dass es (.) gar nicht
möglich ist, weil bis da halt, alle Anhaltspunkte waren für

mich so gegeben, dass es nicht möglich ist. Ich hatte halt drei verschiedene Konstruktionen mir so gemacht, wo es jeweils nicht möglich war, und (.) dann neige ich halt immer schnell dazu, wenn ich drei Sachen (.) gesehen habe, dass, dass ich dann immer auf andere Sachen schließe. Als dann auf einmal (.) der Kreis doch möglich war, dann war dadurch dieses ganze Konstrukt zum Wanken (.) so mit der Behauptung, (.) dass es gar nicht möglich ist. Also musste ich mir ’ne andere Erklärung suchen, erst mal (...). Weil es mich halt schon überrascht hat, dass es halt doch möglich ist.

Die Episode passt zu dem oben herausgearbeiteten Beweisverständnis von Hannes. Auch wenn er durch den Einsatz der DGS letztendlich relativ sicher sein kann, dass die Größe des Winkels in C entscheidend ist, fehlt ihm der formale Beweis, da er ohne diesen die Zusammenhänge nicht erfassen kann.

Für seine zunächst aufgestellte Vermutung kann Hannes problemlos eine Begründung anführen, die diese in seine vorhandene Ordnungsstruktur integriert: Wenn das Dreieck gleichseitig ist, fallen Höhen und Mittelsenkrechten zusammen, damit auch Hund M, so dass nur noch ein Kreis durch drei Punkte gelegt werden muss. Für die durch Zufall erlangte Erkenntnis, dass es auch in anderen Situationen eine Lösung gibt, kann er hingegen keine Begründung anführen. Hinzu kommt, dass diese Erkenntnis eben nur durch Zufall gewonnen wurde. Damit kann Hannes für sich nicht ausschließen, dass auch noch gänzlich andere Lösungen des Problems möglich wären: „*Wenn ich jetzt auf einmal noch irgendetwas Anderes sehen würde, dann [...] würde schon meine Überzeugung ins Wanken kommen*“ (Z.39-41).

Zusammenfassend lassen sich bei Hannes nur Ansätze der Nutzung der DGS als heuristisches Werkzeug verzeichnen. Am Anfang verfolgt er vielmehr die Strategie, die möglicherweise auch bei der Bearbeitung mit Papier und Bleistift zum Tragen käme, drei verschiedene Fälle zu überprüfen und dann zu einer Entscheidung zu gelangen (Z.44-48). Obwohl der Versuch zu erkennen ist, sich durch die Betrachtung der drei Fälle einen generellen Überblick zu verschaffen, schafft Hannes es nicht, das Ziehen wirklich so systematisch durchzuführen, dass er mit einiger Sicherheit andere Lösungen ausschließen kann.

Auch den zur Überprüfung einer konkreten Situation konstruierten Kreis löscht Hannes sofort wieder. Er kommt zunächst nicht auf die Idee, bei konstruiertem Kreis den Zugmodus einzusetzen. Auch als er den Kreis ein weiteres Mal konstruiert, dann doch zieht, und während dieser Aktion plötzlich auf eine weitere Lösung stößt, kann nicht von einem absichtsvollen Vorgehen die Rede sein: während des *Wandering draggings* war der Kreis einfach zufällig noch da.

Mögliche Besonderheiten des Dreiecks ABC versucht Hannes nach Augenmaß zu beurteilen, er kommt nicht eigenständig auf die Idee, die Winkelgrößen und Seitenlängen vom Programm anzeigen zu lassen. Erst nachdem er zum Messen aufgefordert wurde und wieder an drei verschiedenen statischen Bildern die Idee bekommen hat, dass die Winkelgröße in C entscheidend ist, kann Hannes einen echten Nutzen aus dem Zugmodus ziehen: Mit *Dummy locus dragging* versucht er so zu ziehen, dass M dabei auf dem Kreis bleibt.

Hannes nutzt den Zugmodus im Wesentlichen für das *Guided dragging*, indem er versucht, das Dreieck ABC oder das Viereck $ABMH$ in eine bestimme Form zu ziehen. Darüber hinaus kommt ansonsten noch das *Wandering dragging* zum Einsatz. Den *Dragging Test* verwendet Hannes nur an einer einzigen, eher unbedeutenden Stelle, indem er überprüft, ob ein von ihm konstruierter Kreis durch vier Punkte geht. Auch das *Dummy locus dragging* nutzt er nur ein einziges Mal, dann allerdings zielführend zur Stärkung der These, dass der Winkel in C 60 Grad groß sein muss. Die anderen Zugmodusfunktionen, wie *line dragging* oder *linked draggin*g kommen nicht zum Einsatz.

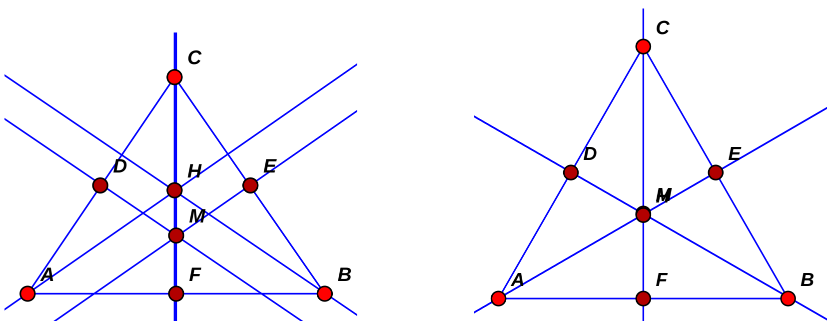
Damit wendet Hannes fast ausschließlich Zugmodusfunktionen an, die Arzarello *et al.* (2002) dem ascending process zuordnen. Dies entspricht seiner Vorgehensweise, den Beweis für die gefundene Vermutung ausschließlich am statischen Bild zu führen. Damit verhält sich Hannes so, wie bereits Laborde (2001, S.306) bei ihren Probanden beobachten konnte:

> „The most obvious contribution of Cabri is the possibility of dynamic visualisation of geometrical relations preserved by the drag mode. Teachers (even the novice in using technology) immediately exploited this possibility by asking students to conjecture properties from what they could see. However, when students were asked to justify, the teachers did not mention the possibility of using Cabri to find a reason or to elaborate a proof. It is as if there was no interaction between visualisation and proving. Technology was used in these tasks, as facilitating the formulation of conjectures but its role did not go beyond that."

6.1.2 Fallstudie „Melanie“

Im Folgenden wird die Aufgabenbearbeitung von Melanie beschrieben, die einem Beweis im wesentlichen verifizierenden Charakter zuspricht (s. Abschnitt 5.1.4). Diese Verifizierung kann ihrer Auffassung nach durch die DGS effektiver erfolgen als durch einen formalen Beweis. Melanie bearbeitet ebenso wie Hannes Aufgabe 4, bei der es um die Frage geht, ob in einem spitzwinkligen Dreieck ABC die Eckpunkte A und B, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt M auf einem Kreisbogen liegen können.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
13:56 - 15:19		Konstruktion des Dreiecks ABC, der Höhen, der Mittelsenkrechten und der Schnittpunkte H und M.
15:20 - 15:36		Formulierung der Fragestellung durch I
15:37 - 15:45		Nachdenken über das Problem
15:46 - 15:50	Wandering	Zieht an C, stoppt, als H auf Mittelsenkrechte von AB (Abb. 6.4a)).
15:51 - 15:55	Guided	Zieht an C, so dass H auf M (Abb. 6.4b)).
15:56 - 16:20		Überlegt, dass dies Lösung sein könnte, verwirft dies aber, da FA ungleich FM (F ist Seitenmittelpunkt von AB, Abb. 6.4b)).



a) b)

Abbildung 6.4 – *H liegt auf MS (a), dann auf M (b), aber FA ungleich FM*

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
16:23 - 16:41	Wandering	Zieht an C, so dass H ungleich M. Überlegt, dass Radius zur Konstruktion des Kreises erforderlich ist. **Behauptung**: F ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.
16:28 - 16:32		Erkennt, dass die Behauptung falsch ist.
16:33 - 16:41	Guided	Zieht an C, so dass H auf M (Abb. 6.4b)).
16:42 - 16:51		Zeigt mit Cursor den Kreis durch die drei Punkte, verortet M weiter unterhalb auf der MS von AB.
16:51 - 16.55	Wandering	Will nach weiteren Lösungen suchen, aber I bittet, noch einmal zum Fall $H = M$ zurückzukehren.
16:56 - 17:16	Guided	Zieht an A, versucht, (lange vergeblich) H auf M zu ziehen, bis es gelingt.
17:17 - 17:34		Frage, ob ein besonderes Dreieck vorliegt.
17:35 - 18:35		**Behauptung**: Dreieck ist gleichseitig

Melanie überlegt erst eine Weile, bevor sie sehr bedächtig anfängt zu ziehen. Dabei erklärt sie, dass sie versuche, zwei Punkte aufeinander zu ziehen. Nachdem sie so gezogen hat, dass H auf M liegt, meint sie, dass dies eine Lösung sein könne. Insgesamt wirkt sie aber nicht sehr überzeugt und verwirft ihren Vorschlag gleich wieder. Grund hierfür ist ihre fälschliche Annahme, dass der Seitenmittelpunkt F von AB der Mittelpunkt dieses Kreises sein müsse (vgl. Abb. 6.4b)). Auf den Hinweis, dass F nur die Seitenmitte von AB sei und sonst keine Rolle spiele, erkennt sie relativ rasch, dass in der gerade vorliegenden Situation der Mittelpunkt des gesuchten Kreises irgendwo unterhalb von AB liegen müsse. Daraufhin wird die Nachfrage gestellt, ob im Fall $H = M$ ein besonderes Dreieck vorliege.
(17:35 - 18:35)

```
M: Ja. Das ist (.) gleichseitig. Ehm, D, E und F stellen ja die
   Seitenmitten dar, eh (..), also der, der und der (zeigt auf die
   entsprechenden Punkte), und weil das immer die Mittelsenkrechten
   sind, (.) also es muss ja (.), da müssen die Seiten ja gleich sein
```

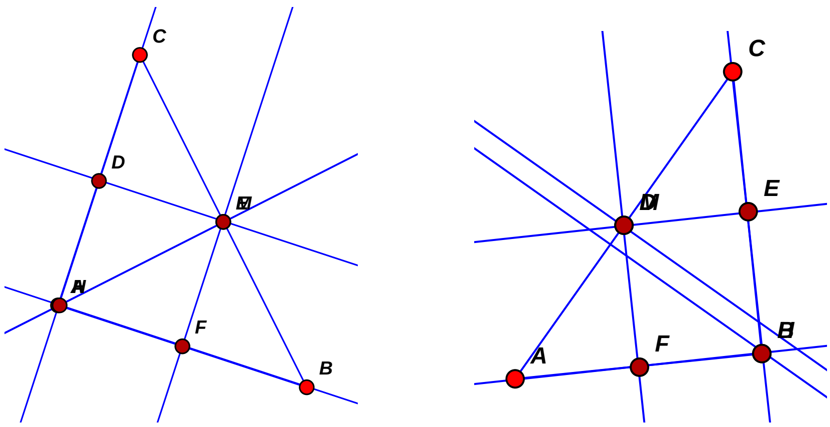
(7 Sek. Pause).
I: Das habe ich jetzt, glaube ich, noch nicht ganz verstanden.
M: (unterbricht) Also das ist ja der Mittelpunkt von AC (zeigt auf D),
I: Ja.
M: das ist der Mittelpunkt von CB (zeigt auf E)
I: Ja.
M: und das von AB (zeigt auf F). Und das sind ja alles die Mittelpunkte
I: Ja
M: der Seiten,
I: Ja.
M: und die schneiden sich ja auch hier in dem Punkt (zeigt auf M), und (..) ehm, (6 Sek. Pause), ja (lacht), also ich finde, das sieht jetzt grad gleich, gleichseitig aus, also.

Melanie erkennt sofort, dass das vorliegende Dreieck gleichseitig ist. Eine stichhaltige Begründung hierfür kann sie allerdings nicht anführen, da sie von der Tatsache, dass die Mittelsenkrechten durch die Seitenmitten gehen (Z.1-3) auf die gleiche Länge der Seiten schließt (Z.4). Als sie aufgrund der langen Pause und der ausbleibenden Bestätigung merkt, dass ihre Begründung von der Interviewerin noch nicht akzeptiert wird, rettet sie sich in das optische Element: „*Also ich finde, das sieht jetzt grad gleichseitig aus*“ (Z.18-19).

Die Episode passt zu dem in Abschnitt 5.1.4 herausgearbeiteten Beweisverständnis von Melanie. Dabei attestiert sie dem „Sehen“ eine nachweisende Funktion. Auch hier „sieht“ sie, dass das Dreieck gleichseitig ist. Damit sind für Melanie keine Zweifel mehr vorhanden.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
18:36 - 18:43		Aufforderung, nach weiteren Lösungen zu schauen.
18:44 - 18:50	Guided	Zieht an A, so dass $H = A$ (Abb. 6.5a)).
18:51 - 19:09		**Behauptung**: Dreieck ist rechtwinklig gleichschenklig.
19:10 - 19:19	Guided	Zieht an B, so dass $H = B$ (Abb. 6.5b)).
19:20 - 19:24		**Behauptung**: Dreieck ist rechtwinklig gleichschenklig.

19:25 - 20:00	Guided	Versucht, durch Ziehen an B, C und A, auch M auf einen der Eckpunkte zu ziehen. Merkt, dass dies nicht geht. **Feststellung**: Wenn M auf den Seitenmitten des Dreiecks liegt, dann ist dieses rechtwinklig.



a) b)

Abbildung 6.5 – *Ziehe H auf A (a) und dann auf B (b)*

Die Beurteilung nach optischen Kriterien wiederholt sich, als Melanie nach weiteren Lösungen sucht. Wieder verfolgt sie die Strategie, aus vier Punkten drei zu machen, indem sie eine Situation schafft, in der zwei Punkte aufeinanderfallen. Zunächst zieht sie so, dass H auf A zu liegen kommt. Über das Dreieck macht sie ihn diesem Fall die Aussage, dass es rechtwinklig und gleichschenklig sei, wobei es sich bei AB und AC um die gleichlangen Schenkel handelt (vgl. Abb. 6.5a)). Obwohl dies in diesem Fall wirklich zuzutreffen scheint, da die Höhe von A mit der Mittelsenkrechte zu CB zusammenfällt, bezweifle ich, dass ihr dieses Argument bewusst ist. Denn im nächsten Fall, in dem H auf B zu liegen kommt, fallen Mittelsenkrechte und Höhe nicht zusammen (vgl. Abb. 6.5b)). Dennoch erklärt Melanie, dass hier derselbe Fall vorliege. Offenbar beruhen ihre Äußerungen, die sie sehr sicher und ohne irgendwelche Zweifel macht, ausschließlich auf einem optischen Eindruck.

Nachdem Melanie nacheinander so gezogen hat, dass H jeweils mit einem der drei Punkte A, M und$B$ zusammengefallen ist, versucht sie nun, auch M auf einen der Eckpunkte zu ziehen. Als dies nicht gelingt, zieht sie alternativ M auf eine Seitenmitte und erklärt, dass auf diese Art und Weise wieder ein rechtwinkliges Dreieck entstehe. Dabei zeigt sie mit dem Cursor auf den rechten Winkel, so dass wohl auch hier ein optische Beurteilung zugrunde liegt.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
20:01 - 20:09	Wandering	Zieht an A.
20:10 - 20:14		I erinnert an Fragestellung.
20:15 - 20:29	Wandering	Zieht an A.
20:30 - 20:33	Guided	Zieht an B, so dass H auf B zu liegen kommt (Abb. 6.5b)).
20:34 - 20:48		Zeigt mit Cursor den Kreis und die Radien von F aus zu den einzelnen Punkten.
20:49 - 21:21		**Behauptung**: Wenn $FA = FM = FB$, kann der Kreis gezeichnet werden.

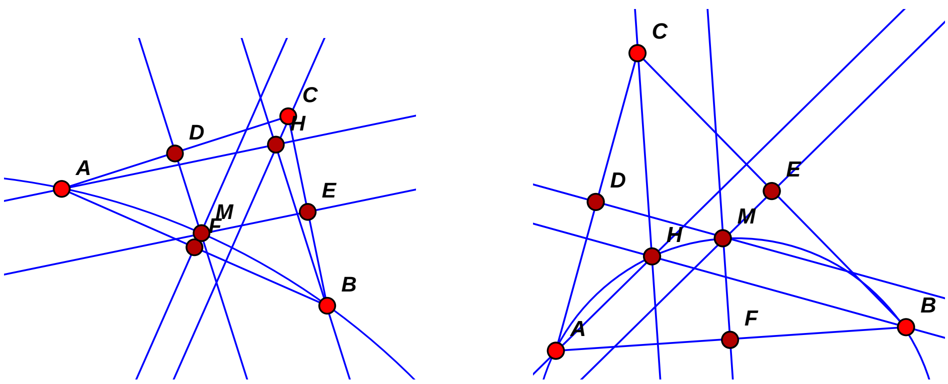
Da die Überlegung, dass ein Dreieck rechtwinklig ist, wenn der Umkreismittelpunkt auf einer seiner Seiten liegt, nichts mehr mit der ursprünglichen Aufgabenstellung zu tun hat, erinnere ich noch einmal an die Ausgangsfrage, die Melanie durchaus noch präsent ist, denn sie unterbricht mich und führt meinen angefangenen Satz zu Ende. Anschließend zieht sie so, dass H auf B zu liegen kommt (vgl. Abb. 6.5b)). Mit dem Cursor zeigt sie den Kreis, der durch A, M und $H = B$ gehen würde. Dabei zeigt sie von F ausgehend die Radien zu A, M und B und stellt die Behauptung auf, dass der Kreis möglich sei, wenn diese gleichlang sind. Wieder kommt sie folglich zu ihrer bereits zuvor aufgestellten, dann aber verworfenen Vermutung zurück, dass F der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sei.
Dies ist natürlich nur dann der Fall, wenn das Dreieck ABC rechtwinklig gleichschenklig ist, so dass dann entsprechende Höhe und Mittelsenkrechte zusammenfallen. Diese Behauptung hatte Melanie ja auch im Vorfeld aufgestellt: für sie scheint das Dreieck **immer** gleichschenklig zu sein, wenn $H = B$ gilt. Zudem scheinen die durch die Konstruktion entstanden Punkte eine besondere Rolle für sie zu spielen. Obwohl mehrfach darauf hingewiesen wurde, dass F einfach nur die Seitenmitte von AB ist und Melanie dies in ihren Äußerungen auch selbst dargelegt hat, verfällt sie immer wieder darauf, F darüber hinaus die Rolle des gesuchten Kreismit-

telpunkts zuzuweisen, wie bereits im Sonderfall des gleichseitigen Dreiecks ABC. Es scheint genauso schwierig für Melanie zu sein, Punkte in die Zeichnung hineinzusehen, die noch nicht konstruiert worden sind, wie vorhandene Punkte als irrelevant für die weitere Problemstellung zu akzeptieren.
Melanie begründet ihre Einschätzung, dass im vorliegenden Fall ein Kreis durch A, M und $H = B$ gezeichnet werden kann, indem sie zugleich die ihres Erachtens gleichen Längen der Strecken AF, MF und BF zeigt. Damit ist ihr Entscheidungskriterium, ob ein Kreis möglich ist, oder nicht, rein visueller Natur. Melanie versucht nicht, innergeometrisch zu argumentieren.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
21:22 - 21:38		Hinweis von I, dass im Fall $H = B$ das Dreieck nicht mehr spitzwinklig ist.
21:39 - 21:52	Wandering	Zieht nacheinander an A, B und C.
21:53 - 22:01	Guided	Zieht an C, so dass $H = M$. **Behauptung**: ABC spitzwinklig.
22:02 - 22:11		Zeigt Kreis mit Cursor. Zur Konstruktion wird der Mittelpunkt benötigt. Fragt, ob sie den Mittelpunkt konstruieren soll, was bejaht wird.
22:12 - 22:48		Überlegt (vergeblich), wie Umkreismittelpunkt zu konstruieren ist.
22:49 - 22:55		Einfall, den Button „Kreis durch drei Punkte“ zu nutzen.
22:56 - 23:31		Konstruktion des Kreises mit Hilfe des Buttons, Feststellung, dass Lösung, wenn $H = M$.

Auf den Hinweis, dass beim Zusammenfallen des Höhenschnittpunkts mit einem Eckpunkt das Dreieck nicht mehr spitzwinklig ist, zieht Melanie das Dreieck wieder so hin, dass H und M zusammenfallen. Anschließend versucht sie, den Mittelpunkt des Kreises durch A, M und B zu zeichnen. An dieser Stelle fällt sie folglich nicht mehr auf ihre Fehlvorstellung zurück, dass die Seitenmitte F der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sein müsse. Allerdings hat sie anscheinend auch keine Idee, wie der Mittelpunkt des gesuchten Kreises konstruiert werden könnte, denn sie überlegt sehr lange, was zu tun sei. Schließlich zeigt sie mit dem Cursor die ungefähren Radien und die ungefähre Lage des gesuchten Mittelpunktes, kann aber noch keine Möglichkeit benennen, diesen auch zu konstruieren. Als Ausweg fällt ihr ein, dass es im Programm einen Button gibt (Kreis durch drei Punkte), der diese Aufgabe für sie lösen kann. Anschließend setzt sie erneut den Zugmodus ein.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
23:32 - 23:48	Guided	Idee, zu überprüfen, was mit dem Kreis beim Ziehen passiert. Zieht an A, so dass (fast) $H = C$, aber Kreis geht nicht durch die vier Punkte (Abb. 6.6a)). Zieht an A, so dass $H = A$. Kreis geht durch die vier Punkte, aber Dreieck ist rechtwinklig.
23:49 - 24:13	Wandering	Zieht an A. Stoppt, als H und M beide auf Kreis liegen, aber bemerkt nicht, dass dies eine Lösung ist (Abb. 6.6b)). Zieht weiter an A.
24:14 - 24:48	Guided	Zieht abwechselnd an A und B, bis $H = M$. **Behauptung**: Dies ist die einzige Lösung.



a) b)

Abbildung 6.6 – *H liegt fast auf C (a), beim Ziehen liegen H und M auf dem Kreis (b)*

(24:26 - 18:35)

M: Ich denke, dass halt, wenn das (.) ehm, hach, jetzt kriege ich sie gerade wieder nicht aufeinander (versucht, lange vergeblich, H auf M zu ziehen), wenn das Dreieck, ehm, gleichseitig ist, dann ist das (..), also, dann würde ich es jetzt hinkriegen. Aber ich wüßte jetzt keine andere Lösung, eh, wenn die nicht aufeinanderliegen würden.

Als der Kreis durch A, M und B gezeichnet ist, kommt Melanie die Idee, nun wiederum zu ziehen und dabei zu beobachten, was mit dem Kreis passiert. Sie versucht an A und B zu ziehen, was aber nicht gelingt, da sie den Zugmodus nicht aktiviert hat. Dies bemerkt sie allerdings nicht, sondern vermutet nun, dass sie, durch die nachträgliche Konstruktion des Kreises bedingt, nicht mehr an den Punkten ziehen kann. Damit wird deutlich, dass ihr an dieser Stelle nicht klar ist, wann an einem Punkt gezogen werden kann, und wann nicht, und welchen Einfluss die Reihenfolge von Konstruktionsschritten hat. Dies zeigt sich auch daran, dass sie mehrfach versucht, an Schnittpunkten, wie dem Umkreismittelpunkt M oder der Seitenmitte von AC zu ziehen. Damit ist natürlich die Möglichkeit, sich das Potential einer DGS nutzbar zu machen, stark eingeschränkt, und Melanie scheint weniger eine aktive, als vielmehr eine sehr passive Rolle im Umgang mit der DGS einzunehmen. Melanie bemerkt ihren Fehler erst, als ihr der Hinweis gegeben wird, dass der Zugmodus nicht aktiviert ist.

Beim Ziehen verfolgt sie dann ein weiteres Mal ihre Strategie, H auf einen der Eckpunkte des Dreiecks zu ziehen. Im Fall $H = C$ geht der Kreis nicht durch die geforderten vier Punkte; im Fall $H = A$ ist das Dreieck nicht mehr spitzwinklig. Obwohl bei ihrem Ziehen im Rahmen der Versuche, H auf die Eckpunkte des Dreiecks zu ziehen, der Kreis mindestens sieben Mal durch diesen Punkt geht und sie einmal sogar stoppt, als dies der Fall ist (vgl. Abb. 6.6b)), um an einem anderen Punkt weiterzuziehen, so dass die Situation wirklich statisch vorliegt, registriert Melanie nicht, dass hier andere Lösungen vorliegen. Stattdessen kommt sie zu dem Schluss, dass es nur eine einzige Lösung im Fall $M = H$ gibt.

Ebenso wie Hannes verfällt Melanie sehr schnell auf die Lösung „gleichseitiges Dreieck". Anders als bei Hannes, der noch prüft, ob es weitere Lösungsmöglichkeiten gibt, ist die „Punktreduzierungsstrategie" Melanies einzige Vorgehensweise. Auch wenn sie sehr langsam zieht und in der

Regel auch lange Zeit benötigt, um ihr gewünschtes Ergebnis „hingezogen“ zu haben, nimmt sie die Zustände zwischen Anfang und Ende der Zugaktivität nicht in den Blick. Lediglich das statische Bild am Ende des Ziehens wird von ihr in dieser Hinsicht untersucht. Die Bewegungen des Cursors machen dabei deutlich, wie sie versucht, sich den Kreis vorzustellen.
Die Prüfung in dieser Form, ob vier Punkte auf einem Kreisbogen liegen, kann kaum während des Ziehens erfolgen, weil kaum jemand sich simultan die Veränderung des Kreises vorstellen und gleichzeitig entscheiden kann, ob dieser nun durch alle vier Punkte geht. Doch genau an dieser Stelle kann die DGS diese Vorstellungsleistung erheblich reduzieren, indem ganz einfach der Kreis durch drei Punkte gezeichnet und dann gezogen wird sowie schließlich nur noch beobachtet werden muss. Doch auch als Melanie endlich auf die Idee kommt, mit eingezeichnetem Kreis zu ziehen, hilft ihr dies nicht weiter. Die Zustände innerhalb des Ziehens scheinen für sie nicht relevant zu sein, sondern lediglich das Endprodukt.
Deswegen kann Melanie das Potenzial der Software für sich nicht nutzen. Zudem sind ihre Zugmodusaktivitäten sehr eingeschränkt und beschränken sich ausschließlich auf *Wandering* und *Guided dragging*. Darüber hinaus versucht Melanie immer wieder auch an Schnittpunkten zu ziehen, ohne zu bemerken, dass dies nicht funktionieren kann.
Melanies Zugmodusaktivitäten machen einen unbeholfenen und unsystematischen Eindruck. Hinzu kommt, und darin unterscheidet sie sich deutlich von Hannes, dass auch ihr fachliches Wissen lückenhaft ist. Daher fällt es ihr schwer, Zusammenhänge begründet darzustellen, und sie verlegt sich stattdessen auf visuelle Eindrücke.
Melanie gehört zu den Studierenden in Examensnähe, und es ist bereits vier Semester her, dass sie die Vorlesung „Elemente der Geometrie“ gehört hat. Sie hat allerdings auch nach Besuch der Vorlesung das Programm noch genutzt, um nicht zu vergessen, wie es funktioniert. Trotzdem sind einige Unsicherheiten bestimmt auch auf mangelnde Übung zurückzuführen. Hier wären beispielsweise ihre Versuche zu nennen, zwei Punkte zur Deckung zu bringen, wofür sie sehr viel mehr Zeit als Hannes benötigt: „*Hach, jetzt kriege ich sie gerade wieder nicht aufeinander*“ (Z.20-21). Insgesamt hat sich Melanies Studienerfahrung offenbar nicht in Form einer Nutzung des Potenzials der DGS ausgewirkt.

6.1.3 Fallstudie „Diana"

Für Diana, deren Beweisverständnis ich im Kapitel 5.1.2 ausführlich analysiert habe, liegt ein „Sich-besser-vorstellen-können" im Zentrum des Interesses, dies allerdings auf einer rein deskriptiven Ebene. Im Folgenden bearbeitet sie die Aufgabe 4, bei der es darum geht, ob in einem spitzwinkligen Dreieck zwei Eckpunkte, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt M auf einem Kreisbogen liegen können.
Zunächst versucht Diana, die Grundkonstruktion (spitzwinkliges Dreieck, Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt) zu erstellen. Dazu braucht sie 3,5 Minuten, mehr als doppelt so lang wie Hannes und Melanie, die beide ungefähr 1,5 Minuten für diese Konstruktion benötigen. Dies ist im Wesentlichen auf rein handwerkliche Probleme zurückzuführen: so benötigt Diana mehrere Anläufe, um die Höhen zu erstellen. Dies versucht sie unter Nutzung des Buttons „Senkrechte", bei dem man zunächst eine Gerade anklicken muss. Die dabei entstehende Senkrechte muss dann derart in die richtige Position gezogen werden, dass ein auf ihr liegender Punkt auf einen bereits vorhandenen gezogen wird und dort einrastet. Diana hingegen versucht immer wieder, zunächst auf einen Punkt zu klicken und von dort auf die Gerade zu ziehen. Dabei hat sie keine Erklärung dafür, warum ihr Vorgehen nicht funktioniert. Als ich ihr den Hinweis gebe, dass zunächst die Gerade angeklickt werden muss, versäumt sie, den dabei entstehenden Punkt mit einem geeigneten zur Deckung zu bringen. Als ich ihr auch diesbezüglich den Hinweis gebe, versucht sie, diesem zu folgen, weiß aber nicht, welcher Punkt geeignet ist. So erstellt sie die Senkrechte zur Seite AC, versucht aber zunächst, den Punkt mit C zur Deckung zu bringen (vgl. Abbildung 6.7a)). Beim nächsten Versuch, den sie nach dem Hinweis unternimmt, dass B der geeignete Punkt sei, lässt sie die Maus zu früh los, so dass ein neuer, unnötiger Punkt D entsteht und die Senkrechte nicht durch den gewünschten Eckpunkt B geht (vgl. Abbildung 6.7b)). Diana möchte die Situation retten, indem sie den Punkt D nachträglich auf den Punkt B zieht. Dies ist insofern problematisch, als eine derartig hingezogene Konstellation natürlich nicht zugmodusresistent ist, da die Punkte nicht durch einen Konstruktionsschritt aneinander gebunden sind. Statt allerdings den Button „Elemente bewegen" zu aktivieren, klickt sie den danebenliegenden Button „Punkt hinzufügen" an, so dass sie nun einen weiteren, unnötigen Punkt erhält. Natürlich können solche Fehler auch einem routinierten Anwender unterlaufen, und möglicherweise trägt auch die Nervosität in der Interviewsitutation zu solchen Missgeschi-

cken bei. Bemerkenswert bei Diana sind jedoch die hohe Zahl von Fehlern, die ihr unterlaufen, sowie ihre Hilflosigkeit in solchen Situationen.
Diana kommentiert ihr eigenes Vorgehen mit den Worten: „*Oh Gott!* (Seufzt) *Ich bin, eh,* (wedelt heftig mit der Hand, die vorher die Maus bedient hat). *Ich freue mich schon auf die Klausur, ich merk das schon* (lacht)“.

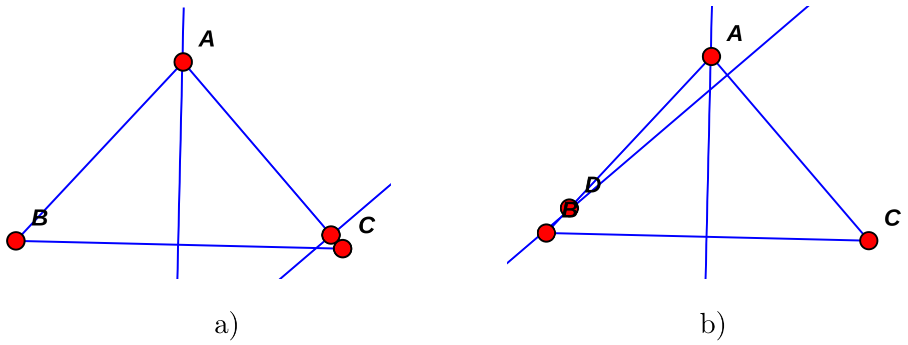
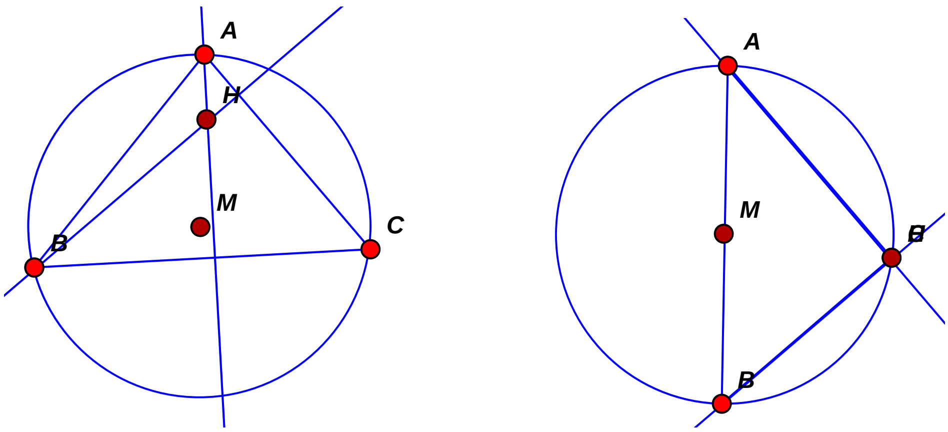


Abbildung 6.7 – *Mehrfacher Versuch, die Höhe zu AC durch B zu konstruieren*

Da ich zu diesem Zeitpunkt eher daran interessiert bin, endlich zum Kern der Aufgabe vorzudringen, gebe ich Diana den Hinweis, wie sie mit Hilfe des Buttons „Kegelschnittmittelpunkt definieren“ den Umkreismittelpunkt erzeugen kann. Dabei ist festzustellen, dass Dianas Dreieck nahezu gleichschenklig ist, da der Umkreismittelpunkt auf der Höhe von A zu liegen scheint.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
5:30 - 5:50		Frage: Können H, B, C und M auf einem Kreis liegen?
5:50 - 6:04		Wenn das Dreieck rechtwinklig ist und H auf A liegt, ist es möglich.
6:05 - 6:12	Guided	Zieht an B, so dass $H = A$.
6:13 - 6:20		Hinweis, dass das Dreieck nicht mehr spitzwinklig ist.
6:21 - 6:34	Guided	Zieht an B, so dass Dreieck wieder spitzwinklig ist (Abb. 6.8a)).
6:35 - 6:39		Frage: Gibt es eine Lösung im spitzwinkligen Dreieck?

6:40 - 6:50		Überlegt lange. **Behauptung**: nein.
6:50 - 6:55		Funktionale Betrachtung: „*Wenn ich B nach C bewege, geht H weiter runter*“ (Abb. 6.8a)).
6:55 - 7:00	Wandering	Zieht an B, sieht Vermutung bestätigt. „*Dann entsteht wieder ein rechter Winkel.*“ (Abb. 6.8b))



a) b)

Abbildung 6.8 – *Wenn ich B nach C bewege, geht H weiter runter*

An dieser Stelle ist eine interessante Beobachtung zu machen: anders, als viele andere Studierende, beobachtet Diana nicht, was beim Ziehen passiert und beschreibt dieses dann anschließend. Stattdessen führt sie gewisse funktionale Überlegungen durch, **bevor** sie sich diese durch den Zugmodus bestätigen lässt.

Zieht man B weit genug in Richtung C, entsteht zwangsläufig die Situation, dass H und C zusammenfallen, da durch dieses Ziehen das Dreieck irgendwann stumpfwinklig mit stumpfem Winkel in C wird und der Höhenschnittpunkt über C aus dem Dreieck hinausläuft. Dies geschieht auch durch Dianas Ziehen. Ihren Äußerungen ist nicht zu entnehmen, dass sie diese Situation erwartet hat. Da aber bereits thematisiert worden war, dass dieser Fall die Voraussetzung der Spitzwinkligkeit verletzt, kommt ihr der Fall zumindest nicht ungelegen, denn sie nutzt ihn als Bestätigung für ihre Behauptung, dass die Aufgabenstellung keine Lösung hat. Da an dieser Stelle die Aufgabenbearbeitung für Diana abgeschlossen zu sein scheint, gebe ich den Hinweis, dass ihre bisherige Strategie, aus vier Punkten drei zu machen, sich immer

nur auf den Höhenschnittpunkt H und einen der Eckpunkte des Dreiecks bezogen habe und schließe die Frage an, ob dies nicht auch auf H und M übertragbar sei.
(8:00 - 10:09)

D: Aber ich glaube, das verändert auch wieder das Dreieck. Dass es dann, eh, oder?

I: Was, was meinst du, was verändert

D: (unterbricht) Also, wenn ich das (zeigt mit der Maus auf *H*) runterziehe, dann verändere ich ja wieder die Winkel vom (..) Dreieck, dann wird das ein, ehm (..) gleichseitiges Dreieck? Ja, dann wird es ein gleichseitiges Dreieck. Aber das ist ja dann doch noch spitzwinklig (..). Ja stimmt, dann doch (lacht).

I: Ja. Kannst du mal einfach machen?

D: Ja. (Versucht an *H* zu ziehen. Kontrolliert, als dies nicht geht, ob Zugmodus aktiviert ist. Dies ist der Fall.) Ne, das geht nicht. (Zeigt dann mit der Maus auf *A*.) Dann müsste ich eh (4 Sek. Pause), ehm, (flüstert) oh Gott, wie geht denn das jetzt noch mal? (Zieht an *A*, so dass die Höhe von *A* durch *M* geht).

I: Was versuchst du denn jetzt gerade?

D: (5 Sek. Pause) Doch, das müsste ja eigentlich (.) wenn das (..), Quatsch, da müsste ich ja den gleichen Abstand haben zu (5 Sek. Pause). Ne! (..) Ne, aber eigentlich geht das doch. Also jetzt ist es ja fast (.) gleichseitig, glaube ich, oder auf jeden Fall ein gleichschenkliges Dreieck.

I: Gleichschenklig sieht es aus, weil *H* auf der Mittelsenkrechten liegt, ja.

D: Ja. Aber wenn ich das jetzt, eh, (..), wenn ich jetzt zum Beispiel *B* oder *C* bewegen würde, dann würde das ja wieder das Dreieck verändern und *H* würde wieder von der (.), es muss ja einfach auf der Linie liegen, von dem Kreismittelpunkt. Aber dann würde das ja wieder die Mit-, diese Senkrechte verlassen. Also ich glaub, (..).

I: Ja. Klar. Ja, nein, du hast völlig recht, wenn du jetzt einen Schenkel länger machst, dann ist es natürlich nicht mehr gleichschenklig und *H* geht wieder runter.

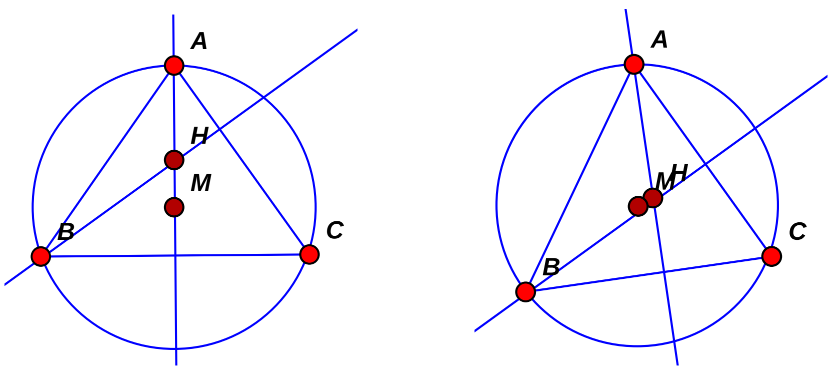
`D: (unterbricht) Und es wird auch nicht gleichseitig dadurch, wenn ich das jetzt, eh (zieht an B, so dass AB länger wird), oder? (Zieht an C) Weil, wenn ich jetzt hier die (zieht C schnell mehrfach hin und her. H und M kommen nicht zur Deckung). Ne, das treff ich nicht. Weil da ein Halbkreis ist.`

`I: Huch, so schnell kann ich jetzt nicht gucken.`

`D: Also wenn ich jetzt (...). Ich weiß gar nicht, wie ich das gerade machen soll.`

Wieder stellt Diana vor dem Ziehen funktionale Betrachtungen an: „*wenn ich das runterziehe, dann verändere ich ja wieder die Winkel vom Dreieck*“ (Z.4 - 6). Erst als diese Überlegungen zu dem Ergebnis kommen: „*das ist ja dann doch noch spitzwinklig*“ (Z.7-8), fängt sie an zu ziehen.

Als Diana schließlich den Zugmodus einsetzt, versucht sie zunächst wieder, direkt an H zu ziehen, obwohl H als Schnittpunkt der Höhen ein unfreier Punkt ist. Als sie schließlich erkennt, dass sie die Lage von H nur verändern kann, indem sie an einem Eckpunkt des Dreiecks zieht, sieht sie ihre Behauptung bestätigt, dass H die Mittelsenkrechte verlässt (die Zeichnung, in der die Mittelsenkrechte gar nicht visualisiert ist, würde eher die Feststellung nahelegen, dass M die Höhe verlässt, was aber letztlich beides als Konsequenz hat, dass das Dreieck nicht mehr gleichschenklig ist).



a) b)

Abbildung 6.9 – *Wenn ich B bewegen würde, würde H die Senkrechte verlassen*

Diana stellt immer wieder durchaus richtige Überlegungen an, beispielsweise, dass sie, um H und M zur Deckung zu bringen, gleichen Abstand zu den drei Eckpunkten des Dreiecks benötigt (Z. 17). Sie weiß allerdings nicht, wie diese theoretischen Überlegungen in ihre konkrete Aufgabenbearbeitung mit dem Programm einfließen können. Auch als sie schließlich mehrfach sehr schnell und heftig am Eckpunkt C des Dreiecks zieht, hat Diana keinen Erfolg.
Da es Diana nicht gelingt, durch simplen Einsatz des Zugmodus ein gleichseitiges Dreieck hinzuziehen, ist es an dieser Stelle konsequent von ihr, nun eine andere Strategie auszuprobieren. Diese Strategie liegt darin, den Winkel in B derart zu manipulieren, dass er auch beim Einsatz des Zugmodus die Größe von 60 Grad behält, da dies das Winkelmaß im gleichseitigen Dreieck ist.

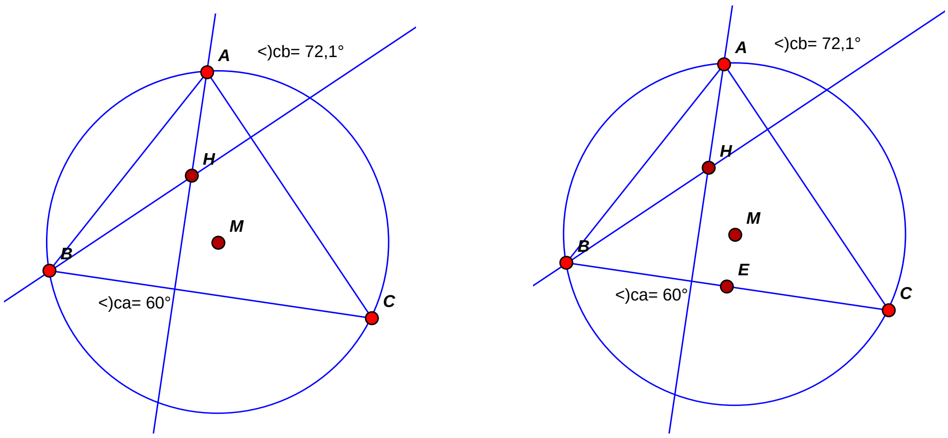
Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
10:10 - 10:22		Es müsste gehen, wenn ich in B einen festen Winkel von 60 Grad einstelle.
10:22 - 11:07		Versucht dreimal vergeblich, in B einen Winkel von 60 Grad abzutragen.
11:07 - 11:17		Erläutert auf Nachfrage, dass sie damit den Winkel in B nachträglich fixieren will.
11:17 - 12:13		Weiß nicht, wie sie das Problem lösen soll.

Diana weiß, dass das Innenwinkelmaß im gleichseitigen Dreieck 60 Grad beträgt. Sie steht nun allerdings vor dem Problem, ein Dreieck mit beweglichen Seitenlängen und Winkelmaßen konstruiert zu haben, bei dem es ihr nicht gelingt, durch Ziehen Gleichseitigkeit zu erzeugen. Im weiteren Verlauf des Interviews gibt Diana mehrfach an, bei einer Aufgabenbearbeitung nicht sofort mit der DGS zu arbeiten. Stattdessen würde sie sich zunächst anhand einer Skizze überlegen, wie sie die Konstruktion mit Papier und Bleistift durchführen würde, um dann anschließend die angestellten Überlegungen in das Programm zu übertragen: „ *Ich musste erst einmal überlegen, was ein gleichseitiges Dreieck ausmacht und wie man das, wie ich das auf dem Papier machen würde. Also, wenn ich eins zeichnen sollte. Wie ich da rangehen würde.*“ (16:48 - 17:00). Nun ist natürlich bei einer Konstruktion mit Papier und Bleistift das Winkelmaß eines Winkels im nachhinein nicht mehr veränderbar, so dass man, sollte man ein falsches Maß gewählt haben, nur noch radieren und neu konstruieren kann. Das scheinbar Paradoxe ist, dass in einer DGS, in der man noch im Nachhinein Maße verändern und hinziehen kann, ein beim Ziehen festes Winkelmaß in der Regel auch nur durch eine komplett neue Konstruktion erreicht werden kann, und kaum durch nachträgliche Manipulation. Dies scheint Diana allerdings nicht klar zu sein. Stattdessen versucht sie, nun nachträglich in B das feste Winkelmaß von 60 Grad abzutragen. Abgesehen davon, dass ihr dies aufgrund der bereits eingangs beschriebenen handwerklichen Mängel im Umgang mit der DGS auch nach drei Versuchen nicht gelingt, wären damit die Punkte H und M natürlich überhaupt nicht mehr an die neue Konstruktion gebunden. Dieser Umstand ist auch Diana klar, denn sie bemerkt auf den Hinweis, mit welchem Button man in Cinderella einen festen Winkel konstruieren kann: „*Aber dann habe ich ja eine andere (..) Gerade eingezeichnet*“ (11:40).

Da die Aufgabenbearbeitung in eine Sackgasse geraten zu sein scheint und Diana sehr hilflos wirkt, gebe ich den Hinweis, doch die Winkel einfach einmal durch das Programm messen zu lassen, um so vielleicht doch noch mit Einsatz des Zugmodus zum Erfolg zu kommen.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
12:13 - 12:26		Aufforderung, den Winkel zu messen.
12:27 - 12:32		Misst den Winkel in B, Winkelmaß beträgt 66 Grad.
12:33 - 13:00	Guided	Zieht an B und an A, um Winkelmaß 60 Grad zu erreichen.
13:00 - 13:45	Dummy locus	**Optische Beurteilung**: Winkel in C ist kleiner als 60 Grad. Zieht an C, um Winkelmaß zu verändern, ohne dass sich Winkelmaß in B verändert. Klappt nicht. Zieht an C, so dass Winkelmaß in B wieder 60 Grad.
13:45 - 14:00		Misst den Winkel in A, um zu sehen, um wieviel der Winkel in C zu klein ist (Abb. 6.10a)).

14:00 - 14:14	Dummy locus	Zieht an C, um den 60 Grad Winkel in B zu erhalten und gleichzeitig die Winkel in A und C auf 60 Grad zu ziehen. Es klappt nicht, da der Winkel in B ebenfalls seine Größe verändert. Zieht wieder so, dass der Winkel in B 60 Grad groß ist und stoppt dann.



a) b)

Abbildung 6.10 – *Der Winkel in A ist zu groß. Die Höhe von A muss durch die Seitenmitte von BC gehen.*

Auch unter Nutzung der Messfunktion gelingt es Diana zunächst nicht, ein gleichseitiges Dreieck hinzuziehen. Sie weiß zwar nun, welche Winkel um wieviel zu groß bzw. klein sind, doch durch Änderung eines Winkels in die „richtige Richtung“ ändert sich leider ein anderes Winkelmaß in die „falsche Richtung“. Daher kommt Diana an dieser Stelle durch ausschließliches Ziehen nicht weiter. Erst die theoretische Überlegung, dass beim gleichseitigen Dreieck die Höhe auch durch die Seitenmitte der entsprechenden Seite geht, hilft ihr weiter. Im Anschluss an die Aufgabenbearbeitung gibt Diana wiederum an, sich in diesem Kontext an ihrer Vorgehensweise mit Papier und Bleistift orientiert zu haben:

(17:06 - 18:05)

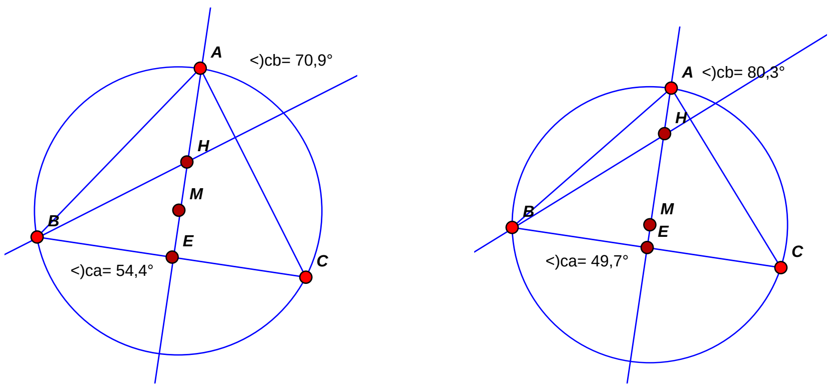
```
D: Also, ich mache auch bei den Hausaufgaben, mache ich z.B., mache ich erst immer eine Skizze, um zu gucken, ob das überhaupt so hinkommt, wie ich mir das vorstelle. Weil ich sonst bei der (.) Konstruktionsbeschreibung (..) habe ich schon öfter erlebt, dass ich was geschrieben habe, was am Ende sich als falsch herausstellte, und wo ich dann viel Zeit verloren habe.
I: Also im Prinzip hilft dir die Arbeit auf Papier schon, um dich hierfür zu sortieren?
D: Ja. Also ich muss mich vorher (.), die Idee, die ich im Kopf habe, wenn ich die Übung, also die Aufgabe durchlese, die habe ich dann im Kopf, aber um die umzusetzen richtig, mache ich mir meistens so eine Skizze auf Papier. Um zu sehen, ob das so überhaupt hinkommen würde, bevor ich mich dann an Cinderelle setze und das dann (..) so mache. Weil, ich weiß nicht, mit den Buttons, total durcheinander bin, und weil das dann doch nicht so hinkommt, wie ich es mir vorgestellt habe. Und weil ich dann wieder alles wegstreiche, was ich bis dahin hingeschrieben habe.
```

Die Überlegung, dass die Höhe von A durch die Seitenmitte von BC gehen muss, gibt Diana eine neue Idee für ihre Vorgehensweise, nachdem das vorherige Ziehen zu keinem befriedigenden Ergebnis geführt hat.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
14:15 - 14:46		Die Höhe (von A) muss in der Mitte zwischen B und C liegen. Konstruiert die Seitenmitte E von AB (Abb. 6.10b)).
14:46 - 14:50	Guided	Zieht an A, so dass die Höhe durch E geht (6.11a)).

14:50 - 15:17	Dummy locus	Zieht an A, so dass die Höhe weiter durch E geht. Achtet dabei auf die Winkelgröße in B. Der Winkel in A wird immer größer (Abb. 6.11b)). Stoppt. Zieht an A, so dass der Winkel in A kleiner wird. Stoppt, als $H = M$. **Behauptung**: Sonderfall des gleichseitigen Dreiecks ist die einzige Lösung.

Nachdem Diana zunächst so gezogen hat, dass die Höhe von A durch die Seitenmitte E von BC geht, versucht sie nun so zu ziehen, dass auch die Winkel das richtige Maß bekommen. Dabei richtet sie ihr Augenmerk allerdings zunächst nur auf den Winkel in B. Während sie versucht, diesen auf das richtige Maß zu bekommen, bemerkt sie nicht, dass der Winkel in A sich dabei in die falsche Richtung verändert, da dieser noch größer wird, obwohl er bereits zu groß ist.



a) b)

Abbildung 6.11 – *Die Höhe muss durch E gehen, die Winkel müssen 60 Grad groß sein.*

Da sich auch der Winkel in B nicht auf 60 Grad ziehen lässt, sondern immer kleiner wird, ändert Diana ihre Zugrichtung. Dabei zieht sie immer so, dass die Höhe von A weiterhin durch E geht. Auf diese Art und Weise gelingt ihr schließlich, ein gleichseitiges Dreieck hinzuziehen. Dianas Kommentar: „*So. Das heißt, die sind jetzt alle 60 Grad. Nach hundert Jahren habe ich es geschafft. Und jetzt liegt auch D auf H*“ (15:34 - 15:38).

Mit dem Hinziehen des Sonderfalls „gleichseitiges Dreieck“ ist für Diana die Aufgabenbearbeitung abgeschlossen. Sie scheint erleichtert, eine den Aufgabenvoraussetzungen entsprechende und der Interviewerin gefallende Lösung präsentieren zu können. Damit muss festgestellt werden, dass Diana zum intendierten Kern der Aufgabe überhaupt nicht vordringt.
Bei Diana zeigen sich wiederholt große, rein handwerkliche Defizite im Umgang mit der DGS. Hier wird deutlich, dass dieser Aspekt, der vielleicht aufgrund des vermeintlich leicht zu erlernenden Umgangs mit einer DGS in den Hintergrund gerückt ist, nicht unterschätzt werden darf. Immerhin findet das Interview kurz vor Ende des Semesters statt, so dass Diana seit gut 3 Monaten wöchentlich in Vorlesung und Übung mit dem Programm konfrontiert wird und nur noch 2 Wochen bis zur Klausur bleiben. Dazu kommt, dass Diana ihre theoretischen und durchaus richtigen Überlegungen nicht dazu nutzen kann, die DGS hilfreich für sich einzusetzen. Stattdessen scheint sie durch die scheinbare Diskrepanz zwischen Theorie und konkretem Agieren mit dem Programm geradezu behindert zu werden. Wohl kann ein Anwender mit einer DGS an einem Dreieck so ziehen, dass Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt zusammenfallen, ohne dass dieser Anwender irgendeine Kenntnis über sonstige Besonderheiten eines solchen Dreiecks besitzt. Diana hingegen, die solche theoretischen Kenntnisse hat, gelingt dieses Zusammenziehen der beiden Punkte nur unter großen Mühen. Dabei erweist sich gerade ihr Denken in funktionalen Zusammenhängen: „was passiert an jener Stelle, wenn ich an dieser eine Änderung vornehme“ als ein großes Hindernis. Dies ist um so frappierender, als das Befördern des funktionalen Denkens gemeinhin als einer der größten Vorzüge einer DGS angesehen wird.
In diesem Zusammenhang möchte ich noch einmal an Dianas Beweisverständnis anknüpfen. Diana hatte festgestellt, dass ihr die DGS helfe, sich Dinge besser vorstellen zu können. Konkretisiert hat sie dies am Beispiel des Thalessatzes, bei dem sie dank der DGS ein genaues Bild vor Augen hat, wie sich die Seiten des Dreiecks verändern, während der Winkel auf dem Halbkreis konstant bleibt. Dieses „Sich-besser-Vorstellenkönnen“ scheint zunächst mit ihren Schwierigkeiten beim Umgang mit der DGS in einem Konflikt zu stehen, denn sie kann ja gerade nicht mit Hilfe der DGS bewusst mit Veränderungen und Invarianten spielen, um daraus einen Mehrwert zu ziehen. Bei genauerem Hinsehen fällt jedoch auf, dass das „Sich-Vorstellen-Können“ im Kontext der konkreten Aufgabe zum Satz des Thales auf einer rein rezipierenden und deskriptiven Ebene stattfindet. Da die Bahn des Punktes C nicht mehr frei wählbar, son-

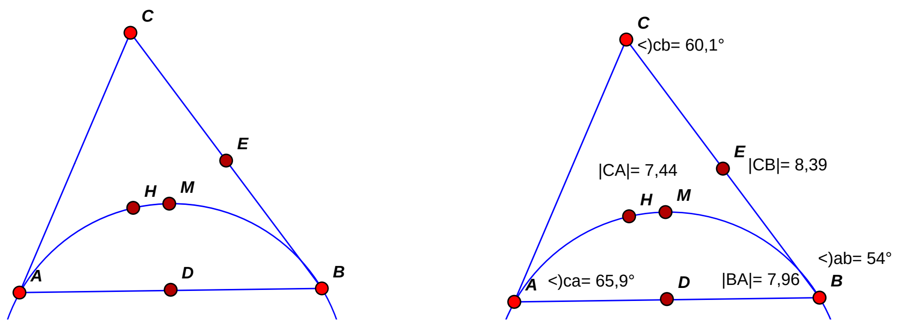
dern bereits eindeutig festgelegt ist, kann Diana sich in die Rolle einer passiven Konsumentin zurückziehen, die zwar aktiv den Zugmodus einsetzt, dabei aber keinerlei Gestaltungsmöglichkeiten hat. Daher treten die Konflikte, die im Rahmen der Aufgabenbearbeitung entstehen, naturgemäß überhaupt nicht auf und Diana kann für sich das Gefühl haben, vom Einsatz der DGS zu profitieren. Sobald allerdings die Konsumentinnenrolle zugunsten einer Agentinnenrolle aufgegeben werden muss, kann Diana keinen Mehrwert mehr aus der Nutzung des Programms für sich ziehen. Stattdessen wählt sie den Weg, sich die Dinge statisch mit Papier und Bleistift zu erarbeiten und anschließend einen Transfer in die DGS zu versuchen.

6.1.4 Fallstudie „Verena“

Für Verena hat ein Beweis sowohl eine verifizierende, als auch eine begründende, in Ansätzen sogar systematisierende Funktion (s. Abschnitt 5.1.6). Verena bearbeitet im Folgenden die Aufgabe 4, bei der es um die Fragestellung geht, ob in einem spitzwinkligen Dreieck der Höhenschnittpunkt H, der Umkreismittelpunkt M und zwei Eckpunkte auf einem gemeinsamen Kreis liegen können. Da die gesamte Aufgabenbearbeitung 34 Minuten gedauert hat, werde ich mich bei der Analyse auf Schlüsselstellen beschränken.
Die Bearbeitung der Aufgabe fand zwischen 3:23 und 37:28 statt. Nach Anfertigung der Grundkonstruktion stellt Verena ihre erste Behauptung auf:

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
5:30 - 5:50		**Behauptung**: Durch 3 Punkte kann ein Kreis gezeichnet werden. Konstruiert Kreis durch A, M und B.
5:50 - 6:25		**Behauptung**: Es kann keine Lösung geben, da das Viereck $ABHM$ ein Trapez sein müsste.
6:25 - 6:49	Guided	Zieht an C, so dass H auf A bzw. auf B zu liegen kommt. **Feststellung**: dies ist eine Lösung.
6:49 - 6:57	Guided	Zieht an C, um H auf M zu ziehen. Dabei kommt H auf dem Kreis zu liegen. **Feststellung**: Dies ist auch eine Lösung.
6:58 - 7:45	Guided	Zieht an C, so dass $H = M$. **Feststellung**: Das Dreieck ist nun gleichseitig. Die Problemlösung liegt darin, aus vier Punkten 3 zu machen.

Verena führt sehr souverän die Grundkonstruktion aus. Nachdem sie zunächst die erstellte Konstruktion beurteilt, in der H nicht auf dem Kreis durch A, B und M liegt und sie die (falsche) Vermutung aufstellt, dass es keine Lösung gibt, da das Viereck $ABHM$ ein Trapez sein müsse, um einen Umkreis zu haben, verfolgt sie zügig die Strategie, aus vier Punkten drei zu machen, indem sie das Dreieck so verzieht, dass H auf A, B bzw. M zu liegen kommt. Dabei stellt sie fest, dass das Dreieck in den ersten Fällen rechtwinklig, im letzten gleichseitig ist, und begründet dies auch. Während des Ziehens geht der Kreis auch durch H (Abb. 6.12a)), und Verena erkennt sofort, dass auch dies eine Lösung des gestellten Problems ist. Dabei bemerkt sie, dass ihre zunächst aufgestellte Vermutung, das Viereck $ABHM$ müsse ein Trapez sein, dadurch widerlegt ist. Lange überlegt sie am statischen Bild, ob das Dreieck in dieser Situation eine Besonderheit hat. Als ihr nichts auffällt, misst sie die Winkel und die Seitenlängen. Als ihr immer noch keine Besonderheit auffällt, frage ich nach, ob H auch noch andere Lagen auf dem Kreis einnehmen könne. Daraufhin überlegt Verena, dass sie so an C ziehen müsse, dass H auf dem Kreis bleibt (Dummy locus dragging). Nachdem sie dies ausgeführt hat, kommt sie zu der These: „*Kann es sein, dass der Umfangswinkel in C immer gleich bleiben soll?*“ (11:31 - 11:35) (Abb. 6.12b)).



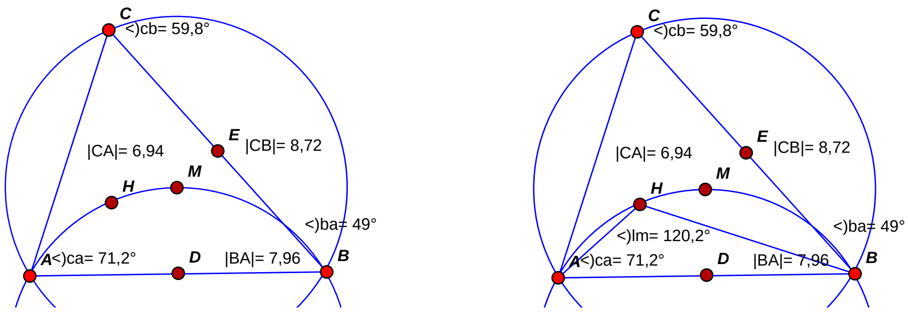
a) b)

Abbildung 6.12 – *Welche Besonderheit liegt vor? Ist der Umfangswinkel in C immer gleich groß?*

Nach wie vor macht Verenas Bearbeitung einen souveränen Eindruck. Während sie zunächst zügig ihre Strategie, aus vier Punkten drei zu machen, in allen möglichen Fällen durchführt, ergibt sich zufällig auch eine andere Lösung (Abb. 6.12a)), die von ihr sofort als solche identifiziert wird. Diese Lösungsvariante war Verena bis dato nicht präsent, wie sie selbst einräumt. Der Zugmodus hat ihr also wirklich genützt, zumal sie die hingezogene Konfiguration auch sofort als Gegenbeispiel für ihre zunächst aufgestellte „Trapez“-These erkennt.
Es ist naheliegend, in einer derartigen Situation eine Besonderheit des Dreiecks, wie beispielsweise Gleichschenkligkeit, zu suchen. Da Verena allerdings auch nach Nutzung der Messfunktionen des Programms nicht fündig wird (siehe Abb. 6.12b)), probiert sie nun, durch Ziehen

noch weitere Lösungen zu erhalten. Dabei muss sie den Punkt C auf einem Kreis bewegen (Dummy locus dragging). Dies gelingt ihr sehr gut, wenn sie auch anmerkt, dass es schwierig ist, gleichzeitig zu ziehen und die Veränderung der Winkel- und Seitenmaße im Auge zu behalten. Dabei geht sie sehr systematisch vor: Zunächst zieht sie an C derart, dass H auf B zu liegen kommt, und damit in der vorliegenden Konstruktion soweit rechts wie möglich. Dann zieht Verena langsam, so dass H auf dem Kreisbogen in Richtung M wandert. „*Man müsste das ja so ziehen, dass H auf dem Kreisbogen läuft*" (11:15 - 11:21). Bereits nach kurzer Zeit generiert Verena die Vermutung, dass der Winkel in C gleich groß bleiben müsse, damit H auf dem Kreis liegen kann. Damit wäre die Bahn von C ebenfalls ein Kreis.
Zunächst vermutet Verena, dass in diesem Fall der Abstand von H zu C konstant sein müsse. Allerdings verwirft sie aufgrund der sich ständig ändernden Kreisgröße diese Behauptung schon nach kurzem Ziehen wieder. Ihre Behauptung lautet schließlich: „*Auf jeden Fall, wenn ich C (.) auch in 'nem Kreisbogen nach links ziehe, dann würde H (.) auf diesem Kreisbogen verlaufen. (..) Über der Sehne AB*" (12:47 - 12:57).
Verena steht vor dem Problem, dass der Winkel in C beim Ziehen die Größe verändert, was ihr das Beobachten schwer macht. Daher sucht sie nach einer Möglichkeit, den Winkel nachträglich zu fixieren. Nachdem sie zunächst in die vorhandene Konstruktion einen festen Winkel in C einträgt, bemerkt sie beim Ziehen sehr schnell, dass ihr dies nicht weiterhilft, da der neu konstruierte Schenkel keinen Bezug zum eigentlichen Dreieck aufweist und zudem der zu beobachtende Winkel in C nach wie vor seine Größe verändert. Daher kommt sie auf die neue Idee, einen Kreis durch A, B und C zu konstruieren, um dann C auf diesem Kreis zu ziehen (*linked dragging*). Da der Kreis durch C gelegt wurde und nicht C auf den Kreis, verändert dieser beim Ziehen natürlich mehr oder weniger stark die Größe. Dennoch sieht Verena ihre Behauptung bestätigt, dass H auf einem Kreis läuft, wenn C auf einem Kreis läuft (vgl. Abb. 6.13a)). Damit ist Verena der Lösung des Problems bereits sehr nah gekommen. Auf die Frage, ob sie nun auch bestimmt sagen könne, auf welchem Fasskreis bezüglich welchen Umfangswinkels C nun laufe, zeichnet Verena den Winkel AHB ein und misst dessen Größe (vgl. Abb. 6.13b)). Dabei stellt sie fest: „*Dann würde ich halt sagen, dass H halt <u>auch</u> einen Mittelpunktswinkel sozusagen beschreibt. Der muss ja doppelt so groß sein, wie der Winkel in C, der gesuchte Umfangswinkel*" (15:46 - 15:55).
Das Programm zeigt an dieser Stelle für den Winkel in H ein Winkelmaß von 120,2 Grad

und für den Winkel in C ein Maß von 59,8 Grad an und ich stelle die Frage, ob man dem Programm nun soweit glauben könne, um zu sagen, wenn der Winkel in C 59,8 Grad betrage, läge H auf dem Kreis durch A, B und M.



a) b)

Abbildung 6.13 – *Wenn C auf einem Kreis läuft, dann läuft auch H auf einem Kreis*

(17:10 - 18:00)

V: Ich würde dem das, glaube ich, jetzt schon (.) glauben, aber, ich würd’ halt jetzt (..) gerne *C* (.) weiter so ziehen, dass ich das auch wirklich öfter sehe, und das kriege ich jetzt gerade irgendwie nicht hin, weil, sobald ich an *C* ziehe, verändert sich ja wieder der Winkel, und (zieht sehr weit an *C*. Dabei verändert der Kreis sehr stark die Größe. Die Bahn von *H* ist während dieser Zugaktion offensichtlich kein Kreis (vgl. Abb. 6.14a)).) Das ist gar kein Kreis, auf dem *H* liegt. Sehe ich gerade. (6 Sek. Pause, während Verena zieht). Sehe ich jetzt. Ich hab’ den immer nur so betrachtet (zieht, dass *H* innerhalb des Dreiecks bleibt), und deswegen dachte ich, das wäre. Hmh, ist ’ne Parabel. Sehe ich jetzt erst. Ich hab’ den nicht weiter, ich hab’ *C* nicht weiter gezogen. Okay, *H* liegt auf ’ner Parabel. Ist auch gut zu wissen (..). Dann kann (.) der Kreisbogen ja gar nicht mit (..). Ich trau’ mich nicht mehr, was zu sagen.

Bis zu dieser Stelle hat Verena eine kluge Aufgabenbearbeitung präsentiert. Dabei musste sie durchaus einige Vermutungen verwerfen, wobei ihr der Zugmodus stark geholfen hat. Durch diesen konnte sie auch die Vermutung generieren, dass der Winkel in C sein Winkelmaß behält, wenn H auf dem Kreis durch A, B und M liegen soll. Dabei lässt sie ihre theoretischen Kenntnisse über Umfangswinkel und Mittelpunktswinkel einfließen, so dass sie fundiert sagen kann, dass der Winkel in H so groß wie der Winkel in M sein muss, beide doppelt so groß wie der Winkel in C, und die Bahn von C ein Kreis. Damit hat Verena im Prinzip alle wichtigen Informationen zur Verfügung, um nun noch die letzte Lücke schließen zu können, nämlich eine Aussage über die konkrete Größe des Winkels in C zu treffen, da sie ja ebenfalls bereits erläutert hat, dass im Sonderfall $H = M$ das Dreieck ABC gleichseitig ist. Doch dieser letzte Schritt in der Beweiskette ist Verena noch nicht klar, wobei allerdings ihr bisheriges Vorgehen vermuten lässt, dass sie diesen Schritt durchaus noch erarbeiten könnte. Aktuell lässt sie sich jedoch durch den Einsatz des Zugmodus derart verunsichern, dass sie ihre bisherigen Überlegungen komplett verwirft, obwohl sie diese alle theoretisch fundieren konnte.

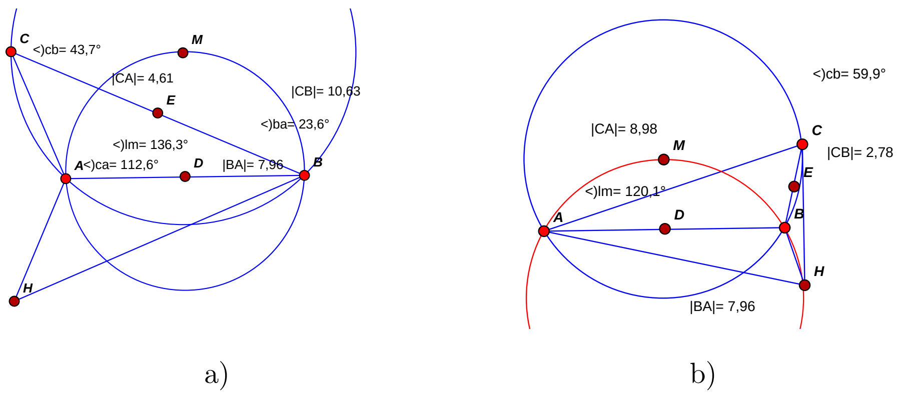


Abbildung 6.14 – *Läuft H auf einer Parabel oder einem Kreis?*

An dieser Stelle kommt ihr die Idee, die Ortslinie von H zu erzeugen. Versehentlich aktiviert sie dabei nicht den üblichen Button, sondern die animierte Variante. Als die Animation startet, kann beobachtet werden, wie sowohl C als auch H jeweils auf einem Kreis laufen (vgl. Abb. 6.14b)). Verenas Kommentar: „*Für mich läuft H jetzt nicht mehr auf einer Parabel*“ (19:58). Zudem sieht sie ihre Vermutung, dass der Abstand zwischen C und H konstant ist, bestätigt. Den Konflikt hingegen zwischen der Animation und der zuvor gemachten Beobachtung, dass H auf einer Parabel läuft, kann Verena so schnell nicht lösen, so dass sie hier um Hilfe bittet: „*Aber warum läuft H nicht mehr auf 'ner Parabel? Habe ich an 'nem anderen Punkt gezogen?*“ (20:20 - 20:27). Tatsächlich ist es fast unmöglich, C auf einem Kreis, dessen Größe nicht fixiert ist, so zu bewegen, dass H ebenfalls auf einem Kreis läuft, da man leicht zu weit nach rechts bzw. links zieht. Diese Erklärung leuchtet Verena ein und sie fasst ihre bisherigen Erkenntnisse noch einmal zusammen: Wenn H und M auf demselben Kreis liegen, können die Winkel AHB und AMB als Umfangswinkel über derselben Sehne aufgefasst werden, und sie sind daher gleich groß. Da der Winkel in M als Mittelpunktswinkel doppelt so groß wie der Winkel in C ist, muss auch AHB doppelt so groß wie der Winkel in C sein.

Damit ist allerdings immer noch nicht die Frage geklärt, ob eine Angabe zu den Winkelmaßen gemacht werden kann. Um hier weiterzukommen, nutzt Verena die Messfunktion des Programms, um den Mittelpunktswinkel in M zu messen. Dabei stellt sie fest, dass das angezeigte Winkelmaß für diesen Winkel nicht mit dem des Winkels in H übereinstimmt. Diese Tatsache verwirrt Verena wieder sehr, so dass sie erneut sehr stark an ihren bisherigen Überlegungen zweifelt.

(27:39 - 28:36)

V: Mich verwirren jetzt ehm, diese ganzen Striche, ja, und ich müsste
es ja wissen. Also ich traue mir nicht mehr, weil mich, um ehrlich
zu sein, das jetzt gerade verwirrt, weil, ehm,(.) weiß ich nicht,
vielleicht verwirrt mich aber auch die Situation, also.

I: Was, was verwirrt dich denn, dass das Programm

V: (unterbricht) Das ich mir nicht sicher sein kann, ob die Winkel
AHB und *AMB* gleich sind, weil da steht: 120,1 und 119,8.
Verstehst du, das können natürlich auch Ziehfehler sein, weil ich
H ja da drauf gezogen habe, dass sie deswegen nicht genau gleich
sind, oder es könnte halt, dass meine Theorie falsch ist und nur
zufällig (.). Aber (fängt an zu ziehen) die schwanken ja ungefähr
immer um 120. Verstehst du, jetzt zum Beispiel sieht es ja so aus,
als würde *H* auf dem Kreisbogen liegen, aber die beiden Winkel sind
nicht gleich. Und das weiß ich jetzt nicht, ob es ein Messfehler
ist, oder nicht.

Wieder ist eine Situation entstanden, in der Verenas Überlegungen der Visualisierung durch das Programm zu widersprechen scheinen. Und obwohl Verena viele Kenntnisse aus dem Bereich des Umfangswinkelsatzes hat, ist sie bereit, daraufhin ihre Theorie zu verwerfen. Auch später bemerkt sie noch einmal, dass sie durch so etwas stark irritiert wird: „*Ja, die Messfehler, oder die Ziehfehler, die verwirren einen wirklich*“ (29:48 - 29:53).
Es wird deutlich, dass Verena dem Programm eine große Verbindlichkeit zuschreibt. An Stellen, wo dieses falschen Überlegungen widerspricht, gereicht ihr dies zum Vorteil, z.B. wenn sie „sieht“, dass es außer (vermeintlich) Trapezen noch andere Vierecke gibt, die einen Umkreis haben. An Stellen hingegen, an denen sie richtige Überlegungen angestellt hat, lässt sie sich durch das Programm stark verunsichern. Dies geht so weit, dass sie sogar bereit ist, ihre Thesen zu revidieren, selbst wenn diese auf geometrischen Sätzen basieren.
Damit hat der Einsatz von Cinderella für Verena zwei gegenläufige Effekte: sie profitiert, indem sie auf neue Ideen kommt, wird aber gleichzeitig stark verunsichert, wenn optische Eindrücke scheinbar konträr zu ihren Theorien stehen. Hier hat sie noch nicht die nötige Souveränität, die Visualisierung durch das Programm auch kritisch zu hinterfragen. Dies ist Verena, wie aus ihren Äußerungen zu entnehmen ist, auch durchaus bewusst. Sie selbst zieht dennoch ein sehr positives Fazit bezüglich des Einsatzes des Programms:
(36:06 - 36:58)

```
V: Also, ich bin schon zufrieden mit dem Programm, auch wenn mich
   das gerade verwirrt hat, das hat damit nichts zu tun. Aber, ich
   ehm, man hätte es ja so gar nicht sehen können, was (.) ist, wenn
   ich (.) das ehm, also man hätte ein extra neues Dreieck zeichnen
   müssen, mit dem 120-Grad-Winkel, und dann gucken müssen, liegt das
   immer noch da drauf, und mit dem Zirkel abmessen und so. Und das
   geht ja so viel schneller, weil man ja theoretisch nur an C ziehen
   braucht.
I: Aber das hättest du doch hier auch gerade machen können, du
   hättest doch einfach
V: (unterbricht) Hätte ich.
I: mal sagen können, ich zeichne mal eins mit 120 Grad
   Mittelpunktswinkel
V: (unterbricht) Ja, ich hätte eh, ja gut, ich hätte (.), ich bin ja
```

dadurch schon erst da d’rauf gekommen. Also, es ist ja schwierig, so was ’rauszufinden, wenn man das auf dem Papier macht, und noch gar nicht weiß, was man überhaupt sucht. Man kommt, man kommt ja schon auf viele Lösungen, indem man daran zieht, und sieht, oh, jetzt habe ich ’nen (..) rechtwinkliges Dreieck, jetzt liegt H zufällig auf A. Oder, das merkt man wirklich nur durch Ausprobieren, bei einigen Sachen.

Verena zieht durchaus großen Nutzen aus dem Einsatz des Programms. Sie selbst sieht den Vorteil im Wesentlichen darin, auf Lösungsideen zu kommen, auf die sie beim Arbeiten mit Papier und Bleistift kaum gestoßen wäre. Zunächst setzt sie stark das *guided dragging* ein, indem sie das Dreieck in bestimmte Formen zieht, um damit aus vier Punkten drei zu machen. Diese „Punktereduzierungsstrategie“ ist ein Lösungsansatz, der Verena unmittelbar einfällt und ausschließlich auf theoretischen Überlegungen, nicht auf Ausprobieren beruht. Dabei ergibt sich eine weitere Lösung, die Verena so noch nicht im Sinn hatte. Um diese Lösung näher zu untersuchen, verwendet Verena das *Dummy locus dragging*. Hierdurch generiert sie die Vermutung, dass H auf dem Kreis durch A, B und M liegt, wenn C auf einem Kreis läuft und damit der Winkel in C konstant bleibt.

Diese Vermutung versucht Verena zu stützen, indem sie einen Kreis durch A, B und C konstruiert, um C nun auf dieser Bahn bewegen zu können. Durch dieses *linked dragging* sieht sie zunächst ihre These gestützt, bis sie diese aufgrund der oben geschilderten Irritationen komplett verwirft. Da als Ursache für das Dilemma die frei bewegliche Konstruktion erkannt werden kann, bei der beim Ziehen der ständig in der Größe variierende Kreis ein Beobachten stark erschwert, wählt Verena als Lösung die automatische Animation des Programms, die diese Schwierigkeit umgeht. Hierdurch sieht sie ihre Vermutung erneut bestätigt.

Damit durchläuft Verena den von Arzarello *et al.* (2002, S.69) dargestellten Prozess von ascending zu descending control in nahezu idealtypischer Weise (siehe Kapitel 3.2). Die DGS nimmt für sie die Rolle der Impulsgeberin ein, und durch das Ziehen entwickelt sie die Idee, dass die Konstanz des Winkels in C eine entscheidende Rolle spielt. Gleichzeitig verfügt Verena über das erforderliche geometrische Wissen, um die Beobachtungen in einen angemessenen fachinhaltlichen Kontext einzubinden. Insgesamt ist dieser Aspekt von Verenas Aufgabenbearbeitung kohärent mit ihrem in Abschnitt 5.1.6 herausgearbeiteten Beweisverständnis.

Gleichzeitig allerdings schreibt Verena dem Programm eine recht große Autorität zu, da sie aufgrund ihrer Beobachtungen beim Ziehen sehr schnell bereit ist, ihre eigenen, durchaus wohlbegründeten Theorien zu revidieren. Natürlich muss an dieser Stelle die Besonderheit der Interviewsituation berücksichtigt werden. Dennoch bleibt festzustellen, dass Verena an dieser Stelle dem Programm nicht kritisch genug gegenübersteht. Besonders die starke Irritation durch das Messen der Winkel wäre bei einer Studentin mit einem derart fundiertem Fachwissen nicht zu erwarten gewesen, da sowohl in der Vorlesung, als auch in den Übungen wiederholt die Deutung von Messergebnissen hinterfragt wurde. Gleichwohl verdeutlicht die geschilderte Episode, dass die Bereitschaft, der DGS eine gewisse Autorität zuzugestehen, nicht nur bei fachlich schwächeren Studierenden zu finden ist. Diese Problematik sollte beim Einsatz eines solchen Programmes nicht unterschätzt werden.

6.1.5 Fallstudie „Sophie“

Für Sophie hat ein Beweis durchaus auch eine begründende Funktion (s. Abschnitt 5.3), die allerdings eher den Anforderungen von außen geschuldet ist, als dem eigenen Interesse. Daher ist Sophie mit der Visualisierung als Beweis durchaus zufrieden.
Auch sie bearbeitet Aufgabe 4, bei der es darum geht, ob in einem spitzwinkligen Dreieck die Eckpunkte A und B, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt M auf einem Kreis liegen können.
Nach Erstellen der Grundkonfiguration zieht Sophie zunächst an C (*Wandering dragging*). Dabei ergibt sich nach einiger Zeit die Situation, dass H auf A zu liegen kommt. Sophie stoppt und überlegt, ob dies eine Lösung sein könne, da sie ja nun nur noch drei Punkte zu betrachten habe. „*Kann ich das auch so machen? Dann müsste ich ja nur das halb Punkte finden. Das geht ja*“ (8:23 - 8:30). Recht schnell fällt ihr allerdings auf, dass nun die Voraussetzung der Spitzwinkligkeit verletzt ist. Sie nutzt aber die Idee, die ihr offensichtlich erst durch den Einsatz des Zugmodus gekommen ist, für eine analoge Situation, die diese Voraussetzung nicht verletzt, nämlich für den Fall, dass H und M zusammenfallen, und zieht das Dreieck so, dass es gleichseitig wird (*guided dragging*). Anschließend konstruiert sie mit Hilfe des Buttons „Kreis durch 3 Punkte“ einen Kreis durch A, B und H und stellt fest, dass dies eine Lösung der Aufgabenstellung ist. Damit hat sie das Programm in dieser Situation nutzbringend einsetzen können.
Da Sophie den Kreis in einer Situation konstruiert hat, in der H auf M liegt, stelle ich die Nachfrage, welcher der beiden Punkte für die Konstruktion genutzt worden sei. Da Sophie dies selbst nicht mehr so genau weiß, zieht sie an C, damit die beiden Punkte wieder auseinanderfallen, und stellt fest, dass der Kreis durch H geht. Gleichzeitig liegt M nun nicht mehr auf dem Kreis. Daher überlegt Sophie, wie man auch M an den Kreis binden könnte. Dazu aktiviert sie den Button „Kegelschnitt“, um so einen Kreis durch vier Punkte zu konstruieren. Anschließend markiert sie die vier Punkte A, B, H und M. Da der Button „Kegelschnitt“ allerdings die Markierung von fünf Punkten erfordert, bevor der Kegelschnitt als sichtbare Linie erscheint, passiert nach Markierung von nur vier Punkten gar nichts. Sophie versucht nicht, die Situation inhaltlich zu analysieren, sondern stellt fest: „*Kriegt man jetzt keinen Kreis? Das geht nicht, okay. Dann nicht. (..) Aber ich würde sagen, das geht nur, glaube ich, wenn*

man das so macht, oder? Wenn der Mittelpunkt des Umkreises (.) gleich der Schnittpunkt der Höhen ist" (10:45 - 11:03).

Anschließend versucht Sophie erneut, einen Kreis durch A, H und B zu konstruieren, dieses Mal unter Nutzung des Button „Kreis durch drei Punkte". Da das Programm dabei allerdings gleichzeitig H und M erfasst, die beide übereinander liegen, erscheint der Kreis bereits, nachdem A und H markiert wurden. Zudem geht der so entstandene Kreis nicht durch B. Auch an dieser Stelle versucht Sophie nicht, das Problem inhaltlich zu analysieren. Stattdessen macht sie ihre Aktion rückgängig und versucht mehrfach erneut, die Konstruktion auf dieselbe Art durchzuführen.

Da Sophie nicht erkennt, dass das Aufeinanderliegen der beiden Punkte die Ursache des Problems ist, gebe ich einen entsprechenden Hinweis. Daraufhin zieht Sophie an C, so dass H und M nicht mehr aufeinanderliegen, konstruiert den Kreis durch A, H und B und zieht anschließend an C, um H und M wieder zur Deckung zu bringen. Dabei wiederholt sie ihre Behauptung, dass dies die einzige Lösung des Problems sei. Während des Ziehens allerdings entsteht die Situation, dass wieder alle vier Punkte auf dem Kreisbogen liegen, dieses Mal aber H ungleich M ist. Sofort erkennt Sophie, dass hier eine weitere Lösung vorliegt. Schließlich versucht sie, C so zu ziehen, dass M bei dieser Aktivität auf dem Kreis bleibt (*dummy locus dragging*). Da dieses gelingt, stellt Sophie die Behauptung auf, dass es unendlich viele Lösungen des Problems gibt. Die einzige Bedingung sei, dass sie nicht so weit ziehen dürfe, dass H auf einen der Eckpunkte oder gar außerhalb des Dreiecks zu liegen komme, da das Dreieck in diesen Fällen die Eigenschaft der Spitzwinkligkeit verliere (vgl. Abb. 6.15 a) und b)).

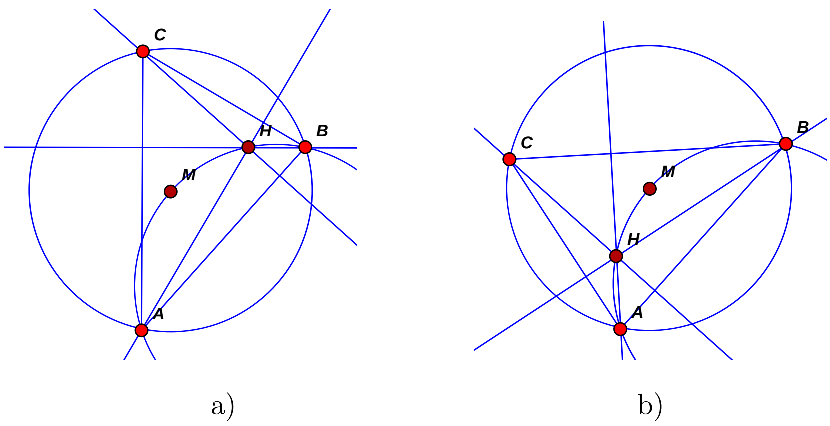


Abbildung 6.15 – *So würde es gehen und so auch*

Damit hat Sophie viele Lösungen gefunden. Das einzige Problem, das sich ihr in dieser Situation noch stellt, ist, dass M beim Ziehen immer wieder den Kreis verlässt: „*Ich weiß jetzt nicht, wie man das hinkriegt, dass der auch noch fest da drauf ist. Auf dem Kreis* (13:04 - 13:08).

Auf die Nachfrage, ob in diesen Fällen eine besondere Eigenschaft des Dreiecks ABC vorliege, zieht Sophie erneut an C, so dass H und M zusammenfallen. In diesem Fall sei das Dreieck gleichseitig oder zumindest gleichschenklig. Anschließend verzieht sie das Dreieck erneut, so dass H und M wieder auseinanderfallen, und stellt die folgenden Überlegungen an.

(14:26 - 15:40)

So: Aber wenn ich das jetzt so verschiebe, wären jetzt ja auch beide drauf.

I: Ja.

So: Ja ungefähr sind die Winkel, hier im mittleren Bereich (zieht an C, so dass H ungefähr mittig zwischen A und B liegt), ungefähr ja alle gleich. Und hier (zieht an C, so dass H fast auf B zu liegen kommt) wird der hier unten in A immer spitzer (zeigt mit dem Finger auf den Winkel CAB), und ehm, in B wird der immer größer. Und hier ist es genau anders herum (zieht an C, so dass H näher an A zu liegen kommt). Da wird der in B immer spitzer. Das ist ja wie so’n (5 Sek. Pause).

I: Okay, du hast jetzt die Winkel in A und in B betrachtet. Und jetzt gebe ich mal einen Hinweis, und was ist

So: (unterbricht) in C.

I: mit dem Winkel in C?

So: Das gucken wir jetzt mal. (Aktiviert den Button „Winkel messen“.) Ich glaube, der bleibt immer gleich. (Misst den Winkel in C.) 66 Grad hat der. (Zieht an C.)

I: Ja, aber im Moment liegt dein, ehm, M nicht auf dem Kreisbogen.

So: Ah so, ja, stimmt. (Zieht an C, so dass M wieder auf dem Kreisbogen zu liegen kommt.) So, ungefähr 60 Grad. (Zieht an C, so dass M an einer anderen Stelle auf dem Kreisbogen zu liegen kommt.) Gucken wir hier noch mal. Auch ungefähr 60. Der hat immer 60 Grad, würde ich sagen.

Durch den Einsatz des Programms gelangt Sophie zu der These der Konstanz des Winkels in C. Allerdings bewegt sie sich dabei ausschließlich auf der deskriptiven Ebene. Die auftretenden Schwierigkeiten, nämlich dass M beim Ziehen immer wieder den Kreis verlässt bzw. der Winkel in C seine Größe ändert, versucht sie auszuräumen, indem sie nachträglich das Winkelmaß in C auf 60 Grad fixieren möchte. Allerdings weiß sie nicht, wie. Daher gebe ich den Hinweis, dass ein Winkel in Cinderella nur von vornherein fest konstruiert werden könne und die nachträgliche Fixierung nicht möglich sei. Dies bringt Sophie auf die Idee, die gesamte Konstruktion erneut durchzuführen und diesmal das Winkelmaß in C mit 60 Grad vorzugeben. Als sie das Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt M konstruiert hat, überlegt sie zunächst sehr lange, und stellt dann die Frage: „*Kann man einen Kreis durch vier Punkte, geht nicht, oder?*“ (18:33 - 18:35). Anschließend konstruiert sie den Kreis durch A, B und H, der natürlich auch durch M geht. Auch beim Ziehen an A bzw. an B bleibt M auf dem Kreisbogen, so dass Sophie feststellt: „*Jetzt liegt er immer drauf. So sieht man das besser*“ (18:55 - 18:59).

Auf die Bitte, noch einmal das Ergebnis der Aufgabe zusammenzufassen, formuliert Sophie: „*Also, so lange oben in C der 60 Grad Winkel ist, und ehm, die Punkte* [gemeint sind H und M, G.W.] *im Dreieck liegen. Dann bleibt es spitzwinklig, und die Punkte liegen alle auf dem Kreis*“ (20:50 - 21:04). Auf die Nachfrage, ob die Aufgabe mit diesem Fazit nun zufriedenstellend und ausreichend bearbeitet worden sei, stellt Sophie fest: „*Für mich wäre das jetzt fertig*“ (22:09 - 22:10).

Sophies Aufgabenbearbeitung weist mehrere interessante Aspekte auf. Zunächst versteht sie es sehr gut, den Zugmodus dafür einzusetzen, Vermutungen aufzustellen und Thesen zu generieren. So wird zu Beginn der Aufgabenbearbeitung deutlich, dass ihr die Idee der Reduktion von vier auf drei Punkte erst kommt, als sie zufällig eine derartige Situation hingezogen hat. Allerdings ist sie auch sehr schnell bereit, die Behauptung aufzustellen, dass damit die einzige Lösung gefunden sei. Als jedoch beim weiteren Ziehen eine andere Lösungskonstellation entsteht, erkennt Sophie diese (im Gegensatz z.B. zu Melanie) sofort, so dass sie ihre Behauptung direkt wieder verwirft. Auch die Konstanz des Winkels in C fällt Sophie ausschließlich durch das Beobachten beim Ziehen auf. Allerdings versucht sie so gut wie gar nicht, mit Ausnahme des Sonderfalls $H = M$, irgendwelche geometrischen Begründungen oder Zusammenhänge für die von ihr beobachteten Phänomene zu finden. Stattdessen möchte sie ihre Behauptungen ausschließlich durch das Programm stützen. So kommt sie auf die durchaus sinnvolle Idee, ein Dreieck mit einem Winkel von 60 Grad zu konstruieren, in dem dann ja die vier besagten Punkte auf einem Kreis liegen müssen, wenn sich ihre Vermutung als richtig erweisen sollte. Doch statt nun nach inhaltlichen Zusammenhängen zu fragen, akzeptiert Sophie die visuelle Überprüfung als hinreichenden Nachweis.

Auch während der Bearbeitung kommt es immer wieder zu Situationen, in denen Sophie dem Programm die Entscheidung überlässt, ob irgendetwas möglich oder nicht möglich ist. Als Beispiel seien ihre wiederholten Versuche genannt, einen Kreis durch vier Punkte zu konstruieren. Dies gelingt ihr natürlich nicht, aber sie begreift nicht, warum. Sogar nach der Zeichnung des Dreiecks mit einem 60°-Winkel in C stellt sie erneut die Überlegung an, wie nun der Kreis durch die vier Punkte zu konstruieren sei. An dieser Stelle ist ihre Vorgehensweise in sich nicht ganz stimmig, denn eigentlich müsste der Kreis ja nun automatisch durch den vierten Punkt gehen, wenn ihre Überlegung, die sie ja auf diese Art und Weise überprüfen möchte, richtig ist.

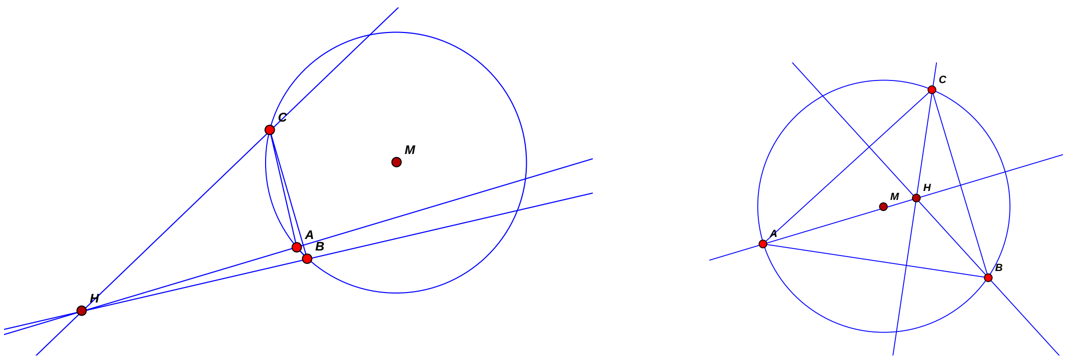
Sophie schreibt dem Programm eine relativ große Autorität zu und unterwirft sich dieser vergleichsweise unkritisch. Dies ist kohärent mit ihrem in Abschnitt 5.7 herausgearbeitetem Beweisverständnis, bei dem sich zeigte, dass sie zwar um die Frage nach Begründungszusammenhängen weiß, diese aber eher externen Autoritäten geschuldet sieht, weshalb sie sich selbst durchaus mit der dynamischen Visualisierung als Beweis zufrieden gibt. In Übereinstimmung hiermit stellt Sophie während der gesamten Aufgabenbearbeitung nicht einmal die Frage, warum eine bestimmte Größe des Winkels in C das entscheidende Kriterium für die Lage der zu beobachtenden Punkte zu sein scheint.

6.1.6 Fallstudie „Thilo“

Thilo wurde bereits kurz in Abschnitt 5.3 vorgestellt. Obwohl er sich selbst mit der dynamischen Visualisierung als Beweis zufrieden gibt, erkennt er an, dass auch die Frage nach den Begründungszusammenhängen ihre Berechtigung hat, allerdings durch die DGS nicht beantwortet werden kann.

Auch Thilo bearbeitet die Aufgabe 4, bei der es um die Fragestellung geht, ob in einem spitzwinkligen Dreieck die Eckpunkte A und B, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt M auf einem Kreis liegen können.

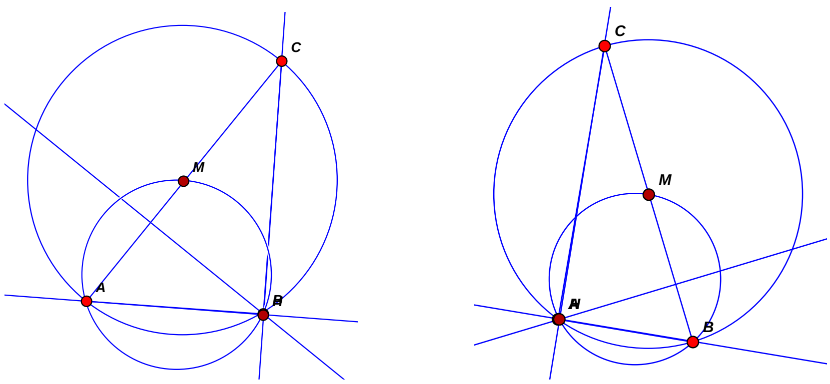
Nachdem er die Grundkonstruktion erstellt hat, überlegt Thilo lange am statischen Bild, bevor er schließlich am Punkt A zieht, so dass H auf B zu liegen kommt (guided dragging). Anschließend zieht er den Punkt A über die Ebene von links nach rechts und wieder zurück (wandering dragging), um nach seinen eigenen Worten zu beobachten, „*wie die Punkte verlaufen*“ (Abb. 6.16 a) und b)). Dies kann er allerdings, ebenfalls nach seiner eigenen Aussage, nicht erkennen, so dass er nach 20 Sekunden zu dem Schluss kommt, dass die vier genannten Punkte nicht auf einem Kreis liegen können.



a) b)

Abbildung 6.16 – *Wie verlaufen die Punkte?*

Daher gebe ich den Hinweis, doch einfach einmal einen Kreis durch drei der genannten Punkte zu zeichnen, um dann zu versuchen, das Dreieck so zu verziehen, dass auch der vierte Punkt auf dem Kreis zu liegen kommt. Daraufhin konstruiert Thilo einen Kreis durch die Punkte A, B und H, stellt dann aber fest, dass an M als unfreiem Punkt nicht direkt gezogen werden kann. Daher löscht er diesen Kreis wieder und konstruiert nun den durch A, H und M. Anschließend zieht er an B, so dass H auf B zu liegen kommt, eine Situation, die er bereits bei seinen anfänglichen Versuchen erzeugt, aber nicht als Lösung erkannt hatte (vgl. Abb. 6.17a)). Diesmal jedoch benennt er die Konfiguration sofort als Lösung und erläutert, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt. Anschließend zieht Thilo mehrfach recht schnell an B, so dass B innerhalb oder weit außerhalb des Kreises liegt. Er zieht dabei so, dass, sobald B auf dem Kreis liegt, die Situation $H = B$ entsteht. Auf die Nachfrage, ob dies die einzige Lösung der Problemstellung sei, überlegt Thilo: „*Man könnte ja (...) drei andere Punkte nehmen, und dann gucken, ob sich da irgendwas ändert*“ (7:46 - 7:56). Er erstellt daraufhin mit Hilfe des Buttons „Kreis durch drei Punkte“ den Kreis durch B, H und M und zieht anschließend an A, so dass H auf A liegt, so dass der Kreis nun natürlich wieder durch alle vier geforderten Punkte geht (vgl. Abb. 6.17b)). Thilo erkennt direkt, dass derselbe Sachverhalt wie zuvor vorliegt, lediglich bezüglich eines anderen Eckpunkts des Dreiecks.



a) b)

Abbildung 6.17 – *Mache aus vier Punkten drei*

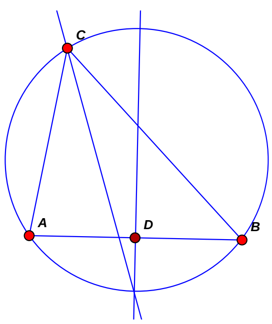
Nachdem Thilo das rechtwinklige Dreieck ABC mit rechtem Winkel in A als zweite Lösungsmöglichkeit benannt hat, zieht er, genauso wie zuvor am Punkt B, nun sehr heftig am Punkt A hin und her. Dabei liegt A mehrfach innerhalb und außerhalb des Kreises. Jedesmal jedoch, wenn A dabei den Kreis passiert, entsteht die Situation $A = H$. Dies ist in der Tat unvermeidlich, wenn man A auf einer Geraden zu H hin und von H weg zieht. Um A so auf den Kreisbogen zu ziehen, dass A ungleich H ist, müsste man in einem Bogen ziehen. Thilo jedoch gelingt es an dieser Stelle nicht, das heuristische Potenzial des Zugmodus zu nutzen. Auf die weitere Nachfrage, ob nun alle Lösungen vorlägen, erwidert Thilo, dass seine Strategie noch weiter fortgeführt werden könne, indem ein Kreis durch A, B und M gezeichnet werde. Dies sei allerdings nicht so günstig, da an H als Schnittpunkt der Höhen nicht direkt gezogen werden könne. Statt dessen müsse an A oder B gezogen werden. Hierzu stellt Thilo fest: „*Aber dann kommt ja das gleiche 'raus, wie wir das gerade schon hatten*“ (9:16 - 9:20). Dabei zieht er an A bzw. B, so dass H auf A bzw. B zu liegen kommt.

Insgesamt gesehen setzt Thilo den Zugmodus kaum so ein, dass er auf diese Weise neue Vermutungen generieren kann. Zu Beginn stellt er sehr schnell die These auf, dass keine Lösung möglich sei, obwohl er nur kurz hin und her zieht. Als er schließlich nach Aufforderung den Kreis konstruiert und danach den Zugmodus einsetzt, gelingt es ihm auch auf diese Weise nicht, echte Lösungen hinzuziehen, denn rechtwinklige Dreiecke sind durch die Aufgabenvoraussetzungen ausgeschlossen. Auch die Möglichkeit, ein gleichseitiges Dreieck zu betrachten, was ja der „Punktreduzierungsstrategie„ entspräche, fällt Thilo nicht ein.

6.1.7 Fallstudie „Charlotte“

Charlotte, in deren Vorstellung es ein Spektrum von „Beweisen“ unterschiedlicher Genauigkeit und unterschiedlichen Bestätigungsgrades gibt, je nachdem, für wen ein Beweis geführt wird (vgl. Kapitel 5.2), bearbeitet die Aufgabe 3, bei der es darum geht, einen gemeinsamen Schnittpunkt von drei Linien zu erkennen.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
0:47 - 1:35		Konstruktion des Dreiecks, des Umkreises, der Mittelsenkrechten (MS) und der Winkelhalbierenden (WH).
1:36 - 1:48		Frage nach Auffälligkeiten
1:49 - 2:17	Guided	Zieht an C, so dass MS = WH. **Feststellung**: Beide Linien können zusammenfallen. **Behauptung**: Dann ist das Dreieck gleichschenklig.
2:18 - 2:24	Wandering	Zieht an C, so dass MS ungleich WH.
2:25 - 2:39		**Behauptung**: MS und WH schneiden sich auf dem Kreis.
2:40 - 2:53		Nachfrage: Ist das selbstverständlich?
2:54 - 2:59	Test	Zieht an C nach links (Abb. 6.18a)) und nach rechts (Abb. 6.18b)), um zu prüfen, ob Schnittpunkt erhalten bleibt.



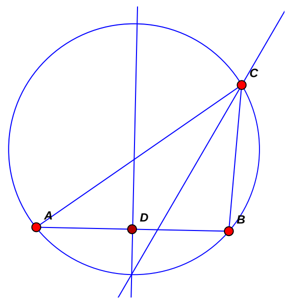


Abbildung 6.18 – *Ziehe nach links und nach rechts, um die Schnittpunkteigenschaft zu überprüfen*

Charlotte stellt sehr schnell die Behauptung auf, dass es einen gemeinsamen Schnittpunkt der drei Linien Kreis, Winkelhalbierende und Mittelsenkrechten gibt. Zuvor betrachtet sie den Sonderfall des gleichschenkligen Dreiecks, in dem die beiden Geraden Winkelhalbierende und Mittelsenkrechte zusammenfallen. Anschließend zieht sie an C, so dass das Dreieck wieder „allgemein“ wird. Da nach einer Besonderheit in der Zeichnung gefragt wurde, gibt sie an, dass Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte und Kreis einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, wobei ihre Äußerung allerdings so klingt, als ob dies nichts wirklich Besonderes sei. Erst durch die Nachfrage, ob dies den selbstverständlich sei, setzt sie den Zugmodus ein, um ihre Vermutung zu überprüfen, indem sie C erst nach links und dann nach rechts zieht. Da die Schnittpunkteigenschaft beim Ziehen erhalten bleibt, gibt sie an, sehr sicher („9“ auf einer Skala von 1 bis 10) zu sein, dass dies immer der Fall ist.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
3:00 - 3:35		**Behauptung**: Es gibt immer einen gemeinsamen Schnittpunkt. Sicherheit, dass die Behauptung stimmt, wird auf Skala von 1 bis 10 bei 9 verortet.
3:36 - 5:30		Nachfrage, was benötigt wird, um auf Sicherheit 10 zu kommen inklusive Antwort (siehe Transkript).

Auf die Nachfrage, wie ihre Sicherheit denn absolut werden könne, ergibt sich der folgende Wortwechsel:
(3:36 - 5:30)

I: Was würdest du jetzt noch brauchen, damit du bei der 10 ankommst?
Ch: (..) Hmm. (4 sec. Pause). Ja erst mal wissen (.) ’nen genauen
Beweis dafür, also, warum ich das jetzt so vermute.
I: Ja?
Ch: Und, ehm, (..) ja eigentlich kann man ja mit Cinderella ’nen
Punkt da hinziehen, und wenn er sich, wenn dann die drei Sachen
aufleuchten, dann weiß man ja (.), dass die (.) in einem Punkt
sich schneiden.

I: Ja? Kannst du ja vielleicht mal machen?

Ch: Also ich würd’ jetzt hier (fügt den Schnittpunkt *E* hinzu), und dann sieht man eben, dass sich die Winkelhalbierende, also, dass es aufleuchtet, mit der Mittelsenkrechten und dem Kreis, und dann weiß ich, dass sich das da unten schneidet.

I: Hmhm. Also im Prinzip...

Ch: Ist es jetzt sicher.

I: Ist es jetzt sicher. Bräuchtest du jetzt immer noch den Beweis? Wo du vorhin ja überlegt hattest, du müsstest gucken, ob du es irgendwie beweisen kannst?

Ch: Hmm (.). Ich glaub, aus mathematischer Sicht schon (lacht), aber, eh (.) wenn ich jetzt nur das Programm (..), ich glaube, dann ist das (.) eh, schon sehr sicher, dass es sich da unten schneidet.

I: Hmh. Du sagtest jetzt gerade, aus mathematischer Sicht schon. Was ist jetzt das Besondere an der mathematischen Sicht, oder?

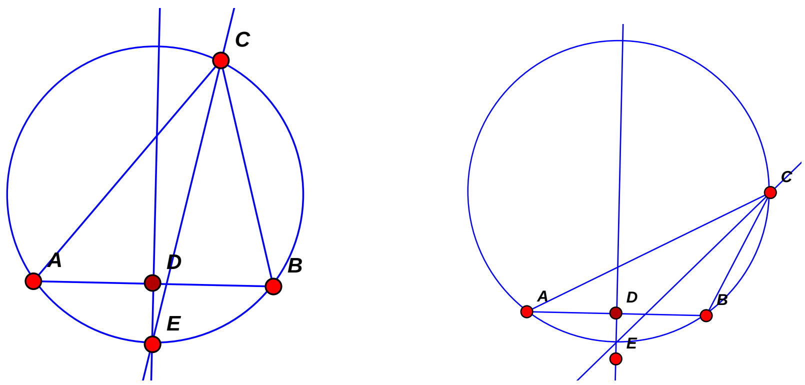
Ch: Ja, es gibt ja immer (...) ehm, ja, so Sätze, oder so was, mit denen man das beweisen kann, und, ich glaube, wenn ich, ehm, in der Klausur schreiben würde, ja, weil der Punkt jetzt da, (..) weil das aufleuchtet, würde das nicht ausreichen, deswegen.

I: Und jetzt nur für dich selbst? Wäre es denn für dich ausreichend, oder wolltest du jetzt für dich auch noch den Beweis haben?

Ch: Ehm. Eigentlich wäre es für mich ausreichend (lacht).

Charlottes Äußerungen, wie sie absolute Sicherheit über die Wahrheit ihrer Behauptung erreichen, also einen echten Beweis führen kann, bestätigen in beeindruckender Weise ihre Vorstellungen zum Beweis, die in Kapitel 5.2 herausgearbeitet wurden. Wieder stellt sie einen Beweis in der „mathematischen Welt“, in der man mit „*Sätze*[n], *oder so was*“ (Z.24) Dinge zeigen kann, ihrem eigenen Anspruch gegenüber, der auch durch die Visualisierung durch die DGS befriedigt wird: „*dann sieht man eben,* [...] *dass es aufleuchtet,* [...] *und dann weiß ich, dass sich das da unten schneidet*“ (Z.11-13). Dabei wird meines Erachtens durch den Ausdruck „*so Sätze*“ (Z.24) und die fast schon abfällig wirkende Art und Weise, wie sie diesen betont, ihre eigene Distanz zur „mathematischen Welt“ deutlich. Zu dieser Einstellung passt, wenn Charlotte wieder zwischen dem, was für sie selbst als Beweis ausreichend ist, und dem, was von außen eingefordert wird, unterscheidet: „*Ich glaube, wenn ich in der Klausur schreiben* *würde, ja, weil der Punkt jetzt da [...] aufleuchtet, würde das nicht ausreichen*“ (Z.25-27). Damit wäre die Aufgabe an dieser Stelle für Charlotte praktisch schon beendet gewesen. Sie hat für sich mit Hilfe des Programms den Nachweis erbracht, dass es einen gemeinsamen Schnittpunkt von Kreis, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden gibt, denn als sie einen Punkt E auf die entsprechende Stelle setzt, haben alle drei Linien aufgeleuchtet. Damit ist alles klar, und die weiteren Ausführungen ergeben sich nur aufgrund der hartnäckigen Nachfragen der Interviewerin.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
5:30 - 5:36		Nachfrage, ob Beweis noch zusätzliche Informationen bringt.
5:37 - 6:00		Schweigt, überlegt.
6:01 - 6:55	Test	Zieht an C. E bleibt auf MS, ist aber nicht mehr Schnittpunkt mit WH. **Verwirft die Behauptung**, dass es immer gemeinsamen Schnittpunkt gibt (Abb. 6.19b)).



a) b)

Abbildung 6.19 – *Beim Ziehen bleibt E nicht Schnittpunkt von WH, MS und Kreis*

Auf die Nachfrage, ob ein Beweis noch Informationen über die Visualisierung hinaus erbringen kann, hat Charlotte keine Antwort. Sie schweigt, grübelt sehr lange und setzt dann, als das Schweigen langsam unangenehm wird, erneut den Zugmodus ein. Dabei muss sie feststellen, dass E nicht als Schnittpunkt der drei Linien erhalten bleibt. Charlotte erkennt nicht, dass es nun einen **anderen** gemeinsamen Schnittpunkt der drei Linien gibt. Stattdessen unterscheidet

sie zwischen Schnittpunkt von Winkelhalbierenden und Kreis und dem Punkt E, den sie der Mittelsenkrechten zuordnet.
Charlotte bemerkt nicht, dass das Programm den Punkt E nicht als Schnittpunkt identifiziert hat. Dieses hätte sie sofort erkennen können, da E hellrot eingefärbt ist, eine Eigenschaft, die nur freie oder halbfreie Punkte in Cinderella haben, während alle Schnittpunkte und damit unfreien Punkte automatisch dunkelrot eingefärbt sind. Auf diesen Sachverhalt wird bereits in dem obligatorischen Einführungskurs zu Beginn der Veranstaltung „Elemente der Geometrie“ hingewiesen, und alle, die über ein wenig Erfahrung mit Cinderella verfügen, sollten um die Problematik der Markierung von Schnittpunkten dreier Linien wissen. Charlotte hingegen zieht nicht in Erwägung, dass der Fehler an ihrem Umgang mit dem Programm liegen könnte, sondern wertet ihn als Falsifikation ihrer Behauptung.
(6:01 - 6:55)

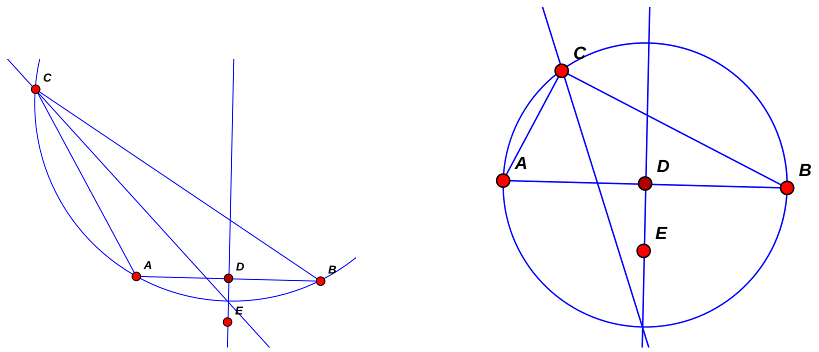
```
Ch: Moment! (...) Mmh. Wenn ich jetzt dran ziehe, ist es ja gar nicht mehr so.
 I: Wie, ist es nicht mehr so?
Ch: (unterbricht) Also, der Kreis bewegt sich ja jetzt davon weg. Der Punkt E liegt jetzt zwar (..) da auf der Geraden, auf der Mittelsenkrechten, aber der Schnittpunkt ist nicht mehr gegeben.
 I: Ja.
Ch: Obwohl die aufgeleuchtet haben.
 I: Ja.
Ch: (...) Hmh. Ja. Also ist es doch nicht so sicher, anscheinend. (8 Sek. Pause)
 I: Bist du jetzt wieder verunsichert, ob es wirklich so ist, oder?
Ch: Hmhm (bejahend). Ja, bin ich.
```

Charlottes Überzeugung von der Korrektheit ihrer Behauptung beruht ausschließlich auf der Visualisierung durch das Programm. An dieser Stelle hat sie noch keinen Versuch unternommen, die Behauptung auch mit fachinhaltlichen Argumenten zu stützen, und so ist es nur konsequent, nicht die Visualisierung anzuzweifeln, sondern die Behauptung zu verwerfen.
Bemerkenswerterweise fängt Charlotte nun an, nach geometrischen Gründen dafür zu suchen,

dass der gemeinsame Schnittpunkt von Winkelhalbierenden, Mittelsenkrechten und Kreis beim Ziehen nicht erhalten bleibt. Dabei führt sie durchaus richtige Argumente an, beispielsweise, dass sich die Lage der Mittelsenkrechten nicht verändert, wenn die Punkte A und B fest bleiben. An einer Stelle (scheinbar ohne es zu bemerken) widerspricht sie sich zwar selbst, indem sie zuerst bemerkt, dass beim Ziehen die Teilwinkel in C ihre Größe verändern, da sich die Größe des Kreises beim Ziehen ebenfalls verändert, danach aber behauptet, dass die Winkel beim Ziehen gleich groß bleiben, da die Sehne AB konstant bleibt. Dennoch sind ihre geometrischen Überlegungen tendenziell durchaus korrekt. Allerdings kann sie diese nicht so zu einer Beweiskette verknüpfen, dass sie anschließend Gewissheit über die Existenz, oder auch Nicht-Existenz, eines gemeinsamen Schnittpunktes hat. Stattdessen mündet die Zusammenfassung ihrer Analyse in der Behauptung, dass es einen gemeinsamen Schnittpunkt geben kann, aber nicht muss. Angaben dazu, wann es diesen gemeinsamen Schnittpunkt gibt, kann Charlotte nicht machen.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
6:56 - 7:35	Wandering	**Versuch der Begründung**: Kreis verändert beim Ziehen an C seine Größe, damit auch die Teilwinkel in C, während MS fest bleibt, da A und B fest bleiben. E bleibt als Punkt auf MS fest, ist aber nicht mehr Schnittpunkt mit WH und Kreis.
7:36 - 7:38		Nachfrage, wie dies zu erklären ist.
7:39 - 8:50	Wandering	**Versuch der Begründung**: Kreisradius verändert sich, der Winkel in C nicht, weil die Sehne AB konstant bleibt. Die WH schneidet den Kreis immer in einem Punkt, dieser Punkt kann auch E sein (Abb. 6.19a)). Stellt sich die Frage, wann letzteres der Fall ist.
8:51 - 9:06		Aufforderung, die bisherigen Ergebnisse zusammenzufassen.

9:07 - 9:17	Guided	Zieht an C, so dass E Schnittpunkt von MS, WH und Kreis. **Behauptung**: Es gibt einen Punkt, in dem sich die drei Linien schneiden 6.19a)).
9:18 - 10:02	Wandering	Dies muss aber nicht immer sein: Wenn man an C zieht, kann der Schnittpunkt von Kreis und WH auch oberhalb bzw. unterhalb von E sein (Abb.6.20). Aber der Schnittpunkt ist immer auf MS.



a) b)

Abbildung 6.20 – *Der Schnittpunkt wandert weiter nach oben (a) oder nach unten (b)*

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
10:03 - 10:06		Nachfrage: Welche Rolle spielt E?
10:07 - 10:12	Guided	Zieht an C, so dass E Schnittpunkt von MS, WH und Kreis.
10:13 - 10:54	Test	**Behauptung**: E ist nur einer von beliebig vielen Schnittpunkten von MS, WH und Kreis.

(9:07 - 10:54)

```
Ch: Es gibt einen (..) Punkt, wo sich, ehm, einmal Kreis,
    Mittelsenkrechte und die Winkelhalbierende schneiden. Wenn man
```

aber jetzt *C* bewegt und den Kreisradius verändert, dann muss, ist das nicht unbedingt gegeben. Also, man sieht ja jetzt auch (zieht), ehm, je spitzer ich den Winkel in *C* mache, desto weiter wandert der Schnittpunkt von der Winkelhalbierenden und dem Kreis weiter nach oben. Und ist nicht mehr in *E*. Ja, und je stumpfer ich das mache (zieht), desto weiter nach unten wandert der Schnittpunkt, aber er bewegt sich immer auf der Mittelsenkrechten. Von *AB*.

I: Ja. Und was für ’ne Funktion hat jetzt noch mal *E*?

Ch: (..) Ehm, *E* ist der Punkt wo (zieht), ehm (...) stimmt. (5 Sek. Pause, zieht). Eigentlich ist es nur ein beliebiger Schnittpunkt.

I: Von was jetzt?

Ch: Von der Mittelsenkrechten, dem Kreis und der Winkelhalbierenden.

Erst auf die gezielte Nachfrage, welche Rolle der Punkt E spielt, fällt Charlotte ihr Irrtum auf, und sie entdeckt, dass es immer einen Schnittpunkt der drei Linien gibt, dieser aber beim Ziehen die Lage verändert. Einen weiteren Nachweis für diesen Sachverhalt benötigt Charlotte nicht, da sie nun, nachdem sie ihr Augenmerk von E gelöst hat, beim weiteren Ziehen diesen gemeinsamen Schnittpunkt immer „*erkennen*“ kann.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
10:55 - 11:02	Guided	Zieht an C, so dass E Schnittpunkt von MS, WH und Kreis.
11:03 - 11:25		Nachfrage, ob es immer einen gemeinsamen Schnittpunkt von MS, WH und Kreis gibt.
11:26 - 11:45	Wandering	**Behauptung**: Es gibt immer einen gemeinsamen Schnittpunkt, der beim Ziehen aber nicht fest bleibt.
11:46 - 11:53		Feststellung von I, dass Überprüfung mit dem Programm nicht geklappt hat.
11:54 - 12:13		**Behauptung**: Nur in statischer Lage gibt es einen festen Punkt, beim Ziehen verändert sich die Lage des Punktes.

12:14 - 12:26		Nachfrage: Ist nun der Nachweis erbracht, dass sich die drei Linien immer in einem Punkt schneiden?
12:27 - 12:50		Schweigt, überlegt.
12:51 - 13:22	Wandering	Es ist gezeigt, weil man es immer erkennen kann.

Es wird deutlich, wie sehr Charlotte die Aufgabe des „Nachweisens“ an das Programm delegiert und welch bedeutsame Rolle sie diesem dadurch zuweist. Dabei wirkt Charlottes eigene Rolle extrem passiv: als das Programm einen gemeinsamen Schnittpunkt dreier Linien anzeigt, ist sie überzeugt davon, dass dies richtig ist; als der Schnittpunkt beim Ziehen nicht erhalten bleibt, verwirft sie die Behauptung und ist zunächst nicht mehr in der Lage, zu „sehen“, dass es doch einen gemeinsamen Schnittpunkt gibt. Als sich schließlich der Irrtum auflöst, verlässt Charlotte sich wieder einzig auf das Programm: die Frage, aus welchen Gründen es immer einen gemeinsamen Schnittpunkt gibt und damit nach den geometrischen Zusammenhängen, stellt sich ihr nicht. Stattdessen ist für sie allein durch die Visualisierung der ausreichende Nachweis diesbezüglich erbracht.

Wie bereits weiter oben erwähnt, bin ich überzeugt, dass Charlotte viele ihrer Aktivitäten nicht aus eigener Motivation heraus betrieben hat. Für sie selbst wäre es sicherlich ausreichend gewesen, den gemeinsamen Schnittpunkt zu sehen. Dabei hätte womöglich bereits das zuerst konstruierte statische Bild genügt, spätestens aber das einmalige Ziehen nach links und nach rechts. Nur das hartnäckige Nachfragen der Interviewerin veranlasst Charlotte überhaupt, den Versuch der Verifizierung durch das Programm (einen Punkt auf die Stelle zu setzten, in der sich die drei Linien schneiden) zu unternehmen. Auch ihr anschließender, erneuter Einsatz des Zugmodus ist wohl weniger dem eigenen Antrieb geschuldet, als vielmehr als Reaktion auf die Nachfrage nach dem Mehrwert eines Beweises, die sie so erst einmal nicht beantworten kann. Erst als ihre Behauptung, von der sie absolut überzeugt ist, durch das Ziehen vermeintlich widerlegt wird, beginnt Charlotte aus einer gewissen Eigenmotivation heraus zu ziehen, um Beobachtungen bezüglich Veränderungen und Invarianten zu machen. Es scheint so zu sein, als sei sie nun mehr oder weniger gezwungen, dies zu tun, da sich das Programm als unzuverlässig erwiesen hat. Sobald aber dieses Missverständnis aufgeklärt ist und dem Programm seine Verlässlichkeit wieder zuerkannt werden kann, ist die innergeometrische Argumentation für Charlotte aufs Neue obsolet, so dass die Notwendigkeit, einen Nachweis zu erbringen, in ihren Augen getrost der DGS übertragen werden kann.

6.1.8 Fallstudie „Franziska“

Franziska ist zwar durch die Visualisierung von der Richtigkeit eines Sachverhaltes überzeugt, möchte aber darüber hinaus wissen, warum dieser Sachverhalt gilt. Diese Frage kann für sie nur ein Beweis beantworten. Im Folgenden bearbeitet Franziska die Aufgabe 3, bei der es darum geht, zu entscheiden, ob sich drei Linien in einem Punkt schneiden.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
2:24 - 3:08		Konstruktion des Dreiecks, des Umkreises, der Mittelsenkrechten (MS) und der Winkelhalbierenden (WH) nach Vorgabe (Abb. 6.21a)).
3:09 - 3:19		Frage nach Auffälligkeiten.
3:20 - 3:37		**Behauptung**: Es gibt einen gemeinsamen Schnittpunkt von WH, MS und Kreis.
3:38 - 3:44		Nachfrage: Ist dies Zufall, oder immer so?
3:45 - 4:03		Idee, dies zu überprüfen.
4:04 - 4:43		Konstruktion von MS und WH an den anderen Ecken bzw. Seiten (Abb. 6.21b) und c)). **Behauptung**: Es gibt immer einen gemeinsamen Schnittpunkt von WH, MS und Kreis.

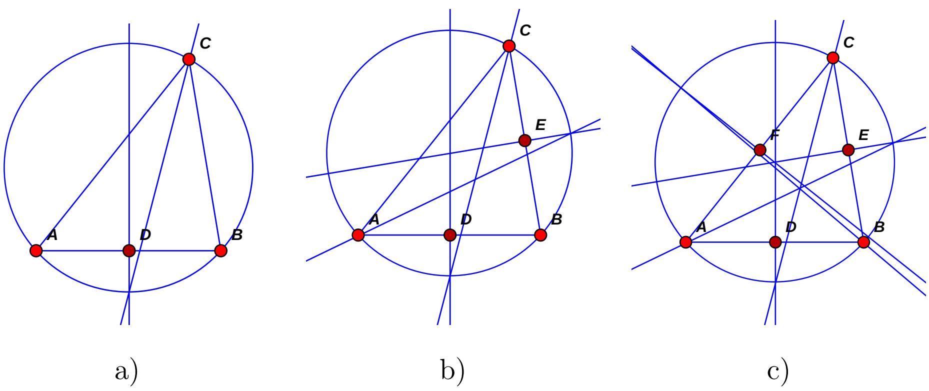


Abbildung 6.21 – *Überprüfung der Behauptung duch wiederholtes Durchführen der Konstruktion*

Franziska gibt ohne zu zögern als Besonderheit an, dass sich die drei Linien Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte und Kreis in einem Punkt schneiden. Auf die Nachfrage, ob dies immer so sei oder auch ein Zufall sein könne, überlegt sie kurz und kommt dann auf die Idee, eine Überprüfung durchzuführen. Ihre Überprüfung liegt darin, dieselben Konstruktionsschritte zusätzlich noch an den anderen beiden Seiten des Dreiecks durchzuführen. Durch das Ergebnis dieser Konstruktionen sieht Franziska ihre Vermutung gestützt. Schon nach Einzeichnen der zweiten Mittelsenkrechten bzw. Winkelhalbierenden gibt Franziska an, dass man nun erkennen könne, dass kein Zufall vorliege. Nach Konstruktion der dritten Mittelsenkrechten bzw. Winkelhalbierenden macht sie die Aussage, dass sie nun sicher sei. Diese Sicherheit verortet sie auf einer Skala von 1 bis 10 beim Wert 10.
Die Beschreibung zeigt, dass Franziska in dieser Situation so arbeitet, wie man wohl auch in der herkömmlichen Geometrie mit Papier und Bleistift vorgegangen wäre. Dies bedeutet, dass sie die DGS in dieser Situation auf ein Zeichenwerkzeug reduziert.

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
4:44 - 5:08		Nachfrage: Ist es nun allgemeingültig gezeigt?
5:09 - 5:30		Ein Beweis ist erforderlich.
5:31 - 6:09		Setzt Punkt G auf den Schnittpunkt (Programm erfasst G nicht als Schnittpunkt). **Versuch der Begründung** über Betrachtung des Dreiecks ABG, das wegen G auf MS gleichschenklig ist (Abb. 6.22a))
6:10 - 6:12		Nachfrage: Ist Beweis noch erforderlich?
6:13 - 6:49		Beweis gibt absolute Sicherheit für alle Dreiecke. Dreimaliges Überprüfen in einem speziellen Dreieck könnte immer noch Zufall sein.

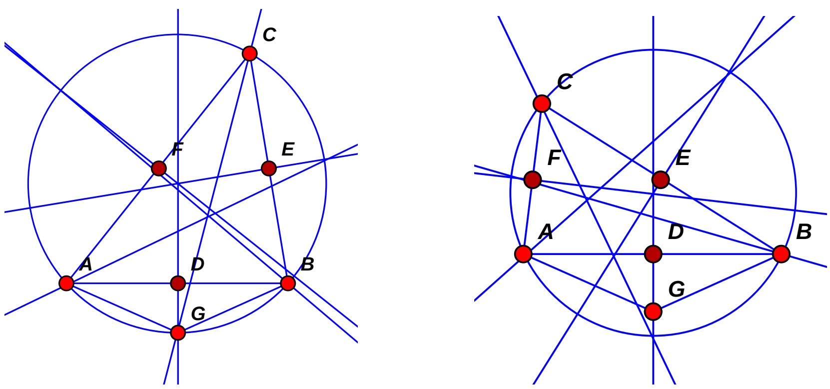
Auf Nachfrage gibt Franziska an, dass ein zusätzlicher Beweis erforderlich sei. Eine Erklärung, welche Funktion dieser Beweis denn haben würde (4:44), wo sie doch schon absolut sicher sei, kann sie zunächst nicht geben. Stattdessen führt sie Überlegungen an, dass das Dreieck ABG gleichschenklig sein müsse und dass ein Beweis möglicherweise auf dieser Eigenschaft aufbauen könne. Auf die wiederholte Nachfrage, ob dieser Beweis denn wirklich erforderlich sei (6:10), antwortet sie: „*Also wie gesagt, ich bin davon schon überzeugt, dass das halt immer so ist, aber vielleicht dass man halt doch noch mal was richtig Handfestes hat.*“ Was sie dabei unter dem Begriff „*was richtig Handfestes*“ versteht, zeigen die folgenden Ausführungen: (6:13 - 7:24)

F: Na ja, es könnte ja natürlich jetzt immer noch ein Zufall sein,
dreimal hintereinander, wer weiß?
I: Ja.
F: Also ich bin schon überzeugt (.), dass das halt
I: Ja?
F. immer so ist.
I: Ja.
F: Aber vielleicht doch noch ’mal ’ne Absicherung. Weil, Cinderella
macht manchmal komische Sachen (lacht).
I: Also, wenn du (..), du bist schon überzeugt
F: (unterbricht) Ja.
I: aber du würdest (..), wenn du den Beweis machst, irgendwie noch
sicherer werden
F: (unterbricht) Ja. Das wär’ für mich noch mal so’n, so’n Häkchen,
noch mal.
I: So’n Sahnehäubchen obendrauf.
F: Ja, genau.
I: Aha.
F: Also, dass ich das jetzt nicht nur für das Dreieck, für das
Dreieck (zeigt auf die Zeichnung) ist, sondern dass es, weiß ich
nicht, für jedes x-beliebige Dreieck funktioniert.
I: Ja.
F: Denn jetzt habe ich ja irgendein spezielles Dreieck.

Die Aussagen von Franziska stehen in gewissem Widerspruch zueinander. Zwar gibt sie wiederholt an, von der Richtigkeit der Aussage absolut überzeugt zu sein, dennoch meint sie, ein Beweis sei noch angebracht. Dafür kann sie allerdings keine überzeugende Begründung liefern. Stattdessen verwendet sie die Ausdrücke „Handfestes“ und „Häkchen noch mal“ und führt aus, dass „Cinderella manchmal komische Sachen mache“ (Z.8-9). All dies wären Argumente dafür, dass noch keine Sicherheit bezüglich der Richtigkeit einer Aussage erreicht ist. Zugleich erklärt sie, dass sie an der Tatsache des gemeinsamen Schnittpunkts keine Zweifel mehr hat. Es muss folglich etwas anderes sein, das Franziska den Beweis einfordern lässt, und ihr Ausweichen bezüglich dieser Frage verstehe ich so, dass ihr selbst in jenem Moment nicht klar ist, was dies denn ist.

Ihre Überlegungen, dass sie bisher zwar drei Fälle überprüft hat, dies aber nur in einem speziellen Dreieck, veranlassen Franziska dazu, nun erstmals den Zugmodus einzusetzen, um den Sachverhalt auch an anderen Dreiecke zu überprüfen. Das Ziehen kommentiert sie mit den Worten: „*Ja, aber wie man sieht, bleibt es halt doch immer noch, so wie es vorher war, also würde ich schon daraus schließen, dass es für jedes x-beliebige Dreieck gilt. Also ein Beweis wäre nicht schlecht*“ (7:38 - 7:47).

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
7:24 - 7:48	Wandering	Zieht an C, um Schnittpunkteigenschaft zu überprüfen. (G bleibt nicht Schnittpunkt (Abb. 6.22b)), was keine Irritation hervorruft.) Sicherheit, dass Behauptung stimmt, ist groß, aber Beweis ist dennoch erforderlich.



a) b)

Abbildung 6.22 – *Begründungsversuch durch geometrische Argumente (a)), Überprüfung duch Einsatz des Zugmodus (b))*

Zeit	**Zugmodus**	**Aktivität**
7:49 - 7:53		Nachfrage: Ist Ziehen effektiver als drei statische Überprüfungen?
7:54 - 8:15	Wandering, Guided	Es können verschiedene Dreiecke überprüft werden, auch Sonderfälle wie gleichschenklige oder gleichseitige.
8:16 - 8:18		Nachfrage: Ist ein Beweis trotzdem erforderlich?
8:19 - 8:40		Die Visualisierung überzeugt, aber nur der Beweis kann die Frage nach dem „Warum“ erklären.

(8:15 - 9:11)

```
I: Und warum brauchst du jetzt trotzdem noch den Beweis?
F: (..) Sahnehäubchen (lacht). Ja (.) also es ist schon sehr überzeugend, auf jeden Fall.
I: Ja?
F: Also für mich selber wäre das schöner, um sich das, also durch einen Beweis könnte ich mir das halt erklären. Aber das wär halt nur für mich selber nochmal so (...) um das Nachvollziehen zu können, dass das auch so ist.
I: Hmh. (..) Lege ich dir jetzt was in den Mund, wenn ich sage, dass du durch dieses Programm zwar überzeugt bist, aber dass du nicht weißt, warum das so ist?
F: (..) Ne, das stimmt. Also das ist so: also ich bin davon überzeugt, aber würd’ gerne noch mal genau wissen, warum das so ist. Und das würde ich ja dann, irgendwie auch durch den Beweis (..), da würde ich ja dann daran kommen. So, dass ich mir dass selber irgendwie erklären könnte. Das muss ja jetzt irgendwie, das ist ja jetzt nicht irgendwie so’n Phänomen, oder so. Kann man sich bestimmt irgendwie erklären.
```

Es wird deutlich, dass Franziska mit dem ausschließlichen „Sehen, dass ein Sachverhalt gilt“, nicht zufrieden ist. Dabei spielt allerdings an dieser Stelle der Einsatz des Zugmodus zur Überprüfung von vielen verschiedenen Fällen für Franziska eine eher untergeordnete Funktion: es ist nicht unwahrscheinlich, dass sie ohne die schon penetrant wirkenden Nachfragen, warum ein Beweis erforderlich sei, gar nicht auf die Idee gekommen wäre, überhaupt den Zugmodus einzusetzen. Denn letztlich hat sich für sie die Situation durch den Einsatz des Zugmodus nicht verändert: bereits vorher war sie überzeugt, dass es immer einen gemeinsamen Schnittpunkt der drei betrachteten Linien gibt. Und bereits vorher war der diffuse Wunsch nach einem Beweis vorhanden.

An dieser Stelle ergibt sich ein interessanter Bezug zum Fall „Charlotte". Diese spricht der dynamischen Visualisierung Beweiskraft zu, hat aber verinnerlicht, dass es unterschiedliche Anforderungen unterschiedlicher Personen an einen Beweis gibt, was dazu führt, dass die dynamische Visualisierung für sie selbst zwar ausreichend ist, für andere hingegen eventuell nicht. Auch Franziska spricht der Visualisierung in gewisser Weise Beweiskraft zu, denn sie fordert den Beweis nicht allgemein, sondern nur für sich selbst ein. Dies wird in Äußerungen deutlich wie: „*Das wär für mich noch mal so'n Häkchen*" (Z.14) oder „*Also für mich selbst wäre das schöner*" (Z.28) bzw. „*Aber das wär halt nur für mich selbst nochmal so*" (Z.29-30). Damit verhält es sich bei ihr genau umgekehrt wie bei Charlotte: andere können mit der Visualisierung zufrieden sein, sie selbst ist es nicht.

Die zusätzlichen Informationen, die ein Beweis für Franziska liefert, zielen alle auf das Offenlegen von Zusammenhängen und Begründungen ab. Dennoch sagt sie selbst nicht explizit, dass ein Beweis für sie eine Antwort auf die Frage nach dem Warum liefert. Erst als ich diese Begrifflichkeit ins Spiel bringe, bestätigt Franziska, dass sie dieser Aussage zustimmt. Dies deute ich als Hinweis darauf, dass Franziska die verschiedenen Funktionen eines Beweises nicht oder nur ansatzweise bewusst sind. In diesem Zusammenhang ist die Information bedeutsam, dass die gerade beschriebene Aufgabenbearbeitung zeitlich vor der Frage, ob eine dynamische Visualisierung einen Beweis ersetzen kann, gestellt wurde und damit sicherlich einen Einfluss auf das in diesem Zusammenhang erarbeitetete Beweisverständnis von Franziska hat.

Ebenso wie Charlotte markiert Franziska den Schnittpunkt der drei Linien, indem sie einen Punkt darauf setzt, und ebenso wie bei Charlotte wird dieser Punkt vom Programm nicht als Schnittpunkt erkannt, so dass er beim Ziehen nicht an die drei Linien gebunden bleibt. Anders als Charlotte hat sie den Punkt allerdings nicht unmittelbar zur Verifikation ihrer Behauptung eingesetzt, sondern lediglich, um leichter inhaltlich-geometrisch am gleichschenkligen Dreieck

ABG argumentieren zu können. Daher können Franziskas grundsätzliche Überlegungen durch das Ziehen auch nicht derart erschüttert werden, wie dies bei Charlotte der Fall war. So lässt Franziska sich dadurch, dass G beim Ziehen nicht auf dem Kreisbogen bleibt, auch nicht irritieren, sondern merkt lediglich an, dass sie den Kreis derart konstruiert habe, dass er beim Ziehen die Größe verändere. Den Sachverhalt, dass sich die drei Linien in einem Punkt schneiden, sieht sie nach wie vor durch das Programm bestätigt.

Insgesamt gesehen profitiert Franziska bei der vorliegenden Aufgabenstellung nicht sonderlich vom Einsatz einer DGS. Die Überzeugung, dass sich die drei Linien in einem Punkt schneiden, erlangt sie auch ohne Nutzung des Zugmodus; den Beweis versucht sie mittels geometrischer Argumente am statischen Bild.

6.1.9 Kein Einsatz des Zugmodus

Kira, für die ein Beweis die Frage nach dem „Warum“ beantwortet (vgl. Abschnitt 5.1.5), eine Frage, die ihr die DGS nicht beantworten kann, bearbeitet Aufgabe 1, bei der es darum geht, zu zeigen, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Winkelhalbierende des rechten Winkels das Hypotenusenquadrat in zwei kongruente Vierecke zerlegt. Dabei setzt sie den Zugmodus überhaupt nicht ein, sondern argumentiert ausschließlich am statischen Bild. Nachdem sie die Zeichnung erstellt hat und nach Besonderheiten der beiden Vierecke gefragt wird, äußert sie recht spontan die Vermutung, dass diese kongruent sein müssten. Nach einer Begründung gefragt räumt sie freimütig ein, dass sich ihre Vermutung nur auf das Sehen stützt. Da sie im Moment noch keine Beweisidee habe, könne sie auch noch nicht wirklich sicher sein. Auf einer Skala von 1 bis 10 verortet sie ihre Sicherheit bei 6 bis 7. Es ist kein Weg für Kira, diese Sicherheit durch Einsatz des Zugmodus und Nutzen der Messfunktion zu erhöhen. Stattdessen überlegt sie, wie sie, analog zu den Kongruenzsätzen bei Dreiecken, die Kongruenz der Vierecke durch Nachweis von gleichgroßen Winkeln und gleichlangen Seiten zeigen kann. Da ihr aber nicht bekannt ist, was genau gezeigt werden muss, ist sie an dieser Stelle unsicher.
Kiras Umgang mit der DGS passt zu ihrem Beweisverständnis, wie ich es in Abschnitt 5.1.5 herausgearbeitet habe. Die Vermutung, dass die beiden o.a. Vierecke kongruent sind, stellt sie bereits ohne Einsatz des Zugmodus auf. Den Nachweis, dass ihre Vermutung richtig ist, kann ihrem Verständnis nach ohnehin nicht die DGS erbringen, da diese keinen Beweis liefern kann, der die Frage nach dem „Warum“ beantwortet. Dies kann nach Kiras Auffassung nur ein formaler Beweis, den sie mit Hilfe von Kongruenzsätzen zu führen versucht. Daher macht konsequenterweise der Zugmodus an dieser Stelle für sie keinen Sinn.
Auch Jasmin, die in Abschnitt 5.8 vorgestellt wurde, und die ebenfalls Aufgabe 1 bearbeitet, setzt den Zugmodus nicht ein. Stattdessen macht sie sofort nach Erstellung der Grundkonfiguration die Aussage, dass das Hypotenusenquadrat durch die Winkelhalbierende in zwei kongruente Vierecke zerlegt wird, ohne Zweifel zu äußeren oder dieses Phänomen als Besonderheit zu sehen. Erst auf Nachfrage, ob dies denn trivial sei, räumt sie ein, dass es wahrscheinlich nicht selbstverständlich sei und versucht durch Messen von Winkeln und Seitenlängen die Kongruenz der beiden Vierecke zu belegen. Hingegen versucht sie nicht, mit Hilfe des Einsatzes des Zugmodus noch mehr Sicherheit zu erlangen, was vermutlich auch darauf zurückzuführen

ist, dass Jasmin auch nicht ansatzweise irgendwelche Zweifel hegt.

Ähnliches ist auch bei Rebekka (s. Abschnitt 5.2) zu verzeichnen. Auch sie bemerkt sofort, dass die beiden Teilvierecke gleich groß sind, und versucht, dieses durch Messen von Seitenlängen und Winkeln zu zeigen. Genauso wie Jasmin versucht sie nicht, ihre Behauptung durch den Zugmodus zu stützen.

Da auch Greta und Joachim, die dieselbe Aufgabe bearbeiten, den Zugmodus nicht einsetzen und ausschließlich am statischen Bild argumentieren, muss insgesamt festgestellt werden, dass die Annahmen, wie der Zugmodus sinnvoll bei der Bearbeitung von Aufgabe 1 eingesetzt werden kann, nicht eingetroffen sind. Anscheinend ist die Kongruenz der beiden Teilvierecke visuell so klar, dass kein Bedarf am Zugmodus besteht. Allerdings wurde damit auch die Chance zu erkennen, dass die Winkelhalbierende immer durch den Mittelpunkt des Quadrats geht, nicht genutzt, so dass dieses Argument bei der Aufgabenbearbeitung in der Regel nicht zur Verfügung stand und diejenigen, die die Aufgabe bearbeitet haben, oftmals keinen gangbaren Lösungsansatz aufzeigen konnten.

6.1.10 Einen „Nachweis" führen mit Hilfe des Programms

Wiederholt vertraten Studierende die Ansicht, allein durch den Zugmodus den Nachweis für einen bestimmte Sachverhalt erbracht zu haben.
Als Beispiel sei Juliane erwähnt, die in Kapitel 5 kurz vorgestellt wurde. Dabei konnte ich herausarbeiten, dass zum einen für Juliane ein Beweis eine rein verifizierende Funktion hat, und dass zum anderen diese Verifikation vollständig von der DGS übernommen werden kann, so dass jede weitere Begründung darüber hinaus ausschließlich externen Autoritäten geschuldet ist.
Juliane bearbeitet die Aufgabe 3, bei der es um die Fragestellung geht, ob sich drei Linien in einem Punkt schneiden. Allein durch den Einsatz des Zugmodus ist Juliane fest davon überzeugt, dass diese Frage mit einem eindeutigen „Ja" beantwortet werden kann. Auf die Nachfrage, ob ihr nach Visualisierung durch das Programm noch ein Beweis fehlen würde, antwortet sie:

Ju: Also mir nicht, weil, ich sehe das, und, also mir reicht das, um
mich (.) davon zu überzeugen, aber später, ich möchte Lehrerin
werden, dann. Ich denke mal, den Schülern reicht es vielleicht
auch anfangs, dass (.), dass die das sehen, aber irgendwann sind
halt auch Beweise erforderlich. Weil, wenn man nicht mit dem
Computer arbeiten kann, dann muss man das ja alles handschriftlich
machen, und ich schätze, dann ist es vielleicht einfacher, das
(.) zu beweisen. Und wenn man nicht diese Möglichkeit hat, es
anschaulich zu sehen und halt auch zu sehen, dass, wenn man den
Winkel hier laufen lässt (zieht an *C*), oder der Kreis kleiner und
größer wird, dass das sich dann schneidet.
I: Okay, aber wir haben ja jetzt hier dieses Medium. Wir haben ja
das Programm, und wir müssten ja jetzt nicht ganz viel Aufwand
betreiben, um ganz viele Zeichnungen zu machen. Würde für uns
jetzt der Beweis noch was bringen? An zusätzlicher Information
oder an, an (..) mehr Glauben, oder mehr Wissen, oder ...
Ju: Man könnte jetzt ja sagen, mein Kreis ist ja jetzt (..). Obwohl,
wenn ich jetzt, ich kann ihn ja auch größer ziehen (zieht an *C*,

so dass der Umkreis größer wird). Mein Dreieck größer ziehen. Ich
kann ja hier wirklich (.) alle (.) Möglichkeiten sozusagen (.)
darstellen.

I: Ja?

Ju: Und dann würde ich schon sagen, dass das für uns reicht. Weil,
ich hab ja nicht nur einen Kreis und ein Dreieck, ich kann ja (.)
ganz viele Fälle, ich kann (.). Klar, meine Grundseite AB ist
immer gleich (hat während der gesamte Zeit ständig an C gezogen).
Aber, ich könnte ja auch mal hier ziehen (zieht jetzt an A, so
dass die Seite AB in der Länge variiert) und dann wär' das ja
trotzdem so. Also dadurch, das ich halt (.) meine ganz, meine
Seiten, die Längen alle verändern kann (zeigt nacheinander auf die
drei Dreiecksseiten) würd' ich sagen (zieht an B) reicht es auf
jeden Fall, weil ich das ja nicht nur an einem speziellen Dreieck
mache, sondern, ich kann ja jetzt jedes beliebige Dreick damit
darstellen. Und deswegen reicht das.

Die Episode bestätigt in eindrucksvoller Weise Julianes Verständnis, dass ein Sachverhalt dadurch nachgewiesen ist, dass er für alle Fälle überprüft worden ist. Durch die DGS ist es möglich, alle Seitenlängen und Winkelmaße des Dreiecks beliebig zu verändern, so dass nach Julianes Auffassung dieser Nachweis durch das Ziehen erbracht werden kann. Damit kann sie sicher sein, dass sich die drei Linien Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte und Umkreis immer in einem Punkt schneiden. Fragen nach dem Begründungszusammenhang stellen sich ihr nicht. Daher entsteht für sie auch nicht das Erfordernis, die DGS als heuristisches Werkzeug einzusetzen, um Vermutungen zu generieren oder Thesen zu überprüfen. Dazu passt, dass Juliane als einzige Zugmoduskategorie das *wandering dragging* einsetzt. Einen Mehrwert eines formalen Beweises gegenüber der Visualisierung durch das Programm kann Juliane nicht erkennen.

6.2 Zusammenfassung und Konsequenzen

Die vorangegangenen Ausführungen haben gezeigt, dass der Zugmodus von den einzelnen Studierenden auf sehr unterschiedliche Weise und zu unterschiedlichen Zwecken eingesetzt wird.

- Thesengenerierung durch Überprüfung „aller möglichen“ Fälle

Viele Studierende setzen den Zugmodus ein, um „alle mögliche Fälle“ zu überprüfen. Dabei gibt es diejenigen, wie beispielsweise Juliane, die explizit der Auffassung sind, hierdurch wirklich einen allgemeingültigen Nachweis erbracht zu haben, so dass kein weiterer Beweis erforderlich ist. Andere hingegen versuchen, durch diese Strategie eine fundierte These aufzustellen, die dann allerdings einer weiteren Überprüfung bedarf, wie beispielsweise Verena. Je nach Aufgabenstellung ist für das Überprüfen „aller möglichen Fälle“ jedoch mehr oder weniger planvolles Vorgehen erforderlich. Während dies in Aufgabe 3 durch Verändern des Winkelmaßes in C und der Länge der Seite AB relativ problemlos flächendeckend durchgeführt werden kann, muss bei Aufgabe 4 hier mehr Sorgfalt an den Tag gelegt werden. So versucht beispielsweise Hannes zwar, alle möglichen Fälle zu visualisieren, entwickelt aber hierfür keine geeignete Strategie und kommt aufgrund des Zugmodus zu einer falschen Behauptung. Erst durch Zufall ergibt sich ein Gegenbeispiel, so dass Hannes einräumen muss, durch das Ziehen noch keine verlässliche These generiert zu haben.
Probleme können also in zweierlei Hinsicht entstehen: zum einen muss immer wieder deutlich gemacht werden, dass das Überprüfen mit dem Zugmodus nichts beweist. Zum anderen kann nicht davon ausgegangen werden, dass sich planvolles Ziehen von allein einstellt. Stattdessen sollten am Ende nicht nur die fachinhaltlichen Ergebnisse thematisiert werdem, sondern es sollte auch immer wieder bewusst der Einsatz des Zugmodus reflektiert werden: wie konnten Thesen generiert werden, welche Vorgehensweise wurde beim Ziehen verfolgt, und an welchen Stellen ergaben sich unerwartete Schwierigkeiten oder konnten überraschende Beobachtungen gemacht werden. An dieser Stelle könnte möglicherweise auch die in Paderborn kürzlich erfolgte Umstellung der Studienordnung auf den Bachelor-Master-Studiengang eine Hilfe sein. Waren in der alten Studienordnung die Veranstaltungen „Elemente der Geometrie“ und „Didaktik der

Geometrie“ zwei eigenständige Vorlesungen, so sind es nun zwei Komponenten eines Moduls, die zeitlich unmittelbar aufeinanderfolgen. Dies könnte, ganz im Sinne eines hermeneutischen Zirkels, dazu genutzt werden, vertieft über die Art und Weise des Zugmoduseinsatzes zu reflektieren.

- „Sehen“ von Gegenbeispielen

Wenn auf der Basis des Zugmodus Thesen generiert werden, muss bei einer hingezogenen Konstruktion natürlich geprüft werden, ob sie ein Gegenbeispiel für eine Behauptung darstellt. Hierbei ist nun wirklich das echte und kritische „Sehen“ gefordert. Während Hannes und Sophie, die beide im Rahmen von Aufgabe 4 zunächst die These aufstellen, dass nur das gleichseitige Dreieck eine Lösung darstellt, sofort erkennen, dass sich beim Ziehen ein Gegenbeispiel ergeben hat, „sieht“ Melanie nicht, dass sie mehrere Lösungen des vorgegebenen Problems einfach hingezogen hat: obwohl während des Einsatzes des Zugmodus mehrfach die geforderten vier Punkte auf einem gemeinsamen Kreis liegen, und obwohl Melanie einmal sogar genau in einer derartigen Situation aufhört zu ziehen und das statische Bild betrachtet, „sieht“ sie nicht, dass sie hier eine Lösung vor sich hat und damit ihre Behauptung widerlegt ist, dass die einzige Lösung der Fall des gleichseitigen Dreiecks mit $H = M$ sei. Bei Melanie könnte in diesem Zusammenhang eine Rolle spielen, dass ihre Zeichnung im Vergleich zu denen von Hannes und Sophie nicht mehr ganz so übersichtlich ist. Denn auch das geeignete Formatieren spielt selbstverständlich im Zusammenhang mit Sehen-Können eine entscheidene Rolle. Die Studierenden zeigen diesbezüglich unterschiedliche Verhaltensweisen: Während einige Studierende sofort darauf geachtet haben, Konstruktionselemente unsichtbar zu machen oder auch hervorzuheben, waren die Zeichnungen bei anderen relativ unübersichtlich, weil hierauf verzichtet wurde. Zur Illustration hierzu siehe die Zeichnungen von Emil und Philipp in Abbildung 6.23 zur selben Aufgabenstellung. Obwohl Philipp durch die Vielzahl der eingeblendeten Messergebnisse noch mehr Textinformation in der Zeichnung hat als Emil, ist seine Zeichnung durch den Einsatz von Farben und Linienstärken wesentlich übersichtlicher.

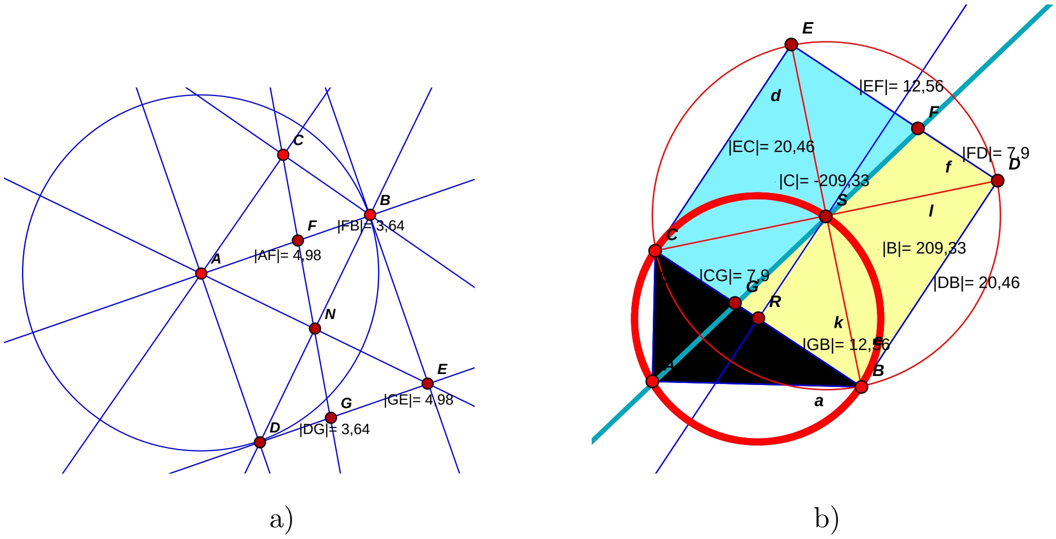


Abbildung 6.23 – *Zeichung zur Aufgabe 1 von Emil (a) und Philipp (b)*

Auch das Ziehen selbst wurde sehr unterschiedlich durchgeführt. Während beispielsweise Thilo so schnell hin- und hergezogen hat, dass ich dabei keine vernünftige Beobachtung hätte tätigen können, zieht Melanie sehr langsam und bedächtig (wobei sie allerdings trotzdem das Entscheidende nicht sieht).

- Entwickeln einer geeigneten Problemlösestrategie

Ein weiterer Aspekt ist das Entwickeln einer geeigneten Problemlösestrategie. In Aufgabe 4 könnte diese darin bestehen, aus den vier Punkten zunächst drei zu machen, indem man zwei Punkte zusammenfallen lässt. Um diese Strategie erfolgreich einsetzen zu können, muss natürlich beachtet werden, dass die Punkte aufgrund ihres Entstehens während der Konstruktion einen unterschiedlichen Status haben: es gibt freie Punkte, an denen gezogen werden kann, und Schnittpunkte, an denen nicht gezogen werden kann. Bei der Analyse der Bearbeitungen zeigte sich, dass dies durchaus ein Problem darstellen kann: Studierende, wie beispielsweise Melanie, versuchen eine Idee zu verfolgen, für die sie die Lage eines Schnittpunkts verändern müssten. Da sie aber nicht unmittelbar an diesem Punkt ziehen können und nicht wissen, wie man die Lage des Punktes trotzdem verändern kann, sehen sie von diesem Vorhaben aus rein handwerklichen Gründen ab. Aber auch das Entwickeln von Problemlösestrategien überhaupt muss erst erlernt werden und sollte daher bei der Aufgabenpräsentation immer wieder offengelegt werden.

- Erstellen einer zum Ziehen geeigneten Konstruktion

Ein weiteres Phänomen ist zu beobachten, wenn Studierende eine bestimmte Idee überprüfen möchten, z.B. ganz simpel die Frage, ob beim Ziehen ein Winkelmaß erhalten bleibt, z.B. Verenas Überprüfung ihrer Vermutung, ob der Punkt H auf dem Kreis bleibt, wenn der Winkel in C konstant bleibt. Die Schwierigkeit bei dieser grundsätzlich guten Idee liegt darin, dass der Kreis beim Ziehen ständig die Größe verändert, so dass Verena zuviele Parameter gleichzeitig im Blick haben muss. Auch bei Sophie ergibt sich bei derselben Aufgabe eine ähnliche Problematik. In solchen Situationen fällt es den Studierenden in der Regel sehr schwer, ihre bisherigen Erkenntnisse und daraus resultierenden Vermutungen so zu reflektieren, dass sie eine Modifizierung finden, die besser zum Ziel führt. Stattdessen werden oftmals Auswege gesucht, die offensichtlich nicht funktionieren können, wie einen Kreis gleich durch vier Punkte zu konstruieren oder das frei gewählte Winkelmaß nachträglich zu fixieren. Offenbar wird zu wenig über die Reihenfolge von Konstruktionsschritten und -hierarchien nachgedacht. Gerade die Analyse von Zeichnungen, die letztlich aufgrund ihrer Anlage nicht zum gewünschten Ziel führen, könnte hilfreich sein. Das Repertoire der von mir beobachteten Studierenden war hier im allgemeinen nicht sehr reichhaltig, denn auch diejenigen, die fachlich sehr gut sind und durchaus auch durch den Einsatz von DGS profitiert haben, stießen immer wieder an Grenzen.

- Relevanz der Konstruktionselemente erkennen

Die Bedeutung von einzelnen Punkten in einer Konstruktion ist noch in anderer Hinsicht interessant. So können Punkte im Verlauf einer Zeichnung entstehen, die zwar für einen bestimmten Konstruktionsschritt bedeutsam sind, im weiteren aber keine besondere Rolle mehr spielen, wie beispielsweise die Seitenmitten der Dreiecksseiten, die zur Errichtung der Mittelsenkrechten eingezeichnet wurden. Melanie z.B. fiel immer wieder in die Fehlvorstellung zurück, dass eine Seitenmitte zugleich Mittelpunkt des gesuchten Kreises sein müsste. Dieser Aspekt steht in engem Zusammenhang mit einer vernünftigen Formatierung der Zeichnung. Hierbei muss entschieden werden, ob bestimmte Elemente nur Mittel zum Zweck der Konstruktion und im weiteren nicht mehr von Interesse sind, oder ob sie wesentlich für bestimmte Zusammenhänge sind. So sind Kreise, die nur dazu genutzt werden, bestimmte Streckenlängen abzutragen, danach oftmals überflüssig, während Kreise, die im Zusammenhang mit dem Umfangswinkelsatz stehen, oftmals entscheidend für die weitere Argumentation sind. Ein verwandter Aspekt ist das Einzeichnen geeigneter Hilfslinien: auch dies fiel einigen Studierenden sehr schwer. So wurde die naheliegende Idee, wenn vier Punkte auf einem Kreis liegen sollen, einfach den Kreis durch drei Punkte zu zeichnen und dann zu beobachten, was beim Ziehen passiert, längst nicht immer gefunden.

- Beurteilung nach ausschließlich visuellen Kriterien

Oftmals ungenügend ist auch die ausschließlich optische Beurteilung einer Konstruktion. Dieses findet sich beispielsweise bei Melanie, die nur aufgrund des visuellen Eindruck darauf schließt, dass das vorliegende Dreieck gleichseitig sein müsse. Auch die Vermutungen von Hannes und Verena, dass die vier Punkte A, B H und M auf einem Kreis liegen, wenn das Viereck $ABHM$ ein Trapez ist, scheinen auf einer ausschließlich optischen Beurteilung zu beruhen. Hier bestätigt sich eine Erfahrung, die auch Haug (2012, S.172) in seinen Untersuchungen gemacht hat: „Bei interaktiven Lernumgebungen dagegen, die ausschließlich den *Computer* als zu bearbeitendes Medium einsetzen, besteht die Gefahr, dass mathematische Inhalte nur oberflächlich wahrgenommen werden. Eine Auseinandersetzung mit den zu erlernenden Inhalten würde in solch einer Lernumgebung fast nur auf der visuellen Ebene stattfinden.“ Eine auf Basis des visuellen Eindrucks generierte Vermutung kann zum einen natürlich falsch sein (z. B. die Vermutung, dass ein allgemeines Trapez einen Umkreis hat) und somit in eine Sackgasse führen. Zum anderen wird nicht das Defizitäre des visuellen Eindrucks erkannt.

- Handwerkliche Schwierigkeiten

Bei einigen Studierenden sind die Defizite im handwerklichen Umgang mit dem Programm so groß, dass sie überhaupt keine Chance haben, die Software gewinnbringend einzusetzen. Am stärksten fiel dies bei Diana auf, die beispielsweise große Schwierigkeiten hat, mit Hilfe der geeigneten Buttons die Höhen im Dreieck zu konstruieren. Aber auch wenn das Programm z.B. nicht erkennen kann, welches von zwei übereinanderliegenden Elementen gemeint ist und entweder eine Fehlermeldung „zuviele Elemente markiert“ generiert oder die Konstruktion auf das falsche Element anwendet, waren die Studierenden oftmals schwer irritiert. Die Datenlage gibt leider keinen weiteren Aufschluss darüber, ob die Studierenden wirklich ernsthaft und regelmäßig über ein Semester hinweg mit dem Programm gearbeitet haben und dennoch die beschriebenen Schwierigkeiten nicht überwinden konnten, oder ob einfach mangelhafte Übung ursächlich hierfür sind. Vielleicht muss man sich doch von der allgemein geteilten Einschätzung verabschieden, dass das Programm ein sehr simples Handling hätte und der Umgang damit mühelos und selbstständig erlernt werden könne.

- Nutzen des heuristischen Potenzials

Neben diesen eher negativen Beispielen gab es auch viele Episoden, bei denen der Zugmodus einen echten Beitrag zur Problemlösung lieferte. Sowohl Hannes als auch Verena, die beide Aufgabe 4 bearbeiten, kommen durch das Ziehen auf die richtige Idee, dass nur die Größe des Winkels in C dafür verantwortlich ist, ob die vier Punkte A, B, H und M auf einem Kreis liegen oder nicht. Bei beiden war entscheidend die Idee vorausgegangen, mit Hilfe des *dummy locus dragging* den Punkt C so zu verziehen, dass die vier genannten Punkte auf dem Kreisbogen verbleiben. Während des Ziehens konnten die beiden beobachten, dass der Winkel in C dabei seine Größe nicht verändert. Anschließend wurde von beiden versucht, innergeometrische Gründe für die Konstanz des Winkels zu finden. Auch Sophie kommt durch den Einsatz des Zugmodus auf die Idee, dass die Winkelgröße in C entscheidend für die Lösung des Problems ist, gibt sich aber, anders als Hannes und Verena, mit der ausschließlichen Visualisierung und Messung zufrieden. (An dieser Stelle noch einmal die Erinnerung an das Beweisverständnis der drei Personen: Für Sophie hat ein Beweis durchaus eine begründende Funktion, allerdings eher, weil dies extern so eingefordert wird, und nicht so sehr, weil sie selbst Wert auf eine Begründung legen würde. Hannes attestiert einem Beweis eine ordnende und strukturierende Funktion, denn dieser kann für ihn einen konkreten Fall in einen größeren Kontext einbetten. Auch für Verena hat ein Beweis neben der verifizierenden eine begründende, im Ansatz auch systematisierende Funktion. Damit enspricht die Rolle der DGS beim Bearbeiten der Aufgabe ziemlich genau dem jeweiligen Beweisverständnis.)

- DGS als Autorität

Immer wieder fiel auf, dass die Studierenden der DGS ein hohes Maß an Autorität zuschrieben und folglich Beobachtungen und Messergebnisse nicht kritisch genug hinterfragen. Besonders stark fällt dies bei Verena auf, die ihre fachinhaltlichen Begründungen für die Kreisform der Ortslinie von H bei Konstanz des Winkelmaßes verwirft, als das Programm die Bahn von H scheinbar als Parabel darstellt. Auch Messergebnisse, die nicht mit theoretischen Überlegungen übereinstimmen, verunsichern manche Studierende stark.
Einige Studierende gehen noch weiter und wollen dem Programm den kompletten Nachweis einer Vermutung überlassen, so Charlotte, wenn sie das simultane Schneiden dreier Linien dadurch prüfen will, dass alle drei Linien aufleuchten, wenn sie einen Punkt auf die inkriminierte Stelle setzt. Viele Studierende sind dem Programm gegenüber nicht kritisch genug, und zwar keineswegs nur die Schwächeren.

Meine Studie hat insgesamt die bereist 1999 von Hölzl getroffene Aussage bestätigt: „Dynamik per se liefert keinen didaktischen Vorsprung gegenüber den traditionellen Werkzeugen der Geometrie“ (Hölzl 1999, S.301). Viele der Studierenden konnten den Zugmodus nicht so einsetzen, dass sie davon profitiert hätten. Dabei konnte ich keinen Unterschied feststellen zwischen Studierenden in Examensnähe und Studierenden, die noch am Anfang stehen. Auch wenn aufgrund der kleinen Teilnehmerzahl keine quantitavien Aussagen getroffen werden können, ist dennoch auffällig, dass diejenigen, die den Zugmodus gewinnbringend einsetzen konnten, sich durchweg im oberen Leistungsdrittels befinden.

Anhang A

Aufgaben aus empirischen Studien

A.1 Van Hiele Test

Appendix 1: Van Hiele Test

[From Christine Lawrie, personal communication, 1/5/1997]

Geometry Test   Number ....

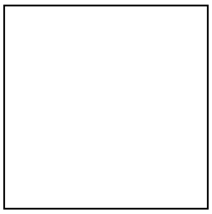
Do not open this test booklet until you are told to do so.

This test contains 48 questions. It is not expected that you know everything on this test.

When you are told to begin:

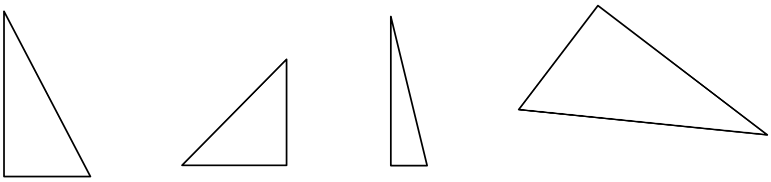
1. Read each question carefully.
2. Answer each question carefully in the spaces provided in the question booklet.
3. If you want to change an answer, completely erase the first answer.
4. You will have 2×50 minutes for this test.

1. This figure is which of the following?



A. triangle
B. quadrilateral
C. square
D. parallelogram
E. rectangle

2.



Are all of these figures triangles? YES NO

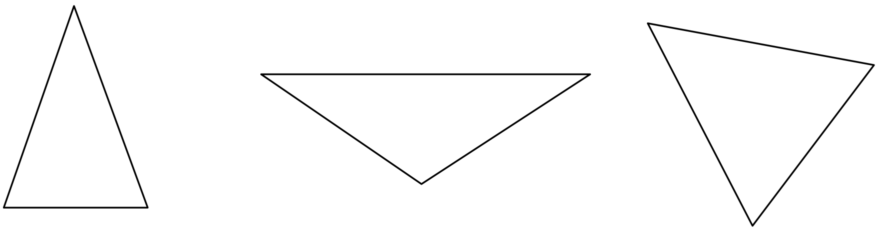
Explain:..

....

Do they appear to be a special kind of triangle? If so, what kind?

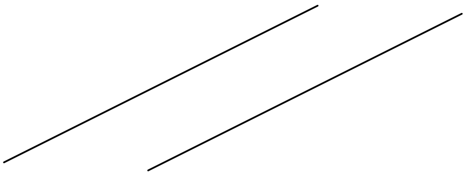
....

3.



These appear to be what kind of triangles? ....

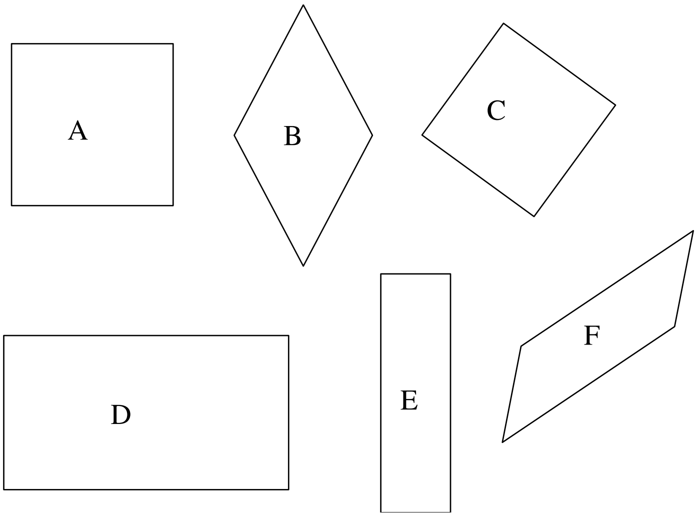
4.



Suppose these two lines never meet, no matter how far we draw them.

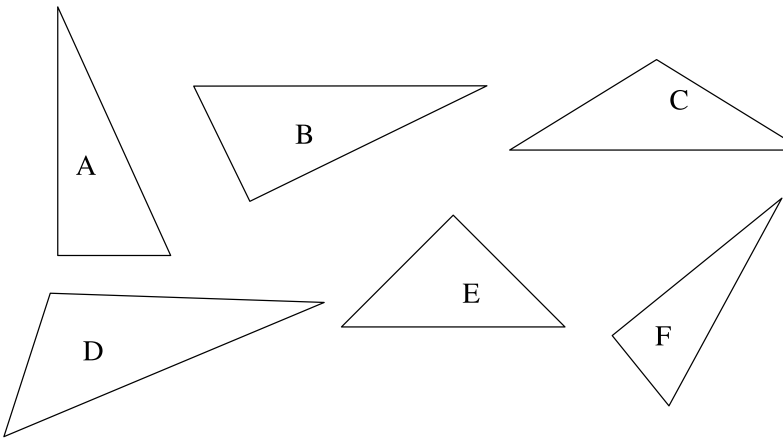
What word describes this? ....

5.



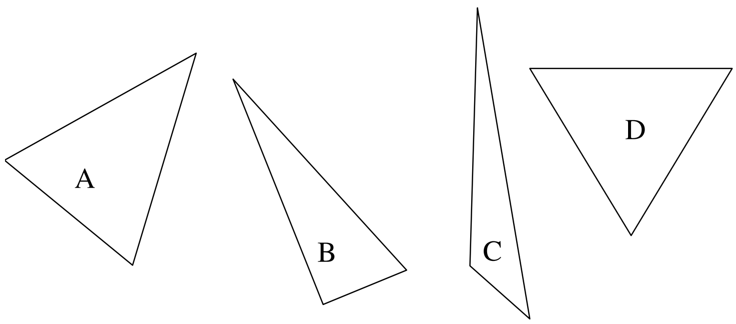
Which of these figures are squares? ....

6.



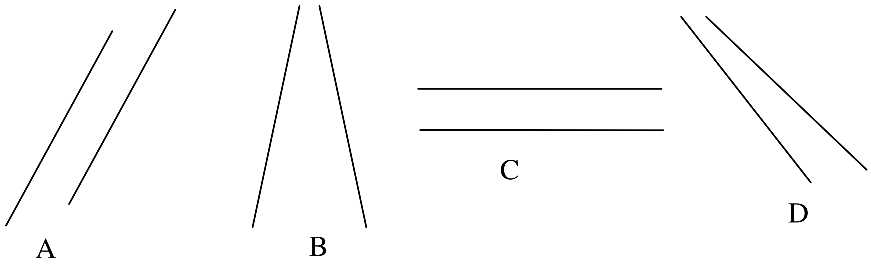
Which of these appear to be right-angled triangles? ....……

7.



Which of these figures appear(s) to be isosceles triangles? ....

8.



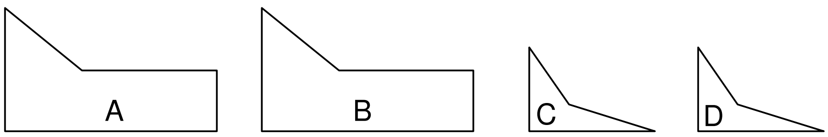
Which pair(s) of lines appear to be parallel? ....

9. Draw a square

What must be true about the sides? ....

What must be true about the angles? ....

10.

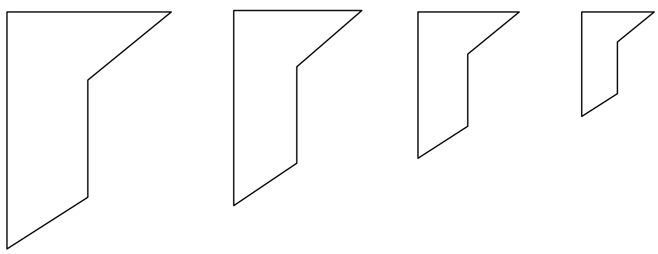


What is true of *A* and *B*? What is true of *C* and *D*? ………………………………

What word describes this?

……………………………………………

11.

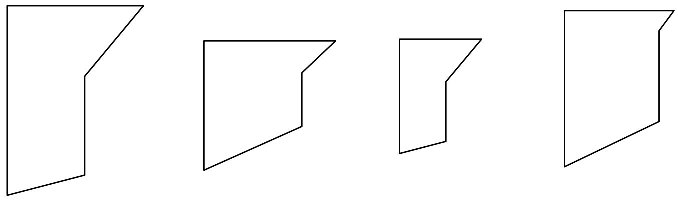


Are these figures alike in any way? YES NO

What word describes this?

…………………………………………………………………………………

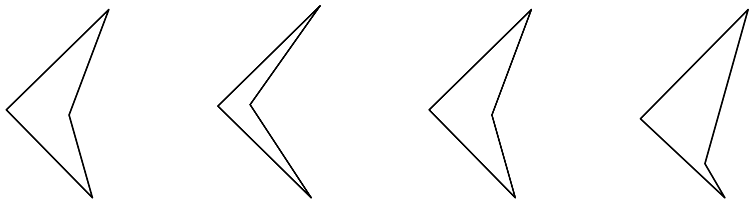
12.



A **B** **C** **D**

Which figure appears to be similar to A ? ……………………………..

13.



A B C D

Which figure appears to be congruent to A? ……………………..

14. What can you tell me about the sides of an isosceles triangle?

....

What can you tell me about the angles of an isosceles triangle?

....

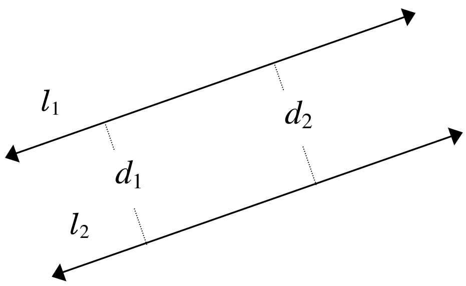
15. Does a right-angled triangle always have a longest side? ....

If so, which one? ....

Does a right-angled triangle always have a largest angle? ....

If so, which one? ....

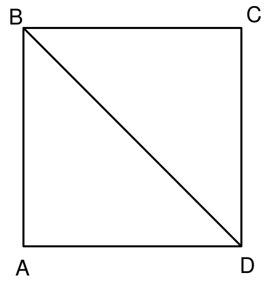
16.



If $d_1 = d_2$ what can be said about the lines l_1 and l_2 ? ....

If $d_1 \neq d_2$ what is true about the lines l_1 and l_2 ? ....

17.



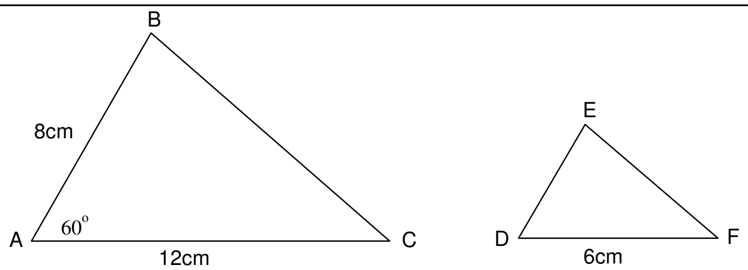
ABCD is a square and *BD* is a diagonal.

(a) Name an angle equal to ∠*ABD* ....

(b) How do you know? …………………………………………………

…………………………………………………………………………………

18.



Triangle *ABC* is similar to triangle *DEF*.

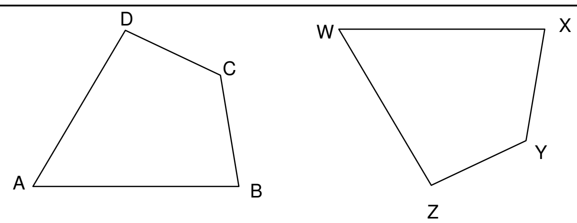
How long is *ED*? ………………………………

How do you know? ……………………………………………………………

What is the size of ∠*EDF*? …………………..

How do you know? ……………………………………………………………

19.



These are congruent figures.

What is true about their sides? ………………………………………………….

AD = …………

What is true about their angles? ………………………………………………...

∠B = …………

20. Circle the smallest combination of the following which guarantees a figure to be a square.

A. It is a parallelogram
B. It is a rectangle
C. It has right angles
D. Opposite sides are parallel
E. Adjacent sides are equal in length
F. Opposite sides are equal in length

---

21. (a) Name some ways in which squares and rectangles are alike.

....

....

....

....

(b) Are all squares also rectangles? Why?

....

....

---

22. Circle any of the following which would guarantee a triangle to be a right-angled triangle.

A. It has two acute angles
B. The measures of the angles add up to 180^0
C. An altitude is also a side
D. The measures of two angles add up to 90^0

---

23. *QAB* is a triangle.

(a) Suppose angle Q is a right angle. Does that tell you anything about angles A and B? If so, what? ....

(b) Suppose angle Q is less than 90^0. Could the triangle be a right-angled triangle? Why?...

....

(c) Suppose angle Q is more than 90^0. Could the triangle be a right-angled triangle. Why?...

....

24. Circle the <u>smallest combination</u> of the following which guarantees a triangle to be isosceles.

A. It has two equal angles
B. It has two equal sides
C. An altitude bisects the opposite side
D. The measures of the angles add up to 180^0

---

25. Suppose all we know about ΔMNP is that $\angle M$ is the same size as $\angle N$.

(a) What do you know about sides MP and NP? ....

Suppose $\angle M$ is larger than $\angle N$.

(b) What do you know about MP and NP? ....

(c) Could ΔMNP be isosceles? ....

....

....

---

26. State whether each of these is true or false. Give reasons.

(a) All isosceles triangles are right-angled triangles.

....

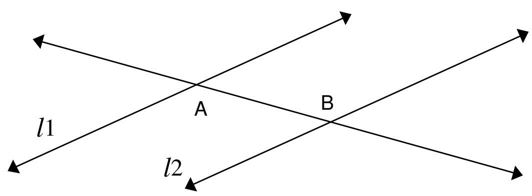
....

(b) Some right-angled triangles are isosceles triangles.

....

....

27.



Suppose $\angle A$ and $\angle B$ are equal. What does this tell you about lines $l1$ and $l2$?

....

Suppose $\angle A$ is larger than $\angle B$. What does this tell you about lines $l1$ and $l2$?

....….

28. (a) Triangle *DEF* has three equal sides. Is it an isosceles triangle?
Why or why not? ....….

(b) Is the following true or false?

All equilateral triangles are isosceles.

....……

29. Decide whether each of the following pairs of lines or line segments are parallel

always

sometimes

never

Give reasons for each answer.

(a) Two lines which do not intersect ....

Reason:..

....

(b) Two lines which are perpendicular to the same line ....

Reason:..

....

(c) Two line segments in a square ....

Reason:..

................…..

(d) Two line segments in a triangle ....

Reason:..

....

(e) Two line segments which do not intersect

................................…………

Reason:..

....

30. What does it mean to say that two figures are similar?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

31. How do you recognise that lines are parallel?

....

....

---

32. Triangle *ABC* is similar to triangle *DEF* (in that order).

Are the following (a) certain, (b) possible, or (c) impossible?

Give reasons for your answers.

(a) $AB = DE$ ....

(b) $AB > DE$ ....

(c) $\angle A = \angle E$ ....

(d) $\angle A > \angle E$ ....

(e) $AB = EF$ ....

(f) $\angle A > \angle D$ ....

---

33. Will figures A and B be similar

I - always   II - sometimes   or   III – never ?

Figure A	Figure B	
(a) a square	(a) a square	....
(b) an isosceles triangle	(b) an isosceles triangle	....
(c) a triangle congruent to B	(c) a triangle congruent to A	....
(d) a rectangle	(d) a square	....
(e) a rectangle	(e) a triangle	....

34. ΔABC is congruent to ΔDEF (in that order).

Are the following (a) certain, (b) possible, or (c) impossible ?

Give reasons for your answers.

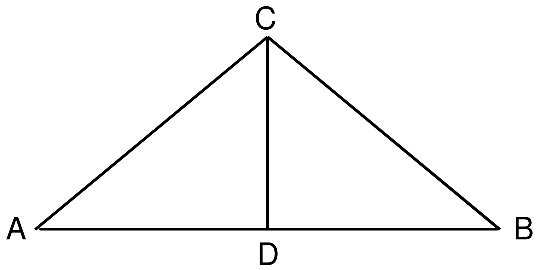
(a) $AB = DE$ ....

(b) $\angle A = \angle E$ ....

(c) $\angle A < \angle D$ ....

(d) $AB = EF$ ....

35.



ABC is a triangle. $\Delta ADC \equiv \Delta BDC$.

What kind of triangle is ΔABC? Why?

....

....

36. Circle the smallest combination of the following which guarantee that two lines are parallel.

A. They are everywhere the same distance apart

B. They have no points in common

C. They are in the same plane

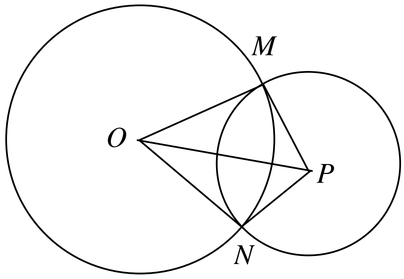
D. They never meet

37. Will figures A and B be congruent

I-always II-sometimes III-never?

Figure A	Figure B	
(a) a square	(b) a triangle	………………
(b) a square with a 10cm side	(b) a square with a 10cm side	………………
(c) a right-angled triangle with a 10cm hypotenuse	(c) a right-angled triangle with a 10cm hypotenuse	………………
(d) a triangle similar to B	(d) a triangle similar to A	………………
(e) an isosceles triangle with two 10 cm sides	(e) an isosceles triangle with two 10 cm sides	………………

38.



These circles with centres O and P intersect at M and N.

Prove: $\Delta OMP \equiv \Delta ONP$.

....

....

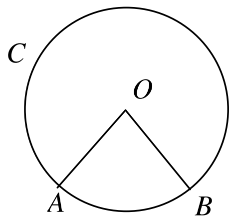
....

....

....

....

39. Figure C is a circle. O is the centre.



Prove that ΔAOB is isosceles.

....

....

....

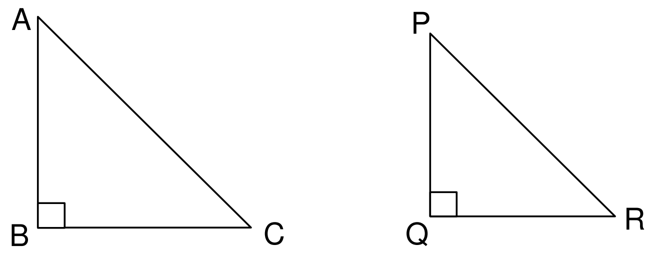
40. $ABCD$ is a four-sided figure. Suppose we know that opposite sides are parallel.

What are the fewest facts necessary to prove that $ABCD$ is a square?

....

....

41.



Figures *ABC* and *PQR* are right-angled isosceles triangles with angles *B* and *Q* being right angles.

Prove that $\angle A = \angle P$ and $\angle C = \angle R$.

....

....

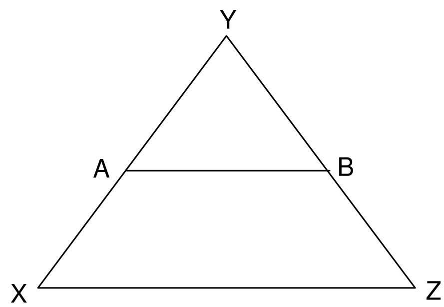
....

....

....

....

42.



AB is the line segment with *A* and *B* the midpoints of the equal sides of the isosceles triangle *XYZ*.

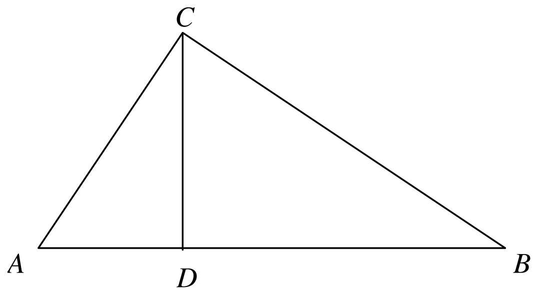
$AY = BY$ and ΔAYB is similar to ΔXYZ so $\angle A = \angle X$ and AB is parallel to XZ.

What have we proved?

....

....

43.



CD is perpendicular to AB. $\angle ACB$ is a right angle.

If you measure $\angle ACD$ and $\angle B$, you find that they have the same measure.

Would this equality be true for all right triangles? Why or why not?

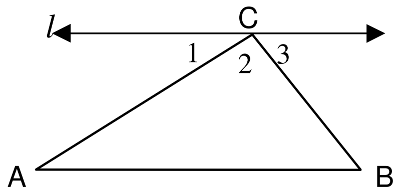
....

....

....

....

44.



Line l is parallel to AB.

Because of properties of parallel lines we can prove that $\angle 1 = \angle A$ and $\angle 3 = \angle B$.

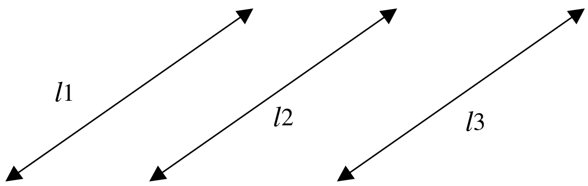
Now, l is a straight angle (180^{o}).

What have we proved?

....

....

45.

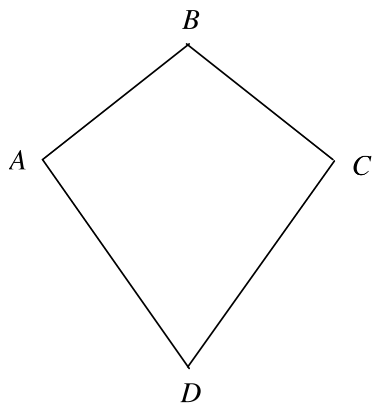


Line $l1$ is parallel to line l 2 and line l 2 is parallel to line l 3. What have we proved?

....

....

46.



In this figure AB and CB are the same length. AD and CD are the same length. Will $\angle A$ and $\angle C$ be the same size? Why or why not?

....

....

47. Prove that the perpendicular from a point not on the line to the line is the shortest line segment that can be drawn from the point to the line.

....

....

....

....

....

....

48. Figure $ABCD$ is a parallelogram, $AB \equiv BC$ and $\angle ABC$ is a right angle. Is $ABCD$ a square? Prove your answer.

....

....

....

....

....

....

A.2 Proof Questionnaire, Healy und Holyes (1999)

INSTITUTE OF EDUCATION
UNIVERSITY OF LONDON

Appendix 1

The Proof Questionnaire

Justifying and Proving in School Mathematics

Funded by the Economic and Social Research Council

You are going to complete a survey that is all about proof.

Before you start, write below everything you know about proof in mathematics and what it is for.

Please do not write in this space

A
B
C
D
E
F
G
H
I

Algebra

A1. Arthur, Bonnie, Ceri, Duncan and Eric were trying to prove whether the following statement is true or false:

Please do not write in this space

When you add any 2 even numbers, your answer is always even.

Arthur's answer

a is any whole number
b is any whole number
$2a$ and $2b$ are any two even numbers
$2a + 2b = 2\,(a + b)$

So Arthur says it's true.

Bonnie's answer

$2 + 2 = 4$	$4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6$	$4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8$	$4 + 6 = 10$

So Bonnie says it's true.

Ceri's answer

Even numbers are numbers that can be divided by 2. When you add numbers with a common factor, 2 in this case, the answer will have the same common factor.

So Ceri says it's true.

Duncan's answer

Even numbers end in 0 2 4 6 or 8. When you add any two of these the answer will still end in 0 2 4 6 or 8.

So Duncan says it's true.

Eric's answer

Let x = any whole number, y = any whole number

$x + y = z$

$z - x = y$

$z - y = x$

$z + z - (x + y) = x + y = 2z$

So Eric says it's true.

From the above answers, choose **one** which would be closest to what you would do if you were asked to answer this question.

1B
2D
5A
6E
7C

For each of the following, circle whether you agree, don't know or disagree.

Please do not write in this space

The statement is:

When you add any 2 even numbers, your answer is always even.

	agree	don't know	disagree
Arthur's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** even numbers	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3
Bonnie's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** even numbers	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3
Ceri's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** even numbers	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3
Duncan's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** even numbers	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3
Eric's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** even numbers	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

A2.

Please do not write in this space

Suppose it has now been proved that:

When you add any 2 even numbers, your answer is always even.

Zach asks what needs to be done to prove whether:

When you add 2 even numbers that are square, your answer is always even.

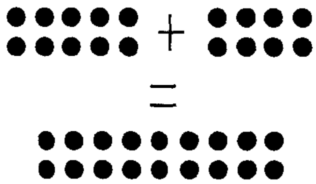
Tick either A or B.

(A) Zach doesn't need to do anything, the first statement has already proved this. ☐ A

(B) Zach needs to construct a new proof. ☐ B

A3. Yvonne drew the following picture for her answer to question A1:

Yvonne's answer



So Yvonne says it's true.

Please do not write in this space

Would you choose Yvonne's answer instead of your previous choice as the one closest to what you would do?

yes ☐ no ☐

Y

N

Would you choose Yvonne's answer instead of your previous choice as the one your teacher would give the best mark?

yes ☐ no ☐

Y

N

For each of the following circle whether you agree, don't know or disagree.

Yvonne's answer:	agree	don't know	disagree
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** even numbers	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

A4. Prove whether the following statement is true or false. Write down your answer in the way that would get you the best mark you can.

When you add any 2 odd numbers, your answer is always even.

My answer

Please do not write in this space

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

N
M
C

A5. Farhana, Gary, Hamble, Iris and Julie were trying to prove whether the following statement is true or false:

Please do not write in this space

When you add any 3 consecutive numbers, your answer is always even.

Farhana's answer

x is any whole number.

$x+(x+1)+(x+2)=3x+3$

$3+3=6$

6 is divisible by 2

So Farhana says it's true.

Gary's answer

If the first number is even, then the second must be odd and the third must be even. This combination will always add up to be odd.

So Gary says it's false.

Hamble's answer

$3+4+5=12$

$11+12+13=36$

$35+36+37=108$

$107+108+109=324$

So Hamble says it's true.

Iris's answer

$2+3+4=9$

So Iris says it's false.

Julie's answer

Suppose first number is even, say $2x$.

$2x+(2x+1)+(2x+2)=6x+3$

$6x$ is even

$\therefore 6x+3$ is odd

So Julie says it's false

From the above answers, choose **one** which would be closest to what you would do if you were asked to answer this question.

1H
5J
6F
7G
9I

From the above answers, choose the **one** to which your teacher would give the best mark.

1H
5J
6F
7G
9I

A6. Kate, Leon, Maria and Nisha were asked to prove whether the following statement is true or false:

When you multiply any 3 consecutive numbers, your answer is always a multiple of 6.

Kate's answer

A multiple of 6 must have factors of 3 and 2.
If you have three consecutive numbers, one will be a multiple of 3 as every third number is in the three times table.
Also, at least one number will be even and all even numbers are multiples of 2.
If you multiply the three consecutive numbers together the answer must have at least one factor of 3 and one factor of 2.

So Kate says it's true.

Leon's answer

$1 \times 2 \times 3 = 6$
$2 \times 3 \times 4 = 24$
$4 \times 5 \times 6 = 120$
$6 \times 7 \times 8 = 336$

So Leon says it's true.

Maria's answer

x is any whole number

$$x \times (x+1) \times (x+2) = (x^2+2) \times (x+2)$$
$$= x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x$$

Cancelling the x's gives $1 + 1 + 2 + 2 = 6$

So Maria say it's true.

Nisha's answer

Of the three consecutive numbers, the first number is either:
EVEN which can be written $2a$ (a is any whole number) or,
ODD which can be written $2b - 1$ (b is any whole number).

If EVEN
$2a \times (2a+1) \times (2a+2)$ is a multiple of 2.
and either a is a multiple of 3 DONE
or a is not a multiple of 3
$\therefore$ $2a$ is not a multiple of 3
$\therefore$ Either $(2a+1)$ is a multiple of 3 or $(2a+2)$ is a multiple of 3 DONE

If ODD
$(2b-1) \times 2b \times (2b+1)$ is a multiple of 2
and either b is a multiple of 3 DONE
or b is not a multiple of 3
$\therefore$ 2b is not a multiple of 3
$\therefore$ Either $(2b-1)$ is a multiple of 3 or $(2b+1)$ is a multiple of 3 DONE

So Nisha says it's true.

From the above answers, choose **one** which would be closest to what you would do if you were asked to answer this question.

From the above answers, choose the **one** to which your teacher would give the best mark.

Please do not write in this space

1L
5N
6M
7K

1L
5N
6M
7K

For each of the following, circle whether you agree, don't know or disagree.

Please do not write in this space

The statement is:

When you multiply any 3 consecutive numbers, your answer is always a multiple of 6.

Kate's answer:	agree	don't know	disagree
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows the statement is true for **some** consecutive numbers	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

Leon's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows the statement is true for **some** consecutive numbers	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

Maria's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows the statement is true for **some** consecutive numbers	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

Nisha's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows the statement is true for **some** consecutive numbers	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

A7. Prove whether the following statement is true or false. Write your answer in a way that would get you the best mark you can.

If p and q are any two odd numbers, $(p+q)\times(p-q)$ is always a multiple of 4.

My answer

Please do not write in this space

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

N
M
C

 Proof Questionnaire

Geometry

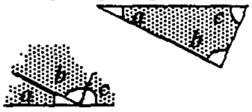
G1. Amanda, Barry Cynthia, Dylan, and Ewan were trying to prove whether the following statement is true or false:

Please do not write in this space

When you add the interior angles of any triangle, your answer is always 180°.

Amanda's answer

I tore the angles up and put them together.

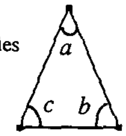


It came to a straight line which is 180°. I tried for an equilateral and an isosceles as well and the same thing happened.

So Amanda says it's true.

Barry's answer

I drew an isosceles triangle, with c equal to 65°.



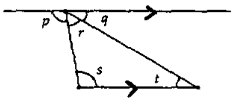
Statements	Reasons
$a = 180° - 2c$.......	Base angles in isosceles triangle equal
$a = 50°$..............	180° - 130°
$b = 65°$..............	180° - $(a + c)$
$c = b$.................	Base angles in isosceles triangle equal

$\therefore\ a + b + c = 180°$

So Barry says it's true.

Cynthia's answer

I drew a line parallel to the base of the triangle



Statements	Reasons
$p = s$.........................	Alternate angles between two parallel lines are equal
$q = t$.........................	Alternate angles between two parallel lines are equal
$p + q + r = 180°$........	Angles on a straight line

$\therefore\ s + t + r = 180°$

So Cynthia says it's true.

Dylan's answer

I measured the angles of all sorts of triangles accurately and made a table.

a	*b*	*c*	*total*
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

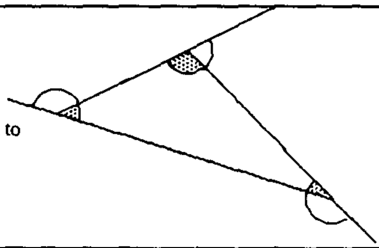
They all added up to 180°.

So Dylan says it's true.

Ewan's Answer

If you walk all the way around the edge of the triangle, you end up facing the way you began. You must have turned a total of 360°.

You can see that each exterior angle when added to the interior angle must give 180° because they make a straight line. This makes a total of 540°. 540° - 360° = 180°.



So Ewan says it's true.

From the above answers, choose **one** which would be closest to what you would do if you were asked to answer this question. [ ]

1D
3A
5C
6B
7E

From the above answers, choose the **one** to which your teacher would give the best mark. [ ]

1D
3A
5C
6B
7E

 Proof Questionnaire

For each of the following, circle whether you agree, don't know or disagree.

Please do not write in this space

The statement is:

When you add the interior angles of any triangle, your answer is always 180°.

	agree	don't know	disagree
Amanda's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** triangles	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3
Barry's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** triangles	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3
Cynthia's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** triangles	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3
Dylan's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** triangles	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3
Ewan's answer:			
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** triangles	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

G2. Suppose it has now been proved that

When you add the interior angles of any triangle, your answer is always 180°.

Zoe asks what needs to be done to prove whether:

When you add the interior angles of any right-angled triangle, your answer is always 180°.

Tick either A or B:

(A) Zoe doesn't need to do anything, the first statement has already proved this. ☐

(B) Zoe needs to construct a new proof. ☐

Please do not write in this space

A

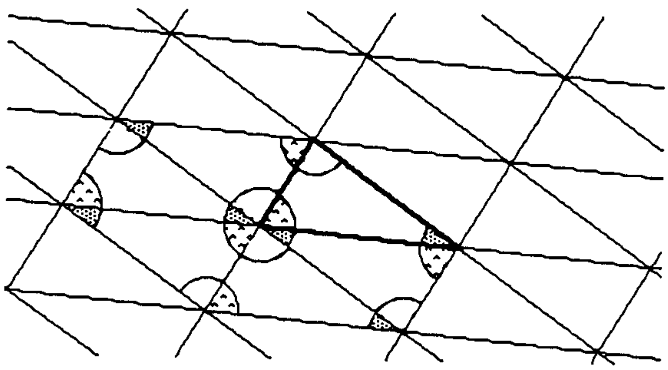
B

G3. Yorath gave the following answer to question G1:

Please do not write in this space

Yorath's answer

I drew a tessellation of triangles and marked all the equal angles.



I know that the angles round a point add up to 360°.

So Yorath says it's true.

Would you choose Yorath's answer instead of your previous choice as the one closest to what you would do ?

yes ☐ no ☐

Y
N

Would you choose Yorath's answer instead of your previous choice as the one your teacher would give the best mark?

yes ☐ no ☐

Y
N

For each of the following circle whether you agree, don't know or disagree

Yorath's answer:	agree	don't know	disagree
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** triangles	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

G4. Prove whether the following statement is true or false. Write your answer in a way that would get you the best mark you can.

If you add the interior angles of any quadrilateral, your answer is always 360°.

My answer

Please do not write in this space

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

N
M
C

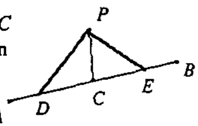
G5. Frank, Gail, Harriet, Irene and Jacob were trying to prove whether the following statement is true or false:

The shortest distance between any point *P* and a line segment *AB* is the line joining *P* to *C*, where *C* is the midpoint of *AB*.

Please do not write in this space

Frank's answer

E is any point on BC and D is any point on AC.

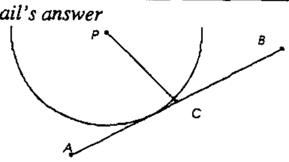


Statement	Reason
$AC = BC$....................	C is the midpoint
$CE^2 + PC^2 = PE^2$......	Pythagoras theorem
$CD^2 + PC^2 = PD^2$.....	Pythagoras theorem
$PC \leq PE$	CE is greater than 0
$PC \leq PD$..................	CD is greater than 0

$\therefore$ PC is the shortest distance

So Frank says it's true.

Gail's answer



I drew an arc with my compass using P as the centre and so that the arc just touched the line AB. The line from P to C crossed the circle showing that PC was not the shortest line.

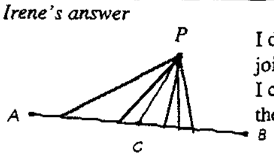
So Gail says it's false.

Harriet's answer

A straight line is always the shortest distance between two points.

So Harriet says it's true.

Irene's answer

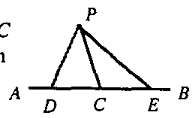


I drew some more lines joining P to AB
I can see that some of them are shorter than PC.

So Irene says it's false.

Jacob's answer

E is any point on BC and D is any point on AC.



Statement	Reason
If angle $PCE > 90°$	
angle $PEC < 90°$.................	Sum of angles in a triangle = 180°
and $PE > PC$.......................	Longest side of triangle is opposite largest angle
But if angle $PCE > 90°$	
angle $PCD < 90°$.................	Sum of angles on a straight line = 180°
angle PDC can be > 90.......	Sum of angles in a triangle = 180°
PD can be < PC.................	Longest side of triangle is opposite largest angle

$\therefore$ PC is not always the shortest distance.

So Jacob says it's false.

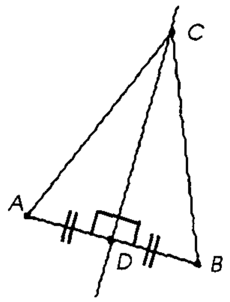
From the above answers, choose **one** which would be closest to what you would do if you were asked to answer this question.

4H
5J
6F
7G
9I

From the above answers, choose the **one** to which your teacher would give the best mark.

4H
5J
6F
7G
9I

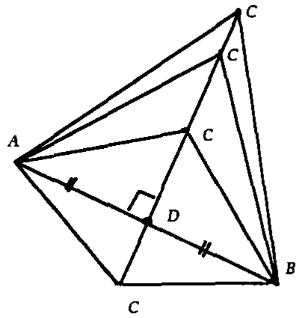
G6.



C is any point on the perpendicular bisector of AB. Kobi, Linda, Marty and Natalie were trying to prove whether the following statement is true or false:

Triangle ABC is always isosceles.

Kobi's answer



I moved C to different places on the perpendicular bisector and measured AC and BC. They were always the same so the triangles were all isosceles.

So Kobi says it's true.

Linda's answer

Statement	Reason
$AD = BD$................	Bisector
$ADC = 90°$............	Perpendicular line
$BDC = 90°$............	Perpendicular line
$DC = DC$...............	Same line
$\Delta ADC = \Delta BDC$.....	Two sides and included angle the same.
$\therefore AC = BC$.	

So Linda says it's true.

Marty's answer

Because CD bisects AB at right angles, B is a reflection of A. So you could think of ABC as made up of two right angle triangles which are reflections of each other. This means the sides AC and BC will be the same length.

So Marty says it's true.

Natalie's answer

Statement	Reason
$ADC = 90°$........................	Perpendicular line
$BDC = 90°$........................	Perpendicular line
Angle CAB = angle CBD.	Base angles of an isosceles triangle equal
$\therefore AC = BC$.	

So Natalie says it's true.

From the above answers, choose **one** which would be closest to what you would do if you were asked to answer this question.

From the above answers, choose the **one** to which your teacher would give the best mark.

Please do not write in this space

1K
5L
6N
7M

1K
5L
6N
7M

For each of the following circle whether you agree, don't know or disagree.

The statement is:

Triangle ABC is always isosceles.

Please do not write in this space

Kobi's answer:

	agree	don't know	disagree
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** positions of *C*	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

Linda's answer:

	agree	don't know	disagree
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** positions of *C*	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

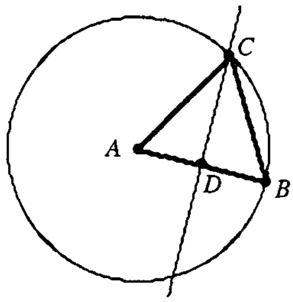
Marty's answer:

	agree	don't know	disagree
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** positions of *C*	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

Natalie's answer:

	agree	don't know	disagree
Has a **mistake** in it	1	2	3
Shows that the statement is **always true**	1	2	3
Only shows that the statement is true for **some** positions of *C*	1	2	3
Shows you **why** the statement is true	1	2	3
Is an easy way to **explain** to someone in your class who is unsure	1	2	3

G7.



A is the centre of a circle and *AB* is a radius. *C* is a point on the circumference where the perpendicular bisector of *AB* crosses the circle. Prove whether the following statement is true or false. Write your answer in a way that would get you the best mark you can.

Triangle *ABC* is always equilateral.

My answer

Please do not write in this space

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

N
M
C

A.3 Heuristisches Lösungsbeispiel von Reiss und Renkl (2002)

A heuristic worked-out example for mathematical proof: Properties of the angles of triangles (Reiss und Renkl 2002, S.32f.)

The problem: *Alex and Chris have drawn different triangles and respectively measured the sum of their three angles,. Both were surprised to discover that this sum was 180° for all of the triangles. Alex and Chris were sure that this was not an accidental result. Their conjecture was: „In every triangle, the sum of its interior angles is 180°.“*

In the following, we will look closely at their problem-solving work. You are encouraged not only to read this solution but to repeat all the problem solving steps that Alex and Chris followed.

(1) *Exploration of a problem situation*:

Equipment: a pair of scissors, a protractor, paper.

(a) Draw a triangle ABC, mark its angles α, β, and γ. Measure the size of these angles. What is the sum of α, β, and γ?
Note this size:
………………………………

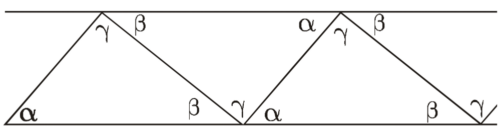
Repeat the experiment three or four times. Note the size of all the angles you get:
………………………………

(b) Draw a triangle ABC, mark its angles α, β, and γ. Take your scissors, cut it out, tear off the corners of the triangle and put them together to form a new angle. What size does this angle probably have?

Note this size:
………………………………

Repeat the experiment three or four times. Note the size of all the angles you get:
………………………………

(c) Draw a triangle ABC, mark its angles α, β, and γ. Take your scissors, cut it out. Using ABC as an outline draw, get more triangles. Cut them out and combine them so that you get a straight line at the bottom.



There is probably a straight line on top. This would provide evidence that congruent triangles may be used to completely inlay a plane. What does this mean for α, β, and γ?

Accordingly, all these experiments suggest that the angles of an arbitrary triangle add up to 180°.

(2) *Conjecture*:
Let ABC be a triangle, and α, β, and γ its angles. Then $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Mathematical conjectures need to be proved. In order to perform this mathematical proof it is necessary to

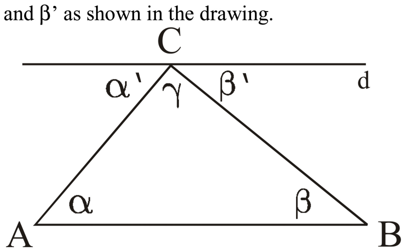
- clarify what one knows about angles and respectively about triangles,
- identify arguments which might be important for the proof and to,
- organize correct arguments in a logical sequence.

(3) What information is available on angles?
There are some possible prerequisites for the proof, which are well known about angles. In particular you may recall the following facts:

- A straight line is regarded to cover an angle of 180°.
- Vertical angles are congruent.
- When parallel lines are cut by a transversal then the corresponding angles are congruent.
- When parallel lines are cut by a transversal then alternate interior angles are congruent. Comparing this information and the experimental data may lead to an idea of the proof.

(4) *The idea of a proof*:
A straight line is regarded to cover an angle of 180°. Accordingly, one may argue that the angles of an arbitrary triangle are congruent to angles which add up to a straight line.

(5) *The proof of the conjecture*:
There is a triangle ABC, and α, β, and γ are its angles. Draw the line d, which is the parallel line to AB and which touches C. Mark the angles α' and β' as shown in the drawing.



We know, that α and α' and respectively β and β' are alternate interior angles, and that AB and d are parallel lines. Accordingly, $\alpha = \alpha'$ and $\beta = \beta'$. As d is a straight line, it is obvious that $\alpha + \beta' + \gamma' = 180°$ and, therefore, you can conclude, that $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ as well.

(6) Looking back:
As a result of the problem solving process we know now for sure that the interior angles in *every* triangle add up to 180°. In the language of mathematics one would say that we found a *proof* for this conjecture.

The solution: *Alex and Chris have found a proof for their conjecture. They proved: „In every triangle, the sum of its interior angles is 180°.“*

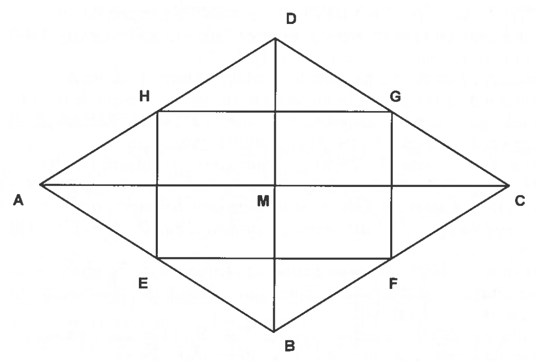
A.4 Aufgaben aus Ufer (2009)

9 Anhang

9.1 Argumenationsbeispiel mit empirischem Argument

Rechteck in der Raute

Verbindet man die vier Seitenmitten einer Raute, so entsteht ein Rechteck.



Achims Antwort:

Ich habe drei Rauten gezeichnet: eine mit genau 7 cm Seitenlänge, eine mit 4,9 cm Seitenlänge und eine mit 2,75 cm Seitenlänge. Jedes Mal habe ich die Seitenmitten eingezeichnet und verbunden. Dann habe ich die Innenwinkel dieser Vierecke EFGH gemessen: sie waren immer genau 90° groß.

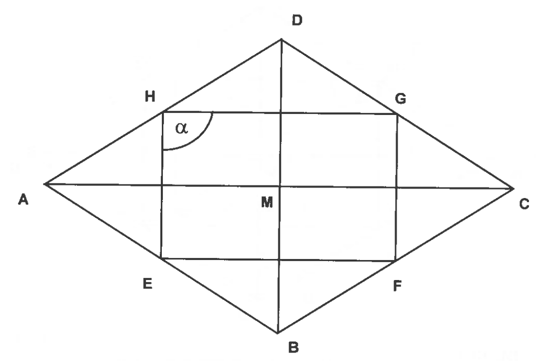
Also sind die Vierecke EFGH immer Rechtecke.

Die Behauptung ist wahr!

9.2 Argumentationsvorschlag mit Fehler im Aspekt Beweiskette

Rechteck in der Raute

Verbindet man die vier Seitenmitten einer Raute, so entsteht ein Rechteck.



Christians Antwort:

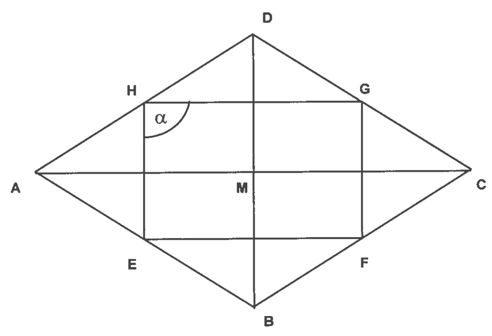
Aussage	Begründung
Das Viereck *ABCD* hat die Geraden *AC* und *BD* als Symmetrieachsen.	*ABCD* ist eine Raute.
Das Viereck *EFGH* hat die Geraden *AC* und *BD* als Symmetrieachsen.	*E*, *F*, *G*, *H* sind die Seitenmitten.
$\alpha = 90°$	Winkel im Rechteck
Alle 4 Innenwinkel von *EFGH* sind kongruent, also ebenfalls 90°.	wegen der obigen Symmetrien
$\Rightarrow$ *EFGH* ist ein Rechteck.	

Die Behauptung ist wahr!

9.3 Korrekter Argumentationsvorschlag in formaler Notation

Rechteck in der Raute

Verbindet man die vier Seitenmitten einer Raute, so entsteht ein Rechteck.



Brittas Antwort:

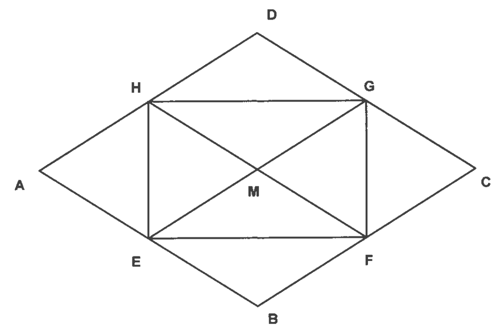
Aussage	Begründung
Das Viereck *ABCD* hat die Geraden *AC* und *BD* als Symmetrieachsen.	*ABCD* ist eine Raute.
Das Viereck *EFGH* hat die Geraden *AC* und *BD* als Symmetrieachsen.	*E*, *F*, *G*, *H* sind die Seitenmitten.
$\Rightarrow$ alle 4 Innenwinkel von *EFGH* sind kongruent	
(1) $4\alpha = 360°$	Innenwinkelsumme des Vierecks *EFGH* mit vier kongruenten Winkeln
(2) $\alpha = 90°$	folgt aus (1)
EFGH ist ein Rechteck	folgt aus (2), denn alle Innenwinkel sind kongruent zu α

Die Behauptung ist wahr!

9.4 Korrekter Argumentationsvorschlag in narrativer Form

Rechteck in der Raute

Verbindet man die vier Seitenmitten einer Raute, so entsteht ein Rechteck.



Doros Antwort:

Jede Raute ist ein Parallelogramm.

Weil ABCD eine Raute ist und E, G die Seitenmitten, entsteht [EG] durch Parallelverschiebung aus [AD] (oder aus [BC]). Genauso entsteht [FH] durch Parallelverschiebung aus [BA] oder [CD]. Daher sind alle diese Strecken kongruent und es folgt: $\overline{FH} = \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{EG}$.

Weil die ganze Figur punktsymmetrisch zu M ist, halbieren sich [EG] und [FH] gegenseitig.

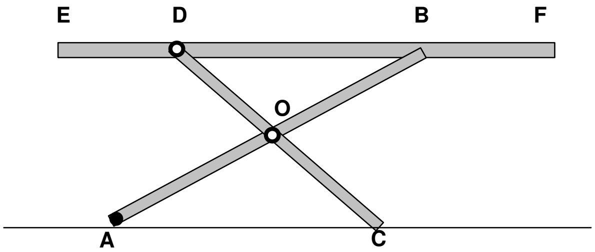
Also ist EFGH ein Viereck, dessen gleichlange Diagonalen sich gegenseitig halbieren. Ein solches Viereck muss ein Rechteck sein (folgt aus dem Haus der Vierecke).

Die Behauptung ist wahr!

A.5 „Mechanical linkages“ aus Vincent (2002)

Ironing table

- The legs, *AB* and *CD*, of the ironing table are pivoted at their midpoints, *O*.
- The top of the table, *EF*, is pivoted to *CD* at *D*.
- C slides along the floor and *B* slides along *EF*.



- 'Fold' the ironing table flat and raise it again by moving *C*. What do you notice about the top of the ironing table? Write your observation as a conjecture.

  ………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………

- Using a ruler and pencil, draw a careful diagram of the ironing table, representing each link as a single line. Label your diagram as shown above.
- Mark any given information on your diagram.

- Name the two triangles you can see in the diagram.

  ………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………

- Now open the Cabri file **Ironing table**. Drag point *C*. Are you still satisfied with your conjecture?

  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………

- Can you use your geometry knowledge to give an explanation of why you think this conjecture is true?

  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………

- Now write out your explanation carefully in the form of a geometric proof. Each statement you make must be justified in terms of one of the following:
  - the given information
  - your previous geometry knowledge
  - something you have shown to be true in a previous step of your proof.

  Given: ………………………………………………………………………….
  Prove: ………………………………………………………………………….
  Proof: …………………………………………………………………………..
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………

Anhang B

Lehrpläne und Schulbücher

B.1 Bayerischer Lehrplan Mathematik, Klasse 7

M 1 Jahrgangsstufe **07**

Mathematik

7 Mathematik (4)

In Jahrgangsstufe 7 wird an früher behandelte Themen angeknüpft; diese werden auf höherem Abstraktionsniveau weitergeführt, wobei das Begründen von Zusammenhängen an Bedeutung gewinnt und das analytische Denken der Schüler stärker gefordert wird. Methodenvielfalt und Förderung selbständigen Arbeitens kommen den Jugendlichen in ihrer Persönlichkeitsentwicklung entgegen und unterstützen gleichzeitig das Erreichen der fachlichen Ziele. Von Anfang an wird großer Wert auf die kritische Überprüfung von Ergebnissen z. B. durch Überschlagsrechnung gelegt.
In den Jahrgangsstufen 5 und 6 wurden wesentliche Aspekte der Arithmetik erarbeitet. Diese wird nun vertieft und in der stärker formalisierenden Algebra weitergeführt. Die Schüler erwerben beim Umgang mit Termen und Gleichungen grundlegende algebraische Kenntnisse, wobei die eingehende Beschäftigung mit Termen gleichzeitig der Funktionspropädeutik dient. Anknüpfend an ihr Vorwissen entdecken sie Zusammenhänge in der Figurengeometrie, wobei sie Freude an der Geometrie gewinnen und ästhetisches Empfinden entwickeln sollen. Das neu hinzukommende Konstruieren fordert Sorgfalt und Genauigkeit. Die Schüler lernen, bei der Planung bzw. Beschreibung von Konstruktionen [⇢ D 7.1, D 6.2 Beschreiben von Vorgängen; NT 7.2.3 Algorithmen] auf Schlüssigkeit, Vollständigkeit und Eindeutigkeit zu achten. Im Bereich der Stochastik festigen sie ihre Vorkenntnisse und beschäftigen sich dabei nochmals intensiv mit der Prozentrechnung.

In der Jahrgangsstufe 7 erwerben die Schüler folgendes Grundwissen:
- Sie rechnen sicher mit rationalen Zahlen und beherrschen die Grundlagen der Prozentrechnung.
- Sie können Terme aufstellen und analysieren sowie elementare Termumformungen ausführen.
- Sie sind in der Lage, lineare Gleichungen auch im Anwendungszusammenhang aufzustellen und zu lösen.
- Sie können Daten rechnerisch und graphisch auswerten.
- Sie beschreiben mit grundlegenden Begriffen (u. a. Kongruenz) Zusammenhänge an geometrischen Figuren und wenden geometrische Sätze (u. a. Satz von Thales) bei Konstruktionen und Begründungen an.
- Sie sind in der Lage, im algebraischen bzw. geometrischen Kontext zu argumentieren.

M 7.1 Figurengeometrie: vom Zeichnen und Beschreiben zum Konstruieren und Begründen

Bei der Erzeugung symmetrischer Figuren lernen die Schüler das mathematisch wie kulturhistorisch bedeutsame Prinzip der Konstruktion mit Zirkel und Lineal kennen. Sie lernen, geometrische Phänomene allmählich differenzierter zu analysieren sowie folgerichtig zu argumentieren und zu begründen. Eine abstraktere Denkweise ergänzt nach und nach ihren bisher anschaulich und intuitiv geprägten Wissenserwerb.

M 7.1.1 Achsen- und punktsymmetrische Figuren (ca. 12 Std.)

Anhand von Figuren aus ihrer Erfahrungswelt erkennen die Schüler die Achsen- und Punktsymmetrie als natürliches Gestaltungsprinzip. Sie verwenden aus der Anschauung gewonnene Fundamentalsätze zur Begründung der ersten Grundkonstruktionen. Anhand der Vielfalt der Vierecke erschließt sich ihnen die Symmetrie als ein Ordnungsprinzip.
- Achsensymmetrie: Eigenschaften, Konstruktion von Spiegelpunkt und Achse
- Mittelsenkrechte, Lot; Winkelhalbierende
- Punktsymmetrie: Eigenschaften, Konstruktion von Spiegelpunkt und Zentrum
- Übersicht über symmetrische Vierecke

M 7.1.2 Winkelbetrachtungen an Figuren (ca. 8 Std.)

Die Schüler entdecken die wesentlichen Zusammenhänge an Geradenkreuzungen bzw. Doppelkreuzungen mit parallelen Geraden und beschäftigen sich mit Winkelsummensätzen. Dabei wird ihnen auch der Unterschied zwischen Fundamentalsätzen und daraus abgeleiteten Sätzen deutlich gemacht.
- Geradenkreuzung: Scheitel- und Nebenwinkel; Doppelkreuzung: Stufen- und Wechselwinkel
- Innenwinkelsumme beim Dreieck und beim Viereck

M 7.5 Figurengeometrie: das Dreieck als Grundfigur

Häufig lassen sich reale Objekte gut mit geradlinig begrenzten geometrischen Figuren darstellen, deren Untersuchung unmittelbar auf Dreiecke als Grundbausteine führt. Daher beschäftigen sich die Schüler unter verschiedenen Gesichtspunkten weiter mit der Grundfigur Dreieck. Um geometrische Zusammenhänge auch experimentell zu erschließen, nutzen die Schüler dynamische Geometriesoftware als interaktives Werkzeug und knüpfen dabei an die aus Natur und Technik (Schwerpunkt Informatik) bekannte objektorientierte Sichtweise an [⇢ NT 6.2, NT 7.2].

M 7.5.1 Kongruenz (ca. 6 Std.)

Die Frage, wann zwei Dreiecke deckungsgleich sind, führt die Schüler zur eindeutigen Konstruierbarkeit eines Dreiecks aus gegebenen Seiten oder Winkeln. Sie lernen davon ausgehend die Kongruenzsätze kennen, die als Fundamentalsätze verwendet werden.

- Begriff der Kongruenz von Figuren
- Kongruenzsätze für Dreiecke und grundlegende Konstruktionen

M 7.5.2 Besondere Dreiecke (ca. 14 Std.)

Durch Kongruenz- oder Symmetrieüberlegungen erfassen die Schüler die Eigenschaften des gleichschenkligen und des gleichseitigen Dreiecks. Am Beispiel des Satzes von Thales können sie erfahren, wie es dynamische Geometriesoftware erleichtern kann, Vermutungen aufzustellen. Sie verstehen den Beweis des Satzes von Thales sowie den seiner Umkehrung. Sie erkennen, dass sich neue Möglichkeiten für Konstruktionen eröffnen.

- gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck
- rechtwinkliges Dreieck, Satz des Thales; Konstruktion von Kreistangenten

M 7.5.3 Konstruktionen (ca. 12 Std.)

Beim Konstruieren von Dreiecken und Vierecken werden Einfallsreichtum und geistige Wendigkeit der Schüler entwickelt. Wesentliches Ziel ist außerdem die Fähigkeit, Konstruktionsabläufe zu planen und zu dokumentieren. Fragen der Konstruierbarkeit und Lösungsvielfalt bei Variation der Bestimmungsstücke untersuchen die Schüler z. B. mithilfe von dynamischer Geometriesoftware. Zur Abrundung ihrer Geometriekenntnisse setzen sie ihre erworbenen Fähigkeiten bei anwendungsbezogenen Aufgabenstellungen ein.

- Wiederholung von Höhe, Winkelhalbierender und Mittelsenkrechter; Umkreis
- Konstruktion von Dreiecken und Vierecken auch in Sachzusammenhängen

M 7.6 Vertiefen der Algebra (ca. 12 Std.)

Die Schüler mathematisieren erneut Sachzusammenhänge durch Terme oder Gleichungen. Dabei wählen sie die der jeweiligen Problemstellung angemessene Strategie, erkennen Sinn und Nutzen der bereits erlernten Techniken und vertiefen diese in vielfältigen Anwendungen. Um flexibel einsetzbare Grundlagen zu entwickeln, steht vor allem die Verknüpfung der verschiedenen erlernten Kenntnisse und Methoden im Vordergrund. Die Schüler verbessern ihre Fähigkeit, mithilfe von Termen zu argumentieren und Zusammenhänge zu verbalisieren. Dabei wiederholen und vertiefen sie gezielt den Umgang mit den bisher bekannten Größen und deren Einheiten [⇢ NT 7.1].

B.2 Holzmüller, Raum- und Zahlenlehre für die Mittelstufe

d) Winkel mit paarweis parallelen und gleichgerichteten (oder entgegengesetzt gerichteten) Schenkeln sind gleich (Abb. 17).

e) Winkel mit parallelen Schenkeln, von denen ein Paar gleichgerichtet und ein Paar entgegengesetzt gerichtet sind, sind Streckwinkel.

§ 11. Die Winkel am Dreieck.

***1.** Zeichne drei sich nicht in einem Punkte schneidende Geraden, von denen auch keine zwei parallel sind! Lege die Zeichnung so an, daß sämtliche möglichen Schnittpunkte der Geraden auf deinem Zeichenblatt liegen! 1) Wie viele Winkel ergeben sich? 2) Welche Figur umschließen die Geraden? 3) Bezeichne die Schnittpunkte und die „Innenwinkel", wie du das für ein Dreieck gelernt hast!

Erklärung: Unter den „Außenwinkeln" eines Dreiecks versteht man die Winkel, welche von einer Dreiecksseite und der Verlängerung einer anderen Seite eingeschlossen werden.

b) Wie viele Außenwinkel ergeben die drei sich schneidenden Geraden? Wie viele haben aber nur verschiedene Größe?

Bemerkung: Da je zwei der sechs Außenwinkel gleich sind, sagen wir: das Dreieck hat **drei** Außenwinkel.

c) Jeder Innenwinkel eines Dreiecks hat **einen** „zugehörigen" Außenwinkel. Welche Eigenschaft begründet diese Zugehörigkeit?

***2.** a) Zeichne einige Dreiecke (ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$) von verschiedener Form und Größe! Miß ihre Winkel und stelle die Ergebnisse in folgender Tafel zusammen. (Wiederholung der Aufgabe vom 1. Bd., Seite 175, Nr. 34.)

	$\triangle ABC$	$\triangle A_1B_1C_1$	$\triangle A_2B_2C_2$	$\triangle A_3B_3C_3$
	$\alpha =$ $\beta =$ $\gamma =$	$\alpha_1 =$ $\beta_1 =$ $\gamma_1 =$	$\alpha_2 =$ $\beta_2 =$ $\gamma_2 =$	$\alpha_3 =$ $\beta_3 =$ $\gamma_3 =$
Summe				

b) Stecke im Schulhofe durch drei „Fluchtstäbe" ein Dreieck ab, miß die Winkel und bilde ihre Summe! (Vgl. 1. Bd., S. 177.)

c) Zeichne auf ein Blatt Papier ein beliebiges Dreieck, schneide es genau aus, reiße dann die drei Winkel ab und lege sie schließlich zur Summe nebeneinander! Was für ein Winkel entsteht dabei?

d) Zeichne ein Dreieck und bilde die Summe der drei Winkel, indem du sie aneinander anträgst!

Aus den Messungen und Übungen ergibt sich

Lehrsatz 1: **Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 2 R (180°).**

***3.** Lehrsatz 1 ist aus Messungen und Übungen erschlossen worden. Wir können ihn jetzt aber auch auf Grund anderer Kenntnisse beweisen[1]).

[1]) D. h. wir können uns von der Güte der Meßwerkzeuge, der Genauigkeit der Zeichnung und der zufälligen Gestalt der Figur unabhängig machen und rein verstandesmäßig die Behauptung begründen.

Zeichne dazu ein beliebiges Dreieck ABC und durch seine Ecke C zu der gegenüberliegenden Seite c die Parallele! Diese bildet mit den Dreiecksseiten die Winkel δ und ε. Erkläre nach der Zeichnung:

$$\text{Es ist } \delta = \alpha \text{ und } \varepsilon = \beta. \text{ Deshalb ist}$$
$$\delta + \gamma + \varepsilon = \alpha + \gamma + \beta.$$
$$\text{Da } \delta + \gamma + \varepsilon = 2R, \text{ ist}$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 2R!$$

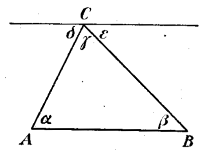


Abb. 18.

4. Begründe als Folgerungen des Lehrsatzes 1: a) Ein Dreieck kann höchstens einen rechten oder einen stumpfen Winkel enthalten. (Siehe S. 8!) b) Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so müssen sie auch im dritten übereinstimmen.

***5.** Zeichne ein Dreieck und an jeder Ecke einen Außenwinkel! Schneide die drei Außenwinkel ab und lege sie zur Summe zusammen! Wie groß ist die Summe? Begründe dieses anschaulich erworbene Ergebnis, indem du die Beziehungen der Außenwinkel zu den Innenwinkeln in drei Gleichungen faßt und dann addierst. Es ergibt sich der

Lehrsatz 2: **Die Summe der drei Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 4 R.**

***6.** *Lehrsatz 3:* **Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel.**

a) Der Winkel β ergänzt (Abb. 19) einerseits den Außenwinkel ε und andererseits die Summe der Innenwinkel α und γ zu 180°. Deshalb ist $\varepsilon = \alpha + \gamma$.

b) **Leite den Satz vom Außenwinkel ab, indem du durch B zu AC die Parallele ziehst und von dem Satz über die Winkel an Parallelen Gebrauch machst!**

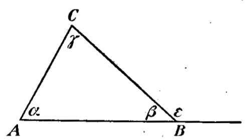


Abb. 19.

7. Begründe als Folgerung des Lehrsatzes 8, daß jeder Außenwinkel eines Dreiecks größer ist als jeder der ihm nicht anliegenden Innenwinkel!

8. Von den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks ist:

a) $\alpha = 37°$; $\beta = 78°$; b) $\alpha = 52°\,30'$; $\beta = 115°\,40'$;
c) $\alpha = 49°$; $\beta = 81°$; d) $\alpha = 27°$; $\beta = 72°$;
e) $\alpha = \frac{3}{4}R$; $\beta = \frac{2}{5}R$; f) $\alpha = 1\frac{1}{12}R$; $\beta = \frac{3}{8}R$.

Wie groß ist der dritte Winkel γ?

Geschichtliches: Die Einteilung des Vollwinkels in 360° stammt von den Babyloniern und ist sicherlich schon im 3. Jahrtausend v. d. Z. von ihnen bei astronomischen Messungen benutzt worden. Erst etwa 200 v. d. Z. ist sie von den Griechen übernommen worden und dann im Mittelalter auf dem Umweg über die Araber zu uns gekommen. Vermutlich sind die Babylonier durch den scheinbaren Kreislauf der Sonne, der (durch den Umlauf der Erde bedingt) in rund 360 Tagen (genauer $365\frac{1}{4}$ Tagen, vgl. dazu 1. Bd., Seite 123) erfolgt, auf die Zahl 360 geführt worden. Wahrscheinlich haben sie die Abrundung auch vorgenommen, weil die Zahl 360 besser in ihr Zahlensystem paßte. Dies beruhte nämlich nicht auf der Zahl 10 wie das unsrige, sondern auf der Zahl 60, die für sie den Vorteil der vielen Teiler hatte. Das hat die Babylonier dann auch dazu geführt, den Winkelgrad in 60 Minu-

Kopie aus: Holzmüller, K.; von der Seipen, W.: Raum- und Zahlenlehre für die Mittelstufe, Band II. FfM.: Salle 1939.

Anhang C

Transkripte

C.1 Arne

I: Wenn du sowas machst jetzt, so mit dem Programm jetzt im Prinzip diese Überprüfung. Wie wichtig ist dann für dich noch ein Beweis, dass das wirklich an jeder Stelle 90 Grad ist?

A: ..(lacht) Also ich würde auf den Beweis auch verzichten. Bin ich ganz ehrlich.

I: Ja, ich will ja ehrliche Antworten, klar.

A: Ehm, wenn ich das gesehen hab und wenn ich das dann hier gemessen hab. Wenn ich einfach hier son paar (..) [versucht an C zu ziehen, doch C ist als Schnittpunkt zweier Geraden fest]

I: Ne, jetzt den (.) kannst du jetzt nicht ziehen, weil der

A: (unterbricht) Ja, richtig, richtig. Wenn ich jetzt, ehm, das hier und man sieht ja irgendwo den rechten Winkel. Man kennt es ja, dass es ein rechter Winkel ist und man kriegt da ja auch einen Blick für.

I: Ja

A: Wenn man ein Dreieck zeichnet, zeichnet man automatisch ein rechtwinkliges oder ein gleichschenkliges, zumindest annähernd.

I: Ja

A: Und wenn ich das jetzt so sehe und das bewege, ehm, (..) wenn man das sieht, (..) man schätzt es ja meist schon als rechten Winkel ein. Da würde ich dann einfach auch (...), würde ich dann schon davon ausgehen, dass das dann auch überall der rechte Winkel ist.

I: Hhm

A: Und würd das dann auch, aufgrund dass es die Tatsache ist, dass es ja im Programm so funktioniert, dann auch annehmen, dass es richtig ist. Dann müsste ich den Beweis jetzt nicht mehr (.) machen.

I: Also würde der dir jetzt keinen Mehrwert bringen? Also man könnte es zwar formal machen, aber für dich würde (..), also

A: Ich habs gesehen und ich weiß das es so ist, fertig. Und der Beweis bringt mir auch nichts anderes. Da muss ich auch nur akzeptieren, dass es so ist und fertig.

C.2 Carla

I: Kann so eine dynamische Visualisierung einen Beweis ersetzen?

Ca: (5 Sek. Pause) Teilweise schon, ja.

I: Kannst du da auch ein Beispiel für nennen?

Ca: (..) Also ein konkretes Beispiel jetzt nicht. Ich weiß nur, bei den Hausaufgaben halt, stand da halt, begründe oder beweise, und so, und wir haben das halt schon in der, ehm, in der Zeichnung gehabt, und wussten gar nicht, wie wir das (.) zusätzlich begründen sollten, weil man das halt sehen kann und (.) deswegen finde ich schon, dass man das (.) dadurch beweisen konnte.

I: Wir hatten ja beispielsweise mal, ehm, Thaleskreis, also (...) jeder Winkel über dem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter. Also wenn der Punkt auf dem Kreisbogen liegt. Und dann haben wir ja auch die Situation gemacht, wir haben das gezeichnet, wir haben halt einen Kreis gezeichnet, mit dem Durchmesser, haben dann einen weiteren Punkt auf den Kreis gesetzt, das zu einem Dreieck verbunden, und haben dann gesehen: Aha, völlig egal, wo jetzt mein dritter Punkt C auf dem Kreis liegt, der Winkel ist immer 90 Grad groß. (..) Ist sowas für dich (.) dann ein vollwertiger Beweis? Wenn du es wirklich siehst, du ziehst an C und du misst und es bleibt wirklich immer (.) 90 Grad groß.

Ca: Ja.

I: Macht es dann Sinn, trotzdem formal noch so 'nen Beweis anzuschließen? Bringt das noch irgendwas zusätzlich?

Ca: Ja, vielleicht kurz und knapp, aber so, ganz kurz und knapp nur, aber ich find das eigentlich (.) nicht so. (..) Also wir haben Schwierigkeiten immer, das schriftlich dann noch zu beweisen. Weil wir das ja halt sehen und (.) dann nicht genau wissen, wir könnten jetzt aufschreiben, wie wir das gemacht haben, und wenn man halt den Punkt bewegt, dass es immer 90 Grad ist, aber (.) richtig beweisen können wir das dann nicht. Also finden wir schwer.

I: Hmhm. Aber würde es dir persönlich (.) überhaupt was bringen? Jetzt es zusätzlich noch einmal richtig zu beweisen?

Ca: Eher nicht, nein.

C.3 Charlotte

I: Kann die dynamische Visualisierung des Satz des Thales für dich einen Beweis ersetzen?
Ch: (...) Mmm (8 sec Pause). Also im ersten Moment würde ich „Ja“ sagen,
I: Ja.
Ch: weil man es eben (.) direkt vor sich hat,
I: Hmh. Ja.
Ch: Aber (..) wenn man sich das genauer überlegt, und, wie ich eben auch schon gesagt hatte, wenn man einfach irgendetwas hinzieht, dann kann das ja auch ungenau sein, dann müsste man, glaube ich, das nochmal speziell beweisen.
I: Hmh. Hättest du denn, wenn du es jetzt so siehst, auf dem Thaleskreis, es bleibt immer 90 Grad, noch Zweifel daran, dass es so ist?
Ch: (..) Mm. (.) Das ist schwierig zu sagen. Ehm, man ist da, glaube ich, auch so’n bisschen so, ja, wenn man’s sieht, dann wird es wohl schon so sein. Und, ehm, ja, vielleicht ist man da auch ein bisschen bequem und vertraut einfach auf das Programm und sagt sich dann: Ja, das stimmt schon, (..) aber ich (.) würde mal vermuten, wenn man (.) sich nochmal (.) das genauer hinterfragt, wär das schon besser.
I: Was würd das noch zusätzlich bringen?
Ch: Ja, dann, da hätte man ne (.) Gewissheit, eben, dass das (.) wirklich so ist. Also man, wie ich schon sagte, man hat diese (.) mathematischen Sätze vorgegeben, und bestimmte (.) Regeln und das ist so und das ist so, und, wenn man das dann damit nochmal beweisen kann, (.) dann denke ich mal, dass das dann auch 100-prozentig so ist.
I: Hmh. Also nur das Sehen würd dir jetzt nicht reichen?
Ch: Im ersten Moment schon, aber dann denke ich mal nicht, ne.

C.4 Cornelia

I: Wie siehst du das mit der Beweiskraft? Hat das für dich..diese Visualisierung eine Beweiskraft? Oder fehlt dir da noch was? Oder würdest du daran noch einen Beweis anschließen wollen?

C: Ja, also, ich hab ja schon die ganze Zeit eh so gesagt, dass mir das (.) nicht (.) richtig ehm (..). Klar, ich seh das jetzt, dass es so ist. Ich seh jetzt auch, dass es der Thales Kreis ist, hab ich beim ersten (.), ehm, da war, das war ja noch irgendwas anderes? Aber, ehm, also, das ist für mich kein Beweis. Also, wenn ich, wenn ich das sehe.

I: Hhmm?

C: Gut, dann ist es halt so, aber, aber warum das alles so ist, wird ja dadurch eigentlich (..) nicht ersichtlich, also.

I: Hhmm.

C: Wenn ich, wenn wir, wenn wir das nicht noch mal gesagt hätten, mit dem Thales Kreis, (.). Ich meine, klar, man kann das hier sehen. Aber, ehm, ich weiß nicht, ob das so (.), ob das für alle so(..), so schlüssig ist, dass das hier 90 Grad sind.

I: Hhmm.

C: Weiß ich nicht.

I: Also würde für dich der Beweis das, das Warum erklären? Habe ich das richtig verstanden?

C: Ähä (.) ja genau. Aber, nicht die Zeichnung, sondern eben der Beweis, der dann noch kommen würde. Ja genau, ja.

C.5 Diana

I: Kann diese dynamische Visualisierung für dich einen Beweis ersetzen?

D: Ja! Weil ich, äh, dadurch das ich das sehe, ähäm, also zum Beispiel in der Vorlesung ...

I: Ja.

D: ...wurde das nochmal viel deutlicher als zum Beispiel, wir hatten das ja auch in der Schule. Aber da war das halt so, dass der Lehrer das (.) mit Kreide an die Tafel gemalt hat und dann halt seinen (.) Zirkel da hatte und sein Geodreieck, und (.) da konnte man sich halt diese Verschiebung nicht so vorstellen. Also zum Beispiel: Satz des Thales ist das ja, wie du eben gesagt hast, äh, wenn man den jetzt auf diesem, auf diesem Kreis bewegt, dass der Winkel sich nicht verändert, halt nur die Seitenlängen sich verändern.

I: Hhmm Hhmm

D: Und das konnte man sich halt damals an der Tafel nicht vorstellen, da hat man, manchmal hat er es in die linke Ecke gezeichnet, den rechten Winkel, und dann war das halt schon immer schwieriger vorzustellen wenn man das (.) jetzt auf die andere Seite (.) ziehen sollte. Also ich find, da ist das Programm natürlich sehr sehr vorteilhaft, weil man sich das viel besser (..), weil man das dadurch viel einfacher versteht und auch sich besser vorstellen kann, wenn man halt diesen Punkt (.) sehen kann.

I: Ja ja. Ähm (.) Also im Prinzip wenn man das jetzt macht mit dem Programm, man guckt und lässt den Punkt da (.) den ganzen Kreis lang laufen, und sieht tatsächlich: ja, der Winkel bleibt immer 90 Grad, dann ist das im Prinzip

D: (unterbricht) Ein Beweis, dass der Satz des Thales anwendbar

I: Ja

D: ist.

I: Ja. Und jetzt haben wir das in der Vorlesung gemacht, und wir haben aber trotzdem noch son formalen Beweis angeschlossen. Bringt das dann noch was an zusätzlicher Information oder hat das noch irgend..

D: Ja also ich find, also es gibt bestimmt Leute, die, ähäm, den Satz des Thales, sich also, die das dann nicht vorstellen können, aber die natürlich dann noch (.) mehr Informationen dazu brauchen. Also bei den Meisten, die haben dann diesen Aha- Effekt dann gleich, wenn die das da so sehen

I: Hmh (bejahend)

D: aber halt dieses, eh, (..) manche brauchen halt nochmal (.) nen extra (.) Anstoß oder (.) diesen extra Beiweis, damit sie das nachvollziehen können. (...)

I: Weil sie hier damit noch nicht so, so zurecht kommen, oder?

D: Ja, und weil die einfach, ähä, das nicht umsetzen können, vielleicht? Also, ich weiß nicht, also, ob die das vielleicht, eh, nochmal als (.) Formel oder ich weiß nicht was brauchen, um das, also wirklich (.) später auch mal in einer Aufgabe anzuwenden. (...)

C.6 Elke

I: Kann so eine dynamische Visualisierung für dich den Beweis des Satzes ersetzen? (..) Dass der Satz des Thales gilt?

E: (...) Dieses Verschieben?

I: Ja, dieses Überprüfen an allen möglichen Fällen.

E: Doch, auf jeden Fall. Ja.

I: Und wenn du jetzt so ziehst, und guckst und misst und überprüfst, und es ist immer wirklich 90 Grad, hast du dann noch irgendwelche Zweifel, dass das 90 Grad sind?

E: Nein, nicht.

I: Jetzt haben wir natürlich in der Vorlesung dann trotzdem diesen formalen Beweis gemacht.

E: Ja.

I: Ehm, bringt das für dich noch was zusätzlich?

E: Der Beweis?

I: Ja. Hat das dann noch einen Mehrwert? Als vorher, du hast es ja jezt schon gesehen?

E: Nein. Also der Beweis, das ist für mich in der Hinsicht wichtig, dass ich, ehm, das halt so beweisstrukturmäßig sehen kann, sonst sehe ich es ja nur. Ich kann's ja sonst, wie gesagt, wieder nur optisch sagen: es ist so. Und durch diesen formalen Beweis, den wir da dann gemacht haben, kann ich sagen: Ja, so kann ich es aber wirklich schriftlich auch irgendwie beweisen. (...) Weil, ich kann ja nicht sagen, in der Klausur, ja das ist so, weil, wenn ich das so verschiebe, ist das halt so, ne. (..) Das ist so eigentlich so mein Problem einfach, immer wenn ich, ehm, ich seh das hier so, und das ist auch für mich logisch, aber ich kann es niemals wirklich so auf's Papier bringen, sagen, das ist deswegen so. Sondern nur, weil ich es halt sehe. [...] Ja, also, ich finde es einfach immer schwierig, das, was ich sehe und auch weiß, dass es so ist, auf's Papier zu bringen, faktisch gesehen. Diese Bewegung festzuhalten. Weil ich ja nicht zeigen kann, z.B. ja, wenn ich das bewege, ist das so, und, eh, das muss ich ja dann auch irgendwie beweisen und festhalten. Und für mich ist es dann einfach, einfacher, wenn ich sage: Ja, hier, schau mal, und so ist das, und deswegen ist das so, ja.

I: Wenn du jetzt diese Situation gezeichnet hättest, du hättest halt diesen Thaleskreis, und Winkel und würdest messen, und dann zeigen: Hier, guck mal, ich bewege jetzt C und der Winkel bleibt immer recht. Ehm, ich weiß nicht, was hattest du jetzt gerade für 'ne Formulierung? Dann könnte ich zeigen, schau mal, das ist so?

E: Ja. Das ist so, auch wenn ich, weil wenn ich das dann runter ziehen würde, würde er ja größer werden, wenn ich ihn hochziehe, würde er spitzer werden. Das könnte man ja alles so sehen, und (..) ja.

I: Und wenn du diese Möglichkeit hättest, es so darzustellen, dann

E: (unterbricht) wäre es einfacher für mich, das zu erklären, ja. Und den Fall zu begründen.

C.7 Greta

I: Kann diese dynamische Visualisierung den Beweis des Thalessatzes ersetzen?

G: Ich würde sagen, es ist anschaulich klar [durch die dynamische Visualisierung, G.W.], aber, ehm, das reicht, meistens reicht es ja nicht, in der Mathematik, dass etwas anschaulich klar ist. Ich denke, dass ist die erste Idee, die man hat, dass man erstmal guckt, ist es denn immer so, wenn ich jetzt hier irgendwas bewege? Ja, es ist immer so. Und dann müsste ich aber trotzdem jetzt weiterfragen: warum ist das immer so?

I: Ja. (...) Ehm,

G: (unterbricht) Also zumindest, es ging ja auch immer so, in den Geometriehausaufgaben war es nun ja auch immer so, es ist ja anschaulich klar, aber warum ist das so? Welcher mathematische Hintergrund hat das Ganze? Also da wurde man schon eher auch immer in die Richtung getrieben, dass man das so und so machen müsste.

I: Und, aber für dich persönlich, würde das dann noch etwas zusätzlich bringen, diesen Beweis hinterherzuschieben? Hättest du dann das Gefühl, du hättest es besser verstanden?

G: Eh, ich glaub, ich bin persönlich eher so'n Mensch, dass es mir, mir auf jeden Fall schon mal wichtig ist, dass es mir anschaulich klar ist, und wenn es mir anschaulich klar ist, dann bin ich eigentlich auch schon, eh, relativ (..) davon überzeugt. Also klar, um diese hundertprozentige Sicherheit zu haben, müsste man das dann nochmal thematisch machen, aber (..) ich bin oft, oft schon zufrieden, dass es, wenn es anschaulich klar ist, auch wenn es manchmal halt, eigentlich doch nicht ausreichend wäre.

I: Hmhm (zustimmend). (..) Aber mit diesen Vokabeln, die du gerade benutzt hast:

G: Ja.

I: getrieben, und so, heißt ja, dass man im Prinzip schon denkt: na ja, die erwarten da was, aber eigentlich (...). Es bringt dir persönlich jetzt keinen Mehrwert?

G: Wenn ich das jetzt mathematisch bewiesen habe, noch?

34 I: Ja.

35 G: Würd ich jetzt nicht sagen, ne.

C.8 Hannes

I: Kann die dynamische Visualisierung für dich einen Beweis ersetzen? Wenn du es siehst? Es bleibt immer 90 Grad?

Ha: Also für mich ist der Beweis immer noch (.) dann die Tatsache, dass ein (..) über den Mittelpunktswinkel geht.

I: Ja

Ha: Also für mich ist entscheidend, wenn der Mittelpunktswinkel, (.) der ist ja fest, der ist einfach fest, ein fester Wert, der bleibt immer 120 Grad oder der bleibt halt immer 180 Grad, wenn er genau auf dieser (.) Geraden von A nach B aufliegt, ehm, dann weiß ich, dass alle anderen Punkte auf dem Kreisbogen für mich 90 Grad haben.

I: Hhmm

Ha: Aber, darauf dann zu schließen, wenn ich nur vorher erst die Bögen sehe und weiß, da, an dem Punkt ist das, an dem Punkt ist ‚das, an dem Punkt ist das, das sind einfach dann zu viele Fakten. Also, für mich ist der Beweis dann viel wichtiger, dass wenn ich da 120 Grad habe, dann sind alle anderen so. Also dann brauche ich mir die anderen ja gar nicht mehr betrachten. Ich brauche ja nur, nur eine Ur, ich muss ja nur eine Ursprungssituation kontrollieren. Ist da 180 Grad? Ja , dann ist alles andere 90 Grad.

I: Jaha

Ha: .. und dieses ziehen, was er da vorher gemacht hat, war dann halt (.) son bisschen Neugierde wecken.

I: Ja

Ha: Also, das er dann halt die Gerade hatte, das Dreieck und dann gesagt hat: „Ok, ich ziehe jetzt so, das sind jetzt überall grob 90 Grad, und woran erinnert euch diese Form? Hhmm ja, an einen Kreis oder an einen Bogen vielmehr“. Und das war halt so zum Neugierde wecken. Aber der wirklich schlüssige Beweis kam dann für mich erst durch den (.) Mittelpunktswinkel.

C.9 Helena

I: Kann diese Visualisierung für dich einen Beweis ersetzen? (...) Oder hätte es für dich

H: (unterbricht) Ja es hilft mir auf jeden Fall, wenn ich das (.), also, vielleicht (..), wenn echt so'n Satz da steht. Eh, (.) ja immer ein rechter Winkel, dann, vielleicht denkt man dann, das kann doch gar nicht sein. Da gibt es bestimmt irgendwo 'nen Punkt, wo es anders ist.

I: Aha.

H: Und wenn man das dann (.) echt mit dem Computer oder hier mit dem Programm sieht, dann (.) ok, dann glaubt man das doch, dass sich dann (.) vielleicht irgendwo anders der Winkel verändert, eh kleiner oder größer wird, und dann oben immer dieser 90 Grad Winkel (.) entsteht. Also doch, das hilft einem dann natürlich schon, ehm (.). Also dann (.) werden die anderen Gedanken quasi ausgelöscht, dass es eh, (.) eh, vielleicht irgendwo eine Möglichkeit gibt, wo der nicht 90 Grad ist.

I: Ja.

H: Also wenn man da (.)

I: Ja?

H: dran denkt so, oder der aller, der allererste Gedanke, dass es vielleicht irgendwo einen Punkt gibt (lacht), wo es kein rechten Winkel gibt.

I: Ja.

H: Doch das hilft schon.

I: Also für dich wird der, der Glauben an diesen Satz dadurch

H: (unterbricht) Genau!

I: verstärkt.

H: Ja. Oder dann kann ich, kann ich also dann, kann ich mir den Satz auch besser einprägen, so. Oder der wird dann natürlich auch verständlicher, wenn da steht: eh, immer (.), ja eh nen rechten Winkel? (lacht)

I: Ja.

H: Also das kann ich dann (.) ja besser behalten, wenn ich das, wenn ich, eh, quasi, wenn meine Zweifel, ja ausgelöscht werden (lacht).

I: Hhmm.

H: Und ich das echt sehen kann.

I: Hhmm. Also das unterstützt für dich den Beweis?

H: Ja!

I: Das verleiht ihm

H: (unterbricht) Ja.

I: noch mehr

H: Glaubhaftigkeit, (lacht), ja.

I: Ehm, macht es für dich dann trotzdem Sinn, diesen formalen Beweis da noch anzuschließen? Wenn, wenn man jetzt beispielsweise es erst sieht

H: (lacht)

I: und dann (.) den formalen Beweis hinterher schiebt? Oder (..). Also bringt dir das dann noch irgendwas?

H: (..) Hmhm (.) ja (sehr leise), (lacht) (.) ja doch, eigentlich schon.

I: Was denn?

H: Vielleicht noch mehr Sicherheit? Ich weiß es nicht (lacht) oder, dass ich mich dann noch mehr mit auseinander (.) setze und befasse (...) Also, meinetwegen könnten wir den Beweis auch weglassen (lacht). Nein.

I: Also ja, nee, ich meine im Prinzip ist es doch, wenn man es sieht und wirklich ausprobieren kann,

H: Ja.

I: sagtest du ja gerade, dass dann doch die Zweifel eigentlich ausgeräumt sind. Oder?

H: Ja ähä, ich weiß jetzt auch nicht, (.) warum man den Beweis dann noch macht? (Lacht) (...) Ja, vielleicht, noch mal mathematischer an die Sache ran zu gehen, als wenn man das so einfach (..) zieht, also sich zurecht zieht, oder ich (.), weiß ich nicht (lacht).

I: Hhmm. Aber würde es dir persönlich noch irgendwas bringen, diesen formalen Beweis da anzuschließen?

H: Ich wüsste jetzt echt keinen Grund, so schnell (lacht) (..), also.

I: Hhmm (bejahend).

H: Ja, (.) höchstens, wie gesagt, noch mal (.) ja diesen mathemathischen Hindergrund (.) eh, ja, nach, also zu, eh, durch, nachzufragen, warum das jetzt genau so ist.

I: Ja.

H: Das würde mir vielleicht noch mal etwas bringen, aber (..) also mir würd es schon reichen, oder ich glaube das dann schon, wenn ich das so sehe, auf dem Bildschirm.

I: Ja, ja.

H: Aber wie gesagt, den mathematischen Hintergrund vielleicht noch mal ein bißchen zu hinterfragen.

I: Warum das so ist?

H: Ja.

I: (..) Erklärt sich das Warum auch durch das Sehen jetzt hier mit dem Programm?

H: (5 sec Pause) Ja irgendwie schon. (Lacht) Irgendwo schon. Weil, wenn man das zum Beispiel dann (.), man kann das ja alles so markieren, ähäm wie groß zum Beispiel der Winkel ist und der andere Winkel und dann, (.) wenn man das jetzt zieht, dann verändern sich ja auch die Winkel und, ja, dann kann man ja das dann auch schon (.) sehen.

C.10 Henriette

I: Kann diese dynamische Visualisierung für dich den Beweis des Thalessatzes ersetzen?

He: Man kann's ja, wenn mann jetzt, wenn jetzt bei P beispielsweise ein rechter Winkel liegen würde, dann (.) wenn man das verschieben würde, könnte man das ja (.) in sämtlichen Situationen sehen, dass es 90 Grad sind.

I: Ja.

He: Von daher, theoretisch würd nichts fehlen.

I: Hmhm. Und praktisch? (Lacht) Wenn du so theoretisch sagst?

He: Weiß ich nicht. Eigentlich soll man ja alles begründen. Deswegen denke ich mal, müsste man es schon [begründen, G.W.].

I: Ja, aber die Frage ist doch: bringt das noch was?

He: Nee! Eigentlich nicht. Eigentlich sieht man da ja, dass da ein 90° Winkel ist.

C.11 Jasmin

I: Ist das für dich gleichwertig mit einem Beweis (..) des Satzes?
Ja: (..) Wenn ich sehe, dass es immer so ist?
I: Ja.
Ja: Nein! (lacht) Das ist ja wie eben, also, das ist ja schön und gut, wenn ich so und so hinziehe und es ist so, aber (.) warum das so ist, habe ich ja trotzdem nicht gesagt.
I: Aha. Ehm, wir haben ja in der Vorlesung dann auch noch den Beweis angeschlossen, wir haben ja beides gemacht.
Ja: Ja.
I: Ehm. Ist für dich auch beides wichtig, oder hättest du gesagt: ‘‘Mir hätte auch der Beweis gereicht, ich hätte das gar nicht mehr (..) sehen müssen‘‘?
Ja: Doch, also ich finde es immer ganz wichtig, dass man das sieht. Irgendwie, weil man das sonst (..) ist das alles für mich immer alles nicht so (.) greifbar,
I: Hhmm
Ja: also, das (..) schon wichtig, dass man das dann auch wirklich sieht, dass es immer so ist. Ich meine,
I: Hmh
Ja: Man kann uns ja viel erzählen (lacht)
I: Also dann glaubst du dem Beweis nicht, oder was?
Ja: Doch ,definitiv, klar, aber es ist halt schon anschaulicher einfach. Wenn du es da, ehm, (..) ja da (.) mit dem Programm hast.
I: Also ist für dich beides wichtig?
Ja: Ja
I: Es spielt beides eine wichtige Rolle?
Ja: Ja

C.12 Joachim

I: Was für einen Wert hat es, wenn man es so visualisiert hat, den Beweis noch anzuschließen. Oder ist es (..) wirklich noch zwingend erforderlich, den Beweis dann anzuschließen?

J: Ja, natürlich. Wie gesagt,

I: Ja.

J: Hier bei Cinderella ist eine Ungenauigkeit drin. Einmal bei den Linien, durch die, durch die Generierung dieser, durch die Technik der Pixel usw. Es kann ja sein, dass die wirklich, in Wirklichkeit gar nicht aneinanderliegen.

I: Hmhm.

J: Wenn ich jetzt zum Beispiel, ich nehme jetzt mal nicht Cinderella, jetzt nicht Geometrie, sondern ich habe jetzt irgendein anderes Programm, was mir ne Funktion dargibt, eins durch x.

I: Ja.

J: So. Die schmiegt sich asymptotisch an die x-Achse an. Irgendwann brauche ich ja, Bender sein Funktionenmikroskop.

I: Ja, ok.

J: Irgendwann liegen die (.) auf dem Bildschirm (.) aufeinander, weil, weil einfach die Auflösung nicht mehr da ist. So, aber wenn ich's mir in der Realität angucke, liegen die nicht aufeinander.

I: Hmhm (zustimmend).

J: Genau wie ich jetzt eben erzählte, dass, man kann vielleicht zwei Winkel, die nie gleich sind, so hinziehen, dass sie für Cinderella so nah beieinander liegen, dass er runden muss. (..) Also kann ich dem eigentlich so erst mal nicht trauen.

I: Hmhm (zustimmend).

J: Und das versuche ich auch eigentlich in den Übungen immer zu sagen, wenn die irgendwas nachmessen, ist schon mal ein schlechter Ansatz. Und eigentlich, in der Geometrie brauche ich ja auch groß keine Maße, außer bei Verhältnisse: das ist doppelt so lang, wie das andere.

I: Ja.

J: Und ich finde schon wichtig, dass man (.) eh, eigentlich ohne

Maßangaben arbeitet. Und dann brauche ich halt 'nen Beweis.

I: Aber man könnte ja durch das Messen einfach auch so auf (.) Ideensuche gehen.

J: Ja, ja. Auch, auch dieser Zugmodus, erst mal gucken, eh, fällt mir irgendwas auf, bleiben irgendwelche Punkte gleich, eh, verdoppelt sich irgendwo immer was, oder sonst irgendwas. Also das finde ich schon sinnvoll. Dass man da erst mal auf 'ne Idee kommt, und sich dann natürlich nochmal das (.) durch 'nen Beweis stützt.

C.13 Juliane

I: Wenn du jetzt siehst, dass alle Dreiecke in einem Kreis rechtwinklig sind. Ist das dann für dich ok oder fehlt dir da noch was? Würdest du da jetzt noch einen Beweis anschließen wollen?.. Oder sagst du nee, ich hab ja jetzt hier gesehen, dass das so ist.

Ju: Also man hat ja auch die schöne Funktion, dass man ehm die Winkelgrößen messen kann,

I: Hhmm.

Ju: und wenn man die einstellen würde, und dann wirklich jeden Punkt (.) so einzeln abgehen würde, vom Kreis, so ganz langsam Schritt nach Schritt, würde man ja sehen, dass sich der Winkel nicht ändert.

I: Hhmm.

Ju: Und dann würd mir das reichen.

I: Hhmm.

Ju: Aber dafür, finde ich, müsste halt dann die, (..) die Funkti [bricht ab], müsste halt die Winkelgröße angegeben sein, dass man auch sieht, dass die sich nicht ändert.

I: Hhmm. Aber das kann man ja (.) ziemlich einfach machen, ne?

Ju: Ja.

I: Jetzt haben wir ja in der Vorlesung trotzdem den Satz des Thales noch mal bewiesen.

Ju: Hhhm (bejahend).

I: Was macht das für nen Sinn, dass dann noch mal extra zu beweisen, obwohl es doch eigentlich schon klar ist, dass es so ist? Oder macht das überhaupt nen Sinn?

Ju: (Lacht) Also, also ich stehe ja mit Beweisen generell auf Kriegsfuß (lacht). Also ich finde das anschaulich, alles konstruieren, immer sehr schön, und beim Beweisen tue ich mich selber auch immer sehr schwer. Wo ich mir dann denke, warum machen wir das? Ich sehe es hier doch, und wir sehen es alle (..) und dann wissen es eigentlich auch alle.

I: Hhmm.

Ju: Aber für mich. Beweise gehören klar (..), gehören dazu, aber (.)

ich könnte auch gut ohne leben (lacht).

I: Hhmm ok, und warum sagst du, sie gehören trotzdem dazu?

Ju (...) (Lachend) Es ist so! Das hat Herr Bender drei Semester lang gepredigt (beide lachen). Ich hoffe, wenn er das liest: „Schöne Grüße, (..), war sehr schön!“ (beide lachen)

I: Das ist ein guter Satz.

Ju: (lacht) Und es gibt immer die meisten Punkte in der Klausur! (lacht)

C.14 Kira

I: Kann diese Visualisierung für dich den Beweis des Satzes ersetzen?

K: (...) Also, dass ich, wenn ich jetzt in diesem Beispiel C bewegen würde, außerhalb oder innerhalb des Kreises,

I: Ja.

K: dass ich dann quasi der Meinung bin, ich müsste es dann nicht mehr beweisen?

I: Ja.

K: Nee! Mm (Verneinend). Also ich bin schon der Meinung, dass man beweisen sollte, warum da ein 90 Grad Winkel entsteht und nicht nur sagen braucht, ehm, wenn C auf dem Kreisbogen liegt, ist es 90 Grad und außerhalb ist er kleiner, der Winkel in C, oder innerhalb größer. Würde für mich nicht reichen, nein.

I: Was, was hättest du da noch zusätzlich für Informationen durch den Beweis? (..) Oder warum würdest du Wert auf den Beweis legen?

K: Ich glaube, um mir erstens bewusst zu machen, dass es eben immer nur dann so ist, wenn der, ehm, wenn die Sehne auch der Durchmesser des Kreises ist. Also ich finde, das würde ich jetzt nicht unbedingt so, oder ich weiß nicht, oder ist das Voraussetzung, wenn man die Konstruktion hat?

I: Wir können das ruhig so konstruieren, dass wir den Durchmesser, (..) also die Sehne (.) als Durchmesser des Kreises nehmen.

K: Hhmm.

I: Das können wir ruhig sagen, das konstruieren wir so, das wissen wir, dass es so ist.

K: (..) Also ich glaube, ich würde schon beweisen wollen, warum es ausgerechnet dann 90 Grad ist. Warum das nicht so ist, dass der, ehm, dass der 60 Grad ist, oder ehm nur 50 Grad, und dann größer oder kleiner innerhalb und außerhalb des Kreises.

I: Hmh. Also die Frage nach dem „Warum“ wird für dich durch das Sehen nicht beantwortet?

K: Nee, nicht unbedingt. Also dann, dann sehe ich zwar, dass es ne Tatsache ist, aber warum diese Tatsache (..) auch gilt, also wäre für mich nicht unbedingt beantwortet.

I: Ok. (...) Aber hättest du denn, wenn du es jetzt siehst, ohne dass es bewiesen ist, na gut, du wüsstest jetzt nicht, warum es so ist. Aber hättest du, wenn du es siehst, ohne Beweis, noch Zweifel, dass es so ist?

K: Unterbricht. Nee, ne, das nicht, aber (lacht), ich glaub, ich würde trotzdem wissen wollen, warum. Nee, Zweifel hätte ich keine, aber, ehm ja.

C.15 Lara

I: Kann diese dynamische Visualisierung für dich den Beweis ersetzen? Oder ist es damit noch zweifelhaft, dass es so ist?

La: (5 Sek. Pause) Hmhm. Nee, wenn ich das ehm so sehe, und weiß, dass es richtig konstruiert ist,

I: Hmhm.

La; Dann (.) bin ich mir auch sicher, dass es so ist. Wirklich.

I: Würdest du dann (.) für dich noch (.) so anschließend (.) diesen, diesen Beweis vom Satz des Thales (.) einfordern? Würd' dir das noch irgendwas an Mehrwert bringen? (..) Oder ist es eigentlich auch ohne (.) jetzt schon völlig klar? Durch, dadurch, dass man halt da alle Fälle (..) betrachten kann?

La: Ja, wenn ich den, ehm, Beweis nicht kenne, (5 Sek. Pause) dann wüsste ich ja nicht genau, wie ich es konstruieren müsste (...).

I: Aber ich könnte doch einfach 'ne Strecke (.) konstruieren, und dann 'nen Kreis, wo die Strecke Durchmesser ist, und 'nen Punkt auf den Kreis setzen. Das ist doch 'ne echte Konstruktion. (...) Solange ich garantiere, dass dieser, die Strecke wirklich der Durchmesser von dem Kreis ist.

La: Doch, aber ich glaube, das würd' mich schon interessieren, warum, warum es dann so ist.

I: Also das wird durch die Visualisierung nicht klar?

La: (...) Nee. (...)

I: Aber zweifelst

La: (unterbricht) Also, dass es so ist,

I: Ja?

La: das würde ich dann (...) nicht unbedingt anzweifeln, weil man ja alle Fälle quasi (..) durch (.) spielen kann.

I: Ja.

La: Aber der Beweis gehört schon trotzdem noch (..) dazu, um es (..). Ja, man kann ja trotzdem nicht (.) jeden Fall wirklich durchspielen, so, den es gibt. Man kann sich nur ganz, ganz viele Fälle aussuchen, aber das ist ja immer noch kein Beweis dafür, dann.

I: Also im Prinzip, dass es so ist, wäre für dich (.) aber nicht (.) da, wo du Zweifel hättest?

La: Nee, also, für mich ist das schon so, wenn ich bei ganz, ganz, ganz vielen Fällen festgestellt habe, dass es so ist, und (.) ich kein Gegenbeispiel gefunden habe, dann (.) bin ich mir schon ziemlich sicher, dass es so ist, wirklich auch. Aber, ehm, ein Beweis sichert das Ganze natürlich erst ab.

I: Hmhm. Und du sagtest gerade auch, warum das so ist. (...) Kann der Beweis sagen, oder habe ich das falsch verstanden?

La: Ehm, ja, genau. Der Beweis kann mir erklären, warum dass dann so funktioniert, wie es da funktioniert.

I: Aha. (6 Sek. Pause) Was (.) überzeugt dich denn jetzt mehr, wenn du jetzt. Man kann ja den Satz des Thales (.) einfach statisch beweisen. An einem Beispiel kann ich 'nen Beweis führen und sagen: Zack, und jetzt habe ich bewiesen, dass das so ist. Das ist ja eine Möglichkeit. Und die andere Möglichkeit ist wirlich (...) hier alle möglichen oder viele mögliche Fälle zu betrachten und zu sehen, dass es so ist. (..) Was überzeugt denn mehr, letztendlich?

La: Also, als Mathematikerin würd' mich der Beweis natürlich, eh, mehr überzeugen, aber so (..) allgemein überzeugt es mich mehr, wenn ich sehe, dass es so ist. Weil es mir dann mehr vergegen-, vergegenwärtigt, weil, der Beweis, das sind dann ja Zahlen und so, und da rechnet man 'rum und (.) der ist nicht so anschaulich. Und (..), ja, natürlich weiß ich, wenn ich das beweise, dass es mir das deutlicher machen sollte, aber, ehm (.) ja eigentlich ist es, ist das Anschauliche (.) doch wichtiger, dann (lacht).

C.16 Leo

I: Kann diese Visualisierung für dich den Beweis des Satzes ersetzen?
Le: Ehm. Nein. Also ich brauche doch den Beweis. Man, man könnte das ja auch genauso auf dem Papier
I: Ja
Le: beweisen.
I: Ja.
Le: Dass das wirklich da oben dann immer 90 Grad sind.
I: Hmh (bejahend).
Le: Eh, Cinderella bestätigt das nur, dass es dann wirklich so ist, wenn wir es dann halt bewegen, dass es dann halt immer noch diese 90 Grad hat.
I: Ja
Le: Also sonst, ähäm, ein Beweis ist das für mich nicht.
I: Hhmm
Le: Für mich bestätigt das nur in diesem Fall.
I: Ja. (..) Ehm, wenn du jetzt in der Situation wärest, dass du den Thales Satz in irgendeiner Form (...) vorstellen solltest, also vor Schülern oder so, ihr macht den Satz des Thales. Wie würdest du das denn machen? Würdest du (.) dann wirklich nur den formalen Beweis machen? Oder würdest du das mit dem Programm machen? Oder würdest du beides machen?
Le: Also ich würde schon, eh, eh, beides machen.
I: Ja?
Le: Also, man kann ja vorher sagen, sozusagen die Grundlagen erarbeiten. Dass das dann auch so ist, mit den 90 Grad.
I: Hhmm.
Le: Und dann, um das noch mal zu festigen, könnte man das Programm halt dafür einsetzen, zu zeigen, dass das halt so ist.
I: Hhmm
Le: Wenn man dann eh, einen Punkt auf diesem (.) Kreis dann bewegt.
I: Hhmm. Wenn du jetzt nur die Visualisierung machst, ohne den formalen Beweis, hättest du dann denn noch Zweifel an dem Sachverhalt, dass es so ist?

Le: (6 sec) Ähäm na gut, man sieht das ja hier, dass das halt so ist. Ich meine, was soll, ich glaube nicht, dass dann, dass man dann zweifeln würde, (..) dass das halt nicht so ist.
I: Hhmm
Le: Man sieht ja, da ändert sich nichts.
I: Hhmm
Le: Und bleibt so (..), aber (.) damit (.) ist halt wie gesagt, nicht erklärt, noch lang nicht erklärt, (..) warum das halt so ist.

C.17 Lutz

I: Kann diese dynamische Visualisierung einen Beweis ersetzen?

L: (Lacht, anscheinend ironisch gemeint) (...) Ehm.

I: (redet dazwischen) Ne blöde Frage, ne?

L: Da gibt es ja auch ganz interessante (.) Sachen in der Mathematik, die anscheinend ja sehr viel(..) berechnen, und es dann irgendwann meinen, zu glauben, aber (.) für mich (.) nicht, also in der Geometrie gibt es ja auch ganz einfache Methoden, Sachen zu beweisen.

I: Beispiel?

L: (Geste zum Bildschirm) Was wir gerade gemacht haben. Das war ja nicht(.) so schwer.(lacht)

I: Naja.(lacht)

L: Ich meine, ich kann das ja hier auf dem Kreis hin und her ziehen und kann dann auch, wenn ich wirklich viel Zeit habe, jeden einzelnen Pixel abfahren, dann kann ich ja auch schon sagen, ja, auf dem Computer, in dieser Situation, ist das gerade auch wahr

I: (fällt ins Wort) Ja, aber wenn ich...

L: (unterbricht) Aber es gibt ja nur endlich viele Positionen, wie ich C hinschieben kann.

I: Wenn ich, weiß gar nicht ob es so was gibt? Nen Computer nehmen würde, der eine höhere Anzahl an Pixeln hat, wäre es nicht mehr wahr dann müsste ich´s noch mal neu...

L: (L fällt ins Wort) Auf dem Rechner (.) wenn ich nicht weiß, also wie die Auflösung von Cinderella insgesamt ist, aber (...) man hat ja auch nicht beliebig viele Punkte, aber (..), es gibt ja nur endlich viele Punkte, die man hier berechnen kann, und

I: Ja

L: Ehm, da wir da aber mehr als endliche viele Positionen für C haben, auf unserem Kreis,

I: Ja

L: und generell auch, um überhaupt A und B zu wählen, und dadurch den, die Größe des rechtwinkligen Dreiecks, das kann man ja niemals mit nem Computerprogramm abdecken.

I: Das ist auch ein interessanter Aspekt, ja, hab ich mir noch gar nicht so klar gemacht. (...)
L: Aber, für mich, nein!

C.18 Marietta

I: Kann diese dynamische Visualisierung für dich den Beweis ersetzen?

Ma: (5 sec. Pause) Ehm, das es überall so ist, dass, dass der Winkel 90 Grad ist?

I: Ja, genau.

Ma: Ja, würde ich eigentlich schon machen.

I: Hmhm (zustimmend).

Ma: Also ich beweise ja damit, dass es überall, überall auf dem Kreisbogen, dass der 90° ist.

I: Hmhm (zustimmend). Wir haben ja dann in der Vorlesung (.) trotzdem noch so 'nen formalen Beweis gemacht, ich weiß jetzt gar nicht mehr, wie, ist ja auch jetzt egal. Hat das für dich dann noch 'nen (.) 'nen Mehrwert, diesen formalen Beweis anzuschließen? Oder (.) sagst du: Ja, kann man machen, muss man aber nicht?

Ma: Also für mich hat eigentlich, ehm, ehm, dieser Beweis mehr Wert, weil das ist ja das, was ich mir letztendlich, (.) was ich mir so merke. Was ich mir besser einprägen kann, wenn ich mir das (.) so vorstelle, so'n (..) schriftlicher Beweis, irgendwie

I: Hmhm?

Ma: den mache ich eigentlich nur dann, wenn er gefordert ist, aber es ist jetzt nicht das, was jetzt irgendwo in meinem Kopf jetzt zurückbleibt, wenn ich in zwei Jahren noch an die Geometrie oder an die Vorlesung denke.

I: Hmhm (zustimmend).

Ma: Sondern es ist einfach das: (..) ja, ich hab' das gesehen, ich hab', ich hab' mir das gemerkt, das konnte ich so auch für mich auf diese Art und Weise beweisen, dass es so ist.

I: Hmhm. Also, (...) wie ist jetzt das Wort? Es bleibt länger hängen?

Ma: Ja.

I: Ja. Würdest du denn dann, ehm, (...) sagen, ja, (.) es war (..) trotzdem okay, beides zu machen, oder hätte das erste, hier dieses hier, eigentlich auch ausgereicht?

Ma: Also, ehm, (..), also mir hätte das jetzt ausgereicht, hier diesen Beweis (zeigt auf den Bildschirm) zu machen, aber ich finde auch nicht, dass es jetzt schadet, wenn man mal so, sich so an formale Beweise einfach mal herantraut, also.

I: Okay, aber wenn man es jetzt nur auf dem formalen Weg gemacht hätte, ohne (..) die Visualisierung, wärst du dann denn auch zufrieden gewesen?

Ma: Ich denke mal, dass ich es vielleicht zu Hause einfach noch mal nachgezeichnet hätte. Wenn ich dies Programm jetzt nicht hätte, dann einfach mit, mit 'nem Zirkel, und hätte dass mal nachgemessen.

I: Hmhm.

Ma: Natürlich, wenn wir jetzt einen formalen Beweis führen, dann glaube ich schon, dass das so ist. Wenn ich den nachvollziehen kann, klar, dann ist das 'ne klare Sache für mich dann.

I: Aber dies ist dann halt einfach einprägsamer, dann?

Ma. Ja.

C.19 Melanie

I: Also kann diese dynamische Visualisierung einen Beweis ersetzen? Brauch ich noch mehr? Warum brauch ich noch mehr? Warum brauch ich nicht noch mehr? Also wie siehst du das?

M: ... Ehm, also ich glaube, (...) also ich denke, dass es schon eine Art Beweis ist.

I: Hhmm

M: Äh, (..) ja durch diese dymnamische Verschiebung, also es wird mir schon klarer, dass der (.) rechte Winkel dann immer (.) gleich bleibt, über dem Durchmesser. Ähäm und ich denke, ähm wenn man es anders beweisen (.) wollte, müsste man ja, zum Beispiel mit Stift und Papier,

I: Hhmm

M: dann müsste man ja, äh ganz viele Dreiecke zeichnen,

I: Ja?

M: Ähm die, (.) ähäm über diesen Kreisbogen, äh an verschiedenen Stellen liegen.

I: Ja.

M: Also die Punkte im, (.) also ich meine jetzt den Punkt, wo der rechte Winkel ist, so. (lacht)

I: Ja ja, hhmm.

M: Ja und ehm, dann würde man sich ja viel Mühe machen und äh (..] hätte viele Dreiecke gezeichnet und es wäre dann eben immer dasselbe rausgekommen, dass der rechte Winkel (..) trotzdem immer 90 Grad ist. Und mit der, ehm, (..) mit derSoftware

I: Ja?

M: kann ich das ja einfach, indem ich das bewege, so zeigen,

I: Ja

M: dass der Winkel immer gleich bleibt und ich finde das ist erstmal (.) Zeitersparnis und ehm, (.) ah, ja auch, auch einleuchtend, also, es ist ja so, also.

I: Hhm... Wenn du jetzt auf dem Papier zeichnen würdest, wieviele Dreiecke (..) meinst du, müsstest du zeichnen, damit es (...) klar ist?

M: (...) Hmmmm, mindestens drei? (lacht)

I: Ok (...) und ehm (...) hier (...) bei dem Programm wäre das dann einfacher?

M: (..) Ja also, ehm, wenn man sich (.) schon länger mit dem Programm auskennt, das schnell zeichnen kann,

I: Ja.

M: (...) denke ich, ist das einfacher.

I: Ja. Und ehm bräuchtest du dann noch einen zusätzlichen Beweis, oder wäre das dann für dich so ok?

M: (..) Klar, man kann ja noch den klassischen Beweis machen (..), eh, wie in der Schule,

I: Ja.

M: wie man den da gelernt hat.

I: Ja

M: (...) Den könnte man ja, also, also man sollte sowieso die klassischen Beweise nicht ausser Acht lassen, oder? In der Schule sollte ja jeder ihn gehört haben, auch.

I: Ja. (..) Aber wäre es noch nötig? Würde das noch zusätzlich was bringen, oder?

M: Es bringt ja eigentlich die gleiche Erkenntnis.

I: Hhmm

M: Also man könnte (...) ehm (...) also klar, man könnte es noch zusätzlich machen, aber ich denke, Cinderella eh veranschaulicht das schon ganz gut und (...) ehm, es müsste nicht gemacht werden, weil es wird ja dadurch auch gezeigt.

I: hhmm ok.

C.20 Natalie

I: Das ist ja auch so ’ne dynamische Visualisierung (...) ehm, ist das dann jetzt ausreichend, um zu sagen (.. hier, guck’s dir an, ich zeig es dir? Wir haben die Situation, und völlig egal, woran oder (..) wohin ich C lege, das ist jetzt immer ein rechter Winkel. Ist das für’s Verständnis (...) gut?

N: Ähä. Gut ist es bestimmt, aber vielleicht auch nicht ausreichend.

I: Hhmm.

N: Ähäm es ist ja gut, dass ich erstmal das sehe, und vieles, was man sieht, dann nimmt man das erstmal an.

I: Hhmm.

N: Aber ja (..) vollkommend ausreichend (..) würde ich das jetzt auch nicht so sehen. Also da würde ich (.), da würd’ man schon (.)

I: Was würd dir fehlen?

N: (...) Ja (...), ’ne Begründung, warum das so ist.

I: Hhmm.

N: Würd’ mir fehlen. Ja, mir würd’ auch der Beweis fehlen (..), weil, man will ja auch irgendwie beweisen (...), man will ja nicht nur alles glauben, was man sieht.

I: Hhmm.

N: Aber ich glaube, dass es grundlegend erstmal gut ist, wenn man es dann sieht, und dann kann man an den Schritt Beweis gehen.

C.21 Rebekka

I: Kann so eine Visualisierung für dich einen Beweis ersetzen? Also dass das jetzt so gilt, der Satz des Thales?

R: Ja. Weil, wenn ich hier dran ziehe, dann sehe ich ja, dass das immer so bleibt. Das wär ja bei ner richtigen Zeichnung nicht.

I: Was ist jetzt ne richtige Zeichnung?

R: Ja, wenn ich es auf Papier so zeichne , dann könnte ich ja gar nicht sehen, wie das (.), also klar, ich könnte mehrere Zeichnungen machen, aber so ist das ja viel bequemer und ich kann es wirklich (..) sonst wo hinziehen und sehe das es wirklich (.) immer so bleibt.

I: Ja, also du siehst das es wirklich immer so bleibt, das heißt, dass ist im Prinzip auch (.) ein vollwertiger Beweis, dann?

R: Für mich schon, ja.

I: Hhhmm. Ehm, wenn man dann noch so einen formalen Beweis trotzdem anschließt, was bringt, bringt das dann noch was(..) an zusätzlichen (.) Dingen oder hat das noch nen Sinn?

R: Mmm (...)

I: Oder könnte man sich das auch sparen, dann?

R: (...) Ja man hat ja (.) jetzt nicht immer die, eh, also das Programm da, dass man das vielleicht auch (.) anderen Leuten (..) so klar machen kann, aber für mich persönlich hab ich es ja gesehen.

I: Also im Prinzip ehm, wenn man die Möglichkeit nicht hat es zu zeigen, wäre das ein anderer Weg?

R: Ja

I: Aber wenn man die Möglichkeit hat es zu zeigen, ist es im Prinzip (...) nicht mehr nötig? Nicht mehr erforderlich?

R: (..) Mmmm. Es ist vielleicht interessant aber, (.) für mich ist es schon bewiesen.

I: Aha (..) ok.

C.22 Samuel

I: Kann für dich diese Visualisierung den Beweis des Thalessatzes ersetzen?

S: Nen, Beweis, nee! Also das ist ja nur ne, eh, ne Skizze und (.) rein theoretisch könnte es passieren, dass da irgendwo nen Punkt sein kann, weil man ja nicht genau ziehen kann. Und dann könnte es sein, dass irgendwo unterhalb der Geraden, dann irgendwo ein Punkt ist, auf dem Kreis, der dann nicht unbedingt 90° ist. D.h., das ist nur 'ne Skizze oder 'ne Zeichnung, mit der kann man es veranschaulichen, aber niemals beweisen. Ein Beweis ist für mich immer noch wesentlich genauer, weil man dann halt mit einer gewissen Formel ran geht, und mit gewissen mathematischen Gesetzen, und solange da nicht bewiesen wird, dass die falsch sind, diese Gesetze, kann man da auf jeden Fall sicher sagen, dass ist so. Wenn man, wenn AB durch den Mittelpunkt geht, ist der Winkel (.) oberhalb und unterhalb genau 90 Grad. Punkt.

I: Und wenn du es jetzt aber zeichnest, mit dem Programm, und du beguckst es, beobachtest, ziehst, misst, hättest du denn dann noch Zweifel, würdest du wirklich glauben, da könnte ja ein Punkt sein, wo es

S: (unterbricht) Wahrscheinlich nicht. Aber (..) das wäre halt nur 'ne Vermutung. Die müsste ich erst noch belegen.

C.23 Silke

I: Kann diese dynamische Visualisierung mit Cinderella den Beweis des Satzes ersetzen?

S: (.) Ersetzen nicht, aber vielleicht noch mal verdeutlichen, für einige, die es sich nicht bildhaft vorstellen können, ist so ne Konstruktion (.) nochmal vor sich zu sehen, auf jeden Fall nochmal besser. Um zu sehen, dass der Winkel immer 90 Grad bleibt.

I: Ja?

S: Also zur Verdeutlichung auf jeden Fall. Aber den Beweis richtig ersetzen (..) würde ich sagen, nicht.

I: Was, was ist der Vorteil, wenn man es jetzt mit Cinderella zeigen kann?

S: Das man auch sieht, dass der Satz des Thales stimmt. Dass, dass man noch mal einen Beweis hat. (..) Dass das stimmt.

I: Also meinst du, wenn man es sieht, glaubt man es mehr,

S: (unterbricht) Als wenn man es nur hört, ja.

I: Als wenn man nur den Satz hört.

S: Hhmm (bejahend). Man hat ja gleich noch mal den Beweis (.) vor Augen, dass der Satz des Thales stimmt, und wenn man es dann gleich (.) hat, in Cinderellea, dann (.).

I: Aber, wenn, wenn du jetzt sagst, man hat dadurch den Beweis noch mal vor Augen,

S: Hmh (bejahend).

I: dann ist es doch ein Beweis, wenn ich es hier zeige?

S: Ja. Ja.

I: Oder nicht?

S: Stimmt.

I: Und würdest du dann trotzdem noch (.) Wert legen auf diesen formalen Beweis? (5 sec Pause) Oder was, würde der dir noch irgendwas zusätzlich bringen?

S: Es nochmal aufgeschrieben zu haben (.) auch, auf jeden Fall. Wie man, wenn ich jetzt nur die Zeichnung habe und gar nicht weiß, wie ich an dieses Ergebnis komme, bringt mich ja auch nicht weiter. Ich muss ja auch wissen, wie (..) ich (.) dahin komme.

I: Hhmm.

S: Also an sich bringt dieses Aufgeschriebene auch was. Wie, wie man zum, (.) darauf kommt, dass der Winkel immer 90 Grad ist.

I: Hhmm

S: Wenn man nur das Endprodukt vor Augen hat, dann (...) würd ich sagen, also mir würde es nicht so viel bringen, wenn ich jetzt nur die Zeichnung hab. Ich müsste auch wissen, wie ich dahin komme.

I: Ja. (..) Aber du würdest es schon nicht mehr anzweifeln, wenn du es sehen würdest?

S: Genau!

I: Oder doch noch?

S: Nee, dann nicht mehr! Weil dann hab ich ja wirklich, dass was ich gerade gelesen hab, nochmal bildlich vor Augen, und sehe, dass das stimmt.

I: Hhhmm.

S: Aber alleine das Bild (.) würde für mich persönlich nicht (.) reichen. Weil, man kann es ja auch einfach nur gezeichnet haben. Man weiß ja gar nicht, ob es wirklich so (.) stimmt.

I: Ja ja. Aber alleine der Beweis würde auch nicht reichen, ne?

S: Nee, also nein. Für mich auch nicht. Wenn dann beides, zusammen.

I: Aha. Ok

C.24 Sophie

I: Kann diese dynamische Visualisierung mit Cinderella einen Beweis ersetzen? (...) Für dich, jetzt?

So: (...) Hmhm. (..) Was auf jeden Fall, (..) ich denke mal, schon, aber vielleicht teilweise mit 'ner Erklärung dabei, dass man das Bild plus 'ne Erklärung hat. Oder plus 'nen kleinen Beweis noch. Ich glaube, das ist eher, dass man es erst einmal sieht, wie ist es,

I: Ja?

So: aber wenn man einen rein formalen Beweis nochmal machen möchte, dann müsste man das, glaube ich, aufschreiben.

I: Also, habe ich das jetzt richtig verstanden, dass du meinst

So: (unterbricht) Zum Teil. Zum Teil ist es der Beweis. (..) Mit da so drin, würde ich sagen. (...) Weil, hier hatten wir ja keine 90 Grad, und darum hat es nicht geklappt [dass der Punkt auf dem Kreisbogen ist, G.W.]. Und hier haben wir jetzt, habe ich den ja festgemacht, den 90° Winkel, und da hat es funktioniert.

I: Ja. Ja, und das ist dann okay? Soweit? Oder fehlt da jetzt dann immer noch was?

So: (...) Für 'nen formalen Beweis fehlt da bestimmt noch was.

I: (lacht) Was wäre jetzt formaler Beweis, und was wäre dies hier?

So: Das ist eher so die (...) Zeichnung, dies ist halt das Praktische eher dazu, wie es funktioniert, ehm, man kann's ausprobieren, man sieht, wie es ist, und (..) bei einem Beweis, da müsste man halt genau sagen, warum ist da jetzt ein 90° Winkel, [..], das warum eher, das dann erklären.

I: Und wäre dieses Warum, ist das jetzt so für dich jetzt in der Situation noch wichtig gewesen, oder ist es für dich so okay: du hast es ausprobiert mit nicht 90 Grad, da funktioniert es nicht, und du hast es ausprobiert mit 90 Grad, da funktioniert es.

So: Also ich seh das jetzt schon ein, dass das hier ein 90° Winkel sein muss, damit der Punkt da drauf [auf dem Kreisbogen, G.W.] liegt. Mir würd's persönlich jetzt reichen, aber ich weiß ganz genau, dass das den Dozenten in den Vorlesungen nicht reichen würde (lacht). Und so etwas merkt man sich dann eher, wenn man es halt selbst ausprobiert hat, und dadurch, eh, ja, habe ich jetzt festgestellt, dass es dann halt nur klappt, mit 90° und dann sehe ich das auch eher ein. Dann verstehe ich, ist es verständlicher. Würd ich jetzt sagen.

C.25 Thilo

I: Kann diese Visualisierung für dich den Beweis des Satzes ersetzen?

T: (9 Sek. Pause) Für mich persönlich vielleicht schon. Aber, es muss ja wieder begründet sein, es reicht ja wieder nicht aus, wenn ich nur sage, dass ich, dass ich es sehe oder nachvollziehen kann, denn ich muss ja schon den Beweis liefern. Die Begründung.

I: Ja. Ehm, wieso sagst du, für dich persönlich schon? Heißt das, dass du eigentlich keine Zweifel daran hast, dass es wirklich so ist?

T: Richtig. Weil manche Sachen kann man ja wohl nachvollziehen.

I: Ja?

T: Und weiß, dass es richtig ist, muss aber trotzdem noch die Begründung dafür finden.

I: Ja. (..) Und dies ist so 'ne Sache, wo du weißt, dass es richtig ist?

T: Wo ich davon ausgehe, ja.

I: Ja. Und, ehm, warum macht man denn, obwohl man weiß, dass es richtig ist, trotzdem noch den Beweis? Bringt das noch irgendwas (..) an Zusatzinformationen?

T: (...) Ja, man weiß dann, dass man es richtig verstanden hat (..) und andere können (.), ja, können es nachvollziehen (.), wie man darauf kommt.

I: Aha?

T: Würd' ich jetzt mal so sagen.

I: Aha. Nur mit der Zeichnung, ist dass dann noch nicht nachvollziehbar?

T: (6 Sek. Pause) Ja, für manche vielleicht schon, aber es reicht halt nicht aus.

C.26 Verena

I: Kann die dynamische Visualisierung für dich einen Beweis ersetzen?
V: Ist für mich kein Beweis.
I: Was ist das dann für dich?
V: Das ist für mich ein Beispiel. Das ist für mich, (.) oder eine Veranschaulichung, ne Anwendung
I: Ja.
V: des Beweises.
I: Ja.
V: Aber ein Beweis ist das nicht (..). Für mich ist der Beweis der Umfangswinkelsatz.
I: Ja.
V: Dass ich halt sage, der Mittelpunktswinkel ist hier 180 Grad
I: Hhmm
V: und ehm, der, ich weiß, dass der ehm Umfangswinkel halb so groß ist. Und da gab es ja auch einen Beweis zu, wenn ich den jetzt gerade spontan wüsste, wäre es ganz toll. Ehm, das wäre für mich ein Beweis und der Thaleskreis ist ja einfach nur ne, ehm, ist ja im Grunde das gleiche, nur dass wir die Besonderheit haben, mit 90 und 180 Grad.
I: Hhmm hhmm (zustimmend). Aber wenn ich doch jetzt die Lage von C verändere auf dem Kreisbogen. Dann habe ich doch nicht nur ein Beispiel, ich kann doch ganz, ganz viele Beispiele betrachten.
V: Ja, das hilft mir auch zum Verständnis des Satzes, aber das ist trotzdem kein Beweis.
I: Aha
V: Für mich
I: Aha, ok.
V: Findest du, das ist ein Beweis?
I: Ich werd ja hier nicht befragt (lacht)
V: Für mich ist das kein Beweis. Es zeigt mir, es ist überall so, und es kann auch so, aber nur weil es überall so ist, heißt das nicht, dass es immer so, also ok, das war ein bisschen blöd ausgedrückt. Aber nur weil das auf den Punkten so ist, wo ich es

gerade ausprobiert hab, heißt das nicht, dass es immer so sein muss.

I: Aha ok ok

V: Das muss immer so sein, weil wir das ja mit dem Umfangswinkelsatz, eh, bewiesen haben.

I: Hhmm ok

Anhang D

Leitfadeninterview

1. *Vorname, Semesterzahl und Studiengang*

2. Wann hast du die Veranstaltung Elemente der Geometrie besucht?

3. Hast du bereits vorher mit dem Programm Cinderella oder einer anderen dynamischen Geometriesoftware gearbeitet?

4. Falls der Besuch der ElGeo bereits länger her ist: Hast du nach Besuch der Veranstaltung das Programm Cinderella weiterhin genutzt, wenn ja, wofür, wenn nein, warum nicht?

5. Welche anderen Mathe-Veranstaltungen hast du bereits gehört?

6. *Arbeitest du mit dem Computer eher allein oder mit anderen zusammen?*

7. Hast du die Hausaufgaben für die Elemente der Geometrie in der Gruppe erarbeitet, oder habt ihr nur eure Ergebnisse zusammengetragen?

8. Welche Rolle hat Cinderella beim Bearbeiten der Aufgabe vorhin für dich gespielt? Wie hast du das Programm eingesetzt?

9. Wie hättest du die Aufgabe mit Bleistift und Papier gelöst?

10. Welche Vorteile/Nachteile siehst du darin, dass die Figuren gegenüber der Papierzeichnung beweglich sind?

11. Wann und wozu benutzt du den Zugmodus?
12. *Gibt es Beispiele, wo du mit Hilfe des Ziehens eine Erkenntnis gewonnen hast?*
13. *Erkläre den Unterschied zwischen einer Konstruktion, die mit Cinderella hingezogen wurde und einer echten Cinderella-Konstruktion. Kannst du ein Beispiel geben?*
14. Kann die dynamische Visualisierung mit Cinderella einen Beweis ersetzen? Warum bzw. warum nicht?
15. Welches sind aus deiner Sicht die Vor- und Nachteile der DGS beim Einsatz im der Geometrie?
16. Wann arbeitest du mit DGS, wann eher mit Papier und Bleistift?
17. Mit Cinderella sind keine Falschannahmen möglich (z.B. ich kann nicht annehmen, dass eine Gerade nicht durch einen Punkt geht, wenn sie durch den Punkt geht). Ist dies für dich ein Problem?
18. Wie würdest du jemandem erklären, was eine Ortslinie ist? Könntest du eine Definition für den Begriff Ortslinie geben?
19. Wir reden viel von wandernden Punkten oder sagen: der Punkt bewegt sich oder er läuft auf einer Bahn. Was hältst du von diesen Formulierungen?
20. *Nenne Gründe, warum du selbst später in deinem Unterricht DGS einsetzen oder auch nicht einsetzen würdest.*
21. *Bist du mit einer Veröffentlichung von Video-Ausschnitten im Rahmen von Vorträgen auf Fach-Tagungen und unter Mathematik-Didaktikern einverstanden?*

Anmerkung: Das Leitfaden-Interview ist eine überarbeitete Version des bereits von Bender & Maczey (2004) verwendeten Instruments. Die Fragen, die im wesentlichen dieser Arbeit entnommen sind, sind kursiv gedruckt.

Literaturverzeichnis

ARISTOTELES [1995]. *Philosophische Schriften.* Hamburg: Felix Meiner.

ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D. & ROBUTTI, O. [2002]. *A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34(3), S. 66–72.

BECKMANN, A. [2001]. *Probleme beim Beweisenlernen, DGS als Lösung?* In ELSCHENBROICH, H.-J., GAWLICK, T. & HENN, H.-W. (Hrsg.), *Zeichnung - Figur - Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software.* Hildesheim & Berlin: Franzbecker.

BENDER, P. [1989]. *Anschauliches Beweisen im Geometrie-Unterricht - unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen und Verformungen.* In KAUTSCHITSCH, H. & METZLER, W. (Hrsg.), *Anschauliches Beweisen*, (S. 95–145). Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky + Teubner.

BENDER, P. [1991]. *Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen - ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht - erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen.* In POSTEL, H., KIRSCH, A. & BLUM, W. (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel.* Hannover: Schroedel.

BENDER, P. [2005]. *Dynamische-Geometrie-Software (DGS) in der Erstsemster-Vorlesung - ein Werkstatt-Bericht über ein Entwicklungs- und ein Forschungs-Projekt.* In BENDER, P. (Hrsg.), *Neue Medien und Bildungsstandards. Bericht über die 22. Arbeitstagung des Arbeitskreises 'Mathematikunterricht und Informatik' in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V.vom 17. bis 19. September 2004 in Soest.*, (S. 40–49). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

BENDER, P. [2011]. *Elemente der Geometrie.* Skript zur Vorlesung für Lehrämter an Grundschulen sowie an Haupt- und Realschulen und den entsprechenden Jahrgangsstufen der Gesamtschulen: entwickelt von Hans-Dieter Rinkens sowie von Peter Bender wesentlich neu bearbeitet und weiter entwickelt.

BENDER, P. & MACZEY, D. [2004]. *Bericht zum Projekt "Wirkung einer multimedialen Lernumgebung auf das Mathematiklernen".* unveröffentlicht.

BENDER, P. & SCHREIBER, A. [1985]. *Operative Genese der Geometrie.* Wien & Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky & Teubner.

BLUM, W. & KIRSCH, A. [1989]. *Warum haben nicht-triviale Lösungen von f'= f keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum "Inhaltlich-Anschaulichen Beweisen".* In KAUTSCHITSCH, H. & METZLER, W. (Hrsg.), *Anschauliches Beweisen,* (S. 199–209). Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky + Teubner.

BOERO, P. [1999]. *Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education.* International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof (990708) (S. 7–8).

BOYD, W. [1956]. *Emile for today: The Emile of Jean Jacques Rousseau.* London: Heinemann.

BRANFORD, B. [1913]. *Betrachtungen über Mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität.* Leipzig und Berlin: Teubner.

DE VILLIERS, M. [1990]. *The Role and the Function of Proof in Mathematics.* Pythagoras 24, S. 17–24.

DE VILLIERS, M. [2003]. *Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad.* Emeryville CA: Key Curriculum Press.

ELSCHENBROICH, H.-J. [1997]. *Dynamische Geometrieprogramme: Tod des Beweisens oder Entwicklung einer neuen Beweiskultur?* Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 8, S. 494–496.

ELSCHENBROICH, H.-J. [1999]. *Visuelles Beweisen. Neue Möglichkeiten durch Dynamische Geometrie-Software.* In NEUBRAND, M. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathemtikunterricht. Vorträge auf der 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5.3.1999 in Bern,* (S. 157–160). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

ELSCHENBROICH, H.-J. [2002]. *Visuell-dynamisches Beweisen. Neue Ansätze im Geometrie-Unterricht durch Dynamische Geometrie-Software (DGS).* Mathematik lehren 110, S. 56–59.

ELSCHENBROICH, H.-J. [2005]. *Mit dynamischer Geometrie argumentieren und beweisen.* In BARZEL, B., HUSSMANN, S. & LEUDERS, T. (Hrsg.), *Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

EUKLID [2003]. *Die Elemente.* Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.

FISCHBEIN, E. & KEDEM, I. [1982]. *Proof and Certitude in the Development of Mathematical Thinking.* In VERMANDEL, A. (Hrsg.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education*, (S. 128–131). Antwerpen, Belgium.

FISCHER, A., HEINZE, A. & WAGNER, D. [2009]. *Mathematiklernen in der Schule - Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium.* In HEINZE, A. & GRÜSSING, M. (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium.* Münster, New York, München & Berlin: Waxmann.

FLICK, U., V. KARDORFF, E., KEUPP, H., V. ROSENSTIEL, L. & WOLFF, S. [1995]. *Handbuch Qualitative Sozialforschung. Grundlagen, Konzepte, Methoden und Anwendungen.* Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union.

FREUDENTHAL, H. [1973a]. *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1.* Stuttgart: Ernst Klett.

FREUDENTHAL, H. [1973b]. *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 2.* Stuttgart: Ernst Klett.

FÜHRER, L. [2009]. *Vom Begründensollen zum Vermutenwollen - Heinrich Winter zum 80. Geburtstag.* In LUDWIG, M. (Hrsg.), *Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht*, (S. 167–188). Hildesheim: Franzbecker. ISBN 978-3-88120-487-3.

GOLDENBERG, E. P., CUOCO, A. & MARK, J. [1998]. *A role for geometry in general education.* In LEHRER, R. & CHAZAN, D. (Hrsg.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, (S. 3–44). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

GOLDWASSER, S., MICALI, S. & RACKOFF, C. [1985]. *The Knowledge Complexity of Interactive Proof-systems.* In *Proceedings of the 17th ACM Symposium on Theory of Computing*, (S. 291–304).

GRIESEL, H. [2003]. *Vergleich grundlegender Konzeptionen der Mathematikdidaktik in der BRD und in der DDR.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 35(4), S. 166–171.

HANNA, G. [1989a]. *More than Formal Proof.* For the Learning of Mathematics 17, S. 20–23.

HANNA, G. [1989b]. *Proofs that Prove and Proofs that Explain.* In VERGNAUD, G., ROGALSKI, J. & ARTIGUE, M. (Hrsg.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (S. 45–51). Paris.

HANNA, G. [2007]. *The ongoing value of proof.* In BOERO, P. (Hrsg.), *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice.* Rotterdam: Sense Publishers.

HANNA, G. & JAHNKE, H. N. [1996]. *Proof and Proving.* In BISHOP, A. & AL. (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education*, (S. 877–908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

HATTERMANN, M. [2011]. *Der Zugmodus in 3D-dynamischen Geometriesystemen (DGS).* Dissertation, Justus-Liebig-Universität Gießen.

HATTERMANN, M. & STRÄSSER, R. [2006]. *Mathematik zum Anfassen: Geometrie-Werkzeuge erschließen eine faszinierende Welt.* c't Magazin für Computertechnik 13, S. 174–182.

HAUG, R. [2012]. *Problemlösen lernen mit digitalen Medien. Förderung grundlegender Problemlösetechniken durch den Einsatz dynamischer Werkzeuge.* Dissertation, Pädagogische Hochschule Freiburg.

HEALY, L. & HOYLES, C. [1999]. *Technical Report on the nationwide survey: Justifying and proving in school mathematics.* London: Institut of Education, University of London.

HEIDENREICH, K. [1987]. *Der Rotwein-Beweis.* Praxis der Mathematik 29, S. 136–138.

HEINZE, A. & REISS, K. [2004a]. *Mathematikleistung und Mathematikinteresse in differenzieller Perspektive.* In DOLL, J. & PRENZEL, H. (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung.* Münster: Waxmann.

HEINZE, A. & REISS, K. [2004b]. *Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence.* In MARIOTTI, M. (Hrsg.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 3).* Bellaria, Italien. URL `http://www.dm.unipi.it/ didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG4/TG4_Heinze_cerme3.pdf(abgerufen am 04.07.2011).`

HEINZE, A. & REISS, K. [2004c]. *The teaching of proof at the lower secondary level - a video study.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 36 (3), S. 98–104.

HENN, H.-W. [2001]. *Dynamische Geometriesoftware: Hilfe für eine neue Unterrichtskultur?* In BISHOP, A. E. A. (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education.* Hildesheim & Berlin: Kluwer Academic Publishers.

HILBERT, T. S., RENKL, A., KESSLER, S. & REISS, K. [2008]. *Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported.* Learning and Instruction 18, S. 54–65.

HISCHER, H. [2002]. *Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktikscher und fachübergreifender Sicht.* Hildesheim: Franzbecker.

HOLLAND, G. [1996a]. *GEOLOG-WIN.* Bonn: Dümmler.

HOLLAND, G. [1996b]. *Geometrie in der Sekundarstufe. Didaktische und methodische Fragen.* Heidelberg, Berlin & Okford: Spektrum Akademischer Verlag.

HÖLZL, R. [1994]. *Im Zugmodus der Cabri-Geometrie.* Dissertation, Universität Augsburg.

HÖLZL, R. [1999]. *Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software.* Augsburg: Wißner.

HOYLES, C. [1997]. *The curricular shaping of students' approaches to proof.* For the Learning of Mathematics 9(1), S. 7–16.

HOYLES, C. & HEALY, L. [2007]. *Curriculum change and geometrical reasoning.* In BOERO, P. (Hrsg.), *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice.* Rotterdam: Sense Publishers.

JAHNKE, H. N. [1978]. *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem.* Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

JAHNKE, H. N. [2009]. *Hypothesen und ihre Konsequenzen - ein anderer Blick auf die Winkelsummensätze (7.-13.Klasse).* Praxis der Mathematik in der Schule 30, S. 26–30.

KADUNZ, G. & STRÄSSER, R. [2009]. *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I.* Hildesheim & Berlin: Franzbecker.

KIRSCH, A. [1979]. *Beispiele für "Prämathematische"Beweise.* In DÖRFLER, W. & FISCHER, R. (Hrsg.), *Beweisen im Mathematikunterricht*, (S. 261–274). Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky + Teubner.

KITTEL, A. [2007]. *Dynamische Geometrie-Systeme in der Hauptschule. Eine interpretative Untersuchung an Fallbeispielen und ausgewählten Aufgaben der Sekundarstufe.* Dissertation, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd.

KNIPPING, C. [2003]. *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis. Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich.* Dissertation, Universität Hamburg & Universität Joseph-Fourier Grenoble.

KRAUTHAUSEN, G. [2001]. *"Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat".* In WEISER, W. & WOLLRING, B. (Hrsg.), *Beiträge zur Didaktik der Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmdit.* Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

KUNTZE, S. [2006]. *Themenstudienarbeit - Konzeption einer Lernumgebung für den gymnasialen Mathematikunterricht und Evaluation einer Themenstudienarbeit zum mathematischen Beweisen und Argumentieren.* Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München.

LABORDE, C. [1993]. *The Computer as Part of the Learning Environment: The Case of Geometry.* In KEITEL, C. & RUTHVEN, K. (Hrsg.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, Vol. 121. Springer.

LABORDE, C. [2001]. *Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry.* International Journal of Computers for Mathematical Learning 6, S. 283–317.

LAKATOS, I. [1979]. *Beweise und Widerlegungen.* Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg.

MAC LANE, S. [1981]. *Mathematical Models: A Sketch for the Philosophy of Mathematics.* The American Mathmatical Monthly 88 (7), S. 462–472.

MALLE, G. [1984]. *Problemlösen und Visualisieren in der Mathematik.* In KAUTSCHITSCH, H. & METZLER, W. (Hrsg.), *Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun*, (S. 65–121). Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky + Teubner.

MANIN, Y. I. [2010]. *A Course in Mathematical Logic for Mathematicians.* New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer.

MARIOTTI, M. A. [2000]. *Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment.* Educational Studies in Mathematics 44, S. 25–53.

MAYBERRY, J. [1983]. *The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers.* Journal for Research in Mathematics Education 14 (1), S. 58–69.

MAYRING, P. [1999]. *Einführung in die qualitative Sozialforschung.* Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union.

MEYER, M. [2007]. *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

MEYERHÖFER, W. [2005]. *Tests im Test: Das Beispiel PISA.* Opladen: Barbara Budrich.

MORMANN, T. [1981]. *Argumentieren, Begründen, Verallgemeinern.* Königstein/Ts: Scriptor.

MSW [2004]. *Kernlehrplan für die Realschule in Nordrhein-Westfalen.* Düsseldorf: Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen. URL `http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/ /upload/lehrplaene_download/realschule/rs_mathematik.pdf` (abgerufen am 25.01.2013).

MSW [2007]. *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen, Mathematik.* Düsseldorf: Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen. URL `http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/ /upload/lehrplaene_download/realschule/rs_mathematik.pdf` (abgerufen am 25.01.2013).

MSW [2011]. *Kernlehrplan und Richtlinien für die Hauptschule in Nordrhein-Westfalen.* Düsseldorf: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. URL `http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/ /upload/lehrplaene_download/gymnasium_g8/gym8_mathematik.pdf` (abgerufen am 25.01.2013).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS [2000]. *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

OEVERMANN, U. [1993]. *Die objektive Hermeneutik als unverzichtbare methodologische Grundlage für die Analyse von Subjektivität. Zugleich eine Kritik der Tiefenhermeneutik.* In JUNG, T. & MÜLLER-DOOHM, S. (Hrsg.), *»Wirklichkeit « im Deutungsprozess: Verstehen und Methoden in den Kultur- und Sozialwissenschaften*, (S. 106–189). Frankfurt/M.: Suhrkamp.

OEVERMANN, U. [1996]. *Konzeptualisierung von Anwendungsmöglichkeiten und praktischen Arbeitsfeldern der objektiven Hermeneutik. (Manifest der objektiven hermeneutischen Sozialforschung).* Unveröffentlichtes Manuskript, März 1996.

OLIVERO, F. [1999]. *Cabri-Géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations.* In MAULL, J., W.AND SHARP (Hrsg.), *Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching.* Plymouth UK: University of Plymouth, UK (CD-ROM).

OLIVERO, F. [2002]. *The proving process within a dynamic geometry environment.* Dissertation, University of Bristol.

PARZYSZ, B. [1988]. *»Knowing« vs. »Seeing«. Problems of the plane representation of space geometry figures.* Educational Studies in Mathematics 19, S. 79–92.

PEIRCE, C. S. [1963]. *Pragmatism and Pragmaticism.* In HARTSHORNE, C. & WEISS, P. (Hrsg.), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volume V and VI.* Cambridge, Massachusetts; London, England: The Belknap Press of Harvard University Press.

PLATON [1958]. *Der Staat.* Stuttgart: Philipp Reclam.

PÓLYA, G. [1949]. *Schule des Denkens.* Tübingen: Francke.

PÓLYA, G. [1969]. *Mathematik und Plausibles Schliessen. Induktion und Analogie in der Mathematik.* Basel und Stuttgart: Birkhäuser.

PÓLYA, G. [1975]. *Mathematik und Plausibles Schliessen. Typen und Strukturen plausibler Folgerung.* Basel und Stuttgart: Birkhäuser.

REICHMANN, K. [2008]. *Das Schulbuch im Mathematikunterricht.* Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 61(6), S. 326–332.

REISS, K. [2002]. *Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht.* URL `http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/59/beweis.pdf` (abgerufen am 23.03.2011).

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. [2006]. *Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen.* In Prenzel, M. & Allolio-Näcke, L. (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule - Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms.* Münster: Waxmann.

Reiss, K., Heinze, A., Renkl, A. & Gross, C. [2008]. *Reasoning and proof in geometry: effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples.* ZDM The International Journal on Mathematics Education 40, S. 455–467.

Reiss, K., Hellmich, F. & Thomas, J. [2002]. *Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht.* In Prenzel, M. & Doll, J. (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und ausserschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen. 45. Beiheft der Zeitschrift für Pädagogik*, (S. 51–64). Weinheim: Beltz.

Reiss, K., Klieme, E. & Heinze, A. [2001]. *Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom.* In van den Heuvel-Panhuizen, M. (Hrsg.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol.4*, (S. 97–104). Utrecht: Utrecht University.

Reiss, K. & Renkl, A. [2002]. *Learning to prove: The idea of heuristic examples.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34(1), S. 29–35.

Schoenfeld, A. H. [1989]. *Explorations of students' mathematical beliefs and behavior.* Journal for Research in Mathematics Education 20(4), S. 338–355.

Schönwald, H. G. [1989]. *Manuelle Stützen mathematischer Gedanken.* In Kautschitsch, H. & Metzler, W. (Hrsg.), *Anschauliches Beweisen*, (S. 217–226). Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky + Teubner.

Schopenhauer, A. [1977]. *Über die vierfache Wurzel des Satzes vom unzureichenden Grunde. Über den Willen in der Natur.* Zürich: Diogenes.

Schupp, H. [2010]. *Beweisen in der Schulgeometrie.* In Krüger, K. & Ullmann, P. (Hrsg.), *Von Geometrie und Geschichte in der Mathematikdidaktik: Festschrift zum 65. Geburtstag von Lutz Führer.* Eichstätt: Polygon.

SEILER, T. B. [1984]. *Begriffsentwicklung und die Veränderung des Verstehens.* In ENGELKAMP, J. (Hrsg.), *Psyhologische Aspekte des Verstehens*, (S. 55–74). Berlin, Heidelberg: Springer.

STEIN, M. [1986]. *Beweisen.* Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

STRÄSSER, R. [2002]. *Research on Dynamic Geometry Software (DGS) - an introduction.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34(3), S. 65.

TALMON, V. & YERUSHALMY, M. [2006]. *Computer „Knowledge“ and student's images of figures: The case of dragging.* Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 5, S. 241–248.

THOM, R. [1973]. *Modern Mathematics: Does it Exist?* In HOWSON, A. G. (Hrsg.), *Developments in Mathematical Education*, (S. 194–212). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

UFER, S. & HEINZE, A. [2008]. *Development of geometric proof competency from grade 7 to 9: A longitudinal study.* 11th International Congress on Mathematics Education, Topic Study Group 18, 6.-13.Juli 2008, Monterrey, Mexico. URL `http://tsg.icme11.org/document/get/284 (abgerufen am 15.07.2011).`

UFER, S., HEINZE, A., KUNTZE, S. & RUDOLPH-ALBERT, F. [2009]. *Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie.* Journal für Mathematik-Didaktik 30, S. 30–54.

VAN HIELE, P. M. [1986]. *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education.* New York: Academic Press.

VINCENT, J. L. [2002]. *Mechanical linkages, dynamic geometry software,and argumentation: Supporting a classroom culture of mathematical proof.* Dissertation, University of Melbourne.

VON KUTSCHERA, F. [1982]. *Grundfragen der Erkenntnistheorie.* Berlin, New York: Walter de Gruyter.

WAGNER, H.-J. [2001]. *Objektive Hermeneutik und Bildung des Subjekts.* Weilerswist: Velbrück Wissenschaft.

WALSCH, W. [1975]. *Zum Beweisen im Mathematikunterricht.* Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag.

WEIGAND, H.-G. [2009]. *Ziele des Geometrieunterrichts.* In WEIGAND, H.-G., FILLER, A., KUNTZE, S., HÖLZL, R., LUDWIG, M. & SCHMIDT-THIEME, B. (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Heidelberg: Spektrum.

WEIGAND, H.-G. & WETH, T. [2002]. *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen.* Heidelberg, Berlin: Spektrum.

WERNET, A. [2009]. *Einführung in die Interpretationstechnik der Objektiven Hermeneutik.* Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

WINTER, H. [1983]. *Zur Problematik des Beweisbedürfnisses.* Journal für Mathematikdidaktik 4(1), S. 59–95.

WINTER, H. [1991]. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Braunschweig: Vieweg.

WITTMANN, E. C. [1987]. *Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

WITTMANN, E. C. & MÜLLER, G. [1988]. *Wann ist ein Beweis ein Beweis?* In BENDER, P. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter*. Berlin: Cornelsen.

WITTMANN, G. [2009]. *Beweisen und Argumentieren.* In WEIGAND, H.-G., FILLER, A., KUNTZE, S., HÖLZL, R., LUDWIG, M. & SCHMIDT-THIEME, B. (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Heidelberg: Spektrum.

YERUSHALMY, M. & CHAZAN, D. [1993]. *Overcoming Visual Obstacles With the Aid of the Supposer*. In SCHWARTZ, J. L., YERUSHALMY, M. & WILSON, B. (Hrsg.), *The Geometric Supposer: What is it a Case of?* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.