

UNIVERSITÄT PADERBORN

# **Optimierung sequentieller optischer Systeme mit ausgedehnter Lichtquelle**

**Dissertation  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
der Universität Paderborn**

vorgelegt von  
Dipl.-Math. Simon Seroka  
simon.seroka@gmail.com

Paderborn, den 30. Juni 2014

1. Gutachter: Prof. Dr. Andrea Walther
2. Gutachter: Dr. Jens Förstner

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, habe ich als solche kenntlich gemacht und die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt worden.

Paderborn, den 30. Juni 2014

## Danksagung

Die vergangenen drei Jahre machen mich sehr dankbar, was ich an dieser Stelle gerne formulieren möchte.

Ich danke der Firma *Hella KGaA Hueck&Co.* dafür, dass ich diese Promotionsstelle einnehmen und große Freiheiten in meiner Forschungsarbeit erleben durfte, die mir die kreative Arbeit an der Problemstellung ermöglicht hat.

Mein Dank gilt auch allen Personen, die mich betreut und durch viele Gespräche geholfen haben. Dazu gehören Professorin Andrea Walther, die mich in den vergangenen Jahren sehr gut betreut hat und trotz ihrer vielen Termine Zeiten einrichten konnte, in der ich die Stände meiner Arbeit vorstellen, korrigieren und mich für die weitere Arbeit orientieren konnte.

Stefan Sertl, der durch seine durchdachte und analytische Art die Schwachstellen in meinen Ansätzen erkennen ließ und mir half, bessere Wege zur Lösung zu finden. Er war mir ein sehr guter Ratgeber in vielfältigen Problemen.

Dr. Mirko Hessel-von Molo, der mich vor allem zu Beginn der Promotion betreut hat und weitere Kontakte in der Universität Paderborn ermöglicht hat.

Harald Zerhau Dreihöfer, der trotz seiner vielseitigen Beschäftigung immer wieder Zeit fand für Diskussionen. Es hat sehr viel Freude bereitet mit ihm über die physikalischen Probleme und Lösungsansätze zu diskutieren und weiterführende Überlegungen anzustellen. Seine Begeisterungsfähigkeit und präzises Denken ist mir zum Vorbild geworden.

Erik Bonner, der mir ein sehr guter Freund geworden ist und dessen Gemeinschaft viel Freude in den Arbeitstag gebracht hat.

Neben diesen Leuten danke ich allen Kollegen der Gruppe *Computer aided lighting*, dass sie mich in ihre Runde aufgenommen haben. Es war eine wirklich sehr lehrreiche und schöne Zeit.

Auch bei Robert Wellige bedanke ich mich, der mir oft geholfen hat, anschauliche Beispiele zu generieren.

Für die Unterstützung während meines ganzen Studiums sind meine Eltern wesentlich und unverzichtbar gewesen und ich bin ihnen sehr dankbar dafür.

Die größte Unterstützung habe ich allerdings in den letzten Jahren in meiner Frau Cornelia gefunden, die mir eine treue Stütze war und ist.

Aus meiner Überzeugung heraus, dass nichts lebt und atmet, ohne dass Gott dies will, gilt mein Dank sowohl im Anfang als auch im Ende ihm.





# Dissertation Abstract

English title of the dissertation:

## Optimization of Sequential Optical Systems with Extended Light Sources

The task of illumination is very important in everyday life. One example is roadway lighting, where special optics are used for many applications.

The computation of optical surfaces that redistribute the light of a source onto a target surface with a desired distribution is the core question of this thesis.

We establish a solution concept for the determination of an optical system, consisting of an extended light source, optical surfaces and a target surface.

The extended light source is modelled consequently, taking into account that the extended light source is defined through a luminance distribution. The result is an integral expression for the illuminance on the target surface.

Using this formulation, the optical surfaces can be optimized to generate the desired light distribution. Because only locally convergent optimization routines are considered for this task, it is important that a good starting solution for the optimization process is used. Therefore, the approximation of the light source as a point implicates many computation approaches.

Among others a mapping of the light rays from the point light source to points on the target surface which transforms the light distribution of the point light source into the desired light distribution can be determined. If it can be concluded that an optical surface regarding the mapping exists, we call it an optimal mapping that is computed in this thesis using the formalism of Monge-Kantorovich.

In summary, the solution concept consists of three steps:

1. Computation of the optimal mapping
2. Calculation of an optical system, fulfilling the optimal mapping
3. Optimization of the optical system regarding the extension of the light source

*Dissertation Abstract*

# Zusammenfassung der Doktorarbeit

Titel der Doktorarbeit:

Optimierung sequentieller optischer Systeme mit ausgedehnter Lichtquelle

Die Beleuchtung spielt in unserem Alltag eine große Rolle. Wie beispielsweise in der Fahr-  
bahnbeleuchtung wird diese Aufgabe in vielen Anwendungen durch spezielle Optiken gelöst.  
Die Berechnung von Optiken, die die Lichtverteilung der Lichtquelle in eine gewünschte Ver-  
teilung auf einer Zielfläche transformieren, ist das Thema dieser Arbeit.

Es wird ein Lösungskonzept für die Bestimmung eines optischen Systems, das aus einer aus-  
gedehnten Lichtquelle, den optischen Flächen und der Zielfläche besteht, hergeleitet.

Die ausgedehnte Lichtquelle, deren Leuchtverhalten über eine Leuchtdichteverteilung be-  
schrieben wird, wird konsequent modelliert. Das Ergebnis ist ein Integralausdruck für die  
generierte Lichtverteilung auf der Zielfläche.

Auf dieser Formulierung aufbauend wird eine Optimierung der Flächen formuliert, um die  
gewünschte Lichtverteilung zu erzeugen.

Da nur lokal konvergente Optimierungsmethoden in Frage kommen muss eine gute Startlö-  
sung für die Optimierung bestimmt werden. Hierfür liefert die Approximation der Lichtquelle  
als Punkt viele Berechnungsansätze. Unter anderem kann eine Zuordnung von Lichtstrahlen  
der Punktlichtquelle auf Punkte der Zielfläche bestimmt werden, so dass die Lichtverteilung  
der Punktlichtquelle in die gewünschte Lichtverteilung auf der Zielfläche transformiert wird.  
Eine solche Zuordnung wird mapping genannt. Falls auf die Existenz von optischen Flächen  
zu einem mapping geschlossen werden kann sprechen wir von einem optimalen mapping,  
das in dieser Arbeit mit Hilfe des Formalismus von Monge-Kantorovich bestimmt wird.

Zusammenfassend besteht der Lösungsansatz aus drei Schritten:

1. Berechnung eines optimalen mappings
2. Bestimmung des optischen Systems zu dem optimalen mapping
3. Optimierung des optischen Systems für die Ausdehnung der Lichtquelle

## *Zusammenfassung der Doktorarbeit*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Dissertation Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Zusammenfassung der Doktorarbeit</b>	<b>vii</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>xiii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Die Klasse der zu optimierenden optischen Systeme . . . . .	5
2.2 Das Abbildungsverhalten . . . . .	6
2.2.1 Umlenkung der Lichtstrahlen an optischen Grenzflächen . . . . .	9
2.3 Grundlagen der Differentialgeometrie . . . . .	13
2.4 Definition optischer Größen . . . . .	15
2.4.1 Strahlungsphysikalische Größen . . . . .	15
2.4.2 Bewertung der strahlungsphysikalischen Größen . . . . .	22
2.5 Definition des allgemeinen Beleuchtungsproblems . . . . .	24
<b>3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle</b>	<b>25</b>
3.1 Analytische Berechnung der Beleuchtungsstärke durch eine partiellen Differentialgleichung . . . . .	25
3.2 Analytische Berechnung der Beleuchtungsstärke durch eine Faltung . . . . .	28
3.3 Schwache Formulierung für Reflektorsysteme . . . . .	32
3.3.1 Existenz von schwachen Lösungen . . . . .	32
3.3.2 Verwendung einer schwachen diskreten Lösung zum Aufbau einer kontinuierlichen Lösung . . . . .	36
3.4 Das optimale mapping und der Monge-Kantorovich-Formalismus . . . . .	39
3.4.1 Rotationsfreie mappings nach Haker . . . . .	43
3.4.2 Monge-Kantorovich-Formulierung des Reflektorproblems nach Oliker . . . . .	43

3.4.3	Das Monge-Problem des optimalen Transportes . . . . .	49
3.4.4	Die Relaxierung des Monge-Problems durch Kantorovich zum primalen Monge-Kantorovich-Problem . . . . .	51
3.4.5	Das duale Monge-Kantorovich-Problem . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Modellierung des Beleuchtungsproblems mit ausgedehnter Lichtquelle</b>	<b>61</b>
4.1	Ansätze zur Berücksichtigung der Ausdehnung der Lichtquelle unter Approxi- mation der Lichtquelle als Punkt . . . . .	62
4.2	Die Abbildungseigenschaften des optischen Systems mit ausgedehnter Licht- quelle . . . . .	67
4.3	Die diskrete Modellierung der Beleuchtungsstärke . . . . .	69
4.4	Die Étendue des optischen Systems und Folgerungen . . . . .	71
4.5	Die analytische Berechnung der Beleuchtungsstärke . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Lösungskonzept des Beleuchtungsproblems und numerische Umsetzung</b>	<b>79</b>
5.1	Das Gesamtkonzept zur Lösung des Beleuchtungsproblems . . . . .	79
5.2	Definition verwendeter Freiformflächen . . . . .	83
5.2.1	Freiformflächendefinition durch den Polarradius . . . . .	83
5.2.2	Verwendung von B-Splines für die Definition des Polarradius . . . . .	84
5.2.3	Numerische Vorteile der Definition des Polarradius durch <i>Splines</i> . . . . .	87
5.2.4	Einfügen neuer Knotenpunkte zur Erhöhung der Modellierbarkeit des Polarradius . . . . .	88
5.3	Gradientenberechnung für die Optimierung . . . . .	89
5.4	Numerische Integration mittels Gauss-Quadratur . . . . .	93
5.5	Berechnung des optimalen mappings mit dem Kantorovich-Formalismus des Monge-Problems . . . . .	97
5.5.1	Erster iterativer Algorithmus von Jan van Lent zur Lösung des primalen Monge-Kantorovich-Problems . . . . .	100
5.5.2	Zweiter iterativer Algorithmus von Jan van Lent zur Lösung des primalen Monge-Kantorovich-Problems . . . . .	103
5.6	Bestimmung eines optischen Systems mit Hilfe eines optimalen mappings . . . . .	104
5.6.1	Optimierung des optischen Systems zur Generierung des optimalen map- pings . . . . .	105
5.6.2	Berechnung einer optischen Flächen durch Lösen eines Systems partiel- ler Differentialgleichungen . . . . .	107
5.6.3	Berechnung einer optischen Fläche als Anfangswertproblem . . . . .	109
5.6.4	Optimierung des Normalenvektorfeldes einer Fläche . . . . .	110

5.6.5	Alternative Berechnung mehrerer optischer Flächen . . . . .	110
5.7	Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Rechenbeispiele</b>	<b>121</b>
6.1	Wall-Washer . . . . .	121
6.2	Umformung eines Laserstrahls . . . . .	125
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>133</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>135</b>

## *Inhaltsverzeichnis*



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Primäroptik, die einen Reflektor homogen beleuchtet. . . . .	2
2.1	Schematische Darstellung sequentieller optischer Systeme. . . . .	6
2.2	Darstellung des Forward- und Backward-raytraces durch ein sequentielles optisches System. . . . .	9
2.3	Darstellung des optischen Prinzips der Reflektion und Brechung. . . . .	10
2.4	Schematische Darstellung der Raumwinkels. . . . .	15
2.5	Schematische Darstellung der Bestrahlungsstärke und Strahldichte. . . . .	19
3.1	Berechnete Beleuchtungsstärke entsprechend der Gleichung (3.1.4). . . . .	28
3.2	Vergleich der berechneten Lichtverteilung durch die Faltung mit dem Ergebnis durch die partielle Differentialgleichung. . . . .	31
3.3	Einfluss der Faltungsbreite auf die berechnete Lichtverteilung. . . . .	31
3.4	Mengentheoretische Sichtweise der schwachen Lösung des Reflektorproblems. . . . .	33
3.5	Die diskrete schwache Lösung des Beleuchtungsproblems mit drei Ellipsoiden. . . . .	38
3.6	Gegenüberstellung eines konvergenten Reflektors und eines divergenten Reflektors in der schwachen Formulierung des Reflektorproblems. . . . .	38
3.7	Darstellung des Zusammenhangs zwischen einem mapping und dem Produktmaß. . . . .	52
3.8	Der Zusammenhang zwischen dem optimalen Produktmaß $\mu$ auf $\sigma(\Omega_\chi \times \Omega_\Psi)$ und einem bis auf Nullmengen eindeutigen mapping $\hat{\mathcal{F}}$ . . . . .	54
3.9	Eindimensionales primales Monge-Kantorovich Problem. . . . .	56
3.10	Das mapping $\hat{\mathcal{F}}^+ : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$ wird aus der primalen Lösung des Formalismus nach Kantorovich des Monge-Problems durch die gewichtete Mittelpunktseildung (3.4.31) bestimmt. . . . .	60
3.11	Darstellung des optimalen mappings durch Überlagerung der Gitter . . . . .	60
4.1	Verdeutlichung der generellen Ungültigkeit der Approximation der Lichtquellen als Punkt. . . . .	62

4.2	Zusammenhang zwischen der Größe der Lichtquelle und der generierten Unschärfe im Bild. . . . .	63
4.3	Der Zusammenhang zwischen einer Hell-Dunkel-Grenze und den Lichtquellenbildern. . . . .	64
4.4	Abbildungsverhalten eines optischen Systems mit ausgedehnter Lichtquelle und einer brechenden Fläche. . . . .	68
4.5	Darstellung der diskreten Modellierung der Beleuchtungsstärkeverteilung. . . .	70
4.6	Darstellung der Étendue als Menge aller Lichtstrahlen, die die Optik durchleuchten. . . . .	73
4.7	Darstellung des Abbildungsverhaltens eines Konzentratoren. . . . .	73
4.8	Die simulierte gesehene Leuchtdichte eines optischen Systems mit einer Freiformfläche. . . . .	77
4.9	Die mit den hergeleiteten Gleichungen berechnete gesehene Leuchtdichte eines optischen Systems mit einer Freiformfläche. . . . .	77
5.1	Das Gesamtkonzept zur Lösung des Beleuchtungsproblems wird in dieser Grafik schematisch als Flussdiagramm dargestellt. . . . .	81
5.2	Der Zusammenhang zwischen den Knotenpunkten und den Funktionswerten einer B-Spline-Funktion. . . . .	86
5.3	Die Berechnung eines Integrals mit Hilfe der Gauss-Quadratur. . . . .	96
5.4	Benötigte Berechnungszeit eines Integrals mit Hilfe der Gauss-Quadratur mit und ohne Mehrlevel-Ansatz. . . . .	96
5.5	Transformation des Beleuchtungsproblems in den Formalismus nach Monge-Kantorovich. . . . .	98
5.6	Das berechnete mapping aus dem Produktmaß des primalen Formalismus von Kantorovich. . . . .	99
5.7	Schematische Darstellung des ersten iterativen Verfahrens von Jan Van Lent zur Lösung des primalen Formalismus von Kantorovich . . . . .	101
5.8	Die Dichten eines eindimensionalen Monge-Problems. . . . .	102
5.9	Berechnete Produktmaße im ersten iterativen Verfahren von Jan Van lent. . . .	102
5.10	Schematische Darstellung des zweiten iterativen Verfahrens von Jan Van Lent zur Lösung des primalen Formalismus von Kantorovich . . . . .	103
5.11	Berechnete Produktmaße im zweiten iterativen Verfahren von Jan Van lent. . .	104
5.12	Laufzeitanalyse der Gradientenberechnung für die Kostenfunktion 5.6.2 zur Generierung eines vorgegebenen mappings. . . . .	106

5.13 Analyse der Fehlerverhaltens der Optimierung der optischen Fläche zur Generierung des optimalen mappings. . . . .	107
5.14 Eine Untersuchung der generierten Lichtverteilungen der optimierten Optik. .	108
5.15 Das explizite Euer-Verfahren zur Flächenbestimmung. . . . .	110
5.16 Die beiden Flächen stellen eine Optik dar, in der das gewünschte mapping $\hat{\mathcal{F}}$ : $\Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$ von beiden Flächen zu gleichen Teilen generiert wird. . . . .	111
5.17 Optimierung eines optischen Systems mit der Einzeloptimierung zur Fehlerfunktion (5.7.1). . . . .	113
5.18 Optimierung eines optischen Systems mit der Mehrzieloptimierung zur Fehlerfunktion (5.7.3). . . . .	115
5.19 Laufzeitanalyse der Berechnung des Gradienten in Abhängigkeit von der Anzahl an Freiheitsgraden im Vergleich verschiedener Techniken. . . . .	115
5.20 Das Fehlerverhalten mit und ohne iterativer Spline-Verfeinerung während des Optimierungsprozesses wird dargestellt. . . . .	116
5.21 Die Fehlerfunktion (5.7.3) in Abhängigkeit von zwei Spline-Koeffizienten in der Nähe der globalen Lösung. . . . .	117
5.22 Die Fehlerfunktion (5.7.3) in Abhängigkeit von zwei Spline-Koeffizienten in der Nähe der Startlösung mit unstetiger Definition der Leuchtdichte. . . . .	117
5.23 Darstellung der Leuchtdichte der lambertschen Lichtquelle mit linearem, bzw. glattem Abfall der Leuchtdichte am Rand der Lichtquelle. . . . .	118
5.24 Die Fehlerfunktion (5.7.3) in Abhängigkeit von zwei Spline-Koeffizienten in der Nähe der Startlösung mit stetiger Definition der Leuchtdichte. . . . .	119
5.25 Analyse des logarithmischen Konvergenzverhaltens der Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle. . . . .	120
6.1 Das resultierende mapping $\hat{\mathcal{F}}^+$ aus der primalen Monge-Kantorovich-Lösung für das Wall-Washer-Problem. . . . .	122
6.2 Darstellung und Analyse der berechneten Startfläche für die Optimierung. . . .	123
6.3 Darstellung und Analyse der optimierten Freiformfläche mit ausgedehnter Lichtquelle. . . . .	123
6.4 Analyse der Fehlerentwicklung und Gradientenberechnung während der Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle nach Abschnitt 5.7. . . . .	124
6.5 Darstellung des Linsentyps I mit Simulationsergebnis zur Umformung von Laserstrahlen. . . . .	126
6.6 Das berechnete optimale mapping für die Laserstrahlen wird generiert, indem das mapping durch beide optische Flächen zu gleichen Teilen generiert wird. .	127

## *Abbildungsverzeichnis*

6.7	Darstellung des Linsentyps II mit Simulationsergebnis zur Umformung von Laserstrahlen. . . . .	127
6.8	Simulation des Linsentyp I zur Umformung eines Laserstrahles mit einer realistischen Laserdiode. . . . .	128
6.9	Simulation des ersten Multilinsen-Array-Ansatzes zur Homogenisierung des Ergebnisses bei der Umformung eines realistischen Laserstrahles. . . . .	130
6.10	Simulation des zweiten Multilinsen-Array-Ansatzes zur Homogenisierung des Ergebnisses bei der Umformung eines realistischen Laserstrahles. . . . .	131
6.11	Fehlerentwicklungen während der Optimierung der drei in Abbildung 6.10 eingefärbten Linsen. . . . .	132

# Tabellenverzeichnis

5.1	Lichttechnische Größen des optischen Systems. . . . .	82
5.2	Abhängigkeit des FD-Gradienten von der Schrittweite $h$ . . . . .	118



# 1 Einleitung

*Welches ist der Weg, auf dem das Licht sich verteilt, der Ostwind sich verbreitet  
über die Erde? (Hiob 38,24)*

Schon immer war das Licht Sinnbild des Menschen für Leben und Wohlbefinden, so dass der Wunsch nach gezielter Beleuchtung der Dunkelheit sehr alt ist. So soll bereits Archimedes im zweiten Jahrhundert vor Christus mit den fokussierenden Eigenschaften des Paraboloiden experimentiert haben und auf diese Weise angreifende Schiffe in Brand gesteckt haben. Neben diesem Bestreben, Licht möglichst stark zu konzentrieren, zielt die Grundfrage der Beleuchtung darauf ab, das Licht der Quelle durch die Optik so umzuverteilen, dass eine gewünschte Lichtverteilung erzeugt wird. So besteht beispielsweise die Aufgabe der Innenraumbeleuchtung darin, ein Zimmer angenehm auszuleuchten.

Besonders in dem automobilen Sektor nimmt die Beleuchtung einen sehr großen und wesentlichen Teil ein, denn sowohl der Innenraum wie auch die Landschaft müssen beleuchtet werden und durch Signalfunktionen sollen andere Verkehrsteilnehmer auf das Fahrzeug aufmerksam gemacht werden. Für alle Lichtfunktionen gibt es daher gesetzliche Anforderungen an die erzeugten Lichtverteilungen, die den Einsatz von speziellen Optiken notwendig machen.

Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf die geometrische Optik, d.h. wir modellieren Licht durch Strahlen und vernachlässigen die Wellencharakteristik des Lichts. Diese Modellierung ist zutreffend, wenn die Strukturen der Optik groß sind im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts, was in den automobilen Anwendungen der Fall ist.

Modelliert man zusätzlich die Lichtquelle als Punkt, so gibt es verschiedene Ansätze, wie das Licht durch Optiken konzentriert und verteilt werden kann. Jedoch ist die Problemstellung für ausgedehnte Lichtquelle komplexer und nicht geschlossen lösbar.

Zur Veranschaulichung der Thematik wird in Abbildung 1.1 eine Optik dargestellt, die mit einer LED ein Rechteck homogen beleuchtet. Die Form der Optik lässt erkennen, dass spezielle Probleme konkret angepasste Optiken notwendig machen.

Die Zielsetzung dieser Arbeit ist es, mathematische Ansätze zur Berechnung, bzw. Optimierung von Optiken herzuleiten, mit denen eine vorgegebene Lichtverteilung erzeugt wird.

## 1 Einleitung



*Abb. 1.1: Diese Primäroptik (rechts) erzeugt eine homogene Lichtverteilung auf einem Reflektor, damit dieser ein gleichmäßiges Erscheinungsbild aufweist. Die Form lässt erkennen, dass jedes Beleuchtungsproblem eine eigene Lösung benötigt. Links ist zum Größenvergleich eine 1 Cent Münze abgebildet.*

Wir wollen dieses Problem lösen, indem wir im ersten Schritt die Lichtquelle punktförmig modellieren. Die berechnete Lösung zu diesem Ansatz soll im zweiten Schritt für eine ausgedehnte Lichtquelle optimiert werden.

Zur Herleitung des Lösungsansatzes mit einer Punktlichtquelle stellen wir zuerst verschiedene Ansätze der Literatur vor und leiten anschliessend einen eigenen Ansatz aufbauend auf den eingeführten Techniken her.

Die Effekte der Ausdehnung der Lichtquelle sollen durch Optimierung der Lösung für eine Punktlichtquelle reduziert werden. Für eine effektive Optimierung eignen sich herkömmliche Simulationsergebnisse nicht, da sie durch zufällige Ergebnisse ein Rauschverhalten haben, was beispielsweise die Gradientenbildung einer Fehlerfunktion erschwert. Deshalb ist es notwendig, eine analytische Formel für die erzeugte Lichtverteilung herzuleiten.

Die Ergebnisse der einzelnen Teilschritte des Gesamtkonzeptes sind überzeugend. Der Approximation der Lichtquelle als Punkt ist zwar im Allgemeinen ungültig, liefert aber in vielen Problemstellungen sehr gute Resultate, so dass eine Umformulierung der Modellierung für die Umverteilung der Lichtverteilung von Lasern ebenfalls möglich ist. Die Modellierung mit ausgedehnter Lichtquelle zeigt gute Resultate für Primäroptiken, d.h. kleine Optiken, die das Licht einer Quelle für das optische System vorrichten, oder eine homogene Verteilung erzeugen sollen.

Aufgrund des hohen Interesses an optischer Flächenberechnung in der automobilen Industrie wird diese Promotion im Unternehmen *Hella KGaA Hueck & Co.* durchgeführt.

**Aufbau der Arbeit** Zunächst wird in der Einleitung das Thema eingeführt und motiviert. Anschließend folgt ein Grundlagenkapitel, in dem die optischen, lichttechnischen und mathematischen Grundlagen eingeführt werden und eine einheitliche Notation definiert wird. Im dritten Kapitel werden verschiedene Modellierungen des Beleuchtungsproblems unter



Punktlichtquellen-Approximation eingeführt. Darauf aufbauend wird ein neuer Ansatz erarbeitet, der die Bestimmung eines *optimalen mappings* mit der Berechnung einer zugehörigen optischen Fläche kombiniert. Wir verstehen unter einem *optimalen mapping* eine Zuordnung von Lichtstrahlen von der Punktlichtquelle auf Punkte des zu beleuchtenden Gebietes, zu dem eine optische Fläche existiert.

Da es für eine effiziente und korrekte Optimierung der Optik wichtig ist, die erzeugte Lichtverteilung mit ausgedehnter Lichtquelle direkt zu modellieren, leiten wir in dem vierten Kapitel die entsprechenden Formeln her.

Zur Zusammenfassung der dargestellten Ansätze und Lösungswege wird im fünften Kapitel ein Gesamtkonzept zur Lösung des Beleuchtungsproblems erarbeitet. Darüber hinaus wird die numerische Umsetzung der einzelnen Teilschritte erläutert. Dabei kommen Lineare Programmierung, Freiformflächen, automatisches Differenzieren und Gradientenverfahren zur Anwendung.

Um die Effizienz und Anwendbarkeit der Modellierung zu zeigen, werden die Verfahren im sechsten Kapitel auf einzelne konkrete Problemstellungen angewandt. Daneben wird die Modellierung mit Approximation der Lichtquelle als Punkt für die Umverteilung von Laserlicht adaptiert.

Abschließend wird im Kapitel Sieben der hergeleitete Lösungsweg zusammengefasst und beurteilt.

## *1 Einleitung*

## 2 Grundlagen

Um die verschiedenen Modellierungs- und Lösungsansätze einheitlich einzuführen und zu diskutieren, werden in diesem Kapitel die notwendigen Definitionen getroffen und physikalische Größen eingeführt. Dazu wird zuerst das behandelte optische System mit den verschiedenen Elementen beschrieben. Auf dieser Grundlage wird das Abbildungsverhalten analysiert und schließlich die verwendeten lichttechnischen Größen eingeführt.

### 2.1 Die Klasse der zu optimierenden optischen Systeme

In dieser Arbeit behandeln wir *sequentielle optische Systeme*. Diese bestehen aus einer Lichtquelle  $\chi$ , in einer Reihenfolge geordneten optischen Grenzflächen  $\Sigma_i$  und einer Zielfläche  $\Psi$  (vgl. Abbildung 2.1). Diese Elemente sind abgeschlossene Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$ .

Die Lichtquelle  $\chi$  kann sich in dieser Arbeit sowohl auf eine Punktlichtquelle (Abbildung 2.1a), als auch auf eine ausgedehnte Lichtquelle (Abbildung 2.1b) beziehen. In den einzelnen Kapiteln der Arbeit wird die jeweils verwendete Modellierung der Lichtquelle eingeschränkt. Die Flächen  $\Sigma_i$  sind zwei-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^3$ , d.h. sie sind regulär. Die Oberfläche der optischen Flächen sind idealisiert reflektierend oder brechend, d.h. sie weisen keine statistische Rauigkeit auf und können parametrisiert werden durch die Funktionen

$$\sigma_{\Sigma_i} : \Pi_{\Sigma_i} \rightarrow \Sigma_i \text{ mit } \Pi_{\Sigma_i} \subset \mathbb{R}^2 \text{ abgeschlossen und } (\pi_{\Sigma_i}^1, \pi_{\Sigma_i}^2) =: \pi_{\Sigma_i} \in \Pi_{\Sigma_i}.$$

Das Normalenvektorfeld der Fläche  $\Sigma_i$  wird durch die Parametrisierung definiert durch

$$\begin{aligned} \vec{N}_{\Sigma_i} : \Pi_{\Sigma_i} &\rightarrow S^2, \\ \vec{N}_{\Sigma_i}(\pi_{\Sigma_i}) &= \frac{N_{\Sigma_i}}{\|N_{\Sigma_i}\|} \text{ mit } N_{\Sigma_i} := \frac{\partial}{\partial \pi_{\Sigma_i}^1} \sigma_{\Sigma_i}(\pi_{\Sigma_i}) \times \frac{\partial}{\partial \pi_{\Sigma_i}^2} \sigma_{\Sigma_i}(\pi_{\Sigma_i}). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Die Orientierung des Normalenvektorfeldes hat keinen Einfluss auf spätere analytische Untersuchungen, so dass die regulären Flächen nicht gleich orientiert sein müssen.

Die Zielfläche  $\Psi$  ist eine zwei-dimensionale, nicht zwingend differenzierbare Untermannig-

## 2 Grundlagen

faltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ . Dasselbe gilt für  $\chi$ , falls eine ausgedehnte Lichtquelle vorliegt. Die Eigenschaft der Differenzierbarkeit wird in den jeweiligen Kapitel zusätzlich gefordert. Die Funktionen  $\sigma_\chi : \Pi_\chi \rightarrow \chi$  und  $\sigma_\Psi : \Pi_\Psi \rightarrow \Psi$  sind die Parametrisierungen dieser Flächen, falls sie benötigt werden.

In der schematischen Abbildung 2.1b werden nur brechende Flächen dargestellt. Es ist genau so möglich, dass reflektierende Flächen Teil des *sequentiellen optischen Systeme* sind (vgl. Abbildung 2.1a). Die Bezeichnung *sequentiell* wird im nächsten Abschnitt 2.2 behandelt, da es in einem direkten Zusammenhang zu dem Abbildungsverhalten steht.

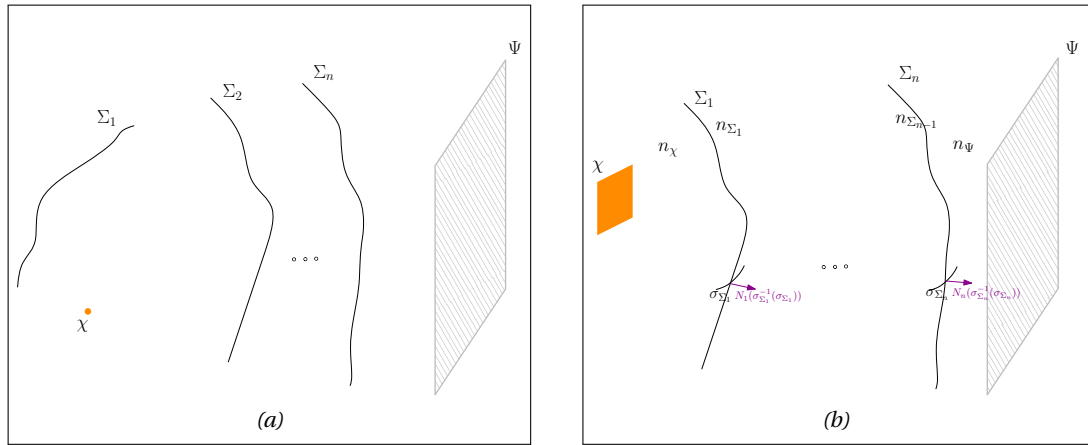


Abb. 2.1: Schematische Darstellung sequentieller optischer Systeme. (b) Dieses System beinhaltet nur brechende optische Flächen (a) Dieses System hat als erste optische Fläche einen Reflektor.

## 2.2 Das Abbildungsverhalten

Wir modellieren die Ausbreitung von Licht im Raum entsprechend den Prinzipien der geometrischen Optik als Lichtstrahlen. Ein Lichtstrahl  $\lambda \in \mathbb{R}^3 \times S^2$  besteht aus einem Tupel von einem Punkt im  $\mathbb{R}^3$  und einem Richtungsvektor. Die Menge aller Lichtstrahlen bezeichnen wir mit

$$\Lambda := \mathbb{R}^3 \times S^2.$$

Für eine beliebige Fläche  $\Sigma$  definieren wir mit

$$\Lambda_\Sigma := \Sigma \times S^2$$

die Menge aller Lichtstrahlen, die von der Fläche  $\Sigma$  ausgehen.

Um den Weg eines Lichtstrahls durch das optische System zu beschreiben benötigt man die

Berechnung von Schnittpunkten von Lichtstrahlen mit den optischen Flächen. Diese Schnittpunktberechnung definieren wir allgemein mit der Funktion

$$\tilde{\sigma}_{\Sigma_i} : \Lambda \rightarrow \Sigma_i. \quad (2.2.1)$$

Je nachdem, ob es in dem jeweiligen Kapitel benötigt wird, bezeichnen wir mit  $\tilde{\sigma}_\chi$  und  $\tilde{\sigma}_\Psi$  die Schnittpunktberechnungen mit der Lichtquelle und der Zielfläche. Die Menge

$$\Lambda_{\Sigma_i}^{\Sigma_j} := \{\lambda \in \Lambda_{\Sigma_i} | \tilde{\sigma}_{\Sigma_j}(\lambda) \text{ ist definiert}\} \quad (2.2.2)$$

beinhaltet alle Strahlen, die von einer Fläche  $\Sigma_i$  aus die Fläche  $\Sigma_j$  schneiden.

Jede Fläche  $\Sigma_i$  hat optische Eigenschaften, die die Umlenkung der Lichtstrahlen an der Fläche definieren. Aufgrund der Stetigkeit der Normalenvektorfelder kann die Ablenkung der Lichtstrahlen analytisch berechnet werden. Diese Ablenkung ist sowohl bei der Brechung, als auch bei Reflektion abhängig von dem Winkel des einfallenden Lichtstrahles zur Flächennormalen im Schnittpunkt und unter Umständen von weiteren flächenspezifischen Größen. Wir beschreiben die Richtungsablenkung eines Lichtstrahls an der Fläche  $\Sigma_i$  allgemein mit der Funktion

$$redir_{\Sigma_i} : S^2 \times S^2 \rightarrow S^2, \quad redir_{\Sigma_i}(\vec{\omega}_{in}, \vec{N}_{\Sigma_i}) = \vec{\omega}_{out}.$$

Hierbei ist  $\vec{\omega}_{in}$  die Richtung des einfallenden Lichtstrahls,  $\vec{N}$  die Flächennormale und  $\vec{\omega}_{out}$  der Richtungsvektor des umgelenkten Lichtstrahls. Die konkrete Definition der Funktion hängt davon ab, ob die Grenzfläche reflektierend oder brechend ist und wird in den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.1 aufgestellt. Die Umlenkung eines Lichtstrahls  $\lambda_{in} := (p, \vec{\omega}_{in})$  an der optischen Grenzfläche  $\Sigma_i$  kann zusammenfassend beschrieben werden als Funktion

$$\begin{aligned} Redir_{\Sigma_i} &: \Lambda \rightarrow \Lambda \\ Redir_{\Sigma_i}(\lambda_{in}) &= \left( \tilde{\sigma}_{\Sigma_i}(\lambda_{in}), redir_{\Sigma_i}(\vec{\omega}_{in}, \vec{N}_{\Sigma_i}(\sigma_{\Sigma_i}^{-1}(\tilde{\sigma}_{\Sigma_i}(\lambda_{in}))) \right). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Das *sequentielle*<sup>1</sup> Raytrace berechnet zwei Arten von Strahlengängen durch das optische System. Es werden also nur Strahlengänge betrachtet, die alle optischen Grenzflächen in der gleichen Reihenfolge durchlaufen.

1. *Forward-Raytrace*<sup>2</sup>: Ein Lichtstrahl  $\lambda_\chi$  wird von der Lichtquelle ausgehend *sequentiell*

<sup>1</sup>Die Bezeichnung des Raytraces als *sequentiell* meint, dass die optischen Flächen entsprechend der Reihenfolge vorwärts oder rückwärts durchlaufen werden

<sup>2</sup>siehe Abbildung 2.2a

## 2 Grundlagen

durch die optischen Flächen in aufsteigender Reihenfolge bis zum Schnittpunkt mit der Zielfläche  $\Psi$  verfolgt. Diese Abbildung

$$\mathcal{F} : \Lambda_\chi \rightarrow \Psi$$

kann mittels Verkettung beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda_\chi) &= \underbrace{\text{Redir}_{\Sigma_1}(\lambda_\chi)}_{=: \lambda_1} \rightarrow \underbrace{\text{Redir}_{\Sigma_2}(\lambda_1)}_{=: \lambda_2} \rightarrow \cdots \rightarrow \underbrace{\text{Redir}_{\Sigma_n}(\lambda_{n-1})}_{=: \lambda_n} \rightarrow \tilde{\sigma}_\Psi(\lambda_n) \\ &= \tilde{\sigma}_\Psi(\text{Redir}_{\Sigma_n}(\text{Redir}_{\Sigma_{n-1}}(\cdots(\text{Redir}_{\Sigma_1}(\lambda_\chi))\cdots))). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

2. *Backward-Raytrace*<sup>3</sup>: Ein Lichtstrahl  $\lambda_\Psi$  wird von der Zielfläche aus *sequentiell* durch die nummerierten optischen Flächen bis zum Schnittpunkt mit der Lichtquelle verfolgt. Diese Abbildung

$$\mathcal{R} : \Lambda_\Psi \rightarrow \chi$$

kann nur dann sinnvoll verwendet werden, wenn  $\chi$  eine ausgedehnte Lichtquelle ist. Das *Backward-Raytrace* kann ebenfalls durch Verkettung beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\lambda_\Psi) &= \underbrace{\text{Redir}_{\Sigma_n}(\lambda_\Psi)}_{=: \lambda_n} \rightarrow \underbrace{\text{Redir}_{\Sigma_{n-1}}(\lambda_{n-1})}_{=: \lambda_{n-1}} \rightarrow \cdots \rightarrow \underbrace{\text{Redir}_{\Sigma_1}(\lambda_2)}_{=: \lambda_1} \rightarrow \tilde{\sigma}_\chi(\lambda_1) \\ &= \tilde{\sigma}_\chi(\text{Redir}_{\Sigma_1}(\text{Redir}_{\Sigma_2}(\cdots(\text{Redir}_{\Sigma_n}(\lambda_\Psi))\cdots))). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Die Abbildungen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{R}$  können analytisch berechnet werden, falls die Schnittpunktberechnungen  $\tilde{\sigma}_{\Sigma_i}$ ,  $\tilde{\sigma}_\chi$  und  $\tilde{\sigma}_\Psi$  durch analytische Formeln gegeben sind.

Es ist häufig von Interesse Strahlengänge zu betrachten, deren Anfangsstrahl durch einen Punkt auf der ersten optischen Fläche  $\Sigma_1$  (bzw.  $\Sigma_n$ ) und einen Ausgangspunkt  $x \in \chi$  (bzw.  $\psi \in \Psi$ ) definiert wird. In diesen Fällen muss der erste Schnittpunkt nicht berechnet werden. Wir führen für  $i \in \{1, n\}$  die Funktion

$$\begin{aligned} \lambda_{\Sigma_i} &: \mathbb{R}^3 \times \Pi_{\Sigma_i} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \\ \lambda_{\Sigma_i}(p, \pi_{\Sigma_i}) &= (p, \tilde{\omega}_{\Sigma_i}(p, \pi_{\Sigma_i})) \text{ mit } \tilde{\omega}_{\Sigma_i}(p, \pi_{\Sigma_i}) := \frac{\sigma_{\Sigma_i}(\pi_{\Sigma_i}) - p}{\|\sigma_{\Sigma_i}(\pi_{\Sigma_i}) - p\|} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

ein.

Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir für diesen Fall dieselben Bezeichnungen für die *Raytrace-Funktionen*. Für den *Forward-Raytrace* gilt in diesem Fall für  $x \in \chi$  und  $\pi_{\Sigma_1} \in \Pi_{\Sigma_1}$

---

<sup>3</sup>siehe Abbildung 2.2b

die Definition

$$\mathcal{F}(x, \pi_{\Sigma_1}) = \tilde{\sigma}_{\Psi} \left( \text{Redir}_{\Sigma_n} \left( \text{Redir}_{\Sigma_{n-1}} \left( \cdots \left( \text{Redir}_{\Sigma_1} (\lambda_{\Sigma_1}(x, \pi_{\Sigma_1})) \right) \cdots \right) \right) \right). \quad (2.2.7)$$

Der *Backward-Raytrace* ändert sich für  $y \in \Psi$  und  $\pi_{\Sigma_n} \in \Pi_{\Sigma_n}$  analog zu

$$\mathcal{R}(y, \pi_{\Sigma_n}) = \tilde{\sigma}_{\chi} \left( \text{Redir}_{\Sigma_1} \left( \text{Redir}_{\Sigma_2} \left( \cdots \left( \text{Redir}_{\Sigma_n} (\lambda_{\Sigma_n}(y, \pi_{\Sigma_n})) \right) \cdots \right) \right) \right). \quad (2.2.8)$$

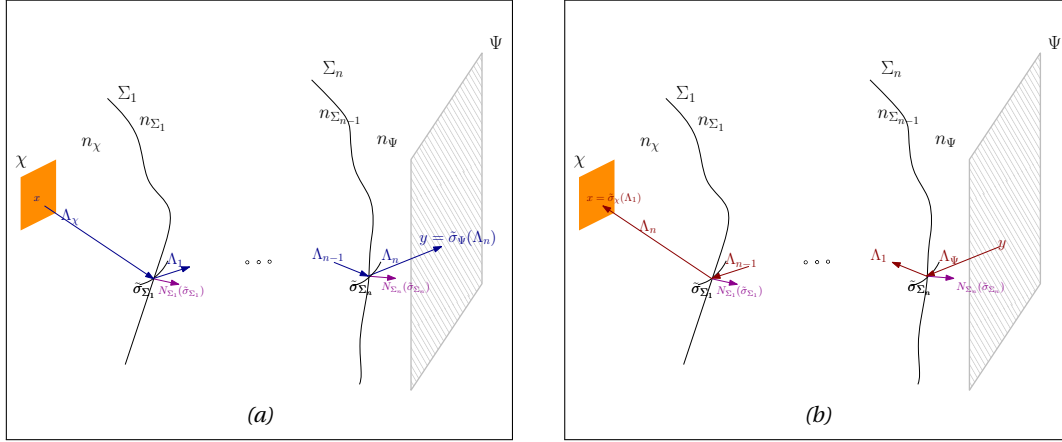


Abb. 2.2: (a) Darstellung des Forward-raytraces durch ein sequentielles optisches System.  
(b) Darstellung des Backward-raytraces durch ein sequentielles optisches System.

### 2.2.1 Umlenkung der Lichtstrahlen an optischen Grenzflächen

In diesem Unterkapitel soll die Funktion  $\text{redir}_{\Sigma} : S^2 \times S^2 \rightarrow S^2$ , die die Umlenkung der Lichtstrahlen an der optischen Grenzfläche  $\Sigma$  beschreibt, analytisch hergeleitet werden. Aufgrund der Klasse der zu optimierenden optischen Systeme ist die Art der Ablenkung eindeutig zu definieren. Es werden zwei Fälle unterschieden. Aufgrund der Materialeigenschaft der Grenzfläche oder der Medien, die durch diese Fläche berandet werden, gibt es verschiedene Umlenkungsverhalten. Es ist möglich, dass der Lichtstrahl reflektiert oder gebrochen wird. Beide Umlenkungsmöglichkeiten sind in Abbildung 2.3 dargestellt

#### vektorielles Reflektionsgesetz

Der Richtungsvektor  $\vec{\omega}_{in}$  schließt mit dem Normalenvektor  $\vec{N}_{\Sigma}$  an der Auftreffstelle auf der Fläche  $\Sigma$  (siehe Abbildung 2.3a) den Winkel

$$\alpha = \arccos(|\langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_{\Sigma} \rangle|)$$

## 2 Grundlagen

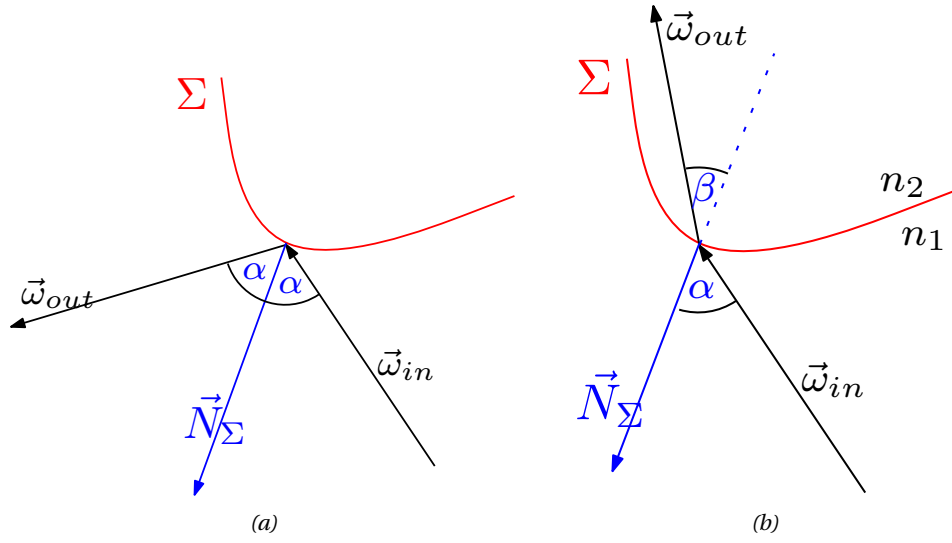


Abb. 2.3: Darstellung des optischen Prinzips der Reflexion und Brechung. (a) Der Lichtstrahl wird an der optischen Grenzfläche  $\Sigma$  reflektiert. (b) Der Lichtstrahl wird an der optischen Grenzfläche  $\Sigma$  in das optisch dichtere Medium hineingebrochen.

ein.

Falls  $\Sigma$  reflektierend ist, wird der Lichtstrahl so umgelenkt, dass der ausfallende Lichtstrahl  $\vec{\omega}_{out}$  denselben Winkel mit dem  $\vec{N}_\Sigma$  einschließt. Die entstehende Forderung lautet

$$\langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle \stackrel{!}{=} -\langle \vec{\omega}_{out}, \vec{N}_\Sigma \rangle.$$

Darüber hinaus liegt  $\vec{\omega}_{out}$  in der Ebene, die durch  $\vec{\omega}_{in}$  und  $\vec{N}_\Sigma$  aufgespannt wird. Es muss also für ein  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  gelten

$$\vec{\omega}_{out} \stackrel{!}{=} \mu \vec{\omega}_{in} + \nu \vec{N}_\Sigma.$$

Einsetzen der zweiten Forderung in die erste liefert

$$\begin{aligned} \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle &\stackrel{!}{=} -\langle \vec{\omega}_{out}, \vec{N}_\Sigma \rangle \\ &= -\langle \mu \vec{\omega}_{in} + \nu \vec{N}_\Sigma, \vec{N}_\Sigma \rangle \\ &= -\mu \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle - \nu \langle \vec{N}_\Sigma, \vec{N}_\Sigma \rangle \\ &= -\mu \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle - \nu \\ \Rightarrow \nu &= (-1 - \mu) \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liefert

$$\vec{\omega}_{out} = \mu \vec{\omega}_{in} - (1 + \mu) \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle \vec{N}_\Sigma.$$



Zur Bestimmung von  $\mu$  beziehen wir uns auf die Forderung, dass Richtungsvektoren Einheitsvektoren sein sollen. Da Einfallswinkel und Ausfallswinkel identisch sind ist eine hinreichende Forderung gegeben durch

$$\vec{\omega}_{in} \times \vec{N}_\Sigma \stackrel{!}{=} \vec{\omega}_{out} \times \vec{N}_\Sigma.$$

Einfügen des Zwischenergebnisses in diese Forderung liefert

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{in} \times \vec{N}_\Sigma &= (\mu \vec{\omega}_{in} - (1 + \mu) \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle \vec{N}_\Sigma) \times \vec{N}_\Sigma \\ &= \mu (\vec{\omega}_{in} \times \vec{N}_\Sigma) + (1 + \mu) \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle \underbrace{(\vec{N}_\Sigma \times \vec{N}_\Sigma)}_{=0} \\ &= \mu (\vec{\omega}_{in} \times \vec{N}_\Sigma) \\ \Rightarrow \mu &= 1. \end{aligned}$$

Zusammenfassen dieser Ergebnisse liefert das Reflektionsgesetz

$$redir(\vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma) = \vec{\omega}_{in} - 2 \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle \vec{N}_\Sigma. \quad (2.2.9)$$

### vektorielles Brechungsgesetz

Licht breitet sich in transparenten Medien mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus. Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Medium wird mittels des Brechungsindex angegeben. Sei  $c_0$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und  $c_i$  die Lichtgeschwindigkeit im Medium  $i$ . Der Brechungsindex beschreibt die inverse relative Lichtgeschwindigkeit im Medium bezüglich  $c_0$

$$n_i := \frac{c_0}{c_i}.$$

Die Veränderung der Geschwindigkeit des Lichts an einer optischen Grenzfläche ändert die Richtung des Lichtstrahls. In Abbildung 2.3b sieht man die Brechung des Strahles  $\vec{\omega}_{in}$  zur Flächennormalen  $\vec{N}_\Sigma$  hin, der vom optisch dünneren Medium 1 ins optisch dichtere Medium 2 gebrochen wird. Das *Snelliussche Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} =: n \quad (2.2.10)$$

beschreibt die Beziehung zwischen den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ . Auf Grundlage dieses einfachen physikalischen Gesetzes kann nun die vektorielle Änderung des Lichtstrahls an der Grenzfläche hergeleitet werden. Der Lichtstrahl  $\vec{\omega}_{out}$  liegt in der durch die Einfallrichtung  $\vec{\omega}_{in}$  und der Flächennormale  $\vec{N}_\Sigma$  aufgespannten Ebene. Deshalb ergibt sich  $\vec{\omega}_{out}$  als Linearkombina-

## 2 Grundlagen

tion der Vektoren  $\vec{\omega}_{in}$  und  $\vec{N}_\Sigma$ :

$$\vec{\omega}_{out} = \mu \vec{\omega}_{in} + \nu \vec{N}_\Sigma$$

Einsetzen von  $\sin(\alpha) = \|\vec{\omega}_{in} \times \vec{N}_\Sigma\|$  und  $\sin(\beta) = \|\vec{\omega}_{out} \times \vec{N}_\Sigma\|$  in die Gleichung (2.2.10) liefert

$$\begin{aligned} \frac{n_2}{n_1} &= \frac{\|\vec{\omega}_{in} \times \vec{N}_\Sigma\|}{\|\vec{\omega}_{out} \times \vec{N}_\Sigma\|} = \frac{\|\vec{\omega}_{in} \times \vec{N}_\Sigma\|}{\|(\mu \vec{\omega}_{in} + \nu \vec{N}_\Sigma) \times \vec{N}_\Sigma\|} \\ &= \frac{\|\vec{\omega}_{in} \times \vec{N}_\Sigma\|}{\|\mu(\vec{\omega}_{in} \times \vec{N}_\Sigma) + \underbrace{\nu(\vec{N}_\Sigma \times \vec{N}_\Sigma)}_{=0}\|} = \frac{1}{\mu} \\ \Rightarrow \mu &= \frac{n_1}{n_2} = n^{-1} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Da  $\vec{\omega}_{out}$  ein Richtungsvektor ist, kann die Forderung

$$1 = \|\vec{\omega}_{out}\|^2 = \|n^{-1} \vec{\omega}_{in} + \nu \vec{N}_\Sigma\|^2 = \nu^2 + 2\nu n^{-1} \langle \vec{N}_\Sigma, \vec{\omega}_{in} \rangle + n^{-2}$$

aufgestellt werden. Auflösen der Gleichung nach  $\nu$  liefert:

$$\nu = -n^{-1} \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle + \sqrt{n^{-2} \cdot \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle^2 + 1 - n^{-2}}.$$

Der Ausdruck unterhalb der Wurzel ist negativ, falls der kritische Winkel überschritten wird, d. h., falls

$$|\langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle| > \sqrt{1 - n^{-2}} = \cos(\arcsin(n^{-1})).$$

In diesem Fall tritt Totalreflexion ein. Das heißt, dass der Lichtstrahl nicht gebrochen, sondern reflektiert wird. Da wir *sequentielle optische Systeme* betrachten, gilt für so einen Lichtstrahl in diesem Fall, dass er nicht auf die Zielfläche auftrifft, da die Reihenfolge der optischen Flächen nicht eingehalten wird. Im Regelfall trifft so ein Strahl auch nicht auf die Zielfläche, jedoch kommen Situationen vor, in denen der Strahl chaotisch durch das optische System vagabundiert und schließlich doch noch auf die Zielfläche trifft. Diese Strahlengänge werden in *sequentuellen Raytracern* nicht berücksichtigt.

Zusammenfassen dieser Ergebnisse liefert das vektorielle Brechungsgesetz

$$\text{redir}(\vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma, n) = \begin{cases} n^{-1} \cdot \vec{\omega}_{in} + \nu \vec{N}_\Sigma, & \text{falls } |\langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle| < \sqrt{1 - n^{-2}} \\ \vec{\omega}_{in} - 2\langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle \vec{N}_\Sigma, & \text{sonst Totalreflexion.} \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Auch bei kleineren Auftreffwinkeln tritt ein weiterer Effekt auf, der in der Modellierung der Problemstellung von Bedeutung sein wird. Dieser Effekt wird *Fresnelsche Reflexion* genannt

und beschreibt das Verhalten, dass ein Strahl gebrochen wird, dabei jedoch ein Teil der Strahlung auch immer reflektiert wird, so dass die Energie des Strahles durch die Brechung abnimmt. Die hier verwendete Formel

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma) &= \begin{cases} 0.5 \cdot (\mathfrak{G}_1^2 + \mathfrak{G}_2^2), & \text{falls } |\langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle| < \sqrt{1 - n^{-2}} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.2.13) \\ \text{mit } \mathfrak{G}_1(\vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma) &= \frac{n_{in} \cdot \langle \vec{\omega}_{out}, \vec{N}_\Sigma \rangle - n_{out} \cdot \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle}{n_{in} \cdot \langle \vec{\omega}_{out}, \vec{N}_\Sigma \rangle + n_{out} \cdot \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle} \\ \text{und } \mathfrak{G}_2(\vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma) &= \frac{n_{out} \cdot \langle \vec{\omega}_{out}, \vec{N}_\Sigma \rangle - n_{in} \cdot \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle}{n_{out} \cdot \langle \vec{\omega}_{out}, \vec{N}_\Sigma \rangle + n_{in} \cdot \langle \vec{\omega}_{in}, \vec{N}_\Sigma \rangle} \end{aligned}$$

bezieht sich auf unpolarisiertes Licht (siehe [8, Abschnitt 5]).

## 2.3 Grundlagen der Differentialgeometrie

Die Fragestellung dieser Arbeit beschäftigt sich mit optischen Flächen. Um diese mathematisch korrekt zu modellieren werden in der Folge differentialgeometrische Aussagen benötigt, die in diesem Kapitel kurz eingeführt werden.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nach Lebesgue ermöglicht das Ableiten von mehrdimensionalen Integralgleichungen. Als Orientierung dient [1, p. 363], sowie die Zusammenfassung in Diplomarbeit [20, p.23-25].

**Theorem 2.1** (Lebesgue Differentiationstheorem). *Sei  $\lambda$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  bezüglich des Maßes  $\lambda$ . Die Integralfunktion  $G(A) := \int_A f \, d\lambda$  ist ein Funktional auf der Borel- $\sigma$ -Algebra von  $\mathbb{R}^n$ . Die Ableitung dieser Integralfunktion an der Stelle  $x \in \mathbb{R}^n$  ist definiert durch*

$$G'(x) := \lim_{B_x \rightarrow x} \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} f \, d\lambda,$$

wobei  $B_x$   $n$ -dimensionale Kugeln mit Mittelpunkt in  $x$  sind, deren Durchmesser gegen 0 konvergiert.

Die Ableitung existiert für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit

$$G'(x) = f(x)$$

Im Verlauf dieser Arbeit werden Integrale mit der Sphäre  $S^2$  als Integrationsgebiet aufgestellt.  $S^2$  ist eine 2-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* im  $\mathbb{R}^3$ . Wir definieren den Begriff der Untermannigfaltigkeit.

## 2 Grundlagen

**Definition 2.1** (Untermannigfaltigkeit und reguläre Parametrisierung). Seien  $m \leq n$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$  und  $x \in X$ , so dass eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^m$  und eine injektive und stetig differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  existiert. Falls  $f(U) \subset X$  eine in  $X$  offene Umgebung von  $x$  und  $\mathbf{D}f(f^{-1}(x))$  injektiv ist, so heißt  $X$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m$  und  $f$  heißt reguläre Parametrisierung an  $x$ .

Um Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten zu integrieren definieren wir nun die Gramsche Determinante.

**Definition 2.2** (Gramsche Determinante). Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $f : U \rightarrow X$  eine reguläre Parametrisierung mit  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Die Gramsche Determinante  $\mathfrak{F}f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich  $f$  wird definiert durch

$$\mathfrak{F}f(u) = \det(\mathbf{D}f(u)^T \cdot \mathbf{D}f(u)). \quad (2.3.1)$$

Der Operator  $\mathbf{D}$  bezeichnet die Jakobi-Matrix der Abbildung  $f$ . Die Eigenwerte der Matrix sind positiv, der Rang ist  $m$  und damit gilt  $\mathfrak{F}f(u) > 0$ .

**Theorem 2.2** (Integration über Untermannigfaltigkeiten). Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es gibt genau ein Elementarintegral  $\lambda_X$  auf  $X$ , so dass für jede reguläre Parametrisierung  $\phi : U \rightarrow X$  und jedes  $\varphi \in C_c(X)$  mit

$$\overline{\{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\}} \subset \phi(U)$$

die Gleichung

$$\int_X \varphi(x) d\lambda_X(x) = \int_U \varphi(\phi(u)) \sqrt{\mathfrak{F}\phi(u)} d\lambda^m(u) \quad (2.3.2)$$

gilt.

**Lemma 2.1.** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $f := (f_1, f_2, f_3)^T$  eine reguläre Parametrisierung. Für die Gramsche Determinante gilt:

$$\mathfrak{F}f(u, v) = \|\partial_u f \times \partial_v f\|^2 \quad (2.3.3)$$

*Beweis.* Aufstellen der gramschen Determinante führt zu

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}f(u, v) &= \det \begin{pmatrix} \partial_u f_1 & \partial_u f_2 & \partial_u f_3 \\ \partial_v f_1 & \partial_v f_2 & \partial_v f_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_u f_1 & \partial_v f_1 \\ \partial_u f_2 & \partial_v f_2 \\ \partial_u f_3 & \partial_v f_3 \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} \partial_u f_1^2 + \partial_u f_2^2 + \partial_u f_3^2 & \partial_u f_1 \partial_v f_1 + \partial_u f_2 \partial_v f_2 + \partial_u f_3 \partial_v f_3 \\ \partial_u f_1 \partial_v f_1 + \partial_u f_2 \partial_v f_2 + \partial_u f_3 \partial_v f_3 & \partial_v f_1^2 + \partial_v f_2^2 + \partial_v f_3^2 \end{pmatrix} \\
 &= \partial_u f_1^2 \partial_v f_2^2 + \partial_u f_1^2 \partial_v f_3^2 + \partial_u f_2^2 \partial_v f_1^2 + \partial_u f_2^2 \partial_v f_3^2 + \partial_u f_3^2 \partial_v f_1^2 + \partial_u f_3^2 \partial_v f_2^2 \\
 &\quad + -2\partial_u f_1 \partial_v f_1 \partial_u f_2 \partial_v f_2 - 2\partial_u f_1 \partial_v f_1 \partial_u f_3 \partial_v f_3 - 2\partial_u f_2 \partial_v f_2 \partial_u f_3 \partial_v f_3 \\
 &= (\partial_u f_1 \partial_v f_2 - \partial_u f_2 \partial_v f_1)^2 + (\partial_u f_1 \partial_v f_3 - \partial_u f_3 \partial_v f_1)^2 + (\partial_u f_2 \partial_v f_3 - \partial_u f_3 \partial_v f_2)^2 \\
 &= \|\partial_u f \times \partial_v f\|^2
 \end{aligned}$$

□

## 2.4 Definition optischer Größen

Die korrekte physikalische und physiologische Beschreibung von Lichtquellen ist wichtig für das Verständnis des optischen Problems, das in dieser Arbeit behandelt wird. Wir führen zuerst die strahlungsphysikalischen Größen ein, von denen die optischen Größen abgeleitet werden. Wir orientieren uns an [18, p.69-72].

### 2.4.1 Strahlungsphysikalische Größen

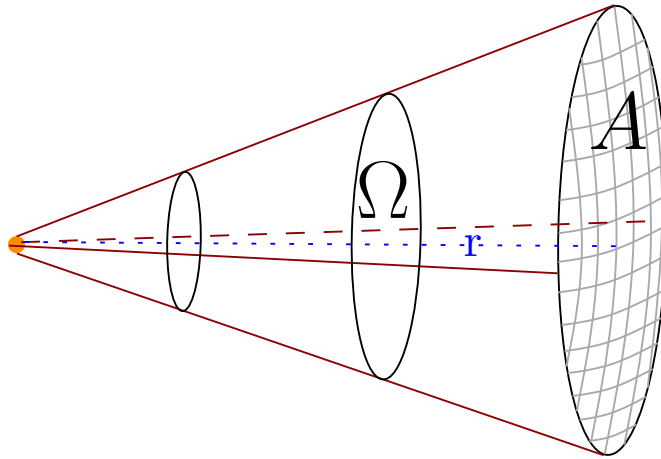


Abb. 2.4: Schematische Darstellung der Raumwinkel.

Die zentrale charakteristische Größe einer Strahlungsquelle ist die *Strahlungsleistung*, oder auch *Strahlungsfluss*. Diese Größe wird durch den Quotienten aus Energie pro Zeit beschrie-

## 2 Grundlagen

ben und mit  $\Phi_e$  bezeichnet und in der SI-Einheit *Watt* [ $W = Js^{-1}$ ] angegeben. Der *Strahlungsfluss* breitet sich von der Strahlungsquelle in den Raum aus. Die Strahlungsquellen sind in der Realität ausgedehnte Geometrien, die über die Oberfläche  $\chi$  Strahlung von jedem Punkt emittieren.

In vielen Problemen der Optik sind die Dimensionen der optischen Systeme derart, dass die Größe der Lichtquelle gegenüber den Optiken sehr klein ist, so dass die Ausdehnung vernachlässigt wird. Diese Approximation eröffnet ein breites Spektrum an Modellierungsmöglichkeiten in der geometrischen Optik. In diesen Fällen wird die Ausdehnung der Strahlungsquelle vernachlässigt und als Punkt approximiert. Mit Hilfe dieser Modellierung kann die Abstrahlung der Lichtquelle auf der Menge der Raumrichtungen, den Raumwinkeln, beschrieben werden. Der *Raumwinkel*  $\Omega$  wird in der Größe *Steradian* ( $sr$ ) gemessen. Diese Einheit beschreibt eine normierte Flächenäquivalente auf einer Kugel. Sei die Fläche  $A$  auf einer Kugel mit Radius  $r$  von einer Strahlungsquelle beleuchtet (siehe Abbildung 2.4), so ist der Raumwinkel die normierte Fläche

$$\Omega = \frac{A}{r^2} sr \leq 4\pi sr. \quad (2.4.1)$$

Der Raumwinkel ist äquivalent zu der Winkelangabe in Bogenmaß in der zweidimensionalen Geometrie.

Alle weiteren strahlungsphysikalischen Größen sind differentielle Größen des *Strahlungsflusses*.

**Strahlstärke** Vernachlässigt man die Ausdehnung der Strahlungsquelle, so kann die Ausbreitung der Strahlung unabhängig von Abständen angegeben werden, indem man die Intensität  $I_e(\vec{\omega})$  in [ $W sr^{-1}$ ] pro Raumrichtung  $\vec{\omega} \in S^2$  betrachtet (siehe Abbildung 2.5a). Diese Größe wird *Strahlstärke* genannt mit der differentiellen Definition

$$I_e(\vec{\omega}) := \lim_{d\Omega_{\vec{\omega}} \rightarrow \{\vec{\omega}\}} \frac{d\Phi_e}{d\Omega_{\vec{\omega}}} \left[ \frac{W}{sr} \right] \text{ mit } d\Omega_{\vec{\omega}} \in S^2 \text{ messbar, } \vec{\omega} \in \Omega_{\vec{\omega}}.$$

**Bestrahlungsstärke** Trifft der *Strahlungsfluss* der Strahlungsquelle auf eine Fläche  $\Sigma$ , so werden die Punkte  $\sigma$  der Fläche unterschiedlich intensiv bestrahlt. Man spricht hier von der *Bestrahlungsstärke*  $B_e(\sigma)$  in [ $W m^{-2}$ ], einer differentiellen Größe des *Strahlungsflusses* definiert durch

$$B_e(\sigma) := \lim_{dA_{\sigma} \rightarrow \{\sigma\}} \frac{d\Phi_e}{dA_{\sigma}} \left[ \frac{W}{m^2} \right] \text{ mit } dA_{\sigma} \subset \Sigma \text{ messbar, } \sigma \in A_{\sigma}. \quad (2.4.2)$$

Die geometrischen Zusammenhänge werden in Abbildung 2.5a dargestellt. Falls  $\chi$  eine Punktlichtquelle ist kann ein Zusammenhang mit der Strahlstärke hergestellt werden:

Wir betrachten den Lichtstrahl von  $\chi$  in Richtung  $\vec{\omega}$  mit dem Auftreffpunkt  $\sigma$ . Mit  $r$  bezeichnen wir den Abstand zwischen der Punktquelle und  $\sigma$  und  $\vec{N}_\Sigma$  ist der Normalenvektor der Fläche  $\Sigma$  an der Stelle  $\sigma$ .

Im Grenzübergang  $dA_\sigma \rightarrow \{\sigma\}$  kann das infinitesimale Flächenstück  $dA_\sigma$  als planar angenommen werden. Sei  $d\Omega_\sigma$  der Raumwinkel, der von der Strahlungsquelle aus das Flächenstück  $dA_\sigma$  beleuchtet. Durch Projektion des planaren Flächenstücks  $dA_\sigma$  in Richtung  $\vec{\omega}$  und aufgrund der Definition des Raumwinkels in Gleichung (2.4.1) gilt

$$dA \approx \frac{d\Omega_\sigma r^2}{|\langle \vec{\omega}, \vec{N}_\Sigma(\sigma) \rangle|}. \quad (2.4.3)$$

Diese geometrischen Zusammenhänge können in Abbildung 2.5a nachvollzogen werden. Wenden wir diese Grenzwertbetrachtung auf die *Bestrahlungsstärke* an, so ergibt sich

$$B_e(\sigma) = \lim_{dA_\sigma \rightarrow \{\sigma\}} \frac{d\Phi_{e,\sigma}}{dA_\sigma} = \lim_{d\Omega_{\vec{\omega}} \rightarrow \{\vec{\omega}\}} \frac{d\Phi_{e,\sigma} |\langle \vec{\omega}, \vec{N}_\Sigma(\sigma) \rangle|}{d\Omega_\sigma r^2} = I_e(\vec{\omega}) \frac{|\langle \vec{\omega}, \vec{N}_\Sigma(\sigma) \rangle|}{r^2} \left[ \frac{W}{m^2} \right].$$

**Strahldichte** Die Strahlungsquelle ist in der Realität nicht punktförmig, sondern ausgedehnt.

Die *Strahlstärke*  $I_e(\vec{\omega})$  für ein  $\vec{\omega} \in S^2$  ist somit ein integrierter Wert einer zusätzlich vom Ort  $x \in \chi$  abhängigen Größe  $L_e: \chi \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ , die *Strahldichte* (in  $[W \text{ cd}^{-1} \text{ m}^{-2}]$ ).

Strahlungsquellen mit unterschiedlicher Größe, aber gleichem *Strahlungsfluss* erscheinen umso heller, je kleiner die strahlende Fläche ist (vgl. [18, S.70]).

Im Umkehrschluss sieht man, dass für eine planare Strahlungsquelle  $\chi$ , von der in jedem Punkt Strahlung der gleichen Helligkeit  $L_e$  in den Raum  $S^2$  emittiert wird, die generierte Strahlstärke  $I_e(\vec{\omega})$  proportional zu der aus  $\vec{\omega}$  gesehenen Fläche  $\|\chi\| \langle \vec{N}_\chi(x), \vec{\omega} \rangle$  der Quelle ist (siehe Abbildung 2.5b). Für die Definition der *Strahldichte* wird also in diesem Fall

$$I_e(\vec{\omega}) = L_e \|\chi\| \langle \vec{N}_\chi, \vec{\omega} \rangle$$

gefordert. Diese Erkenntnis führt uns für allgemeine Strahlungsquellen zu der Definition

$$L_e(x, \vec{\omega}) := \lim_{d\chi_x \rightarrow \{x\}} \frac{dI_e(\vec{\omega})}{d\chi_x \langle \vec{N}_\chi(x), \vec{\omega} \rangle}.$$

Da das Skalarprodukt  $\langle \vec{N}_\chi(x), \vec{\omega} \rangle$  nicht von  $d\chi_x$  abhängig ist, kann es als Konstante aus dem Grenzwert gezogen werden:

$$L_e(x, \vec{\omega}) \langle \vec{N}_\chi(x), \vec{\omega} \rangle = \lim_{d\chi_x \rightarrow \{x\}} \frac{dI_e(\vec{\omega})}{d\chi_x}. \quad (2.4.4)$$

## 2 Grundlagen

Eine ausgedehnte Strahlungsquelle wird durch die Oberfläche  $\chi$  mit der charakteristischen *Strahldichtefunktion*  $L_{e,\chi} : \chi \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  definiert. Eine punktförmige Strahlungsquelle hingegen wird durch eine *Strahlstärkefunktion*  $I_e : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  beschrieben. Zu einer ausgedehnten Strahlungsquelle mit *Strahldichtefunktion*  $L_{e,\chi}$  wird die zugehörige *Strahlstärkefunktion* berechnet durch

$$I_{e,\chi}(\vec{\omega}) = \iint_{\chi} L_{\chi}(x, \vec{\omega}) \langle \vec{\omega}, \vec{N}_{\chi}(x) \rangle dx. \quad (2.4.5)$$

Wir stellen den Zusammenhang der vier strahlungsphysikalischen Größen nochmal in folgendem Beispiel her. Zur Vereinfachung der Formeln, bzw. besserer geometrischer Vorstellung wollen wir noch eine Hilfsbetrachtung anstellen.

**Lemma 2.2.** Für die gramsche Determinante  $\mathfrak{F}$  der Funktion  $\vec{\omega}_{\Sigma}(x, \cdot) : \Pi_{\Sigma} \rightarrow S^2$  gilt

$$\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma})(x, \pi_{\Sigma}) = \mathfrak{F}(\sigma_{\Sigma})(\pi_{\Sigma}) \left( \frac{\langle \vec{N}_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}), \vec{\omega}_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}) \rangle}{\|\sigma_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}) - x\|^2} \right)^2$$

mit

$$\vec{N}_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}) = \frac{\frac{\partial}{\partial \pi_{\Sigma}^1} \sigma_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}) \times \frac{\partial}{\partial \pi_{\Sigma}^2} \sigma_{\Sigma}(\pi_{\Sigma})}{\left\| \frac{\partial}{\partial \pi_{\Sigma}^1} \sigma_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}) \times \frac{\partial}{\partial \pi_{\Sigma}^2} \sigma_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}) \right\|}$$

*Beweis.* Die Funktion  $\vec{\omega}_{\Sigma} : \Pi_{\Sigma} \rightarrow S^2$  ist eine Verkettung der Funktion

$$\alpha : \Sigma \rightarrow S^2 \text{ mit } \alpha(\sigma) := \frac{\sigma - x}{\|\sigma - x\|}$$

und  $\sigma : \Pi_{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  mit  $\vec{\omega}_{\Sigma} = \alpha \circ \sigma$ . Wir betrachten ein  $\pi_{\Sigma} \in \Pi_{\Sigma}^c$  mit einer Umgebung  $\Pi_{\Sigma}^c \subset \Pi_{\Sigma}$  mit  $\|\Pi_{\Sigma}^c\| = c$  für  $0 < c \leq \|\Pi_{\Sigma}\|$ . Das Gramsche Determinante von  $\vec{\omega}_{\Sigma}$  kann nun durch Integraltransformation aufgeteilt werden.

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_{\Sigma}^c} \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma})(x, \pi_{\Sigma})} d\pi_{\Sigma} &= \iint_{\vec{\omega}_{\Sigma}(\Pi_{\Sigma}^c)} d\vec{\omega} = \iint_{\alpha(\sigma_{\Sigma}(\Pi_{\Sigma}^c))} d\vec{\omega} \\ &= \iint_{\sigma_{\Sigma}(\Pi_{\Sigma}^c)} |\det \mathbf{D}\alpha(\sigma)| d\sigma \\ &= \iint_{\Pi_{\Sigma}^c} \sqrt{\mathfrak{F}(\sigma_{\Sigma})(\pi_{\Sigma})} |\det \mathbf{D}\alpha(\sigma_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}))| d\pi_{\Sigma} \end{aligned}$$

Aufgrund des *Lebesgue Differentiationstheorems* (Theorem 2.1) können die Integranden ver-



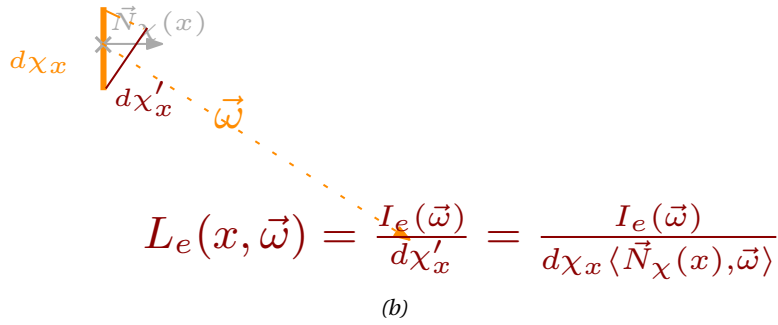
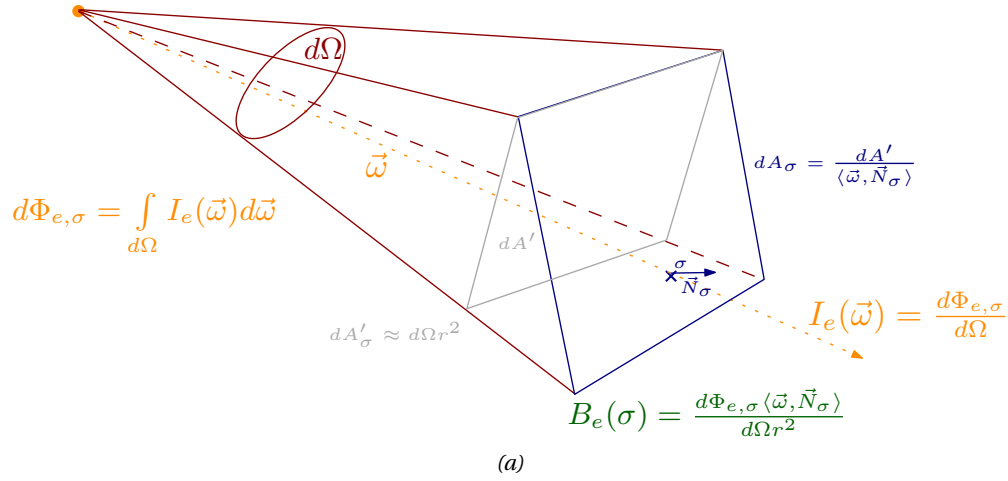


Abb. 2.5: Schematische Darstellung der Bestrahlungsstärke und Strahldichte. (a) Infinitesimale Herleitung der Bestrahlungsstärke und Strahlstärke. (b) Infinitesimale Definition der Strahldichte.

## 2 Grundlagen

glichen werden und es gilt

$$\mathfrak{F}(\vec{\omega}_\Sigma)(x, \pi_\Sigma) = \mathfrak{F}(\sigma_\Sigma)(\pi_\Sigma) |\det \mathbf{D}\alpha(\sigma_\Sigma(\pi_\Sigma))|^2.$$

Es bleibt zu zeigen, dass für  $\sigma_\Sigma^c := \sigma_\Sigma(\pi_\Sigma^c)$

$$|\det \mathbf{D}\alpha(\sigma_\Sigma^c)| = \frac{\langle \vec{N}_\Sigma(\sigma_\Sigma^c), \alpha(\sigma_\Sigma^c) \rangle}{\|\sigma_\Sigma^c - x\|^2}$$

gilt. Für  $\Sigma^c := \sigma_\Sigma(\Pi_\Sigma^c)$  und  $\Omega^c := \alpha(\Sigma^c)$  gilt

$$\|\Omega^c\| = \iint_{\Sigma^c} |\det \mathbf{D}\alpha(\sigma)| d\sigma$$

Die Grenzwertbetrachtung  $c \rightarrow 0$  liefert

$$\|\Omega^c\| \approx \|\Sigma^c\| |\det \mathbf{D}\alpha(\sigma)| \Rightarrow |\det \mathbf{D}\alpha(\sigma)| \approx \frac{\|\Omega^c\|}{\|\Sigma^c\|}.$$

Einsetzen des geometrischen Zusammenhangs aus Gleichung (2.4.3) für  $\|\Sigma^c\|$  liefert die Behauptung. □

**Beispiel 2.1** (Zusammenhang der strahlungsphysikalischen Größen). Gegeben sei die konstante Strahldichte-Verteilung  $L_e : \chi \times S^2 \rightarrow 1$  mit planarer Lichtquelle und  $\|\chi\| = 1$ .

Die Strahlstärke  $I_e(\vec{\omega})$  mit  $\vec{\omega} \in S^2$  ergibt sich nach Gleichung (2.4.4) durch Integration über  $\chi$  durch

$$I_e(\vec{\omega}) = \iint_{\chi} \underbrace{L_e(x, \vec{\omega})}_{=1} \underbrace{\langle \vec{\omega}, \vec{N}_\chi \rangle}_{=\cos(\angle(\vec{\omega}, \vec{N}_\chi))} dx = \cos(\angle(\vec{\omega}, \vec{N}_\chi)) \underbrace{\iint_{\chi} dx}_{=1} = \cos(\angle(\vec{\omega}, \vec{N}_\chi)). \quad (2.4.6)$$

Der Strahlungsfluss kann nun durch Integration der Strahlstärke berechnet werden. Dabei nehmen wir an, dass die Strahlungsquelle nur in den Halbraum  $\Omega$ , in den der Normalenvektor  $\vec{N}_\chi$  zeigt, abgegeben wird. Mit  $(\phi, \theta)$  bezeichnen wir die Polarkoordinaten mit Polachse  $\vec{N}_\chi$ . Der Winkel  $\phi$  ist der Azimuthalwinkel und  $\theta$  der Polarwinkel. Die Gramsche Determinante der

Parametrisierung über Polarwinkel ist  $\sin(\theta)$ .

$$\begin{aligned}
 \Phi_e &= \iint_{\Omega} \iint_{\chi} \underbrace{L_e(x, \vec{\omega})}_{=1} \langle \vec{\omega}, \vec{N}_{\chi} \rangle dx d\vec{\omega} = \iint_{\Omega} \langle \vec{\omega}, \vec{N}_{\chi} \rangle \underbrace{\iint_{\chi} dx d\vec{\omega}}_{=1} \\
 &= \iint_{\Omega} \cos(\angle(\vec{\omega}, \vec{N}_{\chi})) d\vec{\omega} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \\
 &= 2\pi \left[ -\frac{1}{2} \cos(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.
 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Der Strahlungsfluss  $\Phi_e(\Sigma)$ , der von der Quelle auf eine Fläche  $\Sigma$  trifft, kann für  $x \in \chi$  analog mit der zusätzlichen Transformation  $\vec{\omega}_{\Sigma}(x, \cdot) : \Pi_{\Sigma} \rightarrow S^2$  berechnet werden.

Zur Vereinfachung der Formeln leiten wir noch eine Eigenschaft der Transformation her. Der Winkelbereich, durch den vom Punkt  $x \in \chi$  aus die Fläche  $\Sigma$  beleuchtet wird bezeichnen wir mit  $\Omega(x, \Sigma)$ . Aufgrund der Gleichung (2.4.4) wird der Strahlungsfluss  $\Phi_e$  durch

$$\Phi_e = \iint_{\chi} \iint_{\Omega(x, \Sigma)} \underbrace{L_e(x, \vec{\omega})}_{=1} \langle \vec{\omega}, \vec{N}_{\chi} \rangle d\vec{\omega} dx$$

berechnet. Wenden wir die Transformation  $\vec{\omega}_{\Sigma}(x, \cdot) : \Pi_{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  und Lemma 2.2 an, so vereinfacht sich diese Formel mit der vereinfachten Schreibweise  $\vec{\omega}_{\Sigma}$  für  $\vec{\omega}_{\Sigma}(x, \pi_{\Sigma})$  zu

$$\begin{aligned}
 \Phi_e &= \iint_{\chi} \iint_{\Pi_{\Sigma}} L_e(x, \vec{\omega}_{\Sigma}) \langle \vec{\omega}_{\Sigma}, \vec{N}_{\chi} \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma})} d\pi_{\Sigma} dx \\
 &= \iint_{\chi} \iint_{\Pi_{\Sigma}} L_e(x, \vec{\omega}_{\Sigma}) \langle \vec{\omega}_{\Sigma}, \vec{N}_{\chi} \rangle \frac{\langle \vec{N}_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}), \vec{\omega}_{\Sigma} \rangle}{\|\sigma_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}) - x\|^2} d\pi_{\Sigma} dx.
 \end{aligned}$$

Die Berechnung der Bestrahlungsstärke  $B_e(\sigma(\pi_{\sigma}))$  mit  $\pi_{\sigma} \in \Pi_{\Sigma}$  entsprechend der Definition (2.4.2) führt zu

$$B_e(\sigma(\pi_{\sigma})v) = \lim_{dA_{\sigma} \subset \Pi_{\Sigma} \rightarrow \{\sigma\}} \frac{1}{\|dA_{\sigma}\|} \iint_{\chi} \iint_{dA_{\sigma}} L_e(x, \vec{\omega}_{\Sigma}) \langle \vec{\omega}_{\Sigma}, \vec{N}_{\chi} \rangle \frac{\langle \vec{N}_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}), \vec{\omega}_{\Sigma} \rangle}{\|\sigma_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}) - x\|^2} d\pi_{\Sigma} dx.$$

Leicht kann eine Majorante des inneren Integrals über  $dA_{\sigma}$  angegeben werden, da  $\Pi_{\Sigma}$  abgeschlossen ist und somit ein Maximum aller Terme des Integranden existiert. Durch Anwendung

## 2 Grundlagen

des Satzes der majorisierten Konvergenz folgt

$$B_e(\sigma(\pi_\sigma)) = \iint_{\chi} \lim_{dA_\sigma \subset \Pi_\Sigma \rightarrow \{\sigma\}} \frac{1}{||dA_\sigma||} \iint_{dA_\sigma} L_e(x, \vec{\omega}_\Sigma) \langle \vec{\omega}_\Sigma, N_\chi \rangle \frac{\langle \vec{N}_\Sigma(\pi_\Sigma), \vec{\omega}_\Sigma \rangle}{||\sigma_\Sigma(\pi_\Sigma) - x||^2} d\pi_\Sigma dx.$$

Aufgrund des Lebesgue Differentiationstheorems (Theorem 2.1) ist der Grenzwert des Integranden fast überall definiert und durch die Integration folgt für die Bestrahlungsstärke der Wert

$$B_e(\sigma(\pi_\sigma)) = \iint_{\chi} L_e(x, \vec{\omega}_\Sigma(x, \pi_\sigma)) \langle \vec{\omega}_\Sigma(x, \pi_\sigma), N_\chi \rangle \frac{\langle \vec{N}_\Sigma(\pi_\sigma), \vec{\omega}_\Sigma(x, \pi_\sigma) \rangle}{||\sigma_\Sigma(\pi_\sigma) - x||^2} dx. \quad (2.4.8)$$

### 2.4.2 Bewertung der strahlungsphysikalischen Größen

Strahlung ist Energie, die durch elektromagnetische Wellen in allen Wellenlängen von einer Quelle emittiert wird. Aufgrund der Wellenlängenabhängigkeit sind die bisher eingeführten strahlungsphysikalischen Größen integrierte Werte über die Wellenlänge. Der *Strahlungsfluss* kann als Integral

$$\Phi_e = \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_e}{\partial \lambda}(\lambda) d\lambda.$$

dargestellt werden. Das menschliche Auge nimmt die Strahlung in Abhängigkeit von der Wellenlänge wahr. Diese spektrale Empfindlichkeit wird durch die Hellempfindlichkeitskurve  $V : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  beschrieben. Diese Funktion mit Maximum bei ca.  $555 \text{ nm}$  gibt den Anteil der vom Auge in Abhängigkeit von der *Wellenlänge* der Strahlung wahrgenommenen *Strahlungsleistung* an. Um also zu dem geeigneten Lichtbegriff zu gelangen, müssen die strahlungsphysikalischen Größen noch entsprechend dieser Empfindlichkeit bewertet werden.

Wir definieren nun die lichttechnischen Größen durch die Bewertung der strahlungsphysikalischen Größen.

**Lichtfluss** Der vom Menschen wahrgenommene Anteil des *Strahlungsflusses* wird als *Lichtfluss*  $\Phi$  bezeichnet, der proportional ist zu

$$\Phi \approx \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_e}{\partial \lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda. \quad (2.4.9)$$

Der *Lichtfluss* wird in der Größe *Lumen*  $[lm]$  gemessen. Ein *lumen* repräsentiert die lichttechnische Leistung einer Kerzenflamme. Für die spektrale Verteilung von Sonnenlicht gilt der Proportionalitätsfaktor  $K_m := 683 \text{ lm/W}$ . Wir definieren den Licht-

strom  $\Phi$  durch

$$\Phi = K_m \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_e}{\partial \lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda. \quad (2.4.10)$$

**Lichtstärke** Vernachlässigt man die Ausdehnung der Strahlungsquelle, so kann die Ausbreitung der Strahlung unabhängig von Abständen angegeben werden, indem man die Intensität  $I(\vec{\omega})$  in  $cd := [lm sr^{-1}]$  pro Raumrichtung  $\vec{\omega} \in S^2$  betrachtet (siehe Abbildung 2.5a). Diese Größe wird *Lichtstärke* genannt und differentiell definiert durch

$$I(\vec{\omega}) := \lim_{d\Omega_{\vec{\omega}} \rightarrow \{\vec{\omega}\}} \frac{d\Phi}{d\Omega_{\vec{\omega}}} \left[ \frac{lm}{sr} \right] \text{ mit } d\Omega_{\vec{\omega}} \in S^2 \text{ messbar, } \vec{\omega} \in \Omega_{\vec{\omega}}.$$

**Beleuchtungsstärke** Trifft der *Lichtfluss* der Strahlungsquelle auf eine Fläche  $\Sigma$ , so werden die Punkte  $\sigma$  der Fläche unterschiedlich intensiv bestrahlt. Man spricht hier von der *Beleuchtungsstärke*  $B(\sigma)$  in  $lx := [lm m^{-2}]$ , einer differentiellen Größe des *Lichtfluss* definiert durch

$$B(\sigma) := \lim_{dA_\sigma \rightarrow \{\sigma\}} \frac{d\Phi}{dA_\sigma} \left[ \frac{lm}{m^2} \right] \text{ mit } dA_\sigma \subset \Sigma \text{ messbar, } \sigma \in A_\sigma.$$

Die geometrischen Zusammenhänge sind in Abbildung 2.5a dargestellt. Analog zur Herleitung der *Bestrahlungsstärke* kann die Beleuchtungsstärke bei einer Punktlichtquelle angegeben werden durch

$$B(\sigma) = I(\vec{\omega}) \frac{\langle \vec{\omega}, \vec{N}_\Sigma(\sigma) \rangle}{r^2} \left[ \frac{lm}{m^2} \right]. \quad (2.4.11)$$

**Leuchtdichte** Reale Lichtquellen sind nicht punktförmig, sondern ausgedehnt. Die *Strahlstärke*  $I_e(\vec{\omega})$  für ein  $\vec{\omega} \in S^2$  ist somit ein integrierter Wert einer zusätzlich vom Ort  $x \in \chi$  abhängigen Größe  $L: \chi \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ , der *Leuchtdichte* (in  $[cd m^{-2}]$ ). Analog zur Herleitung der *Strahldichte* erhalten wir die Definition

$$L(x, \vec{\omega}) := \lim_{d\chi_x \rightarrow \{x\}} \frac{dI(\vec{\omega})}{d\chi_x \langle \vec{N}_\chi(x), \vec{\omega} \rangle}.$$

Das Skalarprodukt  $\langle \vec{N}_\chi(x), \vec{\omega} \rangle$  ist keine differentielle von  $d\chi_x$ -abhängige Größe und kann aus dem Grenzwert gezogen werden, so dass gilt

$$L(x, \vec{\omega}) \langle \vec{N}_\chi(x), \vec{\omega} \rangle = \lim_{d\chi_x \rightarrow \{x\}} \frac{dI(\vec{\omega})}{d\chi_x}.$$

## 2.5 Definition des allgemeinen Beleuchtungsproblems

In einem *sequentiellen optischen System* (siehe Abschnitt 2.1) sollen die Flächen  $\Sigma_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  so bestimmt werden, dass eine geforderte *Beleuchtungsstärkeverteilung*  $B_\Psi : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$  auf der Fläche  $\Psi$  generiert wird.

Falls eine Punktlichtquelle angenommen wird, ist  $\chi \in \mathbb{R}^3$  mit einer *Lichtstärkeverteilung*  $I_\chi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Für eine ausgedehnte Lichtquelle ist  $\chi \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche mit regulärer Parametrisierung  $x : \Pi_\chi \rightarrow \chi$  und *Leuchtdichteverteilung*  $L_\chi : \chi \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Wir bezeichnen das optische System, das aus der Lichtquelle  $\chi$ , den optischen Flächen  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  und dem Detektor  $\Psi$  besteht mit  $\mathfrak{O}$ . Die Verteilung  $B_\mathfrak{O} : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist die tatsächlich durch das optische System  $\mathfrak{O}$  generierte *Beleuchtungsstärkeverteilung*. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf *Beleuchtungsstärkeverteilungen* auf einer Fläche  $\Psi$  als Zielvorgabe. Alle Modellierungen und Algorithmen können durch die Vorgabe einer *Lichtstärkeverteilung* im Winkelraum vereinfacht werden.

# 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

Alle Modellierungsideen, die in diesem Kapitel eingeführt werden, basieren darauf, dass die Lichtquelle als Punkt  $\hat{\chi} \in \mathbb{R}^3$  approximiert wird. Es werden einige Ansätze aus der Literatur eingeführt. Anschließend wird eine abstraktere Theorie eingeführt, die im Zuge dieser Arbeit auf das Beleuchtungsproblem angewandt werden soll. Im Folgenden werden drei Ansätze dargestellt. In Abschnitt 3.1 und 3.2 besteht die Grundidee darin, die generierte Beleuchtungsstärke direkt zu berechnen und damit die Optik zu bestimmen, bzw. zu optimieren. Die Theorie der schwachen Lösung in Abschnitt 3.3 versucht für einen eingeschränkten Fall Optiken zu bestimmen, die bis auf Nullmengen glatt sind. Der vierte Ansatz in Abschnitt 3.4 ist abstrakter. Es wird nicht die generierte Beleuchtungsstärke berechnet, sondern aufgrund maßtheoretischer Überlegungen eine geforderte Abbildung einer Menge von Lichtstrahlen von der Lichtquelle auf Punkte der Zielfläche (*source-target-mapping*) bestimmt. Dieses *source-target-mapping* soll die Eigenschaft haben, dass die *Beleuchtungsstärkeverteilung* generiert wird, falls ein optisches System berechnet werden kann, das dieses *source-target-mapping* erfüllt.

## 3.1 Analytische Berechnung der Beleuchtungsstärke durch eine partiellen Differentialgleichung

In diesem Abschnitt wird der Ansatz von J. S. Schruben aus [19] innerhalb unserer Notation verallgemeinert vorgestellt. Der Ansatz bezieht sich auf das Beleuchtungsproblem mit Punktlichtquelle. Der Lichtstrom der Punktlichtquelle in  $\hat{\chi} \in \mathbb{R}^3$ , der die erste optische Fläche  $\Sigma_1(\Pi_{\Sigma_1})$  beleuchtet ist

$$\Phi_{I_{\hat{\chi}}}(\Sigma_1) = \int_{\vec{\omega}_{\hat{\chi}, \Sigma_1}(\Pi_{\Sigma_1})} I_{\hat{\chi}}(\vec{\omega}) d\vec{\omega}.$$

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

Durch die reguläre Parametrisierung  $\sigma_1$  kann dieses Integral auf den Parameterbereich  $\Pi_{\Sigma_1}$  transformiert werden mit

$$\Phi_{I_{\hat{\chi}}}(\Sigma_1) = \int_{\Pi_{\Sigma_1}} I_{\hat{\chi}}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi)) \sqrt{\mathfrak{F}^\pi \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi)} d\pi. \quad (3.1.1)$$

Der Ausdruck  $\mathfrak{F}^\pi$  steht für die Funktionaldeterminante der Funktion  $\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi)$  bezüglich dem zweiten Parameter  $\pi \in \mathbb{R}^2$ .

Sei  $B_\Psi : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$  die *Beleuchtungsstärkeverteilung*, die durch das optische System realisiert wird. Der Lichtstrom auf  $\Psi$ , der durch  $B_\Psi$  definiert wird, ist

$$\Phi_{B_\Psi}(\Psi) = \int_{\Psi} B_\Psi(y) dy.$$

Das optische System mit den Flächen  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  bildet Lichtstrahlen  $\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1})$  von der Punktlichtquelle in  $\hat{\chi}$  auf die Zielfläche  $\Psi$  ab (siehe Abbildung 2.2a). Wir beschreiben diese Abbildung mit der Funktion  $\mathcal{F} : \Pi_{\Sigma_1} \rightarrow \Psi$ . Falls diese Funktion durch das optische System so realisiert wird, dass  $\mathcal{F}$  eine reguläre Parametrisierung von  $\Psi$  ist, folgt

$$\Phi_{B_\Psi}(\Psi) = \int_{\Pi_{\Sigma_1}} B_\Psi(\mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi)) \sqrt{\mathfrak{F}^\pi \mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi)} d\pi. \quad (3.1.2)$$

Dieser Ansatz beschränkt sich damit auf optische Flächen  $\Sigma_i$ , die zweifach differenzierbar sind, da  $\mathcal{F}$  bereits die Normalenvektoren der Flächen benötigt, wozu die ersten Ableitungen an den Flächen bestimmt werden müssen, so dass die ersten Ableitungen von  $\mathcal{F}$  die zweiten Ableitungen benötigen. Ein solches optisches System transportiert den Lichtstrom  $\Phi_{I_{\hat{\chi}}}(\Omega_{\Sigma_1})$  vollständig in das Gebiet  $\Psi$ , so dass  $\Phi_{I_{\hat{\chi}}} = \Phi_{B_\Psi}$  gilt und die Integrale der Gleichung (3.1.1) und (3.1.2) gleichgesetzt werden können. Ferner gilt für ein solches optisches System, dass für jede offene und messbare Teilmenge  $D\Pi_{\Sigma_1} \subset \Pi_{\Sigma_1}$  gilt

$$\int_{D\Pi_{\Sigma_1}} I_{\hat{\chi}}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi)) \sqrt{\mathfrak{F}^\pi \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi)} d\pi = \int_{D\Pi_{\Sigma_1}} B_\Psi(\mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi)) \sqrt{\mathfrak{F}^\pi \mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi)} d\pi \quad (3.1.3)$$

Das *Lebesgue Differentiationstheorem* 2.1 ermöglicht es nun, die Integranden zu vergleichen, so dass die Beleuchtungsstärke  $B_\Psi$  über die partielle Differentialgleichung

$$B_\Psi(\mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1})) = \frac{I_{\hat{\chi}}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1})) \sqrt{\mathfrak{F}^\pi \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1})}}{\sqrt{\mathfrak{F}^\pi \mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1})}} \quad (3.1.4)$$



### 3.1 Berechnung der Beleuchtungsstärke durch eine PDG

berechnet werden kann. Diese Modellierung ermöglicht es für optische Systeme mit Punktlichtquelle, deren Funktionaldeterminante  $\mathfrak{F}^\pi \mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi)$  überall definiert ist und keine Nullstellen hat, die *Beleuchtungsstärkeverteilung* mittels eines *Forward-Raytrace* an den Stellen  $\mathcal{F}(\hat{\chi}, \Pi_{\Sigma_1})$  zu bestimmen. Die Auswertung von  $\mathfrak{F}^\pi \mathcal{F}$  ist numerisch aufwändig und erhöht die Anforderungen an das optische System, da die Fläche zweifach differenzierbar sein müssen, um die Funktionaldeterminante berechnen zu können.

Setzt man zu einem bestehenden optischen System  $\mathfrak{D}$  an die Stelle von  $B_{\mathfrak{D}}$  die geforderte Beleuchtungsstärkeverteilung  $B_\Psi$  ein, so kann man aus der Gleichung (3.1.4) eine Nullstellenforderung an das optische System

$$0 \stackrel{!}{=} B_\Psi(\mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1})) \sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^\pi \mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1})} - I_{\hat{\chi}}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1})) \sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^\pi \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1})}. \quad (3.1.5)$$

formulieren.

**Bemerkung 3.1** (Ursprüngliche Modellierung von *J.S. Schruben* in [19] und numerische Auswirkungen). *J.S. Schruben hat in ihrer ursprünglichen Modellierung nur optische Systeme mit einer zu bestimmenden Freiformfläche  $\Sigma$  gewählt mit der Definition*

$$\sigma_{\Sigma_1}(\pi_{\Sigma_1}) := \hat{\chi} + \rho(\pi_{\Sigma_1}) \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\pi_{\Sigma_1}).$$

Die Funktion  $\rho$  wird als *Polarradius* bezeichnet und ist eine zweifach differenzierbare skalare Funktion  $\rho : \Pi_{\Sigma_1} \rightarrow \mathbb{R}^+$  und  $\vec{\omega} : \Pi_{\Sigma_1} \rightarrow S^2$  ist eine reguläre Parametrisierung der Sphäre. In diesem Fall gilt vereinfachend

$$\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1}) = \frac{\sigma_{\Sigma_1}(\pi_{\Sigma_1}) - \hat{\chi}}{\|\sigma_{\Sigma_1}(\pi_{\Sigma_1}) - \hat{\chi}\|} = \frac{\rho(\pi_{\Sigma_1}) \vec{\omega}(\pi_{\Sigma_1})}{\|\rho(\pi_{\Sigma_1}) \vec{\omega}(\pi_{\Sigma_1})\|} = \frac{\rho(\pi_{\Sigma_1}) \vec{\omega}(\pi_{\Sigma_1})}{\rho(\pi_{\Sigma_1})} = \vec{\omega}(\pi_{\Sigma_1}).$$

Mit Hilfe dieser Modellierung, kann die Funktion  $\mathcal{F}(\hat{\chi}, \cdot) : \Pi_{\Sigma_1} \rightarrow \Psi$  analytisch in Abhängigkeit vom Polarradius  $\rho$  und den ersten partiellen Ableitungen beschrieben werden. Wendet man die Nullstellengleichung (3.1.5) an, so erhält man eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Typ Monge-Ampère. Hierbei ist der Polarradius  $\rho$  und die ersten und zweiten partiellen Ableitungen die gesuchten Größen, die das optische System beschreiben. Wählt man eine Diskretisierung  $\Pi_{\Sigma_1}^D$  von  $\Pi_{\Sigma_1}$ , so kann mit Hilfe von *Finiten Differenzen* und der partiellen Differentialgleichung (3.1.5) eine Nullstellensuche definiert werden, die zum Beispiel mittels eines *Newton-Verfahrens* gelöst werden kann.

Das *Newton-Verfahren* setzt indirekt voraus, dass der Polarradius dreifach partiell differenziert werden kann. Die Anzahl an Gleichungen und Unbekannten ist in einem solchen Fall identisch und damit lösbar.

**Beispiel 3.1** (Validierung der Formel (3.1.4) mit Monte-Carlo-Raytrace-Ergebnissen). Wir wählen als Beispiel ein optisches System mit einer optischen Fläche in Form eines Ellipsoids und  $\hat{\chi} = (-0.5, 0, 0)^T$ . Auf einer Zielfläche  $\Psi$  wird die Beleuchtungsstärkeverteilung mittels der Formel (3.1.4) berechnet und mit Simulationsergebnissen verglichen (siehe Abbildung 3.1).

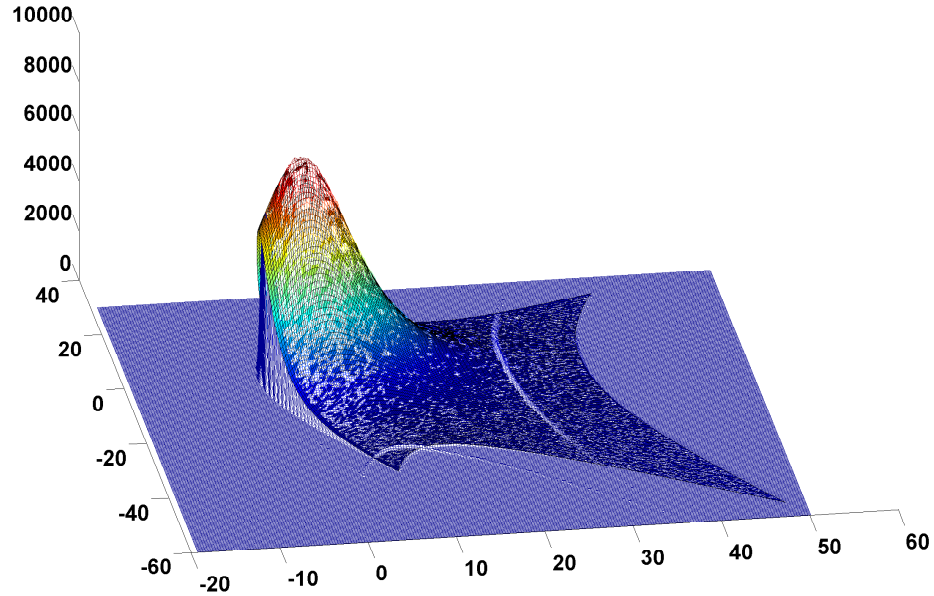


Abb. 3.1: Berechnete Beleuchtungsstärke entsprechend der Gleichung (3.1.4). Zur Validierung wird das Simulationsergebnis mit eingezeichnet.

## 3.2 Analytische Berechnung der Beleuchtungsstärke durch eine Faltung

Der vorige Ansatz weist einige Nachteile aufgrund der Komplexität der Funktionaldeterminante  $\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^\pi \mathcal{F}(\hat{\chi}, \cdot)$  auf. Zum einen müssen die Flächen in zweiter Ordnung differenzierbar sein. Desweiteren stellen Nullstellen der Determinante Umkehrpunkten der Lichtstrahlen dar, in denen die Gleichung nicht lösbar ist. Deshalb können durch diesen Ansatz nur solche optische Systeme beschrieben und gelöst werden können, deren generierte Abbildung  $\mathcal{F}(\hat{\chi}, \cdot) : \Pi_{\Sigma_1} \rightarrow \Psi$  ein Diffeomorphismus ist.

Der Ansatz von *M.A. Moiseev* und *L.L. Doskolovich* in der Ausarbeitung [14] will diese Nachteile umgehen und kann somit als Erweiterung der Modellierung von *J. S. Schruben* verstanden werden.

### 3.2 Berechnung der Beleuchtungsstärke durch eine Faltung

Auch dieser Ansatz modelliert die Lichtquelle als Punkt  $\hat{\chi} \in \mathbb{R}^3$ . Ziel des Ansatzes ist es, die Funktionaldeterminante für die Berechnung der *Beleuchtungsstärke* zu entfernen. Daraus resultiert, dass die Lösungen in einem größeren Lösungsraum gesucht werden, da auch Singularitäten der Abbildungsfunktion  $\mathcal{F}$  erlaubt sind. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die Berechnung der *Beleuchtungsstärke* nicht nur auf Auftreffpunkten von Lichtstrahlen der Punktlichtquelle, sondern auf beliebigen Punkten des Zielgebietes  $\Psi$  möglich ist.

Dies gelingt durch Faltung der partiellen Differentialgleichung (3.1.4) mit einer Funktion einer Delta-Folge  $\delta_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $c \in \mathbb{R}^+$ . Für  $c \rightarrow 0$  gilt

$$\lim_{c \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}^2} \delta_c(y) f(y) dy = f(0).$$

Mit Hilfe der Faltung kann die Beleuchtungsstärke am Punkt  $\hat{y} \in \Psi$  berechnet werden durch

$$\begin{aligned} B_{c,\mathfrak{D}}(\hat{y}) &= \frac{I_{\hat{\chi}}(\tilde{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1}) \sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^{\pi} \tilde{\omega}_{\Sigma_1}(\mathcal{F}^{-1}(\hat{y}))})}{\sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^{\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\hat{y}))}} \\ &= \iint_{\mathcal{F}(\Psi)} \frac{I_{\hat{\chi}}(\tilde{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1}) \sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^{\pi} \tilde{\omega}_{\Sigma_1}(\mathcal{F}^{-1}(\hat{y}))})}{\sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^{\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\hat{y}))}} \delta_c(y - \hat{y}) dy \\ &= \iint_{\Pi_{\Sigma_1}} \frac{I_{\hat{\chi}}(\tilde{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1}) \sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^{\pi} \tilde{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi)})}{\sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^{\pi} \mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi)}} \delta_c(\mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi) - \hat{y}) \sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^{\pi} \mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi)} d\pi \\ \Rightarrow B_{c,\mathfrak{D}}(\hat{y}) &= \iint_{\Pi_{\Sigma_1}} I_{\hat{\chi}}(\tilde{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma_1}) \sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^{\pi} \tilde{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\chi}, \pi)}) \delta_c(\mathcal{F}(\hat{\chi}, \pi) - \hat{y}) d\pi. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Für den Grenzwert  $c \rightarrow 0$  gilt

$$\lim_{c \rightarrow 0} B_{c,\mathfrak{D}}(\hat{y}) = B_{\mathfrak{D}}(\hat{y}),$$

so dass diese Formulierung eine Näherung an die tatsächlich generierte *Beleuchtungsstärke* durch eine Punktlichtquelle darstellt.

Diese Gleichung hat den Vorteil, dass die Jakobi-Determinante nicht berechnet werden muss. Durch Bestimmung der Abbildung  $\mathcal{F} : \Pi_{\Sigma_1} \rightarrow \Psi$  muss der Integrand für die Punkte  $\hat{y} \in \Psi$  mit  $\delta_c$  für ein  $c \in \mathbb{R}^+$  gefaltet werden. Dadurch ergibt sich im Gegensatz zur Gleichung (3.1.4) der numerische Mehraufwand, dass für die Berechnung der Beleuchtungsstärke für jedes  $\hat{y}$  eine Integration durchgeführt werden muss.

Die Faltung der *Beleuchtungsstärkeverteilung* kann auch verwendet werden, um die Effekte durch die Ausdehnung der Lichtquelle zu approximieren. Beispielsweise kann eine Punktlichtquelle eine unendliche *Beleuchtungsstärke* generieren, jedoch erzeugt eine ausgedehnte

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

Lichtquelle an der gleichen Stelle eine sehr hohe, aber nicht unendliche *Beleuchtungsstärke*, was durch die Faltung dieses Ansatzes nachgebildet wird.

**Bemerkung 3.2** (Bestimmung der Optik in der ursprünglichen Modellierung von M.A. Moiseev und L.L. Doskolovich in [14]). *M.A. Moiseev und L.L. Doskolovich haben die Formeln für denselben Spezialfall aufgestellt wie J. S. Schruben in der Bemerkung 3.1. In der Formulierung wurden jedoch noch die Fresnelschen Verluste (siehe Gleichung 2.2.13) berücksichtigt, die als zusätzlicher Faktor in die Gleichungen mit einfließen.*

*Die Fläche kann nicht wie in der Modellierung von J. S. Schruben mit einem Newton-Verfahren gelöst werden, da die Freiheitsgrade der Fläche nicht mit den Punkten auf  $\Psi$  übereinstimmen müssen, so dass die entsprechende Jakobi-Matrix im Allgemeinen nicht regulär sein muss. Die tritt auch dann auf, wenn auszuwertende Punkte nicht beleuchtet werden. Deswegen wird die Zielfunktion*

$$\varepsilon(\text{var}(\Sigma)) := \sqrt{\frac{1}{\|\Psi\|} \iint_{\Psi} (B_{\Sigma}(y) - B_{\Psi}(y))^2 dy}$$

*verwendet, um die optischen Flächen im Sinne der kleinsten Quadrate zu optimieren.*

*Für die Optimierung kann beispielsweise ein Gradientenbasiertes Verfahren verwendet werden, das die Zielfunktion  $\varepsilon$  nach  $\text{var}(\Sigma)$ , d.h. den zu optimierenden Variablen der Fläche  $\Sigma$ , ableitet. Durch die Verwendung der Ableitung wird die Forderung an die optischen Flächen auch in diesem Ansatz erhöht, so dass sie mindestens zweifach partiell differenzierbar sein müssen.*

**Beispiel 3.2** (Vergleich der Ergebnisse der Formel (3.2.1) mit der Modellierung nach Formel (3.1.4)). *Wir vergleichen die Formel (3.2.1) mit dem Beispiel 3.1 auf Seite 27. Für die Delta-Folge verwenden wir die Gaussche Glockenfunktion*

$$\delta_c(y) = \frac{1}{\pi c^2} \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{c^2}\right) \quad (3.2.2)$$

*und stellen das Ergebnis mit  $c = 0.5$  in der Abbildungen 3.2a dar. Für die Punkte  $\hat{y}$ , an denen die Gleichung (3.2.1) ausgewertet wurde, wurden die Auftreffpunkte des Forward-Raytrace aus Beispiel 3.1 verwendet, um die Ergebnisse besser vergleichen zu können. Die Differenz dieser Modellierung mit der zu der Modellierung von J. S. Schruben wird in Abbildung 3.2b wiedergegeben.*

*Die Differenz ist an den Randpunkten des Gebietes  $\mathcal{F}(\Pi_{\Sigma_1})$  wesentlich größer als im Inneren des Gebietes, da die Gaussche Glockenkurve symmetrisch um den auszuwertenden Punkt alle weiteren Auftreffpunkte in Betracht zieht. An einem Randpunkt liegt ein großer Teil der Gausschen Glockenkurve außerhalb des beleuchteten Gebietes, so dass der integrierte Wert kleiner wird.*

### 3.2 Berechnung der Beleuchtungsstärke durch eine Faltung

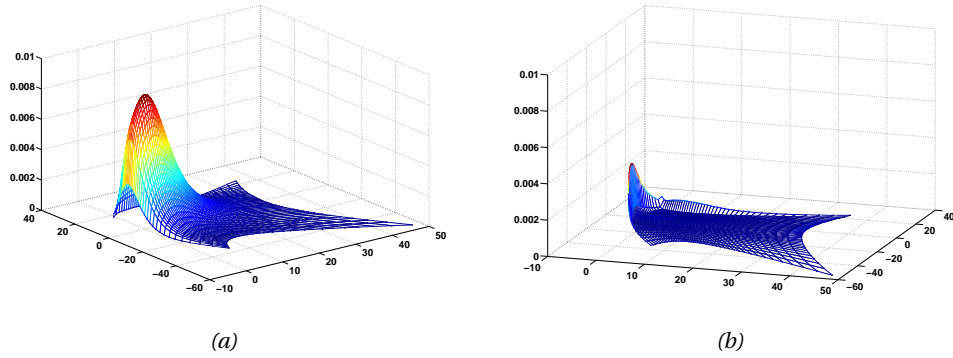


Abb. 3.2: Vergleich der berechneten Lichtverteilung durch die Faltung mit dem Ergebnis durch die partielle Differentialgleichung. (a) Berechnete Beleuchtungsstärke entsprechend der Gleichung (3.2.1) zu  $c = 0.5$ . (b) Differenz der berechneten Beleuchtungsstärke nach der Modellierung von Schruben und Mooiseev. Es ist zu sehen, dass die Abweichung der beiden Modellierungen am Rand höher ist. Das liegt daran, dass durch die Faltung ein Bereich ausserhalb des beleuchteten Gebietes mitbetrachtet wird.

Um die Glättung der Beleuchtungsstärkeverteilung in Abhängigkeit von dem Faktor  $c$  zu verdeutlichen wird in Abbildung 3.2a das Ergebnis mit  $c = 0.5$ , in Abbildung 3.3a mit  $c = 4$  und in Abbildung 3.3b mit  $c = 8$  dargestellt. Man kann in diesen Bildern gut die Glättung der Beleuchtungsstärkeverteilung in Abhängigkeit von der Breite der Gausschen Glockenkurve beobachten.

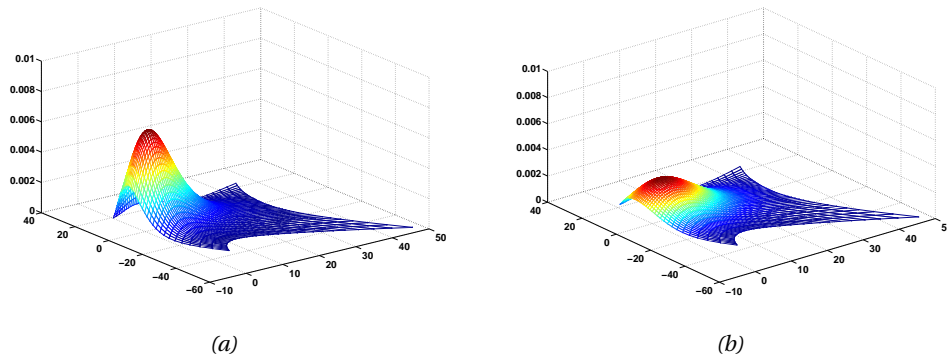


Abb. 3.3: Einfluss der Faltungsbreite auf die berechnete Lichtverteilung. (a) Berechnete Beleuchtungsstärke entsprechend der Gleichung (3.2.1) mit  $c = 4$ . (b) Berechnete Beleuchtungsstärke entsprechend der Gleichung (3.2.1) mit  $c = 8$ .

### 3.3 Schwache Formulierung für Reflektorsysteme

Dieser Ansatz leitet eine *schwache Lösung* der kontinuierlichen Formulierung durch die partielle Differentialgleichung (3.1.4) im maßtheoretischen Sinne her. Die Bezeichnung *schwach* weist darauf hin, dass die Differenzierbarkeitsanforderungen an die Optik geringer sind und die geforderten Eigenschaften nur fast überall gelten müssen.

Die Existenz einer schwachen Lösung kann für optische Systeme, die nur einen Reflektor als optische Fläche haben, gezeigt werden. Wir beziehen uns in diesem Abschnitt auf die Ausarbeitungen von V. Oliker in [2] und [12].

Jeder Reflektor  $\Sigma$  lenkt die Lichtstrahlen der Punktlichtquelle  $\chi$  auf die Fläche  $\Psi$  um und realisiert auf diese Weise ein *mapping*  $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \Psi$ . Mit  $\Omega \subset S^2$  bezeichnen wir den Raumwinkel, der von der Lichtquelle aus durch den Reflektor auf die Zielfläche  $\Psi$  umgelenkt wird.

Das optische System transportiert in die Teilmenge  $D\Psi \subset \Psi$  den Lichtstrom

$$G_{\chi, \Sigma}(D\Psi) = \iint_{\mathcal{F}^{-1}(D\Psi)} I(\vec{\omega}) d\sigma(\vec{\omega}). \quad (3.3.1)$$

Diese Abbildungseigenschaft wird in Abbildung 3.4 dargestellt.

**Definition 3.1** (schwache Lösung). *Eine schwache Lösung des Beleuchtungsproblems ist gegeben, falls das optische System mit nur einer reflektierenden Optik ein mapping  $\mathcal{F}$  realisiert, so dass für alle Borel-Mengen  $D\Psi \subset \Psi$*

$$\iint_{\mathcal{F}^{-1}(D\Psi)} I(\vec{\omega}) d\sigma(\vec{\omega}) = G_{\chi, \Sigma}(D\Psi) = \int_{D\Psi} B(y) dy \quad (3.3.2)$$

*gilt.*

#### 3.3.1 Existenz von schwachen Lösungen

Das Hauptergebnis von V. Oliker in [12, Seite 368] ist die Aussage über die Existenz von schwachen Lösungen des Beleuchtungsproblem.

**Theorem 3.1** (Existenz schwachen Lösungen des Reflektorproblems). *Die Funktionen  $I_\chi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  und  $B_\Psi : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  seien integrierbar und  $\Psi$  eine kompakte<sup>1</sup> zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  mit  $\chi \notin \Psi$ . Zusätzlich gelte die Bedingung der Energieerhaltung*

$$\iint_{S^2} I_\chi(\vec{\omega}) d\vec{\omega} = \iint_{\Psi} B_\Psi(y) dy. \quad (3.3.3)$$

<sup>1</sup>In dem original Theorem in [12][Seite 368] wird verlangt, dass  $\Psi$  eine kompakte Teilmenge einer Ebene sein soll. Jedoch ist diese Forderung zu scharf, wie aus der Fußnote auf Seite 365 hervorgeht. Hier erwähnt V. Oliker, dass es genügt, wenn  $\Psi$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  ist.

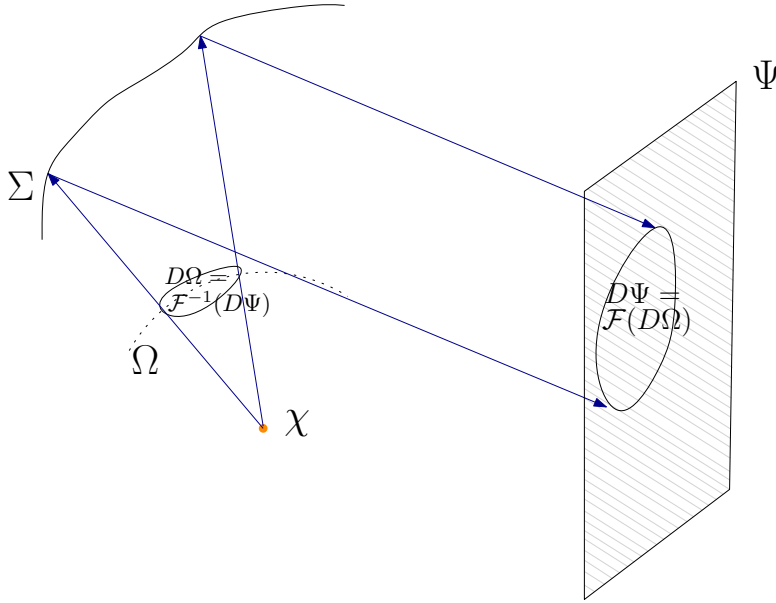


Abb. 3.4: Mengentheoretische Sichtweise der schwachen Lösung des Reflektorproblems. Ein optisches System löst ein Beleuchtungsproblem im schwachen Sinne, wenn die Energie in Teilmengen des abzubildenden Raumwinkels auf entsprechende Teilflächen der Zielfläche abgebildet werden, so dass Gleichung (3.3.2) erfüllt ist. Das optische System kann Unstetigkeitsstellen und Nullstellen in der Jakobideterminante von  $\mathcal{F}$  aufweisen, so lange diese Stellen Nullmengen bilden.

Dann existiert ein geschlossener konvexer Reflektor, der die Gleichung (3.3.2) erfüllt.

Falls zusätzlich gilt, dass die Verteilungen  $I$  und  $B$  strikt positiv sind, dann ist die Lösung glatt und generiert ein <sup>2</sup>diffeomorphes mapping  $\mathcal{F} : S^2 \rightarrow \Psi$  (siehe [15, Theorem 2.5]).

Eine Eindeutigkeitsaussage ist für den Fall, dass eine Lichtstärkeverteilung im Fernfeld erzeugt werden soll, d.h.  $\Psi \subset S^2$ , bekannt und wird für diesen Fall in dem Theorem 3.3 auf Seite 36 wiedergegeben.

Der Beweis dieses Theorems ist konstruktiv, indem diskrete Lösungen definiert und ihre Existenz bewiesen werden. Die kontinuierliche Aussage ist durch einen Grenzübergang des diskreten Falls möglich.

Die Konstruktion der Lösungen bezieht sich auf Reflektoren, die durch eine skalare Funktion  $\rho : \Omega_\chi \rightarrow \mathbb{R}^+$ , den Polarradius, definiert werden durch

$$\Sigma_\rho(\vec{\omega}_\chi) = \rho(\vec{\omega}_\chi)\vec{\omega}_\chi.$$

Insbesondere werden die Geometrien durch Ellipsoide  $E_d(y)$ , den so genannten *Elementar-*

<sup>2</sup>Diese Aussage impliziert direkt, dass der Reflektor ein stetiges Normalenvektorfeld hat.

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

*geometrien*, definiert. Ein Ellipsoid  $E_d(y)$  mit  $y \in \Psi$  hat  $\chi$  in dem einen Fokuspunkt und  $y$  in dem zweiten Fokuspunkt und konzentriert den gesamten Lichtstrom der Punktlichtquelle auf den Punkt  $y$ . Wir definieren das Ellipsoid  $E_d(y) : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch die Vorschrift

$$E_d(y)(\vec{\omega}) := \rho_d(y, \vec{\omega}) \vec{\omega} \quad (3.3.4)$$

mit dem Polarradius

$$\rho_d : \Psi \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \rho_d(y, \vec{\omega}) = \frac{d(y)}{1 - \varepsilon(y) \left\langle \vec{\omega}, \frac{y - \chi}{\|y - \chi\|} \right\rangle}. \quad (3.3.5)$$

Mit  $\varepsilon$  bezeichnen wir die Exzentrizität des Ellipsoids

$$\varepsilon(y) = \sqrt{1 + \frac{d(y)^2}{\|y - \chi\|^2}} - \frac{d(y)}{\|y - \chi\|}. \quad (3.3.6)$$

Die Funktion  $d : \Psi \rightarrow [\delta, \infty)$  mit  $\delta > 0$  ist der Fokalparameter der Ellipsoidsen und beschreibt die Größe des Ellipsoidsen, ohne die optischen Eigenschaften zu verändern.

Der geschlossene konvexe Körper  $B_d$  ist so gewählt, dass  $\partial B_d(y) = E_d(y)$ . Der Faktor  $\delta$  sei so groß gewählt, dass  $\Psi \subset B_d(y)$  für alle  $y \in \Psi$  gilt.

Wir definieren den Reflektor  $\Sigma_d$  zur Funktion  $d$  durch

$$\Sigma_d = \partial \left( \bigcap_{y \in \Psi} B_d(y) \right). \quad (3.3.7)$$

In der Abbildung 3.5 wird der Schnitt von drei Ellipsoidsen und der resultierende Reflektor mit der Verschnittoperation (3.3.7) dargestellt. Da der Schnitt von konvexen Körpern konvex ist, berandet der Reflektor  $\Sigma_d$  einen konvexen Körper.

Falls  $E_d(y) \cap \Sigma_d \neq \emptyset$  ist, nennen wir  $E_d(y)$  ein tragendes Ellipsoid des Reflektors  $\Sigma_d$ .

Der Schnitt von zwei Ellipsoidsen ist höchstens eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit, so dass die Menge der Unstetigkeitsstellen, bzw. Singularitäten des Reflektors  $\Sigma_d$  projiziert auf die Sphäre eine  $S^2$ -Nullmenge darstellt.

Der Polarradius  $\rho_d(\vec{\omega})$  des Reflektors  $\Sigma_d$  wird durch

$$\rho_{\Sigma_d}(\vec{\omega}) = \inf_{y \in \Psi} \{\rho_d(y, \vec{\omega})\}. \quad (3.3.8)$$



definiert. Für das *mapping* gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\vec{\omega}) &= y \text{ falls } \rho_d(y, \vec{\omega}) = \rho_{\Sigma_d}(\vec{\omega}) \\ \mathcal{F}^{-1}(y) &= \{\vec{\omega} \in \Omega \mid \rho_d(y, \vec{\omega}) = \rho_{\Sigma_d}(\vec{\omega})\}.\end{aligned}$$

**Diskreter Reflektor** Die  $n$  Punkte  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \subset \Psi$  mit den Fokalparametern  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  definieren einen *diskreter* Reflektor. Aufgrund der Definition des Reflektors ist der Raumwinkel  $\Omega \subset S^2$  eine bis auf Nullmengen disjunkte Vereinigung  $(\mathcal{F}^{-1}(y_i))_{i=1}^n$ , d.h.  $|\Omega| = |\cup_{i=1}^n \mathcal{F}^{-1}(y_i)|$ . Die Größen der Urbilder  $\mathcal{F}^{-1}(y_i)$  sind abhängig vom Vektor der Fokalparameter  $(d_i)_{i=1}^n$ . Von der Lichtquelle in  $\chi$  aus trifft jeder Raumwinkel  $\mathcal{F}^{-1}(y_i)$  auf das Ellipsoid  $E_{d_i}(y_i)$  und wird auf den Punkt  $y_i$  abgebildet. Daraus folgt, dass der Lichtstrom  $\Phi$  auf die Lichtströme

$$\Phi_i := \iint_{\mathcal{F}^{-1}(y_i)} I(\vec{\omega}) d\sigma(\vec{\omega}) \text{ mit } i = 1 \dots n.$$

diskret aufgeteilt wird.

**Theorem 3.2** (Existenz von diskreten schwachen Lösungen des Beleuchtungsproblems). *Sei  $\Omega \subset S^2$  und  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \subset \Psi$  eine disjunkte Menge von Punkten. Falls für die geforderten Lichtströme  $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$*

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = \iint_{\Omega} I_{\chi}(\vec{\omega}) d\sigma(\vec{\omega}), \quad (3.3.9)$$

*gilt, dann existiert ein Vektor von Fokalparametern  $d := (d_1, d_2, \dots, d_n)$ , so dass der zugehörige diskrete Reflektor  ${}^3\Sigma_d$  die gewünschten Lichtströme*

$$G_{\chi, \Sigma}(y) = \Phi_i \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad (3.3.10)$$

*generiert.*

Durch Anwenden dieses Theorems auf eine dichte Folge  $Y_n := (y_1, y_2, \dots, y_n)$  in  $\Psi$  kann das Theorem 3.1, das den kontinuierlichen Fall behandelt, bewiesen werden.

**Bemerkung 3.3** (konvergente oder divergente Reflektoren). *Die Konstruktion der Reflektoren (siehe Gleichung (3.3.7)) und die spätere Beweisführung erlauben es den Reflektor alternativ durch*

$$\Sigma_d = \partial \left( \bigcup_{y \in \Psi} B_d(y) \right). \quad (3.3.11)$$

---

<sup>3</sup>siehe Gleichung (3.3.7)

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

zu definieren. Der Unterschied in den resultierenden Reflektorgeometrien wird in der Abbildung 3.6 dargestellt. Die Gleichung (3.3.7) konstruiert Reflektoren, deren Strahlengänge konvergent sind, das heißt sie überkreuzen sich. Diese Geometrien haben einen eher tiefen Bau-  
raum und geringe Ausdehnung.

Mit Gleichung (3.3.11) konstruierte Reflektoren hingegen realisieren einen divergenten Strahlengang ohne Überkreuzungen. Die resultierenden Reflektorgeometrien sind flach und haben eine breite Ausdehnung.

**Bemerkung 3.4** (analoge Formulierung für das Fernfeld). Falls die Ausdehnung der Optik vernachlässigt werden kann, wird die Ziellichtverteilung, bzw. die diskrete Verteilung der geforderten Lichtströme  $\Phi_i$ , nicht auf einer Fläche, sondern im Fernfeld auf einem Raumwinkel  $\Psi \subset S^2$  definiert. Für diesen Fall können Paraboloid als Elementargeometrien verwendet werden, da diese die Abbildungseigenschaft haben, den vollen Raumwinkel auf einen Richtungsvektor abzubilden.

Für eine Richtung  $\vec{y} \in \Psi$  und Fokalparameter  $d(\vec{y})$  wird der Paraboloid

$$P_d(\vec{y}) := \{\rho_d(\vec{y}, \vec{\omega})\vec{\omega} + \chi \mid \vec{\omega} \in S^2\}$$

definiert durch den Polarradius

$$\rho_d(\vec{y}, \vec{\omega}) = \frac{d(\vec{y})}{1 - \langle \vec{\omega}, \vec{y} \rangle}. \quad (3.3.12)$$

Alle weiteren Definitionen und Eigenschaften sind analog zu der bisher eingeführten Variante. Eine Eindeutigkeitsaussage der schwachen Lösung kann Theorem 4.2 aus [16][Seite 4104] entnommen werden.

**Theorem 3.3** (Eindeutigkeit von schwachen Lösungen des Reflektorproblems für das Fernfeld). Falls  $\Omega_\chi$  zusammenhängend ist,  $I_\chi$  und  $B_\Psi$  positive und integrable Funktionen mit  $\Psi \subset S^2$  sind, dann ist eine schwache Lösung des Reflektorproblems eindeutig bis auf Skalierung.

#### 3.3.2 Verwendung einer schwachen diskreten Lösung zum Aufbau einer kontinuierlichen Lösung

Florian Fournier beschreibt in [7, Abschnitt 4] den Ansatz, eine diskrete Lösung des schwachen Beleuchtungsproblems zu bestimmen und daraus einen glatten Reflektor herzuleiten. Sei der Vektor  $(d_i^n)_{i=1}^n$  der Fokalparameter des Reflektors  $\Sigma_{d^n}$ , der das Beleuchtungsproblem auf den Punkten  $(y_i^n)_{i=1}^n$  löst, so dass der Reflektor die geforderten Lichtströme  $(\Phi_i)_{i=1}^n$  auf diesen Punkten konzentriert. Das Ergebnis von Oliker ist, dass für eine dichte Folge  $((y_i^n)_{i=1}^n)_n$

### 3.3 Schwache Formulierung für Reflektorsysteme

in  $\Psi$  der Reflektor  $\Sigma_{d^n}$  gegen die glatte Lösung  $\Sigma_d$  konvergiert, falls die Verteilungen  $I_\chi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  und  $B_\Psi : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$  positive Funktionen sind.

Somit kann für ein  $n \in \mathbb{N}$  der Reflektor  $\Sigma_{d^n}$  als Annäherung an den gesuchten Reflektor  $\Sigma_d$  verwendet werden. Wählt man Mittelpunkte  $\vec{\omega}_i$  aus den Mengen  $\mathcal{F}^{-1}(y_i)$  aus und bestimmt die Normalenvektoren  $\vec{N}_i$  des Reflektors  $\Sigma_{d^n}$  an diesen Stellen, so kann man aus diesem Normalenvektorfeld einen glatten Reflektor bestimmen, der an den Schnittpunkten mit den Lichtstrahlen  $(\chi, \vec{\omega}_i)$  die Normalenvektoren  $\vec{N}_i$  aufweist.

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

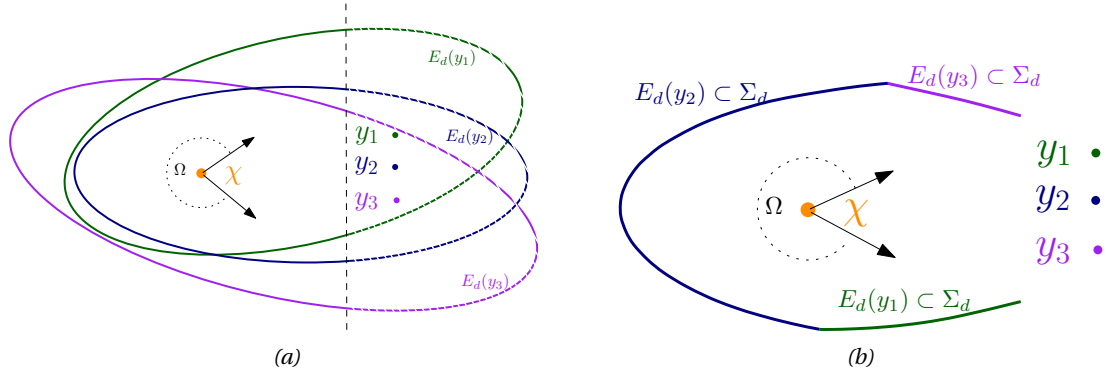


Abb. 3.5: Die diskrete schwache Lösung des Beleuchtungsproblems mit drei Ellipsoiden. (a) Die drei Ellipsoiden zu Fokalparametern  $d_1, d_2$  und  $d_3$  bündeln das Licht von  $\chi$  auf einen der drei Punkte  $y_1, y_2$  und  $y_3$ . (b) Der resultierende Reflektor  $\Sigma_d$  aus der Verschneidung (3.3.7) von  $E_d(y_1), E_d(y_2)$  und  $E_d(y_3)$ .

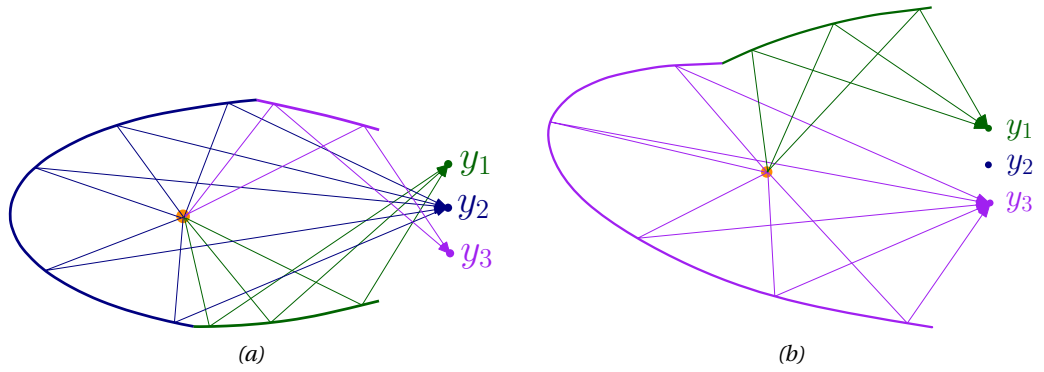


Abb. 3.6: Gegenüberstellung eines konvergenten Reflektors nach Gleichung (3.3.7) und eines divergenten Reflektors nach Gleichung (3.3.11). (a) Konvergenter Reflektor nach Vorschrift (3.3.7). (b) Der resultierende Reflektor bei alternativer Verwendung der Vereinigungsoperation  $\Sigma_d = \partial(\cup y \in \Psi B_d(y))$  in (3.3.11). Hierbei nimmt der Reflektor eine divergente Strategie an, wobei der Punkt  $y_2$  nicht beleuchtet wird.

### 3.4 Das optimale mapping und der Monge-Kantorovich-Formalismus

Sowohl der Ansatz von J. S. Schruben in Abschnitt 3.1, als auch die Erweiterung von Mooiseev und Doskolovich in Abschnitt 3.2 beschreiben das optische System mit Punktlichtquelle  $\chi$ , so dass das generierte mapping  $\mathcal{F} : \Lambda_\chi \rightarrow \Psi$  bestimmt werden kann. Da  $\chi$  als Punkt approximiert wird, gilt  $\Lambda_\chi \equiv \Omega_\chi := \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\chi, \Pi_{\Sigma_1}) \subset S^2$ . Aus dem mapping und eventuell den Ableitungen des mappings kann die *Beleuchtungsstärke* berechnet werden und mit Hilfe der entsprechenden Gleichungen das optische System bestimmt oder optimiert werden, um die gewünschte *Beleuchtungsstärkeverteilung* zu generieren. Somit haben wir es mit einem *inversen Problem* zu tun, bei dem aus der gewünschten Wirkung des Systems auf die notwendige Ursache geschlossen werden soll.

Dieser Zusammenhang führt schnell auf die abstraktere Fragestellung des *optimalen mappings*, das heißt es wird nicht direkt nach dem optischen System gesucht, sondern nach dem diffeomorphen mapping

$$\mathcal{F} : \underbrace{\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\chi, \Pi_{\Sigma_1})}_{=: \Omega_\chi \subset S^2} \rightarrow \Psi,$$

das aus der Lichtstärkeverteilung  $I_\chi$  der Punktlichtquelle  $\chi$  die gewünschte Beleuchtungsstärkeverteilung  $B_\Psi$  auf  $\Psi$  generiert. Vernachlässigt man die Ausdehnung des gesamten optischen Systems, so kann das gesuchte mapping auch als Abbildung von Richtungsvektoren auf Richtungsvektoren

$$\hat{\mathcal{F}} : \Omega_\chi \rightarrow \underbrace{\vec{\omega}_\Psi(\chi, \Pi_\Psi)}_{=: \Omega_\Psi \subset S^2} \text{ mit } \hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}) = \vec{\omega}_\Psi^{-1}(\chi, \sigma_\Psi^{-1}(\mathcal{F}(\vec{\omega}_\chi)))$$

verstanden werden. Diese Definition ist für das konkrete Monge-Problem wichtig, da Elemente des Bild- und Urbildbereiches von  $\hat{\mathcal{F}}$  zueinander in Beziehung gesetzt werden müssen, indem sie sich auf derselben Fläche befinden.

Stellen wir die Integralgleichung (3.1.3) für die Funktion  $\hat{\mathcal{F}}$  auf, so erhalten wir mit Hilfe der Funktion  $\tilde{\sigma}_\Psi(\chi, \cdot) : S^2 \rightarrow \Psi$  (siehe Gleichung (2.2.1)) für jede offene und messbare Menge  $D\Omega_\chi \subset \Omega_\chi$

$$\iint_{D\Omega_\chi} I_\chi(\vec{\omega}) d\vec{\omega} = \iint_{\tilde{\sigma}_\Psi(\chi, \hat{\mathcal{F}}(D\Omega_\chi))} B_\Psi(y) dy = \iint_{\hat{\mathcal{F}}(D\Omega_\chi)} \underbrace{B(\tilde{\sigma}_\Psi(\chi, \vec{\omega})) |\det \mathbf{D}^{\vec{\omega}} \tilde{\sigma}_\Psi(\chi, \vec{\omega})|}_{=: I_\Psi(\vec{\omega})} d\vec{\omega}. \quad (3.4.1)$$

Diese Gleichung verdeutlicht die Fragestellung des optimalen Transports. Die Energie in einem Teilgebiet des Urbildraumes  $\Omega_\chi$  wird durch das mapping auf ein anderes Teilgebiet von

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

$\Omega_\Psi$  abgebildet. Es soll also nicht direkt das inverse Problem gelöst werden, d.h. das passende optische System bestimmt werden, sondern ein *mapping*  $\hat{\mathcal{F}}$  berechnet werden, das die Dichte  $I_\chi(\vec{\omega}_\chi)$  auf  $\Omega_\chi$  in die Dichte  $I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi)$  auf  $\Omega_\Psi$  überführt.

Diese Eigenschaft ist aber für unsere Problemstellung nicht ausreichend, denn es muss neben der maßtheoretischen Transformation der Dichten ineinander auch sichergestellt werden, dass zu dem berechneten mapping ein optisches System existiert, das dieses mapping generiert. Die Berechnung des optischen Systems erfolgt in einem zweiten Schritt.

#### Existenz von optischen Flächen zu einem mapping

Sei  $\hat{\mathcal{F}} : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$  ein mapping, das die Dichte  $I_\chi : \Omega_\chi \rightarrow \mathbb{R}^+$  in die Dichte  $I_\Psi : \Omega_\Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$  überführt. In diesem Abschnitt soll die Frage untersucht werden, welche Eigenschaft dieses mapping aufweisen muss, damit eine optische Fläche  $\Sigma$  existiert, die diese Abbildungseigenschaft erfüllt.

Man kann aufgrund des *mappings*  $\hat{\mathcal{F}}$  auf das nicht normierte Normalenvektorfeld  $N_\Sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  der brechenden optischen Fläche schließen durch

$$N_\Sigma(\sigma(\vec{\omega}_\chi)) = \hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi) - \frac{n_\chi}{n_\Psi} \vec{\omega}_\chi^4. \quad (3.4.2)$$

Es ist zu klären, welche Bedingung das Normalenvektorfeld aufweisen muss, damit eine glatte Fläche  $\Sigma$  zu diesem Normalenvektorfeld existiert (siehe Lemma 3.1). Anschließend leiten wir her, unter welchen Voraussetzungen an das mapping, das resultierende Normalenvektor die notwendigen Eigenschaft aufweist und damit optische Flächen existieren (siehe Lemma 3.2).

Nach [7, Seite 10] existiert zu einem Normalenvektorfeld genau dann eine glatte Fläche, wenn das Kurvenintegral

$$\oint_T N_\Sigma(\sigma) \cdot dl = 0 \quad (3.4.3)$$

über jede geschlossene Kurve  $T \subset \Sigma$  verschwindet. Wir führen nun zu dieser Forderung einige äquivalente Bedingungen für Vektorfelder auf. Wenden wir den *Stokesschen Integralsatz* an, so erhalten wir die äquivalente Forderung (siehe [7, Seite 10])

$$\begin{aligned} 0 = \oint_T N_\Sigma(\sigma) \cdot dl &= \iint_{S_T} \langle \text{rot}(N_\Sigma)(\sigma), N_\Sigma(\sigma) \rangle d\vec{\omega}_\chi \\ &\iff \langle \text{rot}(N_\Sigma)(\sigma), N_\Sigma(\sigma) \rangle = 0 \text{ auf } \Sigma. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

<sup>4</sup>Falls  $\Sigma$  reflektierend ist muss  $\frac{n_\chi}{n_\Psi} = 1$  gewählt werden.

### 3.4 Das optimale mapping und der Monge-Kantorovich-Formalismus

Zu der Forderung (3.4.3) gibt es zwei weitere äquivalente Eigenschaften, die das Normalenvektorfeld kennzeichnen:

$$\text{rot}(N_\Sigma)(\sigma) = (0, 0, 0)^T \quad \forall \sigma \in \Sigma \quad (3.4.5)$$

und, dass das Normalenvektorfeld ein Gradientenfeld ist, d.h.

$$\exists \Lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1 \text{ mit } N_\Sigma = \nabla \Lambda. \quad (3.4.6)$$

Das folgende Lemma beweist, dass diese Forderung an das Normalenvektorfeld ausreichend ist, um auf die Existenz einer optischen Fläche zu schließen.

**Lemma 3.1** (Existenz einer Fläche zu einem rotationsfreien Normalenvektorfeld). *Falls ein rotationsfreies Normalenvektorfeld  $N_\Sigma$  gegeben ist, so existiert eine eindimensionale Schar von Flächen, die dieses Normalenvektorfeld annehmen.*

*Beweis.* Aufgrund der äquivalenten Eigenschaft (3.4.6) zur geforderten Rotationsfreiheit, existiert eine skalare Funktion  $\Lambda : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ . Aufgrund der Differenzierbarkeit der skalaren Funktion  $\Lambda$  ist nach dem Satz vom regulären Wert jedes Urbild  $\Sigma_c := \Lambda^{-1}(c)$  eine differenzierbare Fläche für jeden regulären Wert  $c$  von  $\Lambda$ .

Zu jedem Punkt  $p_c$  in  $\Sigma_c$  und jede beliebige Kurve  $g_{c,p} : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \Sigma_c$  mit  $g_{c,p}(0) = p_c$  gilt

$$\Lambda(g_{c,p_c}(t)) = c$$

für alle  $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ . Die Ableitung dieser Gleichung

$$\nabla \Lambda(g_{c,p_c}(t)) \dot{g}_{c,p_c}(t) = 0$$

sagt aus, dass  $\nabla \Lambda(\sigma)$  für alle  $\sigma \in \mathbb{R}^3$  senkrecht auf der Fläche  $\Sigma_{\Lambda(\sigma)}$  steht und somit das Normalenvektorfeld der Fläche  $\Sigma_{\Lambda(\sigma)}$  durch

$$\vec{N}_{\Sigma_{\Lambda(\sigma)}}(\omega) = \frac{\nabla \Lambda(\sigma)}{\|\nabla \Lambda(\sigma)\|} \quad \forall \sigma \in \Sigma_{\Lambda(\sigma)}$$

definiert wird.

Aufgrund der Gleichung  $N_\Sigma = \nabla \Lambda$  (3.4.6) sind alle Flächen  $\Sigma_c$  Lösungen des Problems, d.h. sie generieren das mapping  $\hat{\mathcal{F}}$ . □

Das folgende Lemma soll den Zusammenhang zwischen der Wirbelfreiheit des mappings  $\hat{\mathcal{F}}$  und dem Normalenvektorfeld  $N_\Sigma$  herstellen, um das Ergebnis des Lemma 3.1 für die nach Gleichung (3.4.2) definierten Normalenvektorfelder anzuwenden und eine Anforderung an das mapping aufzustellen.

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

**Lemma 3.2** (Existenz einer optischen Fläche zu einem rotationsfreiem mapping  $\hat{\mathcal{F}}$ ). *Wenn das mapping  $\hat{\mathcal{F}} : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$  ein Gradientenfeld ist, dann existiert eine glatte Fläche  $\Sigma$ , die das mapping realisiert.*

*Beweis.* Da  $\hat{\mathcal{F}}$  ein Gradientenfeld ist, existiert eine skalare Funktion  $\zeta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi) = \nabla \zeta(\vec{\omega}_\chi)$  für alle  $\vec{\omega}_\chi \in \Omega_\chi$ .

Wir wählen für  $\Lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  die Definition

$$\Lambda(\omega_\chi) := \zeta(\omega_\chi) - \frac{n_\chi}{2n_\Psi} \|\omega_\chi\|_2^2 \quad \forall \omega_\chi \in \mathbb{R}^3.$$

Für den Gradienten von  $\Lambda$  gilt

$$\nabla \Lambda(\omega_\chi) = \nabla \zeta(\omega_\chi) - \frac{n_\chi}{n_\Psi} \omega_\chi.$$

Einsetzen der Gleichung  $\hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi) = \nabla \zeta(\vec{\omega}_\chi)$  liefert

$$N_\Sigma(\vec{\omega}_\chi) = \hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi) - \frac{n_\chi}{n_\Psi} \vec{\omega}_\chi = \nabla \Lambda(\vec{\omega}_\chi).$$

Damit ist das Normalenvektorfeld ebenfalls ein Gradientenfeld und nach Lemma 3.1 folgt die Existenz einer eindimensionalen Schar von Flächen  $\Sigma$ .  $\square$

Vor diesem Hintergrund ist es ausreichend, *mappings* zu berechnen, die die äquivalenten Eigenschaften

$$\oint_T \hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{für alle geschlossenen Kurven } T \subset \Omega_\chi \quad (3.4.7)$$

$$\langle \text{rot}(\hat{\mathcal{F}})(\vec{\omega}_\chi), \hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi) \rangle = 0 \quad \text{auf } \Omega_\chi \quad (3.4.8)$$

$$\text{rot}(\hat{\mathcal{F}}_\Sigma)(\vec{\omega}_\chi) = (0, 0, 0)^T \quad \text{auf } \Omega_\chi \quad (3.4.9)$$

$$\hat{\mathcal{F}} = \nabla \zeta \quad \text{für ein } \zeta : \Omega_\chi \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1 \quad (3.4.10)$$

erfüllen, um auf die Existenz von optischen Flächen zu schließen. Hierfür gibt es verschiedene Ansätze. Im Folgenden wird der Ansatz von *Haker* und die Variationsmethode von *Oliker* erläutert. Anschließend wird der Formalismus des *Monge-Problems* und die Relaxierung von Kantorovich zur Bestimmung von *optimalen mappings* dargestellt.



### 3.4.1 Rotationsfreie mappings nach Haker

Wir orientieren uns in diesem Abschnitt an der Ausarbeitung [9]. Dieses Verfahren wurde von *Adrien Bruneton* in [21] für die gleiche optische Fragestellung verwendet wie in dieser Arbeit<sup>5</sup>. Die Grundidee dieses Ansatzes besteht darin, ein *initiales mapping*  $\tilde{\mathcal{F}} : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$  zu bestimmen, das die Dichte  $I_\chi$  auf  $\Omega_\chi$  in die Dichte  $I_\Psi$  auf  $\Omega_\Psi$  überführt, d.h.

$$I_\chi(\vec{\omega}_\chi) = I_\Psi(\tilde{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi)) \det(\mathbf{D}\tilde{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi)) \quad (3.4.11)$$

aber nicht zwangsläufig die geforderte Bedingung der Rotationsfreiheit erfüllt.

In einem iterativen Verfahren wird anschließend das mapping  $\tilde{\mathcal{F}}$  so verändert, dass die Rotation verkleinert wird. Grundlage für dieses Verfahren ist, dass die Eigenschaft (3.4.11) für

$$\tilde{\mathcal{F}} := \tilde{\mathcal{F}} \circ s^{-1}$$

erhalten bleibt, falls  $s : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\chi$  ein Diffeomorphismus mit

$$I_\chi(\vec{\omega}_\chi) = I_\chi(s(\vec{\omega}_\chi)) |\det(\mathbf{D}s(\vec{\omega}_\chi))|$$

ist. Mit Hilfe einer Evolutionsgleichung wird die Abbildung  $s$  so bestimmt, dass

$$\tilde{\mathcal{F}} \circ s^{-1} = \nabla \zeta$$

für eine skalare Funktion  $\zeta$  gilt. Aufgrund der äquivalenten Eigenschaften (3.4.7) bis (3.4.10) gilt für

$$\hat{\mathcal{F}} := \tilde{\mathcal{F}} \circ s^{-1}$$

die nach Lemma 3.2 geforderte Rotationsfreiheit.

### 3.4.2 Monge-Kantorovich-Formulierung des Reflektorproblems nach Olier

*V. Olier* hat die schwache Lösung für den Fall hergeleitet, dass das optische System nur aus einer reflektierenden Fläche  $\Sigma_\rho$  besteht. Von dieser schwachen Formulierung ausgehend geben wir die Übertragung in den Monge-Kantorovich-Formalismus wieder, so dass das nicht-lineare Optimierungsproblem zur Bestimmung der schwachen Lösung auf ein lineares Problem übertragen werden kann (Wir orientieren uns an der Ausarbeitung [16]). Hierbei ist allerdings zu beachten, dass dieser Ansatz nur für den Fall, dass die Ziellichtverteilung im *Fernfeld* ( $\Psi = \Omega_\Psi \subset S^2$ ) definiert wird und nicht leicht auf den Fall einer vorgegebenen Be-

---

<sup>5</sup>bezüglich einer Punktlichtquelle

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

leuchtungsstärke übertragen werden kann. Sei  $\Sigma_\rho$  die Lösung des schwachen Reflektorproblems, d.h.  $\Sigma_\rho$  ist definiert durch den Polarradius  $\rho : \Omega_\chi \rightarrow \mathbb{R}^+$  (siehe Abschnitt 3.3.1 auf Seite 32 und Bemerkung 3.4 auf Seite 36) mit

$$\rho(\vec{\omega}_\chi) = \inf_{\vec{\omega}_\Psi \in \Omega_\Psi} \frac{p(\vec{\omega}_\Psi)}{1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle}$$

Führen wir die reziproke Fokalparameterfunktion  $\lambda(\vec{\omega}_\Psi) := 1/p(\vec{\omega}_\Psi)$  ein, so erhalten wir für den Polarradius die äquivalente Gleichung

$$\rho(\vec{\omega}_\chi) = \inf_{\vec{\omega}_\Psi \in \Omega_\Psi} \frac{1}{\lambda(\vec{\omega}_\Psi)(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle)}. \quad (3.4.12)$$

Sei zu einem  $\vec{\omega}_\chi$  der Einheitsvektor  $\vec{\omega}_\Psi$  derart, dass  $\rho(\vec{\omega}_\chi)$  auf  $\vec{\omega}_\Psi$  das Infimum annimmt. Dann führt die Dualität

$$\rho(\vec{\omega}_\chi) = \frac{1}{\lambda(\vec{\omega}_\Psi)(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle)} \Leftrightarrow \lambda(\vec{\omega}_\Psi) = \frac{1}{\rho(\vec{\omega}_\chi)(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle)} \quad (3.4.13)$$

zu der Definition des Reflektorpaares.

**Definition 3.2** (Reflektorpaar). *Zwei Reflektoren  $\Sigma_\rho$  und  $\Sigma_\lambda$  zu einem Funktionenpaar  $(\rho, \lambda) \in C(\Omega_\chi, \mathbb{R}^+) \times C(\Omega_\Psi, \mathbb{R}^+)$ , das*

$$\rho(\vec{\omega}_\chi) := \inf_{\vec{\omega}_\Psi \in \Omega_\Psi} \frac{1}{\lambda(\vec{\omega}_\Psi)(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle)} \quad (3.4.14)$$

$$\lambda(\vec{\omega}_\Psi) := \inf_{\vec{\omega}_\chi \in \Omega_\chi} \frac{1}{\rho(\vec{\omega}_\chi)(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle)}. \quad (3.4.15)$$

*erfüllt, heißen Reflektorpaar zu  $(\rho, \lambda)$ . Die Bezeichnung als Reflektorpaar geht darauf zurück, dass mit Hilfe der Funktion  $\lambda$  auf dieselbe Weise wie für  $\rho$  ein Reflektor durch  $\Sigma_\lambda(\vec{\omega}_\Psi) := \lambda(\vec{\omega}_\Psi)\vec{\omega}_\Psi$  definiert werden kann.*

Das Produkt der Polarradien  $\rho$  und  $\lambda$  zu einem Reflektorpaar erfüllt für alle  $(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi) \in \Omega_\chi \times \Omega_\Psi$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \rho(\vec{\omega}_\chi)\lambda(\vec{\omega}_\Psi) &= \inf_{\vec{\omega}_\chi \in \Omega_\chi} \inf_{\vec{\omega}_\Psi \in \Omega_\Psi} \frac{1}{\lambda(\vec{\omega}_\Psi)\rho(\vec{\omega}_\chi)(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle)^2} \\ &\leq \frac{1}{\lambda(\vec{\omega}_\Psi)\rho(\vec{\omega}_\chi)(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle)^2} \quad \forall (\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi) \in \Omega_\chi \times \Omega_\Psi. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Diese Ungleichung bleibt bei Anwendung des Logarithmus für alle  $(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi) \in \Omega_\chi \times \Omega_\Psi$  erhal-

ten und es folgt

$$\begin{aligned} \log(\rho(\vec{\omega}_\chi)\lambda(\vec{\omega}_\Psi)) &\leq -(\log(\rho(\vec{\omega}_\chi)\lambda(\vec{\omega}_\Psi))) - 2(\log(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle)) \\ \Leftrightarrow \log(\rho(\vec{\omega}_\chi)) + \log(\lambda(\vec{\omega}_\Psi)) &\leq \underbrace{-\log(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle)}_{=: K(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi)}. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Somit ist  $(\Sigma_\rho, \Sigma_\lambda)$  genau dann ein Reflektorpaar, wenn diese Ungleichung  $\forall(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi) \in \Omega_\chi \times \Omega_\Psi$  gilt.

Der Reflektor  $\Sigma_\rho$  erfüllt für  $\vec{\omega}_\chi$  das *mapping*  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}(\vec{\omega}_\chi) = \vec{\omega}_\Psi$  genau dann, wenn

$$\rho(\vec{\omega}_\chi) = \frac{1}{\lambda(\vec{\omega}_\Psi)(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle)}$$

erfüllt ist. Daraus folgt, dass das mapping  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho} : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$ , das durch den Reflektor  $\Sigma_\rho$  generiert wird, definiert werden kann durch

$$\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}(\vec{\omega}_\chi) = \{\vec{\omega}_\Psi \in \Omega_\Psi \mid \log(\rho(\vec{\omega}_\chi)) + \log(\lambda(\vec{\omega}_\Psi)) = K(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi)\}. \quad (3.4.18)$$

Wir definieren das Funktional  $\mathcal{E}$  auf den mappings  $\xi : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$  durch

$$\mathcal{E}(\xi) := \iint_{\Omega_\chi} K(\vec{\omega}_\chi, \xi(\vec{\omega}_\chi)) d\vec{\omega}_\chi. \quad (3.4.19)$$

Das folgende Theorem bringt das *mapping*  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}$  in Zusammenhang zum Funktional  $\mathcal{E}$ .

**Theorem 3.4.** *Gegeben sei ein Reflektorpaar  $(\Sigma_\rho, \Sigma_\lambda)$ , so dass  $\Sigma_\rho$  das Reflektorproblem löst. Dann minimiert das zugehörige mapping  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}$  das Funktional (3.4.19) unter allen mappings, die die Dichte  $I_\chi$  schwach in  $I_\Psi$  überführen. Darüber hinaus gilt die Umkehrrichtung fast überall. Alle mappings, die das Funktional (3.4.19) minimieren sind mit  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}$  bis auf Nullmengen identisch.*

*Beweis.* Aus der Definition der schwachen Lösung geht hervor, dass die Übertragung der Dichten nach Gleichung (3.4.1) für das zugehörige mapping  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}$  erfüllt ist. Wie bereits hergeleitet wurde, erfüllen die Polarradien  $\rho$  und  $\lambda$  des Reflektorpaares die Bedingung

$$\log(\rho(\vec{\omega}_\chi)) + \log(\lambda(\vec{\omega}_\Psi)) \leq K(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi). \quad (3.4.20)$$

Die Gleichheit wird angenommen, wenn  $\vec{\omega}_\Psi = \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}(\vec{\omega}_\chi)$  gilt. Zu zeigen ist, dass  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}$  das Funktional  $\mathcal{E}$  minimiert.

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

Sei  $\xi$  eine beliebige Zuordnung, die die Gleichung (3.4.1) erfüllt, dann gilt für alle  $h \in C(\Omega_\Psi, \mathbb{R})$

$$\iint_{\Omega_\chi} h(\xi(\vec{\omega})) I_\chi d\vec{\omega} = \iint_{\underbrace{\xi(\Omega_\chi)}_{=\Omega_\Psi}} h(\vec{\omega}) I_\Psi d\vec{\omega}. \quad (3.4.21)$$

Die Minimaleigenschaft von  $\hat{\mathcal{F}}$  kann nun hergeleitet werden durch

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\chi} K(\vec{\omega}_\chi, \xi(\vec{\omega}_\chi)) I_\chi d\vec{\omega}_\chi &\geq \iint_{\Omega_\chi} [\log(\rho(\vec{\omega}_\chi)) + \log(\lambda(\xi(\vec{\omega}_\chi)))] I_\chi d\vec{\omega}_\chi \\ &= \iint_{\Omega_\chi} \log(\rho(\vec{\omega}_\chi)) I_\chi d\vec{\omega}_\chi + \iint_{\Omega_\chi} \log(\lambda(\xi(\vec{\omega}_\chi))) I_\chi d\vec{\omega}_\chi \\ &\stackrel{(3.4.21)}{=} \iint_{\Omega_\chi} \log(\rho(\vec{\omega}_\chi)) I_\chi d\vec{\omega}_\chi + \iint_{\Omega_\Psi} \log(\lambda(\vec{\omega}_\Psi)) I_\Psi d\vec{\omega}_\Psi \\ &= \iint_{\Omega_\chi} \log(\rho(\vec{\omega}_\chi)) I_\chi d\vec{\omega}_\chi + \iint_{\Omega_\chi} \log(\lambda(\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}(\vec{\omega}_\chi))) I_\chi d\vec{\omega}_\chi \\ &= \iint_{\Omega_\chi} \underbrace{\log(\rho(\vec{\omega}_\chi)) + \log(\lambda(\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}(\vec{\omega}_\chi)))}_{=K(\vec{\omega}_\chi, \hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi))} I_\chi d\vec{\omega}_\chi \\ &\stackrel{(3.4.18)}{=} \iint_{\Omega_\chi} K(\vec{\omega}_\chi, \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}(\vec{\omega}_\chi)) I_\chi d\vec{\omega}_\chi. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit des minimierenden mappings bis auf Nullmengen wird durch diese Integralrechnung ebenfalls begründet.  $\square$

Dieses Theorems bringt die schwache Lösung des Reflektorproblems in Zusammenhang mit dem Minimum des Funktionals  $\mathcal{E}$  auf der Menge der *mappings*, die  $I_\chi$  in  $\hat{B}_\Psi$  transformieren. Durch die Eindeutigkeit des mappings kann das Minimum des Funktionals in diesem Funktionenraum mit der schwachen Lösung identifiziert werden. Wir können die Umformulierung des Problems als *Monge-Problem* zusammenfassen.

**Optimierungsproblem 3.1** (Monge-Formulierung des Reflektorproblems). *Gesucht sind für die Dichten  $I_\chi$  und  $B_\Psi$  und die Kostendichte  $K$  das optimale mapping  $\hat{\mathcal{F}}$ , für das*

$$\hat{\mathcal{F}} = \inf_{\xi: \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi} \left\{ \iint_{\Omega_\chi} K(\vec{\omega}_\chi, \xi(\vec{\omega}_\chi)) I_\chi d\vec{\omega}_\chi \left| \iint_{\Omega_\chi} h(\xi(\vec{\omega})) I_\chi d\vec{\omega} = \iint_{\Omega_\chi} h(\vec{\omega}) I_\Psi d\vec{\omega} \forall h \in \mathcal{C}^0(\Omega_\Psi) \right. \right\}$$

*gilt.*

Wenn es eine schwache Lösung gibt, so kann auf den Reflektor indirekt durch dieses mapping geschlossen werden. Die Existenz eines solchen mappings ist im Allgemeinen nicht

### 3.4 Das optimale mapping und der Monge-Kantorovich-Formalismus

sichergestellt und darüber hinaus ist das Monge-Optimierungsproblem ein nichtlineares Optimierungsproblem. In der Relaxierung des Monge-Kantorovich Formalismus sucht man hingegen nach einem schwach definierten mapping, das mit einem Maß  $\tau$  auf der Produkt- $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega_\chi \times \Omega_\Psi$  in Zusammenhang steht. Die duale Lösung des Monge-Kantorovich-Problems kann direkt mit der schwachen Lösung identifiziert werden und soll nun eingeführt werden.

Da  $\rho$  und  $\lambda$  stetige Funktionen sind und die Ungleichung (3.4.17) erfüllen, führen wir den Funktionenraum

$$adm_{\Omega_\chi \times \Omega_\Psi} := \{\eta \in C(\Omega_\chi, \mathbb{R}) \times C(\Omega_\Psi, \mathbb{R}) \mid \eta_1(\vec{\omega}_\chi) + \eta_2(\vec{\omega}_\Psi) \leq K(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi)\}$$

der zulässigen Funktionen ein.

Zur Herleitung des dualen Monge-Kantorovich-Problems definieren wir für  $\eta \in C(\Omega_\chi, \mathbb{R}) \times C(\Omega_\Psi, \mathbb{R})$  das Funktional

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\eta) &:= \iint_{\Omega_\chi} \eta_1(\vec{\omega}_\chi) I_\chi(\vec{\omega}_\chi) d\vec{\omega}_\chi + \iint_{\Omega_\Psi} \eta_2(\vec{\omega}_\Psi) I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi) d\vec{\omega}_\Psi \\ &= \iint_{\Omega_\chi} \eta_1(\vec{\omega}_\chi) \frac{I_\chi(\vec{\omega}_\chi)}{\|\Omega_\Psi\|} d\vec{\omega}_\chi \underbrace{\|\Omega_\Psi\|}_{=\iint_{\Omega_\Psi} d\vec{\omega}_\Psi} + \iint_{\Omega_\Psi} \eta_2(\vec{\omega}_\Psi) \frac{I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi)}{\|\Omega_\chi\|} d\vec{\omega}_\Psi \underbrace{\|\Omega_\chi\|}_{=\iint_{\Omega_\chi} d\vec{\omega}_\chi} \\ &= \iiint_{\Omega_\chi \times \Omega_\Psi} \eta_1(\vec{\omega}_\chi) \frac{I_\chi(\vec{\omega}_\chi)}{\|\Omega_\Psi\|} + \eta_2(\vec{\omega}_\Psi) \frac{I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi)}{\|\Omega_\chi\|} d\vec{\omega}_\chi d\vec{\omega}_\Psi \\ &= \iiint_{\Omega_\chi \times \Omega_\Psi} \left\langle (\eta_1(\vec{\omega}_\chi), \eta_2(\vec{\omega}_\Psi)), \left( \frac{I_\chi(\vec{\omega}_\chi)}{\|\Omega_\chi\|}, \frac{I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi)}{\|\Omega_\Psi\|} \right) \right\rangle d\vec{\omega}_\chi d\vec{\omega}_\Psi. \end{aligned}$$

Die Schreibweise des Funktionals  $\mathcal{G}$  kann vereinfacht werden durch

$$\mathcal{G}(\eta) = \left\| \left\langle (\eta_1, \eta_2), \left( \frac{I_\chi}{\|\Omega_\chi\|}, \frac{I_\Psi}{\|\Omega_\Psi\|} \right) \right\rangle \right\|_{L^1(\Omega_\chi \times \Omega_\Psi, \mathbb{R})}. \quad (3.4.22)$$

**Theorem 3.5.** Seien  $(\rho, \lambda)$  die Polarradien eines Reflektorpaares. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $\eta := (\log \rho, \log \lambda)$  maximiert das Funktional  $\mathcal{G}$  in  $adm_{\Omega_\chi \times \Omega_\Psi}$ .
2. Der Reflektor  $\Sigma_\rho$  zum Polarradius  $\rho$  ist eine schwache Lösung des Reflektorproblems

*Beweis.* siehe [16, Theorem 3.4] □

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

Falls  $\mathcal{G}$  das Maximum in der Funktion  $\eta \in \text{adm}_{\Omega_\chi \times \Omega_\Psi}$  annimmt, dann ist durch  $\rho(\vec{\omega}_\chi) := e^{\eta_1(\vec{\omega}_\chi)}$  der Polarradius der schwachen Lösung gegeben.

**Optimierungsproblem 3.2** (duale Monge-Kantorovich-Formulierung des Reflektorproblems).

Gesucht sind  $s \in C(\Omega_\chi, \mathbb{R})$  und  $q \in C(\Omega_\Psi, \mathbb{R})$  mit

$$s(\vec{\omega}_\chi) + q(\vec{\omega}_\Psi) \leq -\log(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle),$$

so dass das lineare Funktional

$$\iint_{\Omega_\chi} s(\vec{\omega}_\chi) I_\chi(\vec{\omega}_\chi) d\vec{\omega}_\chi + \iint_{\Omega_\Psi} q(\vec{\omega}_\Psi) I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi) d\vec{\omega}_\Psi$$

maximiert wird.

Aus der Lösung  $(s, q)$  dieses Optimierungsproblems kann das zugehörige *mapping*  $\hat{\mathcal{F}}$  bestimmt werden aufgrund der Forderung

$$\hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi) = \vec{\omega}_\Psi \Leftrightarrow s(\vec{\omega}_\chi) + q(\vec{\omega}_\Psi) = -\log(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle).$$

Der Vollständigkeit halber geben wir an dieser Stelle noch das primale Monge-Kantorovich-Problem an, dessen Lösung in einem direkten Zusammenhang zum gesuchten *mapping*  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}$  steht.

**Optimierungsproblem 3.3** (primale Kantorovich-Formulierung des Reflektorproblems). Gesucht ist das Maß  $\mu : \sigma(\Omega_\chi \times \Omega_\Psi) \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit den Marginalen

$$\begin{aligned} \mu(D\Omega_\chi, \Omega_\Psi) &= \iint_{D\Omega_\chi} I_\chi(\vec{\omega}_\chi) d\vec{\omega}_\chi \quad \forall D\Omega_\chi \in \sigma(\Omega_\chi) \text{ und} \\ \mu(\Omega_\chi, D\Omega_\Psi) &= \iint_{D\Omega_\Psi} I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi) d\vec{\omega}_\Psi \quad \forall D\Omega_\Psi \in \sigma(\Omega_\Psi), \end{aligned}$$

so dass das lineare Funktional

$$\iiint_{\Omega_\chi \times \Omega_\Psi} -\log(1 - \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle) d\vec{\omega}_\chi d\vec{\omega}_\Psi$$

minimiert wird.

Aus dem Produktmaß kann das *mapping*  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_\rho}$  approximiert werden (siehe Abschnitt 3.4.4). Die Idee hinter dieser Rekonstruktion ist, dass jedes schwach definierte *mapping*  $\xi : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$

### 3.4 Das optimale mapping und der Monge-Kantorovich-Formalismus

ein Maß  $\tau_\xi$  induziert (siehe Abbildung 3.8) mit

$$\mu(M \cap \xi^{-1}(Y)) = \tau(M \times Y) = \nu(\xi(M) \cap Y) \text{ mit } Y \subset \Omega_\chi \text{ und } M \subset \Omega_\Psi.$$

Diese Variante des Monge-Kantorovich-Algorithmus hat nur Gültigkeit für den Fall, dass das optische System aus einem Reflektor besteht. Um zu einer allgemeingültigeren Formulierung des Ansatzes zu gelangen wird in den folgenden Abschnitten eine allgemeinere Formulierung des Monge-Problems und der Relaxierung durch Kantorovich dargestellt.

#### 3.4.3 Das Monge-Problem des optimalen Transportes

Wir orientieren uns in diesem Abschnitt an der Ausarbeitung [4]. Seien zwei nichtnegative Radon Maße  $\mu^+$  auf  $\Omega_\chi \subset S^2$  und  $\mu^-$  auf  $\Omega_\Psi \subset S^2$  gegeben, so dass die Energieerhaltung

$$\mu^+(\Omega_\chi) = \mu^-(\Omega_\Psi) \quad (3.4.23)$$

erfüllt wird. Das Monge-Problem des optimalen Transports sucht ein injektives mapping  $\hat{\mathcal{F}} : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$ , das die Dichte  $\mu^+$  in die Dichte  $\mu^-$  überführt, d.h.

$$\mu^-(B) = \mu^+(\hat{\mathcal{F}}^{-1}(B)) \quad \forall \mu^- \text{ messbaren Mengen } B.. \quad (3.4.24)$$

In unserer Problemstellung sind die Maße  $\mu^\pm$  durch die positiven und differenzierbaren Dichten  $I_\chi$  auf  $\Omega_\chi$  und  $I_\Psi$  auf  $\Omega_\Psi$  definiert durch

$$\begin{aligned} \mu^+(A) &= \iint_A I_\chi(\vec{\omega}_\chi) d\vec{\omega}_\chi \quad \forall A \subset \Omega_\chi \text{ messbar} \\ \mu^-(B) &= \iint_B I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi) d\vec{\omega}_\Psi \quad \forall B \subset \Omega_\Psi \text{ messbar.} \end{aligned}$$

Die Energieerhaltung (3.4.23) ist äquivalent zu der Forderung

$$\iint_{\Omega_\chi} I_\chi(\vec{\omega}_\chi) d\omega_\chi = \iint_{\Omega_\Psi} I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi) d\vec{\omega}_\Psi$$

und die Bedingung (3.4.24) zu

$$I_\chi(\vec{\omega}_\chi) = I_\Psi(\hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi)) |\det(\mathbf{D}\hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi))|, \quad (3.4.25)$$

falls  $\hat{\mathcal{F}}$  ein Diffeomorphismus auf  $\Omega_\chi$  ist.

Zusätzlich bewertet eine Transportkostenfunktion  $c : \Omega_\chi \times \Omega_\Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$  durch das Transportkos-

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

tenfunktional

$$\mathcal{C}[\hat{\mathcal{F}}] := \iint_{\Omega_\chi} c(\vec{\omega}_\chi, \hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi)) d\mu^+(\vec{\omega}_\chi) = \iint_{\Omega_\chi} c(\vec{\omega}_\chi, \hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_\chi)) I_\chi(\vec{\omega}_\chi) d\Omega_\chi$$

das *mapping*  $\hat{\mathcal{F}}$ . Das Monge-Problem besteht darin, unter allen *mappings*, die die Gleichung (3.4.24) erfüllen, das Minimum

$$\hat{\mathcal{F}}^* := \inf \{ \mathcal{C}[\hat{\mathcal{F}}] \mid \hat{\mathcal{F}} : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi, \hat{\mathcal{F}}_\#(\mu^+) = \mu^- \} \quad (3.4.26)$$

zu finden.

Um die Relevanz dieses Ansatzes für das Beleuchtungsproblem (siehe Abschnitt 2.5) zu belegen soll nun ein möglicher Zusammenhang zwischen dem *optimalen mapping* und der Existenz eines entsprechenden optischen Systems hergestellt werden. Nach *Steven Haker* in [9, S. 228] ist das optimale mapping  $\hat{\mathcal{F}}^*$  für die Kostenfunktion

$$c(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi) = \|\vec{\omega}_\chi - \vec{\omega}_\Psi\|^2$$

der Gradient einer konvexen Funktion  $\zeta : \Omega_\chi \rightarrow \mathbb{R}$ . In diesem Fall kann die Gleichung (3.4.25) als partielle Differentialgleichung

$$I_\chi(\vec{\omega}_\chi) = I_\Psi(\nabla\zeta(\vec{\omega}_\chi)) |\det(\mathbf{H}\zeta(\vec{\omega}_\chi))|. \quad (3.4.27)$$

des Typs *Monge-Ampère* geschrieben werden. Dieser Zusammenhang erinnert an die Modellierung nach *J. S. Schruben*, da die partielle Differentialgleichung (3.1.5), die die Optik beschreibt, vom selben Typ ist. Der Zusammenhang zwischen dem *optimalem mapping* und dem Beleuchtungsproblem (siehe Abschnitt 2.5) soll nun noch etwas näher betrachtet werden. Die Eigenschaft

$$\hat{\mathcal{F}}^* = \nabla\zeta$$

ist äquivalent zur Wegunabhängigkeit des Integrals, bzw. dem Verschwinden des Ringintegrals

$$\oint_T \nabla\zeta(\vec{\omega}_\chi) \cdot d\mathbf{l} = \oint_T \hat{\mathcal{F}}^*(\vec{\omega}_\chi) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

über jede geschlossene Kurve  $T \subset \Omega_\chi$  und der Wirbelfreiheit

$$\text{rot}(\hat{\mathcal{F}}^*)(\vec{\omega}_\chi) = 0$$

des mappings  $\hat{\mathcal{F}}^*$  für alle  $\pi \in \Pi$ .

Wegen der Verknüpfung zwischen dem *mapping* und dem Normalenvektorfeld kann zur Aus-



legung von Optiken ein *optimales mapping* berechnet werden, zu dem dann ein optisches System berechnet werden kann<sup>6</sup>. Hierbei bietet sich die Verwendung der quadratischen Abstandsfunktion besonders an. Jedoch ist das Monge-Problem aufgrund der hohen Nichtlinearität der Hessematrix und möglicher Singularitäten in der Funktion  $\hat{\mathcal{F}}$  numerisch sehr schwer zu lösen. *Haker* gibt in seiner Veröffentlichung [9] eine Alternative zur Lösung der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung an, indem das Problem erst eindimensional in beide Richtungen gelöst wird und anschließend im Lösungsraum die Rotation iterativ verringert wird. *Kantorovich* vereinfachte das Monge-Problem 1940 durch eine Relaxierung, die im Folgenden dargestellt werden soll.

### 3.4.4 Die Relaxierung des Monge-Problems durch Kantorovich zum primalen Monge-Kantorovich-Problem

Die Relaxierung von Kantorovich besteht darin, nicht mehr diffeomorphe mappings  $\hat{\mathcal{F}} : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$  zu bestimmen, sondern die Lösung im Raum der Produkt-Maße auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\Omega_\chi \times \Omega_\Psi)$  mit Marginalen  $\mu^\pm$  zu suchen. Da Maße Nullmengen vernachlässigen, stellen beispielsweise Nullstellen der Jakobideterminante  $\det(\mathbf{D}\hat{\mathcal{F}})$  kein Problem dar, so dass dieser Ansatz in einem größeren Lösungsraum sucht, der auch nicht überall definierte Lösungen zulässt. Wir bezeichnen diesen Maßraum mit

$$\mathcal{M} := \left\{ \text{Radon-Maße } \mu \text{ auf } \Omega_\chi \times \Omega_\Psi \mid \Gamma_{\vec{\omega}_\chi} \mu = \mu^+, \Gamma_{\vec{\omega}_\Psi} \mu = \mu^- \right\}. \quad (3.4.28)$$

Das relaxierte Produktmaßfunktional ist

$$J[\mu] := \iiint_{\Omega_\chi \times \Omega_\Psi} c(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi) d\mu(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi). \quad (3.4.29)$$

Gesucht ist nun zu  $\mu^\pm$  das Maß  $\mu^*$  mit  $J[\mu^*] = \min_{\mu \in \mathcal{M}} J[\mu]$ . Dieses Problem wird das **primale Monge-Kantorovich-Problem** genannt.

Der Zusammenhang zwischen dem mapping  $\hat{\mathcal{F}}^*$  und dem Produktmaß  $\mu^*$  wird im folgenden Beispiel 3.3 verdeutlicht, im nächsten Abschnitt formuliert und für den diskreten Fall als lineares Programm 3.1 gefasst.

**Beispiel 3.3 (1D).** *In diesem Beispiel wenden wir die bisher hergeleiteten Formeln auf ein eindimensionales Problem an. Sei  $\Omega_\chi = [0; 1] = \Omega_\Psi$  und  $I_\chi = 1 = I_\Psi$  die Dichten der Maße  $\mu^\pm$ . Die Lösung  $\hat{\mathcal{F}}^*$  des Monge-Problems unter der Kostenfunktion  $c(x, y) = (x - y)^2$  ist die Identität  $\hat{\mathcal{F}}^*(x) = x$ . Wir wollen das Monge-Kantorovich-Problem auf einer äquidistanten Diskretisierung von  $\Omega_\chi$  und  $\Omega_\Psi$  mit Schrittweite  $h = 1/n$  lösen. Die Maße  $\mu^\pm$  ergeben auf jedem Teilgebiet*

<sup>6</sup>siehe hierzu die Aussage des Theorems 3.2 in Abschnitt 3.4

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

die Zahlen  $\mu_i^+ = \mu_j^- = h$ . Das induzierte Maß

$$\mu^*(E) := \mu^+ \left( \{ \pi \in \mathbb{R} | (\pi, \hat{\mathcal{F}}^*(\pi)) \in E \} \right) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\Omega_\chi \times \Omega_\Psi) \quad (3.4.30)$$

löst das Monge-Kantorovich-Problem (siehe [4, Seite 5]). Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 3.7 dargestellt. Die Relaxierung bezieht sich also darauf, dass nicht mehr die Frage ge-

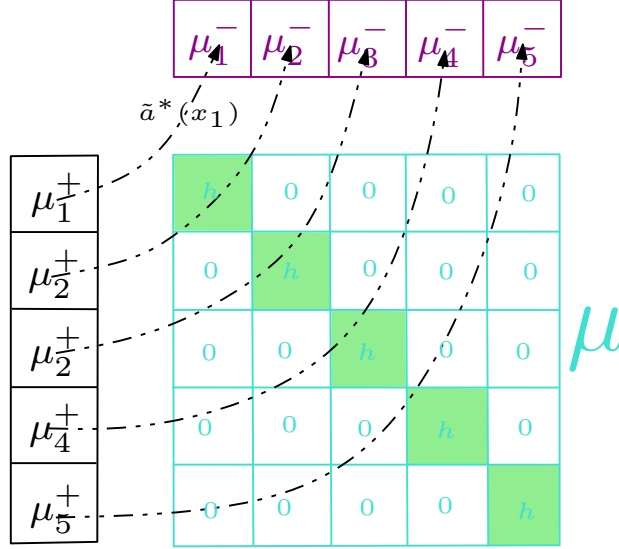


Abb. 3.7: Darstellung des Zusammenhangs zwischen einem mapping und dem Produktmaß.

stellt wird, welche Punkt-zu-Punkt-Zuordnung die Maße ineinander überführt, sondern, wie die einzelnen Mengen zusammenhängen, bzw. wie Teilmengen von  $\Omega_\chi$  abgebildet werden. Dadurch verdoppelt sich die Anzahl der Freiheitsgrade, jedoch hängt das Funktional und die Nebenbedingungen linear von dem Produktmaß ab.

Damit wird dargestellt, wie aus der Lösung des Monge-Problems die Lösung des relaxierten Monge-Kantorovich-Problems hergeleitet werden kann. Wie jedoch aus der Lösung des Monge-Kantorovich-Problems ein mapping rekonstruiert werden kann, ist an dieser Stelle noch offen.

#### Konstruktion eines optimalen mappings aus der primalen Monge-Kantorovich-Lösung

Zu  $\vec{\omega}_\chi \in \Omega_\chi$  sei  $B_{\vec{\omega}_\chi}$  eine kleine offene Umgebung von  $\vec{\omega}_\chi$ . Die Dichte  $I_\chi$  definiert in  $B_{\vec{\omega}_\chi}$  eine Energie  $\int_{B_{\vec{\omega}_\chi}} I(\vec{\omega}_\chi) d\vec{\omega}_\chi$ . Wir wählen eine Diskretisierung  $\{\Omega_\Psi^j | j \in 1 \dots o\}$  mit  $o \in \mathbb{N}^+$  von  $\Omega_\Psi$  mit den Mittelpunkten  $\vec{\omega}_\Psi^i \in \Omega_\Psi^i$ . Die Maßzahl  $\mu^*(B_{\vec{\omega}_\chi} \times \Omega_\Psi^i)$  sagt aus, mit welchem Anteil die

### 3.4 Das optimale mapping und der Monge-Kantorovich-Formalismus

Energie in  $B_{\vec{\omega}_\chi}$  auf die Teilmenge  $\Omega_\Psi^i$  abgebildet wird. Diese geometrische Bedeutung wird in Abbildung 3.7 und 3.8 verdeutlicht und ermöglicht uns eine heuristische Art der Konstruktion eines mappings durch

$$\hat{\mathcal{F}}^+(\vec{\omega}_\chi) := \frac{\sum_{j=1}^o \mu^*(B_{\vec{\omega}_\chi} \times \Omega_\Psi^j) \vec{\omega}_\Psi^j}{\mu^*(B_{\vec{\omega}_\chi} \times \Omega_\Psi)}. \quad (3.4.31)$$

Diese Definition stellt eine Annäherung an das optimale mapping  $\hat{\mathcal{F}}^*$  dar. Betrachtet man das Beispiel 3.3 in Abbildung 3.7, so sieht man sofort, dass das mapping  $\hat{\mathcal{F}}^+$  bei geeigneter Wahl der Mittelpunkt identisch ist zu dem gesuchten mapping  $\hat{\mathcal{F}}^*$ .

Aufgrund der geometrischen Eigenschaft der Kostenfunktion wird für das minimierende Produktmaß  $\mu^*$  in der Regel gelten, dass die Teilmenge  $\Psi_{\vec{\omega}_\chi}$  mit  $\mu^*(B_{\vec{\omega}_\chi} \times \Psi_{\vec{\omega}_\chi}) > 0$  und  $\mu^*(B_{\vec{\omega}_\chi} \times (\Psi \setminus \Psi_{\vec{\omega}_\chi})) = 0$  klein ist und geringen Abstand zu  $\vec{\omega}_\chi$  hat. Dieser Sachverhalt führt zu einer schwachen Besetztheit des Produktmaßes  $\mu^*$ , die für effiziente Berechnungsroutinen (siehe Abschnitt 5.5) ausgenutzt werden kann. Aus dieser Beobachtung folgt, dass die obige Definition des mappings  $\hat{\mathcal{F}}^+$  sinnvoll ist, da der Punkt  $\vec{\omega}_\chi$  in ein Gebiet auf  $\Psi$  abgebildet wird, in das auch die Energie aus  $B_{\vec{\omega}_\chi}$  abgebildet wird.

Diese Motivation der Definition des mappings  $\hat{\mathcal{F}}^+$  kann auch eingesehen werden, wenn man davon ausgeht, dass zu dem konkreten Problem ein optimales mapping  $\hat{\mathcal{F}}^*$  existiert. In diesem Fall wird das Maß  $\mu^*$  von diesem induziert. Sei  $B_{\vec{\omega}_\Psi}$  eine offene Umgebung in  $\Psi$ , so gilt für das Maß  $\mu^*$

$$\mu^+(B_{\vec{\omega}_\chi} \cap \hat{\mathcal{F}}^{*-1}(B_{\vec{\omega}_\Psi})) =: \mu^*(B_{\vec{\omega}_\chi} \times B_{\vec{\omega}_\Psi}) := \mu^-(\hat{\mathcal{F}}^*(B_{\vec{\omega}_\chi}) \cap B_{\vec{\omega}_\Psi}).$$

Wählt man eine Folge von Diskretisierungen von  $\Omega_\chi$ , in der für alle  $\vec{\omega}_\chi$  eine Teilfolge existiert, die auf die Menge  $\{\vec{\omega}_\chi\}$  konvergiert. Für das mapping  $\hat{\mathcal{F}}^*$  gilt in diesem Fall der Zusammenhang

$$\hat{\mathcal{F}}^*(\vec{\omega}_\chi) = \lim_{B_{\vec{\omega}_\chi} \rightarrow \{\vec{\omega}_\chi\}} \lim_{o \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^o \frac{\mu^*(B_{\vec{\omega}_\chi}, \Omega_\Psi^k) \vec{\omega}_\Psi^i}{\mu(B_{\vec{\omega}_\chi}, \Omega_\Psi)}.$$

zum Produktmaß  $\mu^*$ . Eine diskrete eindimensionale Veranschaulichung dieses Rückschlusses auf das mapping  $\hat{\mathcal{F}}^+$  wird im Beispiel 3.4 dargestellt. Wir fassen das primale Monge-Kantorovich-Problem nun als lineares Programm zusammen.

**lineares Programm 3.1** (primales Monge-Kantorovich-Problem). *Wir wählen zur Vereinfachung der Notation die Indizierung  $i \equiv (i_1, i_2)$  und  $j \equiv (j_1, j_2)$ .*

*Sei eine disjunkte Unterteilung der Mengen  $\Omega_\chi$  und  $\Omega_\Psi$  in  $\{\Omega_\chi^i | i = 1, \dots, m\}$  und  $\{\Omega_\Psi^j | j = 1, \dots, o\}$  mit  $m, o \in \mathbb{N}$  und den Mittelpunkten  $\vec{\omega}_\chi^i$  und  $\vec{\omega}_\Psi^j$  gegeben. Die Maßzahlen  $\mu^+$  und  $\mu^-$  können*

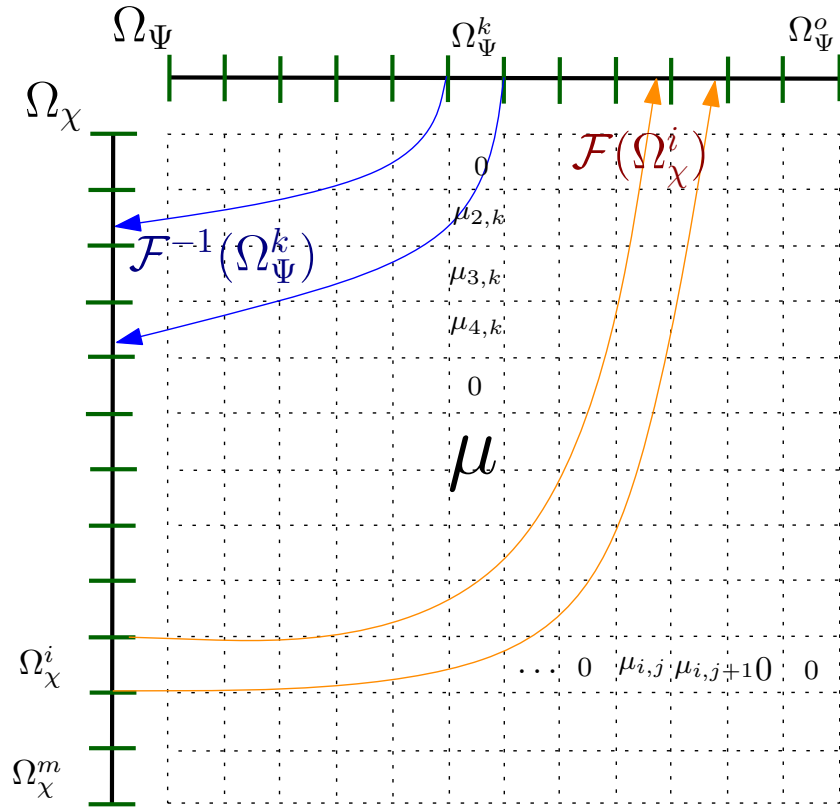


Abb. 3.8: Der Zusammenhang zwischen dem optimalen Produktmaß  $\mu$  auf  $\sigma(\Omega_\chi \times \Omega_\Psi)$  und einem bis auf Nullmengen eindeutigen mapping  $\hat{\mathcal{F}}$ . Das Maß enthält die Information, in welche Teilmengen von  $\Omega_\Psi$  die einzelne Teilmenge von  $\Omega_\chi$  wie stark abgebildet wird, so dass das mapping approximiert werden kann. Das Maß läßt den umgekehrten Schluss zu für die Umkehrabbildung  $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$

### 3.4 Das optimale mapping und der Monge-Kantorovich-Formalismus

mit Hilfe der Dichten  $I_\chi$  und  $I_\Psi$  berechnet werden durch

$$\mu_i^+ := \iint_{\Omega_{\chi_i}} I_\chi(\vec{\omega}_\chi) d\vec{\omega}_\chi \text{ und } \mu_j^- := \iint_{\Omega_{\Psi_j}} I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi) d\vec{\omega}_\Psi.$$

Aufgrund der geforderten Energieerhaltung (3.4.1) gilt

$$\sum_{i=1}^m \mu_i^+ = \sum_{j=1}^o \mu_j^-.$$

Mit der Kostenmatrix  $C$ , deren Elemente mit  $c_{i,j} := c(\vec{\omega}_\chi^i, \vec{\omega}_\Psi^j)$  gegeben sind sollen die  $m \cdot n$  Maßzahlen  $\mu_{i,j}^*$  so bestimmt werden, so dass

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^o c_{i,j} \mu_{i,j} \quad (3.4.32)$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^o \mu_{i,j} = \mu_i^+, \sum_{i=1}^m \mu_{i,\hat{j}} = \mu_{\hat{j}}^-, \text{ für alle } \hat{i} = 1 \dots m \text{ und } \hat{j} = 1 \dots o.$$

Diese  $(m + o)$  Nebenbedingungen lassen sich durch ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & \dots & 1 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & 1 & & & 1 & & & 1 & & \\ 01 & & & 01 & & & 01 & & & 01 & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{1,1} \\ \mu_{1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_{2,1} \\ \mu_{2,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_{m,o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^+(\Omega_\chi^1) \\ \mu^+(\Omega_\chi^2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu^+(\Omega_\chi^m) \\ \mu^-(\Omega_\Psi^1) \\ \mu^-(\Omega_\Psi^2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu^-(\Omega_\Psi^o) \end{pmatrix}.$$

beschreiben.

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

**Beispiel 3.4 (1D).** Wir betrachten das 1D-Beispiel in Abbildung 3.9. Das Maß  $\mu_1$  zur Dichte  $I$  soll unter quadratischer Kostenfunktion in das Maß  $\mu_2$  zur Dichte  $B$  überführt werden. Das Ergebnis des linearen Programmes ist das Produktmaß im unteren Teil der Abbildung. Eine Zeile im Produktmaß sagt über ein optimales mapping  $\hat{\mathcal{F}}^* : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$  aus, auf welche Intervalle des Zielgebietes die Energie im zugrundeliegende Intervall des Urbildraumes abgebildet wird. Dieser Zusammenhang findet sich in der gewichteten Mittelwertbildung (3.4.31) wieder. Auf diese Weise wird eine Annäherung an das optimale mapping bestimmt, das in Abbildung 3.10 dargestellt wird.

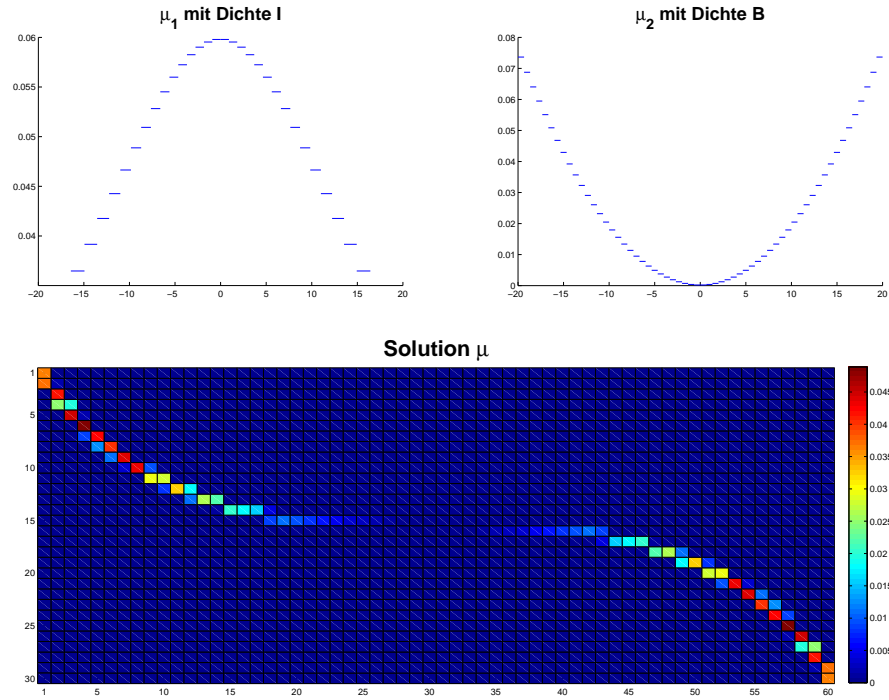


Abb. 3.9: Eindimensionales primales Monge-Kantorovich Problem. Das Maß  $\mu_1$  zur Dichte  $I$  soll unter quadratischer Kostenfunktion in das Maß  $\mu_2$  zur Dichte  $B$  überführt werden. Das Ergebnis des linearen Programmes ist das Produktmaß im unteren Teil der Abbildung.

#### 3.4.5 Das duale Monge-Kantorovich-Problem

Das zugehörige duale Monge-Kantorovich-Problem sucht im Raum

$$\mathcal{L} := \{(u, v) \mid (u, v) \in L^1(\Omega_\chi) \times L^1(\Omega_\Psi), u(\vec{\omega}_\chi) + v(\vec{\omega}_\Psi) \leq c(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi)\} \quad (3.4.33)$$

### 3.4 Das optimale mapping und der Monge-Kantorovich-Formalismus

das Paar  $(u^*, v^*)$ , auf dem das Kostenfunktional

$$\mathcal{K}[u, v] := \iint_{\Omega_\chi} u(\vec{\omega}_\chi) I_\chi(\vec{\omega}_\chi) d\Omega_\chi + \iint_{\Omega_\Psi} v(\vec{\omega}_\Psi) I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi) d\Omega_\Psi \quad (3.4.34)$$

maximiert wird unter den Nebenbedingungen

$$u(\vec{\omega}_\chi) + v(\vec{\omega}_\Psi) \leq c(\vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi) \quad \forall \vec{\omega}_\chi \in \Omega_\chi, \vec{\omega}_\Psi \in \Omega_\Psi. \quad (3.4.35)$$

Der diskrete Fall wird im Linearen Programm 3.2 zusammengefasst.

**lineares Programm 3.2.** Für eine Diskretisierung der Mengen, der Maße und der Kostenfunktion wie im Linearen Programm 3.1 besteht die Aufgabe des diskreten dualen Monge-Kantorovich-Problems darin, die Werte  $u_i$  mit  $i = 1 \dots m$  und  $v_j$  mit  $j = 1 \dots o$  zu bestimmen, so dass

$$\sum_{i=1}^m u_i \mu_i^+ + \sum_{j=1}^o v_j \mu_j^- \quad (3.4.36)$$

maximiert wird unter den Nebenbedingungen

$$u_i + v_j \leq c_{i,j} \quad \text{für } i = 1 \dots mn \text{ und } j = 1 \dots op. \quad (3.4.37)$$

Für die quadratische Kostenfunktion

$$u(\vec{\omega}_\chi) + v(\vec{\omega}_\Psi) \leq \frac{1}{2} \|\vec{\omega}_\chi - \vec{\omega}_\Psi\|_2^2 \quad \forall \vec{\omega}_\chi \in \Omega_\chi, \vec{\omega}_\Psi \in \Omega_\Psi$$

und die Funktionen

$$\zeta(\vec{\omega}_\chi) := \frac{1}{2} \|\vec{\omega}_\chi\|_2^2 - u(\vec{\omega}_\chi), \quad \Gamma(\vec{\omega}_\Psi) := \frac{1}{2} \|\vec{\omega}_\Psi\|_2^2 - v(\vec{\omega}_\Psi) \quad (3.4.38)$$

sind die Nebenbedingungen (3.4.35) äquivalent zu

$$\zeta(\vec{\omega}_\chi) + \Gamma(\vec{\omega}_\Psi) \geq \langle \vec{\omega}_\chi, \vec{\omega}_\Psi \rangle \quad (3.4.39)$$

und das Problem der Maximierung von (3.4.34) ist äquivalent zu der Minimierung von

$$\mathcal{L}[\zeta, \Gamma] := \iint_{\Omega_\chi} \zeta(\vec{\omega}_\chi) I_\chi(\vec{\omega}_\chi) d\vec{\omega}_\chi + \iint_{\Omega_\Psi} \Gamma(\vec{\omega}_\Psi) I_\Psi(\vec{\omega}_\Psi) d\vec{\omega}_\Psi$$

für alle integrierbaren Funktionen  $\zeta$  und  $\Gamma$ , die die Nebenbedingung (3.4.39) für alle  $\vec{\omega}_\chi \in \Omega_\chi$  und  $\vec{\omega}_\Psi \in \Omega_\Psi$  erfüllen. Wir fassen diese Umformulierung in einem weiteren linearen Programm zusammen:

**lineares Programm 3.3.** Für eine Diskretisierung der Mengen, der Maße und der Kostenfunktion wie im Linearen Programm 3.1 besteht die Aufgabe des diskreten dualen Monge-Kantorovich-Problems darin, die Werte  $\zeta_i$  mit  $i = 1 \dots m$  und  $\Gamma_j$  mit  $j = 1 \dots o$  zu bestimmen, so dass

$$\sum_{i=1}^m \zeta_i \mu_i^+ + \sum_{j=1}^o \Gamma_j \mu_j^- \quad (3.4.40)$$

*minimiert wird unter den Nebenbedingungen*

$$\zeta_i + \Gamma_j \geq \langle \vec{\omega}_\chi^i, \vec{\omega}_\Psi^j \rangle \text{ für } i = 1 \dots m \text{ und } j = 1 \dots o. \quad (3.4.41)$$

Falls  $u_i$  und  $v_j$  mit  $i = 1 \dots m$  und  $j = 1 \dots o$  die Lösung des Linearen Programmes 3.2 ist, ergeben sich die Zahlen  $\zeta_i$  und  $\Gamma_j$  durch Anwenden der Gleichungen (3.4.38) mit

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \|\vec{\omega}_\chi^i\|_2^2 - u_i, \quad \Gamma_j = \frac{1}{2} \|\vec{\omega}_\Psi^j\|_2^2 - v_j.$$

Die  $m_0$  Ungleichungs-Nebenbedingungen können in der Matrix-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 1 & & & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \\ 1 & & & & & & & & 1 \\ & 1 & & & 1 & & & & \\ & \vdots & & & & & \ddots & & \\ & 1 & & & & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & & & & \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & 1 \\ & & & 1 & 1 & & & & \\ & & & \vdots & & & \ddots & & \\ & & & 1 & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_m \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_o \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \langle \vec{\omega}_\chi^1, \vec{\omega}_\Psi^1 \rangle \\ \langle \vec{\omega}_\chi^1, \vec{\omega}_\Psi^2 \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle \vec{\omega}_\chi^m, \vec{\omega}_\Psi^o \rangle \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Diese Matrix ist regulär und besitzt  $2m+o$  nicht-null-Einträge und das Gleichungssystem  $m+o$  Unbekannte.

### Rückschluss von der dualen Monge-Kantorovich-Lösung auf das optimale mapping

Sei  $\zeta$  die Lösung des Linearen Programms 3.3, so stellt folgendes Theorem den Zusammenhang zum gesuchten optimalen mapping  $\mathcal{F}^*$  her (siehe [4, Theorem 3.1 Seite 13]).



### 3.4 Das optimale mapping und der Monge-Kantorovich-Formalismus

**Theorem 3.6.** *Die Funktion  $\hat{\mathcal{F}}^* : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi := \nabla\zeta$  löst das Monge-Problem (3.4.26) bei quadratischer Kostenfunktion.*

*Beweis.* siehe [4, Theorem 3.1 auf Seite 13] □

In Abbildung 3.11 werden das berechnete mapping aus den Linearen Programmen 3.1 und 3.3 zu der primalen und dualen Formulierung des Monge-Kantorovich-Problems miteinander verglichen.

### 3 Modellierungen des Beleuchtungsproblems mit einer Punktlichtquelle

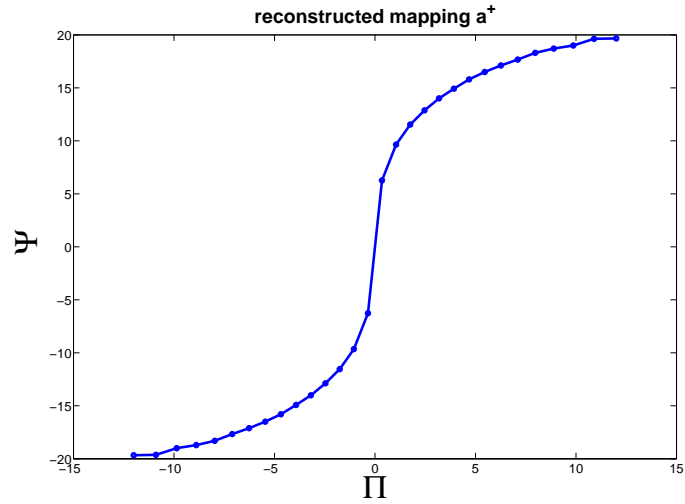


Abb. 3.10: Das mapping  $\hat{\mathcal{F}}^+ : \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$  wird aus der primalen Lösung des Formalismus nach Kantorovich des Monge-Problems durch die gewichtete Mittelpunktsbildung (3.4.31) bestimmt.

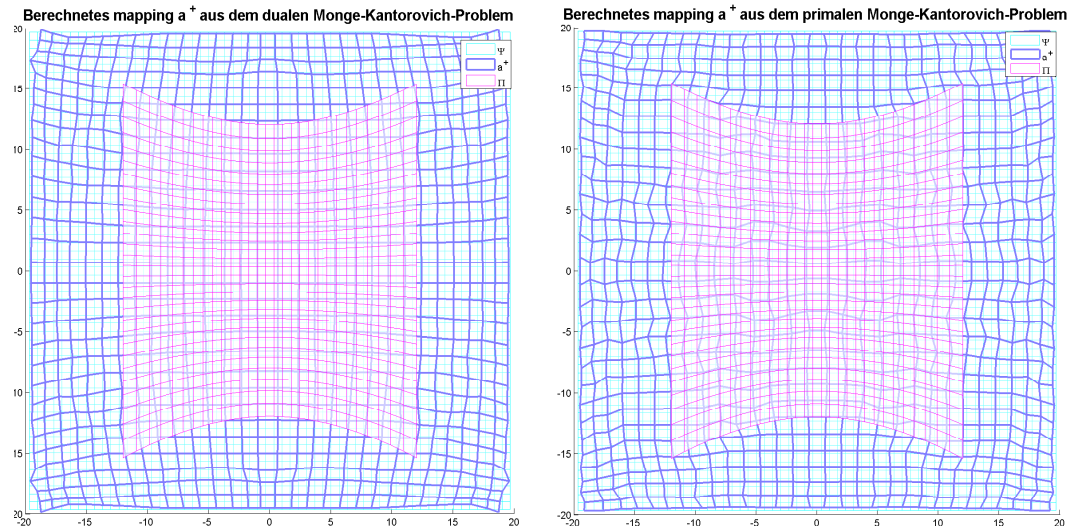


Abb. 3.11: Das Gitter  $\Pi$  der Mittelpunkte  $\tilde{\pi}_i$  im Vordergrund der Zeichnungen soll auf die Ebene  $\Omega_\Psi$  im Hintergrund abgebildet werden.  $\hat{\mathcal{F}}^+$  ist das berechnete mapping. Im linken Bild wurde dieses mapping aus dem dualen linearen Programm 3.3 der Monge-Kantorovich-Formulierung erzeugt und im rechten Bild aus dem primalen linearen Programm 3.1. Es sind geringe Unterschiede erkennbar.

## 4 Modellierung des Beleuchtungsproblems mit ausgedehnter Lichtquelle

Die bislang betrachteten Ansätze approximieren die ausgedehnte<sup>1</sup> Lichtquelle  $\chi \subset \mathbb{R}^3$  als Punkt  $\hat{\chi} \in \mathbb{R}^3$ . Die resultierenden Probleme stellen bereits nichtlineare partielle Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Minimierungsaufgaben oder hochdimensionale lineare Programme dar. Durch die reale Ausdehnung der Lichtquelle gelten die Modellierungen mit Punktlichtquellen nur approximativ, in Abhängigkeit von der relativen Größe des optischen Systems zur Ausdehnung der Lichtquelle. Dieses Verhalten wird im folgenden Beispiel illustriert.

**Beispiel 4.1** (Ungültigkeit der Punktlichtquellen-Approximation für kleine optische Systeme). *Dieses Beispiel soll die allgemeine Ungültigkeit der Punktlichtquellen-Approximation verdeutlichen. Je größer die Lichtquelle im Vergleich zur Optik wird, desto unschärfer wird die generierte Abbildung. Wir wählen zu Verdeutlichung die Optik aus Abbildung 4.1a, die mit dem PDE-Ansatz aus Abschnitt 3.1 berechnet wurde und das Portrait von Gaspard Monge im Fernfeld generiert (Abbildung 4.1b). Wir setzen anstelle der Punktlichtquelle quadratische Lichtquellen ein, die dieselbe Lichtstärkeverteilung realisieren. Es werden verschiedene Ausdehnungen der Lichtquelle betrachtet. In Abbildung 4.2 kann man den verursachten Effekt der stärkeren Unschärfe der generierten Lichtstärkeverteilung in Abhängigkeit von der Ausdehnung der Lichtquelle beobachten. Aus diesem Grunde ist es wichtig, die Ausdehnung der Lichtquelle zu modellieren*

Innerhalb der Modellierungen mit Punktlichtquelle gibt es verschiedene Ansätze, bzw. Möglichkeiten, die Effekte durch die Ausdehnung der Lichtquelle zu berücksichtigen, diese jedoch nicht direkt zu modellieren. Einige Ansätze werden in dem nächsten Abschnitt angerissen.

---

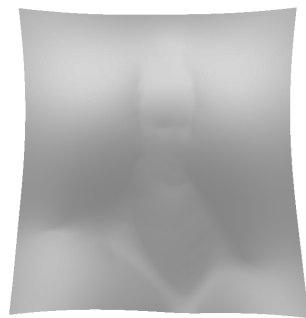
<sup>1</sup>Eine ausgedehnte Lichtquelle wird beschrieben durch die Leuchtdichtefunktion auf eine parametrisierbaren zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$

## 4.1 Ansätze zur Berücksichtigung der Ausdehnung der Lichtquelle unter Approximation der Lichtquelle als Punkt

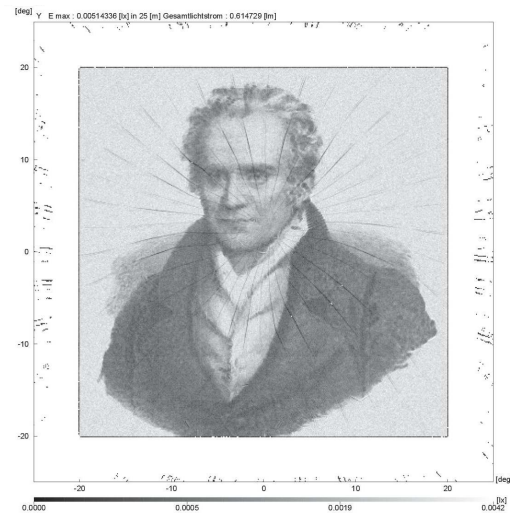
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Unschärfe der generierten Lichtverteilung durch die reale Ausdehnung der Lichtquelle bereits in Ansätzen mit Approximation der Lichtquelle als Punkt zu berücksichtigen. Einige Ansätze sollen hier vorgestellt werden.

**rekursive Änderung der Ziellichtverteilung** William Cassarly erwähnt in dem Artikel [6] einen Ansatz, der auf allgemeine Modellierungen angewandt werden kann. Zu einem beliebigen Algorithmus bezeichne  $\mathfrak{D}(B_\Psi)$  das optische System, das durch den Algorithmus berechnet wird. Die durch  $\mathfrak{D}$  mit ausgedehnter Lichtquelle realisierte *Beleuchtungsstärkeverteilung* ist  $B(\mathfrak{D})$ . Falls  $B(\mathfrak{D})$  von der Zielverteilung abweicht, d.h.

$$B(\mathfrak{D}(B_\Psi)) \neq B_\Psi,$$



(a)



(b)

Abb. 4.1: Die generelle Ungültigkeit der Punktlichtquellen-Approximation soll mit diesem Beispiel verdeutlicht werden. (a) Diese optische Fläche wurde mit Hilfe der Modellierung aus Abschnitt 3.1 berechnet. (b) Die generierte Lichtverteilung dieser Optik

#### 4.1 Berücksichtigung der Ausdehnung unter Punktlichtquellen-Approximation

dann kann der Algorithmus in einer Rekursionsschleife angewandt werden mit manipulierter Ziellichtverteilung durch die Vorschrift

$$B_1 := B_\Psi$$

$$B_{n+1} = \frac{B_\Psi}{B(\mathcal{D}(B_n))} B_n.$$

Wenn die Abweichung der erzeugten Verteilung  $B_{n+1}$  von der eigentlichen Ziellichtverteilung  $B_\Psi$  klein genug ist, kann die Rekursion abgebrochen werden. *Cassarly* erwähnt verschiedene Quellen, nach denen dieser Ansatz nur lokal konvergent sein soll, d.h. eine gute Startlösung benötigt. Darüber hinaus nimmt die Rekursionsformel die Bereiche nicht in Betracht, in denen  $B_\Psi$  nicht definiert ist. Aus diesen Gründen schlägt *Cassarly* eine rekursive Veränderung des *source-target-mappings* vor. Die konkrete Modellierung ist jedoch nur für eindimensionale, bzw. rotationssymmetrische Probleme anwendbar, so dass an dieser Stelle nicht darauf eingegangen wird.

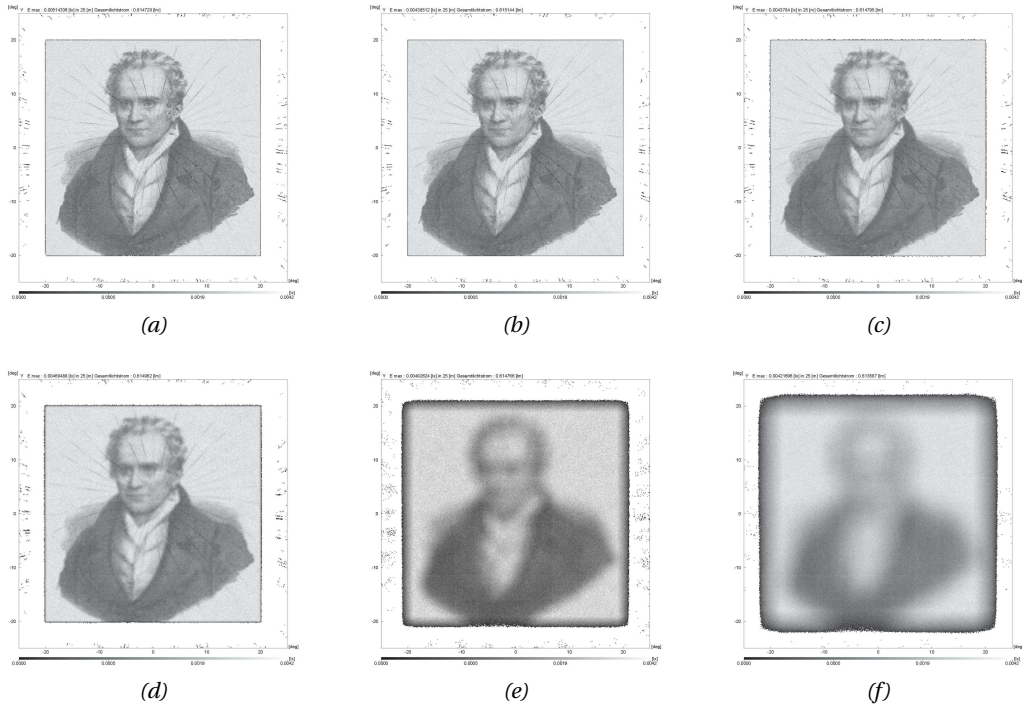


Abb. 4.2: Zusammenhang zwischen der Größe der Lichtquelle und der generierten Unschärfe im Bild. Mit der Größe der Lichtquelle nimmt die Unschärfe der generierten Lichtstärkeverteilung zu. (a) Punktlichtquelle. (b) Kantenlänge 0.25mm. (c) Kantenlänge 0.05mm. (d) Kantenlänge 0.1mm. (e) Kantenlänge 0.5mm. (f) Kantenlänge 1mm.

**Generierung von scharfen Kanten in der Lichtverteilung** Die Unschärfe durch ausgedehnte Lichtquellen wirkt sich besonders stark auf scharfe Hell-Dunkel Grenzen aus, die eine besondere Bedeutung in der automobilen Beleuchtung spielen. Eine Möglichkeit, diese scharfen Grenzen auch mit einer ausgedehnten Lichtquelle zu realisieren, ist die *Quellbildkorrektur*. Diese basiert darauf, in dem Algorithmus die Lage der angenommenen Punktlichtquelle variabel zu gestalten. Zu jedem Punkt  $\sigma$  der optischen Fläche wird mittels des *Forward-Raytraces* berechnet, welcher Randpunkt der Lichtquelle auf den obersten Punkt des zugehörigen Lichtquellenbildes  $\mathcal{F}(\chi, \sigma)$  (siehe Abbildung 4.4b) abgebildet wird. Falls dieser Punkt oberhalb der Hell-Dunkel-Grenze ist wird im nächsten Schritt der entsprechende Ort auf der Lichtquelle für die Punktlichtquelle angenommen und die optische Fläche korrigiert. Auf diese Weise werden Optiken generiert, deren Lichtquellenbilder an die zu realisierende Hell-Dunkel-Grenze heranreichen, aber diese nicht überlagern und damit auch nicht verfälschen. Ein Beispiel mit relativ weicher Hell-Dunkel Grenze ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Hier sieht man, dass die ausgewählten Lichtquellenbilder an die Hell-Dunkel Grenze heranreichen, diese aber nicht überschreiten.

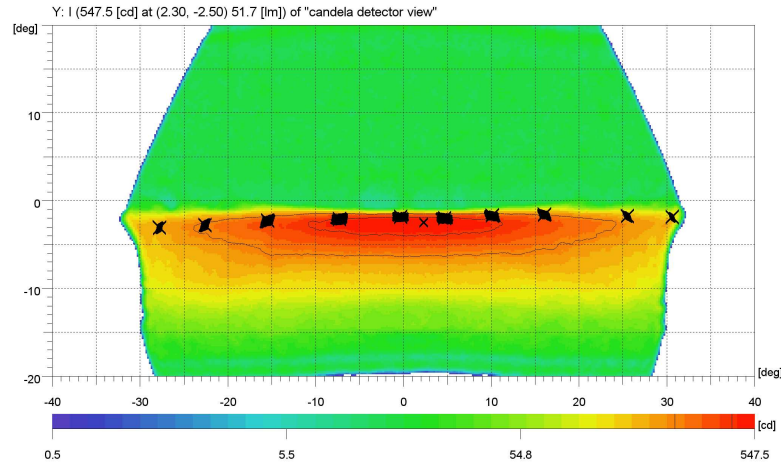


Abb. 4.3: Die Lichtquellenbilder einer ausgedehnten Fläche liegen an der Hell-Dunkel Grenze ohne diese zu überschreiten.

**Anpassen der Modellierung mit einer Faltung aus Abschnitt 3.2** In dem Artikel [14] wird eine theoretische Erweiterung der Modellierung auf ausgedehnte Lichtquellen gegeben. Die Lichtquelle kann durch eine endliche Anzahl von Punktlichtquellen  $\chi_i \in \mathbb{R}^3$  mit  $i = 1, \dots, n$  modelliert werden. Die *Lichtstärkeverteilung*  $I_\chi$  der ausgedehnten Lichtquelle muss gleich der Summe

$$\sum_{i=1}^n I_{\chi_i} = I_\chi$$

#### 4.1 Berücksichtigung der Ausdehnung unter Punktlichtquellen-Approximation

der Punktlichtquellen sein. Analog zur Formel (3.2.1) kann die *Beleuchtungsstärkeverteilung* in dem Punkt  $y \in \Psi$  berechnet werden durch die Summe

$$B_{c,\Psi}(y) = \sum_{i=1}^n \iint_{\Pi_{\Sigma_1}} I_{\chi_i}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\chi_i, \pi)) \sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^{\pi} \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\chi_i, \pi)} \delta_c(y - \mathcal{F}(\chi_i, \pi)) d\pi.$$

Wählt man eine dichte Folge  $(\{\chi_i | i = 1, \dots, n\})_n$  in  $\chi$ , dann erhält man im Grenzübergang nach [14, Seite 539] die Integralgleichung

$$B_{c,\Psi}(y) = \iint_{\Pi_{\Sigma_1}} \iint_{\chi} L_{\chi}(x, \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi)) \langle \vec{N}_{\chi}, \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}_{\Sigma_1}^{\pi} \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi)} \delta_c(y - \mathcal{F}(x, \pi)) dx d\pi$$

über die Leuchtdichte der Lichtquelle. Diese exakte Beschreibung der Lichtquelle wird allerdings durch die zusätzliche Verwendung der Faltung verfälscht.

Alternativ kann auch die ursprüngliche Modellierung mit Punktlichtquelle von *Mooisev* für ausgedehnte Lichtquellen verwendet werden. Die Abbildung 4.2 zeigt, dass durch die Ausdehnung der Lichtquelle eine Unschärfe auf die generierte Verteilung aufgebracht wird. Eine solche Unschärfe kann mathematisch durch eine Faltung erzeugt werden, wobei die Stärke der Unschärfe durch die Breite der Faltungsfunktion definiert wird. Da in der betrachteten Modellierung die Beleuchtungsstärke mittels einer Faltung berechnet wird, kann durch eine variable Breite  $c : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$  die lokal unterschiedlich starke Unschärfe approximiert werden. Da wir diesen Ansatz nicht weiter verfolgen verzichten wir an dieser Stelle auf eine Herleitung der Funktion  $c$ .

**Anpassung der schwachen Lösung für ausgedehnte Lichtquellen** Für die schwache Lösung des Reflektorproblems durch den *Oliker*-Algorithmus werden die Fokalparameter der Ellipsoiden so berechnet, dass die diskreten Lichtströme auf den Zielpunkten generiert werden. Für eine Punktlichtquelle ist dies sinnvoll, da der gesamte Lichtstrom auf die Zielpunkte abgebildet wird. In dem Artikel [6, ab Abschnitt 2.4] wird ein Ansatz beschrieben, um diese Berechnung der schwachen Lösung für ausgedehnte Lichtquellen anzupassen.

Die generierte *Beleuchtungsstärke*  $B_{\Sigma}(y_i)$  am Punkt  $y_i \in \Psi$  ist in diesem Fall nicht mehr rein proportional von dem abgebildeten Lichtstrom  $\Phi_i$  abhängig, der auf den Ellipsoiden  $E_i$  trifft, sondern zusätzlich antiproportional von der Größe des Lichtquellenbildes  $\|\mathcal{F}(\chi, \Omega_i)\|$ . Dies liegt daran, dass der Lichtstrom, der von der Lichtquelle auf eine Reflektorscherbe trifft, auf das Gebiet des Lichtquellenbildes verteilt wird und somit die *Beleuchtungsstärke* mit Zunah-

me des Lichtquellenbildes geringer wird, d.h.

$$B_{\Sigma}(y_i) = \frac{\Phi_i}{\|\mathcal{F}(\chi, \Omega_i)\|}.$$

Um diesen Effekt der Ausdehnung der Lichtquelle auszugleichen, wird eine Variation des *Oliker*-Algorithmus vorgeschlagen. Die *Beleuchtungsstärke*  $B_{\Sigma}(y_i)$  kann für lambertsche Lichtquellen mit einer Leuchtdichte  $L_0$  berechnet werden durch

$$B_{\Sigma}(y_i) = L_0 \iint_{\vec{\omega}_{\Sigma}(y_i, E_i \cap \Sigma)} d\vec{\omega}$$

Optimiert man nun die Fokalparameter darauf, dass die korrekten Raumwinkel (von der Zielfläche gesehen) für die geforderten *Beleuchtungsstärken* angenommen werden, so umgeht man den Antiproportionalität zur Größe des Lichtquellenbildes. *Fournier* nennt diesen Ansatz *PSA*-basierten Algorithmus. Die Abkürzung *PSA* steht für 'projizierten Raumwinkel'.

Allerdings beruht dieser Ansatz auf zwei weiteren Annahme:

1. Die Lichtquellenbilder der Ellipsoide müssen disjunkt sein, weil sonst für die *Beleuchtungsstärke* an den Punkten der Zielfläche verschiedene Reflektorscherben beteiligt sind, was die Optimierung ungleich komplexer macht.
2. Die Lichtquellenbilder müssen die Zielfläche  $\Psi$  fast vollständig überlagern. Diese Forderung ergibt sich aus dem Ansatz von *Fournier* in Abschnitt 3.3.2, glatte Reflektoren aus den diskreten Lösungen zu erzeugen. In diesem Fall werden die Lichtströme in den Lichtquellenbildern gleichmäßig auf  $\Psi$  verteilt. Wenn nun zwischen zwei benachbarten Lichtquellenbildern, die die korrekte *Beleuchtungsstärke* erzeugen, eine große Lücke ist, dann wird die Verteilung der kontinuierlichen Lösung geringere *Beleuchtungsstärken* generieren.

Eine Lösung wird in [6, ab Abschnitt 3.2] beschrieben. Das Gitter der Zielpunkte wird anfänglich äquidistant gewählt und anschließend so optimiert, dass die Lichtquellenbilder einer disjunkte Überlagerung von  $\Psi$  nahekommen.

Die beschriebenen Ansätze versuchen, die Effekte der Ausdehnung der Lichtquelle indirekt in den Modellierungen zu berücksichtigen, ohne die Ausdehnung direkt zu beschreiben und basieren weiterhin auf der Punktlichtquellen-Approximation. Eine direkte Modellierung mit ausgedehnter Lichtquelle kann helfen, diese Lösungen weiter zu optimieren und kann insbesondere in dem Fall Vorteile haben, wenn kleine Optiken mit großen Lichtquellenbildern berechnet werden sollen. Im Folgenden ist  $\chi$  eine ausgedehnte und parametrisierte Fläche,



deren Leuchtcharakteristik über die Leuchtdichte  $L_\chi : \chi \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  beschrieben wird.

## 4.2 Die Abbildungseigenschaften des optischen Systems mit ausgedehnter Lichtquelle

Im Abschnitt 3.2 wird die Beleuchtungsstärke an einem Punkt  $y \in \Psi$  durch das Faltungsintegral (3.2.1) über den Parameterbereich  $\Pi_{\Sigma_1}$  der inneren optischen Fläsche beschrieben. Die Energie in einem Lichtstrahl wird durch die Faltung auf einen Bereich in  $\Psi$  aufgeteilt, so dass eine differenzierte Größe der Lichtstärke gebildet wird. Diese Größe wird anschließend integriert, um die Beleuchtungsstärke zu bestimmen.

Aus dieser Modellierung können zwei Parallelen zur ausgedehnten Lichtquelle gezogen werden:

1. Durch das optische System wird die vierdimensionale Leuchtdichte in eine zweidimensionale Beleuchtungsstärkeverteilung transformiert. Aufgrund dieser Dimensionalität kann man darauf schließen, dass die generierten Beleuchtungsstärkeverteilung auf dem Detektor  $\Psi$  über eine Integralgleichung beschrieben werden kann.
2. Die Faltung auf der Fläche  $\Psi$  modelliert den Effekt, dass die Energie der Lichtquelle für einen Strahlengang nicht auf einen Punkt konzentriert wird, sondern auf einen umgebenden Bereich aufgeweitet wird. Das ist genau das Abbildungsverhalten eines optischen Systems mit ausgedehnter Lichtquelle.

Um also die generierte Beleuchtungsstärke mit ausgedehnter Lichtquelle zu berechnen, muss das Abbildungsverhalten eines solchen optischen Systems beschrieben werden, das in Abbildung 4.4 dargestellt wird. Die drei dargestellten Abbildungen des optischen Systems können mit Hilfe des *Forward*- und *Backward-Raytraces*  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{R}$  (Gleichungen (2.2.4) bis (2.2.8)) deklariert werden.

1. Ein Punkt  $x$  der Lichtquelle  $\chi$  wird durch die innere Optik auf  $\mathcal{F}(x, \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \Pi_{\Sigma_1})) \subset \Psi$  abgebildet.
2. Die Lichtquelle  $\chi$  wird durch jeden Punkt  $\sigma(\pi_{\Sigma_1}) \subset \Sigma_1$  der inneren Optik auf die Teilmenge  $\mathcal{F}(\chi, \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\chi, \pi_{\Sigma_1})) \subset \Psi$  des Detektors abgebildet.
3. Jedem Punkt  $y \in \Psi$  der Zielebene  $\Psi$  wird durch die Optik eine die Teilmenge  $\mathcal{R}(y, \Pi_{\Sigma_n}) \subset \chi$  auf der Lichtquelle zugeordnet, von der aus Lichtstrahlen auf den Punkt  $y$  treffen.

Die zweite Abbildungseigenschaft ermutigt zu einer ersten approximativen Modellierung der generierten Beleuchtungsstärke auf  $\Psi$ .

#### 4 Modellierung des Beleuchtungsproblems mit ausgedehnter Lichtquelle

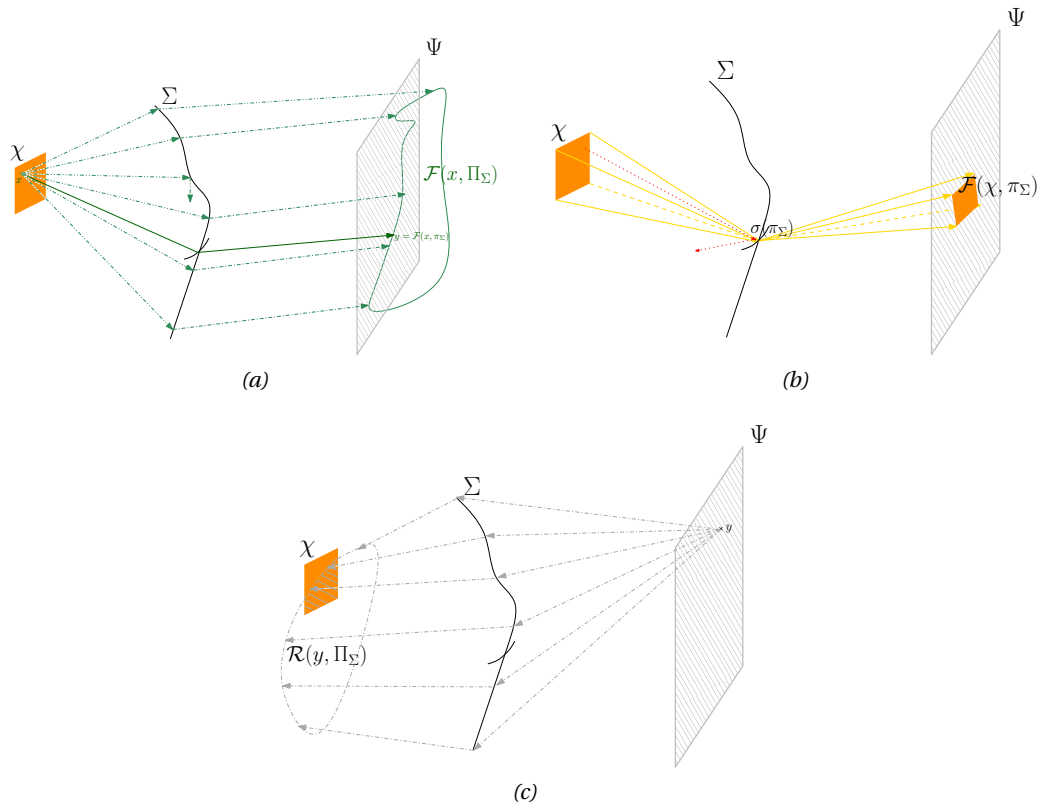


Abb. 4.4: Abbildungsverhalten eines optischen Systems mit ausgedehnter Lichtquelle und einer brechenden Fläche. (a) Ein Punkt  $x$  der Lichtquelle  $\chi$  wird durch die innere Optik auf  $\mathcal{F}(x, \tilde{\omega}_{\Sigma_1}(x, \Pi_{\Sigma_1})) \subset \Psi$  abgebildet. (b) Die Lichtquelle  $\chi$  wird durch jeden Punkt  $\sigma(\pi_{\Sigma_1}) \in \Sigma_1$  der inneren Optik auf die Teilmenge  $\mathcal{F}(\chi, \tilde{\omega}_{\Sigma_1}(\chi, \pi_{\Sigma_1})) \subset \Psi$  des Detektors abgebildet. (c) Jedem Punkt  $y \in \Psi$  der Zielebene  $\Psi$  wird durch die Optik eine die Teilmenge  $\mathcal{R}(y, \Pi_{\Sigma_n}) \subset \chi$  auf der Lichtquelle zugeordnet, von der aus Lichtstrahlen auf den Punkt  $y$  treffen.

### 4.3 Die diskrete Modellierung der Beleuchtungsstärke

Das Produktmaß  $\mu$  der primalen Monge-Kantorovich-Formulierung setzt eine diskrete Aufteilung des Lichtflusses der Lichtquelle in einzelnen Raumwinkeln mit einem diskreten Raster von Lichtflüssen auf dem Detektor in Zusammenhang. Eine Zeile des Produktmaßes beschreibt die Verteilung eines diskreten Lichtstromes der Lichtquelle auf die Zellen des Detektors (siehe Abschnitt 3.4.4).

Diese Betrachtung motiviert eine approximative Berechnung der Beleuchtungsstärkeverteilung mit einer ausgedehnten Lichtquelle, das in Abbildung 4.5 dargestellt wird. Sei  $\Delta\Pi_{\Sigma_1}^{i,j}$  mit  $i = 1, \dots, m$  und  $j = 1, \dots, n$  eine Diskretisierung des Parameterbereiches der inneren Fläche und  $\Delta\Sigma_1^{i,j} := \sigma_1(\Delta\Pi_{\Sigma_1}^{i,j})$  die zugehörigen Flächenstücke. Das Flächenstück  $\Delta\Sigma_1^{i,j}$  wird von der Lichtquelle mit einem Lichtstrom

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{i,j} &:= \iint_{\chi} \iint_{\vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \Delta\Pi_{\Sigma_1}^{i,j})} L_{\chi}(x, \vec{\omega}) \langle \vec{\omega}, \vec{N}_{\chi}(x) \rangle d\vec{\omega} dx \\ &= \iint_{\chi} \iint_{\Delta\Pi_{\Sigma_1}^{i,j}} L_{\chi}(x, \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi)) \langle \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi), \vec{N}_{\chi}(x) \rangle \mathfrak{F}^{\pi} \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi) d\pi dx. \end{aligned}$$

beleuchtet (vgl. Gleichung (2.4.5)). Sei ferner  $\Delta\Psi^{k,l}$  mit  $k = 1, \dots, o$  und  $l = 1, \dots, p$  eine Diskretisierung des Detektors. Der Lichtstrom  $\Delta\Phi_{i,j}$  wird nun durch das optische System auf die Zellen  $\Delta\Psi^{k,l}$  aufgeteilt. Diese Aufteilung kann ähnlich zum Produktmaß  $\mu$  durch Maßzahlen  $C_{i,j}^{k,l}$  beschrieben werden. Für den Lichtstrom  $\Delta\Phi^{k,l}$ , der durch das optische System in die Zelle  $\Delta\Psi^{k,l}$  umgelenkt wird, gilt

$$\Delta\Phi^{k,l} = \sum_{i,j=1}^{m,n} C_{i,j}^{k,l} \Delta\Phi_{i,j}. \quad (4.3.1)$$

Diese Aufteilung der Lichtströme wird in der Abbildung 4.5 dargestellt.

Die Beleuchtungsstärke  $B_{\mathcal{D}}$  auf  $\Psi$  kann approximiert werden durch

$$B_{\mathcal{D}}(y) \approx \frac{\Delta\Phi^{k,l}}{|\Delta\Psi^{k,l}|} \quad \forall y \in \Delta\Psi^{k,l}, \quad (4.3.2)$$

wobei  $|\Delta\Psi^{k,l}|$  der Flächeninhalt der Detektorzelle ist.

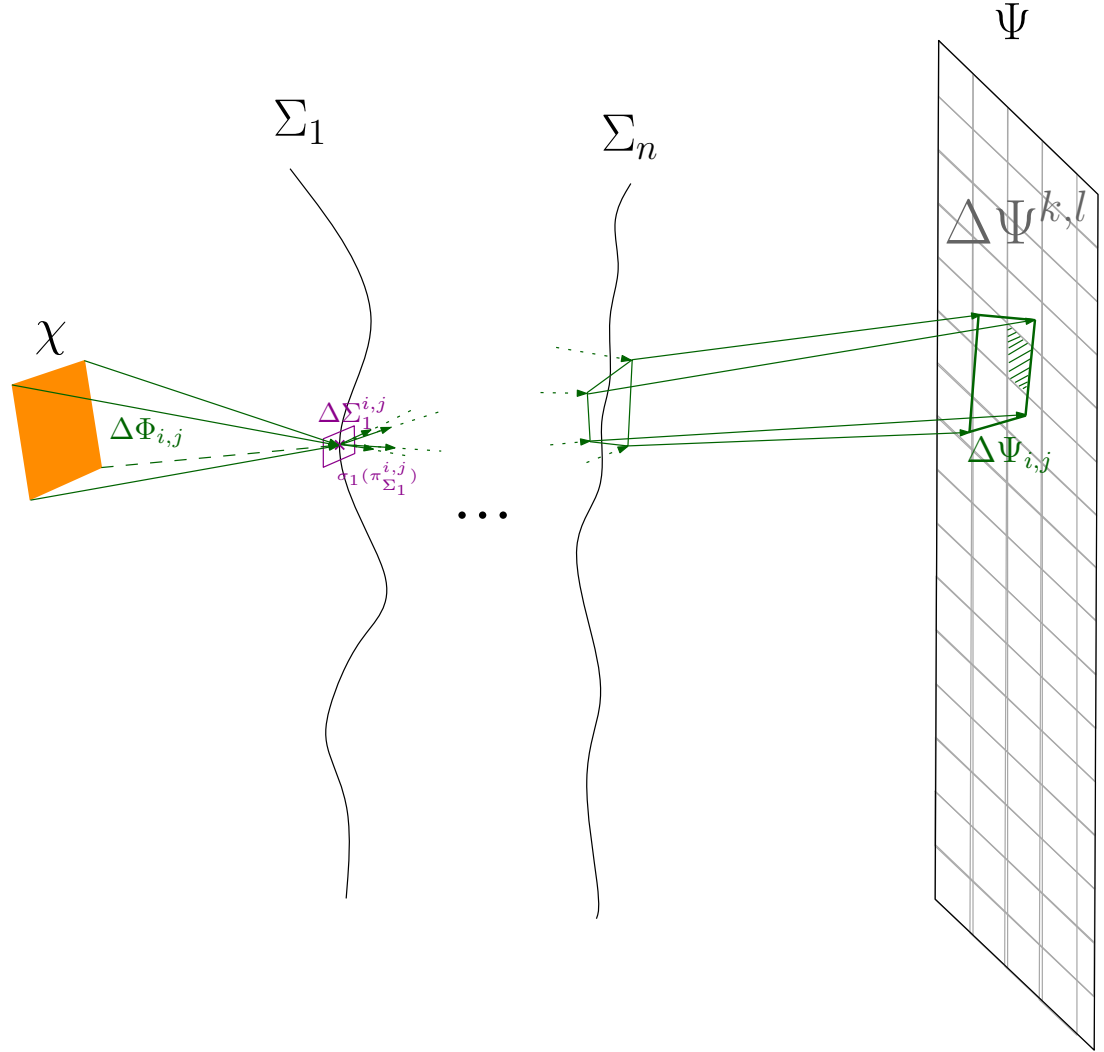


Abb. 4.5: Darstellung der diskreten Modellierung der Beleuchtungsstärkeverteilung. Die Lichtströme  $\Delta\Phi_{i,j}$ , die von der Lichtquelle  $\chi$  ausgehend auf ein kleines Flächenstück  $\Delta\Sigma_1^{i,j}$  der ersten optischen Fläche treffen, werden durch das optische System abgebildet auf die Fläche  $\Psi$ . Die exakte Auftrefffläche  $\mathcal{F}(\chi, \Delta\Sigma_1^{i,j})$  des Lichts auf  $\Psi$  wird approximiert durch  $\Delta\Psi_{i,j} = \mathcal{F}(\chi, \sigma_1(\pi_{\Sigma_1}^{i,j}))$ , wobei  $\sigma_1(\pi_{\Sigma_1}^{i,j})$  der Mittelpunkt von  $\Delta\Sigma_1^{i,j}$  ist. Auf  $\Psi$  wird der Lichtstrom aufgeteilt in ein diskretes Gitter  $\Delta\Psi^{k,l}$ .

#### 4.4 Die Étendue des optischen Systems und Folgerungen

**Bestimmung der Maßzahlen**  $C_{i,j}^{k,l}$  Seien  $\pi_{\Sigma_i}^{i,j}$  die Mittelpunkte der Mengen  $\Delta\Pi_{\Sigma_i}^{i,j}$ . Wir approximieren die Mengen  $\mathcal{F}(\chi, \Delta\Pi_{\Sigma_i}^{i,j})$  mit

$$\mathcal{F}(\chi, \Delta\Pi_{\Sigma_i}^{i,j}) \approx \mathcal{F}(\chi, \pi_{\Sigma_i}^{i,j}) =: \Delta\Psi_{i,j}$$

Es wird vereinfachend angenommen, dass die Leuchtdichte, die von der Lichtquelle durch  $\Delta\Sigma_1^{i,j}$  auf  $\Psi$  abgebildet wird, konstant sei, so dass die Maßzahlen berechnet werden können durch

$$C_{i,j}^{k,l} \approx \frac{|\Delta\Psi_{i,j} \cap \Delta\Psi_{i,j}^{k,l}|}{|\Delta\Psi_{i,j}|}. \quad (4.3.3)$$

Dieser Ansatz bietet eine erste Möglichkeit, die Ausdehnung der Lichtquelle approximativ zu modellieren, ist jedoch nur eine Annäherung. Eine kontinuierliche Modellierung des Problems wird in den nächsten Abschnitten hergeleitet.

#### 4.4 Die Étendue des optischen Systems und Folgerungen

Im Ganzen gesehen beschäftigt sich die nichtabbildende Optik, bzw. Beleuchtungsoptik, mit zwei Grundproblemen. Das erste Grundproblem ist das Beleuchtungsproblem aus Abschnitt 2.5, das in dieser Arbeit behandelt wird. Das zweite Grundproblem ist das Kollektorproblem. Bei der Lösung des Kollektorproblems stößt man unweigerlich auf den Begriff der Étendue, der aber auch Bedeutung für das Beleuchtungsproblem mit ausgedehnter Lichtquelle hat und für die kontinuierliche Modellierung benötigt wird.

Die Étendue, oder auch Lichtleitwert genannt, ist eine Erhaltungsgröße des optischen Systems, die ohne Lichtverlust nicht verringert werden kann, aber beispielsweise durch Streuung vergrößert wird. Wir beziehen uns auf das Buch [3, p. 65-72]. Die Größe beschreibt das Phasenraumvolumen des vom optischen System transportierten Lichts und ist damit ein Produkt aus Fläche und Raumwinkel und wird berechnet durch ein Integral über alle Orte und optische Momente, das die Optik durchleuchten. Optische Momente sind Lichtstrahlen, die mit dem Brechungsindex des jeweiligen Mediums gewichtet sind. Für ein optisches System kann an mehreren Flächen die Étendue bestimmt werden. Zum einen gibt es eine Étendue von der Lichtquelle zur ersten optischen Fläche und eine Étendue von der Zielfläche zur letzten optischen Fläche, wie in Abbildung 4.6 dargestellt wird. Die Étendue  $E_\chi$  der leuchtenden

#### 4 Modellierung des Beleuchtungsproblems mit ausgedehnter Lichtquelle

Fläche zur Optik wird nach [3, Formel 3.20 auf Seite 72] berechnet durch

$$\begin{aligned} E_\chi &= \iint_{\chi} \iint_{\Omega_x} n_\chi^2 \langle \vec{N}_\chi(x), \vec{\omega} \rangle d\vec{\omega} dx = \iint_{\chi} \iint_{\vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \Pi_{\Sigma_1})} n_\chi^2 \langle \vec{N}_\chi(x), \vec{\omega} \rangle d\vec{\omega} dx \\ &= \iint_{\chi} \iint_{\Pi_{\Sigma_1}} n_\chi^2 \langle \vec{N}_\chi(x), \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi_{\Sigma_1}) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi_{\Sigma_1}))} d\pi_{\Sigma_1} dx. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Analog ergibt sich für die Étendue  $E_\Psi$  der Optik zur Auftrefffläche

$$E_\Psi = \iint_{\Psi} \iint_{\Pi_{\Sigma_n}} n_\Psi^2 \langle \vec{N}_\Psi(y), \vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi_{\Sigma_n}) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi_{\Sigma_n}))} d\pi_{\Sigma_n} dy \quad (4.4.2)$$

Die Étendue stellt eine Erhaltungsgröße dar, die nicht verringert werden kann, d.h. falls alle Lichtenergie im Étendue  $E_\chi$  ohne Lichtverlust auf die Fläche  $\Psi$  gebracht wird, muss gelten

$$E_\Psi \geq E_\chi.$$

Das Konzentradorproblem besteht darin, das Licht mittels einer möglichst minimalen Optik auf die Zielfläche zu konzentrieren. Dieses Problem ist genau dann gelöst, wenn die Optik das Licht vollständig auf  $\Psi$  abbildet und die optischen Flächen die Étendue-Erhaltung  $E_\Psi = E_\chi$  erfüllen. Die geometrische Bedeutung der Étendue-Erhaltung wird in Abbildung 4.7 dargestellt. Die Lichtquelle wird durch jeden Punkt der Optik so auf  $\Psi$  abgebildet, dass  $\mathcal{F}(\chi, \pi_{\Sigma_1}) = \Psi$  für alle  $\pi_{\Sigma_1} \in \Pi_{\Sigma_1}$  gilt. Verfahren, die solche Probleme lösen basieren zum Beispiel auf dem sogenannten *Edge-Ray-Theorem* oder den *Flow-Lines* oder dem *SMS-Verfahren*. Diese optischen Systeme sind durch die Bedingung der Étendue-Erhaltung vollständig beschrieben, so dass keine Freiheitsgrade übrig sind, die genutzt werden können, um im Zielgebiet beliebige Lichtverteilungen zu generieren. Deshalb können Beleuchtungsoptiken zur Generierung von Ziellichtverteilungen nicht an der Étendue-Erhaltung arbeiten, sondern es muss gelten  $E_\chi \ll E_\Psi$ . Für eine bessere Vorstellung kann man sich diesen Zusammenhang so vorstellen, dass das Verhältnis von  $\frac{E_\chi}{E_\Psi}$  der Dicke eines Pinsels entspricht, mit dem die generierte Lichtverteilung gemalt wird. Ein Verhältnis von 1 steht in diesem Zusammenhang dafür, dass der Pinsel genau so groß ist wie das Zielgebiet, so dass keine spezielle Verteilung 'gezeichnet' werden kann.

Auch in dem Fall, dass Beleuchtungsoptiken vorliegen kann eine Erhaltungsgröße  $E_\Psi^\chi$  ausgehend von Gleichung (4.4.1) definiert werden, indem nur die optischen Momente ausgewählt

#### 4.4 Die Étendue des optischen Systems und Folgerungen

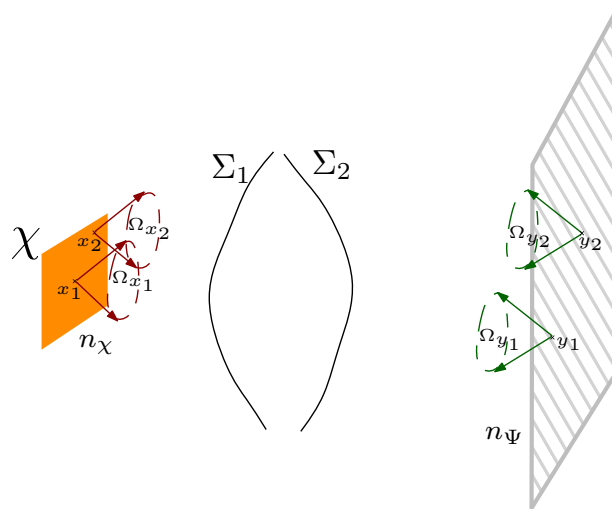


Abb. 4.6: Darstellung der Étendue als Menge aller Lichtstrahlen, die die Optik durchleuchten.

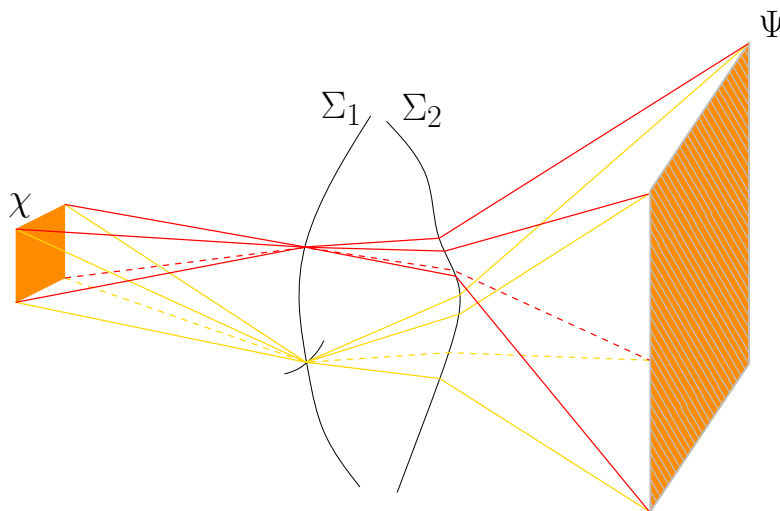


Abb. 4.7: Darstellung des Abbildungsverhaltens eines Konzentrators, der am thermodynamischen Limit der Étendue-Erhaltung arbeitet. Hierbei bildet jeder Punkt der Optik die leuchtende Fläche auf das ganze Zielgebiet ab.

#### 4 Modellierung des Beleuchtungsproblems mit ausgedehnter Lichtquelle

werden, die auf der Zielfläche ankommen.

$$E_{\Psi}^{\chi} = \iint_{\chi} \iint_{\Pi_{\Sigma_1}} \delta_{\Psi}(\mathcal{F}(x, \pi_{\Sigma_1})) n_{\chi}^2 \langle \vec{N}_{\chi}(x), \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi_{\Sigma_1}) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi_{\Sigma_1}))} d\pi_{\Sigma_1} dx.$$

Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}} : \Psi \times \Pi_{\Sigma_n} &\rightarrow \chi \times \Pi_{\Sigma_1} \\ \hat{\mathcal{R}}(y, \pi_n) &:= (\mathcal{R}(y, \pi_n), \sigma_1^{-1}(\tilde{\sigma}_1(y, \pi_n))), \end{aligned}$$

die zusätzlich zum Auftreffpunkt des *Rückwärts-Raytraces* den Parameter der inneren Fläche zurückliefert. Mit Hilfe dieser Funktion können wir die Gleichung auf den Bereich  $\Psi \times \Pi_{\Sigma_n}$  transformieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} E_{\Psi}^{\chi} &= \iiint_{\hat{\mathcal{R}}(\Psi, \Pi_{\Sigma_n})} \delta_{\Psi}(\mathcal{F}(x, \pi_{\Sigma_1})) n_{\chi}^2 \langle \vec{N}_{\chi}(x), \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi_{\Sigma_1}) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi_{\Sigma_1}))} d\pi_{\Sigma_1} dx \\ &= \iint_{\Psi} \iint_{\Pi_{\Sigma_n}} \delta_{\chi}(\mathcal{R}(y, \pi_{\Sigma_n})) n_{\chi}^2 \langle \vec{N}_{\chi}(\mathcal{R}(y, \pi_{\Sigma_n})), \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi_{\Sigma_n})) \rangle \\ &\quad \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi_{\Sigma_n})))} |\det \mathbf{D}\hat{\mathcal{R}}(y, \pi_{\Sigma_n})| d\pi_{\Sigma_n} dy. \end{aligned}$$

Wir stellen die Größe  $E_{\Psi}^{\chi}$  analog mit Hilfe der Gleichung (4.4.2) auf und erhalten:

$$E_{\Psi}^{\chi} = \iint_{\Psi} \iint_{\Pi_{\Sigma_n}} \delta_{\chi}(\mathcal{R}(y, \pi_{\Sigma_n})) n_{\Psi}^2 \langle \vec{N}_{\Psi}(y), \vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi_{\Sigma_n}) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi_{\Sigma_n}))} d\pi_{\Sigma_n} dy.$$

Ein Vergleich der Integranden (siehe Lebesgue Differentiationstheorem 2.1) führt zu der Vereinfachung der Jakobimatrixdeterminante des Backward-Raytrace (mit  $\mathbf{y} := (y, \pi_{\Sigma_n})$ )

$$|\det \mathbf{D}\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{y})| = \frac{n_{\Psi}^2 \langle \vec{N}_{\Psi}(y), \vec{\omega}_{\Sigma_n}(\mathbf{y}) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_n}(\mathbf{y}))}}{n_{\chi}^2 \langle \vec{N}_{\chi}(\mathcal{R}(\mathbf{y})), \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{y})) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{y})))}}. \quad (4.4.3)$$

Analog zu 4.4.3 lässt sich die Jakobimatrixdeterminante der Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}} : \chi \times \Pi_{\Sigma_1} &\rightarrow \Psi \times \Pi_{\Sigma_n} \\ \hat{\mathcal{F}}(x, \pi_1) &:= (\mathcal{F}(x, \pi_1), \sigma_n^{-1}(\tilde{\sigma}_n(x, \pi_1))), \end{aligned}$$



vereinfachen mit  $\mathbf{x} := (x, \pi_{\Sigma_1})$  durch

$$|\det \mathbf{D}\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{x})| = \frac{n_{\chi}^2 \langle \vec{N}_{\chi}(x), \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\mathbf{x}) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(\mathbf{x}))}}{n_{\Psi}^2 \langle \vec{N}_{\Psi}(\mathcal{F}(\mathbf{x})), \vec{\omega}_{\Sigma_n}(\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{x})) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_n}(\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{x})))}}, \quad (4.4.4)$$

## 4.5 Die analytische Berechnung der Beleuchtungsstärke

Da die Beleuchtungsstärke eine differentielle Größe des Lichtflusses ist, werden wir im ersten Schritt den Lichtfluss  $\Phi(\Psi)$ , der durch das optische System auf die Zielfläche  $\Psi$  abgebildet wird, analytisch formulieren und in einem zweiten Schritt auf die Beleuchtungsstärke rückschließen. Wir beziehen uns dabei auf den Typ von optischen Systemen aus Abschnitt 2.1. Mit  $\Phi(\Sigma_1)$  bezeichnen wir den *Lichtfluss*, der von der Lichtquelle  $\chi$  aus auf die optische Fläche  $\Sigma_1$  abgegeben wird.  $\Phi(\Sigma_1)$  kann berechnet werden durch

$$\begin{aligned} \Phi(\Sigma_1) &= \iint_{\chi} \iint_{\vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \Pi_{\Sigma_1})} L_{\chi}(x, \vec{\omega}) \langle \vec{N}_{\chi}(x), \vec{\omega} \rangle d\omega dx \\ &= \iint_{\chi} \iint_{\Pi_{\Sigma_1}} L_{\chi}(x, \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi)) \langle \vec{N}_{\chi}(x), \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi))} d\pi dx. \end{aligned}$$

Sei  $\hat{\Phi}(\Psi)$  der Anteil von  $\Phi(\Sigma_1)$ , der durch das optische System auf die Zielfläche  $\Psi$  gelenkt wird. Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\Psi) &= \iint_{\chi} \iint_{\Pi_{\Sigma_1}} \delta_{\Psi}(\mathcal{F}(x, \pi)) L_{\chi}(x, \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi)) \langle \vec{N}_{\chi}(x), \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi))} d\pi dx \\ &= \iiint_{\hat{\mathcal{R}}(\Psi, \Pi_{\Sigma_n}) \cap \chi \times S^2} L_{\chi}(x, \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi)) \langle \vec{N}_{\chi}(x), \vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_1}(x, \pi))} d\pi dx. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass aufgrund der Definition der Leuchtdichte mit  $L_{\chi}(x, S^2) = 0$  für alle  $x \notin \chi$

$$\delta_{\chi}(\mathcal{R}(y, \pi_{\Sigma_n})) L_{\chi}(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi_{\Sigma_n})) = L_{\chi}(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi_{\Sigma_n}))$$

gilt, kann der Lichtstrom  $\hat{\Phi}(\Psi)$  auf  $\Psi \times \Pi_{\Sigma_n}$  transformiert werden zu

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\Psi) &= \iint_{\Psi} \iint_{\Pi_{\Sigma_n}} L_{\chi}(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi)) \langle \vec{N}_{\chi}(\mathcal{R}(y, \pi)), \vec{\omega}_{\Sigma_1}(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi)) \rangle \\ &\quad \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_1})(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi))} |\det \mathbf{D}(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi))| d\pi dy. \end{aligned}$$

#### 4 Modellierung des Beleuchtungsproblems mit ausgedehnter Lichtquelle

Wir setzen die vereinfachende Gleichung (4.4.3) aus der Étendue-Betrachtung ein und erhalten

$$\hat{\Phi}(\Psi) = \frac{n_{\Psi}^2}{n_{\chi}^2} \iint_{\Psi} \iint_{\Pi_{\Sigma_n}} L_{\chi}(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi)) \langle \vec{N}_{\Psi}(y), \vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi))} d\pi dy. \quad (4.5.1)$$

Um den Lichtfluss  $\Phi(\Psi)$  zu bestimmen, muss noch der Verlust durch Fresnelsche Reflexionen an den brechenden Grenzflächen berücksichtigt werden. Wir bezeichnen mit  $\hat{\mathfrak{G}}(y, \pi_{\Sigma_n})$  das Produkt der *Fresnelschen* Verluste (siehe Gleichung (2.2.13)) für den Strahlengang  $\mathcal{R}(y, \pi_{\Sigma_n})$ . Der Lichtstrom  $\Phi(\Psi)$  kann somit berechnet werden durch

$$\Phi(\Psi) = \frac{n_{\Psi}^2}{n_{\chi}^2} \iint_{\Psi} \iint_{\Pi_{\Sigma_n}} L_{\chi}(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi)) (1 - \hat{\mathfrak{G}}(y, \pi)) \langle \vec{N}_{\Psi}(y), \vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi))} d\pi dy. \quad (4.5.2)$$

Diese Gleichung kann so interpretiert werden, dass die Lichtquelle durch die Optiken transformiert wird und die äußere Fläche wie eine Lichtquelle wirkt. Diese Beobachtung motiviert zur Definition der *gesehenen Leuchtdichte* auf  $\Psi$

$$E_{\chi} : \Psi \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ E_{\chi}(y, \vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi_{\Sigma_n})) = \frac{n_{\Psi}^2}{n_{\chi}^2} L_{\chi}(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi)) (1 - \hat{\mathfrak{G}}(y, \pi)).$$

In Abbildung 4.8 wird die simulierte *gesehene Leuchtdichte* von drei verschiedenen Positionen für ein optisches System mit einer quadratischen Lichtquelle und einer elliptischen Linse gezeigt. Es wird deutlich, dass die Größe und Form der *gesehenen Lichtquelle* für verschiedene Perspektiven unterschiedlich ist. Die *gesehene Leuchtdichte* kann auch mit den hergeleiteten Formeln berechnet werden. In Abbildung 4.9 wird diese für eine Optik mit quadratischer lambertscher Lichtquelle dargestellt. Die *Beleuchtungsstärke*  $B_{\Psi} : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist definiert über das Differential  $\frac{\partial \hat{\Phi}(\Psi)}{\partial y}$  des Lichtstroms  $\Phi(\Psi)$  und kann aufgrund der Gleichung (4.5.2) berechnet werden durch

$$B_{\Psi}(y) = \frac{n_{\Psi}^2}{n_{\chi}^2} \iint_{\Pi_{\Sigma_n}} L_{\chi}(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi)) (1 - \hat{\mathfrak{G}}(y, \pi)) \langle \vec{N}_{\Psi}(y), \vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi))} d\pi. \quad (4.5.3)$$

Diese Modellierung des *Lichtflusses* und der *Beleuchtungsstärke* ermöglicht es, das optische System hinsichtlich dieser Größen zu optimieren.

#### 4.5 Die analytische Berechnung der Beleuchtungsstärke

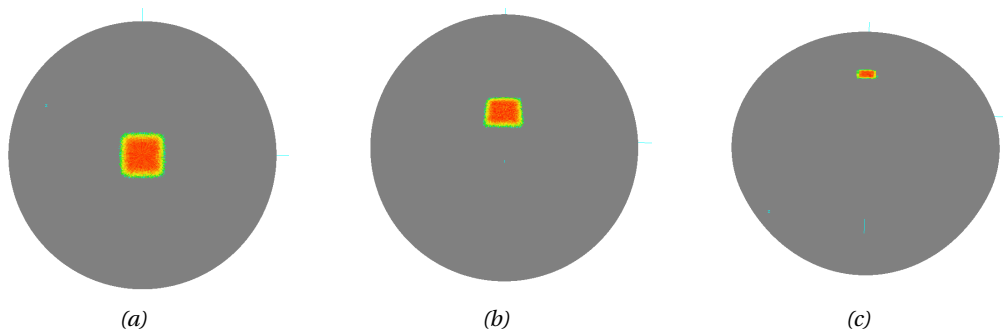


Abb. 4.8: Ein optisches System mit quadratischer Lichtquelle und einer elliptischen Linse generiert die dargestellte gesehene Leuchtdichte aus drei verschiedenen Positionen. Diese Darstellungen sind das Ergebnis einer Simulation. Die erzeugte Lichtstärke in die jeweiligen Richtungen korrespondiert mit der Größe des Lichtquellenbildes auf der Optik von der jeweiligen Richtung aus. (a) Die gesehene Leuchtdichte in der zentralen Perspektive. Es wird eine Lichtstärke von 293cd erzeugt. (b) Die Optik realisiert in diese Richtung eine Lichtstärke von 93cd erzeugt. (c) Die Optik realisiert in diese Richtung eine Lichtstärke von 24cd erzeugt.

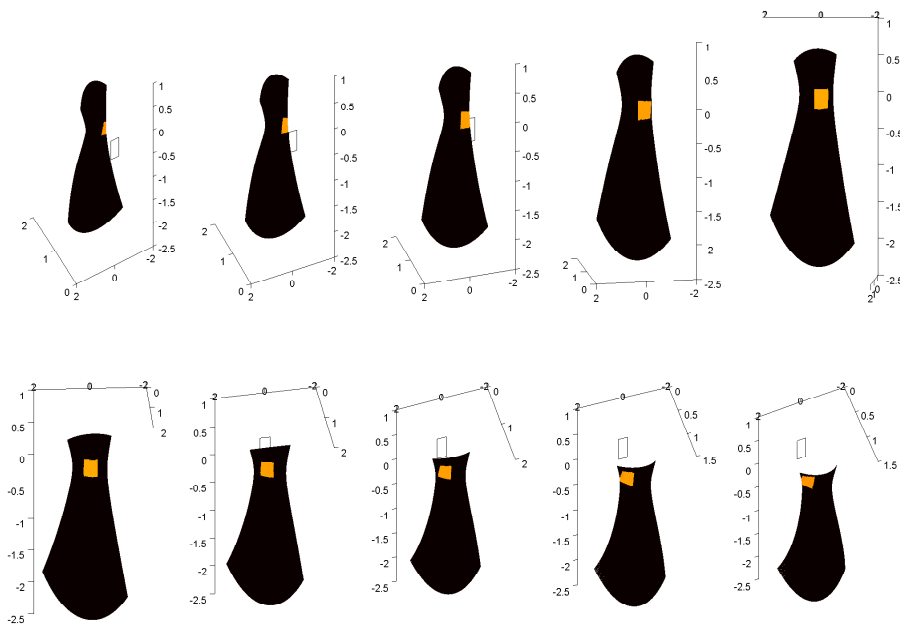


Abb. 4.9: Ein optisches System mit quadratischer Lichtquelle und einer Freiformfläche generiert die dargestellte gesehene Leuchtdichte, die mit den hergeleiteten Gleichungen berechnet wurde. Es wird ein virtueller Flug über die Optik aus ausgewählten Perspektiven dargestellt.

#### *4 Modellierung des Beleuchtungsproblems mit ausgedehnter Lichtquelle*

## 5 Lösungskonzept des Beleuchtungsproblems und numerische Umsetzung

In diesem Kapitel soll des Gesamtkonzeptes der Lösung des *Beleuchtungsproblems* und die numerische Umsetzung der einzelnen Teilschritte erläutert werden. Dazu werden anfangs einige grundsätzliche Techniken beschrieben.

### 5.1 Das Gesamtkonzept zur Lösung des Beleuchtungsproblems

Zur Wiederholung werden die wichtigsten lichttechnischen Größen in der Tabelle 5.1 definiert.

Das allgemeine Ziel ist, das *Beleuchtungsproblems* mit direkter Modellierung der ausgedehnten Lichtquelle zu lösen, d.h. die Freiheitsgade  $\vec{c}$  der optischen Flächen  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  so zu bestimmen, dass die gewünschte Verteilung  $B_\Psi$  durch das optische System  $\mathfrak{D}$  generiert wird. Dieses Problem soll mit unterschiedlichen Modellierungen aufsteigender Komplexität gelöst werden, da die Berechnung der *Beleuchtungsstärke* nach Gleichung (4.5.3) mit ausgedehnter Lichtquelle numerisch aufwendig ist und eine effiziente Optimierung nur lokal konvergent ist.

In Abbildung 5.1 wird das Gesamtkonzept der numerischen Lösungssuche grafisch als Flussdiagramm dargestellt.

Im ersten Lösungsschritt wird die Lichtquelle als Punkt  $\hat{\chi} \in \mathbb{R}^3$  approximiert, die *Beleuchtungsstärkeverteilung*  $B_\Psi$  auf  $\Psi$  auf die *Lichtstärkeverteilung*  $I_\Psi$  auf  $\Omega_\Psi \subset S^2$  im *Fernfeld* umgerechnet und ein *optimales mapping* mittels des *Monge-Kantorovich-Algorithmus* bestimmt. Im zweiten Schritt werden die freien Flächenparameter, die im Vektor  $\vec{c}$  abgelegt werden, berechnet, bzw. optimiert, so dass das *mapping* angenommen wird. Falls dieses nicht zufriedenstellend realisiert werden kann, kann es notwendig sein, die Eingangsgrößen zu überdenken und gegebenenfalls zu verändern.

Wird das *mapping* korrekt angenommen, kann eine weitere Überprüfung sinnvoll sein. Hierbei wird die generierte *Lichtstärkeverteilung*  $I_{\hat{\mathfrak{D}}}$  im Fernfeld mit der gewünschten *Lichtstärkeverteilung*  $I_\Psi$  verglichen. Alternativ kann dieser Vergleich auch zwischen den *Beleuchtungs-*

## 5 Lösungskonzept und numerische Umsetzung

*stärkeverteilungen*  $B_\Psi$  und  $B_\Sigma$  durchgeführt werden. Für die Berechnung der generierten *Lichtverteilungen* kann die Modellierung von *Mooiseev* (vgl. Formel (3.2.1)) aus Abschnitt 3.2 angewendet werden. Ist der Unterschied zu groß, so kann an dieser Stelle entsprechend dem Ansatz im ersten Unterabschnitt von 4.1 die geforderte *Lichtstärkeverteilung*  $I_\Psi$  verändert und die Berechnung der Startlösung wiederholt werden.

Es könnte ein weiterer Zwischenschritt an dieser Stelle eingefügt werden, indem die *Beleuchtungsstärkeverteilung* mit der diskreten Modellierung aus Abschnitt 4.3 berechnet wird und die Flächenparameter  $\vec{c}$  optimiert werden. Durch diese Modellierung der Beleuchtungsstärke würde die Ausdehnung der Lichtquelle genauer erfasst und durch die Optimierung die Startfläche besser für die eigentliche Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle angepasst. In dieser Ausarbeitung wird jedoch von diesem Zwischenschritt abgesehen.

Der letzte Schritt des Lösungsverfahrens ist, das optische System auf Grundlage der analytisch berechneten *Beleuchtungsstärke* aus Gleichung (4.5.3) zu optimieren.

## 5.1 Das Gesamtkonzept zur Lösung des Beleuchtungsproblems

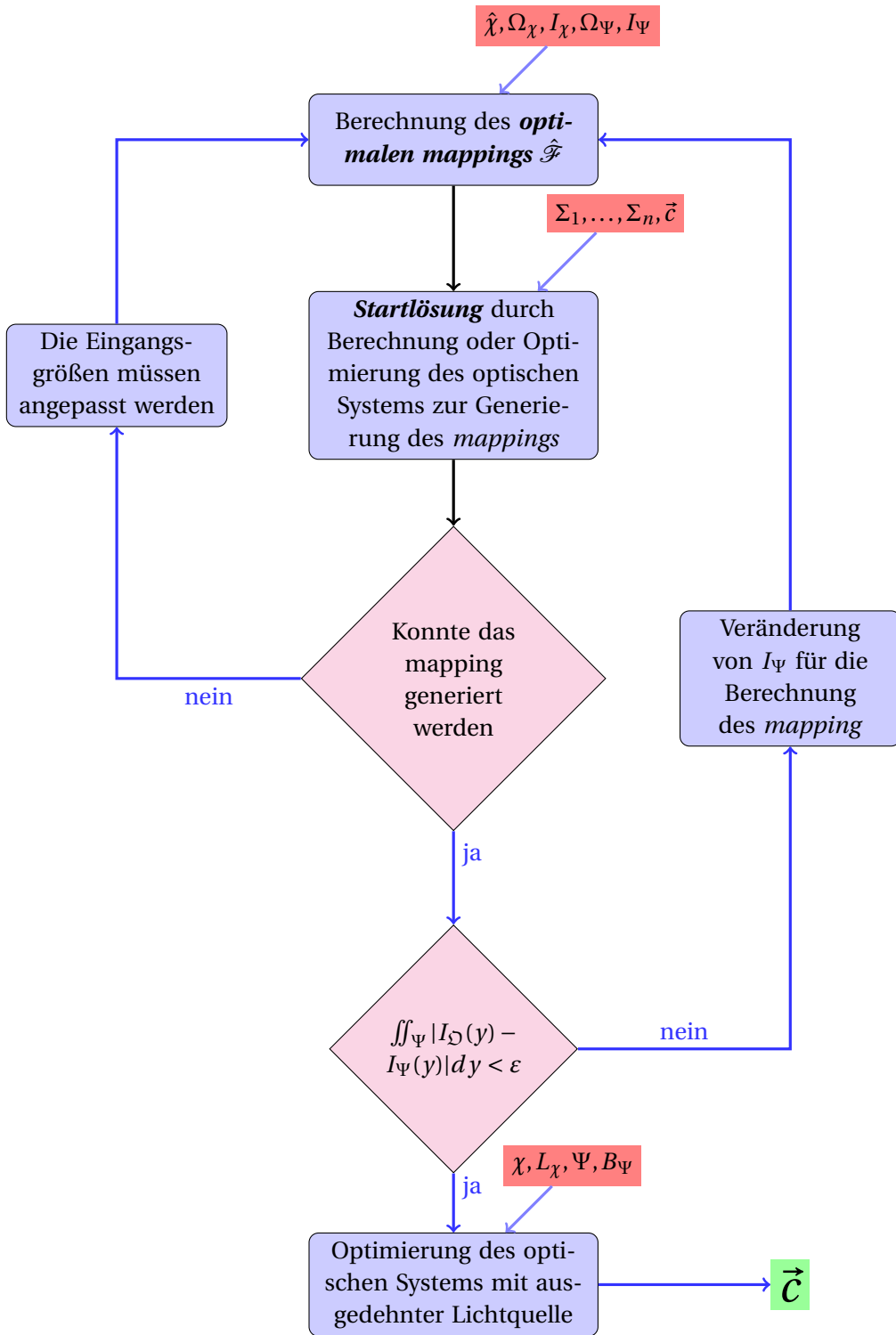


Abb. 5.1: Das Gesamtkonzept zur Lösung des Beleuchtungsproblems wird in dieser Grafik schematisch als Flussdiagramm dargestellt.

$\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$	Die sequentiell geordneten optischen Flächen des optischen Systems
$\vec{c}$	Vektor der zu optimierenden Freiheitsgrade der optischen Flächen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$
$\chi \subset \mathbb{R}^3$	Die leuchtende Fläche der ausgedehnten Lichtquelle.
$\hat{\chi} \in \mathbb{R}^3$	Ort der Punktlichtquellenapproximation.
$\Psi \subset \mathbb{R}^3$	Die Zielfläche des optischen Systems.
$\hat{\Omega}$	optisches System aus Punktlichtquelle $\hat{\chi}$ , den optischen Flächen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ und der Zielfläche $\Psi$
$\Omega_{\hat{\chi}} \subset S^2$	Raumwinkel, der von der Punktlichtquelle auf das Ziel abgebildet werden soll.
$I_{\hat{\chi}} : \Omega_{\hat{\chi}} \rightarrow \mathbb{R}^+$	<i>Lichtstärkeverteilung</i> der Punktlichtquelle im Raumwinkel $\Omega_{\hat{\chi}}$ .
$B_{\Psi} \rightarrow \mathbb{R}^+$	Die geforderte <i>Beleuchtungsstärkeverteilung</i> auf $\Psi$
$\Omega_{\Psi} \subset S^2$	Raumwinkel, der von $\hat{\chi}$ aus das Zielgebiet $\Psi$ beleuchtet.
$I_{\Psi} : \Omega_{\Psi} \rightarrow \mathbb{R}^+$	<i>Ziellichtstärkeverteilung</i> auf $\Omega_{\Psi}$ . Diese ergibt sich aus der <i>Beleuchtungsstärkeverteilung</i> $B_{\Psi}$ auf $\Psi$ durch $y = \sigma(\hat{\chi}, \vec{\omega}_{\hat{\chi}})$ (siehe Gleichung (2.4.11)). Die Bedeutung von $I_{\Psi}$ ist, dass bei Vernachlässigung der Ausdehnung des optischen Systems die <i>Beleuchtungsstärkeverteilung</i> $B_{\Psi}$ von $\hat{\chi}$ aus generiert wird, d.h.
$I_{\Psi}(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}) = B_{\Psi}(y) \frac{\ y - \hat{\chi}\ }{\langle \vec{\omega}_{\hat{\chi}}, \vec{N}_{\Psi}(y) \rangle}.$	
$I_{\hat{\Omega}} : \Omega_{\Psi} \rightarrow \mathbb{R}^+$	Die generierte <i>Lichtstärkeverteilung</i> auf $\Omega_{\Psi}$ durch das optische System $\hat{\Omega}$ .
$L_{\chi} : \chi \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$	Die Leuchtdichte der ausgedehnten Lichtquelle.
$B_{\hat{\Omega}}, B_{\hat{\Omega}}$	Die generierte <i>Beleuchtungsstärkeverteilung</i> auf $\Psi$ mit ausgedehnter Lichtquelle und Punktlichtquelle.

Tabelle 5.1: Lichttechnische Größen des optischen Systems.



## 5.2 Definition verwendeter Freiformflächen

Die eingeführten Modellierungen in dieser Arbeit erlauben es, sequentielle optische Systeme mit glatten Fläche  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ , die über die Freiheitsgrade  $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$  beschrieben werden zu optimieren. Diese können geometrische Größen von analytischen Geometrien, wie etwa der Radius einer Kugel, sein, als beispielsweise auch die Lage im Raum durch Verschiebung und Verdrehung. Soll jedoch eine komplexe Lichtverteilung erzeugt werden, so ist es notwendig, eine oder mehrerer Flächen relativ feinstrukturiert zu berechnen. Zur Reduktion des numerischen Aufwandes und zur Erhöhung der numerischen Stabilität lokaler Optimierer sollte die Anzahl an Freiheitsgraden möglichst klein sein.

Da optische Flächen nicht alle möglichen Formen abbilden müssen, sondern sternförmige Flächen um einen Punkt ausreichen, kann eine Reduktion der Freiheitsgrade dadurch erreicht werden, dass die Fläche über eine skalare Funktion in zwei Veränderlichen beschrieben wird. Diese Einschränkung entspricht dem bereits erwähnten *Polarradius* der zum Beispiel von *J. S. Schruben* verwendet und in Bemerkung 3.1 erwähnt wurde. Die Modellierung von *J. S. Schruben* führt das mathematische Problem auf ein partielles Differentialgleichungssystem vom Typ *Monge-Ampère* zurück. Daneben kommt der Polarradius auch in der schwache Formulierung von *V. Oliker* zur Beschreibung von optischen Flächen zum Einsatz (siehe Gleichung (3.3.5)). Deshalb wählen wir für die Beschreibung von Freiformflächen dieselbe Definition.

### 5.2.1 Freiformflächendefinition durch den Polarradius

Sei  $\Sigma$  die zu definierende Freiformfläche. Wir wählen zu der Punktlichtquelle  $\hat{\chi}$  einen Raumwinkel  $\Omega_{\hat{\chi}} \subset S^2$  mit Parametrisierung  $\vec{\omega}_{\hat{\chi}} : \Pi_{\Sigma} \rightarrow \Omega_{\hat{\chi}}$ . Der Polarradius der Freiformfläche  $\Sigma$  mit Zentrum  $\hat{\chi} \in \mathbb{R}^3$  ist eine skalare, differenzierbare Funktion  $\rho : \Pi_{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Die Freiformfläche  $\Sigma$  wird definiert durch

$$\sigma(\pi_{\Sigma}) := \hat{\chi} + \rho(\pi_{\Sigma})\vec{\omega}_{\hat{\chi}}(\pi_{\Sigma}). \quad (5.2.1)$$

Für die Parametrisierung  $\vec{\omega}_{\Sigma} : \Pi_{\Sigma} \rightarrow \Omega_{\Sigma}$  nach (2.2.6) gilt

$$\vec{\omega}_{\Sigma}(\hat{\chi}, \pi_{\Sigma}) = \frac{\sigma_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}) - \hat{\chi}}{\|\sigma_{\Sigma}(\pi_{\Sigma}) - \hat{\chi}\|} = \frac{\rho_{\Sigma}(\pi_{\Sigma})\vec{\omega}_{\hat{\chi}}(\pi_{\Sigma})}{\|\rho_{\Sigma}(\pi_{\Sigma})\vec{\omega}_{\hat{\chi}}(\pi_{\Sigma})\|} = \frac{\rho_{\Sigma}(\pi_{\Sigma})\vec{\omega}_{\hat{\chi}}(\pi_{\Sigma})}{\rho_{\Sigma}(\pi_{\Sigma})} = \vec{\omega}_{\hat{\chi}}(\pi_{\Sigma}).$$

## 5 Lösungskonzept und numerische Umsetzung

Das Normalenvektorfeld  $\vec{N}_\Sigma : \Pi_\Sigma \rightarrow S^2$  der Fläche  $\Sigma$  zeigt mit der Vereinfachung  $p := \partial_{\pi^1} \rho$  und  $q := \partial_{\pi^2} \rho$  in die Richtung

$$\begin{aligned} N_\Sigma &= (p\vec{\omega}_\chi + \rho\partial_{\pi^1}\vec{\omega}_\chi) \times (q\vec{\omega}_\chi + \rho\partial_{\pi^2}\vec{\omega}_\chi) \\ &= p\vec{\omega}_\chi \times \rho\partial_{\pi^2}\vec{\omega}_\chi + \rho\partial_{\pi^1}\vec{\omega}_\chi \times q\vec{\omega}_\chi + \rho\partial_{\pi^1}\vec{\omega}_\chi \times \rho\partial_{\pi^2}\vec{\omega}_\chi \\ &= (p\rho)\vec{\omega}_\chi \times \partial_{\pi^2}\vec{\omega}_\chi + (\rho q)\partial_{\pi^1}\vec{\omega}_\chi \times \vec{\omega}_\chi + \rho^2\partial_{\pi^1}\vec{\omega}_\chi \times \partial_{\pi^2}\vec{\omega}_\chi. \end{aligned}$$

Somit gilt für das Normalenvektorfeld

$$\vec{N}_\Sigma := \frac{N_\Sigma}{\|N_\Sigma\|}.$$

Für die Optimierung dieser Freiformoptiken benötigen wir eine differenzierbare Definition des Polarradius  $\rho$  in Abhängigkeit von Freiheitsgraden, die optimiert werden können. Wir wählen die Definition über eine skalare *Spline*-Funktion, da die einzelnen Koeffizienten nur lokalen Einfluss haben und die Fläche keine Oszillationen aufweisen, wie beispielsweise bei Polynomen höherer Ordnung.

### 5.2.2 Verwendung von B-Splines für die Definition des Polarradius

Wir definieren den Polarradius  $\rho : \Pi_\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$  und die ersten Ableitungen durch kubische *Splines* (wir beziehen uns auf [17, p. 45;210;226-227]). Der Parameterbereich  $\Pi_\Sigma$  sei ein Rechteckgebiet mit  $\Pi_\Sigma = \Pi_\Sigma^1 \times \Pi_\Sigma^2 = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ . Die Kontrollwerte-Matrix  $C \in \mathbb{R}^{(\xi_\rho^1, \xi_\rho^2)}$  mit  $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{N}$  der *Spline*-Funktion speichert die Freiheitsgrade der Funktion. Zuerst definieren wir  $\xi_\rho^1 + 1$ -, bzw.  $\xi_\rho^2 + 1$ -viele kubische Basisfunktionen in Abhängigkeit von der Richtung  $\pi^1$ , bzw.  $\pi^2$ .

Das Intervall  $[u_1, u_2]$  des ersten Parameters  $\pi^1$  wird in  $\xi_\rho^1 - 3$  viele äquidistante Teilintervalle mit der Länge  $u_s = \frac{u_2 - u_1}{\xi_\rho^1 - 3}$  unterteilt. Der Knotenvektor des ersten Parameters ist

$$\mathcal{K}^1 := \left[ u_1, u_1, u_1, u_1, (u_1 + 1u_s), (u_1 + 2u_s), \dots, (u_1 + (\xi_\rho^1 - 4)u_s), u_2, u_2, u_2, u_2 \right].$$

Die kubischen B-Spline-Basisfunktionen  $N_{a,4} : \Pi^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $a = 1 \dots \xi_\rho^1$  und deren Ableitung ergeben sich durch Anwenden der rekursiven Formel

$$\begin{aligned}
 N_{a,1}(u) &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } \mathcal{K}^1(a) \leq u < \mathcal{K}^1(a+1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 N_{a,k}(u) &= \frac{(u - k^1(a))N_{a,k-1}(u)}{k^1(a+k-1) - k^1(a)} + \frac{(k^1(a+k) - u)N_{a+1,k-1}(u)}{k^1(a+k) - k^1(a+1)}. \\
 N'_{a,2}(u) &= \frac{N_{a,1}(u)}{k^1(a+1) - k^1(a)} - \frac{N_{a+1,1}(u)}{k^1(a+2) - k^1(a+1)} \\
 N'_{a,k}(u) &= \frac{N_{a,k-1}(u) + (u - k^1(a))N'_{a,k-1}(u)}{k^1(a+k-1) - k^1(a)} \\
 &\quad + \frac{(k^1(a+k) - u)N'_{a+1,k-1}(u) - N_{a+1,k-1}(u)}{k^1(a+k) - k^1(a+1)}.
 \end{aligned}$$

Analog wird der Knotenvektor  $\mathcal{K}^2$  für den zweiten Parameter  $\pi^2$  und die Basisfunktionen  $M_{b,4} : \Pi_{\Sigma}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $b = 1 \dots \xi_{\rho}^2$  mit den ersten Ableitungen definiert.

Für alle  $\pi \in \Pi$  definieren wir die Matrix

$$S(\pi) := [N_{a,4}(\pi^1)M_{b,4}(\pi^2)]_{a=1;b=1}^{\xi_{\rho}^1, \xi_{\rho}^2}. \quad (5.2.2)$$

Durch Anwenden der Kettenregel können die Matrizen  $\frac{\partial S}{\partial \pi^1}(\pi)$ ,  $\frac{\partial S}{\partial \pi^2}(\pi)$  und  $\frac{\partial^2 S}{\partial \pi^1 \partial \pi^2}(\pi)$  definiert werden durch

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial \pi^1}(\pi) &:= [N'_{a,4}(\pi^1)M_{b,4}(\pi^2)]_{a=1;b=1}^{\xi_{\rho}^1, \xi_{\rho}^2} \\
 \frac{\partial S}{\partial \pi^2}(\pi) &:= [N_{a,4}(\pi^1)M'_{b,4}(\pi^2)]_{a=1;b=1}^{\xi_{\rho}^1, \xi_{\rho}^2} \\
 \frac{\partial^2 S}{\partial \pi^1 \partial \pi^2}(\pi) &:= [N'_{a,4}(\pi^1)M'_{b,4}(\pi^2)]_{a=1;b=1}^{\xi_{\rho}^1, \xi_{\rho}^2}.
 \end{aligned}$$

Der Polarradius, die ersten Ableitungen und die gemischte Ableitung werden durch die Summen

$$\begin{aligned}
 \rho(\pi) &= \sum_{a=1}^{\xi_\rho^1} \sum_{b=1}^{\xi_\rho^2} C_{a,b} S_{a,b}(\pi) \\
 \frac{\partial \rho}{\partial \pi^1}(\pi) &= \sum_{a=1}^{\xi_\rho^1} \sum_{b=1}^{\xi_\rho^2} C_{a,b} \frac{\partial S}{\partial \pi^1}_{a,b}(\pi) \\
 \frac{\partial \rho}{\partial \pi^2}(\pi) &= \sum_{a=1}^{\xi_\rho^1} \sum_{b=1}^{\xi_\rho^2} C_{a,b} \frac{\partial S}{\partial \pi^2}_{a,b}(\pi) \\
 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \pi^1 \partial \pi^2}(\pi) &= \sum_{a=1}^{\xi_\rho^1} \sum_{b=1}^{\xi_\rho^2} C_{a,b} \frac{\partial^2 S}{\partial \pi^1 \partial \pi^2}_{a,b}(\pi)
 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

berechnet. Die gemischte Ableitung wird an anderer Stelle für eine iterative Verfeinerung benötigt und deshalb hier definiert (siehe Abschnitt 5.2.4). In Abbildung 5.2 wird der Zusammenhang zwischen den Kontrollpunkten und den Funktionswerten einer skalaren Funktion dargestellt. Die Funktion ist nur in den Ecken mit den Kontrollpunkten identisch.

Zusammenhang von Knotenpunkten und Funktionswerten

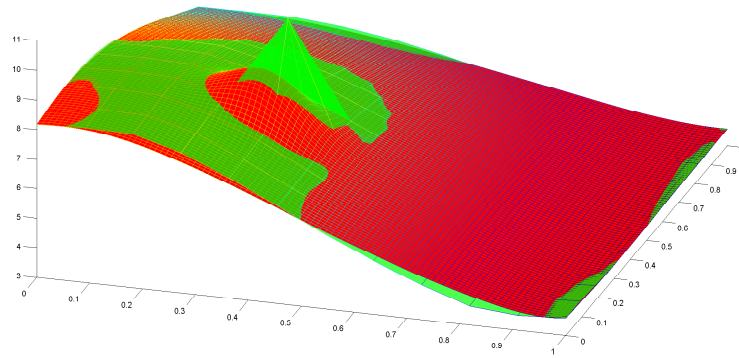


Abb. 5.2: Der Zusammenhang zwischen den Knotenpunkten und den Funktionswerten einer B-Spline-Funktion wird dargestellt. In grün ist das Gitter der Kontrollpunkte und in rot das Gitter der Funktionswerte dargestellt. Die Funktion interpoliert die Kontrollpunkte nur in den Ecken.

### 5.2.3 Numerische Vorteile der Definition des Polarradius durch *Splines*

Diese Definition des Polarradius ermöglicht eine effiziente numerische Implementierung. Da die Matrizen  $S(\pi)$ ,  $\frac{\partial S}{\partial \pi^1}(\pi)$  und  $\frac{\partial S}{\partial \pi^2}(\pi)$  unabhängig von den Kontrollpunkten  $C$  sind, müssen diese nur einmal aufgestellt werden und im Optimierungsprozess nicht neu berechnet werden. Für eine Diskretisierung  $\Pi_\Sigma^D = (\pi_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$  des Winkelbereiches  $\Pi_\Sigma$  kann somit einmal eine Matrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m,n,\xi^1,\xi^2}$  mit  $\mathbf{S}(i,j) = S(\pi_{i,j})$  aufgestellt werden, mit der der Polarradius zu beliebigen Kontrollpunkten berechnet werden kann.

Darüber hinaus kann aufgrund der lokalen Abhängigkeit der *B-Splines* von den Knotenvektoren auf eine schwache Besetztheit der Matrix  $\mathbf{S}$  geschlossen werden. Für alle  $\pi \in \Pi^1 \times \Pi^2$  mit  $k^1(e) \leq \pi^1 \leq k^1(e+1)$  und  $k^2(f) \leq \pi^2 \leq k^2(f+1)$  mit  $4 \leq e \leq m+1$  und  $4 \leq f \leq n+1$  gilt

$$N_{a,4}(\pi^1) = \begin{cases} \neq 0 & \Leftrightarrow e \leq a \leq e+4 \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$M_{b,4}(\pi^2) = \begin{cases} \neq 0 & \Leftrightarrow f \leq b \leq f+4 \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese schwache Besetztheit von  $\mathbf{S}$  und den partiellen Ableitungen kann zur Speicher- und Rechenreduktion genutzt werden.

Ein weiterer Vorteil zeigt sich für die Optimierung der Kontrollpunkte. Werden Gradientenbasierte Optimierungsverfahren verwendet, so werden die Ableitungen von  $\rho_\Sigma$ ,  $\frac{\partial \rho_\Sigma}{\partial \pi^1}$  und  $\frac{\partial \rho_\Sigma}{\partial \pi^2}$  nach den Kontrollpunkten  $C$  benötigt. Diese Werte sind aufgrund der einfachen Definition des Polarradius durch Anwendung der Produktregel bereits bekannt durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial C_{a,b}}(\pi) &= S(\pi)_{a,b} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial \pi^1 \partial C_{a,b}}(\pi) &= \left( \frac{\partial S}{\partial \pi^1}(\pi) \right)_{a,b} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial \pi^2 \partial C_{a,b}}(\pi) &= \left( \frac{\partial S}{\partial \pi^2}(\pi) \right)_{a,b}. \end{aligned}$$

Darüber hinaus wirken sich die Kontrollpunkte nur lokal auf die Funktionswerte aus, d.h.

$$\frac{\partial \rho}{\partial C_{a,b}}(\pi) = 0 \quad \forall \pi \notin [k^1(a), k^1(a+4)] \times [k^2(b), k^2(b+4)].$$

## 5 Lösungskonzept und numerische Umsetzung

Diese Eigenschaft gilt auch für  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \pi^1 \partial C_{a,b}}$  und  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \pi^2 \partial C_{a,b}}$  und kann bei der Bestimmung von Gradienten in Richtung der Kontrollpunkte angewandt werden.

### 5.2.4 Einfügen neuer Knotenpunkte zur Erhöhung der Modellierbarkeit des Polarradius

Sei eine Spline-Definition des Polarradius  $\rho$  mit  $m \cdot n$  Spline-Koeffizienten in der Koeffizientenmatrix  $C \in \mathbb{R}^{(m,n)}$  vorhanden mit Knotenvektoren  $\mathcal{K}^1 \in \mathbb{R}^{m+4}$  und  $\mathcal{K}^2 \in \mathbb{R}^{n+4}$ . Im Prozess der Optimierung kann es nützlich sein, die Knotenvektoren zu verfeinern. Wir bezeichnen den neuen Polarradius mit  $\hat{\rho}$ , die Koeffizientenmatrix mit  $\hat{C} \in \mathbb{R}^{(\hat{m}, \hat{n})}$  und die Knotenvektoren mit  $\hat{\mathcal{K}}^1 \in \mathbb{R}^{\hat{m}+4}$  und  $\hat{\mathcal{K}}^2 \in \mathbb{R}^{\hat{n}+4}$ . Auf diese Weise ist es möglich, die Anzahl an Freiheitsgraden in der Optimierung zu verändern, was Effekte auf das numerische Verhalten der Optimierungsverfahren haben kann.

Der neue Polarradius  $\hat{\rho}$  soll identisch sein zu dem Polarradius  $\rho$ , oder diesen sehr genau approximieren.

**Verfeinern durch Lösen eines linearen Gleichungssystems** Eine Möglichkeit ist, die Koeffizientenmatrix  $\hat{C} \in \mathbb{R}^{(\xi_\rho^1, \xi_\rho^2)}$  durch Lösen eines linearen Gleichungssystems zu bestimmen, wobei  $\xi_\rho^1, \xi_\rho^2$  gerade Zahlen sein müssen. Man kann auf dem äquidistanten Gitter  $\hat{\Pi}^D \in \mathbb{R}^{(\xi_\rho^1/2, \xi_\rho^2/2)}$  im Definitionsgebiet mit dem vorhandenen Polarradius  $\rho$  die Matrizen

$$(\rho)_{i,j}, \left( \frac{\partial \rho}{\partial \pi^1} \right)_{i,j}, \left( \frac{\partial \rho}{\partial \pi^2} \right)_{i,j} \text{ und } \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial \pi^1 \partial \pi^2} \right)_{i,j}$$

mit  $1 \leq i \leq 0.5 \xi_\rho^1$  und  $1 \leq j \leq 0.5 \xi_\rho^2$  berechnen. Fordert man nun, dass die Koeffizientenmatrix  $\hat{C}$  so zu bestimmen ist, dass der Polarradius  $\hat{\rho}$  diese Werte erfüllt, so ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (5.2.3) ein reguläres lineares Gleichungssystem mit  $\xi_\rho^1 \cdot \xi_\rho^2$  Unbekannten. Die Unbekannten des resultierenden Gleichungssystems sind die Einträge der gesuchten Koeffizientenmatrix  $\hat{C}$ . Dieses Verfahren kann angewandt werden, um das Gitter der Knotenpunkte äquidistant zu verfeinern.

**Boehm-Algorithmus** Alternativ kann durch den *Boehm-Algorithmus* (siehe [10]) ein Knotenpunkt  $\hat{k}_v^1$  mit  $k_{v-1}^1 < \hat{k}_v^1 < k_v^1$  leicht in die erste Komponente von  $\rho$  eingefügt werden. Sei

$$\hat{\mathcal{K}}^1 = \left[ k_1, \dots, k_v, \hat{k}_v, k_{v+1}, \dots, k_{\xi_\rho^1} \right]$$

der neue Knotenvektor der B-Spline-Basisfunktion der ersten Komponente des Polarradius  $\hat{\rho}$ , wobei die einzelnen  $k_i$  die Knotenpunkte der B-Spline-Basisfunktionen der ersten Komponente von  $\rho$  sind. Der *Boehm*-Algorithmus berechnet die Koeffizienten-Matrix  $\hat{C}$  des Polarradius  $\hat{\rho}$  durch

$$\hat{C}_{i,j} = \begin{cases} C_{i,j} & \text{für } i \leq v-4 \\ \frac{k_{i+4}-\hat{k}_v}{k_{i+4}-k_i} C_{i-1,j} + \frac{\hat{k}_v-4_i}{k_{i+4}-k_i} C_{i,j} & \text{für } v-3 \leq i \leq v \\ C_{i-1,j} & \text{für } i \geq v+1. \end{cases}$$

Das Einfügen eines Knotenpunktes im Vektor  $\mathcal{K}^2$  wird analog durchgeführt.

**Oslo-Algorithmus** Der *Oslo*-Algorithmus [17, siehe Seite 106-107] hingegen erlaubt den Wechsel auf einen neuen Knotenvektor. Es müssen die Koeffizienten  $\alpha_{l,i}^4$  bestimmt werden, so dass die Koeffizienten-Matrix  $\hat{C}^1 \in \mathbb{R}^{(\hat{m},n)}$  zu berechnen ist durch

$$\hat{C}_{i,j}^1 = \sum_{l=1}^m \alpha_{l,i} C_{l,j}.$$

Das Ergebnis des *Oslo*-Algorithmus ist, dass die Koeffizienten  $\alpha_{l,i}^4$  leicht über die Rekursionsformel

$$\alpha_{l,i}^1 = \begin{cases} 1 & \text{falls } k_l^1 \leq \hat{k}_i^1 \leq k_{l+1}^1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\alpha_{l,i}^a = \frac{\hat{k}_{i+3}^1 - k_l^1}{k_{l+3}^1 - k_l^1} \alpha_{l,i}^{a-1} + \frac{k_{l+4}^1 - \hat{k}_{l+3}^1}{\hat{k}_{l+4}^1 - \hat{k}_{l+1}^1} \alpha_{l+1,i}^{a-1}$$

berechnet werden können. Der Wechsel des zweiten Knotenvektors und damit die Bestimmung der Koeffizienten-Matrix  $\hat{C} \in \mathbb{R}^{(\hat{m},\hat{n})}$  durch

$$\hat{C}_{i,j} = \sum_{l=1}^n \beta_{l,j} \hat{C}_{i,l}^1.$$

kann im zweiten Schritt analog angewandt werden.

### 5.3 Gradientenberechnung für die Optimierung

Wir nehmen an, dass das optische System durch eine Kostenfunktion  $\epsilon : \vec{c} \rightarrow \mathbb{R}^+$  bewertet wird, wobei die Parameter im Vektor  $\vec{c}$  die Freiheitsgrade des optischen Systems sind. Für sehr viele effiziente Optimierungsverfahren, wie etwa das *BFGS*-Verfahren, ist es notwendig,

den Gradienten  $\nabla \epsilon$  der Kostenfunktion zu bestimmen. Wenn die Funktion  $\epsilon$  allerdings sehr komplex ist, ist es in vielen Fällen praktisch nicht möglich, die Ableitung analytisch zu berechnen.

Der Gradient kann alternativ durch zentrierte *Differenzenquotienten*

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial c_i}(\vec{c}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon((c_1, \dots, c_i + h, \dots, c_n)) - \epsilon((c_1, \dots, c_i - h, \dots, c_n))}{2h}$$

bestimmt werden. Diese Variante hat einige Nachteile. Zum einen wird der Gradient durch die Wahl eines konkreten  $h > 0$  nur approximiert und zum anderen kann der Rechenaufwand für eine große Anzahl an Freiheitsgraden  $\vec{c}$  sehr aufwendig werden, so dass eine praktische Umsetzung schwierig wird.

Ein weiterer Nachteil fällt dann ins Gewicht, wenn die Fehlerfunktion  $\epsilon$  ein Integral über eine Funktion mit einem steilen Abfall enthält. In diesem Fall kann es passieren, dass durch eine zu kleine Variation  $h$  im *Differenzenquotienten* keine Änderung des Integranden und damit auch des Integrals beobachtet wird, weil die einzelnen Punkte des Integranden nicht über die Kante der zu integrierenden Funktion wandern. Der Gradient liefert dann keine Abstiegsinformationen. Die Formel (4.5.3) weist genau diese Schwierigkeit auf, was im Abschnitt 5.7 näher erläutert wird.

Eine weitere Alternative zur Bestimmung von Ableitungen ist das *automatische Differenzieren*. Der Grundgedanke hierbei ist, dass jede analytische, als Programm definierte Funktion eine Verkettung von wenigen Grundfunktionen ist. Der Rechenaufwand, um die Ableitungen der Grundfunktionen zu bestimmen ist ungefähr genau so groß, wie die Auswertung der Grundfunktion selbst. Das *automatische Differenzieren* überlagert nun diese Grundfunktionen mit einer zusätzlichen direkten Berechnung der geforderten Ableitungen. Die Anwendung der Kettenregel ermöglicht die Bestimmung der Ableitung der gesamten Funktion. Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Berechnung der Ableitungen durch *automatisches Differenzieren*, den Vorwärts-Modus und den Rückwärts-Modus. Der Vorteil des Rückwärts-Modus ist, dass die benötigte Zeit zur Berechnung des Gradienten unabhängig ist von der Anzahl an Freiheitsgraden der Funktion und linear abhängt von der benötigten Zeit der Funktionsauswertung selbst. Für die Optimierung des optischen Systems zur Generierung eines vorgegebenen mappings wird in Abbildung 5.12 diese Aussage belegt. Ein theoretisches Resultat ist, dass für rationale Algorithmen die Operationen für die Berechnung des Gradienten kleiner ist als das vierfache der Operationen der Funktionsauswertung selbst. Am einfachsten ist es, den Ansatz des *automatischen Differenzierens* an einem Beispiel zu illustrieren.

**Beispiel 5.1** (automatisches Differenzieren). *Wir beziehen uns auf das Vorlesungsskript [5,*



Seite 8-21] und wenden das automatische Differenzieren auf die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 x_3 + x_1 x_2 + 5}{x_1 + x_2 x_3}$$

an. Diese kann durch die Verkettung der Elementarfunktionen  $f_1, f_2, \dots, f_8$  mit  $f = f_{11}$  berechnet werden:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1, \quad f_2(x_2) = x_2, \quad f_3(x_3) = x_3, \\ f_4(f_1) &= f_1^2 \\ f_5(f_4, f_3) &= f_4 f_3 \\ f_6(f_1, f_2) &= f_1 f_2 \\ f_7(f_5, f_6) &= f_5 + f_6 \\ f_8(f_7) &= f_7 + 5 \\ f_9(f_2, f_3) &= f_2 f_3 \\ f_{10}(f_1, f_9) &= f_1 + f_9 \\ f &= f_{11}(f_8, f_{10}) = \frac{f_8}{f_{10}}. \end{aligned}$$

Bezeichne der Operator  $\nabla$  den Vektor  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ , so kann der Gradient  $\nabla f(x_1, x_2, x_3)$  aufgrund der Kettenregel berechnet werden durch

$$\begin{aligned} \nabla f_1 &= [1, 0, 0], \quad \nabla f_2 = [0, 1, 0], \quad \nabla f_3 = [0, 0, 1] \\ \nabla f_4 &= [2f_1 \nabla f_1, 0, 0] = 2f_1 [1, 0, 0] \\ \nabla f_5 &= \nabla f_4 f_3 + f_4 \nabla f_3 &= \nabla f_4 f_3 + f_4 [0, 0, 1] \\ \nabla f_6 &= \nabla f_1 f_2 + f_1 \nabla f_2 &= [x_2, x_1, 0] \\ \nabla f_7 &= \nabla f_5 + \nabla f_6 \\ \nabla f_8 &= \nabla f_7 \\ \nabla f_9 &= \nabla f_2 f_3 + f_2 \nabla f_3 &= [0, f_3, f_2] \\ \nabla f_{10} &= \nabla f_1 + \nabla f_9 &= [1, 0, 0] + \nabla f_9 \\ \nabla f &= \nabla f_{11} = \frac{\nabla f_8 f_{10} - f_8 \nabla f_{10}}{f_{10}^2}. \end{aligned}$$

Dieses sukzessive Berechnen des Gradienten beschreibt den Vorwärts-Modus des automatischen Differenzierens. Da in jedem Schritt ein Vektor berechnet werden muss, dessen Länge der Anzahl an Freiheitsgraden der Funktion  $f$  entspricht, ist die Anzahl an Operationen zur Berechnung der gesamten Ableitung abhängig von der Anzahl an Freiheitsgraden. Eine theoretische Aussage hierzu ist, dass für die Berechnung des Gradienten einer Funktion mit  $n$  Freiheitsgraden höchstens die  $(3n + 1)$ -fache Anzahl an Operationen der Funktion selbst benötigt werden. Wir können dieses Vorgehen abstrakter formulieren. Dafür führen wir die Funktion  $F_i(F_{i-1}) = [F_{i-1}, f_i]$  mit  $F_4(x_1, x_2, x_3) = [f_1, f_2, f_3]$  ein. Sei ferner  $L(F_{11})$  die Auswahl der letzten

## 5 Lösungskonzept und numerische Umsetzung

*Komponente des Vektors. Die Funktion  $f$  kann als Verkettung*

$$f(x_1, x_2, x_3) = L(F_{11}(F_{10}(F_9(F_8(F_7(F_6(F_5(F_4(x_1, x_2, x_3))))))))))$$

*interpretiert werden. Das Bilden des Gradienten dieser Verkettung entspricht der Multiplikation der Jakobi-Matrizen*

$$\nabla f = \underbrace{\mathbf{DL}(F_{11})}_{1 \times 11} \underbrace{\mathbf{DF}_{11}(F_{10})}_{11 \times 10} \cdots \underbrace{\mathbf{DF}_5(F_4)}_{5 \times 4} \underbrace{\mathbf{DF}_4(x_1, x_2, x_3)}_{4 \times 3}.$$

*Die Matrizen weisen eine Struktur auf:*

$$\mathbf{DL}(F_{11}) = [0, \dots, 0, 1]$$

*und*

$$\mathbf{DF}_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ \frac{\partial f_i}{\partial f_{i-1}} & \frac{\partial f_i}{\partial f_{i-2}} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial f_1} \end{pmatrix}.$$

*Das Multiplizieren dieser Matrizen von rechts nach links entspricht dem Vorwärts-Modus.*

*Der Rückwärts-Modus des automatischen Differenzierens entspricht der Multiplikation der Matrizen von links nach rechts. Dabei muss der Algorithmus einmal durchgeführt werden und alle Zwischenwerte  $f_i$  und die Ableitungen müssen gespeichert werden. Geschicktes Ausführen der Multiplikation unter Ausnutzen der Strukturen der Matrizen bewirkt, dass der Rechenaufwand für den Gradienten der Funktion unabhängig von der Anzahl an Freiheitsgraden ist. Ein theoretisches Ergebnis sagt aus, dass der Rechenaufwand kleiner als das Fünffache des Rechenaufwandes der Funktion selbst ist. Der Nachteil dieser Berechnung liegt darin, dass durch die Abspeicherung aller Zwischenergebnisse der Funktion viel Speicherplatz benötigt wird.*

Ein weiterer Vorteil des *automatischem Differenzieren* ist, dass die Funktion nicht analytisch gegeben sein muss, sondern eine Definition als Quelltext ausreicht. Die Kostenfunktionen, die in unserem Lösungsansatz zu optimieren sind (siehe Abbildung 5.1) beziehen sich auf die Berechnung von Strahlengängen durch das optische System. Damit die Kostenfunktion analytisch differenziert werden kann durch Automatisches Differenzieren, muss das optische System aus Flächen bestehen, deren Schnittpunkte mit Lichtstrahlen explizit berechnet werden können und nicht durch Optimierung bestimmt werden müssen. Daraus folgt für un-

sere spezielle Formulierung, dass das System nur aus einer Freiformfläche bestehen darf und alle anderen Flächen explizit definiert sein müssen.

## 5.4 Numerische Integration mittels Gauss-Quadratur

Zur Berechnung der Beleuchtungsstärke mit ausgedehnter Lichtquelle (siehe Gleichung (4.5.3)) müssen Integrale berechnet werden. Deshalb ist eine effiziente Integrationstechnik wichtig.

Das numerische Integrieren von Funktionen approximiert diese stückweise als Polynome und integriert diese exakt. Wir beziehen uns auf das Buch [11, Kapitel 7]. Das Integral einer Funktion  $I : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wird durch die Integration der Polynome mittels einer numerischen Quadraturformel

$$I = \int_a^b f(x) dx \rightarrow \tilde{I} = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

approximiert. Der Genauigkeitsgrad  $m \in \mathbb{N}$  einer Quadraturformel besagt, dass mit Hilfe dieser Formel Polynome mit Höchstgrad  $m$  exakt integriert werden können. Die *Newton-Cotes* Quadraturformel realisiert zu  $(m + 1)$  paarweise verschiedenen Stützstellen  $x_i \in [a, b]$  genau eine Vorschrift mit Genauigkeitsgrad von mindestens  $m$ .

Die *Gauss-Quadraturformeln* erhöhen diesen Genauigkeitsgrad, indem sie die Lage der Stützstellen als weitere Freiheitsgrade für die Quadratur verwenden. Das Ergebnis dieses Ansatzes ist, dass für das Intervall  $[-1, 1]$  zu  $n$  Stützstellen  $x_i$  genau eine Quadraturformel  $\tilde{I} = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$  mit dem Genauigkeitsgrad  $(2n - 1)$  existiert. Die Stützstellen  $x_k$  sind die Nullstellen des  $n$ -ten Legendre-Polynoms

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n - 2k)!}{(n - k)!(n - 2k)!k!2^n} x^{n-2k}$$

und die Integrationsgewichte sind gegeben durch

$$w_k = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \left( \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right)^2 dx.$$

## 5 Lösungskonzept und numerische Umsetzung

Diese Werte können auch als Eigenwerte einer Matrix berechnet werden. Die Stützstellen  $x_i$  sind die Eigenwerte der Matrix

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & 0 & \beta_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \beta_{n-2} & 0 & \beta_{n-1} \\ & & & & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\beta_k = \frac{k}{\sqrt{4k^2 - 1}}.$$

Die Gewichte können durch die Eigenvektoren bestimmt werden. Sei  $\vec{z}^k$  der Eigenvektor von  $J_n$  zum Eigenwert  $x_k$ . Dann gilt für die Gewichte

$$w_k = \frac{2(\vec{z}_1^k)^2}{\|\vec{z}^k\|^2},$$

wobei  $\vec{z}_1^k$  die erste Komponente des nicht normierten Eigenvektors zum Eigenwert  $x_k$  ist. Diese Formeln gelten für das Intervall  $[-1, 1]$ . Wenden wir die Integration nun auf das zweidimensionale Gebiet  $[a, b] \times [c, d]$  an, so kann die Quadraturformel mit Hilfe einer einfachen Transformation

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{(b-a)(d-c)}{2^2} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}, \frac{d-c}{2}y + \frac{c+d}{2}\right)}_{=: \hat{f}(x, y, a, b, c, d)} dx dy$$

angewandt werden. Die Gauss-Quadratur mit einem Genauigkeitsgrad  $2n - 1$  in beide Richtungen führt auf die Formel

$$\tilde{I} = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n w_\mu w_\nu \hat{f}(x_\mu, x_\nu, a, b, c, d),$$

wobei die  $w_i$  und  $x_i$  für die Gauss-Gewichte und Stützstellen stehen. Die Stützstellen beziehen sich auf das Intervall  $[-1, 1]^2$ , können aber leicht auf das eigentliche Integrationsgebiet transformiert werden.

**Mehrlevel-Ansatz der Gauss-Quadratur** Wir wenden die Gauss-Quadratur auf ein großes Rechteckgebiet  $\Pi = \Pi^1 \times \Pi^2 = [\pi_1^1, \pi_1^2] \times [\pi_2^1, \pi_2^2]$  an. Falls der Integrand in dem Integrationsgebiet sehr feinstrukturiert ist, müssen die Stützstellen das Gebiet entsprechend ausfüllen. Für eine hohe Anzahl an notwendigen Stützstellen ist es nicht sinnvoll, die Gauss-Quadratur auf diese direkt anzuwenden, da in diesem Fall sehr hochdimensionale Eigenwertprobleme zu lösen wären und interpolierende Polynome höherer Ordnung die Neigung zum Oszillieren aufweisen. Deshalb wenden wir die Gauss-Quadratur mit  $n$  (ca. 3 – 7) Stützstellen auf kleineren Teilgebieten von  $\Pi$  an und setzen diese durch Summenbildung zusammen. Wir bezeichnen mit  $\Pi_h$  die Unterteilung von  $\Pi$  in  $n_1^h \times n_2^h$  äquidistante Zellen, in denen die Gauss-Quadratur angewandt wird. Die horizontale Zellenbreite ist  $h_1 := \frac{\pi_2^1 - \pi_1^1}{n_1^h}$  und die vertikale  $h_2 := \frac{\pi_2^2 - \pi_1^2}{n_2^h}$ . Wir erhalten für  $I = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$  die Approximation

$$\tilde{I} = \sum_{i=0}^{n_1^h-1} \sum_{j=0}^{n_2^h-1} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n w_{\mu} w_{\nu} \hat{f}(x_{\mu}, x_{\nu}, \pi_1^1 + i h_1, \pi_1^1 + (i+1) h_1, \pi_1^2 + j h_2, \pi_1^2 + (j+1) h_2).$$

Falls der Integrand in großen Bereichen des Integrationsgebietes verschwindet, muss dieser in diesen Bereichen nicht berechnet und integriert werden. Da der *Backward-Raytrace* im Allgemeinen nur kleine Teile der Fläche auf die Lichtquelle abbildet, geben wir eine Möglichkeit an, den Integranden der Gleichung (4.5.3) nur auf dem aktiven Bereich zu bestimmen. Wir nennen die verwendete Reduktion des Rechenaufwandes *Mehrlevel-Ansatz*. Die dabei verwendeten Gitter für die Gauss-Integration sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Die Grundidee besteht darin, ein grobes Teilgitter  $\Pi_H$  von  $\Pi_h$  zu wählen und den Integranden zuerst auf  $\Pi_H$  auszuwerten. Anschließend wird die Integration nur auf den Zellen durchgeführt, die in dem Bereich liegen, in dem der Integrand ungleich Null ist. Dieser Ansatz ist besonders effektiv, wenn der Integrand nur auf einem zusammenhängenden Gebiet in  $\Pi$  ungleich null ist und in großen Teilen verschwindet. In der Berechnung der BSV weist dieses Vorgehen eine hohe Effizienz auf, wie in Abb. 5.4 dargestellt wird. Der Rechenaufwand der Gauss-Integration einer Funktion, deren Träger ca.  $\frac{1}{10}$  der Fläche von  $\Pi$  bedeckt, kann auf diese Weise um ca. denselben Faktor verringert werden.

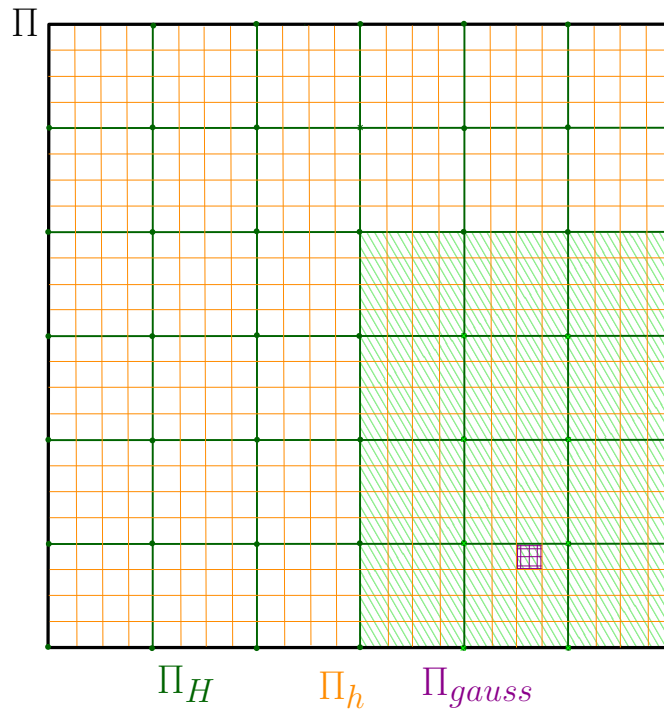


Abb. 5.3: Die Berechnung eines Integrals mit Hilfe der Gauss-Quadratur auf den Stützstellen  $\Pi_{gauss}$  wird mit Hilfe von drei Gittern in  $\Pi$  durchgeführt. Indem der Integrand auf dem groben Gitter  $\Pi_H$  ausgeführt wird, wird durch die Menge der Punkte, auf denen der Integrand ungleich null ist, eine Teilmenge der Gauss-Quadraturzellen in  $\Pi_h$  ausgewählt (grün schraffierte Fläche). Auf diese Weise dient das grobe Gitter  $\Pi_H$  der Verkleinerung des Integrationsgebietes.

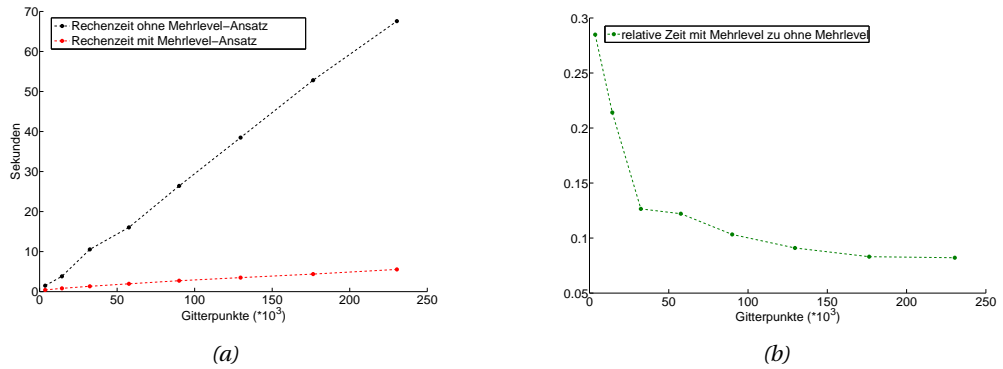


Abb. 5.4: Die benötigte Berechnungszeit eines Integrals mit Hilfe der Gauss-Quadratur mit und ohne Mehrlevel-Ansatz. (a) Gegenüberstellung der Berechnung mit und ohne Mehrlevel-Ansatz. (b) Das relative Verhalten der Berechnungszeit mit Mehrlevel-Verfahren zu der Berechnung auf dem ganzen Integrationsgebiet.

## 5.5 Berechnung des optimalen mappings mit dem Kantorovich-Formalismus des Monge-Problems

Das Beleuchtungsproblem in Abschnitt 2.5 wird vereinfacht gelöst durch die Approximation der Lichtquelle als Punkt  $\hat{\chi} \in \mathbb{R}^3$  und die Berechnung eines diskreten optimalen mappings  $\hat{\mathcal{F}} : \Omega_{\hat{\chi}}^m \rightarrow \Omega_{\Psi}$ , das zur Bestimmung eines optischen Systems verwendet wird. Auf das optimale mapping soll mit Hilfe des Produktmaßes aus dem primalen Monge-Kantorovich-Formalismus geschlossen werden (siehe lineares Programm 3.1).

Die Transformation des Beleuchtungsproblems in diese Formulierung wird in Abbildung 5.5 dargestellt und das resultierende mapping nach Gleichung (3.4.31) in Abbildung 5.6. Das primale Problem bietet den Vorteil, dass die Struktur des gesuchten diskreten Produktmasses  $\mu : \{[\Omega_{\hat{\chi}}^i; \Omega_{\hat{\chi}}^{i+1}] | 1 \leq i \leq m-1\} \times \{[\Omega_{\Psi}^k; \Omega_{\Psi}^{k+1}] | 1 \leq k \leq o-1\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  schwach besetzt ist (siehe Abschnitt 3.4.4). Wir beschreiben das diskrete Produktmass als Matrix  $M \in \mathbb{R}^{(m-1), (o-1)}$ . Mit Hilfe der schwachen Besetztheit kann die Komplexität des Linearen Programms reduziert werden. In der ursprünglichen Formulierung werden  $(m-1) \cdot (o-1)$  Variablen unter  $(m-1) + (o-1)$  Nebenbedingungen berechnet. Bei feiner Diskretisierung der Gebiete  $\Omega_{\hat{\chi}}$  und  $\Omega_{\Psi}$  kann schnell der benötigte Speicherplatz und die Laufzeit des Programms die praktische Durchführung unattraktiv oder unmöglich machen. Die schwache Besetztheit legt nahe, dass die Anzahl an zu berechnender Koeffizienten auf  $O((m-1) + (o-1))$  reduziert werden kann. In der Ausarbeitung [13] stellt Jan Van-Lent zwei Ansätze zur Reduzierung der Komplexität dar, die in den folgenden Abschnitten definiert werden.

Transformation des Beleuchtungsproblems in den Monge-Kantorovich-Formalismus

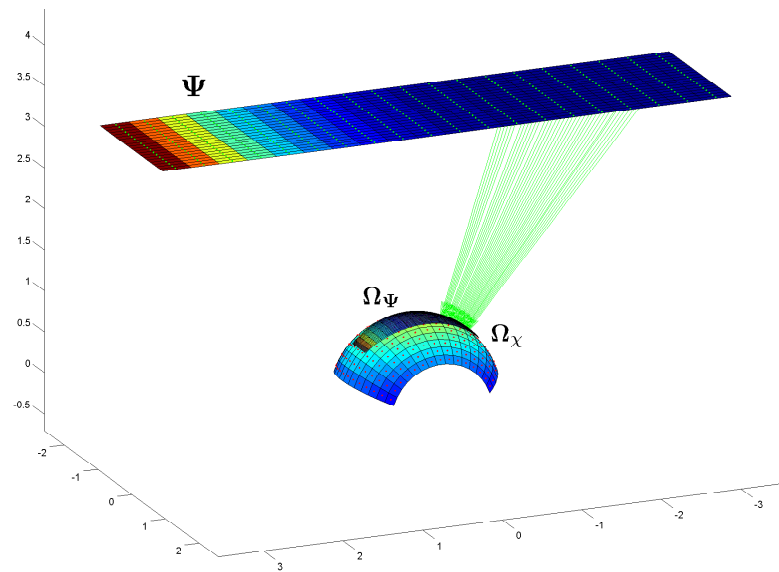


Abb. 5.5: Das Beleuchtungsproblem wird für die Anwendung des Monge-Kantorovich-Formalismus transformiert. In dieser Darstellung ist die Transformation der Zielfläche  $\Psi$  auf die Sphäre dargestellt. Auf der Sphäre überlagern die diskreten Maße der Lichtquelle und der Zielfläche, die durch die Kostenfunktion auf den Mittelpunkten der Zellen in Zusammenhang gebracht werden.



Berechnetes mapping aus der primalen Monge-Kantorovich Lösung

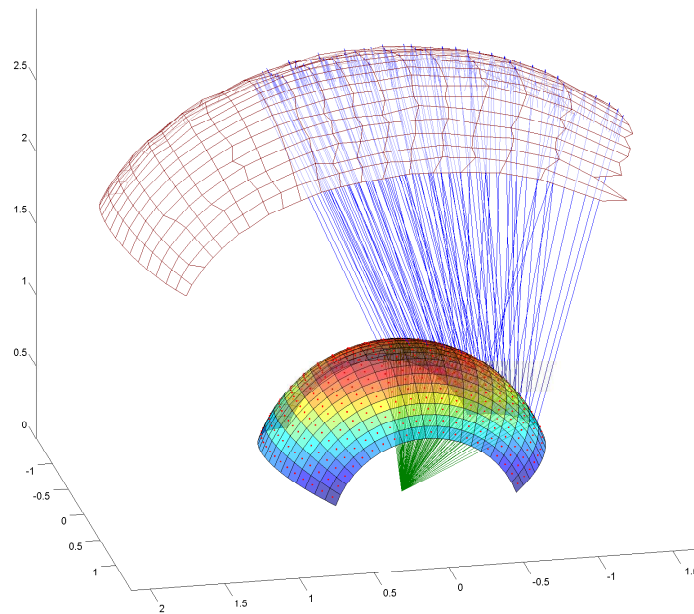


Abb. 5.6: Das resultierende mapping  $\hat{\mathcal{F}}^+$  aus dem diskreten Produktmaß der primalen Monge-Kantorovich-Lösung des Beleuchtungsproblems in Abbildung 5.5 wird dargestellt. Die grünen Strahlen müssen durch das optische System auf Lichtstrahlen in Richtung der blauen Strahlen abgelenkt werden

### 5.5.1 Erster iterativer Algorithmus von Jan van Lent zur Lösung des primalen Monge-Kantorovich-Problems

Wir definieren  $\mathcal{J} := \{(i, k) | \mu_{i,k} \neq 0\}$  als aktiven Indexbereich der Lösungsmatrix  $M$  mit der Anzahl  $q := |\mathcal{J}|$  an Indexpaaren im aktiven Bereich. Das lineare Programm kann umgeschrieben werden zu.

**lineares Programm 5.1** (primales Monge-Kantorovich-Problem mit Ausnutzung der schwachen Besetztheit). *Die Bezeichnungen und Definitionen der Maßzahlen  $\mu_i^+$  und  $\mu_k^-$  und die Kostenmatrix  $C$  seien wie im linearen Programm 3.1. Da für die Lösung  $\mu_{i,k} = 0$  für alle  $(i, k) \notin \mathcal{J}$  gilt, ist die Minimierung der Gleichung 3.4.32 äquivalent zu der Minimierung von*

$$\sum_{k=1}^q c_{\mathcal{J}(k)} \mu_{\mathcal{J}(k)}.$$

Die Nebenbedingungen 3.1 sind äquivalent zu

$$\sum_{\{(\hat{i}, k) \in \mathcal{J} | \hat{i} = i\}} \mu_{\hat{i}, k} = \mu_i^+, \quad \sum_{\{(i, \hat{k}) \in \mathcal{J} | \hat{k} = k\}} \mu_{i, \hat{k}} = \mu_k^-, \quad \text{für alle } i = 1 \dots (m-1) \text{ und } k = 1 \dots (o-1), \quad (5.5.1)$$

die durch ein entsprechendes Gleichungssystem mit  $q$  Unbekannten beschrieben werden können.

Falls der aktive Bereich  $\mathcal{J}$  der Lösung  $(\mu_{i,k})_{i,k}^{(m-1), (o-1)}$  bekannt ist, kann durch diese Umformulierung des linearen Programms die gesuchte Lösungsmatrix  $M$  bestimmt werden. Da der aktive Bereich a-priori nicht bekannt ist, wird in [13] ein iteratives Lösungsverfahren vorgeschlagen nach dem Schema in Abbildung 5.7. Zu Beginn des iterativen Verfahrens wird ein initialer aktiver Bereich  $\mathcal{J}^0$  gewählt. Dieser kann beispielsweise durch eine Vorschrift definiert werden, dass zu jedem  $1 \leq i \leq (m-1)$  eine gewisse Anzahl an Indexpaaren  $(i, k)$  gewählt werden, die die minimalen Kosten  $c_{i,k}$  für alle  $1 \leq k \leq (o-1)$  verursachen.

Anschließend folgt eine Lösungsschleife: Die Lösungsmatrix  $M^{k-1}$  aus dem linearen Programm 5.1 zu dem gegebenen aktiven Bereich  $\mathcal{J}^{k-1}$  wird berechnet. Anschließend wird diese Lösung analysiert und ein veränderter aktiver Bereich  $\mathcal{J}^k$  bestimmt. Dazu werden zu jedem  $1 \leq i \leq m$  alle Indexpaare in den aktiven Bereich  $\mathcal{J}^k$  aufgenommen, die innerhalb eines umgebenden Rechteckes um alle Zellen  $(i, k)$  mit  $M^{k-1}(i, k) \neq 0$  liegen. Für ein eindimensionales Problem würde dies bedeuten, dass die Indizes  $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq (o-1)$  bestimmt werden müssen, für die  $M(i, k_1) = M^{k-1}(i, k_2) = 0$  und  $M^{k-1}(i, k) \neq 0$  für alle  $k_1 \leq k \leq k_2$  gilt. Alle Indexpaare  $(i, k)$  mit  $k_1 \leq k \leq k_2$  werden in den aktiven Bereich  $\mathcal{J}^i$  aufgenommen. Ein Abbruchkriterium kann definiert werden durch die Forderung  $\mathcal{J}^k \subseteq \mathcal{J}^{k-1}$ , da in diesem Fall sichergestellt wird, dass der angenommene aktive Bereich den tatsächlichen enthält. Im Beispiel 5.2 wird ein

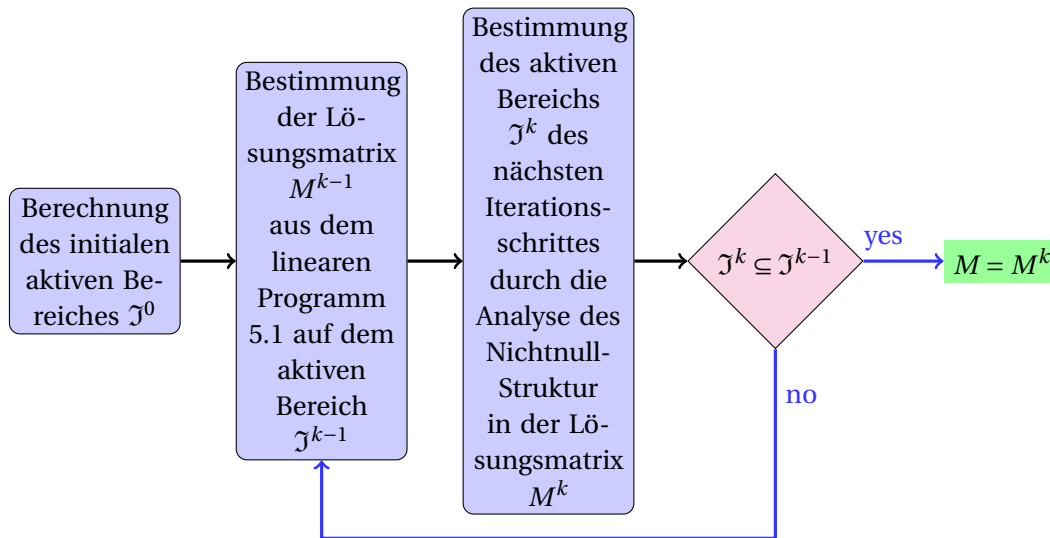


Abb. 5.7: Schematische Darstellung des ersten iterativen Verfahrens von Jan Van Lent zur Lösung des primalen Monge-Kantorovich-Problems

eindimensionales Problem gelöst und der iterative Algorithmus dargestellt.

**Beispiel 5.2** (Das erste iterative Verfahren von Jan van Lent an einem eindimensionalen Beispiel). Wir wenden den Algorithmus von Jan van Lent auf das eindimensionale Problem mit den Dichten in Abbildung 5.8 an. Der iterative Prozess verändert den aktiven Bereich. Die Produktmaße für die jeweiligen aktiven Bereiche während der Iteration werden in Abbildung 5.9 dargestellt.

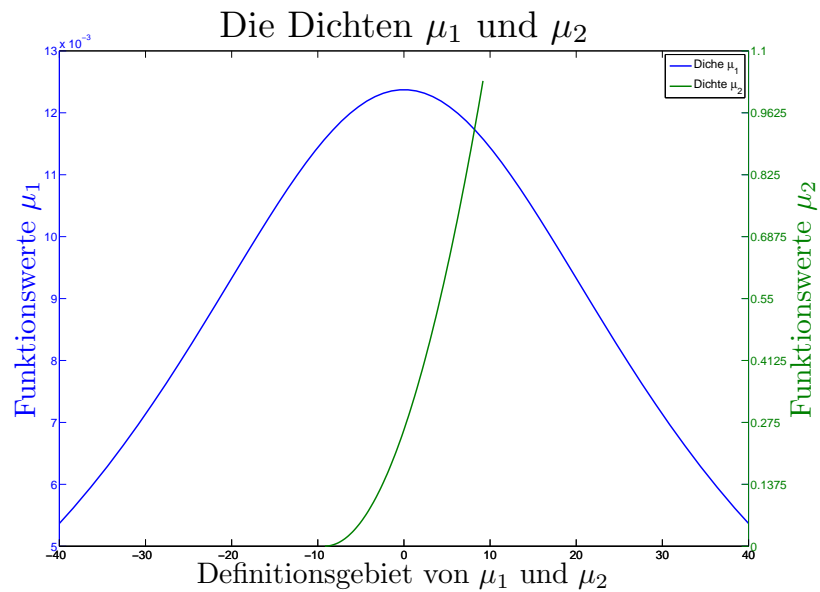


Abb. 5.8: Die Dichte  $\mu_1$  soll in die Dichte  $\mu_2$  überführt werden. Das Produktmaß des primalen Monge-Kantorovich-Problems wird iterativ nach dem Algorithmus von Jan van Lent berechnet (siehe Abbildung 5.9.)

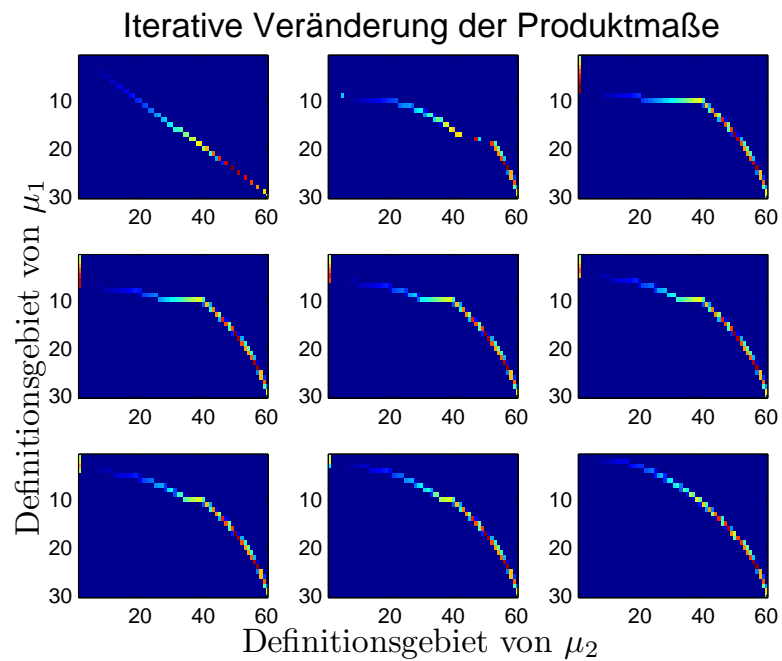


Abb. 5.9: Das iterative Verfahren von Jan Van Lent zur Lösung des primalen Monge-Kantorovich-Problems löst auf sich ändernden aktiven Bereichen das Problem 5.1. Die verschiedenen Produktmaße werden in dieser Abbildung dargestellt.

### 5.5.2 Zweiter iterativer Algorithmus von Jan van Lent zur Lösung des primalen Monge-Kantorovich-Problems

Alternativ kann auch ein anderes iteratives Verfahren angewandt werden. Hierbei werden die Diskretisierungen der Gebiete  $\Omega_\chi$  und  $\Omega_\Psi$  in jedem Iterationsschritt durch Unterteilung der Zellen verfeinert. Sei  $\Omega_\chi^{k-1}$  und  $\Omega_\Psi^{k-1}$  eine Diskretisierung mit der Lösungsmatrix  $M^{k-1}$  und dem aktiven Bereich  $\mathcal{J}^{k-1}$ . Eine feinere Diskretisierung  $\Omega_\chi^k$  und  $\Omega_\Psi^k$  mit  $\Omega_\chi^{k-1} \subset \Omega_\chi^k$  und  $\Omega_\Psi^{k-1} \subset \Omega_\Psi^k$  wird erstellt durch Unterteilung der einzelnen Zellen mit einem ganzzahligen Vielfachen. Für die Ausführung des linearen Programms auf der feineren Diskretisierung werden in den aktiven Bereich  $\mathcal{J}^k$  nur die Zellen aufgenommen, die Teilmengen von Zellen in  $\Omega_\chi^{k-1}$  und  $\Omega_\Psi^{k-1}$  sind, deren Eintrag im Produktmaß  $M^{k-1}$  ungleich null ist. Anschließend wird das lineare Programm 5.1 auf diesem aktiven Bereich bestimmt.

Damit dieser Ansatz zur Lösung führt, wird das initiale lineare Programm auf der groben Diskretisierung  $\Omega_\chi^0$  und  $\Omega_\Psi^0$  als voll-besetztes lineares Programm 3.1 gelöst. Wenn die gewünschte Auflösung erreicht wird hat man die diskrete Lösungsmatrix  $M^n$  bestimmt. Dieses iterative Lösungsverfahren wird in Abbildung 5.10 schematisch dargestellt.

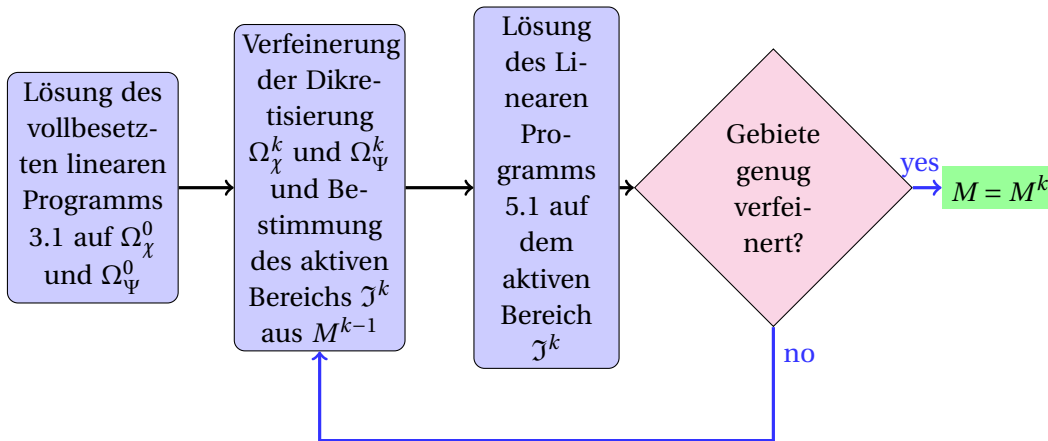


Abb. 5.10: Schematische Darstellung des zweiten iterativen Verfahrens von Jan Van Lent zur Lösung des primalen Monge-Kantorovich-Problems

Wir wenden dieses Verfahren auf dasselbe Problem an, wie den Algorithmus im vorigen Beispiel 5.2

**Beispiel 5.3** (Das zweite iterative Verfahren von Jan van Lent an einem eindimensionalen Beispiel). Wir wenden den zweiten Algorithmus von Jan van Lent ebenfalls auf das eindimensionale Problem mit den Dichten aus Abbildung 5.8 an. Der iterative Prozess verfeinert die Diskretisierungen, so dass eine Lösung bestimmt werden kann zu einer wesentlich feineren Diskretisierung als mit dem ersten Ansatz aus Beispiel 5.2. Die Produktmaße für die jeweiligen Diskreti-

sierungen während der Iteration werden in Abbildung 5.11 dargestellt.

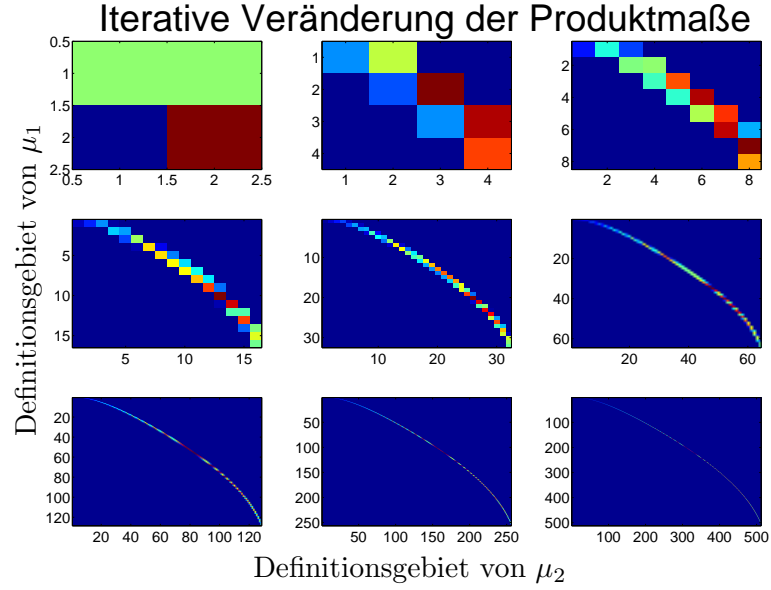


Abb. 5.11: Das zweite iterative Verfahren von Jan Van Lent zur Lösung des primalen Monge-Kantorovich-Problems löst das entsprechende Lineare Programm auf einer groben Diskretisierung und löst diese iterativ immer weiter auf. Dabei werden nur die Zellen des Produktmasses berechnet, die innerhalb größerer Zellen liegen, deren Produktmass-Eintrag ungleich null ist.

## 5.6 Bestimmung eines optischen Systems mit Hilfe eines optimalen mappings

Gegeben sei ein diskretes optimales mapping  $\hat{\mathcal{F}} : \Omega_{\hat{\chi}}^m \rightarrow \Omega_{\Psi}$ . Die optischen Flächen  $\Sigma_1$  bis  $\Sigma_n$  sollen berechnet oder optimiert werden, so dass das mapping durch das optische System mit der Punktlichtquelle in  $\hat{\chi} \in \mathbb{R}^3$  generiert wird.

Wir präsentieren in Abschnitt 5.6.1 ein Optimierungsverfahren für allgemeine optische Systeme mit verschiedenen Flächen und Freiheitsgraden.

Falls das optische System jedoch aus nur einer optischen Fläche besteht, kann das optimale mapping  $\hat{\mathcal{F}}$  aufgrund der Gesetze der geometrischen Optik mit einem Normalenvektorfeld  $\vec{N}_{\hat{\mathcal{F}}} : \Omega_{\hat{\chi}} \rightarrow S^2$  der Fläche identifiziert werden. Nach dem Beweis von Lemma 3.2 zeigt das Normalenvektorfeld der gesuchten Fläche in die Richtung

$$N_{\hat{\mathcal{F}}} = \hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}) - \frac{n_{\hat{\chi}}}{n_{\Psi}} \vec{\omega}_{\hat{\chi}}. \quad (5.6.1)$$

## 5.6 Bestimmung eines optischen Systems durch ein optimales mapping

Das Lemma 3.2 besagt, dass zu einem rotationsfreien mapping  $\hat{\mathcal{F}}$  eine eindimensionale Schar von optischen Flächen existiert, die das gewünschte mapping generieren. Eine optische Fläche, die durch ein rotationsfreies mapping, bzw. Normalenvektorfeld, beschrieben wird, kann auf drei Weisen berechnet werden:

- Lösen eines Systems partieller Differentialgleichungen als Anfangswertproblem, das durch das Normalenvektorfeld des optimalen mappings definiert wird (siehe Abschnitt 5.6.2)
- Bestimmung der Fläche durch Integration des Normalenvektorfeldes (siehe Abschnitt 5.6.3).
- Optimierung der Fläche zur Generierung des gewünschten Normalenvektorfeldes (siehe Abschnitt 5.6.4).

Mit einigen weiteren Definitionen ist es auch möglich zwei oder noch mehr Flächen ein Normalenvektorfeld zuzuordnen und die Flächen aufgrund des mappings  $\hat{\mathcal{F}}$  bezüglich der Normalenvektorfelder zu optimieren (siehe Abschnitt 5.6.5).

### 5.6.1 Optimierung des optischen Systems zur Generierung des optimalen mappings

Wenn mehrere optische Flächen  $\Sigma_1$  bis  $\Sigma_n$  mit Freiheitsgraden  $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$  gleichzeitig zueinander bestimmt werden müssen, um das mapping  $\hat{\mathcal{F}}$  zu generieren, dann können diese Freiheitsgrade optimiert werden. Wir nutzen für die Optimierung ein Gradientenverfahren und bezeichnen mit  $\hat{\mathcal{F}}_{\vec{c}} : \Omega_{\hat{\chi}} \rightarrow \Omega_{\Psi}$  das generierte mapping im Fernfeld des optischen Systems zu den Freiheitsgraden  $\vec{c}$ . Als Fehlerfunktion definieren wir den mittleren quadratischen Abstand

$$\varepsilon(\vec{c}) := \sum_{i=1}^m \|\mathcal{F}_{\vec{c}}(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}^i) - \mathcal{F}(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}^i)\|^2 = 2m - \sum_{i=1}^m \langle \mathcal{F}_{\vec{c}}(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}^i), \mathcal{F}(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}^i) \rangle. \quad (5.6.2)$$

Falls der Strahlengang durch das optische System analytisch berechnet werden kann, kann der Gradient dieser Kostenfunktion durch automatisches Differenzieren im Rückwärtsmodus bestimmt werden, wobei die Berechnungszeit des Gradienten unabhängig ist von der Anzahl an Freiheitsgraden (siehe Abschnitt 5.3). Die Abbildung 5.12 bestätigt die Effizienz des automatischen Differenzierens für diese Anwendung im Gegensatz zu Differenzenquotienten. Die Kostenfunktion wird für eine Freiformfläche mit Polarradius definiert. Der Polarradius wird durch kubische B-Splines mit unterschiedlich vielen Stützstellen beschrieben und die Zeit für die Berechnung des Gradienten gemessen. Der Berechnungsaufwand des Automatischen Differenzierens geht relativ zu der Berechnungszeit der Kostenfunktion mit Verfeine-

## 5 Lösungskonzept und numerische Umsetzung

nung der Spline-Koeffizienten leicht zurück, wogegen die Berechnungszeit der Differenzenquotienten linear zunimmt.

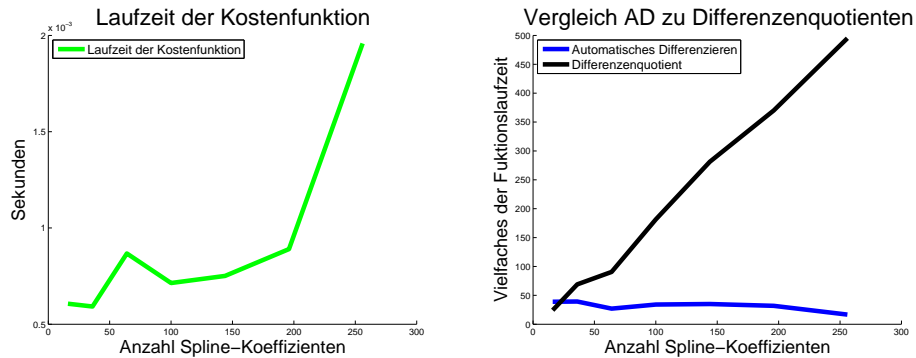


Abb. 5.12: Laufzeitanalyse der Gradientenberechnung in Abhängigkeit von der Anzahl an Freiheitsgraden für die Kostenfunktion 5.6.2 zur Generierung eines vorgegebenen mappings. Es werden verschieden feine Gitter von Spline-Koeffizienten verwendet, um die Abhängigkeit von der Anzahl an Freiheitsgraden darzustellen. Links wird die Dauer der Kostenfunktion aufgetragen und rechts, wie viel Zeit das automatische Differenzieren, bzw. die Berechnung durch Differenzenquotienten relativ zur Gesamtzeit der Funktion benötigt.

Ein gradientenbasiertes Optimierungsverfahren konvergiert nur gegen lokale Minima. Wird die Fläche durch sehr viele Spline-Koeffizienten beschrieben, so ist die Wahrscheinlichkeit erhöht, dass mehr lokale Minima existieren und der Optimierer nicht zur globalen Lösung konvergiert. Deshalb verwenden wir den Ansatz, die Fläche während des Optimierungsprozesses iterativ zu verfeinern. Auf diese Weise sucht der Optimierer zuerst auf wenigen Parametern nach der Lösung und nimmt die grobe Charakteristik der Lichtverteilung an. Wenn eine Konvergenz festgestellt wird, werden weitere Knotenpunkte eingefügt, wie im Abschnitt 5.2.4 beschrieben wird. Die Notwendigkeit und auch Gültigkeit dieses Ansatzes wird in der Abbildung 5.13 dargelegt. Wird die Fläche iterativ mit einer Spline-Koeffizientenanzahl von  $[4^2, 6^2, 8^2, 10^2, 12^2]$  verfeinert, so ist die Konvergenz wesentlich besser als das Gradientenverfahren, das direkt auf  $12^2$  Koeffizienten angewandt wird.

Die Zwischenstände des Optimierungsprozesses werden in Abbildung 5.14 analysiert, indem die erzeugte Lichtverteilung mit ausgedehnter Lichtquelle dargestellt wird. Es ist zu erkennen, dass die erzeugte Lichtverteilung auch mit ausgedehnter Lichtquelle in die richtige Richtung entwickelt wird, diese aber nicht erreicht.



## 5.6 Bestimmung eines optischen Systems durch ein optimales mapping

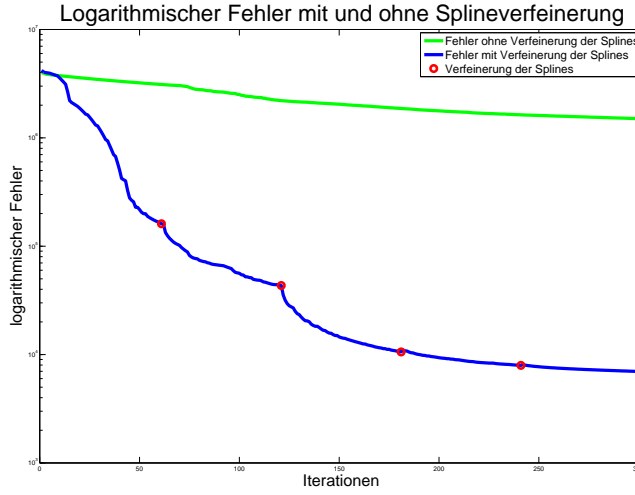


Abb. 5.13: Die Optimierung der optischen Fläche zur Generierung des optimalen mappings kann mit und ohne iterative Verfeinerung der Spline-Koeffizienten durchgeführt werden. Die iterative Verfeinerung weist ein wesentlich besseres Konvergenzverhalten auf, als die Optimierung ohne Verfeinerung, die direkt auf der feinsten Diskretisierung angewandt wird.

### 5.6.2 Berechnung einer optischen Flächen durch Lösen eines Systems partieller Differentialgleichungen

Wir gehen in diesem Fall davon aus, dass das optische System nur eine zu bestimmende optische Fläche  $\Sigma$  enthält. Nach Lemma 3.2 existiert eine Schar von optischen Flächen, die dieses Normalenvektorfeld beschreiben. Sei  $\Sigma : \Pi_\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Fläche aus dieser Schar, so zeigt das Normalenvektorfeld  $\vec{N}_\Sigma$  in die Richtung

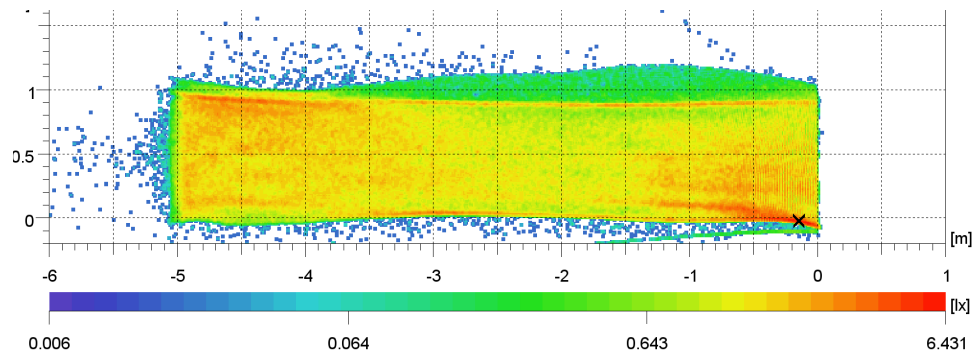
$$N_{\hat{\mathcal{F}}} = \partial_{\pi_\Sigma^1} \Sigma \times \partial_{\pi_\Sigma^2} \Sigma. \quad (5.6.3)$$

Zusammenführen der Gleichungen (5.6.1) und (5.6.3) führt mit der regulären Parametrisierung  $\vec{\omega}_{\hat{\chi}} : \Pi_\Sigma \rightarrow \Omega_{\hat{\chi}}$  zu den drei Forderungen

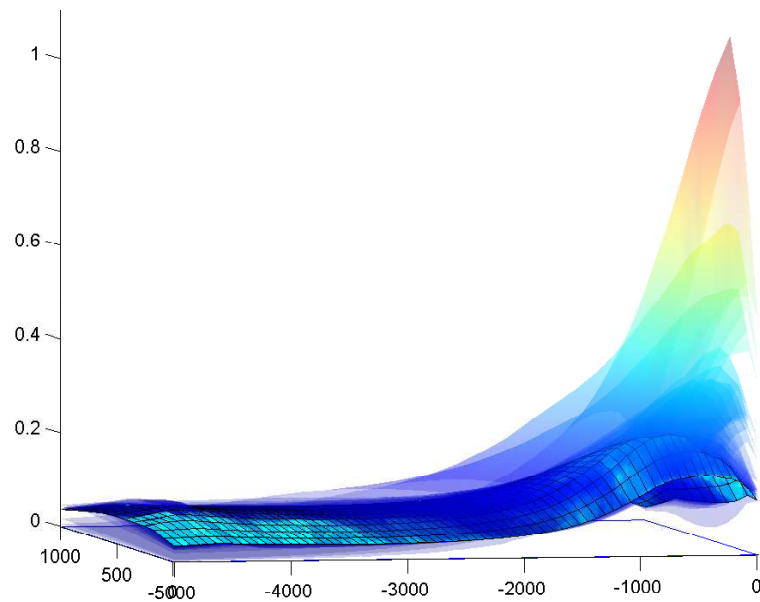
$$\partial_{\pi_\Sigma^1} \Sigma \times \partial_{\pi_\Sigma^2} \Sigma - \hat{\mathcal{F}}(\Pi_\Sigma) + \frac{n_{\hat{\chi}}}{n_\Psi} \vec{\omega}_{\hat{\chi}}(\Pi_\Sigma) \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.6.4)$$

für die gesuchte dreidimensionale Funktion  $\Sigma$ . Modelliert man die Fläche über einen Polarradius  $\rho$  (siehe Abschnitt 5.2.1), so kann das Kreuzprodukt (5.6.3) umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} \partial_{\pi_\Sigma^1} \Sigma \times \partial_{\pi_\Sigma^2} \Sigma &= (\partial_{\pi_\Sigma^1} \rho \vec{\omega}_{\hat{\chi}} + \rho \partial_{\pi_\Sigma^1} \vec{\omega}_{\hat{\chi}}) \times (\partial_{\pi_\Sigma^2} \rho \vec{\omega}_{\hat{\chi}} + \rho \partial_{\pi_\Sigma^2} \vec{\omega}_{\hat{\chi}}) \\ &= \rho \partial_{\pi_\Sigma^1} \rho (\vec{\omega}_{\hat{\chi}} \times \partial_{\pi_\Sigma^2} \vec{\omega}_{\hat{\chi}}) + \rho \partial_{\pi_\Sigma^2} \rho (\vec{\omega}_{\hat{\chi}} \times \partial_{\pi_\Sigma^1} \vec{\omega}_{\hat{\chi}}) + \rho^2 (\partial_{\pi_\Sigma^1} \vec{\omega}_{\hat{\chi}} \times \partial_{\pi_\Sigma^2} \vec{\omega}_{\hat{\chi}}). \end{aligned}$$



(a)



(b)

Abb. 5.14: Eine Untersuchung der generierten Lichtverteilungen der optimierten Optik. (a) Das Simulationsergebnis der optimierten Fläche mit der approximierten Punktlichtquelle. Das Ergebnis weist die geforderte Charakteristik auf. (b) Die Veränderung der generierten Beleuchtungsstärkeverteilung mit ausgedehnter Lichtquelle während der Optimierung. Die Charakteristik nähert sich der gewünschten konstanten Lichtverteilung an, erreicht diese allerdings nicht. Es bleibt eine Überhöhung im Zentralbereich erhalten.

Einfügen dieses Ergebnisses in das Gleichungssystem ergibt ein System aus drei partiellen Differentialgleichungen. Um die Lösung eindeutig zu bestimmen muss ein beliebiger Anfangswert des Polarradius und der Ableitungen vorgegeben werden.

### 5.6.3 Berechnung einer optischen Fläche als Anfangswertproblem

Die zu berechnende Freiformfläche wird über den skalaren Polarradius  $\rho : \Pi_\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$  beschrieben durch die Gleichung  $\Sigma(\pi_\Sigma) = \hat{\chi} + \rho(\pi_\Sigma)\vec{\omega}_\Sigma(\pi_\Sigma)$ . Zur Bestimmung der Fläche formulieren wir ein Anfangswertproblem des Polarradius  $\rho$ .

Wir bezeichnen mit  $t : [0, 1] \rightarrow \Pi_\Sigma$  einen Pfad in der Parameterebene  $\Pi_\Sigma$  und mit  $\rho_t := \rho \circ t$  den Polarradius auf diesem Pfad. Das rotationsfreie Normalenvektorfeld  $\vec{N}_\mathcal{F} : \Pi_\Sigma \rightarrow S^2$  steht senkrecht auf der Fläche  $\Sigma$ . Aufgrund der Definition von  $\Sigma$  gilt auf dem ganzen Pfad  $t$  die Orthogonalitätsbeziehung

$$\dot{\rho}_t(r)\vec{\omega}_\Sigma(t(r)) + \rho_t(r)(\mathbf{D}\vec{\omega}_\Sigma(t(r)) \cdot \nabla t(r)) \perp \vec{N}_\mathcal{F}(t(r)) \quad \forall r \in [0, 1].$$

Diese Orthogonalitätsbeziehung ist in Sinne des euklidischen Skalarproduktes gleichbedeutend mit der Forderung

$$\langle \dot{\rho}_t(r)\vec{\omega}_\Sigma(t(r)) + \rho_t(r)(\mathbf{D}\vec{\omega}_\Sigma(t(r)) \cdot \nabla t(r)), \vec{N}_\mathcal{F}(t(r)) \rangle \stackrel{!}{=} 0.$$

Auflösen dieser Gleichung nach  $\dot{\rho}_t$  liefert die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\rho}_t = -\rho_t(r) \frac{\langle \mathbf{D}\vec{\omega}_\Sigma(t(r)) \cdot \nabla t(r), \vec{N}_\mathcal{F}(t(r)) \rangle}{\langle \vec{\omega}_\Sigma(t(r)), \vec{N}_\mathcal{F}(t(r)) \rangle}.$$

Wählt man einen Startwert  $\rho(\hat{\pi}_\Sigma) \in \mathbb{R}^+$ , so kann für alle Pfade  $t : [0, 1] \rightarrow \Pi_\Sigma$  mit  $t(0) = \hat{\pi}_\Sigma$  der Polarradius entlang dieses Pfades durch Lösen des Anfangswertproblems berechnet werden. Es ist noch zu klären, ob dieses Verfahren für alle Pfade mit dem gleichen Endpunkt  $t(1)$  dasselbe Ergebnis liefert. Aufgrund des rotationsfreien Normalenvektorfeldes  $\vec{N}_\mathcal{F}$  existiert nach Lemma 3.1 eine eindimensionale Schar von Flächen, die dieses Normalenvektorfeld annehmen. Mit Festlegung eines Startwertes  $\Sigma(\hat{\pi}_\Sigma)$  wählen wir aus dieser Schar eine optischen Fläche aus. Da das Anfangswertproblem entlang dieser Fläche integriert folgt die Pfadunabhängigkeit.

Das Normalenvektorfeld wird durch das mapping aus Abschnitt 5.5 auf einer Diskretisierung des Parametergebietes  $\Pi_\Sigma$  berechnet. Für die Lösung des Anfangswertproblems bietet sich deshalb kein Mehrschrittverfahren an, sondern das explizite Euler-Verfahren, da die Differentialgleichung nur auf der Diskretisierung bestimmt werden kann. Um die diskreten Flä-

chenpunkte zu bestimmen, kann das Anfangswertproblem einmal in einer vertikalen Richtung im Parametergebiet gelöst werden und anschließend für jeden Punkt auf dieser Lösung in horizontaler Richtung, wie in Abbildung 5.15 dargestellt ist.

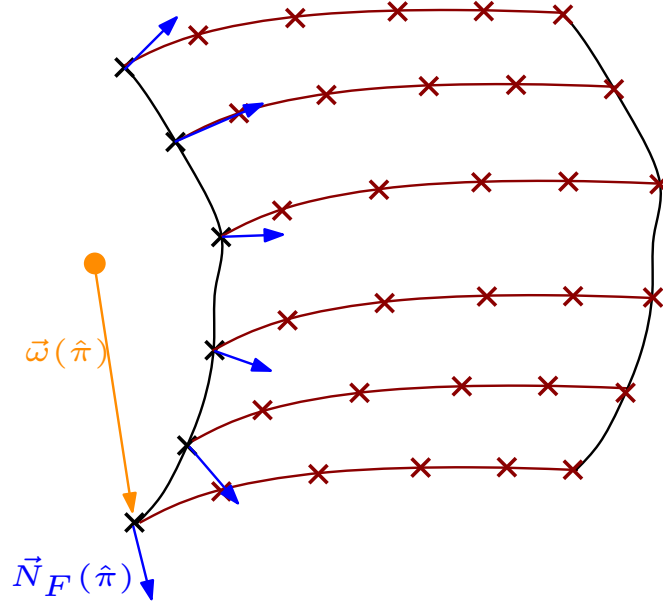


Abb. 5.15: Das explizite Euer-Verfahren des Anfangswertproblems berechnet die Flächenpunkte für die Diskretisierung der Normalenvektoren. Zuerst wird entlang der vertikalen Richtung ein Pfad integriert (schwarz) und anschließend für jeden Punkt auf diesem Pfad die horizontale Richtung (dunkelrot).

#### 5.6.4 Optimierung des Normalenvektorfeldes einer Fläche

Falls das gewünschte Normalenvektorfeld  $\vec{N}_{\hat{\mathcal{F}}}$  einer Freiformfläche bekannt ist, kann derselbe Optimierungsalgorithmus von Abschnitt 5.6.1 mit der alternativen Kostenfunktion

$$\varepsilon(\vec{c}) := \sum_{i=1}^m \|\vec{N}_{\vec{c}}(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}^i) - \vec{N}_{\hat{\mathcal{F}}}(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}^i)\|^2 = 2m - \sum_{i=1}^m \langle \vec{N}_{\vec{c}}(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}^i), \vec{N}_{\hat{\mathcal{F}}}(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}^i) \rangle \quad (5.6.5)$$

verwendet werden. Diese Modellierung hat den Vorteil, dass Effekte wie beispielsweise Totalreflektion die Optimierung nicht behindern und der Algorithmus stabiler ist. Eine praktische Umsetzung dieses Ansatzes wird in einem Unterabschnitt von 6.2 auf Seite 125 durchgeführt.

#### 5.6.5 Alternative Berechnung mehrerer optischer Flächen

An dieser Stelle soll ein alternativer Ansatz aufgezeigt werden, wie mehrere optische Flächen berechnet werden können, um ein optimales mapping  $\hat{\mathcal{F}} : \Omega_{\hat{\chi}} \rightarrow \Omega_{\Psi}$  zu generieren.

### 5.6 Bestimmung eines optischen Systems durch ein optimales mapping

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit reduzieren wir in dieser Herleitung die Problemstellung darauf, dass zwei Flächen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zu berechnen sind. Die erste Fläche soll das mapping  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}(\vec{\omega}_{\hat{\lambda}}) := \frac{\hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_{\hat{\lambda}}) + \vec{\omega}_{\hat{\lambda}}}{2}$  generieren und kann über ein beliebiges Verfahren bestimmt werden. Die zweite Fläche soll so berechnet werden, dass insgesamt das Zielmapping  $\hat{\mathcal{F}}$  erzeugt wird, d.h. die zweite Fläche generiert das mapping  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_2} : \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}(\Omega_{\hat{\lambda}}) \rightarrow \Omega_{\Psi}$  mit  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_2}(\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}(\vec{\omega}_{\hat{\lambda}})) = \hat{\mathcal{F}}(\vec{\omega}_{\hat{\lambda}})$ . Auf diese Weise wird das mapping durch beide Flächen erzeugt. Wir definieren die gesuchte Fläche  $\Sigma_2$  durch die skalare Funktion  $\lambda : \Omega_{\hat{\lambda}} \rightarrow \mathbb{R}^+$  durch

$$\Sigma_2(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}) := \Sigma_1(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}) + \lambda(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}) \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}(\vec{\omega}_{\hat{\chi}}).$$

Die Optik wird in Abbildung 5.16 dargestellt. Diese Flächendefinition ermöglicht es, mit Hil-

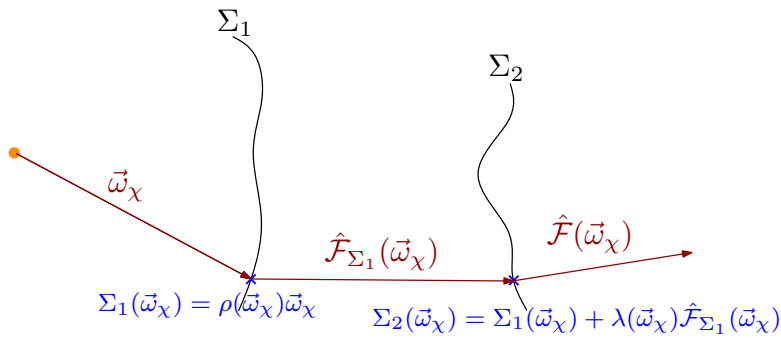


Abb. 5.16: Die beiden Flächen stellen eine Optik dar, in der das gewünschte mapping  $\hat{\mathcal{F}}: \Omega_\chi \rightarrow \Omega_\Psi$  von beiden Flächen zu gleichen Teilen generiert wird.

fe der Gleichung (5.6.1) das geforderte Normalenvektorfeld  $\vec{N}_{\Sigma_2}$  für alle  $\vec{w}_\chi$  am Punkt  $\Sigma_2(\vec{w}_\chi)$  durch das geforderte mapping  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}(\vec{w}_1) \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_2}(\vec{w}_2)$  zu berechnen.

Das Normalenvektorfeld der Fläche  $\Sigma_2$  wird durch die skalare Funktion  $\lambda$  und deren partiellen Ableitungen und der Parametrisierung  $\vec{\omega}_{\hat{\chi}} : \Pi_{\Sigma_1} \rightarrow \Omega_{\hat{\chi}}$  definiert durch

$$\begin{aligned}
N\lambda &:= \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \Sigma_2 \times \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \Sigma_2 \\
&= \left( \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \sigma_1 + \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \lambda \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} + \lambda \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \right) \times \left( \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \sigma_1 + \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \lambda \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} + \lambda \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \right) \\
&= \underbrace{\left( \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \sigma_1 \times \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \sigma_1 \right)}_{=N_{\Sigma_1}} + \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \lambda \left( \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \sigma_1 \times \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \right) + \lambda \left( \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \sigma_1 \times \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \right) \\
&\quad + \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \lambda \left( \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \times \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \sigma_1 \right) + \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \lambda \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \lambda \underbrace{\left( \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \times \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \right)}_{=\vec{0}} + \lambda \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \lambda \left( \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \times \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \right) \\
&\quad + \lambda \left( \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \times \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \sigma_1 \right) + \lambda \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \lambda \underbrace{\left( \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \times \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \right)}_{=\vec{0}} + \lambda^2 \left( \partial_{\pi_{\Sigma_1}^1} \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \times \partial_{\pi_{\Sigma_1}^2} \hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1} \right).
\end{aligned}$$

## 5 Lösungskonzept und numerische Umsetzung

Setzt man den normierten Vektoren  $\vec{N}_\lambda := \frac{N_\lambda}{\|N_\lambda\|}$  mit  $\vec{N}_{\Sigma_2}$  gleich, so erhält man ein System aus drei partiellen Differentialgleichungen für die Funktion  $\lambda$  und die partiellen Ableitungen. Durch diese Gleichungen kann die zweite optische Fläche berechnet werden, falls das mapping  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}$  differenziert werden kann.

Alternativ zur Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen kann auch eine Flächenoptimierung durchgeführt werden mit dem Ziel, dass das Normalenvektorfeld mit dem geforderten übereinstimmt.

Eine praktische Umsetzung dieses Ansatzes wird in einem Unterabschnitt von Absatz 6.2 auf Seite 126 durchgeführt.

### 5.7 Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle

Die Beleuchtungsstärke kann durch die Gleichung (4.5.3) analytisch berechnet werden. Wir geben die Gleichung noch einmal an für alle  $y \in \Psi$ :

$$B_{\vec{c}}(y) = \frac{n_\Psi^2}{n_\chi^2} \iint_{\Pi_{\Sigma_n}} L_\chi(\hat{\mathcal{R}}(y, \pi)) (1 - \hat{\mathcal{G}}(y, \pi)) \langle \vec{N}_\Psi(y), \vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi) \rangle \sqrt{\mathfrak{F}(\vec{\omega}_{\Sigma_n}(y, \pi))} d\pi.$$

Die numerische Integration dieser Gleichung wird durch den Mehrlevel-Ansatz der Gauss-Quadratur aus Abschnitt 5.4 durchgeführt. Dazu wird das Gebiet  $\Pi_{\Sigma_n}$  analog zur Abbildung 5.3 diskretisiert in ein grobes Gitter  $\Pi_{\Sigma_n}^H$  und ein feineres Gitter  $\Pi_{\Sigma_n}^h$  mit  $\Pi_{\Sigma_n}^H \subset \Pi_{\Sigma_n}^h$ . Das feine Gitter  $\Pi_{\Sigma_n}^h$  definiert die Zellen, in denen die Gauss-Quadratur durchgeführt wird. Zu Beginn der Integration wird das Backward-Raytrace  $\mathcal{R}$  auf das grobe Gitter  $\Pi_{\Sigma_n}^H$  angewandt und die Gauss-Integration in allen Zellen des feinen Gitters durchgeführt, die innerhalb des detektierten Gebietes mit  $\{\mathcal{R}(\pi) \in \chi \mid \pi \in \Pi_{\Sigma_n}^H\}$  liegen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, aus dieser Modellierung ein Optimierungsverfahren der Freiheitsgrade  $\vec{c}$  des optischen Systems herzuleiten, damit sich die generierte Beleuchtungsstärke  $B_{\vec{c}}$  ausreichend an die geforderte Beleuchtungsstärke  $B_\Psi$  angleicht. Wir verwenden aufgrund der analytischen Definition der generierten Beleuchtungsstärke ein gradientenbasiertes Verfahren, wie etwa das *BFGS*-Verfahren mit Hilfe der Techniken des automatischen Differenzierens.

**Definition der Fehlerfunktion der Optimierung** Eine Fehlerfunktion im Sinne der kleinsten Quadrate wird definiert durch

$$\varepsilon_1(\vec{c}) = \int_{\Psi} (B_{\vec{c}}(y) - B_\Psi(y))^2 dy. \quad (5.7.1)$$

## 5.7 Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle

Die Fehlerfunktion  $\varepsilon_1$  belohnt ein lokales Angleichen der generierten Beleuchtungsstärke an die geforderte Verteilung. Die Abbildung 5.17 zeigt die generierte Beleuchtungsstärkeverteilung am Anfang und am Ende einer Optimierung mit dieser Fehlerfunktion. Das lokale Ausgleichen führt dazu, dass der Lichtstrom von den Regionen mit hohen Intensitäten nicht in die anderen Regionen übertragen wird, so dass Lichtstrom verloren geht und die gewünschte Beleuchtungsstärkeverteilung nicht generiert werden kann. Aus diesem Grund wird eine

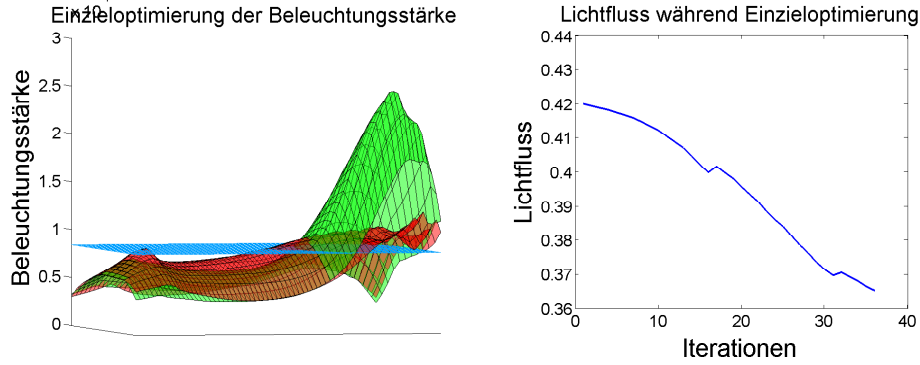


Abb. 5.17: Die Optimierung eines optischen Systems mit der Einzeloptimierung zur Fehlerfunktion (5.7.1) bewirkt in diesem Beispiel, dass in den Regionen mit zu hohen Intensitäten diese abgebaut werden, der Lichtstrom jedoch nicht in die anderen Regionen transportiert wird, so dass Lichtstrom verloren geht. Links ist die Veränderung der Beleuchtungsstärkeverteilung vom Anfang zum Ende der Optimierung dargestellt und rechts die Veränderung des Lichtflusses.

weitere Fehlerfunktion

$$\varepsilon_2(\vec{c}) = \left( \int_{\Psi} B_{\vec{c}}(y) dy - \int_{\Psi} B_{\Psi}(y) dy \right)^2 \quad (5.7.2)$$

definiert, die die globale Eigenschaft der Lichtstromerhaltung bewertet. Wir berechnen die Lichtströme mittels der Simpson-Regel. Die Gesamtfehlerfunktion der Optimierung setzt sich durch eine Gewichtung

$$\varepsilon(\vec{c}) = \alpha_1 \varepsilon_1(\vec{c}) + \alpha_2 \varepsilon_2(\vec{c}) \quad (5.7.3)$$

der beiden Fehlerfunktionen zusammen mit  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  und  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . In Abbildung 5.18 wird das Ergebnis mit Mehrzieloptimierung dargestellt. Der Lichtstrom bleibt erhalten und die Intensitäten werden gleichmäßiger ausgeglichen, allerdings wird die Optimierung verlangsamt und mehr Iterationen sind notwendig. Die Notwendigkeit dieser Mehrzieloptimierung ist von Anwendungsfall zu Anwendungsfall unterschiedlich.

**Berechnung des Gradienten** Für die Berechnung des Gradienten  $\nabla \varepsilon(\vec{c})$  eignet sich aus zwei Gründen das automatische Differenzieren. Zum einen ist ein analytisches Differenzieren der

Formeln aufgrund der hohen Komplexität praktisch nicht möglich, das automatische Differenzieren liefert jedoch den analytischen Gradienten. Zum anderen hängt die Berechnungszeit des Gradienten durch Differenzenquotienten linear von der Anzahl an Freiheitsgraden ab. Die Berechnung des Gradienten mit Hilfe des automatischen Differenzierens im Rückwärtsmodus ist jedoch hiervon unabhängig. Dieses Verhalten wird in der Grafik 5.19 mit Hilfe des automatischen Differenzierers ADIMAT in Matlab für die Fehlerfunktion  $\varepsilon$  untersucht. Bei optimaler Einstellung dauert die Berechnung des Gradienten im Rückwärtsmodus ca. zwölfmal so lange, wie die Auswertung der Funktion selber. Damit wird eine 'beliebig' feine Beschreibung der Fläche durch B-Splines ermöglicht.

**Iterative Verfeinerung der Spline-Koeffizienten** Analog zu der Optimierung optischer Systeme zur Generierung eines rotationsfreien mappings in Abschnitt 5.6.1 verfeinern wir die Fläche während des Optimierungsprozesses iterativ. Auf diese Weise sucht der Optimierer zuerst auf wenigen Parametern nach der Lösung und nimmt die grobe Charakteristik der Lichtverteilung an. Wenn eine Konvergenz festgestellt wird, werden weitere Knotenpunkte eingefügt (vgl. Abschnitt 5.2.4). Wir verifizieren das iterative Verfeinern im Optimierungsprozess anhand des Fehlerverhaltens in demselben Beispiel in Abbildung 5.18 für die Mehrzieloptimierung mit und ohne iterativer Verfeinerung. Das Ergebnis wird in der Abbildung 5.20 dargestellt. Man kann die prinzipielle Notwendigkeit dieses Ansatzes für dieses Optimierungsproblem an diesem Beispiel nicht nachweisen, wobei der Gesamtfehler mit iterativer Spline-Verfeinerung etwas stärker reduziert wird. Dennoch ist es sinnvoll die Spline-Fläche während der Optimierung verfeinern zu können, da zusätzliche Freiheitsgrade in der Optimierung die Herausbildung von Strukturen in der Zielbeleuchtungsstärkeverteilung ermöglichen. Die Verwendung einer gradientenbasierten Optimierung stellt Bedingungen an die Leuchtdichteverteilung  $L: \chi \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ , die nun hergeleitet wird.



## 5.7 Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle

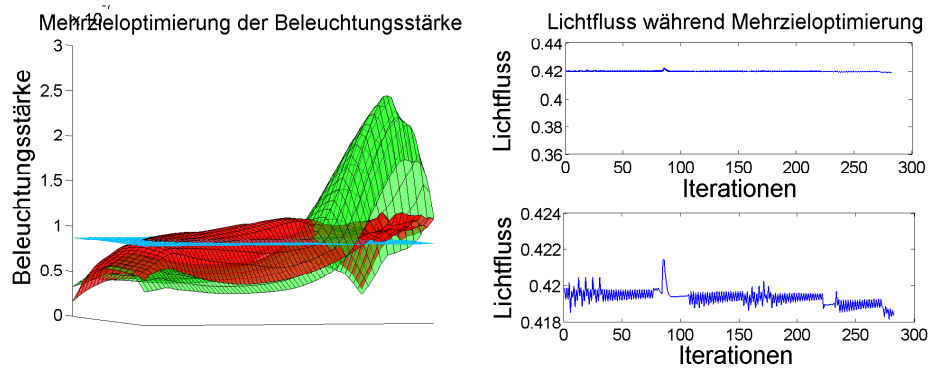


Abb. 5.18: Die Optimierung eines optischen Systems mit der Mehrzieloptimierung zur Fehlerfunktion (5.7.3) bewirkt in diesem Beispiel, dass der Lichtstrom aus den Regionen mit zu hohen Intensitäten in die Region mit zu niedrigen Intensitäten transportiert wird und so der Lichtstrom erhalten bleibt. Links ist die Veränderung der Beleuchtungsstärkeverteilung vom Anfang zum Ende der Optimierung dargestellt und rechts die Veränderung des Lichtflusses. Im oberen Bild sieht man, dass der Lichtfluss während der Optimierung annähernd konstant bleibt. In der unteren Grafik sieht man den oszillierenden Charakter des Lichtflusses. Das weist daraufhin, dass die Gradienten der beiden Fehlerfunktionen nicht in die gleiche Richtung zeigen.

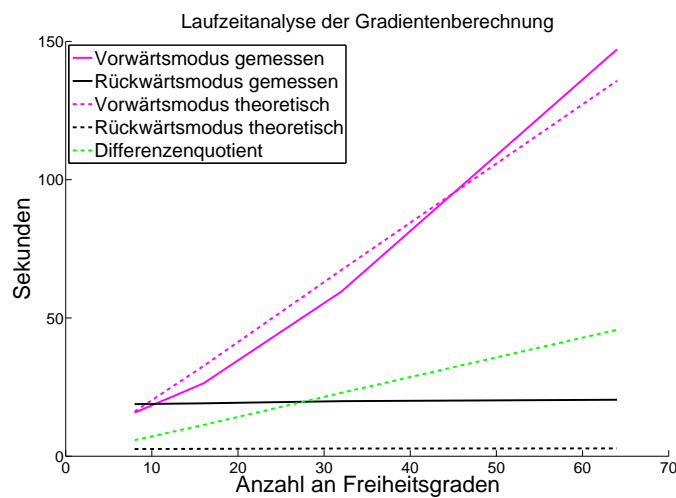


Abb. 5.19: Laufzeitanalyse der Berechnung des Gradienten in Abhängigkeit von der Anzahl an Freiheitsgraden. Es werden Vorwärts- und Rückwärtsmodus in Theorie (gestrichelt) und Praxis (durchgezogen) miteinander. Die theoretische Laufzeit für die Bestimmung des Gradienten mittels Differenzenquotienten wird ebenfalls aufgetragen.

## 5 Lösungskonzept und numerische Umsetzung

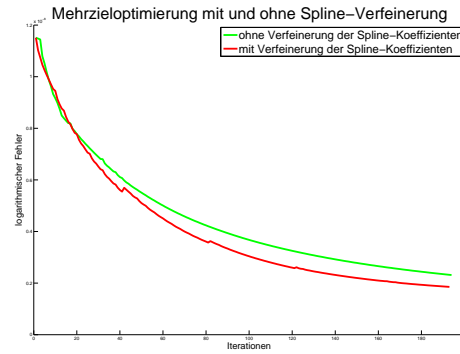


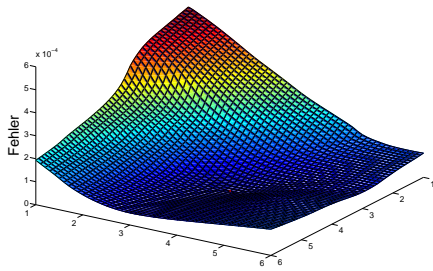
Abb. 5.20: Das Fehlerverhalten mit und ohne iterativer Spline-Verfeinerung während des Optimierungsprozesses wird dargestellt. Die Anzahl an Koeffizienten wird in dem einen Fall von  $5^2$  sukzessive auf  $9^2$  angehoben (roter Graph). Im anderen Fall werden direkt  $9^2$ -viele Koeffizienten optimiert (grüner Graph). Die prinzipielle Notwendigkeit der Spline-Verfeinerung kann an dieser Stelle nicht nachgewiesen werden, da das Konvergenzverhalten in beiden Ansätzen etwa identisch ist.

**Bedingungen an die Leuchtdichteverteilung der Lichtquelle aufgrund des gradientenbasierte Optimierungsverfahrens** Bei ersten Optimierungsversuchen wurde eine rechteckige <sup>1</sup>lambertsche Lichtquellen verwendet, das heißt, dass alle Punkte auf  $\chi$  mit konstanter Leuchtdichte leuchten und alle Punkte außerhalb der Fläche nicht leuchten. Das Verfahren konvergiert in diesen Versuchen nicht. Um dieses Verhalten zu erklären reduzieren wir die Freiheitsgrade auf zwei Spline-Koeffizienten mit globaler Lösung bei (3.5;3.5). Die Fehlerfunktion zeigt in einer grob aufgelösten Umgebung der Startlösung ein glattes und differenzierbares Verhalten. Dies ist in der Abbildung 5.21 in zwei Rastern dargestellt. Der erwartete Gradient an der Stelle (3.52;3.47) müsste aufgrund des glatten globalen Verhaltens der Fehlerfunktion in der ersten Komponente einen positiven und in der zweiten Komponente einen negativen Eintrag aufweisen, jedoch sind in dem berechnete Gradient beide Komponenten positiv. Dieses Ergebnis wird dadurch bestätigt, dass sowohl das automatische Differenzieren, als auch der Differenzenquotient dasselbe Verhalten aufweisen. Zur Klärung dieser Beobachtung betrachten wir in Abbildung 5.22 das Fehlerverhalten für unterschiedlich feine Diskretisierungen ( $10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}$ ) der Spline-Koeffizienten um den Wert (3.52;3.47) herum. Es ist zu sehen, dass die Fehlerfunktion neben einer global stetigen Erscheinung lokale Unstetigkeiten aufweist. Diese Beobachtung erklärt den Effekt, dass der Gradient nicht die erwartete Charakteristik aufweist, da das lokale Verhalten der Fehlerfunktion nicht dem globalen entspricht. Diese Beobachtung wird auch dadurch gestützt, dass der Gradient der

<sup>1</sup>Eine lambertscher Lichtquelle weist eine konstante Leuchtdichte in alle Richtungen auf. Die generierte *Lichtstärkeverteilung* ist kosinusförmig.

## 5.7 Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle

Fehlerverhalten bei Variation zweier Spline-Koeffizienten



Fehlerverhalten bei Variation zweier Spline-Koeffizienten

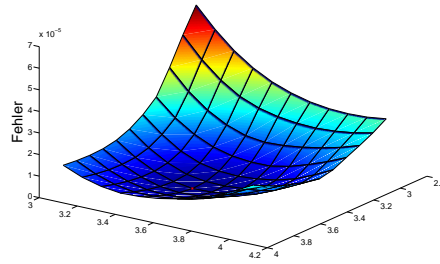
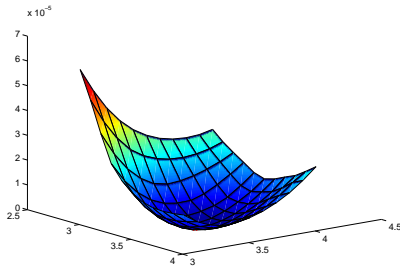
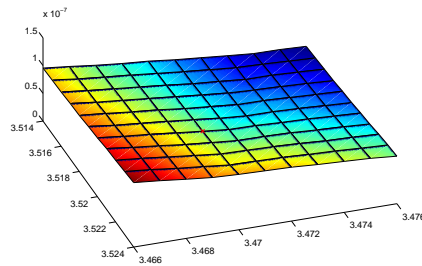


Abb. 5.21: Die Fehlerfunktion (5.7.3) in Abhängigkeit von zwei Spline-Koeffizienten in der Nähe der globalen Lösung. Die Auflösung des Gebietes ist in beiden Fällen so grob, dass die Fehlerfunktion ein glattes Erscheinungsbild hat.

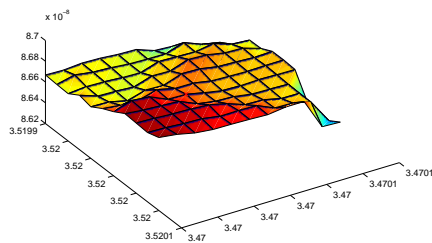
Variation der Spline-Koeffizienten um 0.1



Variation der Spline-Koeffizienten um 0.001



Variation der Spline-Koeffizienten um 1e-005



Variation der Spline-Koeffizienten um 1e-006

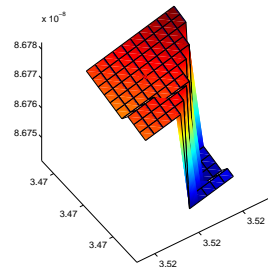


Abb. 5.22: Die Fehlerfunktion (5.7.3) in Abhängigkeit von zwei Spline-Koeffizienten in der Nähe der Startlösung für unterschiedlich feine Diskretisierungen der Spline-Koeffizienten. Die Leuchtdichte der rechteckigen Lichtquelle ist in diesem Beispiel als perfekt lambertsch modelliert mit unstetigem Abfall der Leuchtdichte am Rand der Lichtquelle. Diese Unstetigkeit kann man in dem lokalen Verhalten der Fehlerfunktion beobachten, was die gradientenbasierte Optimierung für diesen Fall erschwert.

## 5 Lösungskonzept und numerische Umsetzung

$h \left( \frac{\varepsilon(c+h) - \varepsilon(c)}{h} \right)$	Gradient
$10^{-8}$	$10^{-6} \cdot (0.7561, 0.5567)$
$10^{-7}$	$10^{-6} \cdot (0.7561, 0.5567)$
$10^{-6}$	$10^{-6} \cdot (0.7561, 0.5567)$
$10^{-5}$	$10^{-6} \cdot (0.0751, 0.3637)$
$10^{-4}$	$10^{-6} \cdot (-1.4024, 3.9258)$
$10^{-3}$	$10^{-6} \cdot (-2.4077, 4.5826)$

Tabelle 5.2: Abhängigkeit und Verhalten des FD-Gradienten von der Schrittweite  $h$ . Für größeres  $h$  weist der Gradient die erwartete Charakteristik auf, für kleines jedoch nicht. Das lässt darauf schließen, dass die Fehlerfunktion lokale Unstetigkeiten aufweist.

Fehlerfunktion für eine größere Schrittweite bei Finiten Differenzen die erwartete Charakteristik aufweist, für kleine jedoch nicht (siehe Tabelle 5.2).

Die Unstetigkeit der Lichtquellendefinition erklärt dieses Verhalten der Fehlerfunktion. Das Integral in der Formel (4.5.3) für die Beleuchtungsstärke wird numerisch auf einem Gitter in dem Parameterbereich  $\Pi_{\Sigma_n}$  bestimmt. Einige der diskreten Lichtstrahlen haben Auftreffpunkte auf der Lichtquelle  $\chi$ . Eine sehr geringe Änderung der Spline-Koeffizienten ändert die Auftreffpunkte, kann allerdings zu klein sein, damit eine Änderung in der Anzahl an diskreten Lichtstrahlen, die die Lichtquelle treffen, eintritt. In diesem Fall würde die Änderung weder durch einen Differenzenquotienten noch durch den analytischen Gradienten bemerkt werden.

Dieses Problem kann dadurch gelöst werden, die Leuchtdichtevertelung der Lichtquelle stetig, bzw. glatt, zu definieren.

Wir untersuchen zu obigem Beispiel sowohl eine Definition mit linearem Abfall, als auch einen differenzierbaren Abfall durch ein Polynom dritten Grades (siehe Abbildung 5.23). Die

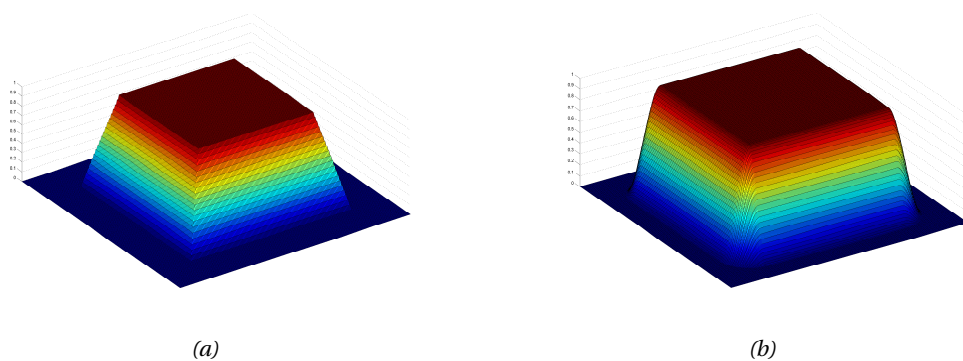


Abb. 5.23: Darstellung der Leuchtdichte der lambertschen Lichtquelle mit linearem (a), bzw. glattem (b) Abfall der Leuchtdichte am Rand der Lichtquelle.

## 5.7 Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle

Vorzeichen des Gradienten bei Verwendung dieser beiden Definitionen liefern an der Stelle (3.52;3.47) die korrekte Charakteristik der Vorzeichen. Eine Darstellung der Fehlerfunktion in verschiedenen Diskretisierungen (Abbildung 5.24) weisen keine Unstetigkeiten auf. Somit ist die Stetigkeit der Leuchtdichte der Lichtquelle entscheidend für die gradientenbasierte Optimierung.

Darüber hinaus wird der Einfluss der Differenzierbarkeit der Leuchtdichte im Konvergenzverhalten der Optimierung in Abbildung 5.25 deutlich. Es wird eine Fläche mit 16 Freiheitsgraden sowohl mit der linearen, als auch der differenzierbaren Definition der Leuchtdichte bestimmt. Die Variante mit differenzierbarer Definition ist hierbei wesentlich effizienter als die stetige Variante, so dass wir die differenzierbare Definition wählen. Darüber hinaus sieht man in dieser Abbildung den Unterschied zwischen dem Gradientenverfahren und dem BFGS-Verfahren von IPOPT.

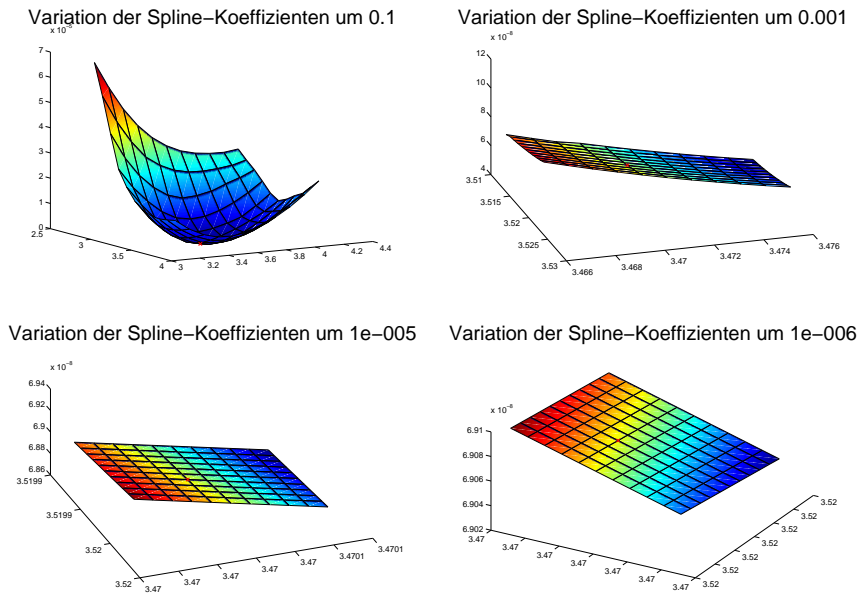


Abb. 5.24: Die Fehlerfunktion (5.7.3) in Abhängigkeit von zwei Spline-Koeffizienten in der Nähe der Startlösung für unterschiedlich feine Diskretisierungen der Spline-Koeffizienten mit Verwendung einer stetigen Leuchtdichteverteilung wie in Abbildung 5.23. Es sind keine Unstetigkeiten zu beobachten.

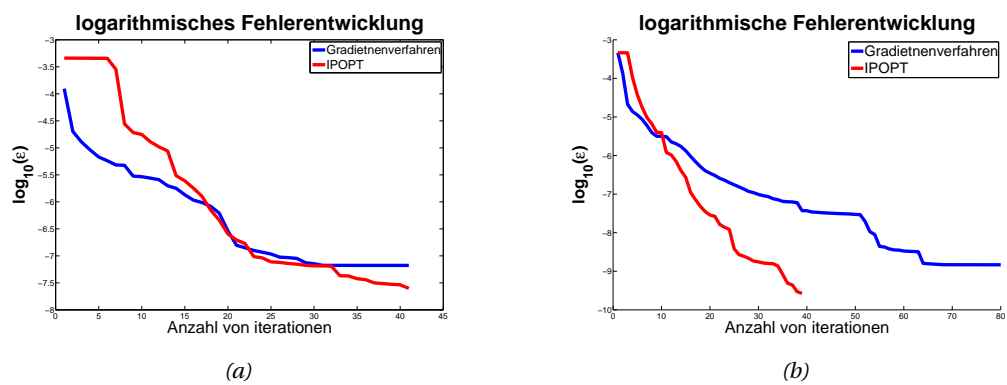


Abb. 5.25: Analyse des logarithmischen Konvergenzverhaltens der Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle und einer Freiformfläche mit 16 Freiheitsgraden für verschiedene Definitionen der Lichtquelle. In der Grafik (a) ist die Optimierung mit stetiger Leuchtdichte (linearer Randabfall) dargestellt und in Abbildung (b) mit differenzierbarer Leuchtdichte. Desweiteren wird das Gradientenverfahren (blau) mit dem BFGS-Verfahren von IPOPT (rot) verglichen. Das BFGS-Verfahren weist bessere Konvergenzeigenschaften auf bei Verwendung einer differenzierbaren Definition der Leuchtdichte auf.

## 6 Rechenbeispiele

In diesem Abschnitt werden verschiedene Anwendungsbeispiele mit den Algorithmen, die in dieser Arbeit eingeführt und hergeleitet wurden, gelöst. Darüber hinaus wenden wir die Modellierung für Punktlichtquellen aus den Abschnitten 5.5 und 5.6 auf das Problem der Laser-Umformung an.

### 6.1 Wall-Washer

Das Wall-Washer-Problem bezeichnet die Fragestellung nach einer Optik, die eine Wand homogen beleuchtet. Wir betrachten das optische System mit einer  $1 \times 1 \text{ mm}^2$  großen lambertschen Lichtquelle und einem zu beleuchtenden Rechteck auf einer Wand in  $50 \text{ cm}$  Entfernung. Die Ausdehnung des zu beleuchtenden Rechtecks ist  $10 \times 10 \text{ cm}^2$ . Das berechnete mapping durch die diskrete Lösung des Monge-Kantorovich-Algorithmus wird in Abbildung 6.1 dargestellt. Die nach Abschnitt 5.6.1 optimierte Fläche, die dieses mapping generiert wird in Abbildung 6.2 dargestellt und analysiert. Es ist zu erkennen, dass die Fläche (Abb. 6.2a) die gewünschte Lichtverteilung für eine Punktlichtquelle generiert (Abb. 6.2b), diese jedoch mit der ausgedehnten Lichtquelle stark verzerrt wird (Abb. 6.2c). Das Ergebnis der Optimierung der optischen Fläche mit der ausgedehnten Lichtquelle nach Abschnitt 5.7 wird in Abbildung 6.3 dargestellt und analysiert. Die generierte Lichtverteilung der Fläche (Abb. 6.3a) mit ausgedehnter Lichtquelle in Abbildung 6.3c entspricht der geforderten Lichtverteilung wesentlich besser als die Lichtverteilung der Startfläche in Abbildung 6.2c. Die Simulation mit einer Punktlichtquelle in Abbildung 6.3b weist einige Kaustiken, d.h. Linien mit unendlich hoher Beleuchtungsstärke, auf. Diese Analyse zeigt, dass das Optimierungsergebnis nicht mit Punktlichtquellen-Approximation berechnet werden kann, da man diesem Fall nicht an Verteilungen mit Singularitäten interessiert ist. In der Abbildung 6.4a wird die Fehlerentwicklung der Mehrzieloptimierung mit iterativer Verfeinerung der Spline-Koeffizienten dargestellt. Das Konvergenzverhalten entspricht dem erwarteten Verhalten des Gradientenverfahrens und weist auf eine erfolgreiche Optimierung hin. Diese Optimierung wurde sowohl mit Finiten Differenzen, als auch Automatischem Differenzieren durchgeführt, wobei die Fehlerentwicklung in beiden Fällen identisch war, die benötigte Zeit bei Verwendung von

## 6 Rechenbeispiele

Berechnetes mapping aus der primalen Monge-Kantorovich Lösung

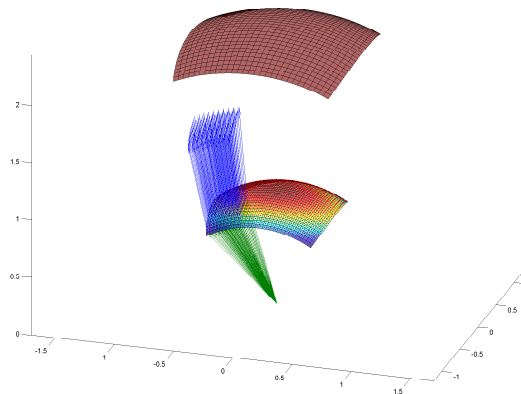


Abb. 6.1: Das resultierende mapping  $\hat{\mathcal{F}}^+$  aus der primalen Monge-Kantorovich-Lösung für das Wall-Washer-Problem. Die grünen Strahlen müssen durch das optische System auf Lichtstrahlen in Richtung der blauen Strahlen abgelenkt werden. Die beiden Raster sind die diskreten Energiedichten der Lichtquelle und der zu beleuchtenden Fläche.

Finiten Differenzen jedoch entsprechende höher. Die Abbildung 6.4b vergleicht die relative Dauer der Auswertung des Gradienten zur Auswertung der Funktion für Automatisches und Finites Differenzieren. Es ist zu erkennen, dass das automatische Differenzieren ca. die 13fache Zeit der Fehlerfunktionsauswertung unabhängig von der Anzahl an Spline-Koeffizienten benötigt. Für die gewählte Auflösung von  $10 \times 10$ , bzw.  $12 \times 12$  Spline-Koeffizienten ist die benötigte Zeit für zentrierte Finite Differenzen entsprechend höher.



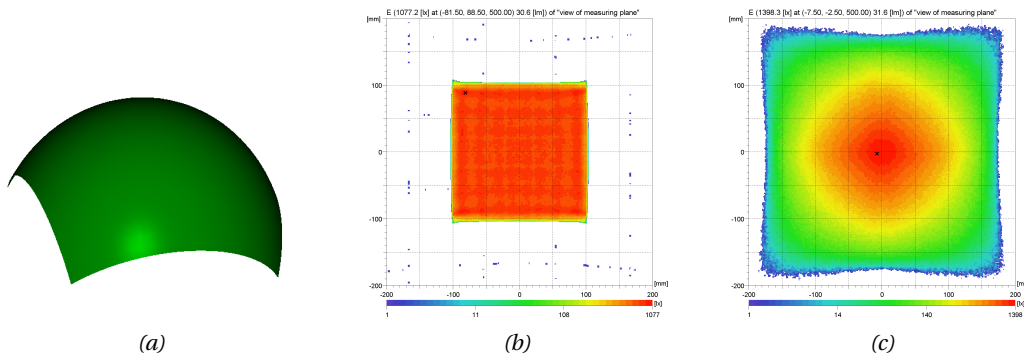


Abb. 6.2: Darstellung und Analyse der berechneten Startfläche für die Optimierung. (a) Diese Optik ist das Ergebnis der Optimierung aus Abschnitt 5.6.1 zur Generierung des berechneten optimalen mappings aus Abbildung 6.1. (b) Die generierte Lichtverteilung durch eine Punktlichtquelle. (c) Die generierte Lichtverteilung mit der ausgedehnten Lichtquelle.

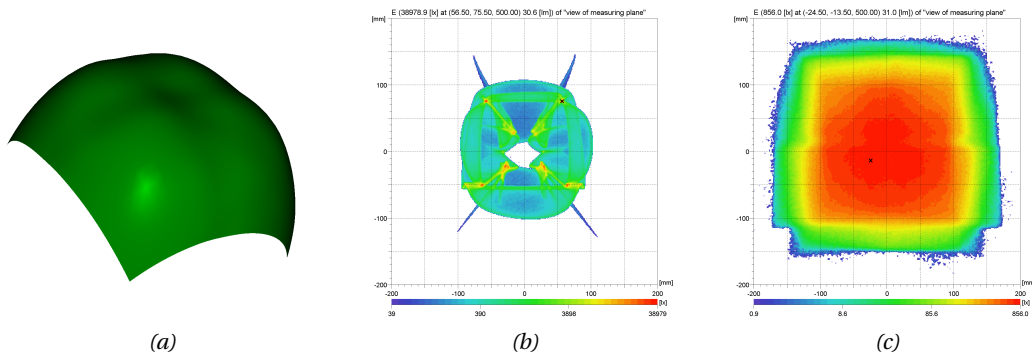


Abb. 6.3: Darstellung und Analyse der optimierten Freiformfläche mit ausgedehnter Lichtquelle. (a) Diese Optik ist das Ergebnis der Optimierung aus Abschnitt 5.7 zur Generierung einer homogenen Lichtverteilung mit ausgedehnter Lichtquelle. (b) Die generierte Lichtverteilung mit Punktlichtquelle. (c) Die generierte Lichtverteilung mit der ausgedehnten Lichtquelle.

## 6 Rechenbeispiele

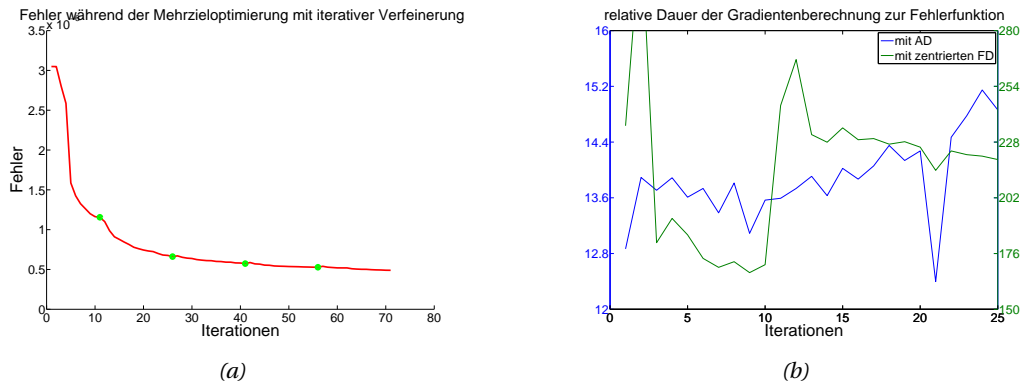


Abb. 6.4: Analyse der Fehlerentwicklung und Gradientenberechnung während der Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle nach Abschnitt 5.7. (a) Die Fehlerentwicklung während der Optimierung mit ausgedehnter Lichtquelle nach Abschnitt 5.7. Der grüne Kreis markiert den Iterationsschritt, an dem die Spline-Koeffizienten verfeinert werden. Der Verlauf des Graphen ist in diesem Fall unabhängig davon, ob automatisches Differenzieren oder Finite Differenzen verwendet werden. (b) Vergleich der Dauer der Gradientenberechnung relativ zur Dauer der Auswertung der Funktionswerte auf den ersten 25 Iterationsschritten. Es ist zu erkennen, dass die Gradientenberechnung mit automatischem Differenzieren ca. die 13fache Zeit der Fehlerfunktionsauswertung benötigt. Für die gewählte Auflösung von  $10 \times 10$ , bzw.  $12 \times 12$  Spline-Koeffizienten ist die benötigte Zeit für zentrierte Finite Differenzen entsprechend höher.

## 6.2 Umformung eines Laserstrahls

In diesem Beispiel soll gezeigt werden, dass die Ansätze für Punktlichtquellen aus Abschnitt 5.5 und 5.6 auf die Problemstellung der Umformung von Lasern angepasst werden können. Die beiden Lichtquellen verbindet, dass die Menge an Strahlen in beiden Fällen eine zweidimensionale Menge ist und somit in den Monge-Kantorovich-Formalismus übertragen werden können. Der Unterschied besteht in der Art der Abstrahlung der Lichtstrahlen von der Lichtquelle aus. Zuerst übertragen wir die Problemstellung mit Lasern in den Formalismus von Monge-Kantorovich als lineares Programm und definieren anschließend die Freiformfläche durch die Strahlengänge des Lasers.

**Formulierung des linearen Programms** Wir bezeichnen mit  $\chi \subset \mathbb{R}^3$  die Austrittsfläche des Lasers mit Abstrahlung in Richtung  $\vec{\omega}_\chi$  und Intensität  $J_\chi : \chi \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Wir betrachten die disjunkte Unterteilung  $\{\chi^i \subset \chi | i = 1, \dots, m\}$  von  $\chi$  mit Mittelpunkten  $\hat{\chi}^i \in \chi^i$ . Mit  $\hat{\chi}_\Psi^i \in \Psi$  bezeichnen wir die Abbildung der Punkte  $\hat{\chi}^i \in \chi$  in Richtung  $\vec{\omega}_\chi$  auf  $\Psi$ . Sei  $\{\Psi^j \subset \Psi | j = 1, \dots, o\}$  eine disjunkte Unterteilung der Zielfläche  $\Psi$  mit Mittelpunkten  $\psi^j \in \Psi^j$ . Die diskreten Maßzahlen werden berechnet durch

$$\mu_i^+ := \iint_{\chi^i} J_\chi(x) dx \text{ und } \mu_j^- := \iint_{\Psi^j} B_\Psi(y) dy. \quad (6.2.1)$$

Mit diesen Bezeichnungen kann das lineare Programm in Analogie zum linearen Programm 5.1 aufgestellt werden und mit den Algorithmen aus Abschnitt 5.5.1 und 5.5.2 gelöst werden. Mit dem Ergebnis wird das diskrete mapping  $\mathcal{F} : \{\hat{\chi}^i \in \chi^i | i = 1, \dots, m\} \rightarrow \Psi$  berechnet.

**Optimierung einer Linse des Typs I** Mit einer Linse des Typs I bezeichnen wir eine brechende Optik, deren Innenfläche  $\Sigma_1$  berechnet werden muss, um das gewünschte mapping  $\mathcal{F}$  zu erfüllen und deren Außenfläche  $\Sigma_2$  eine Ebene mit Normalenvektor  $\vec{N}_{\Sigma_2}$  ist. Wir beschreiben auch in diesem Fall die Innenfläche durch eine skalare Funktion  $\rho : \chi \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Flächendefinition  $\Sigma_1(x) := \chi(x) + \rho(x)\vec{\omega}_\chi$ . Für alle  $x \in \chi$  zeigt der Normalenvektor  $\vec{N}_{\Sigma_1}(x)$  am Punkt  $\Sigma_1(x)$  der inneren Fläche in die Richtung

$$\frac{\partial \vec{N}_{\Sigma_1}}{\partial x^1}(x) \times \frac{\partial \vec{N}_{\Sigma_1}}{\partial x^2}(x) = \left( \frac{\partial \chi}{\partial x^1}(x) + \frac{\partial \rho}{\partial x^1}(x)\vec{\omega}_\chi \right) \times \left( \frac{\partial \chi}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial \rho}{\partial x^2}(x)\vec{\omega}_\chi \right)$$

Mit dieser Definition kann das optische System in Analogie zum Abschnitt 5.6.1 optimiert werden.

Vernachlässigt man die Ausdehnung der Optik, so kann aus dem optimalen mapping  $\mathcal{F}$  das

## 6 Rechenbeispiele

mapping  $\hat{\mathcal{F}} : \{(\hat{\chi}_\Psi^i, \vec{\omega}_\chi) | i = 1, \dots, o\} \rightarrow \Omega_\Psi$  mit  $\Omega_\Psi := \{\frac{y}{\|y\|} | y \in \Psi\}$  berechnet werden durch

$$\hat{\mathcal{F}}(x) := \frac{\mathcal{F}(x)}{\|\mathcal{F}(x)\|}.$$

Will man nun die innere Fläche bestimmen, so muss das mapping  $\hat{\mathcal{F}}(x)$  noch zurückgerechnet werden auf Richtungsvektoren  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}(x)$  im Linzenmaterial durch die optische Brechung an der ebenen Außenfläche mit der Definition

$$\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}(x) := \text{redir}_{\Sigma_2}(-\hat{\mathcal{F}}(x), \vec{N}_{\Sigma_2}).$$

Die geforderten Normalenvektoren  $\vec{N}_{\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}}(x)$  für alle  $x \in \chi$  der inneren Fläche zeigen in Anlehnung an Gleichung (5.6.1) in die Richtung

$$-\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}(x) - \frac{n_{\Sigma_1}}{n_\chi} \vec{\omega}_\chi$$

und können auf diese Weise bestimmt werden. Die Innenfläche kann mit den Optimierungsalgorithmen der Abschnitte 5.6.1 bis 5.6.4 bestimmt werden. In der Abbildung 6.5a wird die berechnete innere Linzenfläche dargestellt, die einen homogenen Laser mit den Maßen  $[-0.6mm; 0.6mm] \times [-0.16mm; 0.16mm]$  auf ein Rechteck der senkrechten Ebene in 10mm Entfernung mit den Maßen  $[-3mm; 3mm] \times [-15mm; 15mm]$  abbildet. Die Simulation der Optik in Abbildung 6.5b zeigt sehr gute Resultate und bestätigt den Ansatz.

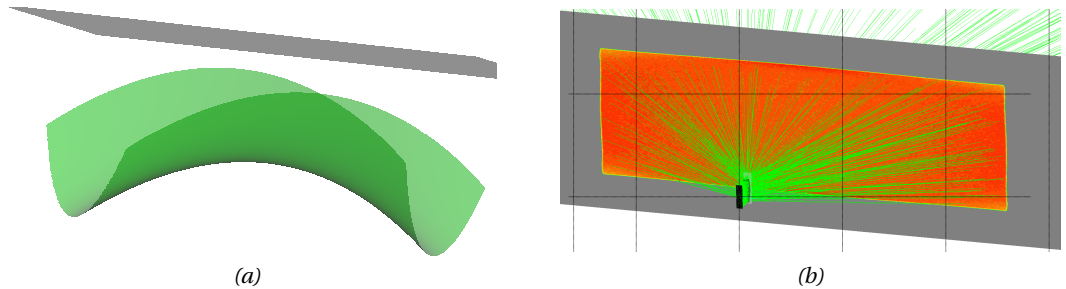


Abb. 6.5: Darstellung des Linsentyps I mit Simulationsergebnis. (a) Die berechnete Linse, die einen homogenen Laser mit den Maßen  $[-0.6mm; 0.6mm] \times [-0.16mm; 0.16mm]$  auf ein Rechteck auf der senkrechten Ebene in 10mm Entfernung mit den Maßen  $[-3mm; 3mm] \times [-15mm; 15mm]$  abbildet. (b) Die Simulation der Optik zeigt, dass die Umverteilung des Laserstrahls erfolgreich ist und die gewünschte Lichtverteilung erzeugt wird. die grünen Lichtstrahlen markieren einige Strahlengänge

**Optimierung einer Linse des Typs II** Mit einer Linse des Typs II bezeichnen wir die Umsetzung des Ansatzes aus Abschnitt 5.6.5. Die Ausdehnung der Optik wird vernachlässigt und die Linse soll das mapping  $\hat{\mathcal{F}} : \{(\hat{\chi}_{\Psi}^i, \vec{\omega}_{\chi}) | i = 1, \dots, o\} \rightarrow \Omega_{\Psi}$  aus dem vorherigen Abschnitt generieren, wobei beide optische Flächen die einzelnen Lichtstrahlen um denselben Winkel ablenken sollen. Es soll also das mapping  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}(x) := \frac{\hat{\mathcal{F}}(x) + \vec{\omega}_{\chi}}{2}$  durch die innere Fläche  $\Sigma_1$  und  $\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_2}(\hat{\mathcal{F}}_{\Sigma_1}(x)) := \hat{\mathcal{F}}(x)$  durch die äußere Fläche realisiert werden. Die Optik wird analog zu Abschnitt 5.6.5 definiert (siehe Abbildung 6.6). Die beiden berechneten Flächen zu demselben

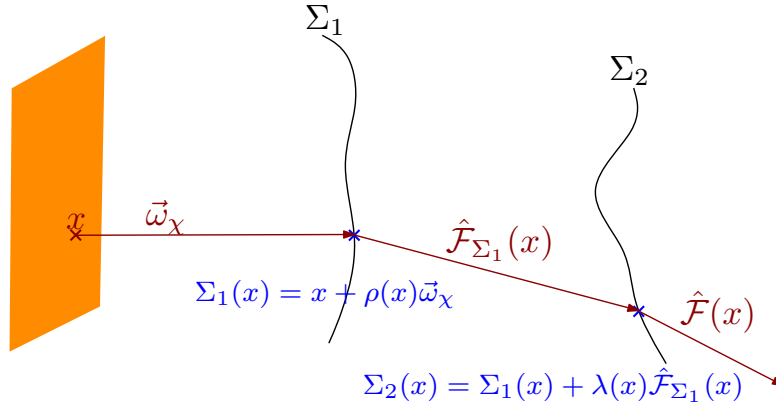


Abb. 6.6: Das berechnete optimale mapping für die Laserstrahlen wird generiert, indem das mapping durch beide optische Flächen zu gleichen Teilen generiert wird.

optischen Problem wie im vorigen Abschnitt und auch die Simulation werden in Abbildung 6.7 dargestellt.

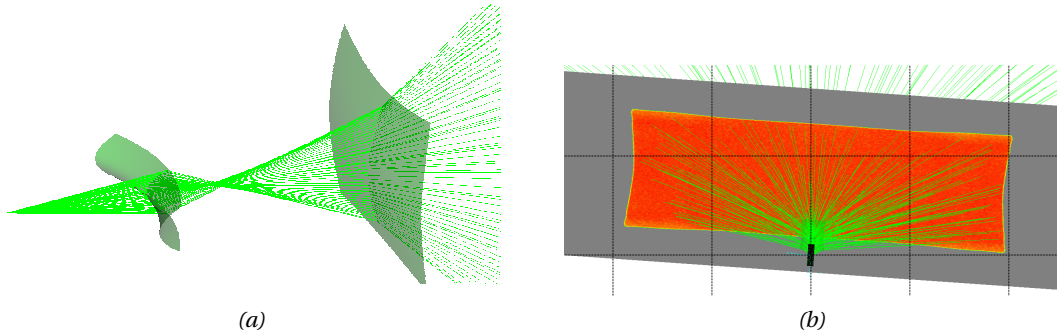


Abb. 6.7: Darstellung des Linsentyps II mit Simulationsergebnis. (a) Die berechnete Linse, die einen homogenen Laser mit den Maßen  $[-0.6\text{ mm}; 0.6\text{ mm}] \times [-0.16\text{ mm}; 0.16\text{ mm}]$  auf ein Rechteck auf der senkrechten Ebene in 10 mm Entfernung mit den Maßen  $[-3\text{ mm}; 3\text{ mm}] \times [-15\text{ mm}; 15\text{ mm}]$  abbildet. Hierbei wurden sowohl die Eintritts- als auch die Austrittsfläche zueinander berechnet, so dass beide Flächen jeden Strahlengang um denselben Winkel ablenken. (b) Die Simulation der Optik zeigt, dass die Umverteilung des Laserstrahls erfolgreich ist und die gewünschte Lichtverteilung erzeugt wird. die grünen Lichtstrahlen markieren einige Strahlengänge

**Berechnung eines Linsenarrays zur Homogenisierung der erzeugten Lichtverteilung bei Verwendung einer realen Laserdiode** In den beiden vorhergehenden Beispielen nehmen wir für die Lichtquelle einen idealen Laser mit homogenem parallelem Licht an. Reale Laserdioden hingegen sind nicht homogen und auch nicht perfekt parallel, sondern weisen beispielsweise eine elliptische Streuung wie in Abbildung 6.8a auf. Das Simulationsergebnis des Ergebnisses aus dem vorherigen Abschnitt (siehe Abbildung 6.5a) mit der Laserdiode als Lichtquelle wird in Abbildung 6.8c dargestellt. Es ist zu sehen, dass die Inhomogenität der Laserdiode auf das Zielgebiet abgebildet wird und die gewünschte Lichtverteilung nicht generiert wird. Das Simulationsergebnis in Abbildung 6.8b gibt den Vergleich zwischen der parallelen Lichtquelle und der realistischen Laserdiode wieder. Wir stellen fest, dass die Lösung für paralleles Licht nicht anwendbar ist für eine Laserdiode. Eine Möglichkeit, die In-

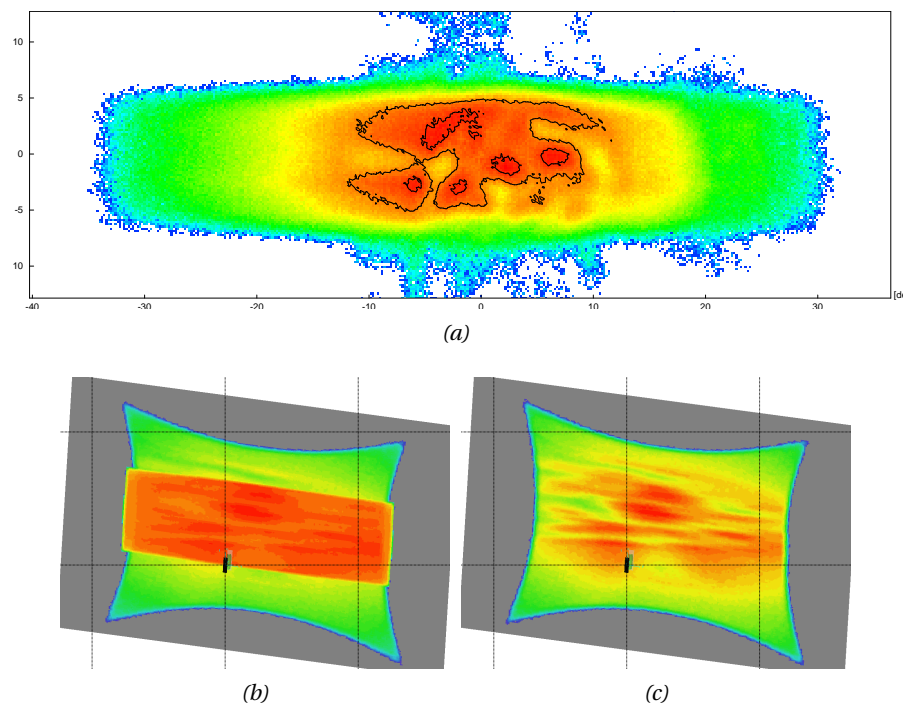


Abb. 6.8: Der Linsentyp I aus Abbildung 6.5a wird mit einer realistischen Laserdiode simuliert. (a) Die Lichtverteilung der Laserdiode. Diese Lichtquelle ist keine perfekte parrallele Lichtquelle, sondern weist Divergenz und Inhomogenitäten auf. (b) Dieses Simulationsergebnis vergleicht die Simulation mit paralleler Lichtquelle und Laserdiode miteinander. Man kann deutlich erkennen, dass das beleuchtete Gebiet variiert. (c) Das Simulationsergebnis mit der Laserdiode. Die Inhomogenitäten der Laserdiode werden auf das Zielgebiet abgebildet.

homogenitäten der Laserdiode nicht scharf auf das zu beleuchtende Gebiet abzubilden ist, mehrere kleine Optiken zu berechnen, die jeweils aus einem Teil des Laserstrahls die gesamte Lichtverteilung erzeugen. Auf diese Weise überlagern sich die einzelnen Teile der Lichtvertei-

lung der Laserdiode und Inhomogenitäten gleichen sich aus. Ein Linsen-Array, das auf diese Weise berechnet wird, wird in Abbildung 6.9a dargestellt. Die einzelnen Teiloptiken sind für paralleles Licht gerechnet, das aus einem Teil des Laserstrahls die gewünschte Lichtverteilung erzeugen. Die erzeugte Lichtverteilung (siehe Abbildung 6.9b) ist näher an der gewünschten Verteilung als die Simulation mit einer einzelnen Optik (vgl. Abbildung 6.8c). Aufgrund der Streuung der Laserdiode erhalten die einzelnen Linsen im Array allerdings Licht von dem Laser mit unterschiedlichen Auftreffwinkeln. Dies hat zur Folge, dass die generierten Lichtverteilungen der einzelnen Linsen auf der Zielfläche verschoben und verzerrt werden, was bei der Überlagerung der erzeugten Lichtverteilungen zu einer stufenweisen Gesamtlichtverteilung führt. Diese Charakteristik ist in dem vertikalen Schnitt durch die Lichtverteilung in Abbildung 6.9c deutlicher sichtbar. Um dieses Problem der Verschiebung der einzelnen Lichtverteilungen zu umgehen, kann man die Richtung des parallelen Lichts für die einzelnen Linsen im Array durch einen gemittelten Richtungsvektor des Lichts, das von der Laserdiode auf die einzelne Linse abgegeben wird, anpassen. Das Ergebnis wird in Abbildung 6.10 dargestellt und kann direkt verglichen werden mit dem unkorrigierten Multilinsen-Array-Ansatz aus Abbildung 6.9. Die erzeugte Lichtverteilung ist homogen und weist keine Stufenstruktur auf. Mit Hilfe dieses Ansatzes kann die gewünschte Lichtverteilung erzeugt werden. Das Optimierungsverhalten der eingefärbten Linsen in Abbildung 6.10 wird in Abbildung 6.11 analysiert. Es ist zu sehen, dass die Optimierung für die Flächen am Rand schlechter konvergiert als im Zentralbereich. Dies kann verschiedene Ursachen haben, z.B. erlaubt die Parametrisierung nicht, die gesuchten Normalenvektorfelder zu beschreiben oder aber das geforderte Normalenvektorfeld weist eine zu große Rotation auf. Daneben sind jedoch die Verläufe im Anfang der Optimierung sehr ähnlich.

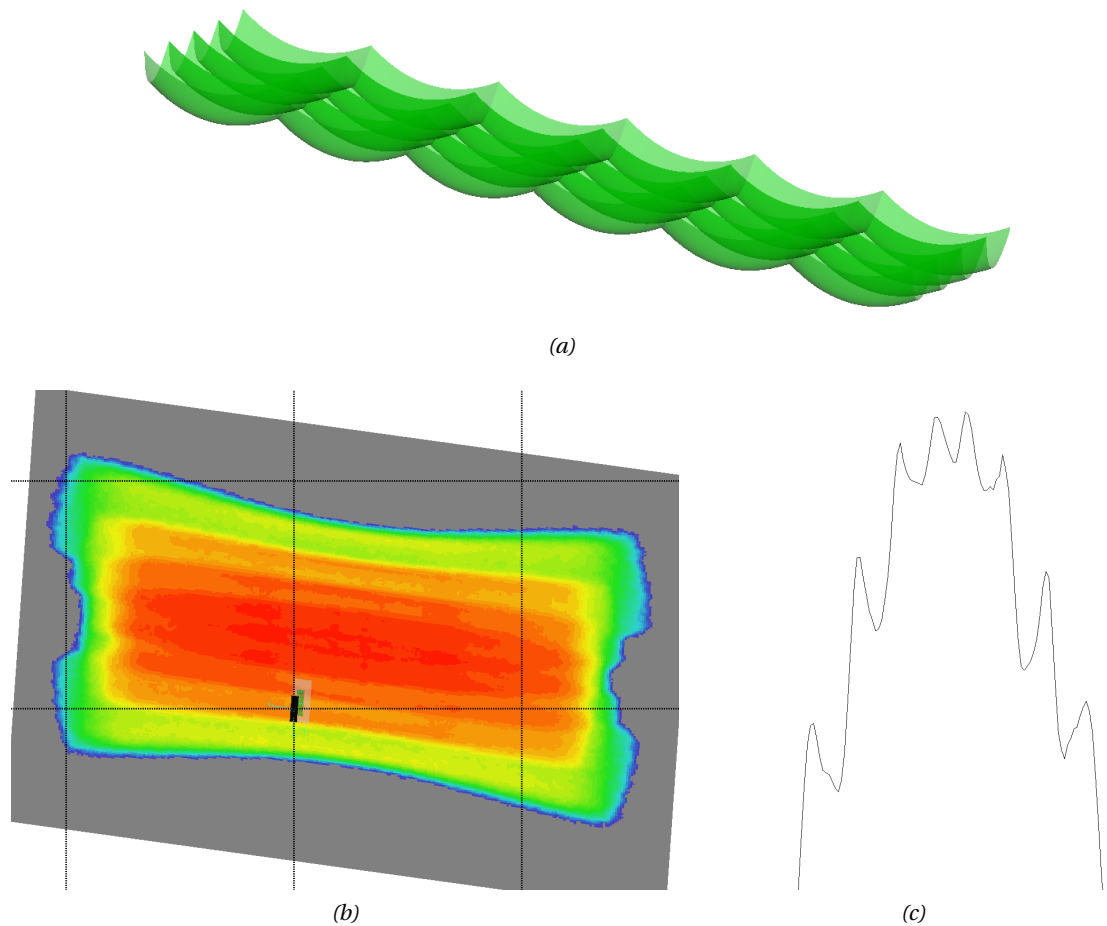


Abb. 6.9: Zur Homogenisierung des Simulationsergebnisses aus Abbildung 6.8c mit einer Laserdiode wird ein Multilinsen-Array-Ansatz verwendet. Jede Linse erzeugt die gesamte Lichtverteilung, so dass die einzelnen Bilder der Laserdiode überlagert werden und das Ergebnis auf diese Weise homogenisiert wird. (a) Das Multilinsen-Array. Jede Linse wird hierbei für paralleles Licht aus derselben Richtung gerechnet. (b) Das Simulationsergebnis zeigt eine Homogenisierung. Jedoch verschieben sich durch die Streuung der Laserdiode die einzelnen Lichtverteilungen, so dass die generierte Lichtverteilung eine Stufenstruktur aufweist. (c) Die erzeugte Stufenstruktur wird in diesem vertikalen Schnitt durch die Beleuchtungsstärkeverteilung verdeutlicht.



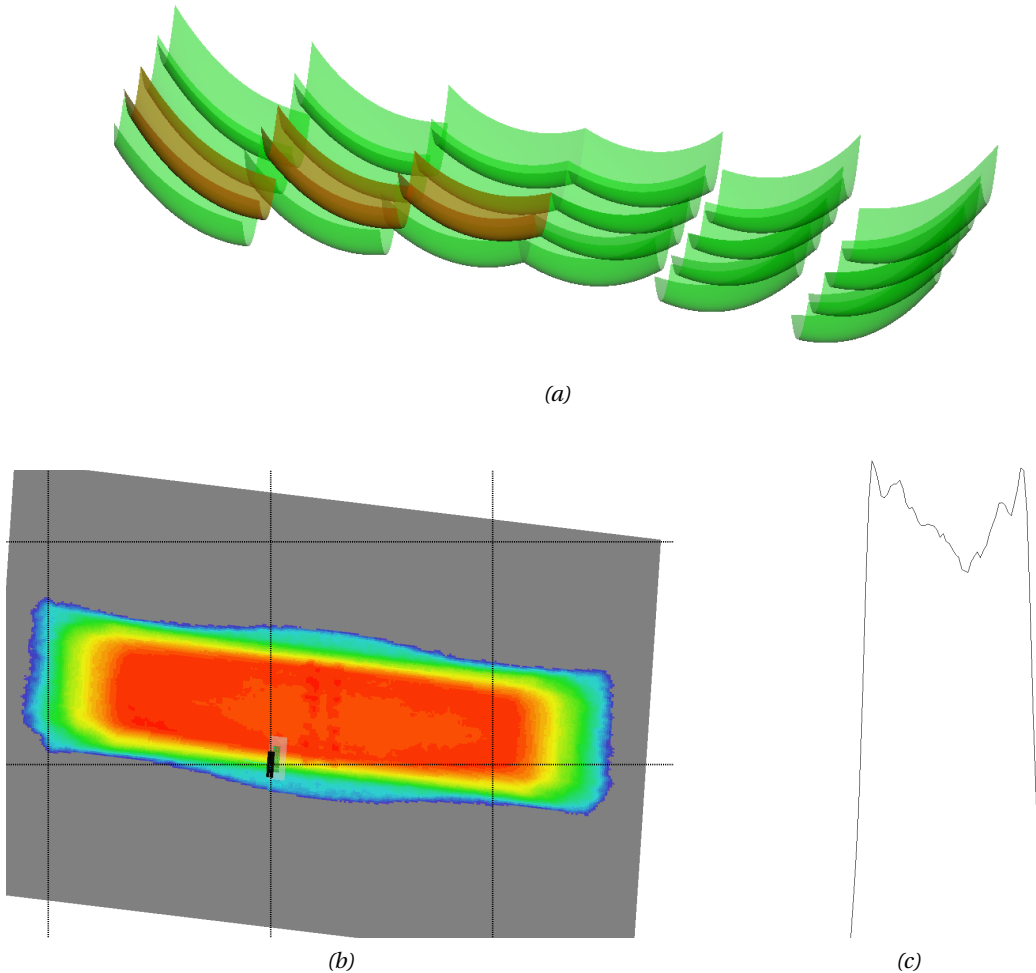


Abb. 6.10: Um die Stufen in der Lichtverteilung mit Multilinsen-Array in Abbildung 6.9 zu entfernen, werden die einzelnen Linsen für paralleles Licht aus unterschiedlichen Richtungen gerechnet. Auf diese Weise kann die Streuung der Laserdiode berücksichtigt werden. (a) Das Multilinsen-Array. Jede Linse wird hierbei für paralleles Licht aus unterschiedlichen Richtungen gerechnet. Einige Linsen sind gesondert eingefärbt, weil die Optimierung dieser Flächen in Abbildung 6.11 analysiert wird. (b) Das Simulationsergebnis zeigt die gewünschte Homogenisierung und die Stufenstruktur ist nicht mehr erkennbar. (c) Der vertikale Schnitt durch die Beleuchtungsstärkeverteilung bestätigt diesen Ansatz, da die Stufenstruktur nicht mehr vorhanden ist.

## 6 Rechenbeispiele

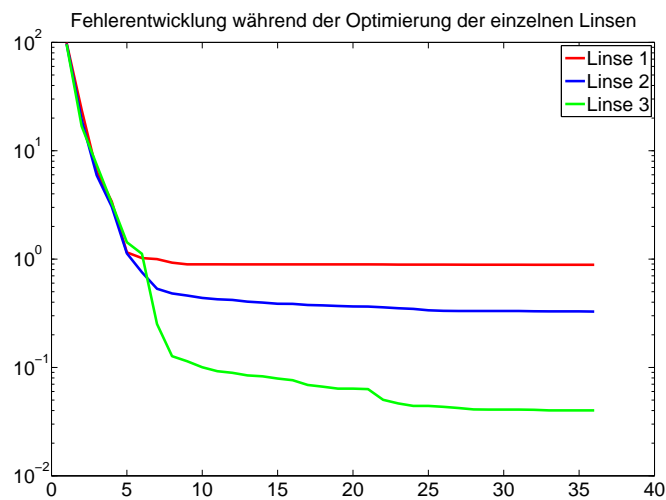


Abb. 6.11: Es werden die Fehlerentwicklungen während der Optimierung von den drei in Abbildung 6.10 eingefärbten Linsen dargestellt. Der rote Graph bezieht sich auf die Linse am Rand und der grüne auf die Linse im Zentralbereich des Arrays. Es ist zu sehen, dass die Optimierung für die Flächen am Rand schlechter konvergiert als im Zentralbereich. Dies kann verschiedene Ursachen haben, z.B. erlaubt die Parametrisierung nicht, die gesuchten Normalenvektorfelder zu beschreiben oder aber das geforderte Normalenvektorfeld weist eine zu große Rotation auf. Daneben sind jedoch die Verläufe im Anfang der Optimierung sehr ähnlich.

## 7 Zusammenfassung

Wir konnten in dieser Arbeit eine exakte Modellierung des Beleuchtungsproblems für optische Systeme mit ausgedehnter Lichtquelle herleiten. Die analytische Berechnung der Beleuchtungsstärke wurde im Rahmen der Optimierung von optischen Systemen als Teil der Bewertungsfunktion erfolgreich eingesetzt. Aufgrund der Notwendigkeit, die optischen Flächen durch viele Freiheitsgrade zu beschreiben, kommen für die Optimierung nur lokal konvergente gradientenbasierte Optimierungsverfahren in Frage. Der Rückwärtsmodus des Automatischen Differenzierens konnte für die Gradientenberechnung sehr erfolgreich eingesetzt werden.

Aufgrund der lokalen Konvergenz der betrachteten Klasse von Optimierungsverfahren eröffnete die Approximation der Lichtquelle als Punkt viele Möglichkeiten, um gute Startlösungen für die Optimierung zu berechnen.

Wir haben den Weg verfolgt, unabhängig von dem konkreten Aufbau des optischen Systems zunächst ein *optimales*, d.h. rotationsfreies, *mapping* durch den Formalismus von Monge-Kantorovich zu bestimmen. Mit Hilfe der Algorithmen von Jan Van lent konnte das sich ergebende lineare Programm auch in hoher Auflösung schnell gelöst werden. Die Berechnung einer Startfläche, die das *optimale mapping* generiert wurde umgesetzt und die bestimmten Flächen haben die geforderten Resultate für eine Punktlichtquelle generiert.

Anhand konkreter Anwendungsbeispiele wurde die Effektivität und Vielseitigkeit des Gesamtalgorithmus unter Beweis gestellt.

## 7 Zusammenfassung

# Literaturverzeichnis

- [1] BENEDETTO, J. ; CZAJA, W.: *Integration and Modern Analysis*. Birkhäuser Advanced Texts, 2009
- [2] CAFFARELLI, L. ; OLIKER, V.: Weak solutions of one inverse problem in geometric optics. In: *Journal of Mathematical Sciences* 154 (2008), S. 43-49
- [3] CHAVES, J.: *Introduction to Nonimaging Optics*. CRC Press, 2008 (Optical Science and Engineering). <http://books.google.de/books?id=ykk1xQc25c0C>. – ISBN 9781420054293
- [4] EVANS, L.: *Partial Differential Equations and Monge-Kantorovich Mass Transfer*. Version: 2001. <http://math.berkeley.edu/~evans/Monge-Kantorovich.survey.pdf>, Abruf: 11. März. 2014
- [5] FISCHER, H.: *Algorithmisches Differenzieren - Skriptum zur Vorlesung WS 2005/06*. <http://www-m1.ma.tum.de/foswiki/pub/Lehrstuhl/HFischerAlgorithmischesDifferenzieren1/Fi-Vorlesung-03.pdf>, Abruf: 20.02.2014
- [6] FOURNIER, F. ; CASSARLY, W. ; ROLLAND, J.: Designing freeform reflectors for extended sources. In: *SPIE* (2009). [http://e-book.lib.sjtu.edu.cn/op2009/DATA/7423\\_1.PDF](http://e-book.lib.sjtu.edu.cn/op2009/DATA/7423_1.PDF), Abruf: 11. März. 2014
- [7] FOURNIER, F. ; CASSARLY, W. ; ROLLAND, J.: Fast freeform reflector generation using source-target maps. In: *Optical Society of America* (2010). <http://www.opticsinfobase.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-18-5-5295>, Abruf: 11. März. 2014
- [8] GREVE, Bram de: *Reflections and Refractions in Ray Tracing*. [http://graphics.stanford.edu/courses/cs148-10-summer/docs/2006--degreve--reflection\\_refraction.pdf](http://graphics.stanford.edu/courses/cs148-10-summer/docs/2006--degreve--reflection_refraction.pdf), Abruf: 02. Januar. 2014
- [9] HAKER, S. ; ZHU, L. ; TANNENBAUM, A. ; ANGENENT, S.: Optimal Mass Transport for Registration and Warping. In: *International Journal of Computer Vision* 60,3 (2004), S. 225-240

- [10] HINZE, M.: *Seminar zur Numerischen Analysis im Wintersemester 2009/2010 - Splines - Unterteilungsalgorithmen*. <http://www.igpm.rwth-aachen.de/Download/ws0910/SeminarSplines/vortraege/Unterteilungsalgorithmen.pdf>, Abruf: 18.02.2014
- [11] KÖCKLER, N.: *Numerische Mathematik*. Teubner, 2006. – ISBN 978-3-8351-0114-2
- [12] KOCHENGIN, S. ; OLIKER, V.: Determination of reflector surfaces from near-field scattering data. In: *Inverse Problems* 13 (1997), S. 363-373
- [13] LENT, J. V. ; BUDD, C.: *Numerical Methods for Monge-Kantorovich Transportation Problems*. Version: Mai 2010. [http://www.cems.uwe.ac.uk/~jvanlent/talks/jvl\\_ral\\_cma.pdf](http://www.cems.uwe.ac.uk/~jvanlent/talks/jvl_ral_cma.pdf), Abruf: 03. März. 2014
- [14] MOISEEV, M. ; DOSKOLOVICH, L.: Design of refractive spline surface for generating required irradiance distribution with large angular dimension. In: *Journal of Modern Optics* (2010)
- [15] OLIKER, V.: *mathematical Aspects of Design of Beam Shaping Surfaces in Geometrical Optics*. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.7.1532&rep=rep1&type=pdf>, Abruf: 21. Januar. 2014
- [16] OLIKER, V. ; GLIMM, T.: optical design of single reflector systems and the Monge Kantorovich mass transfer problem. In: *Journal of Mathematical Sciences* 17,3 (2003), 40964108. [http://faculty.wvu.edu/~glimmt/texte/single\\_refl.pdf](http://faculty.wvu.edu/~glimmt/texte/single_refl.pdf), Abruf: 11. März. 2014
- [17] ROGERS, D.: *An Introduction to NURBS*. Morgan Kaufmann Publishers, 2000. – ISBN 9781558606692
- [18] SCHRÖDER, G.: *Technische Optik*. Vogel-Fachbuch, 1987 (Komprath-Reihe). – ISBN 3-8023-0067-X
- [19] SCHRUBEN, J. S.: Formulation of Reflector-Design Problem for a Lighting Fixture. In: *Journal of the optical societey of America* 62 (1972), Juni, S. 1498-1501
- [20] SEROKA, Simon: *Modellierung und Berechnung brechender Freiformflächen durch eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung zur Generierung von Ziellichtverteilungen*. 2011
- [21] WESTER, R. ; BRUNETON, A. ; BÄUERLE, A. ; STOLLENWERK, J. ; LOOSEN, P.: Irradiance tailoring for extended sources using a point-source freeform design algorithms. In: *SPIE Proceedings - Optical Systems Design 2012* Vol. 8550 (2013), January