

# **Flachheitsbasierte Methode zum stoßfreien Umschalten von Reglerstrukturen**

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)  
der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Paderborn

genehmigte  
DISSERTATION

von  
Dipl.-Ing. Semir Osmić  
aus Tuzla, Bosnien und Herzegowina

Tag des Kolloquiums 11. Dezember 2014

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Ansgar Trächtler

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Martin Mönnigmann





## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand zu meiner Zeit als Stipendiat der International Graduate School *Dynamic Intelligent Systems*, in der ich am Lehrstuhl für Regelungstechnik und Mechatronik (*RtM*) der Universität Paderborn tätig war.

Für die Betreuung der Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Ansgar Trächtler, dem Leiter des Lehrstuhls für Regelungstechnik und Mechatronik. Durch seine Anregungen und Impulse hat er zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Martin Mönnigmann für die Übernahme des Korreferats und die Durchsicht der Arbeit.

Den ehemaligen Kollegen am Lehrstuhl, die inzwischen sehr gute Freunde sind, danke ich für die angenehme, freundschaftliche und kooperative Arbeitsatmosphäre. Insbesondere den Herren Dr.-Ing. Hendrik Amelunxen, Dipl.-Ing. Viktor Fast, Dipl.-Ing. Alexander Löffler, Dipl.-Ing. Peter Reinold und Dipl.-Ing. René Nölle danke ich für die Vielzahl an Diskussionen und inspirierenden Gesprächen. Einen besonderen Dank möchte ich Frau Annette Bökamp-Gros aussprechen für ihre Fürsorge, Ratschläge und die sorgfältige Durchsicht meiner Arbeit.

Meinen Eltern, Hedija und Džemal Osmić, sowie meiner Ehefrau Edina Osmić-Bajrić danke ich für ihre stete Unterstützung und Geduld und meinen beiden Kindern Dunja und Kenan für ihre Liebe, Frohsinn und Unbekümmertheit, mit denen sie einem in jeder Lebenslage ein Lächeln ins Gesicht zaubern und durch die man immer wieder an die wichtigen Dinge im Leben erinnert wird.

Oberhausen, im Dezember 2014

*Semir Osmić*

## **Zusammenfassung**

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, wie stoßfreie Rekonfigurationen von Systemen zur Laufzeit realisiert werden können. Es werden Anforderungen an die Rekonfiguration definiert und eine neue Methode zur stoßfreien Rekonfiguration vorgestellt, die sowohl bei einfachen Betriebspunktwechseln als auch beim Wechsel der Reglerparameter oder der Reglerstruktur angewendet werden kann. Die Methodik basiert auf der Zwei-Freiheitsgrade-Reglerstruktur und der (differenziellen) Flachheit, einer grundlegenden Eigenschaft des Systems selbst. Die Methodik wird für lineare und nichtlineare Ein- und Mehrgrößensysteme vorgestellt, wobei die Rekonfigurationen immer mittels in Echtzeit berechneter Vorsteuerungs- und Führungsgrößentrajektorien realisiert werden. Anhand von akademischen und praktischen Beispielen wird die neue Methode mit bestehenden Verfahren zur stoßfreien Reglerumschaltung verglichen und die Anwendbarkeit demonstriert.

## **Abstract**

The present thesis deals with a new approach to bumpless transfer for system reconfiguration at runtime. During a system reconfiguration an operating point change, a change of controller parameters or even a change of the control structure can occur. After the definition of requirements which has to be fulfilled during the reconfiguration, a new flatness-based method for bumpless transfer is presented. The flatness-based method draws on the two-degrees-of-freedom control structure and on the (differential) flatness which is a fundamental feature of the controlled system. Bumpless switching is realised by means of feedforward and reference trajectories computed in real time which are applicable with linear and non-linear SISO and MIMO systems. The new method of bumpless switching is compared to existing bumpless-switching procedures and its advantages are evidenced by practical examples.



<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>Seite</b>
<b>1 Einleitung</b> .....	3
1.1 Umfeld der Arbeit - Sonderforschungsbereich 614.....	6
1.2 Zielsetzung.....	9
1.3 Strukturierung der Arbeit.....	10
<b>2 Stoßfreie Umschaltung</b> .....	11
2.1 Definition der stoßfreien Umschaltung.....	11
2.2 Methoden zur stoßfreien Umschaltung.....	14
2.2.1 Anti-windup Bumpless Transfer-Verfahren.....	14
2.2.2 Gain-Scheduling.....	22
2.2.3 $L_2$ -Ansatz.....	24
2.2.4 Zusammenfassung.....	27
<b>3 Synthese der flachheitsbasierten Reglerumschaltung</b> .....	31
3.1 Zwei-Freiheitsgrade-Reglerstruktur.....	32
3.2 Differenzielle Flachheit.....	34
3.2.1 Definition der Flachheit.....	34
3.2.2 Bestimmung des flachen Ausgangs.....	37
3.2.3 Flachheitsbasierte Steuerung und Regelung.....	40
3.2.4 Berechnung von Vorsteuerungen und Solltrajektorien.....	43
3.3 Struktur der flachheitsbasierten Reglerumschaltung.....	51
<b>4 Entwurfsmethodik flachheitsbasierter Reglerumschaltung</b> .....	57
4.1 Entwurf flacher Reglerumschaltungen für lineare Systeme.....	57
4.1.1 Minimalphasige Eingrößensysteme.....	58
4.1.2 Nichtminimalphasige Eingrößensysteme.....	65
4.1.3 Minimalphasige Mehrgrößensysteme.....	71
4.1.4 Systeme mit Reglern im Zustandsraum.....	77
4.2 Entwurf flacher Reglerumschaltungen für nichtlineare Systeme....	78
4.3 Reglerumschaltungen für nichtflache Systeme.....	82
4.4 Systeme mit Stellgrößenbegrenzung.....	82
4.4.1 Flachheitsbasierte Umschaltung bei Stellgrößenbegrenzung	83
4.4.2 Weiche strukturvariable Regelungen.....	88
4.4.3 Flachheitsbasierte Umschaltung mit sättigender WSVR....	94
4.5 Zustandsschätzung.....	102

---

4.6 Zusammenfassung .....	103
<b>5 Anwendungsbeispiele .....</b>	<b>107</b>
5.1 Viertelfahrzeugprüfstand ModulX.....	107
5.2 Parallelroboter TriPlanar.....	115
5.3 Fuel-Gas-Verdichter für Gas-und-Dampf-Kombikraftwerke .....	123
5.4 Inverses Pendel .....	134
5.5 Zusammenfassung .....	139
<b>6 Fazit .....</b>	<b>141</b>
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>143</b>



## 1 Einleitung

Die Produkte des Maschinenbaus sind komplexe Systeme, die sowohl in der Industrie als auch in unserem Alltag allgegenwärtig sind. Ob es sich dabei um ein Gaskraftwerk zur Erzeugung elektrischer Energie oder ein Auto handelt, die Systeme sind auf das reibungslose Zusammenspiel von

- Mechanik,
- Regelungstechnik,
- Elektronik und
- Softwaretechnik

angewiesen [35]. Um die Komplexität, sowohl beim Entwurf der mechatronischen Systeme als auch später in ihrer Bedienung und Wartung, zu beherrschen, ist ein modularer und hierarchischer Aufbau des Systems unumgänglich.

Damit sich die mechatronischen Systeme bzw. ihre Teilsysteme an veränderliche Umgebung anpassen können, wird ihr Verhalten gezielt mit Reglern beeinflusst. Ein Standardregelkreis besteht aus der Regelstrecke (dynamisches System), dem Regler und der negativen Rückführung der Regelgröße  $y(t)$  (Abbildung 1-1). Die Regelgröße wird mit der Führungsgröße  $w(t)$  verglichen, und aus der Regelabweichung  $e(t) = w(t) - y(t)$  bildet der Regler die Stellgröße  $u(t)$ , mit der veränderliche Störgrößen  $d(t)$  ausgeregelt und Führungsgrößen  $w(t)$  eingeregelt werden. Die Auslegung des Reglers erfolgt anhand der gestellten Anforderungen an das statische und dynamische Zeitverhalten des Systems, wie es z. B. die Forderung nach einem bestimmten Führungs- und/oder Störverhalten der Regelgröße ist. Ändern sich die Parameter des Systems innerhalb bekannter Grenzen, so ist ein Lösungsansatz die Anwendung des robusten Reglerentwurfs, dessen Ergebnis ein Regler mit fester Einstellung ist, der das System zufriedenstellend regelt.

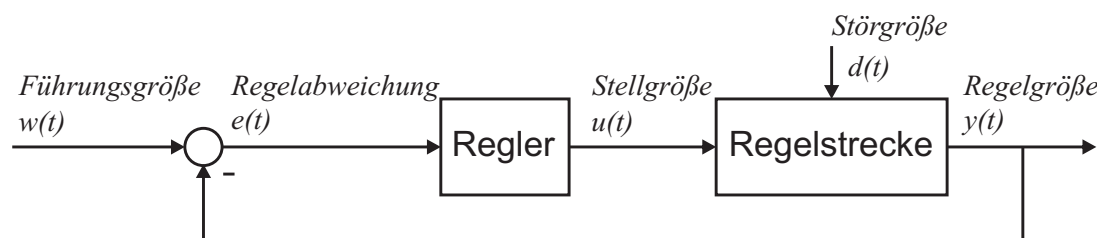


Abb. 1-1: Blockschaltbild eines einfachen Standardregelkreises

Sind jedoch bei dem Systemverhalten starke Variationen gegeben, wie z. B. Änderungen von Zielvorgaben oder Strukturänderungen, die nicht mehr durch eine

Reglereinstellung abgedeckt werden können, ist eine Anpassung des Reglers zur Laufzeit notwendig.

So sind z. B. Regler, die für den Betrieb großer Industrieanlagen ausgelegt sind, oft nicht in der Lage, die Anlage aus dem Stillstand anzufahren. Eine oftmals praktizierte Lösung für das Anfahren solcher Anlagen ist das manuelle Hochfahren der einzelnen Teilanlagen durch das Bedienpersonal oder automatisierte Schrittketten und Umschalten auf die automatischen Regler, wenn die Teilanlagen einen für die Regler freigegebenen Betriebspunkt erreicht haben.

Für solche Reglerumschaltungen gibt es eine Reihe von Ansätzen, die in Kapitel 2 vorgestellt werden und unter dem Begriff *Stoßfreie Umschaltungen* zusammengefasst sind. Für diese Verfahren spielt es keine Rolle, ob zwischen zwei automatischen Reglern umgeschaltet wird oder der Sonderfall gegeben ist, dass ein Mensch als Regler agiert (manuelles Hochfahren).

Ein komplexes System aus dem Alltag ist ein PKW mit einem Abstandsregeltempomaten, auch ACC (**A**daptive **C**ruise **C**ontrol) genannt. Der Tempomat hat die Aufgabe, bei freier Fahrt die vom Fahrer vorgegebene Geschwindigkeit einzuhalten. Wird zu einem langsamer fahrenden (oder stehenden) Verkehrsteilnehmer aufgeschlossen, soll das ACC den gewählten Abstand zum vorausfahrendem Fahrzeug einhalten. Erkennt das System wieder freie Straßenverhältnisse, soll es selbstständig das Fahrzeug beschleunigen und die vorgegebene Geschwindigkeit konstant halten (Abbildung 1-2). Die ersten ACC Systeme wurden Ende der 1990er Jahre in Oberklassefahrzeugen eingeführt und danach weiterentwickelt, haben inzwischen auch Einzug im Mittelklassesegment gehalten. Das Verhalten der ersten ACC-Systeme, wie ein Test der Zeitschrift *Auto Motor und Sport* aus dem Jahr 2006 zeigt [14], war jedoch nicht zufriedenstellend.

Die Abbildungen 1-3 zeigen den Abstandsverlauf der vier getesteten Fahrzeuge beim Aufschließen zu einem langsamer vorausfahrenden Fahrzeug und beim Fahren in der Kolonne, jeweils mit aktiviertem ACC. Der gewählte Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug wird dabei teilweise deutlich unterschritten. Beim einem der Fahrzeuge war in der Kolonnenfahrt, beim Abbremsen des vorausfahrenden Fahrzeugs, sogar ein Eingriff des Fahrers notwendig, um einen Zusammenstoß mit dem vorausfahrenden Fahrzeug zu verhindern. Die Systeme haben nicht nur beim Einhalten des Abstandes Probleme, auch die Reaktionszeiten beim selbstständigen Beschleunigen, wenn die Straße wieder frei ist, konnten nicht zufriedenstellen. Die neuere Generation der ACC-Systeme zeigt zwar verbessertes Verhalten, hat aber, wie aktuelle Tests zeigen [13], noch immer Verbesserungsbedarf.

Ein Grund für das schwierige Abstimmen der ACC-Systeme sind die gegensätzlichen Anforderungen, die an sie gestellt werden. Bei beiden Regelgrößen, Geschwindigkeit und Abstand, kommt es sowohl auf das Führungsverhalten als auch

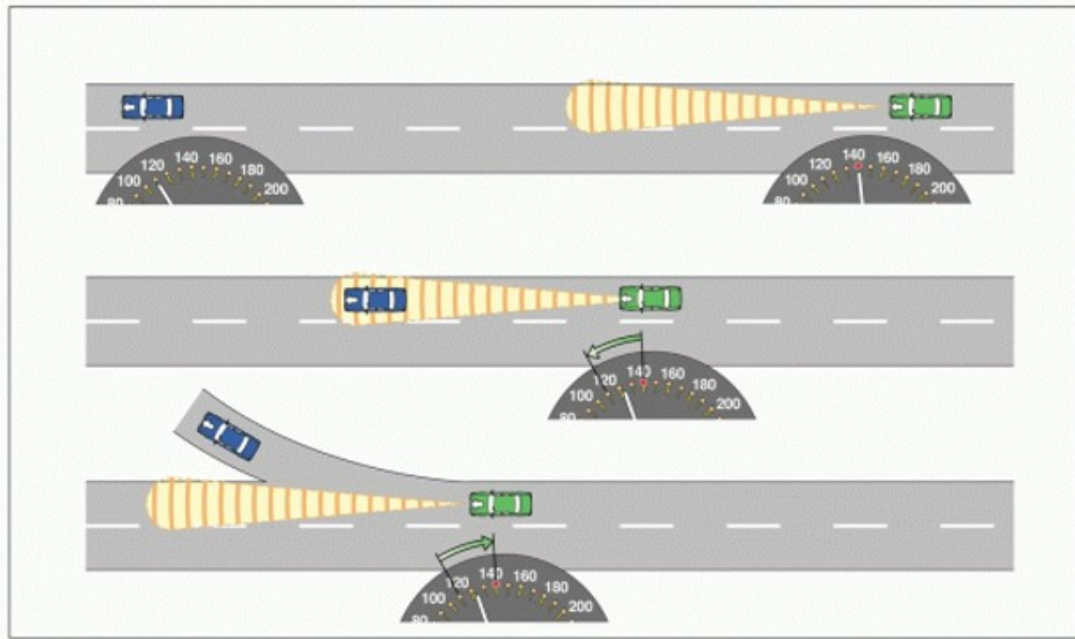


Abb. 1-2: Funktionsweise eines Abstandsregeltempomaten (Quelle: Bosch)

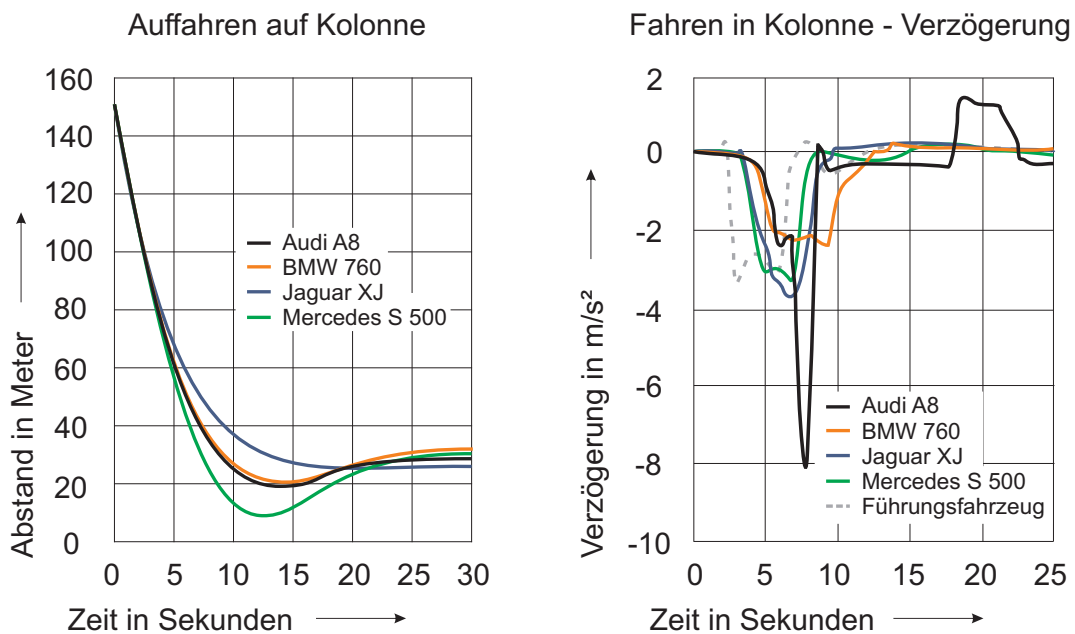


Abb. 1-3: Links: Abstandsverlauf beim Auflaufen mit 180 km/h auf ein mit 100 km/h fahrendes Fahrzeug. Rechts: Verzögerungsverlauf bei Verzögerung des vorausfahrenden Fahrzeuges von 80 km/h Anfangsgeschwindigkeit auf 40 km/h Endgeschwindigkeit [14]

auf das Störgrößenverhalten des Abstandreglers an. Einerseits muss z. B. der Abstandsregler beim Auflaufen auf ein Fahrzeug gutes Führungsverhalten zeigen, soll aber auch beim plötzlichen Bremsen des vorausfahrenden Fahrzeuges, was eine Störgröße darstellt, den Abstand gut einhalten. Würde man beim ACC mit bestehenden Methoden zur stoßfreien Umschaltung zwischen einem Geschwindigkeits-

und einem Abstandsregler umschalten, wäre das Erreichen der Führungsgröße immer allein von dem jeweils aktiven Regler abhängig. Sind beide Regler auf gutes Störverhalten ausgelegt, ist das Erreichen der Führungsgröße nur mit unerwünschtem Überschwinger möglich, wie z. B. bei dem grünen Verlauf in Abbildung 1-3, links. Wären die Regler aber auf das Führungsverhalten ausgelegt, so würde beim Umschalten ein zufriedenstellendes Erreichen der Führungsgröße möglich. Das Ausregeln von Störgrößen allerdings, wie es etwa das Bremsen des vorausfahrenden Fahrzeugs darstellt, ist in diesem Fall nicht akzeptabel (schwarzer Verlauf in Abb. 1-3, rechts).

Um die Anforderungen an eine neue Methode zur Reglerumschaltung festzulegen, wird im folgenden Abschnitt die Struktur des mechatronischen Systems vorgestellt, innerhalb welcher die Methode Anwendung finden soll.

## 1.1 Umfeld der Arbeit - Sonderforschungsbereich 614

Wie schon in der Einleitung erwähnt, wird mittels einer modularen und hierarchischen Struktur die Komplexität mechatronischer Systeme heruntergebrochen und damit ein systematischer Entwurf ermöglicht. Um das Potenzial, das in den mechatronischen Systemen steckt, effektiver auszuschöpfen und ihre Leistungsfähigkeit zu erhöhen, wurden in den letzten Jahren Methoden entwickelt, die solchen Systemen eine gewisse „Intelligenz“ verleihen, mit welcher die Systeme befähigt werden, sich selbst zu optimieren und an die Umgebung anzupassen. Die Optimierung kann wegen Änderungen von Zielvorgaben, der Umgebungsbedingungen oder der internen Struktur nötig werden.

An der Universität Paderborn wurden selbstoptimierende Systeme schwerpunktmäßig im Sonderforschungsbereich 614 (SFB 614) „Selbstoptimierende Systeme des Maschinenbaus“ [36] erforscht und entwickelt. Das Ziel des Sonderforschungsbereichs ist die Entwicklung von Methoden für den Entwurf und die Realisierung selbstoptimierender mechatronischer Systeme [82], [3]. Die Definition der Selbstoptimierung lautet:

*„Unter **Selbstoptimierung** (self-optimization) eines technischen Systems werden die endogene Anpassung der Ziele des Systems auf veränderte Einflüsse und die daraus resultierende zielkonforme autonome Anpassung der Parameter und ggf. der Struktur und somit des Verhaltens dieses Systems verstanden. Damit geht Selbstoptimierung über die bekannten Regel- und Adaptionstrategien wesentlich hinaus; Selbstoptimierung ermöglicht handlungsfähige Systeme mit inhärenter „Intelligenz“, die in der Lage sind, selbstständig und flexibel auf veränderte Betriebsbedingungen zu reagieren.“ [36]*

In einem technischen System findet ein **Selbstopoptimierungsprozess** genau dann statt, wenn durch das Zusammenwirken der enthaltenen Elemente die folgenden drei Aktionen wiederholt ausgeführt werden [3]:

- 1) Analyse der Ist-Situation,
- 2) Bestimmung der Systemziele,
- 3) Anpassung des Systemverhaltens.

Im Rahmen der im Sonderforschungsbereich 614 entstandenen Arbeiten ist eine funktionsorientierte Struktur vorgestellt worden, die aus den vier Elementen: Mechatronisches Funktionsmodul (MFM), Mechatronische Funktionsgruppe (MFG), Autonomes Mechatronisches System (AMS) und Vernetztes Mechatronisches Systeme (VMS) besteht [79], [51]. Die MFM bilden die Basiselemente der Struktur und bestehen, als ein mechatronisches Teilsystem, aus der kinematisch-mechanischen Struktur mit der zugehörigen Aktorik, Sensorik und der Informationsverarbeitung. Der MFG können eines oder mehrere MFM oder MFG untergeordnet sein; sie selbst besitzt aber keine mechanische Struktur oder Aktorik, sondern beinhaltet lediglich Informationsverarbeitung und Sensorik. Das AMS ist das mechatronische System selbst, das als eine vollständige und autonome Einheit gesehen werden kann. Es ist aus einer oder mehreren MFG zusammengesetzt. Ein VMS entsteht, wenn mehrere AMS informationstechnisch gekoppelt werden.

Für die Informationsverarbeitung innerhalb von MFM und MFG wurde das sogenannte **Operator-Controller-Modul (OCM)** entwickelt [52] (Abbildung 1-4). Es ist eine dreiteilige, aus der Kognitionsforschung entlehnte Struktur, die alle nötigen Elemente für den Selbstopoptimierungsprozess bietet. Sie setzt sich aus dem Controller, dem reflektorischen Operator und dem kognitiven Operator zusammen.

Der **Controller** befindet sich auf der untersten Ebene und verarbeitet in direkter Wirkkette die Messsignale, ermittelt Stellsignale und gibt diese aus. Er kann aus mehreren Reglern zusammengesetzt sein, zwischen denen während der Laufzeit umgeschaltet werden kann. Die Informationsverarbeitung muss auf dieser Ebene in harter Echtzeit erfolgen. Der Bediener hat keinen direkten Eingriff in den Controller, Führungsgrößen etc. können nur über den reflektorischen Operator vorgegeben werden.

Der **reflektorische Operator** überwacht und steuert den Controller. Funktionen wie Ablaufsteuerung, Überwachungs- und Notfallprozesse sowie Adaptionsroutinen befinden sich hier. Der reflektorische Operator hat keinen direkten Zugriff auf die Aktoren des Systems; er kann Rekonfigurationen im Controller durchführen, d. h. Parameter- und Strukturänderungen vornehmen oder Führungsgrößen der Regler ändern. Bei der Rekonfiguration kann nicht nur der aktive Regler

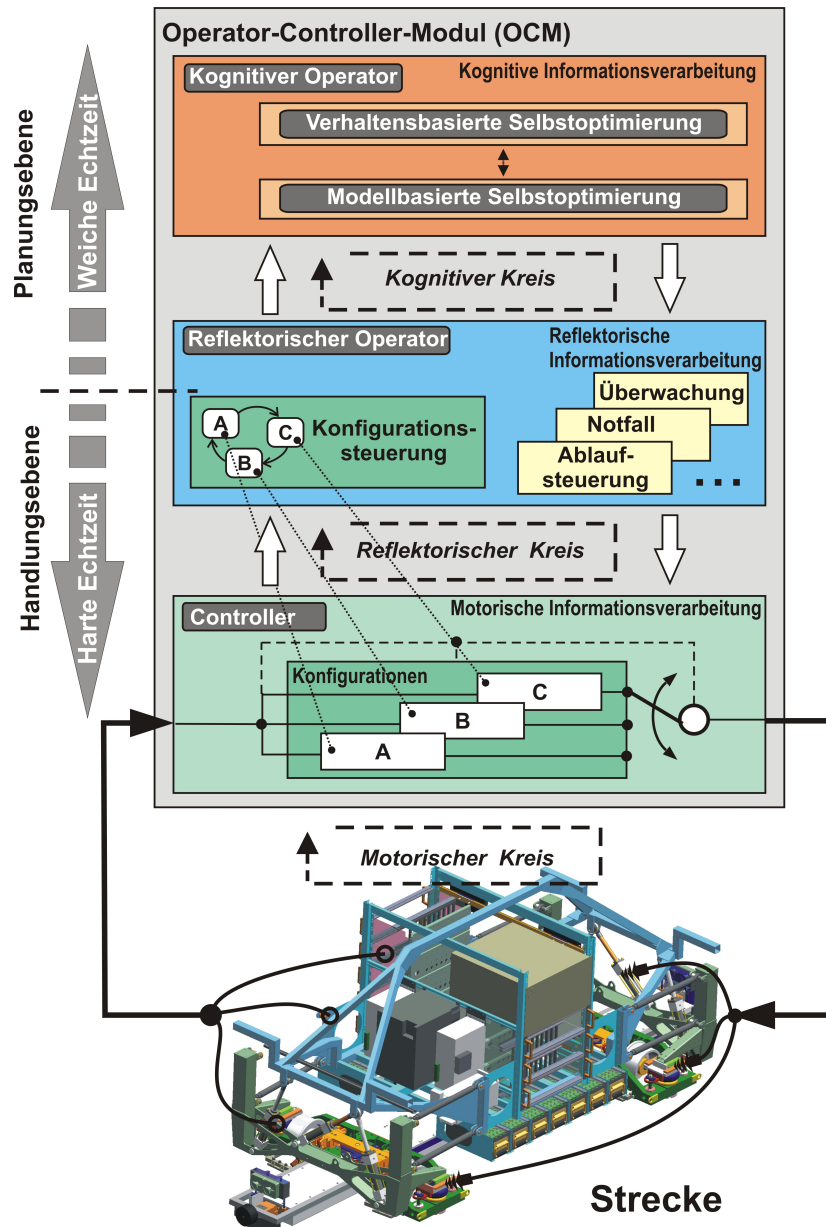


Abb. 1-4: Struktur des Operator-Controller-Moduls [52]

ausgetauscht werden, es kann, bei Bedarf, auch eine Umschaltung der erforderlichen Kontroll- bzw. Signalflüsse stattfinden. Die sicherheitskritischen Funktionen wie Ablaufsteuerung und Notfallprozesse müssen in harter Echtzeit arbeiten. Der reflektorische Operator besitzt aber auch eine in weicher Echtzeit arbeitende Schnittstelle zum kognitiven Operator.

Der **kognitive Operator** ist die oberste Ebene der OCM-Struktur, auf der verschiedene Algorithmen (z. B. Planungs- und Lernverfahren oder modellbasierte Optimierungsverfahren) ablaufen, deren Ziel die Verbesserung des Systemverhaltens ist. Im Gegensatz zum Controller und zum reflektorischen Operator muss der kognitive Operator nicht harte Echtzeitbedingungen erfüllen. Ein Ergebnis sollte trotzdem innerhalb einer bestimmten Zeitspanne vorliegen, da es sonst aufgrund

veränderter Umgebungsbedingungen unbrauchbar wird. Deshalb unterliegt der kognitive Operator nur weichen Echtzeitbedingungen.

Veranlasst der reflektorische Operator des OCM eine Rekonfiguration, so kann zwischen drei verschiedenen Fällen unterschieden werden:

- 1) Betriebspunktwechsel,
- 2) Wechsel der Reglerparameter oder des Reglertyps mit oder ohne Betriebspunktwechsel,
- 3) Wechsel der Reglerstruktur (Änderung des Reglers und der Regelgrößen) mit oder ohne Betriebspunktwechsel.

Während das Operator-Controller-Modul die Architektur der Informationsverarbeitung beschreibt, sagt es nichts über die Methoden aus, die im Controller und den zwei Operator-Modulen konkret verwendet werden sollen. In [22] wurden Verfahren für die Sicherstellung bzw. Steigerung der Sicherheit und Verlässlichkeit der OCM-Struktur auf Soft- und Hardware-Ebene vorgestellt, so z. B. auch die formale Verifikation des Zustandsautomaten im reflektorischen Operator [17], [44]. Aus regelungstechnischer Sicht gilt es auch, eine Methode zu finden, welche die Rekonfiguration des Systems ermöglicht und dabei sowohl die Stabilität bzw. die Sicherheit des Systems gewährleistet als auch die Anforderungen an die Regelgüte während dieser Umschaltungen einhält.

## 1.2 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist es, ein geeignetes Verfahren zur Reglerumschaltung zu entwerfen, das in die OCM-Struktur eingebettet werden kann. Dabei sollte es bei allen drei Fällen der Rekonfiguration im OCM, die im letzten Abschnitt vorgestellt wurden, anwendbar sein. Die Methode soll zu jedem Zeitpunkt einen reibungslosen Austausch der Regler bzw. eine Rekonfiguration des Systems während der Laufzeit ermöglichen. Zusammengefasst sollte die Umschaltung folgende Anforderungen erfüllen:

- Die Umschaltung soll in jedem Zustand des Systems für alle drei OCM-Rekonfigurationsfälle erfolgen können.
- Das System muss in jeder Phase (vor, während und nach) der Umschaltung stabil sein.
- Die Umschaltung soll eine Stetigkeit der Stellgrößen und bei Bedarf auch eine mehrfach stetige Differenzierbarkeit gewährleisten.
- Die Umschaltung soll zwischen beliebigen Reglerstrukturen mit unter Umständen verschiedenen Regelgrößen und Führungsgrößen möglich sein.

- Die Systemantwort während der Umschaltung und die Transitionsdauer<sup>1</sup> sollen unabhängig von dem aktiven Regler vorgegeben werden können.
- Die Reglerauslegung soll nicht vom Verfahren zur Reglerumschaltung abhängig sein bzw. durch das Verfahren eingeschränkt werden.

Übergeordnete Anforderungen sind die Echtzeitfähigkeit der Methode und ihre Anwendbarkeit auf eine möglichst große Anzahl in der Praxis vorkommender Systeme.

### 1.3 Strukturierung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in fünf Kapitel unterteilt, wobei Kapitel 4 den Schwerpunkt der Arbeit darstellt. Zunächst werden in Kapitel 2 die stoßfreie Umschaltung definiert und die bisher bestehenden Methoden zu dieser Umschaltung beschrieben. Auf jede von den Methoden wird dabei kurz eingegangen und ihre zugrunde liegende Funktionsweise dargestellt. Aus den Eigenschaften der bestehenden Methoden ergibt sich die Motivation für einen neuen Ansatz zur stoßfreien Umschaltung. Kapitel 3 fasst die theoretischen Grundlagen und bisherige Arbeiten zusammen, auf denen die neue, flachheitsbasierte Umschaltung aufbaut. Am Ende des Kapitels werden die Bedingungen aufgelistet, die das System und seine Regler für die Realisierung der neuen Umschaltung erfüllen müssen.

Die Entwurfsmethodik der flachheitsbasierten Umschaltung wird in Kapitel 4 vorgestellt. Da sich abhängig von der Art des Systems die Entwurfsschritte unterscheiden, wird in Abschnitten und Unterabschnitten des Kapitels auf die Systemarten im Einzelnen eingegangen. Besonderes Augenmerk wird außerdem auf lineare Systeme mit Eingangsgrößenbegrenzung gerichtet, die einen oft vorkommenden Spezialfall der nichtlinearen Systeme darstellen. Kapitel 5 zeigt die Anwendung und die Ergebnisse der flachheitsbasierten stoßfreien Umschaltung bei vier charakteristischen Systemen. Dies sind der Viertelfahrzeugprüfstand ModulX (flaches, lineares Eingrößensystem), der Parallelroboter TriPlanar (flaches, nichtlineares Mehrgrößensystem), das Fuel Gas System (flaches, nichtlineares Mehrgrößenteilsystem eines Gas- und Dampfkraftwerkes zur Regelung des Gasdrucks an der Gasturbine) und das inverse Pendel (nichtflaches, nichtlineares Eingrößensystem).

---

<sup>1</sup> Hiermit ist die Zeit gemeint, die vom Umschaltzeitpunkt bis zum Erreichen des gewünschten Arbeitspunktes bzw. Sollwertes vergeht.



## 2 Stoßfreie Umschaltung

Das 1951 eingereichte und 1954 bewilligte Patent „Transfer from Manual to Automatic Control in Automatic Control Systems“ [75] zeigt, dass Reglerumschaltungen schon vor der Einführung der digitalen Signalverarbeitung in die Regelungstechnik erforscht wurden. Die damaligen Arbeiten wurden durch den Wunsch vorangetrieben, eine glatte (stoßfreie) Stellgröße bei der Umschaltung von manueller auf automatische Regelung beizubehalten, damit die Regelgröße einbruchlos bzw. ohne Überschwinger bleibt. Spätere Arbeiten befassten sich mit dem allgemeinen Fall der stoßfreien Umschaltung zwischen zwei Reglern. Mit Bezug auf die stoßfreie Stellgröße bekam dieser Teilbereich der Regelungstechnik im deutschsprachigen Raum den Namen „Stoßfreie Umschaltung“, während sich in der englischen Literatur der Begriff „Bumpless Transfer“ etablierte.

### 2.1 Definition der stoßfreien Umschaltung

Die grundlegende Idee der Methoden zur stoßfreien Umschaltung ist es, dass durch die Reglerumschaltung kein „Stoß“ in den Stellgrößen erzeugt wird, der das System in unerwünschter Weise anregt. Dies bedeutet, dass die Stellgrößen des Systems vor und nach der Umschaltung die gleichen Werte haben müssen, um eine „stoßfreie“ Reglerumschaltung zu vollziehen. Das  $\mathcal{L}_2$ -Verfahren zur stoßfreien Umschaltung verfolgt einen anderen Ansatz, so dass es auch einer anderen Definition der stoßfreien Umschaltung folgt. Dieses Verfahren und seine Definition der Umschaltung werden im Unterabschnitt 2.2.3 vorgestellt.

Die allgemein verbreitete und auch in dieser Arbeit angewendete Definition lautet<sup>1</sup>:

**Definition 1:** Bei einem linearen, zeitinvarianten (**LZI**) SISO-System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2-1a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad (2-1b)$$

mit der Regeldifferenz  $e(t) = w(t) - y(t)$ , wobei  $w(t)$  die Führungsgröße ist, der Stellgröße

$$u(t) = \begin{cases} u_{reg1}(t), & t \leq t_u \\ u_{reg2}(t), & t > t_u \end{cases} \quad (2-2)$$

---

<sup>1</sup> Wegen der Übersichtlichkeit für ein LZI-SISO-System.

und den Reglern

$$u_{reg1}(t) = r_1(e(t)) \quad (2-3)$$

$$u_{reg2}(t) = r_2(e(t)) \quad (2-4)$$

ist eine Umschaltung (Abbildung 2-1) genau dann stoßfrei, wenn während der Umschaltung die Eingangsgröße der Strecke  $u(t)$  stetig bleibt. Für die Regler bedeutet dies, dass nach dem Umschaltzeitpunkt  $t_u$  die Reglerausgangsgröße  $u_{reg2}(t_u^+)$  des einschaltenden Reglers gleich der Reglerausgangsgröße  $u_{reg1}(t_u^-)$  des ausschaltenden Reglers vor dem Umschaltzeitpunkt ist:

$$u_{reg2}(t_u^+) = u_{reg1}(t_u^-). \quad (2-5)$$

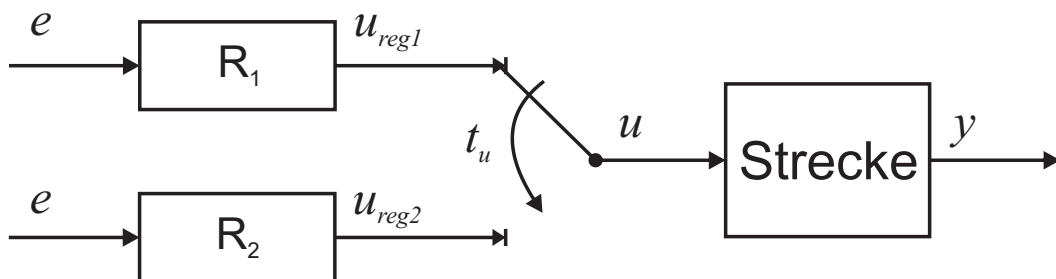


Abb. 2-1: Reglerumschaltung zum Zeitpunkt  $t_u$

**Bemerkung 1:** Wenn nicht anders angegeben, wird im weiteren Verlauf angenommen, dass die behandelte Strecke die Form (2-1) hat.

**Beispiel 2.1:** Zur Veranschaulichung der Definition des stoßfreien Umschaltens betrachten wir zuerst den einfachen Fall, bei dem zwischen zwei Reglern mit gleicher Regelgröße  $y(t)$  und Führungsgröße  $w(t)$  im eingeschwungenen Zustand des Systems umgeschaltet wird. Als Beispiel soll das lineare, zeitinvariante SISO-System aus [30]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1.67 & 3 & 0 \\ 0 & -1.25 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = 0 \quad (2-6)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$

mit vorhandener rauschfreier Messung  $x_1(t), x_2(t)$  dienen. Mit

$$G_k : G_{k2}(s) = 3.5 \left( \frac{1 + 0.2s}{s} \right), \quad G_{k1}(s) = 5 \quad (2-7)$$

und

$$G_l : G_{l2}(s) = 1.14 \left( \frac{1 + 0.6s}{s} \right), \quad G_{l1}(s) = 0.88 \quad (2-8)$$

sind zwei PI/P-Kaskadenregler mit den Stellgrößen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  für das System (2-6) gegeben. Der Regler  $G_k$  ist auf gutes Störverhalten ausgelegt, während der Regler  $G_l$  nach dem Kriterium des Betragsoptimums bestimmt wurde [30]. Das System ist in Abb. 2-2 dargestellt, wobei der Übersichtlichkeit halber der zweite Regler nicht abgebildet wurde.

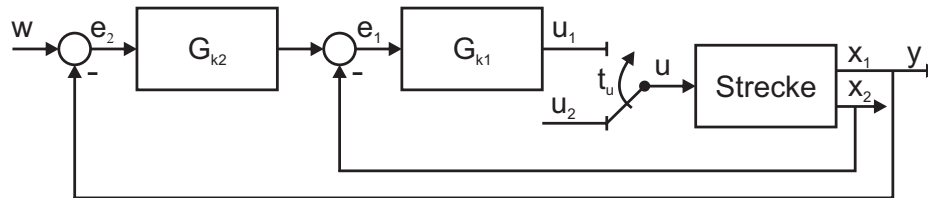


Abb. 2-2: System (2-6) mit einer Reglerumschaltung zum Zeitpunkt  $t = t_u$

Für beide Regler ist die Führungsgröße konstant und beträgt  $w_{soll} = 1$ . Zuerst wird das System mit dem Regler  $G_l$  geregelt. Zum Zeitpunkt  $t_u = 5$  wird die Reglerschleife des Reglers  $G_l$  geöffnet und die des Reglers  $G_k$  geschlossen. Die Systemantwort, wenn zwischen der Reglern „einfach“, d. h. ohne Maßnahmen zur Sicherstellung der Stoßfreiheit, umgeschaltet wird, ist in Abbildung 2-3 dargestellt. Das starke Einbrechen der Regelgröße ist dem Umstand geschuldet, dass beim Regler  $G_{k2}$  der Integrator-Anfangswert  $X_I(t_u) = 0$  ist und dadurch die resultierende Stellgröße  $u(t)$ ,  $t > t_u$ , in diesem Fall sogar das Vorzeichen ändert.

Es ist davon auszugehen, dass mit einem passenden Anfangswert  $X_I(t_u)$  die Stellgröße  $u(t)$  beim Umschalten konstant gehalten werden kann. Schreibt man die Gleichung (2-5) für  $t = t_u$  aus

$$u_1(t_u^+) = 5 \left( 3.5 \left( \int_{t_u^+}^{t_u^+} e_2(\tau) d\tau + X_I(t_u^+) \right) + 0.7 e_2(t_u^+) - x_2(t_u^+) \right) = u_2(t_u^-), \quad (2-9)$$

lautet die Bedingung für den Anfangswert des Integrators zum Umschaltzeitpunkt

$$X_I(t_u^+) = \left( \frac{u_2(t_u^-)}{5} + x_2(t_u^+) \right) \frac{1}{3.5}, \quad (2-10)$$

unter der Annahme, dass das System eingeschwungen ist bzw.  $e_2(t_u^+) = w_{soll}(t_u^+) - x_1(t_u^+) = 0$  gilt.

Abbildung 2-4 zeigt die Systemantwort auf die Reglerumschaltung, wenn der Integrator des Reglers  $G_{k2}$  nach Gleichung (2-10) initialisiert wird. Wie zu sehen ist, bleiben nach dem Austausch des aktiven Reglers die Stellgröße und die Regelgröße konstant.

## 2.2 Methoden zur stoßfreien Umschaltung

Das Verfahren aus Beispiel 2.1 kann zur stoßfreien Reglerumschaltung genutzt werden. Dabei muss es jedem Regler angepasst werden und dessen besondere Struktur berücksichtigen. Voraussetzung ist natürlich, dass die Reglerzustände verfügbar und beschreibbar sind, was aber bei der seit geraumer Zeit üblichen digitalen Implementierung der Regler in Mikroprozessoren keine große Einschränkung bedeutet. Als zu erledigende Aufgabe bleibt dann das Berechnen der Initialisierungszustände des Reglers, was sich, je nach der Ordnung des Systems und dem Systemzustand zum Umschaltzeitpunkt, schwierig gestalten kann. Allerdings sind beim einfachen Initialisieren die Systemantwort während der Umschaltung und deren Dauer nur vom zu dieser Zeit aktiven Regler abhängig.

Im Folgenden werden weitere Methoden zur stoßfreien Umschaltung vorgestellt, die auf eine explizite Initialisierung der Reglerzustände verzichten.

### 2.2.1 Anti-windup Bumpless Transfer-Verfahren

Unter dem Namen „**Anti-windup Bumpless Transfer**“ (**AWBT**) wurden von Campo et al. in [18] und [59] eine Reihe von Methoden zur stoßfreien Umschaltung in einem Rahmenwerk vereint. Dazu gehören das konventionelle Verfahren **CAW** (**Conventional Anti-windup**), das CAW mit Integrator [101] und das beobachterbasierte Verfahren [7], [5]. Auch die erste systematische Methode zur stoßfreien

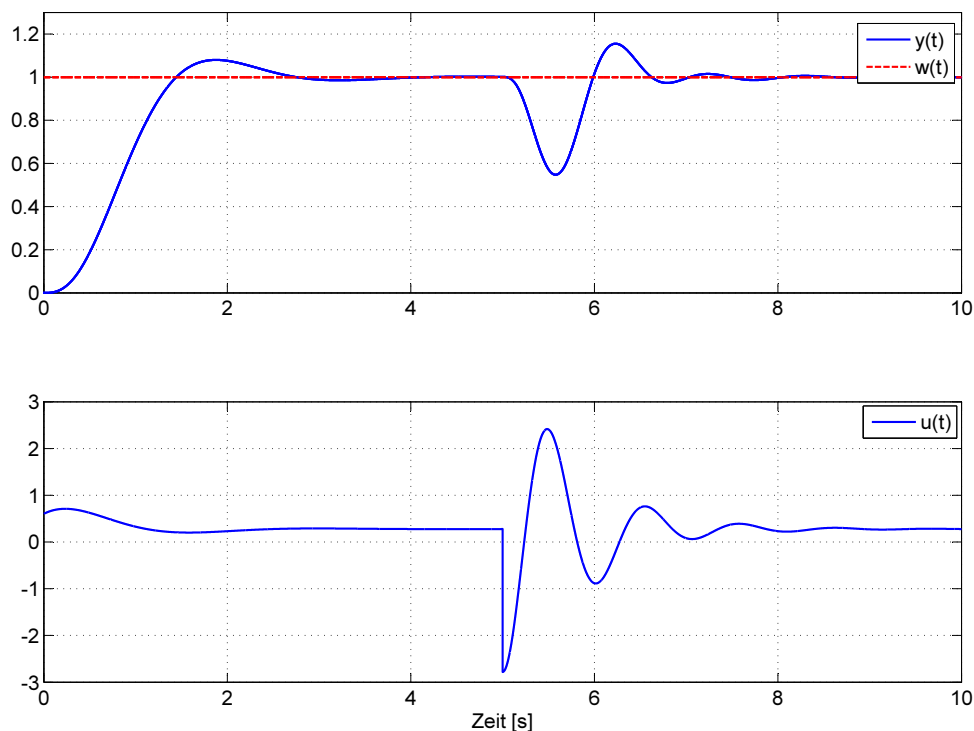


Abb. 2-3: Verhalten des Systems (2-6) bei Reglerumschaltung zum Zeitpunkt  $t_u = 5$  ohne Reglerinitialisierung

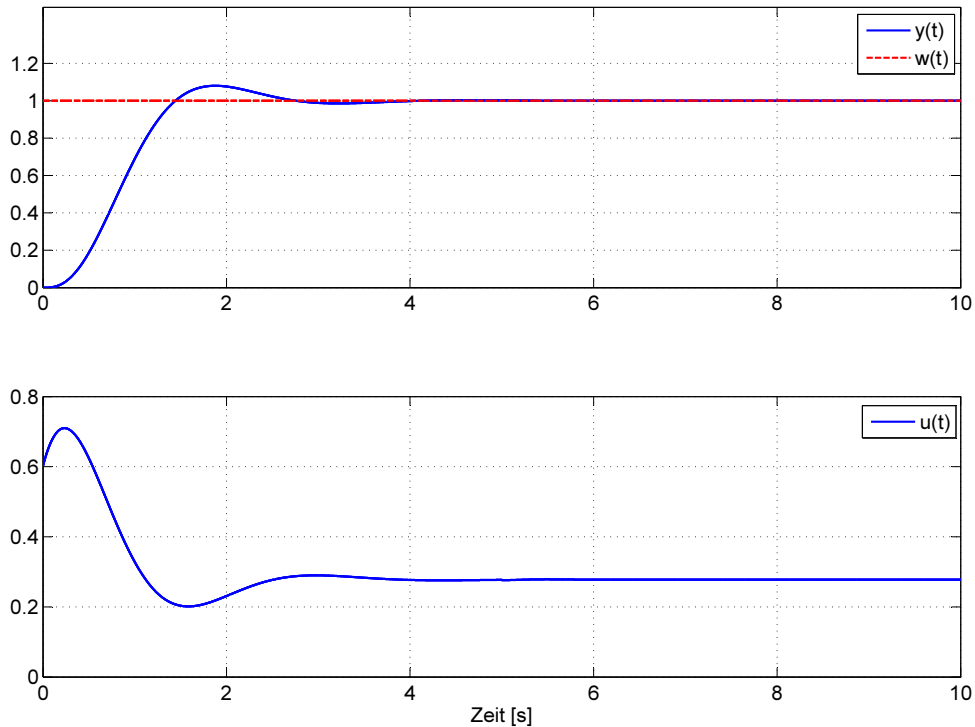


Abb. 2-4: Verhalten des Systems (2-6) bei Reglerumschaltung zum Zeitpunkt  $t_u = 5$  mit Reglerinitialisierung nach (2-10)

Umschaltung, das Hanus-Konditionierungsverfahren [50], das aus einer Modifizierung der in [49] vorgestellten Anti-windup-Struktur hervorging, ist ein Spezialfall der AWBT-Struktur. Wie der Name schon sagt, können die AWBT-Verfahren sowohl zum stoßfreien Umschalten als auch zum Verhindern des Aufintegrierens der Reglerzustände bei Stellgrößenbegrenzungen genutzt werden.

Abbildung 2-5 zeigt ein System mit einer Regelschleife und der Stellgrößenbegrenzung

$$u = \begin{cases} u_{reg}, & u_{min} < u_{reg} < u_{max} \\ u_{max}, & u_{reg} \geq u_{max} \\ u_{min}, & u_{reg} \leq u_{min} \end{cases} \quad (2-11)$$

Stellgrößenbegrenzungen bringen im allgemeinen Fall in das geregelte System nichtlineare Schwingungen ein und führen, wenn sie beim Reglerentwurf nicht berücksichtigt werden, im ungünstigsten Fall zur Instabilität.

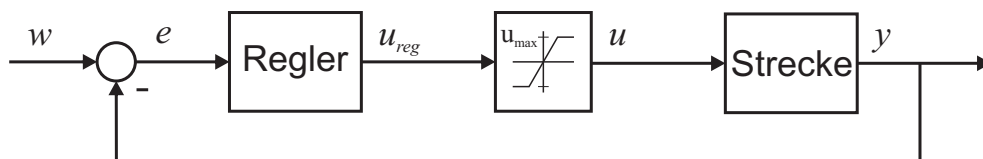


Abb. 2-5: System mit einer Eingangsstellgrößenbegrenzung

Alle AWBT-Verfahren können mithilfe der Struktur aus Abbildung 2-6 dargestellt werden, wobei

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{C}_r(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_r)^{-1}\mathbf{B}_r + \mathbf{D}_r = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_r & \mathbf{B}_r \\ \hline \mathbf{C}_r & \mathbf{D}_r \end{array} \right] \quad (2-12)$$

der Regler ist, der ohne Berücksichtigung der Stellgrößenbegrenzung entworfen wurde, und  $\mathbf{K}(s)$  der Anti-windup-Kompensator. Die verschiedenen Verfahren unterscheiden sich in der Auslegung des Kompensators  $\mathbf{K}(s)$  und sind in Tabelle 2-1 aufgeführt, wobei die Struktur des allgemeinen AWBT-Kompensators alle übrigen AWBT-Verfahren umfasst:

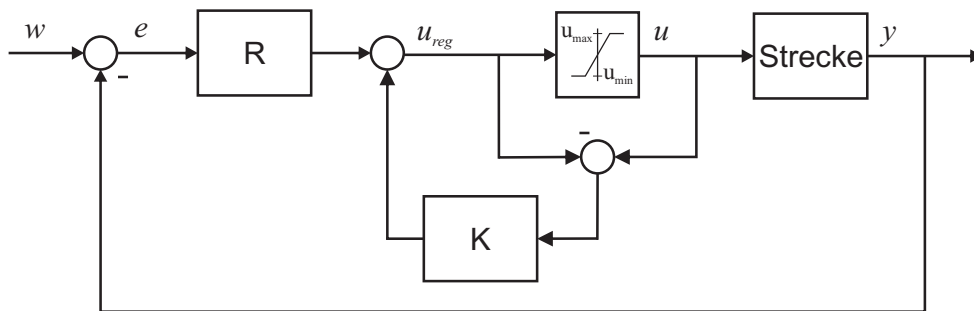


Abb. 2-6: Blockdiagramm der allgemeinen AWBT-Struktur [19]

Tabelle 2-1: Anti-windup Bumpless Transfer-Verfahren

NAME	KOMPENSATOR $\mathbf{K}(s)$
Klassisch	$\frac{1}{s}\mathbf{I}$
Conventional Anti-windup (CAW)	$\alpha\mathbf{R}(s)$
CAW mit Integrator [101]	$\frac{\alpha}{s}\mathbf{R}(s)$
Hanus-Konditionierungsverfahren [50]	$\mathbf{R}(s)\mathbf{D}_r^{-1} - \mathbf{I}$
Modifizierter Hanus-Algorithmus [103]	$(\mathbf{R}(s) - \mathbf{D}_r)(\mathbf{D}_r + \rho\mathbf{I})^{-1}$
Verallgemeinerter AWBT-Kompensator [19]	$\left[ \begin{array}{c c} \mathbf{A}_r & \mathbf{H} \\ \hline \mathbf{C}_r & \mathbf{0} \end{array} \right]$
Modellbasiert [19]	$\mathbf{R}(s)\mathbf{G}_m(s)$
Allgemeiner AWBT-Kompensator [59]	$\left[ \begin{array}{c c} \mathbf{A}_r & \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2^{-1} \\ \hline \mathbf{C}_r & \mathbf{H}_2 - \mathbf{I} \end{array} \right]$

In [25] werden die AWBT-Verfahren mit ihren Vor- und Nachteilen gegenübergestellt und ausführlich diskutiert. So hat das klassische Verfahren mit  $\mathbf{K}(s) = \frac{1}{s}\mathbf{I}$  den Vorteil der einfachen Auslegung und Implementierung, kann aber nur bei Reg-

lern  $\mathbf{R}(s)$  verwendet werden, deren Übertragungsfunktion stabil, mit Ausnahme des integrierenden Verhaltens, ist. Die Verfahren CAW, Hanus- und modifizierter Hanus-Algorithmus haben den Vorteil, dass immer, wenn  $u = u_{reg}$  gilt, die Systemdynamik nur von dem entworfenem Regler  $\mathbf{R}(s)$  beeinflusst wird. Allerdings muss beim CAW der Regler  $\mathbf{R}(s)$  mit einer statischen Ausgangsrückführung stabilisierbar sein, das Hanus-Konditionierungsverfahren kann nur bei minimalphasigen Reglern mit Differenzgrad null angewendet werden, und der modifizierte Hanus-Algorithmus gibt keine hinreichende Bedingung für die Stabilität des konditionierten Reglers, so dass  $\mathbf{K}(s)$  durch „trial and error“ abgestimmt werden muss. Auch beim verallgemeinerten AWBT-Kompensator, dem modellbasierten Verfahren und dem allgemeinen AWBT-Kompensator gibt es keine Vorgaben, wie  $\mathbf{K}(s)$  zu parametrieren ist. Je nach Auslegung von  $\mathbf{K}(s)$  kann bei den letzten drei Verfahren  $\mathbf{K}(s)$  die Dynamik des Systems beeinflussen, auch wenn  $u = u_{reg}$  ist. Im Hinblick auf die stoßfreie Umschaltung ist dieser Einfluss des Kompensators auf die Systemantwort unerwünscht, weshalb in solchen Fällen der Kompensator vom Regler bei der Umschaltung getrennt wird, wie in Abbildung 2-14 dargestellt ist.

**Beispiel 2.2:** Es wird noch einmal das System (2-6) aus Beispiel 2.1 mit dem Regler (2-8) aufgegriffen und mit einer Stellgrößenbegrenzung des Eingangs

$$\begin{aligned} u_{max} &= 0.4, \\ u_{min} &= -0.4, \end{aligned} \tag{2-13}$$

wie in Abbildung 2-5 dargestellt, ergänzt. Die Sprungantwort des Systems auf die Vorgabe  $w_{soll} = 1$  ist in Abbildung 2-7 zu sehen; zum Vergleich ist auch die Systemantwort ohne Stellgrößenbegrenzung abgebildet. Die Verschlechterung der Systemdynamik ist auf das Hochlaufen des Integrators im Regler zurückzuführen (Abbildung 2-8), was durch die Differenz zwischen dem Reglerausgang  $u_{reg}(t)$  und der Eingangsgröße  $u(t)$  verursacht wird. Bevor der Regler wieder Werte innerhalb des linearen Abschnitts der Stellgrößenbegrenzung liefern kann, muss der hochgelaufene Integratorwert abgebaut werden, was zu einem verzögerten Reglereingriff und somit zu einer schlechten Regelung des Systems führt.

Um dem Hochlaufen des Integrators entgegenzuwirken, wird der Regler mit der CAW-Struktur wie in Abbildung 2-9 erweitert. Der erweiterte Regler mit CAW zeigt ein verändertes Übertragungsverhalten nur in dem Fall, dass der Reglerausgang mit der Systemeingangsgröße nicht übereinstimmt ( $u_{reg} \neq u$ ); ansonsten behält er seine lineare Übertragungsfunktion  $G_K(s)$  bei, da sie, wegen  $u - u_{reg} = 0$ ,  $u_{reg} \in [u_{min}, u_{max}]$ , durch die zusätzliche Rückführung nicht beeinflusst wird.

Mit  $\alpha = 10$  ist die Systemantwort in Abbildung 2-10 zu sehen. Das Hochlaufen des Integratorwertes findet nicht mehr statt, und die Ausgabe des Reglers bleibt in dem von der Stellgrößenbegrenzung festgelegten Intervall. Dadurch wird der

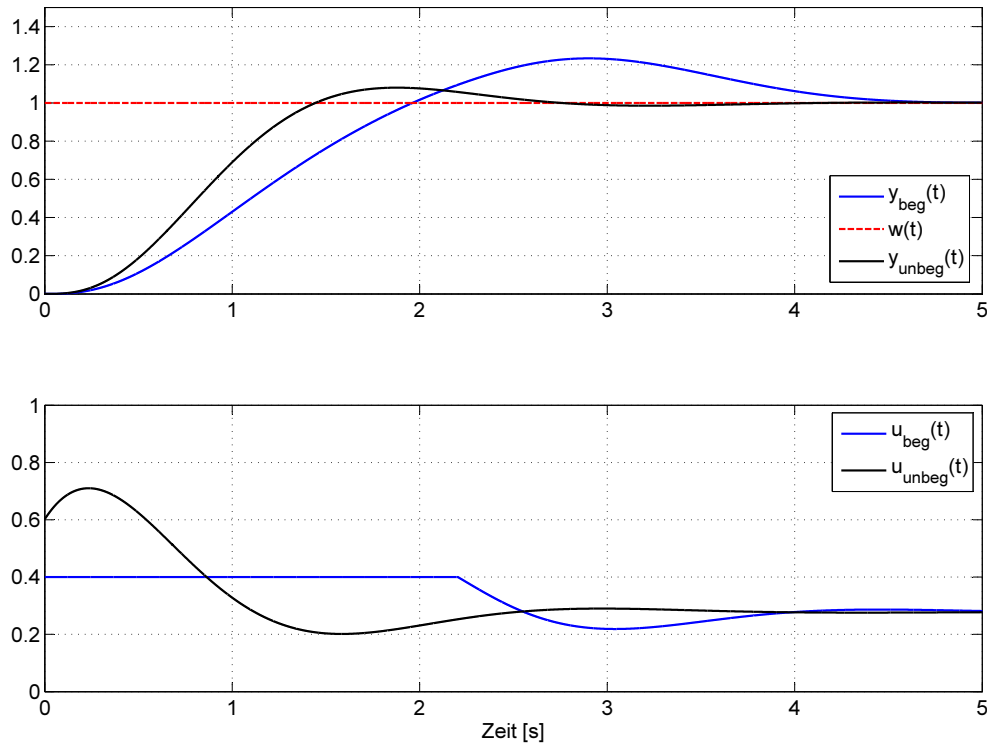


Abb. 2-7: Systemantwort auf die Sollwertvorgabe  $w_{\text{soll}} = 1$  ohne Stellgrößenbegrenzung und mit Stellgrößenbegrenzung nach Gl. (2-13)

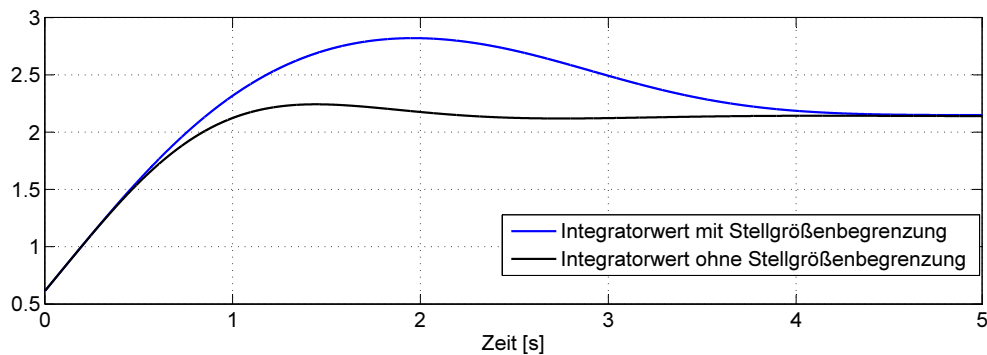


Abb. 2-8: Integratorwerte des Reglers ohne und mit vorhandener Stellgrößenbegrenzung im System

Sollwert, wie zu erwarten, weiterhin langsamer erreicht als ohne die Begrenzung, aber schneller und ohne den großen Überschwinger wie beim Regler ohne CAW und mit vorhandener Begrenzung.

Die dargestellte CAW-Struktur kann man nach geringfügigen Modifikationen auch verwenden, um ein stoßfreies Umschalten zwischen den Reglern aus Beispiel 2.1 zu bewerkstelligen [37]. Dazu müssen anstelle der Stellgrößenbegrenzung in Abbildung 2-9 ein Schalter, der zwischen  $u_1$  und  $u_2$  umschaltet, eingesetzt werden und beide Regler mit dem CAW ausgestattet sein. Durch die CAW-Erweiterung sind beide Regler nun von Beginn an eingeschaltet, und die Reglerausgangsgröße



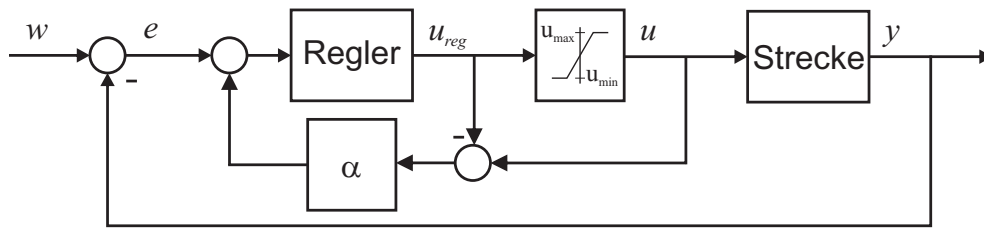


Abb. 2-9: Erweiterung des Reglers um die CAW-Struktur

$u_2$  des inaktiven Reglers wird der Stellgröße  $u_1$  des aktiven Reglers nachgeführt. Somit wird die stoßfreie Umschaltung auf das Folge-Problem reduziert. Aus Abbildung 2-11 wird ersichtlich, dass, während der Regler der Stellgröße  $u$  nachgeführt wird, die Regeldifferenz  $e = w - y$  eine Störgröße für die CAW-Schleife darstellt.

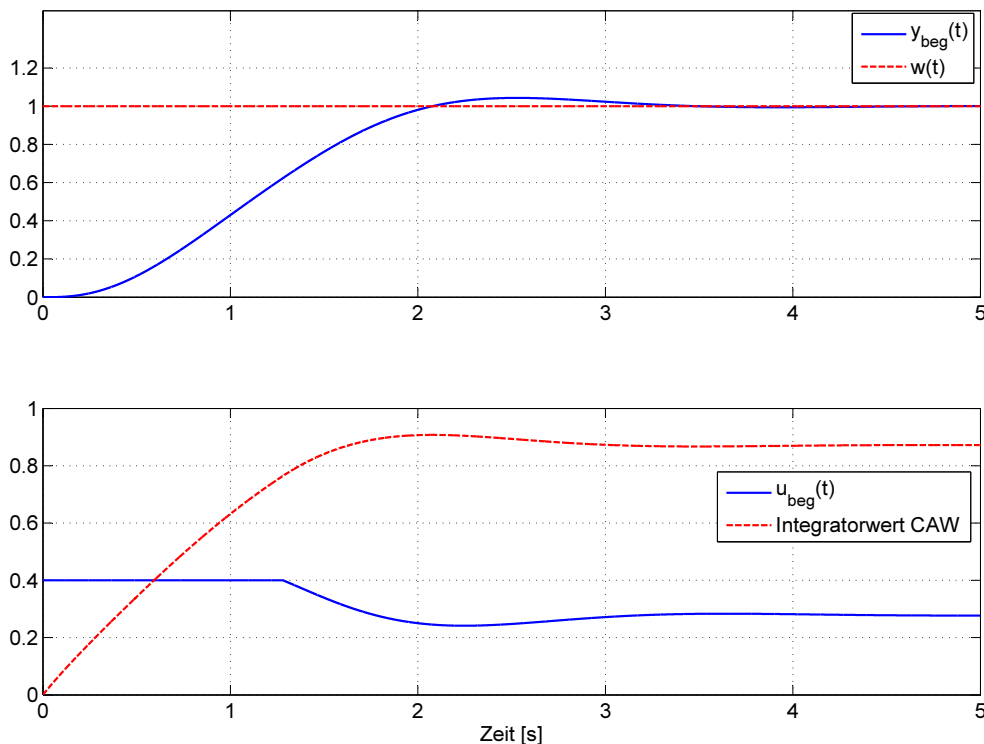


Abb. 2-10: Systemantwort auf die Sollwertvorgabe  $w_{\text{soll}} = 1$  mit Stellgrößenbegrenzung nach Gl. (2-13) und der CAW-Struktur nach Abbildung 2-9

**Beispiel 2.3:** Greifen wir wieder den Fall aus Beispiel 2.1 auf und führen die Umschaltung zwischen den Reglern  $G_l$  und  $G_k$  mit der AWBT-Struktur nach Abbildung 2-11 durch. Wird nun der Schalter zum Zeitpunkt  $t_u = 5$  [s] umgelegt und das System dem Regler  $G_k$  „überlassen“, ist die Rückführung über  $K = \alpha_k$  außer Kraft gesetzt, da  $u_{\text{reg}} = u$  ist. Der Reglerzustand  $X_I(t_u^+)$  wurde durch die zusätzliche Rückführung auf den passenden Wert gesetzt, so dass beim Umschalten keine Sprünge in der Eingangsgröße auftreten. Die Umschaltung des Systems (2-6) mit der CAW-Struktur und  $\alpha_k = 10$  ist in Abbildung 2-12 gezeigt.

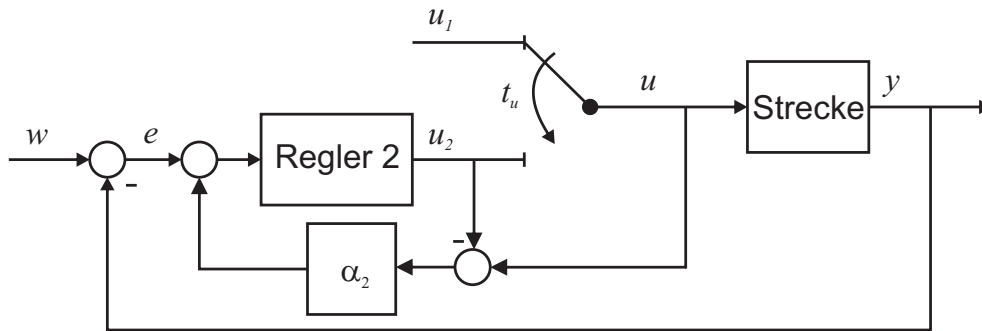


Abb. 2-11: Hälfte der Struktur der stoßfreien Umschaltung, realisiert mit CAW

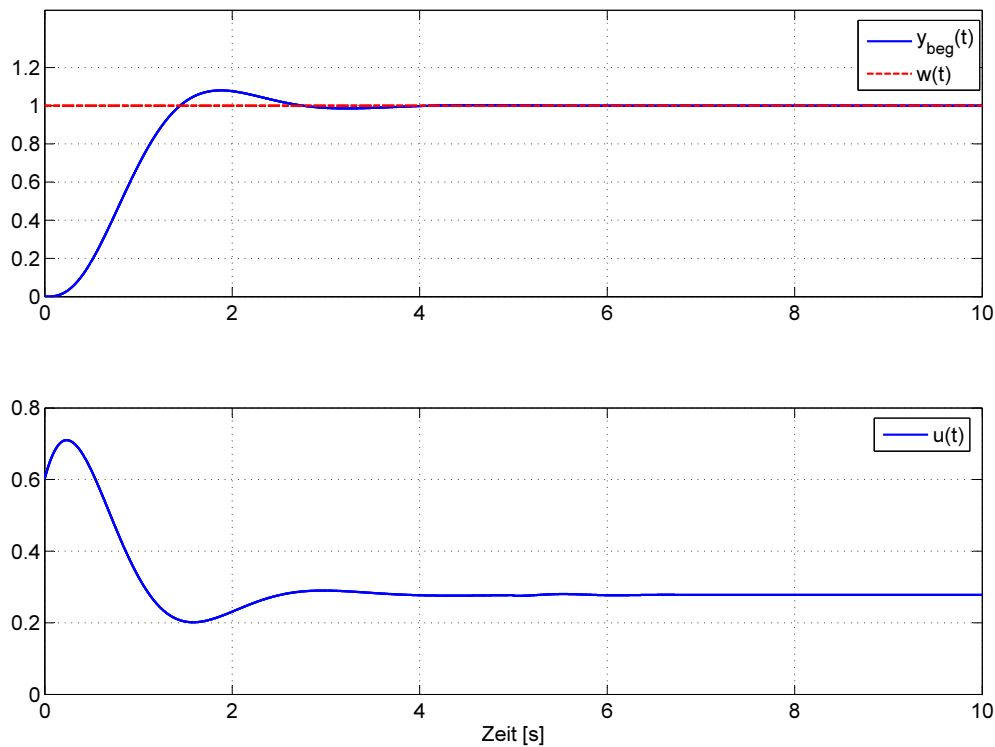


Abb. 2-12: Stoßfreie Umschaltung des Systems (2-6) mit der CAW-Struktur nach Abbildung 2-11

Wie man sieht, beherrscht auch das AWBT-Verfahren die stoßfreie Reglerumschaltung, wenn die Führungsgröße konstant bleibt und das System bereits eingeschwenkt ist. Betrachten wir den Fall, dass beim Umschalten nicht nur der Regler, sondern auch die Führungsgröße geändert wird und

$$w_{soll}(t) = \begin{cases} 1, & t < t_u \\ 2, & t \geq t_u \end{cases} \quad (2-14)$$

gilt. Die Systemantwort ist in Abb. 2-13 zu sehen. Auf den ersten Blick mag die Systemantwort nach der Reglerumschaltung überraschen, doch wenn man bedenkt, dass der Regler  $G_k$  auf Störverhalten ausgelegt wurde, ist das Überschwingen der Regelgröße plausibel. Die AWBT-Verfahren initialisieren nur den

Integrator des Reglers, und das Erreichen des neuen Sollwertes ist nur von der Dynamik des Reglers abhängig. Außerdem ist zum Umschaltzeitpunkt die Stellgröße  $u(t)$  nicht stetig. Der Sprung der Führungsgröße verursacht durch den P-Anteil des Reglers einen Sprung der Stellgröße. Das Verfahren aus Beispiel 2.1 verhält sich bei der Reglerumschaltung genau wie die AWBT-Verfahren, da es im Prinzip auch „nur“ den Integrator des Reglers, über die Berücksichtigung der Stellgröße  $u(t)$  zum Zeitpunkt des Umschaltens, initialisiert.

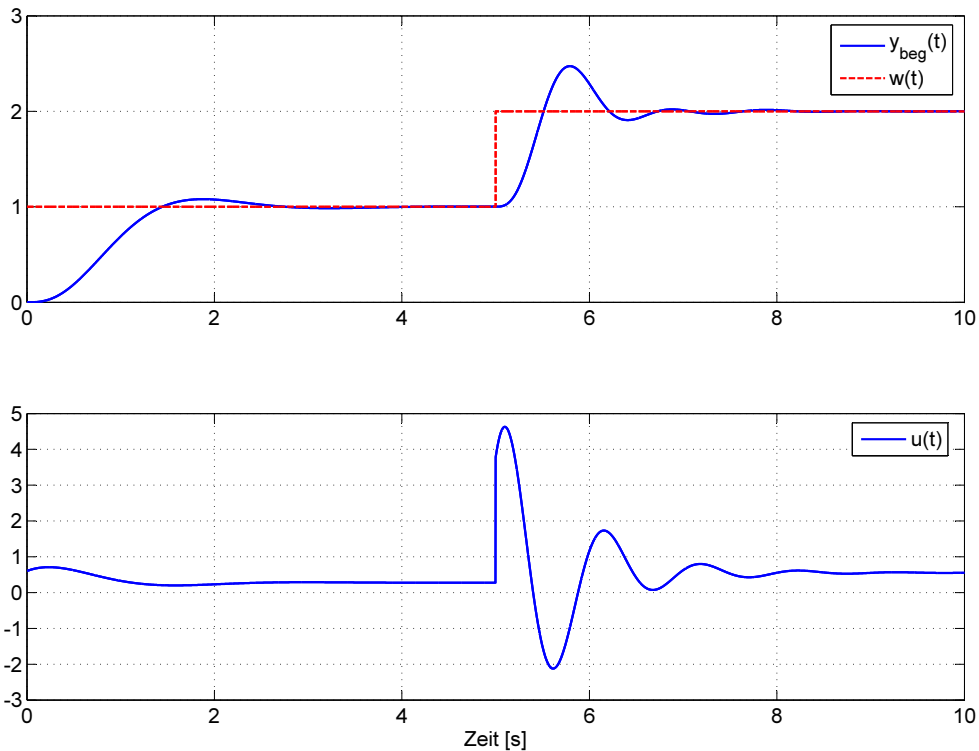


Abb. 2-13: Stoßfreie Umschaltung des Systems (2-6) mit der CAW-Struktur nach Abbildung 2-11 mit Änderung der Führungsgröße

Das vorige Beispiel zeigt anschaulich, wie die Anti-windup-Regelung und das stoßfreie Umschalten mit ein und derselben Struktur realisiert werden können. Nur die Art der Nichtlinearität wird geändert; beim Anti-windup ist es eine Stellgrößenbegrenzung und beim stoßfreien Umschalten der Schalter für die Reglerauswahl. Seit den Anfängen der AWBT-Strukturen werden sie in der Literatur meistens für das Anti-windup erörtert, wobei das stoßfreie Umschalten nur implizit behandelt wird, was auch in aktuelleren Übersichtsveröffentlichungen ([25], [96]) der Fall ist. Trotz der strukturellen Gleichheit bestehen Unterschiede beim Entwurf des Anti-windup-Kompensators und der Folgeregelung des inaktiven Reglers bei der stoßfreien Umschaltung. Auf diesen Sachverhalt weisen die Autoren in [37] hin und stellen eine Folgestruktur (Abbildung 2-14) samt den notwendigen Entwurfschritten des Folgereglers  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{T}_2$  für die stoßfreie Umschaltung vor [37], [38]. Diese Struktur ist ein Spezialfall des allgemeinen AWBT-Kompensators, kann

aber im Gegensatz zu diesem unmittelbar für die Synthese genutzt werden. Die Synthese wird in [100] und [99] modifiziert und verbessert, wonach der Entwurf des Folgereglers  $F_2$ ,  $T_2$  aus Abbildung 2-14 durch Minimieren eines quadratischen Gütemaßes (Riccati-Regler) vollzogen wird.

Unabhängig vom Entwurf des Folgereglers haben die AWBT-Verfahren den strukturellen Nachteil, dass sie stoßfrei nur im eingeschwungenen Zustand des Systems umschalten können und das auch nur, wenn die Führungsgröße der Regler gleich ist und sich bei der Umschaltung nicht ändert. Bei einer Reglerumschaltung mit Änderung der Führungsgröße, wie in Beispiel 2.3, ist die Umschaltung nicht mehr stoßfrei, und die Systemantwort hängt nur von dem aktiven Regler ab. Auch wenn durch zusätzliche Maßnahmen, z. B. durch eine Rampenfunktion für die Führungsgröße, die Stoßfreiheit sichergestellt wird, so ist weiterhin die Systemantwort nach der Umschaltung vom aktiven Regler geprägt. Ist der aktive Regler nicht auf Führungsverhalten ausgelegt, hat man dadurch womöglich ein inakzeptables Überschwingen der Regelgröße bei Änderung der Führungsgröße.

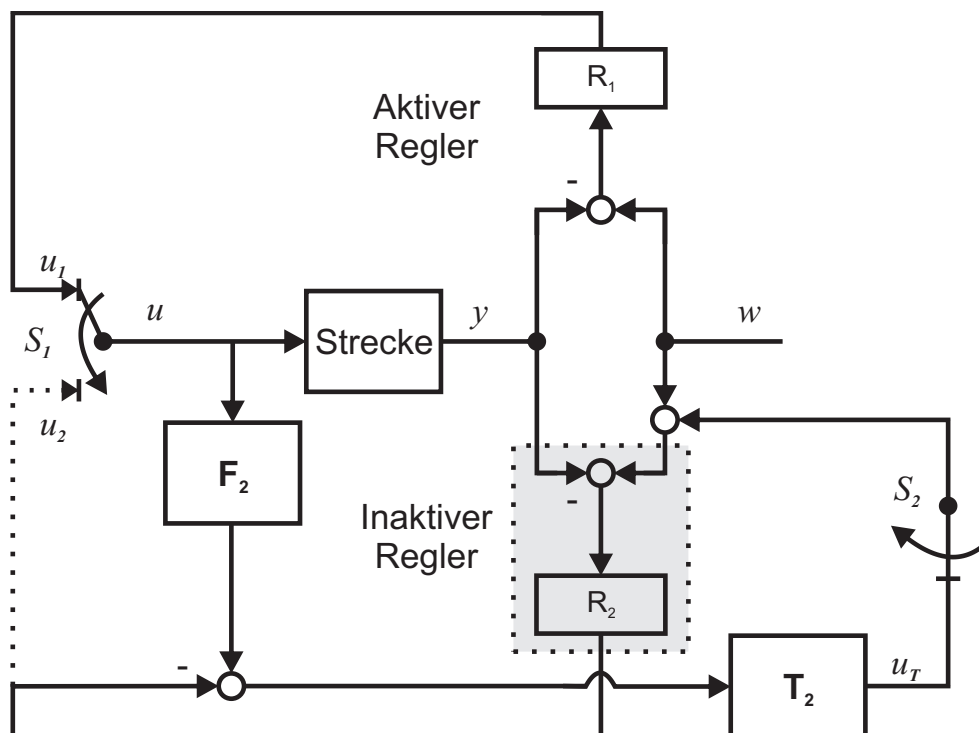


Abb. 2-14: Eine Hälfte der Folgereglerstruktur für stoßfreies Umschalten nach [37]. Die Umschaltung von Regler  $R_1$  auf Regler  $R_2$  erfolgt durch die zeitgleiche Betätigung der Schalter  $S_1$  und  $S_2$

## 2.2.2 Gain-Scheduling

Das Gain-Scheduling-Verfahren ist ein einfaches und auf den ersten Blick vielversprechendes Verfahren für stoßfreie Umschaltungen. Es wurde unter anderem

für Reglerumschaltungen in Kraftwerken mit fossilem Brennstoff [48] oder bei senkrecht startenden Flugzeugen [56] angewendet.

Das Verfahren basiert auf der Idee, die Regler bei der Umschaltung in einem Zeitintervall langsam herunter- bzw. hochzufahren, anstatt in einem Augenblick zwischen ihnen umzuschalten. Da die Umschaltung in einem Zeitintervall stattfindet, können durch die Wahl geeigneter Überblendfunktionen Sprünge in der Eingangsgröße vermieden werden, ohne dass die Regler vorher initialisiert werden müssten. Für das Umschaltintervall  $t \in [t_u, t_u + t_d]$  wird dazu eine differenzierbare, monoton fallende Funktion  $f_u(t)$  ausgewählt mit den Randwerten

$$f_u(0) = 1, \quad f_u(t_d) = 0, \quad (2-15)$$

wobei  $t_d$  die Dauer der Überblendung ist. Ab dem Umschaltzeitpunkt  $t_u$  ist dann für  $t \in [t_u, t_u + t_d]$  der Eingang des Systems

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{reg1}(t) \cdot f_u(t - t_u) + u_{reg2}(t) \cdot (1 - f_u(t - t_u)) \\ &= (u_{reg1}(t) - u_{reg2}(t)) \cdot f_u(t - t_u) + u_{reg2}(t), \end{aligned} \quad (2-16)$$

wobei  $u_1(t)$  die Ausgangsgröße des ausschaltenden und  $u_2(t)$  die des einschaltenden Reglers ist (Abbildung 2-15). Nach  $t = t_u + t_d$  ist der Regler  $R_1(s)$  ausgeschaltet, und  $R_2(s)$  ist aktiv. Die Nachteile der Gain-Scheduling-Methode betreffen das Systemverhalten während der Umschaltung. Zwar ist mit dieser Methode die Systemstabilität gewährleistet, es kann aber zu ungünstigem dynamischen Systemverhalten während des Überblendvorgangs kommen. Dieser Nachteil ist strukturbedingt und kann nicht eliminiert werden. In [10] werden Anpassungen des Reglerentwurfsverfahren vorgestellt, die zu gewissen Verbesserungen führen, allerdings mit dem Nachteil, dass die Regler nicht unabhängig voneinander entworfen werden können.

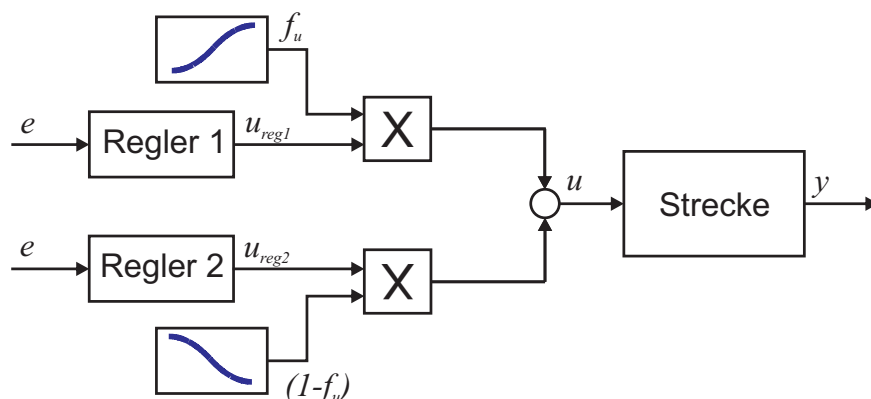


Abb. 2-15: Überblenden der Regler beim Gain-Scheduling-Verfahren zur stoßfreien Umschaltung

**Beispiel 2.4:** Für das System aus Beispiel 2.1 soll mittels des Gain-Scheduling-Verfahrens eine Umschaltung vom Regler  $G_l$  zum Regler  $G_k$  durchgeführt werden. Als Überblendfunktion dient das Polynom 3. Ordnung

$$f_u(t) = -2 \left( \frac{t - t_u}{t_d} \right)^3 + 3 \left( \frac{t - t_u}{t_d} \right)^2, \quad t \in [t_u, t_u + t_d], \quad (2-17)$$

mit der Umschaltdauer  $t_d = 2$  zum Zeitpunkt  $t_u = 5$ . Der Regler  $G_l$  hat als Führungsgröße  $w_l = 1$  und der Regler  $G_k$   $w_k = 2$ . Die Systemantwort in Abbildung 2-16 zeigt anschaulich die Unzulänglichkeit des Gain-Scheduling-Verfahrens. Zwar sind die Stellgröße stetig und in diesem Fall auch das System während des Überblendens stabil, aber der Überschwinger der Regelgröße ist noch größer, als er bei einer einfachen Reglerumschaltung ohne Maßnahmen zur stoßfreien Umschaltung gewesen wäre. Interessant ist außerdem, dass die Dauer der Transition zum neuen Betriebspunkt nicht mit der gewählten Umschaltdauer übereinstimmt und auch länger ist, als sie bei einer einfachen Reglerumschaltung wäre.

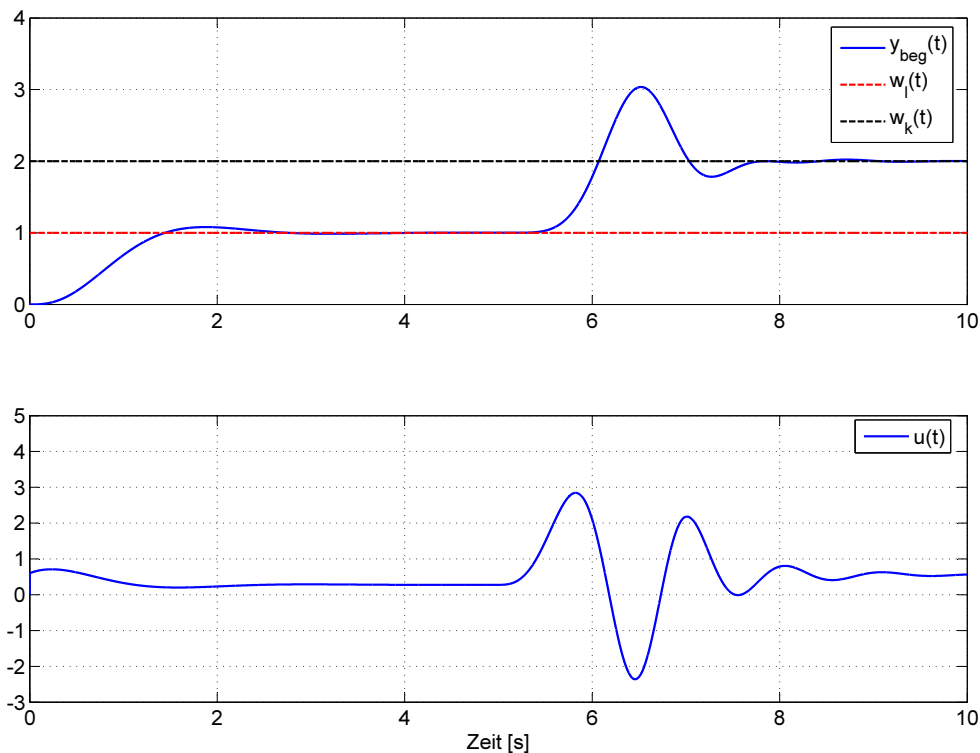


Abb. 2-16: Stoßfreie Umschaltung des Systems (2-6) mit dem Gain-Scheduling-Verfahren nach Abbildung 2-15 und der Umschaltdauer  $t_d = 2$  zum Zeitpunkt  $t_u = 5$

### 2.2.3 $L_2$ -Ansatz

Einen anderen Weg schlagen die Autoren in [105] ein. Die verwendete Struktur zum Umschalten gleicht der des AWBT (Abbildung 2-17), jedoch ist die Stoß-

freiheit der Umschaltung anders definiert. Anstatt über den Eingang definieren die Autoren die stoßfreie Umschaltung über die Zielantwort (*target response*) des Systems, wobei das Entwurfsziel der stoßfreien Umschaltung im Erreichen der optimalen Systemantwort in der  $\mathcal{L}_2$ -Norm des Hilbertraums  $\mathcal{L}_2$  besteht. Im Prinzip ist dieses Verfahren nicht stoßfrei und diesbezüglich der Name irreführend. Nichtsdestotrotz ist dieser Ansatz interessant, da das Umschalten darauf ausgelegt ist, das Schwingen des Systems nach der Umschaltung zu minimieren.

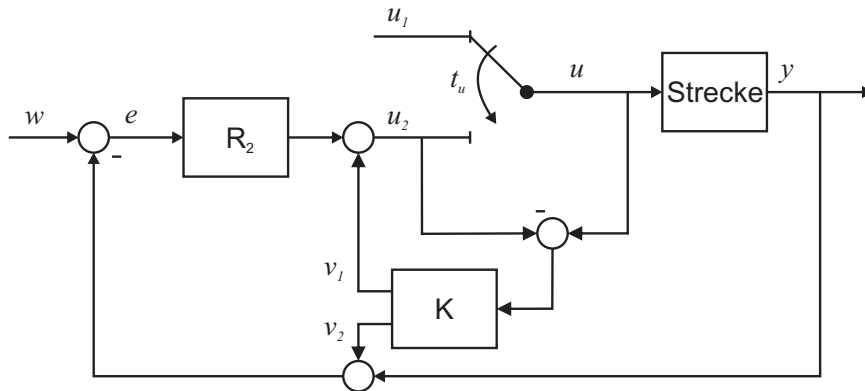


Abb. 2-17: Eine Hälfte der  $\mathcal{L}_2$ -Struktur zur stoßfreien Umschaltung

Die Zielantwort des Systems (2-1) zum Zeitpunkt  $t$  definieren die Autoren in [105] als den Systemzustand  $\mathbf{x}_T(t)$  und den Reglerzustand  $\mathbf{x}_r(t)$ , die sich ergeben würden, wenn die Umschaltung auf den Regler  $R_2$  zum Zeitpunkt  $t_u \rightarrow -\infty$  stattfände. Dazu muss die Systemantwort zum Umschaltzeitpunkt  $t_u \rightarrow -\infty$  existieren und eindeutig sein. Dann sind  $[\mathbf{x}_T(t), \mathbf{x}_r(t)]$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ , jeweils die entsprechenden Zielantworten der System- und Reglerzustände und  $y_T(t)$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ , die entsprechende Zielantwort des Ausgangs. Mit anderen Worten: Die Zielantwort des Systems mit dem Regler  $R_2$  zum Zeitpunkt  $t$  ist der Zustand des Systems und des Reglers  $R_2$  zum Zeitpunkt  $t$ , wenn die Strecke über die Regelschleife des Reglers  $R_2$  seit  $t_0 = -\infty$  geregelt wird. Der Kompensator  $K$  ist durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}(u - u_2) \\ v_1 &= \mathbf{V}\mathbf{x}_k, \quad v_2 = -(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}(u - u_2)) \end{aligned} \tag{2-18}$$

gegeben, wobei  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  jeweils die entsprechende Zustands-, Eingangs-, Ausgangs- und Durchgriffsmatrix des Systems sind. Für die stabilisierende Ver-

stärkung  $\mathbf{V}$  schlagen die Autoren  $\mathbf{V} = \mathbf{X}\mathbf{Q}^{-1}$  als Wahl vor, wobei  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Q}$  die folgenden linearen Matrixungleichungen (LMI) erfüllen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{B}^T & \star \\ \mathbf{C}_z\mathbf{Q} + \mathbf{D}_z\mathbf{X} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (2-19)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} > 0.$$

Mit dem so gewählten Kompensator wird die  $\mathcal{L}_2$ -Norm der Abweichung der Systemantwort von der Zielantwort  $y_e(t) = y(t) - y_T(t)$

$$\|y_e(\cdot)[t_u, \infty)\|_2 \leq \sqrt{\alpha} |\mathbf{x}_e| \quad (2-20)$$

betragen, wobei  $\mathbf{x}_e(t_u) = \mathbf{x}(t_u) - \mathbf{x}_T(t_u)$  die Differenz zwischen dem Istzustand und der Zielantwort des Systemzustandes zum Umschaltzeitpunkt  $t = t_u$  und

$$\|y_e(\cdot)[t_u, \infty)\|_2 = \left( \int_{t_u}^{\infty} |y_e(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (2-21)$$

die  $\mathcal{L}_2$ -Norm von  $y_e(t_u)$  sind. Da  $\alpha$  in den Ungleichungen (2-19) durch Lösen des LMI-Eigenwert-Problems  $\min_{\mathbf{X}, \mathbf{Q}, \alpha} \alpha$  minimiert werden kann, minimiert man auch zugleich die Norm der Abweichung des Ausgangs von der Zielantwort (2-20).

**Beispiel 2.5:** Abbildung 2-18 zeigt die Umschaltung zwischen zwei Reglern des Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -500 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (2-22)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$

mit dem  $\mathcal{L}_2$ -Verfahren. Das Beispiel ist aus [105] übernommen. Der gestrichelte Verlauf der Regel- und der Stellgröße stellt die Zielantwort des Systems (2-22) dar, d. h. den Zustand, den die Regel- und die Stellgröße haben würden, wenn das System mit dem Regler, der nach der Umschaltung aktiv ist, schon seit  $t_0 = -\infty$  aktiv geregelt wäre. Dazu sind in Abbildung 2-18 noch drei Umschaltungen dargestellt. Das wären zum Zeitpunkt  $t = 15$  eine Umschaltung nach dem  $\mathcal{L}_2$ -Verfahren und eine einfache Umschaltung ohne besondere Maßnahmen zum Sicherstellen der Stoßfreiheit. Man sieht im Vergleich zur einfachen Umschaltung, dass das System mit dem  $\mathcal{L}_2$ -Verfahren deutlich schneller zur Führungsgröße konvergiert, dabei die Stellgröße des Systems aber nicht länger stetig ist. Zusätzlich zu diesen zwei Umschaltungen ist die optimale Umschaltung mit dem  $\mathcal{L}_2$ -Verfahren gezeigt, wenn zum Umschaltzeitpunkt  $t_u$  der Istzustand gleich der Zielantwort des Systemzustandes ist:  $\mathbf{x}_e(t_u) = \mathbf{x}(t_u) - \mathbf{x}_T(t_u) = 0$ . Wenn zu diesem Zeitpunkt die



Umschaltung stattfindet, wird das System sofort in den Zustand  $x_T$  übergehen. Voraussetzung ist, dass die Stellgröße den Wert  $x_r(t_u)$  sofort annehmen kann.

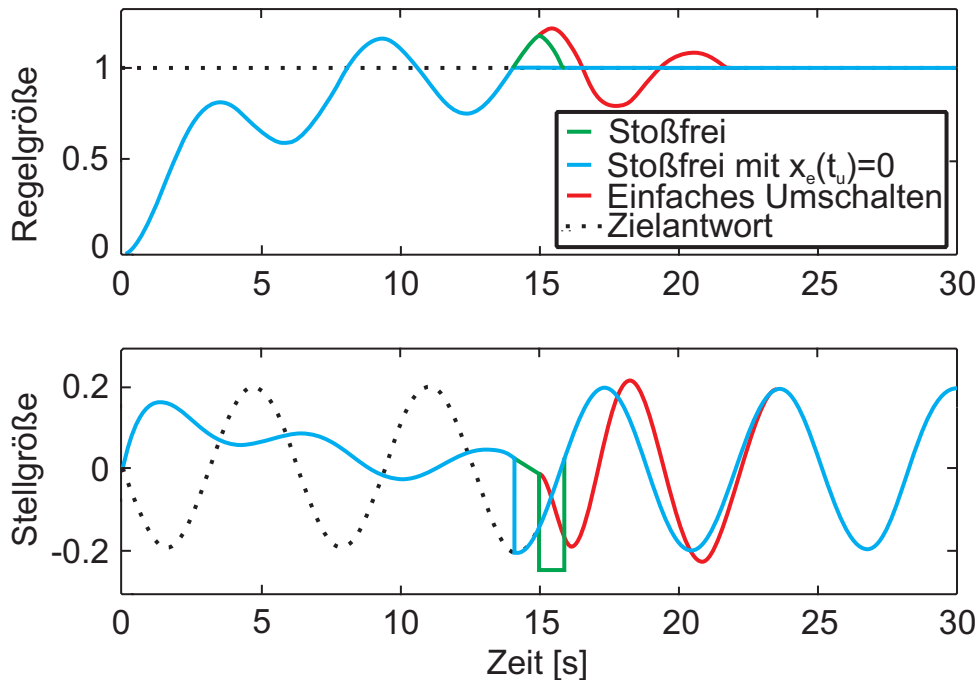


Abb. 2-18: Stoßfreie Umschaltung eines Systems mit dem  $\mathcal{L}_2$ -Verfahren [105]

Der Nachteil dieses Verfahrens ist, dass die Umschaltung zwar geregelt und nach der  $\mathcal{L}_2$ -Norm optimiert abläuft, aber nicht stoßfrei nach Definition 1 ist. Das Gütekriterium (2-20) gibt nämlich nur Auskunft über die Größe der Abweichung; an den Verlauf der Stellgröße  $u(t)$  sind aber keine Bedingungen geknüpft. Die optimale Umschaltung nach diesem Kriterium würde stattfinden, wenn die Zustandsabweichung zum Umschaltzeitpunkt  $x_e(t_u) = 0$  betrüge. Das würde bedeuten, dass sich das System im gewünschten Arbeitspunkt  $x_T(t), t \rightarrow \infty$  befände und der Eingang  $u(t_u)$  sofort zum Umschaltzeitpunkt auf den entsprechenden Wert springen müsste. Die optimale Umschaltung ist aber nur möglich, wenn das System auch irgendwann den Zielzustand  $x_T$  annimmt, was den Nachteil hat, dass der Zeitpunkt der Umschaltung nicht mehr vorgegeben werden kann und das Erreichen des Zielzustands  $x_T$  vom alten Regler beeinflusst wird.

## 2.2.4 Zusammenfassung

Wenn die in diesem Kapitel vorgestellten Verfahren anhand der Anforderungen aus dem Abschnitt 1.2 bewertet werden, so sieht man, dass sie diese jeweils nur teilweise erfüllen.

So ist das System mit den AWBT-Verfahren zu jedem Zeitpunkt stabil, die Umschaltung ist bei konstanten Führungsgrößen stoßfrei, und sie kann auch zu jedem Zeitpunkt erfolgen. Allerdings ist sie nur bedingt stoßfrei und es sind zusätzliche Maßnahmen erforderlich, wenn die Umschaltung auch bei Betriebspunktwechseln stoßfrei sein soll. Die Umschaltung kann auch zwischen beliebigen Reglerstrukturen mit unterschiedlichen Regel- und Führungsgrößen durchgeführt werden. Das große Manko ist aber, dass nach der Umschaltung die Transition des Systems zum Betriebspunkt nur von dem aktiven Regler abhängig ist. Der Verlauf der Regelgröße und die Transitionszeit zum neuen Betriebspunkt werden von den AWBT-Verfahren nicht beeinflusst. Damit eignet sich das AWBT für Reglerumschaltungen in der Nähe des Arbeitspunktes bzw. der Führungsgröße. Wenn bei der Umschaltung die Regler unterschiedliche Führungsgrößen haben, müssten sie auch in Hinsicht auf das Führungsverhalten bei der Umschaltung ausgelegt werden, womit sie nicht unabhängig vom Umschaltverfahren ausgelegt werden können.

Das Gain-Scheduling-Verfahren schien vielversprechend – da es unabhängig von Reglerstruktur, Regelgröße und Führungsgröße stoßfreie Umschaltungen ermöglicht – und wurde im Rahmen einer Diplomarbeit [102] auf seine Eignung für das Reglerumschalten überprüft. Dabei wurden gravierende Nachteile der Struktur festgestellt. So ist die Stabilität des Gesamtsystems während der Umschaltung nicht automatisch durch die Stabilität des Systems mit den einzelnen Reglern gegeben. Dies stellt für die Stabilität des Systems kein großes Problem dar, da die Instabilität nur während der Umschaltung auftreten kann. Es wird aber in den meisten Fällen wegen der Anforderungen an die Regelgüte inakzeptabel sein, dass die Systemzustände während der Umschaltung divergieren. Daher müssten die Regler in Abhängigkeit von diesem Verfahren entworfen werden, um Instabilitäten während der Umschaltung ausschließen zu können. Ein weiteres Problem stellt die Auswahl der Überblenddauer dar. Die Länge dieses Zeitintervalls kann wesentlich und auf nicht intuitive Art die Übergangsantwort des Systems beeinflussen. Wie das Beispiel 2.4 zeigt, können sehr große Über- und Unterschwinger auftreten, die bei den Reglern einzeln nicht vorkommen würden. Damit eignet sich das Gain-Scheduling-Verfahren im Allgemeinen nicht für die Umschaltung mit Anforderungen nach Abschnitt 1.2.

Der  $\mathcal{L}_2$ -Ansatz definiert die Stoßfreiheit der Umschaltung über die Zielantwort des Systems bzw. die Güte der Umschaltung über die  $\mathcal{L}_2$ -Norm der Differenz zwischen dem Ist- und dem Sollzustand des Systems zum Zeitpunkt der Umschaltung. Das Gesamtsystem ist zu jedem Zeitpunkt stabil, und die Umschaltung kann zu jedem Zeitpunkt zwischen beliebigen Reglerstrukturen mit unterschiedlichen Regel- und Führungsgrößen durchgeführt werden. Allerdings ist die Stellgröße im allgemeinen Fall nicht stetig. Mit dem Verfahren kann die Transition zum neuen Betriebspunkt nach der Umschaltung beeinflusst bzw. mittels des Gü-

tekriteriums minimiert werden. Beste Ergebnisse werden allerdings erst erzielt, wenn die Differenz zwischen dem Ist- und dem Sollzustand des Systems hinreichend klein, idealerweise null, ist. Dadurch verliert man aber die Möglichkeit, zu einem beliebigen Zeitpunkt umzuschalten. Da dieses Verfahren die Grundvoraussetzung, die Stetigkeit der Stellgrößen, nicht sicherstellen kann, ist es auch nicht für Umschaltungen nach Abschnitt 1.2 geeignet.

Wenn versucht wird, die vorgestellten Verfahren z. B. beim Abstandsregeltempomaten eines PKWs anzuwenden, um zwischen Geschwindigkeits- und Abstandsregelung umzuschalten, werden deren Unzulänglichkeiten deutlich. Angenommen, dass der Abstandsregler auf Störverhalten optimiert ist und dass, wegen eines langsamer vorausfahrenden Fahrzeugs, eine Umschaltung zur Abstandsregelung durchgeführt werden soll. Da sich das Gain-Scheduling- und das  $\mathcal{L}_2$ -Verfahren grundsätzlich nicht eignen, bleibt das AWBT-Verfahren übrig. Doch hat man bei AWBT-Verfahren das Problem, dass abhängig von Regler- und Führungsgröße zum Zeitpunkt des Umschaltens Überschwinger auftreten können. Bei der Abstandsregelung könnten diese Überschwinger ein Auffahren auf das vorausfahrende Fahrzeug bedeuten, was inakzeptabel ist. Legt man den Regler auf besseres Führungsverhalten aus, so hat man aber ein schlechteres Verhalten beim Fahren in der Kolonne und beim plötzlichen Abbremsen des vorausfahrenden Fahrzeuges, was wiederum nicht zufriedenstellend ist.

Es wird also ein neues Verfahren zum stoßfreien Reglerumschalten gesucht, das die Reglerauslegung nicht beeinträchtigt und das nicht nur die Stoßfreiheit gewährleistet, sondern auch die Transition zum neuen Betriebspunkt von der Reglerdynamik „entkoppelt“.



### 3 Synthese der flachheitsbasierten Reglerumschaltung

Wie in Kapitel 2 gezeigt, besteht bei den vorgestellten Verfahren zur stoßfreien Umschaltung keine Möglichkeit, die Transition zum neuen Betriebspunkt, die bei der Umschaltung auftritt, unabhängig vom Regler zu beeinflussen. Um diese Anforderung beim neuen Verfahren zu erfüllen, bietet sich die Zwei-Freiheitsgrade-Reglerstruktur an, mit der unabhängig vom Regler Stellgrößenanteile an den Eingang des Systems angelegt werden können.

Mit der Zwei-Freiheitsgrade-Reglerstruktur hat man zwar die Möglichkeit, die Systemantwort bei Reglerumschaltungen zu beeinflussen, es bleibt aber die Frage, wie man die Vorsteuerung und dazu die passenden Führungsgrößen berechnet. Generell kann die Berechnung der Trajektorien über die inverse Übertragungsfunktion der Strecke oder mithilfe der Methodik der (differenziellen) Flachheit erfolgen. Der Vorteil der flachheitsbasierten Methodik gegenüber der mit inversen Übertragungsfunktionen liegt darin, dass Vorsteuerungs- und Führungstrajektorien direkt analytisch berechnet werden, ohne dass Differenzialgleichungen zur Laufzeit (online) gelöst werden müssen. In [107] wird die Methodik der Flachheit eher für den Offline-Entwurf von Vorsteuerungen als nützlich angesehen und für Online-Anwendungen vor allem als eine Methodik für den Reglerentwurf [106]. Im Folgenden wird gezeigt, dass sich die Methodik der Flachheit aber durchaus für die Online-Berechnung von Vorsteuerungen eignet und insbesondere auch bei OCM-Rekonfigurationen angewendet werden kann, um die Anforderungen aus Abschnitt 1.2 zu erfüllen.

Wesentliches Merkmal differenziell flacher Systeme ist die Existenz des sogenannten flachen Ausgangs, der das dynamische Verhalten des Systems parametrisiert, d. h. alle Zustände und der Eingang des Systems können als Funktionen des flachen Ausgangs und einer endlichen Anzahl seiner Ableitungen dargestellt werden. Deshalb kann aus der Kenntnis des Verlaufs des flachen Ausgangs, ohne Lösen von Differenzialgleichungen, der Verlauf der Eingangs- und der Zustandsgrößen des Systems bestimmt werden. Diese Eigenschaft gilt für alle Systeme, egal ob es sich um ein lineares, nichtlineares, SISO, MIMO, minimalphasiges oder nichtminimalphasiges System handelt, solange das System flach ist. Deshalb kann diese Eigenschaft bei einer Vielzahl von Systemen eingesetzt werden, um Sollverläufe des Eingangs zu berechnen, die bei der Reglerumschaltung das System vom Ist- in den Sollzustand entlang einer vorgegebenen Regelgrößen-Trajektorie überführen. Die berechneten Sollverläufe werden dann als Vorsteuersignale zum Reglerausgang hinzuaddiert, wobei der Regler passend zu der Vorsteuerung die entsprechenden vorgegebenen Regelgrößen-Trajektorien als Führungsgrößen bekommt. Wie man sieht, bietet sich wegen dieser Eigenschaft die flachheitsbasierte Berechnung

der Vorsteuer- und der Führungsgrößentrajektorien für die Zwei-Freiheitsgrade-Reglerstruktur geradezu an.

Im Folgenden werden zuerst die Zwei-Freiheitsgrade-Reglerstruktur und die differenzielle Flachheit mit ihren Eigenschaften vorgestellt, bevor die Struktur der flachheitsbasierten Reglerumschaltung erläutert wird.

### 3.1 Zwei-Freiheitsgrade-Reglerstruktur

Die Struktur mit zwei Freiheitsgraden entstand aus der Grundidee, „Unbekanntes zu regeln und Bekanntes zu steuern“, in den frühen 1960er Jahren [53]. Da leistungsfähige Elektronik zunehmend verfügbar ist und die dazugehörige Software immer einfacher zu bedienen, gewinnt dieser Ansatz weiter an Bedeutung. In [65] werden Möglichkeiten und Grenzen der Struktur für lineare Systeme geschildert. Die Zwei-Freiheitsgrade-Grundstruktur für das lineare System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad y \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{3-1}$$

mit der Eingrößenregelung  $G_R(s)$  der Regelgröße  $y$  ist in Abbildung 3-1 dargestellt. Die Regelstruktur besteht aus zwei Teilen: einer Vorsteuerung  $u^*(t)$ , die das System in den gewünschten Sollzustand überführen soll, und einer Regelung für den Ausgang  $y(t)$ , die das System bei einer Abweichung von der Solltrajektorie  $y^*(t)$ , verursacht durch Modellungenauigkeiten oder Störungen, dieser Trajektorie nachführt. Für die Zustandsregelung mit  $u_R = \mathbf{k}^T \mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{e}_x = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$  ist eine entsprechende Struktur in Abbildung 3-2 zu sehen. In [86] ist die Struktur 3-2 um eine Störgrößenaufschaltung und einen Zustands(differenz)beobachter erweitert, die hier der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet sind.

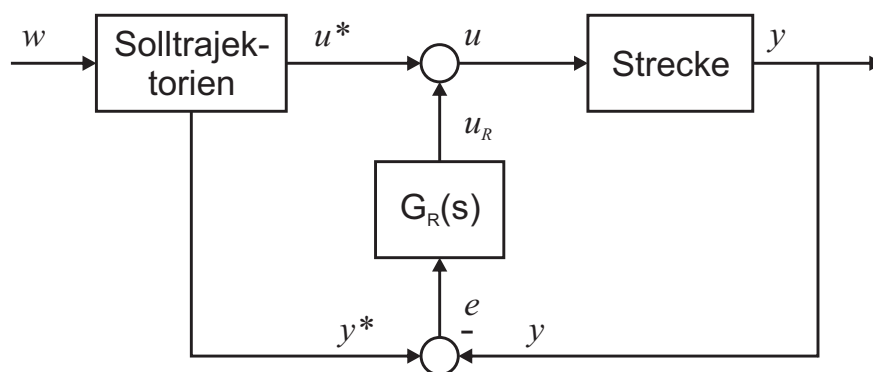


Abb. 3-1: Zwei-Freiheitsgrade-Struktur für die klassische Eingrößenregelung

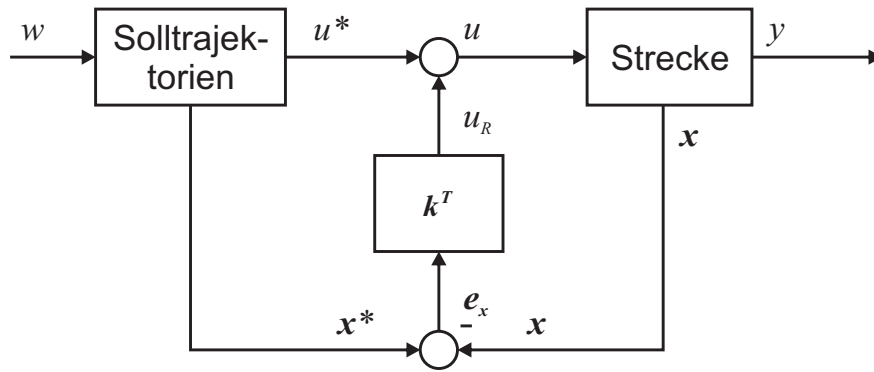


Abb. 3-2: Zwei-Freiheitsgrade-Struktur für die Eingrößen-Zustandsregelung

Die Berechnung der Solltrajektorien  $u^*(t)$ ,  $y^*(t)$ ,  $\mathbf{x}^*(t)$  sollte dabei, wie in [65] und [86] vorgeschlagen, modellgestützt erfolgen:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b}u^*, \quad (3-2a)$$

$$y^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*, \quad (3-2b)$$

$$u^* = f^*(\mathbf{x}^*, w), \quad (3-2c)$$

wobei das Stellgesetz  $f^*(\mathbf{x}^*, w)$  das gewünschte, unter Umständen nichtlineare Führungsverhalten erzeugt. Dieser Weg der Trajektorienberechnung ist mit einer Integration der Differenzialgleichungen (3-2a) verbunden und hat eine durch das Stellgesetz  $f^*(\mathbf{x}^*, w)$  vorgegebene Dynamik. Die Vorsteuerung  $u^*$  aus Gleichung (3-2c) ist unabhängig vom Regler und „steuert das Bekannte“. Ist das System vollständig identifiziert und wirken keine Störgrößen auf das System ein, so trägt der Regler nichts zur Eingangsgröße bei, da der Soll-Istwert-Vergleich in diesem Fall stets gleich Null ist.

Für eine stoßfreie Reglerumschaltung kann diese Struktur in einfacher Weise genutzt werden, wenn zum Zeitpunkt der Reglerumschaltung sichergestellt wird, dass der Soll-Istwert-Vergleich Null ist und die Führungsgröße unverändert bleibt. Des weiteren ist es nötig, nach der Umschaltung die passenden Überführungstrajektorien  $u^*$  und  $y^*$  zu dem neuen Arbeitspunkt bzw. Sollwert zu generieren. Die modellgestützte Methode aus [65] und [86] ist dafür nicht sehr gut geeignet, weil einerseits die Integration von Differenzialgleichungen (3-2a) je nach System sehr rechenintensiv sein kann und andererseits durch das Stellgesetz (3-2c) die Dynamik für den Arbeitspunktwechsel bei der Reglerumschaltung vorgegeben und zur Laufzeit nicht änderbar wäre.

Wie im Abschnitt 3.2 gezeigt wird, bietet sich bei Systemen, die flach sind, eine wesentlich einfachere Berechnung der Vorsteuerungs- und der Solltrajektorien an. Denn bei flachen Systemen können modellbasierte Überführungstrajektorien zur Laufzeit berechnet werden, ohne Differenzialgleichungen integrieren zu müssen. Außerdem ist die Dynamik für den Arbeitspunktwechsel flexibel und kann für jede

Reglerumschaltung zum Umschaltzeitpunkt neu festgelegt werden. Die Flachheit macht es möglich, die Struktur mit zwei Freiheitsgraden in einfacher Weise für die stoßfreie Umschaltung zu nutzen.

## 3.2 Differenzielle Flachheit

Der Begriff „differenzielle Flachheit“ wurde erstmals und mathematisch formal im Rahmen der Differentialalgebra von Fliess et al. in [27] und [28] eingeführt. Ohne auf differentialalgebraische oder -geometrische Begriffe Bezug zu nehmen, haben die Autoren Rothfuß et al. in [89] und [88] den Flachheitsbegriff definiert und anschaulich eingeführt. Die folgende Definition der Flachheit und der Eigenschaften flacher Systeme ist größtenteils aus [88] übernommen.

### 3.2.1 Definition der Flachheit

**Definition 2:** Ein nichtlineares dynamisches System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad \text{Rang} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = m, \quad (3-3)$$

mit dem  $n$ -dimensionalen Zustand  $\mathbf{x}$  und dem  $m$ -dimensionalen Eingang  $\mathbf{u}$  heißt (differenziell) flach, wenn es einen fiktiven Ausgang  $\mathbf{y}_f = (y_{f1}, y_{f2}, \dots, y_{fm})$  mit  $\dim \mathbf{y}_f = m$  gibt, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

- 1) Die Größen  $y_{fi}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , lassen sich als Funktionen der Zustandsvariablen  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , der Eingangsgrößen  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und einer endlichen Anzahl von Zeit-ableitungen  $u_i^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, \alpha_i$ , ausdrücken. Für das nichtlineare System (3-3) bedeutet dies, dass sich der fiktive Ausgang  $\mathbf{y}_f$  in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_f &= \phi(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_1^{(\alpha_1)}, \dots, u_m, \dots, u_m^{(\alpha_m)}) \\ &= \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)}) \end{aligned} \quad (3-4)$$

darstellen lässt.

- 2) Die Zustandsvariablen  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , bzw. die Eingangsgrößen  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , lassen sich als Funktion der  $y_{fi}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und einer endlichen Anzahl von deren Zeitableitungen  $y_{fi}^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, \beta_i + 1$ , darstellen, d. h.

$$\mathbf{x} = \psi_1(y_{f1}, \dots, y_{f1}^{(\beta_1)}, \dots, y_{fm}, \dots, y_{fm}^{(\beta_m)}) = \psi_1(\mathbf{y}_f, \dot{\mathbf{y}}_f, \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta)}) \quad (3-5a)$$

$$\mathbf{u} = \psi_2(y_{f1}, \dots, y_{f1}^{(\beta_1+1)}, \dots, y_{fm}, \dots, y_{fm}^{(\beta_m+1)}) = \psi_2(\mathbf{y}_f, \dot{\mathbf{y}}_f, \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta+1)}). \quad (3-5b)$$



- 3) Die Komponenten von  $\mathbf{y}_f$  sind differenziell unabhängig, d. h. sie erfüllen keine Differentialgleichungen der Form

$$\varphi(\mathbf{y}_f, \dot{\mathbf{y}}_f, \dots, \overset{(\gamma)}{\mathbf{y}}_f) = 0. \quad (3-6)$$

Sind diese Bedingungen zumindest lokal erfüllt, so heißt der fiktive Ausgang (3-4) flacher Ausgang, und das System (3-3) heißt flach.

**Bemerkung 2:** Aufgrund der Gleichungen (3-5) des flachen Systems kann auch jede Funktion  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \overset{(s)}{\mathbf{u}})$  in der Form  $\psi(\mathbf{y}_f, \dot{\mathbf{y}}_f, \dots, \overset{(\beta+s+1)}{\mathbf{y}}_f)$  dargestellt werden.

**Bemerkung 3:** Der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  ist über den flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f$  definiert als

$$\mathbf{x}_0 = \psi_1(\mathbf{y}_f(0), \dot{\mathbf{y}}_f(0), \dots, \overset{(\beta)}{\mathbf{y}}_f(0)). \quad (3-7)$$

**Bemerkung 4:** Ist die Bedingung 2) gültig bzw. die Gleichung (3-5b), dann ist die Bedingung 3) äquivalent zu

$$\dim \mathbf{y}_f = \dim \mathbf{u}. \quad (3-8)$$

Dies bedeutet, dass die Komponenten von  $\mathbf{y}_f$  genau  $m$  Differentialgleichungen (3-5b) erfüllen und damit gleichzeitig keine homogene Differentialgleichung der Form (3-6); d. h. sie sind differenziell unabhängig.

Da wegen der Eigenschaft 2)  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  als Funktionen des flachen Ausgangs  $\mathbf{y}_f$  und einer endlichen Anzahl seiner Ableitungen beschrieben werden können, folgt aus (3-3), dass auch  $\dot{\mathbf{x}}$  als Funktion von  $\mathbf{y}_f$  ausgedrückt werden kann. Somit können alle Systemvariablen als Funktionen von  $\mathbf{y}_f$  dargestellt werden, ohne dass eine Integration von Differentialgleichungen vorgenommen werden müsste. Der flache Ausgang und eine endliche Anzahl seiner Ableitungen beschreiben vollständig das dynamische Verhalten des Systems, weshalb auch von einer (endlichen) Parametrierung des Systems durch den flachen Ausgang gesprochen wird.

**Beispiel 3.1:** Anhand der Gleichungen des permanenterregten Gleichstrommotors aus Abbildung 3-3 wird der flache Ausgang des Systems bestimmt. Die Gleichungen des Systems lauten:

$$L\dot{i} + Ri = U - K_e\omega \quad (3-9a)$$

$$J\dot{\omega} + b\omega = \tau_M \quad (3-9b)$$

$$\tau_M = K_m i, \quad (3-9c)$$

wo  $R$ ,  $L$ ,  $K_e$ ,  $J$ ,  $b$ ,  $K_m$ ,  $\tau_M$  Ankerwiderstand, Ankerinduktivität, Generator-Spannungskonstante, Rotorträgheitsmoment, Rollreibungs- und Drehmomentkonstante und Antriebsmoment sind. Die Zustandsgrößen sind die Drehzahl  $\omega$  und der Läuferstrom  $i$ , die Eingangsgröße ist die Ankerspannung  $U$ .

Als Kandidat für den flachen Ausgang wird die Drehzahl  $\omega = y_k$  ausgewählt und überprüft, ob für diese Zustandsgröße die Bedingungen 1) bis 3) erfüllt sind. Aus Gleichung (3-9a) ist ersichtlich, dass die Bedingung 1) erfüllt ist, da der Kandidat für den flachen Ausgang  $y_k = \omega$  eine Zustandsgröße des Systems ist. Bedingung 2) ist erfüllt, da sowohl die Zustände als auch der Eingang als Funktionen von  $y_k$  und einer endlichen Anzahl seiner Ableitungen darstellbar sind:

$$\omega = y_k \quad (3-10a)$$

$$i = \psi_1(\omega, \dot{\omega}) \quad (3-10b)$$

$$U = \psi_2(\omega, \dot{\omega}, \ddot{\omega}). \quad (3-10c)$$

Da Bedingung 2) erfüllt ist, ist  $y_k$  ein flacher Ausgang des Systems, da  $y_k$  die gleiche Dimension wie der Eingang  $U$  besitzt:

$$\dim y_k = \dim U. \quad (3-11)$$

Die Gültigkeit der Bedingung 3) kann auch über das Gleichungssystem (3-9) bewiesen werden, da der flache Ausgang die Differentialgleichung (3-10c) in Abhängigkeit von  $U$  und keine homogene Differentialgleichung der Form (3-6) erfüllt.

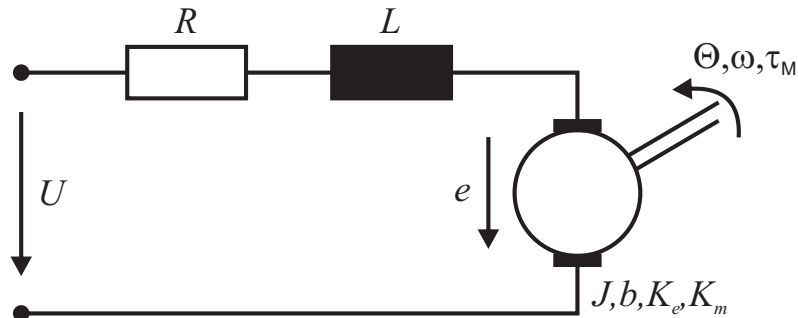


Abb. 3-3: Schaltbild eines permanentenerregten Gleichstrommotors im lastfreien Betrieb

Für das System (3-9) ist  $\widehat{y}_k = \arctan \omega$  auch ein flacher Ausgang, da er auch alle an den flachen Ausgang gestellten Anforderungen erfüllt.

**Bemerkung 5:** Für jedes flache System existieren unendlich viele flache Ausgänge, die immer ineinander umgerechnet werden können. Jeder flache Ausgang erfüllt Bedingung (3-4), weshalb er nach Bemerkung 2 als eine Funktion eines beliebigen anderen flachen Ausgangs und einer endlichen Anzahl seiner Ableitungen ausgedrückt werden kann.

### 3.2.2 Bestimmung des flachen Ausgangs

Ein lineares zeitinvariantes Mehrgrößensystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad (3-12)$$

ist steuerbar, wenn die Kalmansche Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{K}_s$  den Rang

$$\text{Rang } \mathbf{K}_s = \text{Rang} \left[ \mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B} \right] = n \quad (3-13)$$

besitzt [60].

**Bemerkung 6:** Ein flacher Ausgang des linearen zeitinvarianten Eingrößensystems (2-1) ist durch das Produkt der letzten Zeile der invertierten Kalmanschen Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{K}_s$  mit dem Systemzustand  $\mathbf{x}$  gegeben [93]:

$$y_f = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \left[ \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{b} \right]^{-1} \mathbf{x}. \quad (3-14)$$

Zur Überprüfung der Aussage aus Bemerkung 6 wird die Zustandstransformation  $\mathbf{z} = \mathbf{K}_s\mathbf{x}$  am steuerbaren System (2-1) durchgeführt. Dies resultiert in der Beschreibung des Systems in Beobachter-Normalform

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{b}}\mathbf{u}, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}_s, \quad \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{b}, \quad (3-15)$$

wobei

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

sind. Die Zustandsvariable  $z_n$  parametrisiert dann sowohl den gesamten Zustand als auch den Eingang des Systems:

$$\begin{aligned} z_{n-1} &= \dot{z}_n + a_{n-1}z_n \\ z_{n-2} &= \ddot{z}_n + a_{n-1}\dot{z}_n + a_{n-2}z_n \\ &\vdots \\ z_1 &= z_n^{(n-1)} + a_{n-1}z_n^{(n-2)} + \dots + a_1z_n \\ u &= z_n^{(n)} + a_{n-1}z_n^{(n-1)} + \dots + a_0z_n \end{aligned} \quad (3-17)$$

und ist somit der flache Ausgang des Systems:  $z_n = y_f$ .

Da  $y_f$  eine lineare Funktion des Systemzustands ist, können die Ableitungen des flachen Ausgangs  $y_f^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , durch folgende Beziehungen beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 y_f &= \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x} \\
 \dot{y}_f &= \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} u \\
 \ddot{y}_f &= \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \mathbf{b} u + \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{b}} u \\
 &\vdots \\
 y_f^{(n-1)} &= \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}^{(n-1)} \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}^{(n-2)} \mathbf{b} u + \dots + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b}^{(n-2)} u,
 \end{aligned} \tag{3-18}$$

wobei die Gleichung 3-14  $\boldsymbol{\lambda}^T$  als

$$\boldsymbol{\lambda}^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1] [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{b}]^{-1} \tag{3-19}$$

vorgibt. Da die Eigenschaft des flachen Ausgangs (3-5a) bzw. die Gleichungen (3-17) besagen, dass die Systemzustände durch den flachen Ausgang und eine endliche Anzahl seiner Ableitungen beschrieben sind, müssen in der Gleichung (3-18) die Ausdrücke mit der Eingangsgröße und ihren Ableitungen  $u^{(j)}$ ,  $j = 0, \dots, n-2$ , verschwinden, d. h.

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \mathbf{b} = 0, \quad \dots, \quad \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b} = 0. \tag{3-20}$$

Der flache Ausgang und seine Ableitungen sind dann als

$$\begin{bmatrix} y_f \\ \dot{y}_f \\ \vdots \\ y_f^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^T \\ \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}^{(n-1)} \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{3-21}$$

gegeben. Der flache Ausgang und seine Ableitungen können bei linearen Systemen nach Gleichung (3-21) berechnet werden. Dies ist, wie später in Abschnitt 4.1 gezeigt wird, für die Berechnung der Vorsteuerungs- und der Solltrajektorien nützlich, da die Gleichung (3-21) zum Umschaltzeitpunkt die Anfangswerte der Solltrajektorien für den flachen Ausgang bestimmt.

Ist das LZI-Mehrgrößensystem (3-12) steuerbar bzw. erfüllt die Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{K}_s$  die Gleichung (3-13), kann aus  $\mathbf{K}_s$  eine Matrix  $\mathbf{Q}$  vom vollen Rang  $n \times n$  extrahiert werden:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{(\gamma_1-1)}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{A}\mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{A}^{(\gamma_m-1)}\mathbf{b}_m], \tag{3-22}$$

wobei  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  die Kronecker-Steuerbarkeitsindizes [71] des Systems sind, welche die Gleichung

$$\sum_1^m \gamma_i = n \quad (3-23)$$

erfüllen. Ein flacher Ausgang  $\mathbf{y}_f$  des Systems lautet dann

$$\mathbf{y}_f = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}, \quad (3-24)$$

wobei  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $n$ -dimensionale Zeilenvektoren der Form

$$\phi_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \quad (3-25)$$

sind, mit der 1 auf der Position  $\sum_{i=1}^j \gamma_i$  des Vektors  $\phi_j$  [93]. Die Steuerbarkeit eines LZI-Systems ist also hinreichend, damit das System flach ist.

Ist der Rang von  $\mathbf{K}_s = h < n$ , so existiert ein nicht steuerbares Teilsystem der Dimension  $\mathbb{R}^{n-h}$ , das aber nicht flach ist. Der Beweis ist einfach zu erbringen, da das ungesteuerte Teilsystem keinen Eingang besitzt und es somit nach Gleichung (3-11)  $\dim \mathbf{u} = 0 = \dim \mathbf{y}_f$  auch keinen flachen Ausgang geben kann. Damit ist die Steuerbarkeit auch eine notwendige Bedingung für die Flachheit linearer zeitinvarianter Systeme, und es gilt

**Bemerkung 7:** Ein lineares zeitinvariantes System ist genau dann flach, wenn es steuerbar ist.

Da auch bei linearen zeitvarianten Systemen die Steuerbarkeit eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz eines flachen Ausgangs ist, sind die Eigenschaften Flachheit und Steuerbarkeit sowohl für zeitvariante als auch für zeitinvariante lineare Systeme äquivalent [88].

Bei nichtlinearen Systemen (3-3) ist die Steuerbarkeit eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Flachheit. Da also jedes flache System auch immer steuerbar ist, kann die Flachheit auch als eine Verallgemeinerung der Steuerbarkeit aufgefasst werden [28].

Die Bestimmung eines flachen Ausgangs ist bei flachen linearen Systemen immer möglich. Falls das System steuerbar ist, ist bei linearen Eingrößensystemen  $y_f$  durch Gleichung (3-14) gegeben und bei Mehrgrößensystemen durch Gleichung (3-24) definiert.

Bei flachen nichtlinearen Systemen (3-3) gestaltet sich die Bestimmung des flachen Ausgangs ungleich schwieriger, da bis vor Kurzem keine hinreichende und notwendige Bedingung für die Flachheit bekannt war. In [70] sind im Rahmen

der Differentialgeometrie der unendlichen Strahlen und Prolongationen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Flachheit von Systemen in der Form (3-3) gegeben, mitsamt einem abstrakten Algorithmus zur Bestimmung von  $\mathbf{y}_f$ , dessen weitere Entwicklung in Richtung einer formalen rechnerischen Methode zur Bestimmung des flachen Ausgangs geht. Erste Schritte erfolgten in [4], wo alle notwendigen Operationen als zu Computeralgebrasystemen kompatible Funktionen implementiert wurden.

Obwohl Algorithmen für das Auffinden eines flachen Ausgangs bei nichtlinearen Systemen ausgearbeitet wurden, bleibt das Problem, dass sie nicht notwendigerweise in endlicher Zeit zu einem Ergebnis kommen müssen. Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass ein flacher Ausgang des Systems bekannt ist, und an dieser Stelle auf das Aufführen der Bedingungen und des Verfahrens zur Bestimmung von  $\mathbf{y}_f$  bei nichtlinearen Systemen verzichtet und auf die bereits genannte Literatur verwiesen.

In [88] wird auch vorgeschlagen, heuristisch einen geeigneten Kandidaten für einen flachen Ausgang auszuwählen, der Gleichung (3-4) erfüllt, und dann zu überprüfen, ob die Bedingungen (3-5) und (3-6) erfüllt sind. Dieses Vorgehen ist iterativ und führt nicht zwingend zum Ziel. Es kann aber in der Praxis trotzdem erfolgreich sein, da häufig der flache Ausgang oder wenigstens einige seiner Komponenten einigen Regelgrößen des Systems entsprechen.

**Bemerkung 8:** Als Defekt  $\delta$  nicht flacher Systeme wird die Differenz zwischen der minimalen Anzahl von Funktionen  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_M)$ , die zur Parametrierung des Systems in Form der Gleichungen (3-5) benötigt werden, und der Anzahl der unabhängigen Eingänge des Systems  $m$ ,  $m < M$ ,

$$\delta = M - m \tag{3-26}$$

bezeichnet.

### 3.2.3 Flachheitsbasierte Steuerung und Regelung

Durch das Ausnutzen der Struktur und der Eigenschaften der Flachheit können sehr elegant Steuerungen und Regler entworfen werden. Inzwischen gibt es eine Vielzahl an Arbeiten, in denen flachheitsbasierte Steuerungen und/oder Regelungen bei realen Problemstellungen Anwendung finden. Es sind unter anderen Systeme wie Bioreaktoren [90], Großmanipulatoren [11], Hafenmobilkräne [6], seilgeführte Handhabungssysteme [73], Kraftwerke [98], Induktionsmotoren [74], [57], Dieselmotoren [80], autonome Unkrautvernichter [21], induktive Erwärmungsöfen [26] und Systeme mit verteilten Parametern mit Rand- und gleichverteiltem Eingriff, wie z. B. elastische Balken [91], Wärmeleitsysteme [77] und Glasvorherde [62].

Ein Vorteil der flachen Systeme besteht darin, dass sie durch eine Zustandsrückführung exakt zustandslinearisierbar sind. Um dies zu erreichen, führt man in (3-5b) neue Eingänge

$$v_i \stackrel{!}{=} y_{fi}^{(\kappa_i)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \kappa_i = \kappa = n, \quad (3-27)$$

ein, wobei die ganzen Zahlen  $\kappa_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , die verallgemeinerten Steuerbarkeitsindizes des Systems (3-3) sind. Die verallgemeinerten Steuerbarkeitsindizes treten bei nichtlinearen Systemen an Stelle der Kroneckerschen Steuerbarkeitsindizes und sind i. A. von denen verschieden [88]. Praktisch kennzeichnet  $\kappa_i$  die niedrigste Ableitung des flachen Ausgangs  $y_{fi}$ , die unmittelbar durch den Steuervektor  $\mathbf{u}$  beeinflusst werden kann. Durch die Bestimmung von  $\kappa_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , können alle höheren Zeitableitungen des flachen Ausgangs  $\mathbf{y}_f$  in (3-5b) durch

$$v_i^{(k_i)} = y_{fi}^{(\kappa_i + k_i)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k_i = 0, \dots, \beta_i - \kappa_i + 1, \quad (3-28)$$

ersetzt werden. Durch Einsetzen von (3-28) in (3-5) erhält man für die Zustände und die Eingänge des Systems folgende Form:

$$\mathbf{x} = \psi_1(y_{f1}, \dots, y_{f1}^{(\kappa_1-1)}, v_1, \dots, v_1^{(\beta_1-\kappa_1)}, \dots, y_{fm}, \dots, y_{fm}^{(\kappa_m-1)}, v_m, \dots, v_m^{(\beta_m-\kappa_m)}) \quad (3-29a)$$

$$\mathbf{u} = \psi_2(y_{f1}, \dots, y_{f1}^{(\kappa_1-1)}, v_1, \dots, v_1^{(\beta_1-\kappa_1+1)}, \dots, y_{fm}, \dots, y_{fm}^{(\kappa_m-1)}, v_m, \dots, v_m^{(\beta_m-\kappa_m+1)}). \quad (3-29b)$$

Durch den neuen Zustand

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \left[ y_{f1}, \dot{y}_{f1}, \dots, y_{f1}^{(\kappa_1-1)}, \dots, y_{fm}, \dot{y}_{fm}, \dots, y_{fm}^{(\kappa_m-1)} \right]^T \\ &= \left[ z_1^1, \dots, z_{\kappa_1}^1, \dots, z_1^m, \dots, z_{\kappa_m}^m \right]^T \end{aligned} \quad (3-30)$$

wird das System (3-3) im geschlossenen Kreis in die Brunovský-Normalform [15] transformiert:

$$\dot{z}_k^i = z_{k+1}^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, \kappa_i - 1, \quad (3-31a)$$

$$\dot{z}_{\kappa_i}^i = v_i. \quad (3-31b)$$

Die neu eingeführten Eingänge  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sind eine Funktion der Zustände, der Eingänge und einer endlichen Anzahl ihrer Ableitungen:

$$v_i = \alpha_i \left( \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(k_i)} \right), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3-32)$$

Hier wird auch die Bedeutung der Größen  $k_i$  deutlich. Sie geben an, wie oft der Eingang des Systems  $\mathbf{u}$  differenziert werden muss, damit eine exakt linearisierende Zustandsrückführung mit dem neuen Eingang  $\mathbf{v}$  möglich ist.

Wie die Autoren in [45] hervorheben, sind flache Systeme aber nicht nur durch eine Zustandsrückführung exakt linearisierbar, sondern auch linearisierbar im offenen Regelkreis, ohne dass die nichtlinearen Anteile des Systems durch eine Zustandsrückführung kompensiert werden müssten.

Somit ist die Flachheitseigenschaft vielseitig beim Reglerentwurf einsetzbar. Es ist möglich, einerseits das System durch Zustandsrückführung exakt zu linearisieren und einen linearen Folgeregler für den flachen Ausgang zu entwerfen, andererseits eben das System im offenen Kreis zu linearisieren und um die Solltrajektorie des flachen Ausgangs eine lineare stabilisierende Regelung der Regeldifferenz zu entwerfen, wobei die Regelung insgesamt eine nichtlineare Dynamik behält.

Abbildung 3-4 zeigt die flachheitsbasierte Reglerstruktur, wenn die Strecke mit Zustandslinearisierung im geschlossenen Kreis exakt linearisiert ist. Dabei ist der neue Zustand  $\mathbf{z}$  durch (3-30) definiert, während die Eingänge  $\mathbf{u}$  im Block „linearisierende Zustandsrückführung“ in Abhängigkeit von den neu eingeführten Eingängen  $\mathbf{v}$  und dem Zustand  $\mathbf{z}$  durch die Beziehungen (3-29b) berechnet werden:

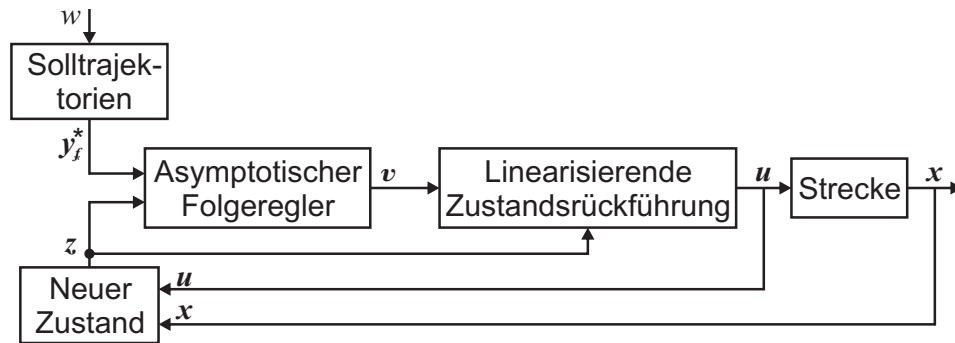


Abb. 3-4: Flachheitsbasierte Reglerstruktur mit der exakten Linearisierung im geschlossenen Kreis und der asymptotischen Folgeregelung des flachen Ausgangs für die Strecke aus Gleichung (3-3) [88]

Mittels der neuen Eingänge  $v_i$  kann eine Eigenwertvorgabe für die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers  $e_i(t) = y_{fi}(t) - y_{fi}^*(t) = z_1^i(t) - z_1^{i*}(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , vorgenommen werden, wenn sie wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned}
 v_i &= y_{fi}^{(\kappa_i)}(t) - \sum_{k=0}^{\kappa_i-1} q_k^i \left( y_{fi}^{(k)}(t) - y_{fi}^{*(k)}(t) \right) \\
 &= z_{\kappa_i+1}^{i*}(t) - \sum_{k=1}^{\kappa_i} q_{k-1}^i \left( z_k^i(t) - z_k^{i*}(t) \right), \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned}
 \tag{3-33}$$

Dabei sind  $y_{fi}^{(k)}(t) = z_{k+1}^{i*}(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 0, \dots, \kappa_i$ , die Solltrajektorien für die Komponenten des flachen Ausgangs und seine erforderlichen Ableitungen. Die Parameter  $q_k^i$  des Folgereglers (3-33) sind so zu wählen, dass eine



asymptotisch stabile Dynamik des Trajektorienfolgefehlers sichergestellt ist. Dies kann z. B. durch einen Koeffizientenvergleich erfolgen, wenn stabile Eigenwerte  $\lambda_k^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, \kappa_i$ , vorgegeben werden:

$$\lambda^{\kappa_i} + q_{\kappa_i-1}^i \lambda^{\kappa_i-1} + \dots + q_1^i \lambda + q_0^i \stackrel{!}{=} \prod_{k=1}^{\kappa_i} (\lambda - \lambda_k^i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3-34)$$

Die Solltrajektorien  $y_{fi}^{*(k)}(t) = z_{k+1}^{i*}(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 0, \dots, \kappa_i$ , für den flachen Ausgang und seine Ableitungen werden anhand der Solltrajektorien  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{x}^*(t)$  oder der Sollwerte  $\mathbf{w}_T = \mathbf{x}^*(T)$  für die zu regelnden Systemgrößen bzw. den zu regelnden Ausgang  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{y}^*(t)$  berechnet.

Da auch jeder reale Ausgang  $\mathbf{y}$  des Systems (3-3) eine Funktion der Zustände und des Eingangs des Systems ist, lässt er sich, nach Bemerkung 2, mithilfe des flachen Ausgangs und einer endlichen Anzahl seiner Ableitungen beschreiben:

$$\mathbf{y} = \psi(\mathbf{y}_f, \dots, \mathbf{y}_f^{(q)}). \quad (3-35)$$

Die Gleichungen (3-35) bieten die Möglichkeit, unabhängig von der Reglerstruktur aus Abbildung 3-4 Vorsteuerungen für lineare und nichtlineare Systeme zu entwerfen, wie in [46] veranschaulicht wird. Diese Vorsteuerungen sind bei nichtlinearen Systemen eine Linearisierung im offenen Kreis, weshalb auf die exakte Linearisierung mit der Zustandsrückführung verzichtet werden kann, was durchaus Vorteile für die Stabilität des Regelkreises bieten kann, denn bei Modellungenauigkeiten kann die exakte Linearisierung mit Zustandsrückführung im ungünstigsten Fall zur Instabilität des Systems führen [45].

### 3.2.4 Berechnung von Vorsteuerungen und Solltrajektorien

Wie in Abschnitt 3.2.3 gezeigt, können mithilfe der Flachheit relativ einfach asymptotische Folgeregler für nichtlineare Systeme entworfen werden. Bezüglich der stoßfreien Umschaltung sind aber vor allem die Trajektorien für Zustände und Eingänge des Systems interessant, die durch Vorgabe von Trajektorien für den flachen Ausgang berechnet werden können. Die Berechnung der Trajektorien ist sowohl für lineare als auch nichtlineare Systeme möglich, und sie können bei einer Reglerumschaltung mit Arbeitspunktwechsel dazu genutzt werden, die Systemantwort unabhängig vom aktiven Regler des Systems zu beeinflussen. Ist der flache Ausgang des Systems  $\mathbf{y}_f$  auch zugleich der zu regelnde Ausgang des Systems  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_f$ , kann die Trajektorie für den Arbeitspunktwechsel direkt für  $\mathbf{y}$  vorgegeben werden, der die Zustände und die Eingänge des Systems nach Gl. (3-5) parametrisiert.

Im allgemeinen Fall ist aber der zu regelnde Ausgang des Systems  $\mathbf{y}$  nicht äquivalent zum flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f$ . Es stellt sich die Frage, ob und wie die Eigenschaft

der Flachheit genutzt werden kann, um Trajektorien für Arbeitspunktwechsel, sowohl für den zu regelnden Ausgang als auch für Eingänge und Zustände des Systems, zu berechnen. Bei der Berechnung kann zwischen vier Fällen unterschieden werden:

- 1) Der zu regelnde Ausgang des Systems  $\mathbf{y}$ ,  $\dim \mathbf{y} \leq m$ , entspricht dem flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f$  oder einer Anzahl seiner Komponenten.
- 2) Die Nulldynamik des zu regelnden Ausgangs  $\mathbf{y}$  ist stabil und kann analytisch gelöst werden.
- 3) Die Nulldynamik des zu regelnden Ausgangs  $\mathbf{y}$  ist stabil, kann aber nur numerisch gelöst werden.
- 4) Die Nulldynamik des zu regelnden Ausgangs  $\mathbf{y}$  ist instabil.

In den Fällen 1, 2 und mit Einschränkungen im Fall 3 kann die Trajektorie für den Arbeitspunktwechsel direkt für den zu regelnden Ausgang  $\mathbf{y}$  vorgegeben werden. Mit ihr wird dann die Trajektorie für den flachen Ausgang bestimmt, mit der wiederum die Trajektorien für den Zustand  $\mathbf{x}$  und den Eingang  $\mathbf{u}$  berechnet werden. Bevor aber die einzelnen Fälle ausführlich erörtert werden, soll zuerst die Nulldynamik definiert und ihr Verhältnis zum flachen Ausgang aufgezeigt werden.

Die Nulldynamik beschreibt die interne Dynamik eines Systems für den Fall, dass die Ausgangsgröße  $\mathbf{y}(t)$  für bestimmte Eingangssignale  $\mathbf{u}(t)$  für alle Zeiten  $t \geq t_0$  identisch Null ist [95].

Ist der flache Ausgang  $\mathbf{y}_f(t)$  eines Systems (3-3) für alle Zeiten  $t \geq t_0$  identisch Null, so folgt aus den Gleichungen (3-5), dass auch die Zustände  $\mathbf{x}(t)$  und der Eingang des Systems  $\mathbf{u}(t)$  für alle Zeiten  $t \geq t_0$  identisch Null sein müssen. Mit anderen Worten: Ist der flache Ausgang des Systems für alle Zeiten  $t \geq t_0$  identisch Null, kann es keine interne Dynamik des Systems geben und daher auch keine Nulldynamik bezüglich des flachen Ausgangs. Ist ein realer Ausgang  $\mathbf{y}$  des Systems (3-3) wie in Gleichung (3-35) bereits mit dem flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f$  parametrisiert, so beschreibt diese Gleichung die interne Dynamik des Ausgangs  $\mathbf{y}$ . Die dem Ausgang  $\mathbf{y}$  zugehörige Nulldynamik folgt direkt aus der Gleichung (3-35) der internen Dynamik als

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}_f, \dots, \overset{(q)}{\mathbf{y}}_f) = 0. \quad (3-36)$$

Da bei nichtlinearen Systemen im allgemeinen Fall der Arbeitspunkt des Systems sich nur in einer Ruhelage des Systems befinden kann, wird im Weiteren davon ausgegangen, dass die vorgegebenen Arbeitspunkte immer zu einer erreichbaren Ruhelage des Systems gehören, die entweder von sich aus schon stabil ist oder von den Reglern stabilisiert wird.

**Fall 1:** Ist der Ausgang  $\mathbf{y}$  äquivalent zum flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f$ , so ist der Entwurf der Solltrajektorien  $\mathbf{y}_f^*$  geradlinig.

Es wird zuerst angenommen, dass es sich um ein SISO-System mit  $y = y_f$  handelt, das aus dem Anfangszustand  $y(0) = y_0$ ,  $\overset{(k)}{y}(0) = 0$ ,  $k = 1, \dots, \beta + 1$ , in endlicher Zeit  $t = T$  in den Arbeitspunkt  $y(T) = y_T$ ,  $\overset{(k)}{y}(T) = 0$ ,  $k = 1, \dots, \beta + 1$ , überführt werden soll. Dazu muss für den flachen Ausgang  $y_f$  eine mindestens  $\beta + 1$ -mal differenzierbare Funktion  $y_f^*(t)$  ausgewählt werden, z. B. eine Polynom- oder Splinefunktion mit verschwindenden Ableitungen  $\overset{(k)}{y}_f^*(0) = \overset{(k)}{y}_f^*(T) = 0$ ,  $k = 1, \dots, \beta + 1$ , und dem Anfangs- sowie dem Endwert  $y_f^*(0) = y_0$ ,  $y_f^*(T) = y_T$ . Die Solltrajektorie des zu steuernden und zugleich flachen Ausgangs  $y$  ist in diesem Fall direkt vorgegeben, und die linearisierende Steuerung ist über Gleichung (3-5b) zu berechnen.

Bei flachen, quadratischen MIMO-Systemen,  $\dim \mathbf{u} = \dim \mathbf{y} = m$ , bei denen  $y_i = y_{fi}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , gegeben ist, werden analog zum SISO-Fall für die Komponenten des flachen Ausgangs  $y_{fi}$  mindestens  $\beta_i + 1$  differenzierbare Funktionen  $y_{fi}^*(t)$  ausgewählt, die konsistent mit dem Anfangs- und dem Sollarbeitspunkt sind:  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{y}(T) = \mathbf{y}_T$ ,  $\overset{(k)}{y}_i(0) = \overset{(k)}{y}_i(T) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, \beta_i$ .

Sind  $\dim \mathbf{y} = l < m$  und  $y_i = y_{fi}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , so sind für die ersten  $l$  Komponenten des flachen Ausgangs die Anfangs- und die Endwerte der Solltrajektorie wie gehabt über  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , festgelegt. Für die restlichen  $m - l$  Komponenten ist der Anfangszustand durch Gleichung (3-4) gegeben:

$$y_{fi}(0) = \phi_i(\mathbf{x}(0), u_1(0), \dots, u_m(0)), \quad i = l + 1, \dots, m, \quad (3-37)$$

während die Sollzustände  $y_{fi}(T)$ ,  $i = l + 1, \dots, m$ , nicht den vorgegebenen Arbeitspunkt  $\mathbf{y}_T$  beeinflussen und als zusätzliche Freiheitsgrade im Trajektorienentwurf zu sehen sind.

**Beispiel 3.2:** Der Gleichstrommotor aus Beispiel 3.1 mit der Drehzahl  $\omega$  als Ausgangs- bzw. Regelgröße wird nochmals aufgegriffen. Da der flache Ausgang der Regelgröße entspricht, d. h.  $y_f = \omega$ , kann hier der Verlauf für eine Drehzahländerung direkt vorgegeben werden. Die Trajektorie muss dabei mindestens zweimal differenzierbar sein, da die Eingangsspannung eine Funktion der Drehzahl und der ersten zwei Ableitungen ist:

$$U = \frac{LJ}{K_m} \ddot{\omega} + \frac{1}{K_m} (RJ + Lb) \dot{\omega} + \left( K_e + \frac{Rb}{K_m} \right) \omega. \quad (3-38)$$

Bezüglich der Randbedingungen  $\omega(0) = \omega_0$ ,  $\dot{\omega}(0) = \ddot{\omega}(0) = 0$  und  $\omega(T) = \omega_T$ ,  $\dot{\omega}(T) = \ddot{\omega}(T) = 0$ , ist z. B. ein Polynom 5. Ordnung (Abbildung 3-5) mit verschwindenden Ableitungen 1. und 2. Ordnung

$$\omega^*(t) = \omega_0 + (\omega_T - \omega_0) \left[ 10 \left( \frac{t}{T} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{T} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{T} \right)^5 \right], \quad t \in [0, T], \quad (3-39)$$

als Solltrajektorie geeignet. Die Trajektorie der Steuerung erhält man durch zweimaliges Ableiten von (3-39) und Einsetzen in (3-38).

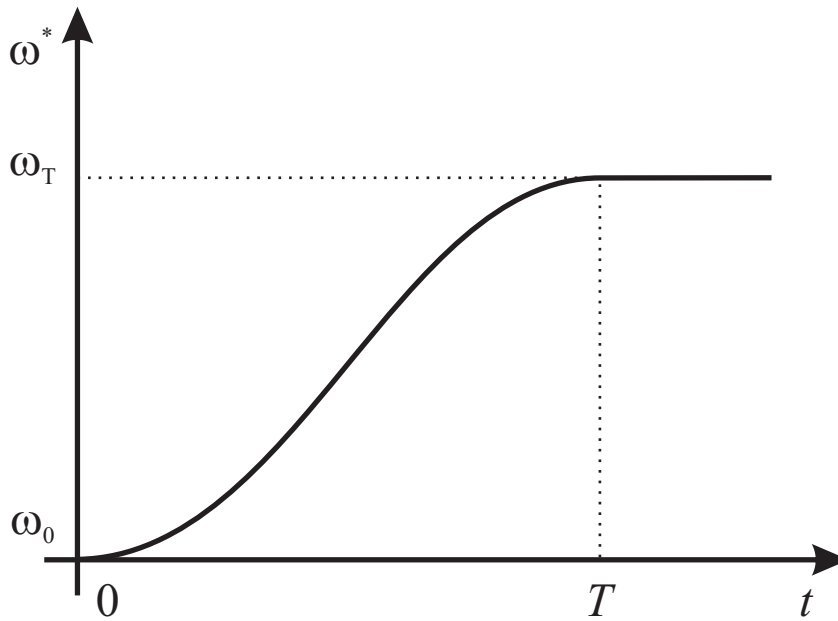


Abb. 3-5: Solltrajektorie für den flachen Ausgang bzw. die Drehzahl  $\omega$  für eine Drehzahländerung  $\omega_0 \rightarrow \omega_T$  im Zeitintervall  $t \in [0, T]$

**Fall 2:** Falls der Ausgang  $\mathbf{y}$  des Systems nicht dem flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f$  entspricht, so ist  $\mathbf{y}$  eine Funktion von  $\mathbf{y}_f$  und einer endlichen Anzahl seiner Ableitungen (3-35). Falls die Nulldynamik (3-36) analytisch lösbar und stabil ist, können Trajektorien  $\mathbf{y}^*(t)$ ,  $\mathbf{y}^*(0) = \mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{y}^*(T) = \mathbf{y}_T$ ,  $\mathbf{y}^{(k)}(0) = \mathbf{y}^{(k)}(T) = 0$  für den Sollwertwechsel des Ausgangs vorgegeben werden. Die Lösung der Gleichungen

$$\mathbf{y}^* = \psi(\mathbf{y}_f^*, \dots, \mathbf{y}_f^{(q)}) \quad (3-40)$$

resultiert in Solltrajektorien für den flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f^*(t)$  im verlangten Zeitintervall  $t \in [0, T]$ . Ersetzt man in (3-5b)  $\mathbf{y}_f$  durch die berechnete Solltrajektorie  $\mathbf{y}_f^*(t)$ , so erhält man die Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$

$$\mathbf{u}^*(t) = \psi_2(\mathbf{y}_f^*(t), \dot{\mathbf{y}}_f^*(t), \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta+1)*}(t)) \quad (3-41)$$

im Intervall  $t \in [0, T]$ . Zwar können die Trajektorien  $\mathbf{u}^*(t)$  aus Gleichung (3-41), abhängig von der gewählten Trajektorie  $\mathbf{y}^*(t)$ , bei  $t \rightarrow +\infty$  gegen  $+\infty$  gehen,

wie im folgenden Beispiel gezeigt wird, doch ist deren Gültigkeit als Trajektorie des Systemeingangs nur auf das Intervall  $t \in [0, T]$  beschränkt. Aufgrund der stabilen Nulldynamik (3-36) ergibt sich für  $y(t) = y_T$ ,  $t > T$  eine beschränkte Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$ .

**Beispiel 3.3:** Fortsetzung von Beispiel 3.2: Falls beim Gleichstrommotor (3-9) das Antriebsmoment  $\tau_M$  bzw. der dazu proportionale Läuferstrom  $i$  geregelt werden soll, so ist zuerst die Nulldynamik für  $y = i$  zu überprüfen. Setzen wir in (3-9b)  $i = 0$  ein, so ist die resultierende Nulldynamik des Läuferstroms

$$J\dot{\omega} + b\omega = 0 \quad (3-42)$$

für  $b > 0$  exponentiell stabil. Da die Reibungskonstante  $b$  immer positiv ist, kann für den Sollwertwechsel des Antriebsmoments z. B. ein Polynom 3. Ordnung ausgewählt werden:

$$i^*(t) = i_0 + (i_T - i_0) \left[ 3 \left( \frac{t}{T} \right)^2 - 2 \left( \frac{t}{T} \right)^3 \right], \quad t \in [0, T], \quad (3-43)$$

mit  $i_0 = \frac{\tau_M(0)}{K_m}$ ,  $i_T = \frac{\tau_M(T)}{K_m}$  und verschwindender erster Ableitung. Nach Einsetzen von  $i^*(t)$  in (3-9b) ist die Lösung der Gleichung die Solltrajektorie für den flachen Ausgang:

$$\omega^*(t) = A e^{-\frac{b}{J}t} + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E, \quad t \in [0, T]. \quad (3-44)$$

Die Solltrajektorie der Steuerung bekommt man wie in Beispiel 3.2 durch zweimaliges Ableiten der Gleichung (3-44) und Einsetzen von  $\omega, \dot{\omega}$  und  $\ddot{\omega}$  in (3-38).

**Fall 3:** Ist die Nulldynamik stabil, aber analytisch nicht lösbar, gibt es je nach Anwendungsfall mehrere Alternativen. Falls z. B. die Arbeitspunkte  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , bzw. die dazugehörigen Sollwerte  $\mathbf{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , zwischen denen das System überführt wird, im Voraus bekannt sind, so können Sollverlaufstrajektorien für den Ausgang  $\mathbf{y}_i^*(t)$  vorgegeben werden mit

$$\mathbf{y}_i^*(0) = \mathbf{y}_{i0}, \quad \mathbf{y}_i^*(T) = \mathbf{y}_{iT}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3-45)$$

Diese können dann in (3-35) eingesetzt und die resultierenden Gleichungen offline numerisch gelöst werden. Aus den numerisch berechneten Trajektorien für den flachen Ausgang und dessen Ableitungen

$$\mathbf{y}_{f_i}^*(t), \quad \mathbf{y}_{f_i}^{(k)*}(t), \quad k = 1, \dots, q \quad (3-46)$$

resultieren dann die Steuertrajektorien  $\mathbf{u}_i^*(t)$ .

Falls eine flachheitsbasierte Folgeregelung wie z. B. in Abbildung 3-4 entworfen wird und die Trajektorien  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{y}^*(t)$  im Voraus unbekannt sind, so können die Differentialgleichungen, wie dargestellt, im Block „Solltrajektorien“ online gelöst werden, da die Nulldynamik des Ausgangs  $\mathbf{y}$  stabil ist.

Ist die numerische Integration unerwünscht, so gibt es die Möglichkeit, durch Einsetzen der Endwerte  $\mathbf{y}_T$  in Gleichung (3-40) die entsprechenden Randwerte für  $\mathbf{y}_{fT}^*$  für den flachen Ausgang zu bestimmen:

$$\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}_f^*(0), 0, \dots, 0), \quad \mathbf{y}(T) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}_f^*(T), 0, \dots, 0). \quad (3-47)$$

Wenn dabei die Dimension von  $\mathbf{y}$  kleiner ist als die von  $\mathbf{y}_f$ , d. h.  $\dim \mathbf{y} = l \leq \dim \mathbf{y}_f = m$ , ist das System (3-47) unterbestimmt, so dass im gewünschten Arbeitspunkt  $\mathbf{y}_T$  der flache Ausgang  $m - l$  Freiheitsgrade hat.

Ist  $\mathbf{y}_{fT}^*$  bestimmt, werden im Anschluss mindestens  $(\beta_i + 1, i = 1, \dots, m)$ -mal differenzierbare Trajektorien  $y_{f_i}^*(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ausgewählt, welche die Anfangs- und die Endbedingungen  $\mathbf{y}_f^*(0) = \mathbf{y}_{f0}^*$ ,  $\mathbf{y}_f^*(T) = \mathbf{y}_{fT}^*$  erfüllen. Die Solltrajektorien für den Ausgang  $\mathbf{y}^*(t)$  und die Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  sind wiederum durch die Gleichungen (3-40) und (3-5b) gegeben. Dadurch wird die Solltrajektorie für  $\mathbf{y}(t)$  über den flachen Ausgang implizit vorgegeben, unter Berücksichtigung der Randwerte  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_T$ .

**Fall 4:** Falls die Nulldynamik (3-36) des Ausgangs  $\mathbf{y}$  instabil ist, ist es unumgänglich, mittels der Anfangs- und der Endwerte  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_T$  die dazugehörigen Werte für  $\mathbf{y}_{f0}^*$  und  $\mathbf{y}_{fT}^*$  zu bestimmen, um dann die Trajektorienplanung über  $\mathbf{y}_f^*(t)$  zu vollführen. Die Trajektorien  $y_{f_i}^*(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sollten dabei wieder mindestens  $(\beta_i + 1, i = 1, \dots, m)$ -mal differenzierbar und mit den Bedingungen (3-47) konsistent sein. Eine instabile Nulldynamik tritt bei nichtminimalphasigen Ausgängen auf; die flachheitsbasierte Regelung solcher Systeme wird in [29] ausführlich erörtert.

Prinzipiell ist zwar die direkte Vorgabe von  $\mathbf{y}^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , für den Sollwertwechsel auch bei instabiler Nulldynamik möglich, doch würde das System nach  $t > T$  wegen der instabilen Gleichungen (3-36) nicht zu einer stationären Ruhelage konvergieren, wenn der Sollwert  $\mathbf{y}_T$  konstant gehalten werden soll. Um  $\mathbf{y}_T$  zu halten, wäre ein Eingang  $\mathbf{u}(t)$  vonnöten, bei dem mindestens eine Komponente die Ungleichung

$$|u_i(t)| < M, \quad t > T, \quad i \in [1, \dots, m], \quad (3-48)$$

nicht erfüllt, wobei  $M < \infty$  eine beliebig gewählte Größe ist. Dieser Umstand wird im folgenden Beispiel anhand eines einfachen nichtminimalphasigen Systems verdeutlicht.

**Beispiel 3.4:** Gegeben sei das lineare, nichtminimalphasige System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = 0 \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (3-49)$$

Mit dem flachen Ausgang des Systems  $y_f = x_2$  kann das Systems mittels der Gleichungen

$$x_1 = \dot{y}_f, \quad (3-50a)$$

$$x_2 = y_f, \quad (3-50b)$$

$$u = \ddot{y}_f + 3\dot{y}_f - 2y_f, \quad (3-50c)$$

$$y = \dot{y}_f - y_f, \quad (3-50d)$$

beschrieben werden. Die Nulldynamik des Ausgangs  $\dot{y}_f - y_f = 0$  ist instabil, aber analytisch lösbar. Wenn, wie im Beispiel 3.3, für die Trajektorie des Ausgangs  $y^*$  ein Polynom 3. Ordnung

$$y^*(t) = y(0) + (y(T) - y(0)) \left[ 3 \left( \frac{t}{T} \right)^2 - 2 \left( \frac{t}{T} \right)^3 \right], \quad t \in [0, T], \quad (3-51)$$

gewählt wird, so bekommt man nach Lösen der Differentialgleichung (3-50d) die Trajektorie  $y_f^*$ . Setzt man wiederum  $y_f^*$  samt ihren Ableitungen  $\overset{(i)}{y}_f = 0$ ,  $i = 1, 2$ , in Gleichung (3-50c) ein, ergibt das die Stellgröße

$$u^*(t) = Ae^t + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E, \quad t \in [0, T], \quad (3-52)$$

für den Eingang  $u$ . Möchte man aber, dass  $y(t) = y_T$  auch für  $t \geq T$  gilt, so ergibt das Einsetzen von  $y_T$  in Gleichung (3-50c) für den Eingang eine gegen  $+\infty$  exponentiell strebende Stellgröße

$$u^*(t) = Fe^t + G, \quad t \in [T, +\infty). \quad (3-53)$$

Weil aber die Stellgröße in keinem realen System unbegrenzt ist, wird es unmöglich sein, den Wert  $y_T$  nach dieser Ansteuerung zu halten, da das System mit dieser Ansteuerung nicht zu einer Ruhelage konvergiert. Die einzige Ruhelage für  $y(t) = y_t$  ergibt sich aus den Gleichungen (3-50c) und (3-50d) als  $y_f(t) = -y_T$ ,  $\dot{y}_f = 0$  mit  $u(t) = 2y_f(t)$ , die durch die Trajektorienvorgabe nach Gleichung (3-51) nicht erreicht wird.

Abbildung 3-6 zeigt die zeitlichen Verläufe der Systemantwort des Systems (3-49), wenn die nach Gleichung (3-52) berechnete Trajektorie  $u^*(t)$  als Stellgröße zum Zeitpunkt  $t_u = 1$  aufgespielt wird, mit  $T = 1$ ,  $\overset{(i)}{y}_f = 0$ ,  $i = 0, 1$  und  $y_T = 5$ . Wie man sieht, folgt der Ausgang  $y(t)$  der geplanten Trajektorie in der Zeit der Überführung, doch Abbildung 3-7 zeigt, dass die Ruhelage  $y_f = -5$ ,  $\dot{y}_f = 0$  nicht erreicht wird. Da  $u(t)$  aber auch nach  $t = t_u + T$  weiter exponentiell anwachsen muss, um  $y(t) = 5$  zu halten, wird zum Zeitpunkt  $t = 2$  der Eingang auf den Wert  $u = -10$  umgeschaltet, der für diese Ruhelage die notwendige Eingangsgröße darstellt. Der Ausgang bricht bis zum erneuten Erreichen des Sollwerts ein; dieses Mal befindet sich das System aber in einer Ruhelage, und der Sollwert kann dauerhaft gehalten werden.

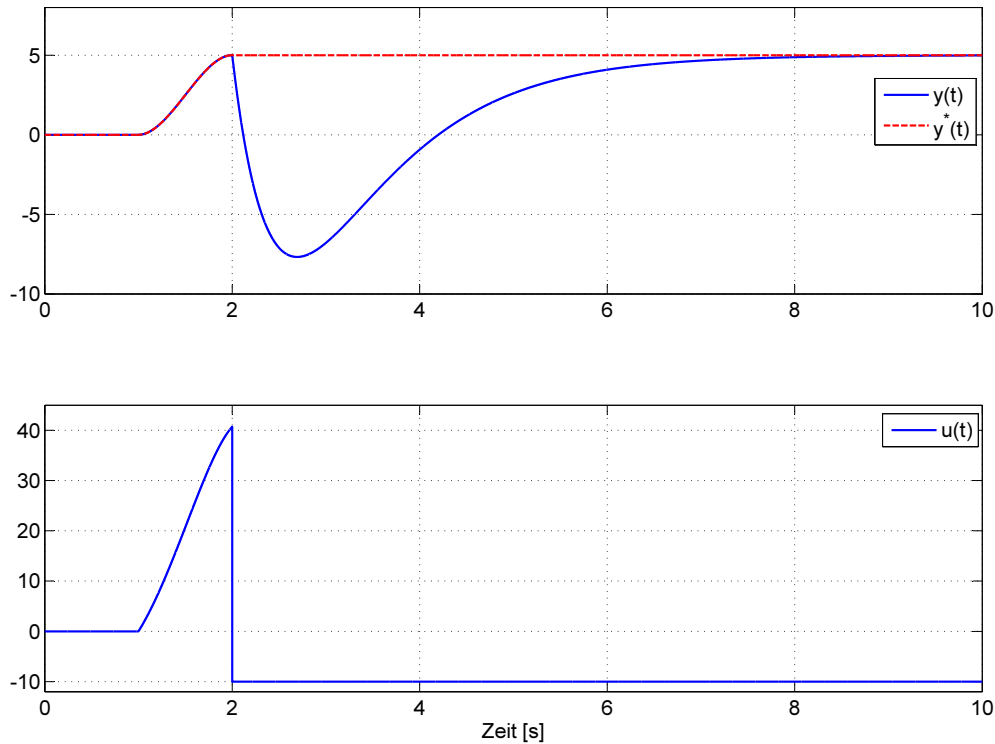


Abb. 3-6: Systemantwort des nichtminimalphasigen Systems (3-49) mit  $u^*(t)$  nach Gleichung (3-52) und  $t_u = 1, T = 1, y_T = 5$

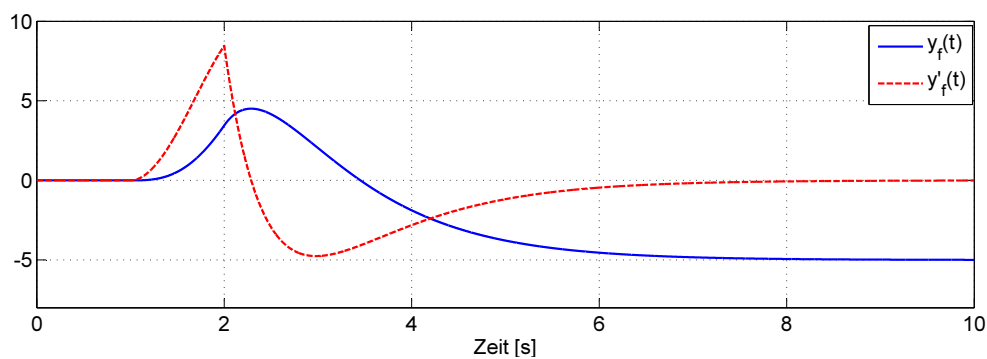


Abb. 3-7: Flacher Ausgang und seine Ableitung bei der Überführung nach Abbildung 3-6

Gibt man die Trajektorie für den flachen Ausgang, z. B. als Spline, direkt vor, und zwar mit den gleichen Randbedingungen wie bei der Systemantwort aus Abbildung 3-6, so erhält man die Systemantwort, wie in Abbildung 3-8 gezeigt. Der Ausgang  $y(t)$  folgt wieder der berechneten Trajektorie  $y^*(t)$ ; dieses Mal befindet sich aber das System nach der Überführungszeit  $t = T$  in der geforderten Ruhelage für den Sollwert  $y = 5$ . Dadurch kann der Sollwert auch nach  $t \geq t_u + T$  konstant gehalten werden. Der charakteristische „Schwinger“ des Ausgangs in die entgegengesetzte Richtung vom Sollwert, der Arbeitspunktwechsel minimalphasiger Systeme auszeichnet, lässt sich praktisch auch mit der flachheitsbasierten Berechnung der Trajektorien nicht vermeiden.



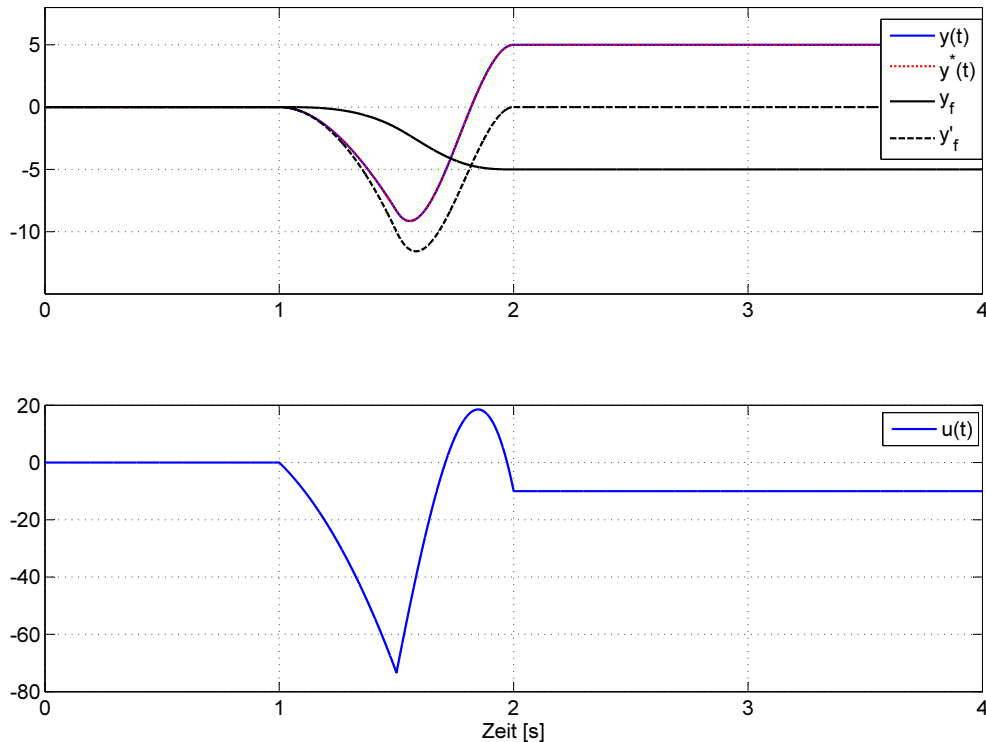


Abb. 3-8: Systemantwort des nichtminimalphasigen Systems (3-49) mit Vorgabe der Trajektorie für  $y_f^*(t)$  und  $t_u = 1, T = 1, y_T = 5$

### 3.3 Struktur der flachheitsbasierten Reglerumschaltung

Abgesehen vom Gain-Scheduling und dem  $\mathcal{L}_2$ -Ansatz, haben die vorgestellten Methoden zur stoßfreien Umschaltung aus Kapitel 2 eines gemeinsam: Sie stellen die Stoßfreiheit der Umschaltung sicher, indem sie die Zustände des inaktiven Reglers initialisieren. Die AWBT-Methoden eignen sich dabei für das Umschalten von Reglern, deren Zustände nicht beeinflussbar sind, denn die Initialisierung erfolgt durch das Nachführen des inaktiven Reglers, so dass kein direkter Eingriff in die Reglerzustände notwendig ist. Ist aber die Annahme gültig, dass die Reglerzustände direkt gesetzt werden können<sup>1</sup>, ergibt sich aus der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur eine neue Möglichkeit zur stoßfreien Reglerumschaltung.

In Abbildung 3-9 ist die Struktur aus Abbildung 2-1 um die Vorsteuerung  $u_v$  erweitert. Die Regler sind im Zustandsraum mithilfe der Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}_{ri} = \mathbf{A}_{ri}\mathbf{x}_{ri} + \mathbf{b}_{ri}e_i, \quad (3-54a)$$

$$u_{ri} = \mathbf{c}_{ri}^T \mathbf{x}_{ri} + d_{ri}e_i, \quad (3-54b)$$

<sup>1</sup> Bei der heutigen, überwiegend digitalen Informationsverarbeitung stellt diese Bedingung keine wesentliche Einschränkung dar.

mit  $i = 1, 2$ , beschrieben. Der Regler  $R_1$  ist aktiv, während der Regler  $R_2$  ausgeschaltet und zurückgesetzt ist, d. h.  $\mathbf{x}_{r2}(t) = 0$ ,  $t < t_u$ .

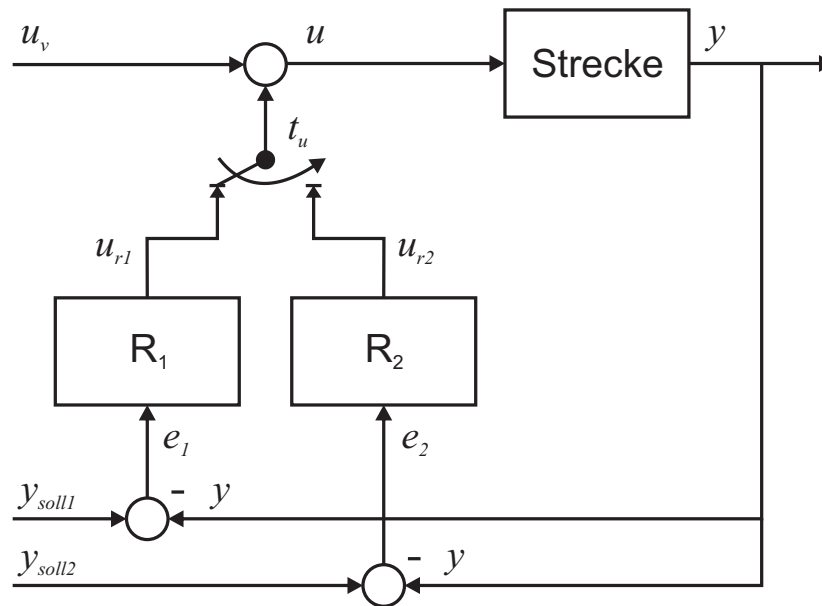


Abb. 3-9: Struktur zur stoßfreien Umschaltung mittels einer Vorsteuerung

Schaltet man nun vom Regler  $R_1$  auf den Regler  $R_2$  zum Zeitpunkt  $t_u$  um, erreicht man eine stoßfreie Umschaltung, wenn die Vorsteuerung nach dem Umschalten den Wert

$$u_v(t_u) = u(t_{u-}) - u_{r2}(t_u) \quad (3-55)$$

hat, wobei  $u(t_{u-})$  der Wert der Eingangsgröße unmittelbar vor dem Umschalten und  $u_{r2}(t_u)$  der Reglerausgang zum Umschaltzeitpunkt sind. Um  $u_{r2}(t_u)$  berechnen zu können, müssten  $\mathbf{A}_{ri}$ ,  $\mathbf{b}_{ri}$ ,  $\mathbf{c}_{ri}$ , und  $d_{ri}$  aus Gleichung (3-54) bekannt sein. Da aber der Reglerzustand des inaktiven Reglers immer auf den Wert  $\mathbf{x}_{ri}(t) = 0$ ,  $t < t_u$ , zurückgesetzt wird, wird zur Bestimmung der Vorsteuerung nur der Durchgriff  $d_{ri}$  gebraucht. Dies stellt keine besondere Einschränkung dar, vor allem im Hinblick auf die Anwendung beim Entwurf mechatronischer Systeme.

Wird für die Umschaltung aus Beispiel 2.1 die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur eingesetzt, stellt man fest, dass das System sich wie beim Initialisieren des Reglerzustands verhält und bei gleichen Bedingungen eine identische Systemantwort produziert. Doch mit der Flachheit bietet sich nun die Möglichkeit, anstatt konstanter Vorsteuerung  $u_v$  und sprunghaft wechselnder Sollvorgaben  $y_{isoll}$ ,  $i = 1, 2$ , Überführungstrajektorien  $y_i^*$ ,  $i = 1, 2$ , samt den passenden Vorsteuerungen zu berechnen, die das System in der gewünschten Zeit  $T$  vom Ist- in den Sollzustand überführen. Damit wird bei der Umschaltung nicht nur die Stoßfreiheit

gewährleistet, sondern auch eine gewünschte und vom Regler unabhängige Systemdynamik während der Überführung erreicht.

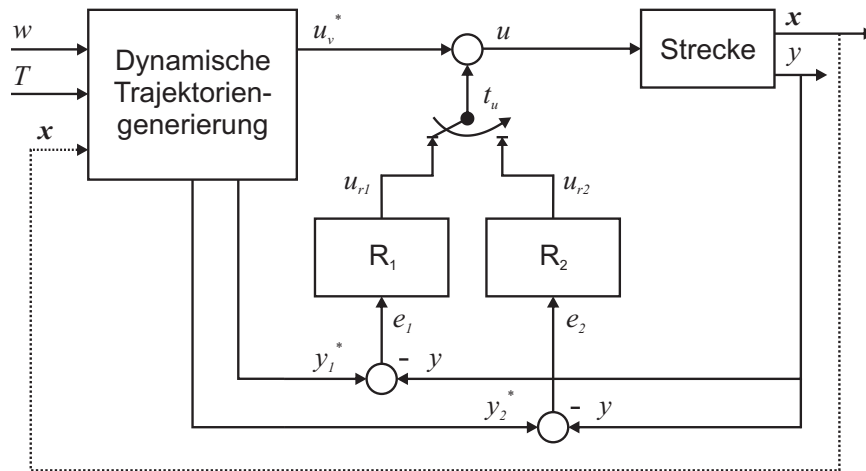


Abb. 3-10: Struktur zur stoßfreien Umschaltung mittels einer flachheitsbasierten Vorsteuerung und Solltrajektorienvorgabe

Abbildung 3-10 zeigt die Erweiterung der Struktur 3-9 um die flachheitsbasierte Generierung der Vorsteuerung  $u_v^*$  und der Solltrajektorien  $y_i^*$ . Damit dies möglich ist, muss natürlich das zu regelnde System flach sein. Ist diese Bedingung erfüllt, werden im Block „Dynamische Trajektoriengenerierung“ die Verläufe  $u_v^*(t)$  und  $y_i^*(t), i = 1, 2, t \in [t_u, t_u + T]$ , berechnet. Dazu wird neben dem neuen Sollwert  $w = y_{isoll}$  auch der aktuelle Zustand des Systems  $\mathbf{x}(t_u)$  benötigt. Die Rückführung von  $\mathbf{x}(t_u)$  ist gestrichelt eingezeichnet, da der Zustand  $\mathbf{x}$  nur zum Zeitpunkt  $t_u$  für die Trajektorienberechnung gebraucht wird, so dass diese Rückführung keine geschlossene Schleife im eigentlichen Sinne darstellt und bei Stabilitätsuntersuchungen nicht berücksichtigt werden muss.

**Beispiel 3.5:** Es wird nochmals das System (2-6) aus Beispiel 2.1 betrachtet. Die Umschaltung vom Regler  $G_l$  (2-8) auf den Regler  $G_k$  (2-7) soll nach der Struktur aus Abbildung 3-10 erfolgen. Der flache Ausgang  $y_f$  des Systems ist auch zugleich der Ausgang des Systems  $y_f = y = x_1$ . Für die Solltrajektorie  $y_f^*(t), t \in [t_u, t_u + T]$ , zur Überführung des Systems nach der Umschaltung wird ein Spline 5. Ordnung ausgewählt:

$$\begin{aligned} P_a(t) &= a_i t^i, & 0 \leq t < t_b & \quad i = 0, 1, \dots, 5 \\ P_b(t) &= b_i (t - t_b)^i, & t_b \leq t \leq T & \quad i = 0, 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (3-56)$$

mit einem Knotenpunkt zum Zeitpunkt  $t_b \in [0, T]$ , so dass

$$y_f^*(t) = \begin{cases} P_a(t - t_u), & t_u \leq t < t_u + t_b \\ P_b(t - t_u), & t_u + t_b \leq t \leq t_u + T \end{cases} \quad (3-57)$$

gilt. Der Knotenpunkt  $t_b$  des Splines ist ein zusätzlicher Freiheitsgrad, mit dem der Verlauf des Splines bestimmt wird. In Beispiel 4.1 wird  $t_b$  so berechnet, dass Überschwinger der Solltrajektorie für die Regelgröße immer vermieden werden. In diesem Beispiel wird  $t_b = \frac{T}{2}$  gewählt. Die Splineparameter  $a_i, b_i, i = 0, 1, \dots, 5$ , werden durch die Randbedingungen

$$\begin{aligned} P_a(0) &= y(t_u), \quad P_a(0) = \overset{(i)}{y}(t_u), \quad i = 1, \dots, 3, \\ \overset{(i)}{P}_a(t_b) &= \overset{(i)}{P}_b(t_b), \quad i = 0, \dots, 3, \quad P_b(T) = y_{soll}, \quad \overset{(i)}{P}_b(T) = 0, \end{aligned} \quad (3-58)$$

definiert. Acht dieser Bedingungen sind durch die Ist- und die Sollwerte des Ausgangs  $y_f$  und seiner Ableitungen  $\overset{(i)}{y}_f$  festgelegt; die verbleibenden vier stellen die Stetigkeit der Trajektorie  $y_f^*(t)$  und ihrer Ableitungen  $\overset{(i)}{y}_f$  im Knotenpunkt  $t_b$  sicher. Die Vorsteuerung  $u_v^*(t)$  für die Überführung lautet dann:

$$u_v^*(t) = 0.03 \overset{(3)}{y}_f^*(t) + 0.34 \ddot{y}_f^*(t) + 0.9 \dot{y}_f^*(t) + 0.28 y_f^*(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3-59)$$

Die Solltrajektorie  $y_f^*(t)$  und die Vorsteuerung  $u_v^*(t)$  sind durch die Splineparameter  $a_i, b_i, i = 0, 1, \dots, 5$ , parametrisiert, die, wie man aus den Gleichungen (3-58) schließen kann, durch die Istwerte zum Umschaltzeitpunkt  $t_u$ , die Sollwerte nach der Umschaltung  $t = t_u + T$  des flachen Ausgangs und seiner Ableitungen und die Umschaltdauer  $T$  definiert sind. Da der flache Ausgang und seine Ableitungen auch durch den Zustand  $\boldsymbol{x}$  und den Eingang  $u$  berechnet werden können (Gl. (3-21)):

$$\dot{y}_f = -1.67x_1 + 3x_2, \quad (3-60a)$$

$$\ddot{y}_f = 2.79x_1 - 1.26x_2 + 3x_3, \quad (3-60b)$$

$$\overset{(3)}{y}_f = -4.66x_1 + 9.95x_2 - 13.26x_3 + 30u, \quad (3-60c)$$

sind für die Berechnung von  $y_f^*(t)$  und  $u^*(t), t \in [t_u, t_u + T]$ , der neue Sollwert  $y_{soll}$ , die Dauer der Überführung  $T$  und der Istzustand  $\boldsymbol{x}(t_u)$  zum Umschaltzeitpunkt  $t_u$  notwendig. Dabei wird angenommen, dass  $u(t)$  bekannt ist.

Abbildung 3-11 zeigt die flachheitsbasierte Umschaltung des Systems (2-6) vom Regler  $G_l$  (2-8) auf den Regler  $G_k$  (2-7) zum Zeitpunkt  $t_u = 5$ . Das System ist dabei, wie in den bisherigen Fällen, mit dem Regler  $G_l$  in den stationären Zustand  $y = 1$  eingeschungen. Die Dauer der Überführung zum neuen Sollwert  $y_{soll} = 2$  beträgt  $T = 1$ . Der Regler  $G_l$  hat als Sollwert  $y_{soll} = 1$ . Der Knotenpunkt  $t_b$ , ein zusätzlicher Freiheitsgrad, wurde auf  $t_b = 0,5 T$  gesetzt. Da das System bekannt ist und keine Störungen vorhanden sind, muss der Regler nicht eingreifen, d. h.  $u_r(t) = 0, t > t_u$ , und der Ausgang  $y(t)$  folgt genau der Solltrajektorie  $y_f^*(t)$ . Nach dem Zeitpunkt  $t = t_u + T$  ändert sich der erreichte Sollwert nicht, so dass die Vorsteuerung für  $t > t_u + T$  auf dem letzten berechneten Wert gehalten wird und die Regelung wegen  $y_{soll} - y_{ist} = 0$  keinen Beitrag zur Eingangsgröße liefert.

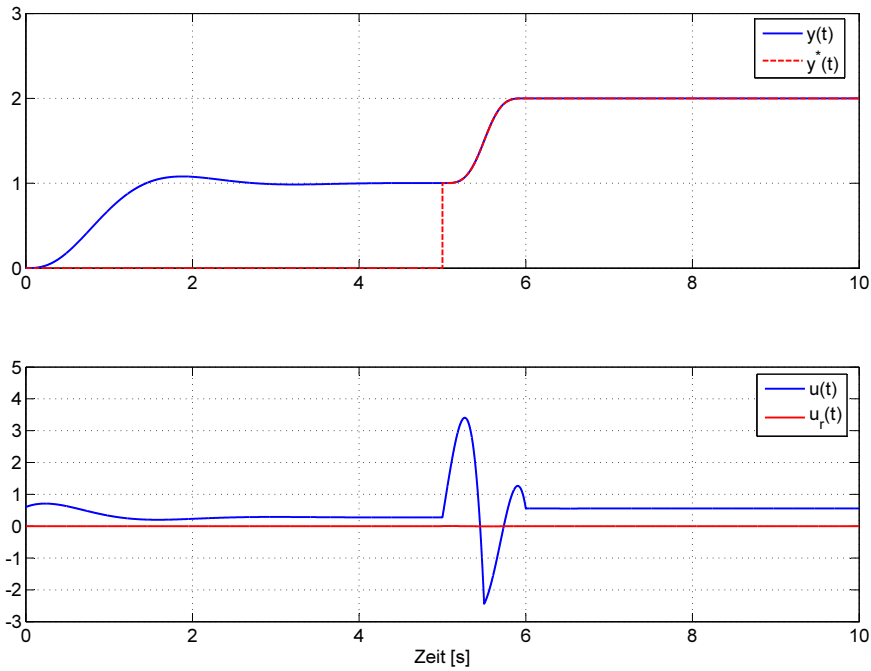


Abb. 3-11: Flachheitsbasierte Umschaltung des Systems (2-6) vom Regler  $G_l$  auf den Regler  $G_k$  zum Zeitpunkt  $t_u = 5$  mit der Dauer  $T = 1$

Zum direkten Vergleich ist in Abbildung 3-12 das Umschalten des Systems (2-6) neben der neuen Methode auch mit dem AWBT und dem Gain-Scheduling-Verfahren aus den Beispielen 2.3 und 2.4 gezeigt.

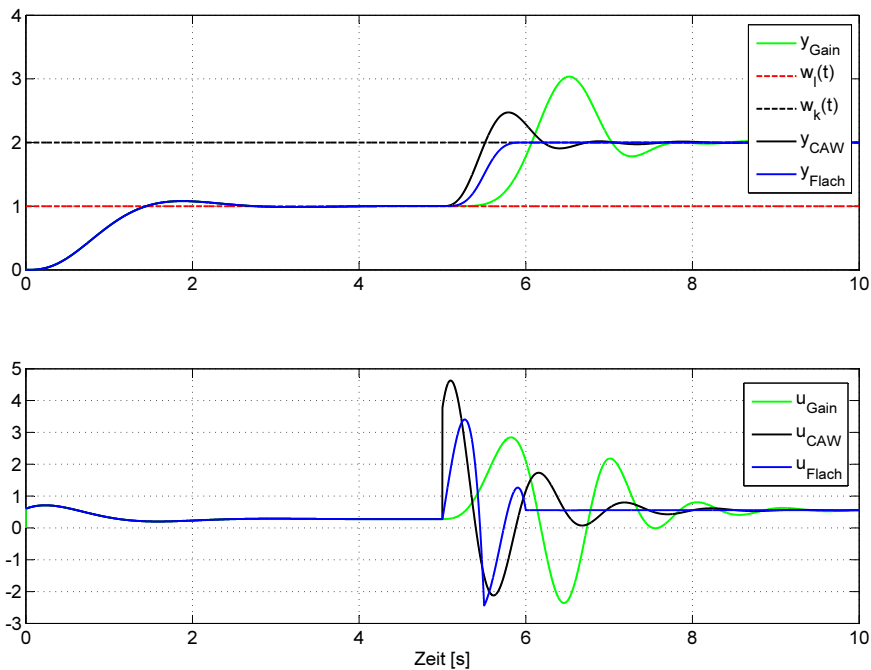


Abb. 3-12: Vergleich der flachheitsbasierten Umschaltung des Systems (2-6) mit dem AWBT und dem Gain-Scheduling-Verfahren aus den Beispielen 2.3 und 2.4

Die Systemantwort bei der Umschaltung bzw. der Überschwinger beim Erreichen des neuen Sollwertes  $w_k = 2$  ist beim AWBT-Verfahren vom Regler  $G_k$  abhängig, der nach der Umschaltung aktiv ist. Beim Gain-Scheduling-Verfahren sind während der Umschaltung beide Regler aktiv, so dass in diesem Fall das Führungsverhalten des Systems noch schlechter ausfällt. Bei der flachheitsbasierten Methode ist die Systemantwort mit der Überführungstrajektorie  $y^*(t) = y_f^*(t)$ ,  $t \in [t_u, t_u + T]$ , definiert und nicht von den Reglern  $G_k$ ,  $G_l$  abhängig. Im idealen Fall haben also die Regler während der Umschaltung oder Arbeitspunktwechseln keinen Anteil an der Stellgröße. Bei realen Systemen wird jedoch der aktive Regler das Führungsverhalten beeinflussen, da das System nie vollständig bekannt ist und somit die mittels der Flachheit berechnete Vorsteuerung nicht hundertprozentig richtig sein wird. Dennoch kann auch bei realen Systemen die Vorsteuerung den Großteil der Stellgröße ausmachen, wie im Beispiel 5.1 gezeigt wird.

Ein weiterer Vorteil des flachheitsbasierten Umschaltens, den man im direkten Vergleich feststellen kann, besteht darin, dass der Sollwert nicht asymptotisch und in Abhängigkeit vom eingesetzten Regler erreicht wird, sondern in der vorgegebenen Zeit  $T$ . Die Überführungsdauer kann beliebig vorgegeben werden, wird aber bei realen Systemen, wie in Kapitel 4 beschrieben, von den vorhandenen Stellgrößenbegrenzungen eingeschränkt. Abbildung 3-13 zeigt die Stellgröße und die Systemantwort des Systems (2-6), wenn die Überführungsdauer variiert wird.

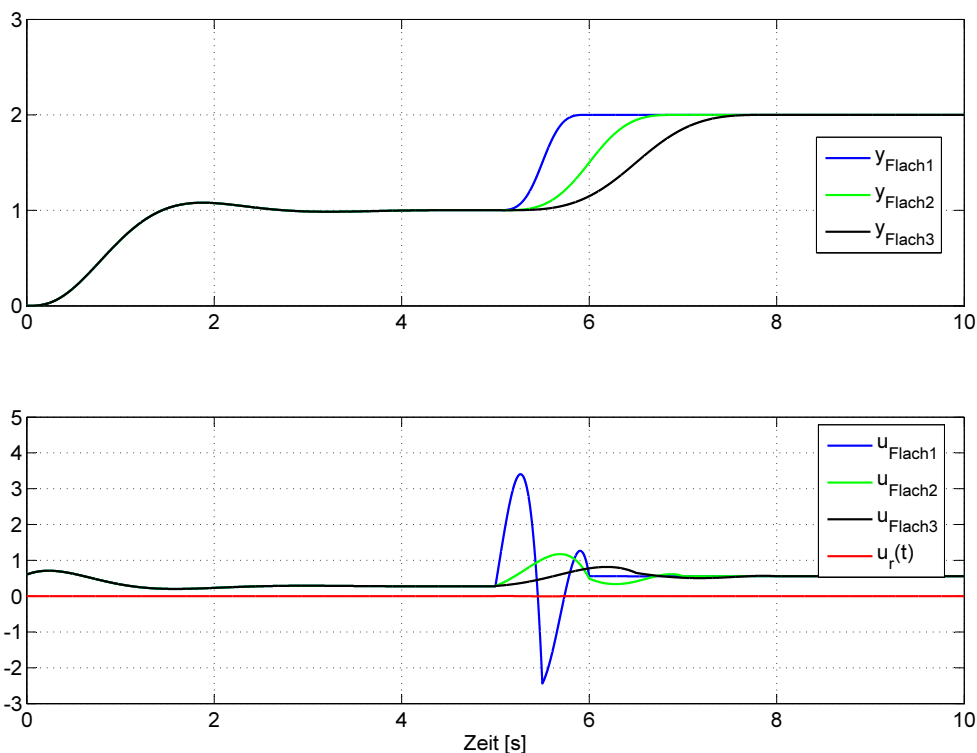


Abb. 3-13: Flachheitsbasierte Umschaltung des Systems (2-6) mit  $t_u = i$ ,  $i = 1, 2, 3$

## 4 Entwurfsmethodik flachheitsbasierter Reglerumschaltung

Die in Kapitel 3 vorgestellte flachheitsbasierte Umschaltung eignet sich wegen ihrer Eigenschaften sehr gut für den Einsatz in der OCM-Struktur aus Abschnitt 1.1, da sie die Flachheit, eine Eigenschaft des zu regelnden Systems, nutzt und somit von den Reglern des Systems selbst unabhängig ist. Die Stabilität des Systems wird durch die eingeführte Vorsteuerung nicht negativ beeinflusst, und eine Umschaltung ist zu jedem Zeitpunkt möglich. Die Stetigkeit der Stellgrößen ist gegeben, und auch die stetige Differenzierbarkeit der Stellgrößen kann mit ausreichend differenzierbaren Trajektorien des flachen Ausgangs sichergestellt werden. Des Weiteren können die Überführungsdauer und die Systemantwort unabhängig von den Reglern vorgegeben werden. Das Verfahren kann sowohl für Reglerumschaltungen zwischen beliebigen Reglerstrukturen mit und ohne Betriebspunktwechsel als auch für reine Betriebspunktwechsel ohne Änderung des aktiven Reglers genutzt werden, und somit ist auch die Reglerauslegung nicht eingeschränkt oder die Reglerstruktur von der flachheitsbasierten Umschaltung abhängig. Somit erfüllt die flachheitsbasierte Umschaltung alle Anforderungen aus dem Abschnitt 1.2.

Kapitel 4 beschreibt die Entwurfsmethodik flachheitsbasierter Reglerumschaltung in Abhängigkeit von der Art des zugrunde liegenden Systems. Für lineare und nichtlineare flache Systeme ist sie in den Abschnitten 4.1 und 4.2 zusammengefasst. In Abschnitt 4.3 werden die nichtflachen Systeme behandelt, während den linearen Systemen mit Stellgrößenbegrenzung, einem Sonderfall der nichtflachen Systeme, Abschnitt 4.4 gewidmet ist.

Die flachheitsbasierte Umschaltung basiert auf der Berechnung von Trajektorien, für die der Zustand des Systems bekannt sein muss. Werden nicht alle Zustände gemessen, müssen sie geschätzt werden. Die Gesamtstruktur des Systems mit dem Beobachter bzw. dem Zustandsschätzer ist in Abschnitt 4.5 dargestellt.

### 4.1 Entwurf flacher Reglerumschaltungen für lineare Systeme

Lineare Systeme sind, wie bereits in Bemerkung 7 festgestellt, genau dann flach, wenn sie steuerbar sind. Der flache Ausgang des Systems lässt sich mit Hilfe der Kalmanschen Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{K}_s$  berechnen. Im Verhältnis zu nichtlinearen Systemen hält sich deshalb hier der Entwurfsaufwand in Grenzen und kann größtenteils durch Computeralgebrasysteme automatisiert werden.

### 4.1.1 Minimalphasige Eingrößensysteme

Betrachten wir das steuerbare, lineare Eingrößensystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4-1a)$$

$$y_i(t) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}(t), \quad i = 1, 2, \quad (4-1b)$$

mit zwei minimalphasigen Ausgangs-Konfigurationen  $y_i$ ,  $i = 1, 2$ . Für beide Konfigurationen sind klassische Eingrößenregler im Bildbereich  $G_{Ri}(s)$ ,  $i = 1, 2$ , gegeben, zwischen denen umgeschaltet werden soll.

Zuerst wird der flache Ausgang  $y_f$  mittels Gleichung (3-14) bestimmt. Im allgemeinen Fall gilt  $\mathbf{c}_i \neq [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{K}_s^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ , d. h. der flache Ausgang  $y_f$  ist nicht ein zu regelnder Ausgang des Systems. Die Ausgänge  $y_i$  sind gemäß Bemerkung 2 Funktionen des flachen Ausgangs und einer endlichen Anzahl seiner Ableitungen, die im Fall eines linearen Systems als

$$y_1 = A_0 y_f + A_1 \dot{y}_f + \dots + A_{m_1}^{(m_1)} y_f, \quad (4-2)$$

$$y_2 = B_0 y_f + B_1 \dot{y}_f + \dots + B_{m_2}^{(m_2)} y_f, \quad (4-3)$$

gegeben sind. Die dem Ausgang  $y_i$  zugehörige Ordnung der internen Dynamik ist als die Differenz  $m_i = n - r_i$  zwischen der Systemordnung  $n$  und dem Differenzgrad des Ausgangs  $r_i$  definiert.

Da das System (4-1) bezüglich beider Ausgangskonfigurationen minimalphasig ist, ist auch die Nulldynamik beider Ausgänge stabil. Deshalb kann die Überführungstrajektorie  $y_i^*(t)$  bei der Umschaltung direkt für die Ausgänge  $y_i$  vorgegeben werden, unabhängig davon, ob man zur Regelung der Regelgröße  $y_1$  oder  $y_2$  umschaltet.

Die Trajektorie  $y_i^*(t)$  wird von den Istwerten  $y_i^{(j)}(t_u)$ ,  $j = 0, \dots, p_i$ , zum Umschaltzeitpunkt und den End-Sollwerten  $y_i^{(j)}(t_u + T)$ ,  $j = 0, \dots, p_i$ , parametrisiert, wobei  $p_i$  die höchste Ableitung des Ausgangs  $y_i^*(t)$  ist, die gemessen oder beobachtet werden kann und deren Stetigkeit beim Umschalten sichergestellt werden soll. Wenn der Endwert  $y_i(t_u + T)$  ein gewünschter Arbeitspunkt ist, müssen alle Ableitungen der Trajektorie zum Zeitpunkt  $t = t_u + T$  gleich Null sein:

$$y_i^{(j)}(t_u + T) = 0, \quad j = 1, \dots, p_i. \quad (4-4)$$

Als Trajektorien eignen sich z. B. Polynome, trigonometrische Funktionen oder die in dieser Arbeit verwendeten Splines:

$$\begin{aligned} P_{ai}(t) &= a_{oi1} t^{oi1} + \dots + a_{i1} t + a_{i0}, & 0 \leq t < t_b \\ P_{bi}(t) &= b_{oi2} (t - t_b)^{oi2} + \dots + b_{i1} (t - t_b) + b_{i0}, & t_b \leq t \leq T \end{aligned}, \quad i = 1, 2, \quad (4-5)$$



mit einem Knotenpunkt zum Zeitpunkt  $t_b \in [0, T]$ , so dass

$$y_i^*(t) = \begin{cases} P_{ai}(t - t_u), & t_u \leq t < t_u + t_b \\ P_{bi}(t - t_u), & t_u + t_b \leq t \leq t_u + T \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad (4-6)$$

ist. Die Ordnung  $o_{i1}$ ,  $o_{i2}$  der Polynome  $P_{ai}(t)$ ,  $P_{bi}(t)$  hängt von der Anzahl der Anfangs- und der Endwerte ab, die wiederum durch die höchste Ableitung  $\overset{(p_i)}{y_i}$  bestimmt sind, die noch bei der Umschaltung stetig sein soll. Es sind insgesamt  $p_i + 1$  Anfangs- und  $p_i + 1$  Endwerte gegeben, und es sind noch zusätzlich  $p_i + 1$  Werte nötig, damit der Spline zum Zeitpunkt  $t_b$  stetig bis einschließlich der  $p_i$ -ten Ableitung ist. Daraus folgt, dass in (4-5) insgesamt  $O_i = 3(p_i + 1)$  freie Parameter sein müssen, und somit gilt für die Ordnung der Polynome  $o_{i1} + o_{i2} = O_i - 2$ ,  $o_{ij} > p_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$ .

Der Knotenpunkt  $t_b$  ist ein zusätzlicher Freiheitsgrad, der zur Trajektorienbeeinflussung genutzt wird, um z. B. Überschwinger zu vermeiden oder die Größe der Unterschwinger zu optimieren. In Beispiel 4.1 wird sein Einfluss auf die Trajektorie anschaulich gezeigt.

Sind nun die Überführungstrajektorien  $y_i^*(t)$  ausgewählt, werden sie in die Gleichungen (4-2) und (4-3) eingesetzt. Die linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$y_1^*(t) = A_0 y_f^*(t) + A_1 \dot{y}_f^*(t) + \dots + A_{m_1} \overset{(m_1)}{y}_f^*(t), \quad (4-7a)$$

$$y_2^*(t) = B_0 y_f^*(t) + B_1 \dot{y}_f^*(t) + \dots + B_{m_2} \overset{(m_2)}{y}_f^*(t), \quad (4-7b)$$

löst man analytisch und bekommt die Überführungstrajektorien für den flachen Ausgang  $y_{fi}^*(t)$ . Die Trajektorien  $y_{fi}^*(t)$  sind durch die Ist- und die Sollwerte  $\overset{(j)}{y}_i(t_u)$ ,  $\overset{(j)}{y}_i(t_u + T)$ ,  $j = 0, \dots, p_i$ , die Ausgänge  $y_i$ , die Überführungsdauer  $T$  und die Istwerte des flachen Ausgangs  $\overset{(j)}{y}_f(t_u)$ ,  $j = 0, \dots, m_i - 1$ , parametrisiert. Sind die Trajektorien  $y_{fi}^*(t)$  berechnet, werden sie  $n$ -mal differenziert, um nach Einsetzen in Gleichung (3-5b) die Trajektorien für die Vorsteuerung

$$u_{vi}^*(t) = C_0 y_{fi}^*(t) + C_1 \dot{y}_{fi}^*(t) + \dots + C_n \overset{(n)}{y}_{fi}^*(t), \quad t \in [t_u, t_u + T] \quad (4-8)$$

zu liefern. Bei der Umschaltung wird dann das Trajektorienpaar  $y_i^*(t)$ ,  $u_{vi}^*(t)$  für die Überführung zum neuen Arbeitspunkt verwendet, und zwar in Abhängigkeit davon, ob die Regelgröße nach der Umschaltung der Ausgang  $y_1$  oder  $y_2$  ist.

Mithilfe der parametrisierten Trajektorien (4-6) und (4-8) kann dann zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_u$  das System (4-1a) stoßfrei umgeschaltet werden. Die Überführung des Systems zum neuen Arbeitspunkt findet entlang der Trajektorien (4-6) statt. Da die Vorsteuerung  $u_{vi}^*(t)$  genau an die Solltrajektorie  $y_i^*(t)$  angepasst ist, müssen die Regler nur bei Störungen korrigierend eingreifen. Die

Anfangswerte  $y_f^{*(j)}(t_u)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$ , der Differentialgleichungen (4-7) können nach Gleichung (3-21) mithilfe des Zustandsvektors und des Eingangs des Systems zum Umschaltzeitpunkt  $\mathbf{x}(t_u)$ ,  $u(t_u)$  berechnet werden, weshalb eine Messung des flachen Ausgangs nicht notwendig ist.

Bei der Überführung wurden nach Gleichung (4-4) den Ausgängen  $y_i$  verschwindende Ableitungen zum Zeitpunkt  $t_u + T$  vorgegeben. Da jedoch die minimalphasigen Ausgänge  $y_i$  eine interne Dynamik haben, ist das System nach dem Ende der Überführungsdauer  $T$  nicht in einer Ruhelage. Damit auch für die Zeit nach der Überführung der Ausgang  $y_i$  konstant bleibt bzw.  $y_i(t) = y_i(t_u + T)$ ,  $t > t_u + T$ , gilt, muss auch für  $t \geq t_u + T$  die passende Vorsteuerung  $u_{vi}^*(t)$  berechnet werden. Dazu werden die Gleichungen der internen Dynamik der Ausgänge (4-2) und (4-3) mit konstanten Sollwerten analytisch gelöst:

$$y_1(t_u + T) = A_0 y_{f1}^*(t) + A_1 \dot{y}_{f1}^*(t) + \dots + A_{m_1}^{(m_1)} y_{f1}^*(t), \quad (4-9a)$$

$$y_2(t_u + T) = B_0 y_{f2}^*(t) + B_1 \dot{y}_{f2}^*(t) + \dots + B_{m_2}^{(m_2)} y_{f2}^*(t). \quad (4-9b)$$

Da die interne Dynamik der minimalphasigen Ausgänge asymptotisch stabil ist, sind auch die Vorsteuerungen  $u_{vi}^*(t)$ ,  $t > t_u + T$  asymptotisch stabil, weil diese nach Gleichung (4-8) eine lineare Kombination von  $y_{fi}^{*(j)}$ ,  $j = 0, \dots, n$ , sind.

Die Struktur des Systems ist die gleiche wie in Abbildung 3-10, erweitert um die zweite Ausgangskonfiguration des Systems:

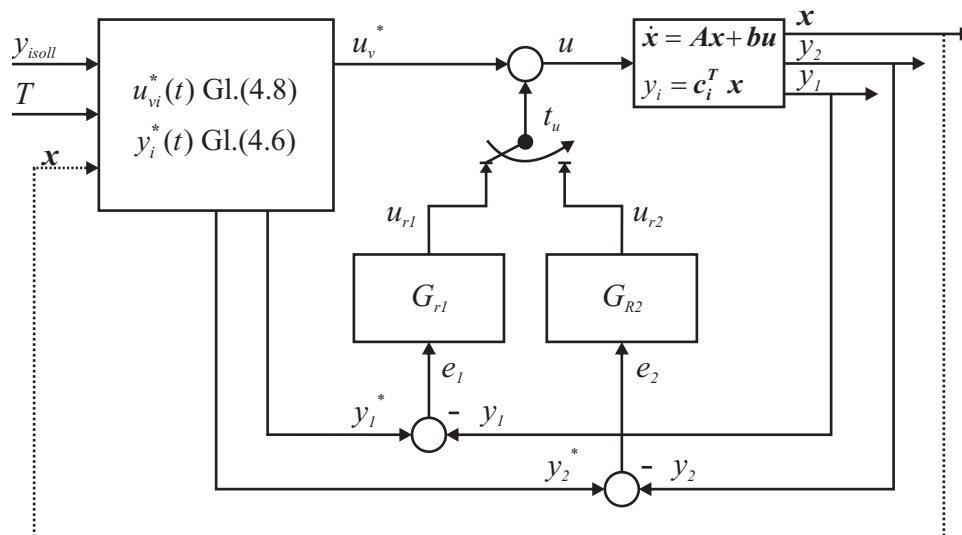


Abb. 4-1: Struktur zur stoßfreien Umschaltung linearer Systeme mit zwei Ausgangskonfigurationen und klassischen Eingrößenreglern

Eine positive Eigenschaft der Struktur ist ihre leichte Erweiterbarkeit um weitere Regler. Sind die zusätzlichen Regler für einen Ausgang  $y_i$  bestimmt, für den

bereits die Überführungstrajektorien berechnet wurden, gibt es keinen Mehraufwand beim Entwurf der Umschaltstruktur. Die Soll- und die Vorsteuerungstrajektorien  $y_i^*(t)$ ,  $u_{vi}^*(t)$  sind nur von den Systemgleichungen und dem jeweiligen Ausgang abhängig. Somit können sie bei allen Reglern des Ausgangs  $y_i$  verwendet werden. Handelt es sich andererseits um einen Ausgang, für den noch keine Überführungstrajektorien berechnet wurden, müssen nur diese bestimmt werden. Die neuen Trajektorien sind für die Umschaltung zum neuen Regler zuständig; für die Umschaltung vom neuen zu den bestehenden Reglern werden die bestehenden und bereits berechneten Überführungstrajektorien verwendet.

**Beispiel 4.1:** Für den Gleichstrommotor aus Beispiel 3.1 soll die flachheitsbasierte Umschaltung zwischen dem Drehzahlregler  $G_\omega(s)$  und dem Stromregler  $G_i(s)$  realisiert werden. Das System ist linear, und die interne Dynamik des Ausgangs  $i$  (Gl. (3-9b)) ist minimalphasig. Da  $\omega$  der flache Ausgang des Systems ist, besitzt es keine interne Dynamik.

Für die Umschaltung zur Drehzahlregelung wird der folgende Spline gewählt:

$$S_{\omega 1}(t) = a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad (4-10)$$

$$S_{\omega 2}(t) = b_3(t - t_b)^3 + b_2(t - t_b)^2 + b_1(t - t_b) + b_0, \quad (4-11)$$

der die Solltrajektorie für die Drehzahl nach der Umschaltung festlegt:

$$\omega^*(t) = \begin{cases} S_{\omega 1}(t), & t_u \leq t < t_u + t_b \\ S_{\omega 2}(t), & t_u + t_b \leq t \leq t_u + T \end{cases} \quad (4-12)$$

Die Parameter  $a_i$ ,  $b_i$  sind durch die Randbedingungen

$$\begin{aligned} S_{\omega 1}(0) &= \omega(t_u) & \dot{S}_{\omega 1}(0) &= \dot{\omega}(t_u) & \ddot{S}_{\omega 1}(0) &= \ddot{\omega}(t_u) \\ S_{\omega 2}(t_u + T) &= \omega_{soll} & \dot{S}_{\omega 2}(t_u + T) &= 0 & \ddot{S}_{\omega 2}(t_u + T) &= 0 \\ S_{\omega 1}(t_b) &= S_{\omega 2}(t_b) & \dot{S}_{\omega 1}(t_b) &= \dot{S}_{\omega 2}(t_b) & \ddot{S}_{\omega 1}(t_b) &= \ddot{S}_{\omega 2}(t_b) \end{aligned} \quad (4-13)$$

bestimmt. Der Knotenpunkt  $t_b$  wird, wie in [84] beschrieben, genutzt, um Überschwinger der Solltrajektorie  $\omega^*(t)$  zu vermeiden, die auftreten, wenn die Beschleunigung zum Umschaltzeitpunkt  $\dot{\omega}(t_u)$  relativ groß ist:

$$t_b = \begin{cases} \frac{3(\omega_{soll} - \omega(t_u))}{\dot{\omega}(t_u)}, & \dot{\omega}(t_u) \neq 0 \wedge 0 < t_b < T \\ \frac{T}{2}, & \dot{\omega}(t_u) = 0 \vee t_b < 0 \vee t_b > T \end{cases} \quad (4-14)$$

Die Vorsteuerung  $u_{v\omega}^*(t)$ ,  $t \in [t_u, t_u + T]$ , bekommt man nach zweimaligem Ableiten von Gleichung (4-12) und Einsetzen in die Gleichung (3-38):

$$u_{v\omega}^*(t) = \frac{LJ}{K_m} \ddot{\omega}^*(t) + \frac{1}{K_m} (RJ + Lb) \dot{\omega}^*(t) + \left( K_e + \frac{Rb}{K_m} \right) \omega^*(t). \quad (4-15)$$

Wie bereits erwähnt, besitzt  $\omega$  keine interne Dynamik, weshalb die Vorsteuerung nach der Überführung konstant bleibt:

$$u_{v\omega}^*(t) = u_{v\omega}^*(t_u + T), \quad t > t_u + T. \quad (4-16)$$

Für die Umschaltung zur Momentregelung<sup>1</sup> wird ein Spline 2. Ordnung gewählt:

$$S_{i1}(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad (4-17)$$

$$S_{i2}(t) = b_2(t - t_b)^2 + b_1(t - t_b) + b_0, \quad (4-18)$$

der die Solltrajektorie für den Läuferstrom nach der Umschaltung beschreibt:

$$i^*(t) = \begin{cases} S_{i1}(t), & t_u \leq t < t_u + t_b \\ S_{i2}(t), & t_u + t_b \leq t \leq t_u + T \end{cases} \quad (4-19)$$

Hier sind die Parameter  $a_i, b_i$ ,  $i = 1, \dots, 2$ , durch die Randbedingungen

$$\begin{aligned} S_{i1}(0) &= i(t_u) & \dot{S}_{i1}(0) &= \dot{i}(t_u) = \frac{1}{L} (U(t_u) - L_e \omega - Ri) \\ S_{i2}(t_u + T) &= i_{soll} & \dot{S}_{i2}(t_u + T) &= 0 \\ S_{i1}(t_b) &= S_{i2}(t_b) & \dot{S}_{i1}(t_b) &= \dot{S}_{i2}(t_b) \end{aligned} \quad (4-20)$$

definiert, wobei aus praktischen Gründen in Gleichung (4-20)  $\dot{S}_{i1}(0) = 0$  gesetzt werden kann. Der falsche Randwert ist insoweit unproblematisch, als unstetige Ableitungen des Systemzustands  $i$  die Stoßfreiheit der Umschaltung nicht beeinträchtigen. Nach Einsetzen von Gleichung (4-19) in Gleichung (3-9b) kann die resultierende Differentialgleichung analytisch gelöst werden, was eine quadratisch ansteigende Drehzahltrajektorie zur Folge hat:

$$\omega_{vi}^*(t) = \begin{cases} A_{i1} e^{-\frac{b}{J}t} + B_{i1} t^2 + C_{i1} t + D_{i1}, & t_u \leq t < t_u + t_b \\ A_{i2} e^{-\frac{b}{J}t} + B_{i2} t^2 + C_{i2} t + D_{i2}, & t_u + t_b \leq t \leq t_u + T \end{cases} \quad (4-21)$$

Die aus der Trajektorie (4-21) und ihren Ableitungen resultierende Vorsteuerung  $u_{vi}^*(t)$ ,  $t \in [t_u, t_u + T]$ , ist folglich auch instabil, jedoch auf das Zeitintervall  $t \in [t_u, t_u + T]$  begrenzt. Nach der Überführung soll der Läuferstrom auf dem Sollwert konstant gehalten werden  $i(t) = i_{soll}$ ,  $t > t_u + T$ , was durch den asymptotisch stabilen Vorsteuerungsverlauf

$$u_{vi}^*(t) = (\omega(t_1 + tr) - \frac{K_m i_d}{b}) e^{-\frac{b}{J}t} + \frac{K_m i_d}{b}, \quad t > t_u + T, \quad (4-22)$$

erreicht wird. Die Gleichung (4-22) resultiert aus der Drehzahltrajektorie, die nach Lösen von

$$J\dot{\omega} + b\omega = K_M i_{soll} \quad (4-23)$$

---

<sup>1</sup> Beim Gleichstrommotor ist das Antriebsmoment proportional zum Läuferstrom.

gewonnen wird.

Alle benötigten Trajektorien (4-12), (4-15), (4-19) und (4-22) sind nun parametrisiert durch den Systemzustand  $\boldsymbol{x} = [\omega \ i]^T$ , seine Ableitung  $\dot{\boldsymbol{x}}$ , den jeweiligen Sollwert  $\omega_{soll}$ ,  $i_{soll}$  und die Überföhrungsdauer  $T$ . Mit der Struktur aus Abbildung 3-10 kann dann jederzeit stoßfrei zwischen den beiden Reglern umgeschaltet werden.

Wie man leicht sehen kann, sind die Soll- und die Vorsteuerungstrajektorien nicht an bestimmte Regler bei der Umschaltung gebunden. Sie können auch für Arbeitspunktwechsel ohne Regler austausch oder fürs Hochfahren der Systeme genutzt werden, wobei die Zeit zum Erreichen des Sollwerts je nach Bedarf und Situation gewählt werden kann.

Tabelle 4-1: Hochfahren des Motors und Reglerumschaltung

ZEIT [s]	REGLER	SOLLWERT
0-0,1	Hochfahren - Stromregler	0,1 [A]
0,1-0,25	Stromregler	0,1 [A]
0,25-0,35	Überföhrung - Drehzahlregler	150 [rad/s]
0,35-0,4	Drehzahlregler	150 [rad/s]

Abbildung 4-2 zeigt eine MATLAB/Simulink-Simulation der Umschaltserie aus Tabelle 4-1 für einen Gleichstrommotor mit den folgenden technischen Daten:

$$R = 23 \ \Omega,$$

$$L = 3,4 \text{ mH},$$

$$K_m = 86,5 \text{ mNm/A},$$

$$K_e = 9,05 \text{ mV/min}^{-1},$$

$$J = 52 \text{ gcm}^2,$$

$$b = 62,6 \ \mu\text{Nm/min}^{-1}.$$

Der Motor wird zuerst mit dem Stromregler hochgefahren, der zum Zeitpunkt  $t = 0,25$  gegen den Drehzahlregler getauscht wird. Wie zu sehen ist, bleibt die Spannung  $u(t)$  als Eingangsgröße kontinuierlich, und die jeweiligen Sollwerte werden nach der vorgegebenen Überföhrungsdauer erreicht.

Da die flachheitsbasierte Umschaltung nicht an Arbeitspunkte gebunden ist, kann jederzeit ein Regler austausch vorgenommen werden. So zeigt Abbildung 4-3, wie das System reagiert, wenn mitten in der Überföhrung zum Drehzahlregler auf den Stromregler zurückgeschaltet wird. Die Reglerumschaltungen in Abbildung 4-3 sind bis zum Zeitpunkt  $t = 0,27$  in Tabelle 4-1 definiert. Zum Zeitpunkt  $t = 0,27$  wird dann mitten in der Überföhrung zum Drehzahlsollwert  $\omega_{soll} = 150$  abgebrochen und mit dem Sollwert  $i = 0$  auf den Stromregler umgeschaltet. Dieser wird in der vorgegebenen Zeit  $T = 0,05$  erreicht.

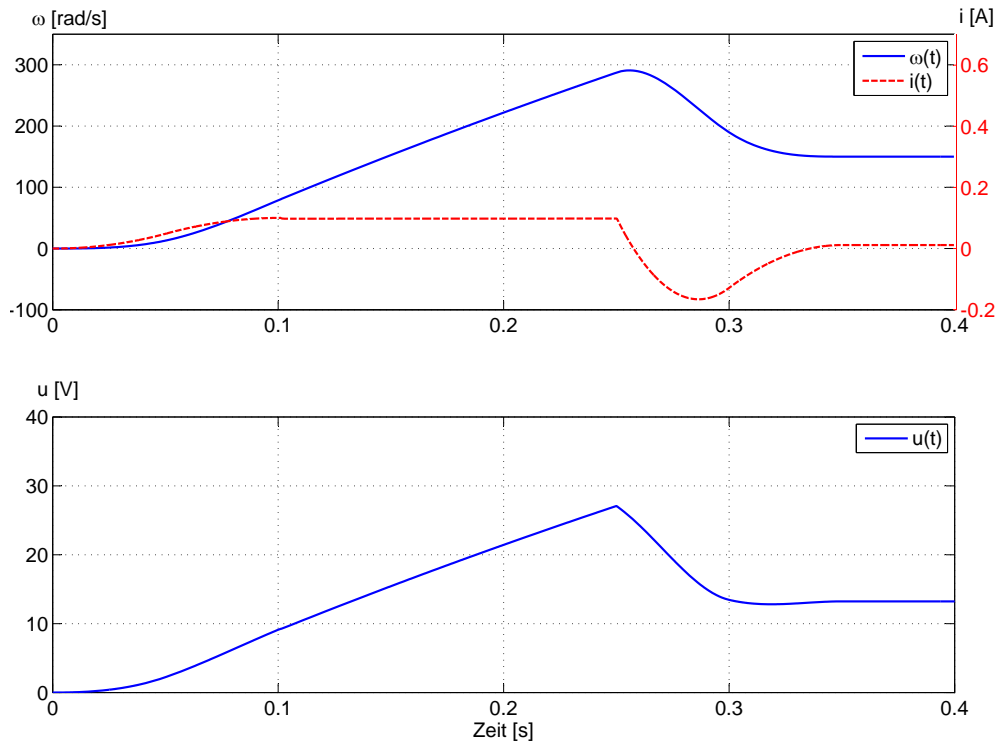


Abb. 4-2: Hochfahren des Gleichstrommotors mit aktiver Stromregelung und Umschalten auf Drehzahlregelung

Es ist deutlich zu sehen, dass die Ableitung der Stromtrajektorie  $i(t)$  zum Zeitpunkt  $t = 0,27$  Null ist:  $\dot{i}(t = 0,27) = 0$ , was eine Folge der festgelegten Randbedingung  $\dot{S}_1(0) = 0$  für die Solltrajektorie  $i^*(t)$  ist. Deshalb sind der Zustand  $i$  und die Eingangsgröße  $u$  zum Zeitpunkt  $t = 0,27$  nicht differenzierbar, aber stetig, so dass die Umschaltung trotzdem stoßfrei bleibt.

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit der flachheitsbasierten Umschaltung ist das Trajektorien-Folgeproblem. Dabei muss die Vorgabetrajektorie genügend oft differenzierbar sein, wenn sie für den flachen Ausgang vorgegeben wird. Wenn sie für einen nichtflachen Ausgang  $y_i$  vorgesehen ist, muss die Gleichung der internen Dynamik (4-7) analytisch lösbar sein. Die Vorgabetrajektorie kann, wie zuvor die Splines über die Randbedingungen (4-13), mit der Überführungstrajektorie verknüpft werden. Der Überführungstrajektorie werden dabei nicht verschwindende Ableitungen zum Zeitpunkt  $t_u + T$  vorgegeben, sondern die passenden Werte der Vorgabetrajektorie.

Als Beispiel sei hier eine Sinustrajektorie für die Drehzahl  $\omega$  gewählt:

$$\omega_{folge}(t) = A_f \sin(\omega_f t + B_f) + C_f. \quad (4-24)$$

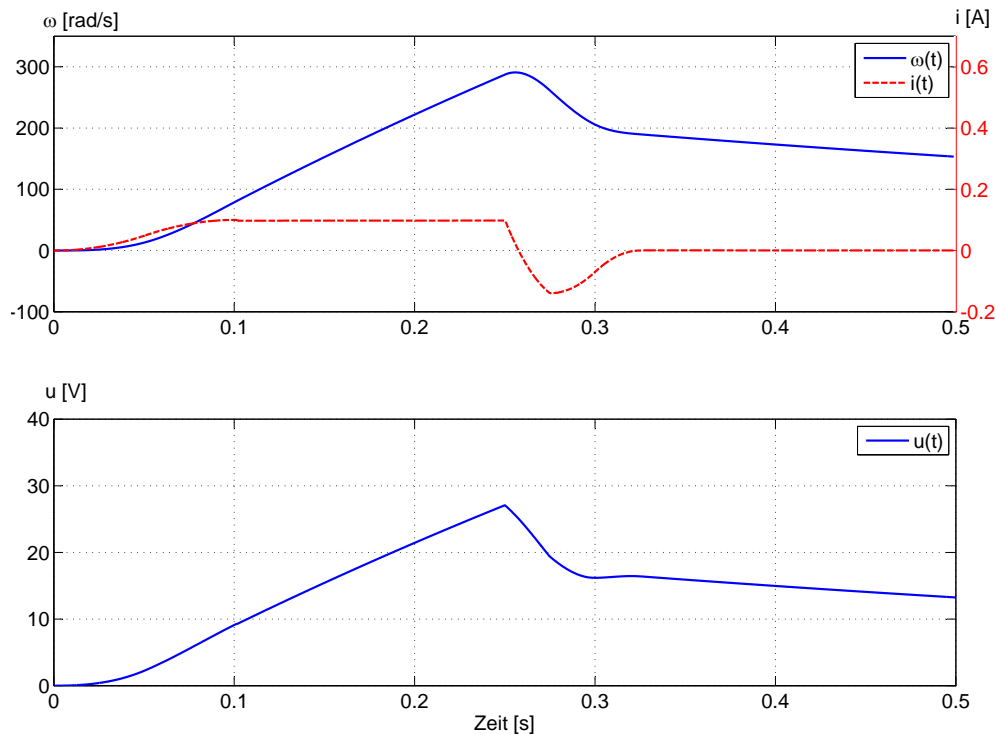


Abb. 4-3: Umschalten zwischen Drehzahl- und Stromregler während der Überführung

Die Randbedingungen (4-13) für die Überführungstrajektorie lauten nun:

$$\begin{aligned}
 S_{\omega 2}(t_u + T) &= \omega_{folge}(t_u + T), \\
 \dot{S}_{\omega 2}(t_u + T) &= \dot{\omega}_{folge}(t_u + T), \\
 \ddot{S}_{\omega 2}(t_u + T) &= \ddot{\omega}_{folge}(t_u + T).
 \end{aligned} \tag{4-25}$$

In Tabelle 4-2 ist aufgeführt, zu welcher Zeit welche Solltrajektorie dem Gleichstrommotor in Abbildung 4-4 vorgegeben wird. Anhand des Verlaufs der Trajektorie des Sinusfolgefehlers sieht man, wie während der jeweils vorgegebenen Überführungsdauer der Folgefehler gegen Null strebt. Dabei wird der Folgefehler auch während der Überführung mittels der Gleichung

$$A \sin(Bt + C) + D = \omega(t) \tag{4-26}$$

bestimmt, wobei  $A, B, C$  und  $D$  die jeweils passenden Parameter der Sinustrajektorien aus Tabelle 4-2 sind.

#### 4.1.2 Nichtminimalphasige Eingrößensysteme

Sind die Ausgänge des Systems (4-1) nicht minimalphasig, wie angenommen, wären die Überführungstrajektorien, berechnet auf die zuvor beschriebene Art und Weise, in der Regel unbrauchbar. Zwar ist es möglich, alle Gleichungen analy-

Tabelle 4-2: Umschaltung - Trajektorienfolge

ZEIT [s]	REGLER	SOLLWERT
0-0,1	Hochfahren - Stromregler	0, 1 [A]
0,1-0,25	Stromregler	0, 1 [A]
0,25-0,3	Überführung - Drehzahlregler	$80 \sin(100t) + 250$ [rad/s]
0,3-0,4	Trajektorienfolge - Drehzahl	$80 \sin(100t) + 250$ [rad/s]
0,4-0,42	Überführung - Drehzahlregler	$30 \sin(200t + \pi/2) + 100$ [rad/s]
0,42-1	Trajektorienfolge - Drehzahl	$30 \sin(200t + \pi/2) + 100$ [rad/s]

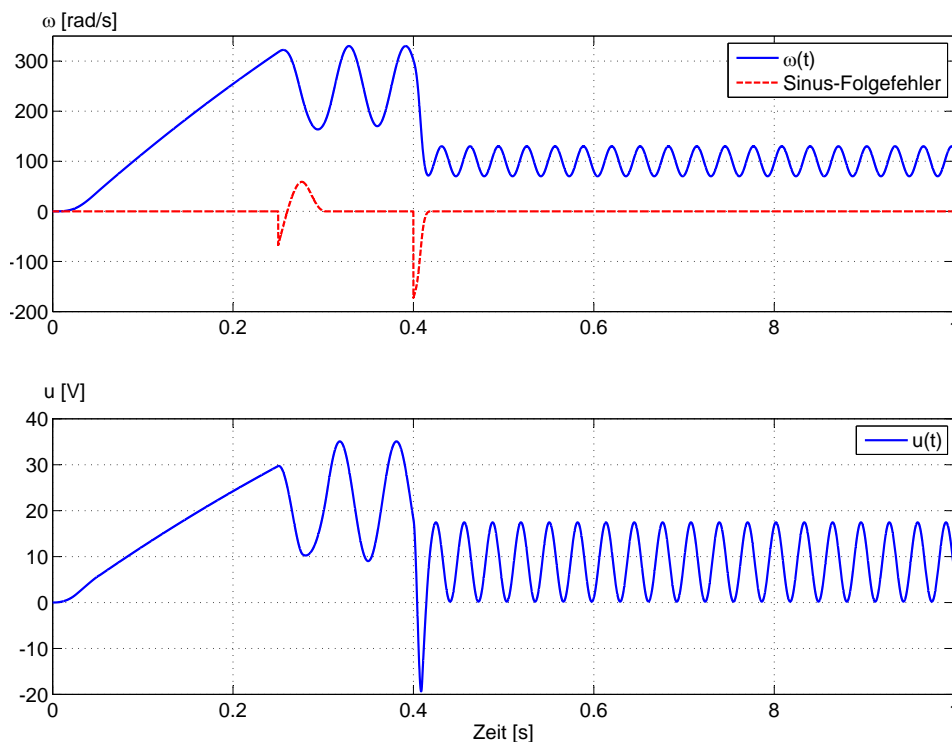


Abb. 4-4: Reglerumschaltung mit anschließender Trajektorienfolge

tisch zu lösen und parametrisierte Vorsteuerungen und Solltrajektorien zu erhalten, jedoch ist die Nulldynamik der Ausgänge wegen der Nichtminimalphasigkeit instabil. Deswegen resultieren aus den Gleichungen (4-9) im Allgemeinen auch instabile Trajektorien für die Eingangsgröße  $u_{vi}^*(t)$ ,  $t > t_u + T$ , nach der Umschaltung. Wenn also nach der Überführung der vorgegebene Sollwert für  $t \rightarrow \infty$  gehalten werden soll, müsste auch die Eingangsgröße gegen  $u_{vi}^*(t) \rightarrow \infty$  streben. Dies ist jedoch mit Eingangsgrößen realer Systeme nicht vereinbar.

Dieses Problem kann umgangen werden, indem für die Überführung eine mindestens  $n$ -mal differenzierbare Trajektorie für den flachen Ausgang  $y_f^*(t)$  vorgegeben wird. Dann können verschwindende Ableitungen  $\dot{y}_f^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , zum Zeit-



punkt  $t_u + T$  vorgegeben werden. Da für die Ableitung des Zustandsvektors nach Gleichung (3-5a)

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{y}_f, \dot{\mathbf{y}}_f, \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta)}) = \boldsymbol{\psi}_1(\dot{\mathbf{y}}_f, \ddot{\mathbf{y}}_f, \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta+1)}) \quad (4-27)$$

gilt, wird durch die Vorgabe der verschwindenden Ableitungen für den flachen Ausgang  $y_f^{(j)}(t_u + T) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ein stationärer Arbeitspunkt nach der Umschaltung erreicht:  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ . Damit wäre auch die Vorsteuerung für  $t \rightarrow \infty$  konstant mit  $u_{vi}^*(t) = u_{vi}^*(t_u + T)$ ,  $t > t_u + T$ .

Die Randbedingung für  $y_f^*(t)$ ,  $t \in [t_u, T]$ , ist für den Zeitpunkt  $t_u$  durch Gleichung (3-21) gegeben:

$$\begin{bmatrix} y_f(t_u) \\ \dot{y}_f(t_u) \\ \vdots \\ y_f^{(n-1)}(t_u) \\ y_f^{(n)}(t_u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Lambda \mathbf{A} \\ \vdots \\ \Lambda \mathbf{A}^{(n-1)} \\ \Lambda \mathbf{A}^{(n)} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t_u) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Lambda \mathbf{A}^{(n-1)} \mathbf{b} \end{bmatrix} u(t_u), \quad (4-28)$$

während für den Zeitpunkt  $t_u + T$  gilt:

$$\begin{aligned} y_f(t_u + T) &= y_{isoll}, \\ \dot{y}_f(t_u + T) &= 0, \\ &\vdots \\ y_f^{(n)}(t_u + T) &= 0. \end{aligned} \quad (4-29)$$

Die Trajektorien  $y_i^*(t)$  und  $u_{vi}^*(t)$ ,  $t \in [t_u, T]$ , sind durch die Gleichungen (4-2), (4-3) und (4-8) gegeben.

Anders als bei minimalphasigen Ausgängen kann normalerweise bei der Umschaltung zum Regler nichtminimalphasiger Ausgänge die Überführungstrajektorie für den Ausgang nicht direkt vorgegeben werden. Eine Ausnahme kann es hierbei geben, wenn der Sollwert  $y_{isoll}$  nicht konstant gehalten werden muss. Dies würde beispielsweise beim Folgeproblem wie in Beispiel 4.1 auftreten, wenn der Ausgang einer Sinusschwingung folgen soll.

**Beispiel 4.2:** Das invertierte Pendel aus Abbildung 4-5 ist ein häufiges Beispiel für unteraktuierte und nichtminimalphasige Systeme. Seine um die obere Ruhelage linearisierten Gleichungen lauten:

$$(M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} = F, \quad (4-30a)$$

$$\ddot{x} + L\ddot{\theta} - g\theta = 0, \quad (4-30b)$$

wobei  $m$  und  $M$  die Massen des Pendels und des Wagens sind,  $L$  die Pendellänge,  $g$  die Erdbeschleunigung,  $x$  die Wagenposition und  $\theta$  der Pendelwinkel.

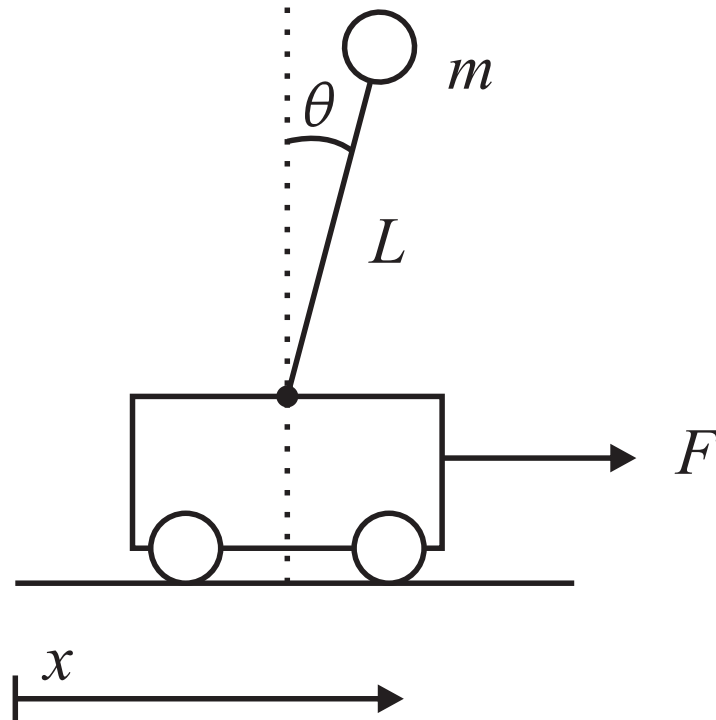


Abb. 4-5: Invertiertes Pendel auf Wagen

Zur Bestimmung des flachen Ausgangs löst man die Gleichungen (4-30) nach der höchsten Ableitung auf und erhält die Zustandsraumbeschreibung

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ -b_4 \end{bmatrix} F, \quad (4-31)$$

mit  $x_1$  als Wagenposition,  $x_2 = \dot{x}_1$ ,  $x_3$  als Pendelwinkel und  $x_4 = \dot{x}_3$ . Die Parameter sind  $a_{23} = \frac{mg}{M}$ ,  $a_{43} = \frac{(M+m)g}{ML}$ ,  $b_2 = \frac{1}{M}$  und  $b_4 = \frac{1}{ML}$ .

Da das System (4-31) steuerbar ist, kann  $y_f$  über die Kalman'sche Steuerbarkeitsmatrix ermittelt werden und lautet

$$y_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = x + L\theta, \quad (4-32)$$

so dass die Parametrierung der Zustandsvariablen durch den flachen Ausgang und seine Ableitungen (interne Dynamik) durch

$$\theta = \frac{1}{g}\ddot{y}_f, \quad (4-33a)$$

$$x = y_f - \frac{L}{g}\ddot{y}_f \quad (4-33b)$$

gegeben ist. Die daraus folgende Nulldynamik des Pendelwinkels

$$0 = \frac{1}{g}\ddot{y}_f \quad (4-34)$$

ist instabil, sowie die Nulldynamik der Wagenposition

$$0 = y_f - \frac{L}{g}\ddot{y}_f. \quad (4-35)$$

Ist eine Positionsänderung des inversen Pendels gewünscht, kann die Überführungstrajektorie  $x^*(t)$  nicht direkt vorgegeben werden, sondern muss aus der Trajektorie  $y_f^*(t)$  und ihren Ableitungen gewonnen werden. Es wird angenommen, dass Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Wagens und des Pendels gemessen werden können, so dass der flache Ausgang und seine ersten 4 Ableitungen  $\overset{(j)}{y}_f$ ,  $j = 0, \dots, 4$ , bestimmt sind. Damit wird für die Trajektorie  $y_f^*(t)$  ein Spline mit Polynomen 6. und 7. Ordnung gewählt:

$$\begin{aligned} P_a(t) &= a_6 t^6 + \dots + a_1 t + a_0, & 0 \leq t < t_b \\ P_b(t) &= b_7 (t - t_b)^7 + \dots + b_1 (t - t_b) + b_0, & t_b \leq t \leq T \end{aligned} \quad (4-36)$$

wobei die Randbedingungen der Überführung mit

$$\begin{aligned} P_a(0) &= x(t_u) + L\theta(t_u), & \dot{P}_a(0) &= \dot{x}(t_u) + L\dot{\theta}(t_u), & \ddot{P}_a(0) &= g\theta(t_u), \\ \overset{(3)}{P}_a(0) &= g\dot{\theta}(t_u), & \overset{(4)}{P}_a(0) &= g\ddot{\theta}(t_u), & P_b(T) &= x_{soll}, \\ \overset{(j)}{P}_a(t_b) &= \overset{(j)}{P}_b(t_b), \quad j = 0, \dots, 4, & \overset{(j)}{P}_b(T) &= 0, \quad j = 1, \dots, 4, \end{aligned} \quad (4-37)$$

festgelegt sind. Die Solltrajektorien für die Wagenposition  $x^*(t)$  und den Winkel  $\theta^*(t)$  lassen sich aus den Gleichungen (4-33) bestimmen, während die Beziehung

$$F = (M + m)\ddot{y}_f - \frac{ML}{g}\overset{(4)}{y}_f \quad (4-38)$$

die Vorsteuerung  $F^*(t)$  definiert.

Abbildung 4-6 zeigt die Antwort des linearisierten Pendels, bei dem der Anfangszustand  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = -2$ ,  $\ddot{x}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 2$ ,  $\ddot{\theta}(0) = 0$  beträgt. Die Ruheposition  $x = 5$ ,  $\theta = 0$  soll in  $T = 3$  Sekunden erreicht werden. Der Verlauf der Eingangsgröße ähnelt sehr dem Verlauf des Pendelwinkels, da kleine

Beschleunigungen  $\ddot{\theta}$  vorherrschen und für die Kraft die Beziehung aus Gleichung (4-31)

$$F = (M + m)g\theta - ML\ddot{\theta} \quad (4-39)$$

gilt. Die folgenden Werte für die Systemparameter wurden benutzt:

$$M = 0,5 [kg], \quad m = 0,2 [kg], \quad L = 0,3 [m], \quad g = 9,81 [m/s^2]. \quad (4-40)$$

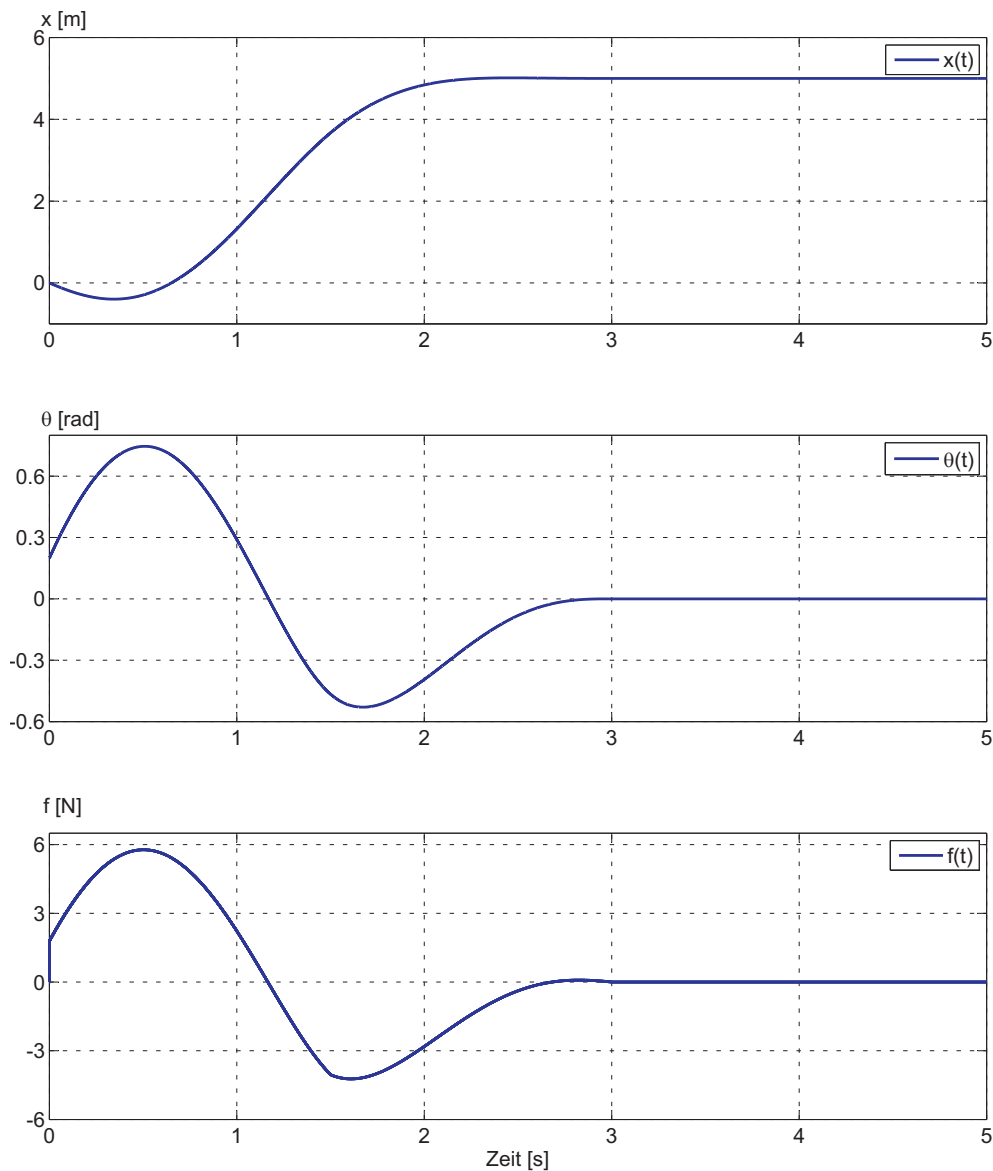


Abb. 4-6: Positionsänderung des linearisierten invertierten Pendels (4-30) für die Umschaltdauer  $T = 3$  [s]

### 4.1.3 Minimalphasige Mehrgrößensysteme

Bei linearen, steuerbaren Mehrgrößensystemen mit mehreren Ausgangskonfigurationen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^{p_j} \quad (4-41a)$$

$$\mathbf{y}_j(t) = \mathbf{C}_j\mathbf{x}(t), \quad j = 1, 2, \quad (4-41b)$$

lässt sich  $\mathbf{y}_f$  mit Gleichung (3-24) bestimmen. Der flache Ausgang ist dabei immer  $m$ -dimensional wie der Eingangsvektor  $\mathbf{u}$ , so dass steuerbare Systeme der Form (4-41a) quadratisch in Bezug zum Ausgang  $\mathbf{y}_f$  sind.

Eine Besonderheit des flachen Ausgangs, die im Folgenden bewiesen wird, ist, dass seine Komponenten  $y_{f_i}^*$ ,  $i = 1, \dots, m$ , entkoppelbar sind. Somit können für die Komponenten  $y_{f_i}^*$  des flachen Ausgangs immer  $m$  unabhängige Trajektorien  $y_{f_i}^*(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , bei der Überführung bzw. Umschaltung des Systems in den neuen Arbeitspunkt vorgegeben werden.

Die Entkoppelbarkeitsbedingung für lineare quadratische Mehrgrößensysteme, mit dem Beweis in [85], lautet:

*Die Zahl der invarianten Nullstellen des Systems muss gleich  $n - \delta$  sein, wobei  $n$  die Systemordnung und  $\delta$  die Differenzordnung des Systems sind.*

Die Differenzordnung  $\delta_i$  ist die niedrigste Ableitung einer Ausgangskomponente  $y_i$ , die sprungfähig ist bzw. bei der durch einen Sprung einer geeigneten Eingangskomponente ein Sprung hervorgerufen werden kann. Im Zustandsraum ausgedrückt, ist sie die kleinste Zahl  $k \in \mathbb{N}$ , für die

$$\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \neq \mathbf{0}^T \quad (4-42)$$

gilt, wobei  $\mathbf{c}_i$  die  $i$ -te Zeile der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  ist.

Die Differenzordnung des Systems ist die Summe

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_m, \quad (4-43)$$

die immer kleiner oder gleich der Systemordnung  $n$  ist.

Als invariante Nullstelle eines linearen Mehrgrößensystems wird die Zahl  $\eta$  bezeichnet, für die gilt:

$$\text{rang}(\mathbf{P}(\eta)) < n + \min(m, p), \quad (4-44)$$

wobei  $\mathbf{P}(s)$  die Rosenbrocksche Systemmatrix

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (4-45)$$

ist [87]. Bei quadratischen Systemen sind die invarianten Nullstellen (4-44) gleich den Nullstellen der Gleichung:

$$\det(\mathbf{P}(\eta)) = 0. \quad (4-46)$$

Die nichttrivialen Lösungen der Gleichung

$$\mathbf{P}(\eta) \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

sind die Zustands- und die Eingangsnulstellenrichtung  $\mathbf{n}_x$  bzw.  $\mathbf{n}_u$  der invarianten Nullstelle  $\eta$ .

Die Nullstellen und die Nullstellenrichtungen sind anschaulich in Abbildung 4-7 dargestellt. Befindet sich das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Anfangszustand  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{n}_x$  und wird als Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t) = e^{\eta t} \mathbf{n}_u$ ,  $t > 0$ , gewählt, so wird der Zustandsvektor den Verlauf  $\mathbf{x}(t) = e^{\eta t} \mathbf{n}_x$  haben und der Ausgang identisch verschwinden mit  $\mathbf{y} \equiv 0$ :

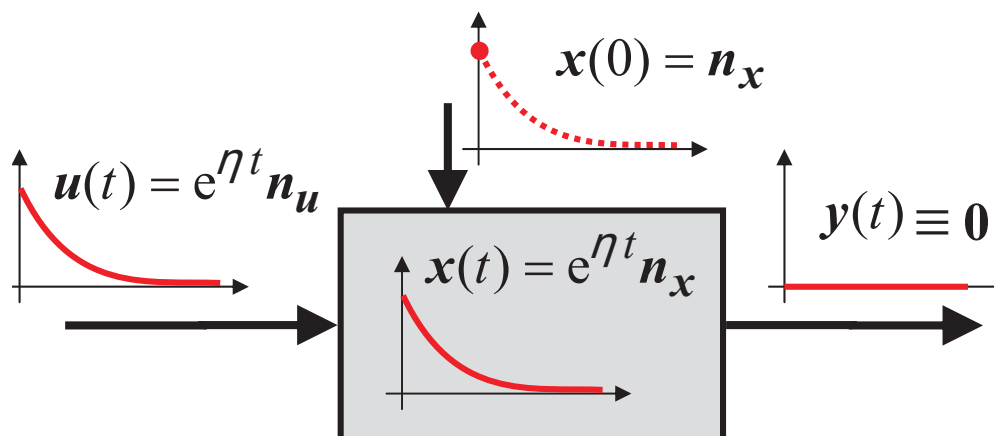


Abb. 4-7: Bedeutung der invarianten Nullstellen und Nullstellenrichtungen

Aus den Gleichungen (4-43) und (4-46) folgt, dass sich sowohl die Differenzordnung des Systems als auch die invarianten Nullstellen auf einen Systemausgang  $\mathbf{y}$  beziehen müssen. Die Differenzordnung des Systems im Hinblick auf den flachen Ausgang ist immer  $n$ . Dies folgt direkt aus der Gleichung (3-24) zum Bestimmen von  $\mathbf{y}_f$ . Wendet man beim System (4-41a) die Transformation  $\mathbf{z} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}$  an, erhält man  $m$  gekoppelte Teilsysteme:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{j1} &= \alpha_1^{jj} z_{j\gamma_j} + (\sum_{i=1, i \neq j}^m \alpha_1^{ij} z_{i\gamma_i}) + u_j \\ \dot{z}_{j2} &= z_{j1} + \alpha_2^{jj} z_{j\gamma_j} + (\sum_{i=1, i \neq j}^m \alpha_2^{ij} z_{i\gamma_i}) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{j\gamma_j} &= z_{j(\gamma_j-1)} + \alpha_{\gamma_j}^{jj} z_{j\gamma_j} + (\sum_{i=1, i \neq j}^m \alpha_{\gamma_j}^{ij} z_{i\gamma_i}) \end{aligned} \quad j = 1, \dots, m. \quad (4-48)$$

Alle Zustände des Teilsystems  $j$ ,  $z_{ji}, i = 1, \dots, \gamma_j - 1$ , und die Eingänge  $u_j$  sind, wie man sieht, parametrisiert durch die Zustandsvariablen  $z_{j\gamma_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Die Zustandsvariablen  $z_{j\gamma_j}$  sind die mittels Gleichung (3-24) extrahierten Komponenten des flachen Ausgangs. Außerdem folgt aus jedem Teilsystem (4-48), dass die Zustandsvariablen  $z_{j\gamma_j}$  die Differenzordnung  $\gamma_j$  besitzen. Da für die Steuerbarkeitsindizes Gleichung (3-23) gilt, ist die Differenzordnung des Systems  $\delta = n$  und  $n - \delta = 0$ .

Auf der anderen Seite ist aus der Bedeutung der invarianten Nullstellen und der Nullstellenrichtungen klar, dass ein System bezüglich  $\mathbf{y}_f$  keine invarianten Nullstellen besitzt. Angenommen, ein System besitze bezüglich  $\mathbf{y}_f$  eine invariante Nullstelle, so würden die Lösungen der Gleichung (4-47) eine Dynamik der Eingänge und der Zustände des Systems beschreiben, die keine Funktion von  $\mathbf{y}_f$  und seinen Ableitungen sind. Dadurch ist aber Bedingung (3-5) verletzt, weshalb  $\mathbf{y}_f$  kein flacher Ausgang des Systems wäre.

Somit gilt folgender Satz:

**Bemerkung 9:** Der flache Ausgang  $\mathbf{y}_f$  eines linearen, steuerbaren Mehrgrößensystems (4-41a) besitzt die Differenzordnung  $n$ , und seine Komponenten  $y_{fi}$  sind entkoppelbar.

Ist das System (4-41) quadratisch bzw.  $p_j = m$ ,  $j = 1, 2$ , und sind die Komponenten der Ausgänge  $\mathbf{y}_j$  entkoppelbar, so können, analog zum minimalphasigen Eingrößensystem, beim Umschalten die Überführungstrajektorien  $\mathbf{y}_j^*(t)$ ,  $t \in [t_u, t_u + T]$ , für die Ausgänge direkt vorgegeben werden. Für die einzelnen Ausgangskomponenten  $y_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , können diese wieder Splines ausreichender Ordnung wie in Gleichung (4-6) sein. Um die passende Vorsteuerung zu bestimmen, müssen die Differenzialgleichungssysteme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{j1}^*(t) &= \mathbf{a}_{j10}^j \mathbf{y}_f^*(t) + \mathbf{a}_{j11}^j \dot{\mathbf{y}}_f^*(t) + \dots + \mathbf{a}_{j1q_{j1}}^j \overset{(q_{j1})}{\mathbf{y}}_f^*(t), \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_{jm}^*(t) &= \mathbf{a}_{jm0}^j \mathbf{y}_f^*(t) + \mathbf{a}_{jm1}^j \dot{\mathbf{y}}_f^*(t) + \dots + \mathbf{a}_{jm q_{jm}}^j \overset{(q_{jm})}{\mathbf{y}}_f^*(t), \end{aligned} \quad j = 1, 2, \quad (4-49)$$

gelöst werden, wobei  $q_{ji} = n - \delta_{ji}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $i = 1, \dots, m$ , die Differenz zwischen der Ordnung des Systems und der jeweiligen Differenzordnung einer Ausgangskomponente  $y_{ji}$  ist. Die Vorsteuerungstrajektorien  $\mathbf{u}^*(t)$  und die Überführungstrajektorien für die Zustände  $\mathbf{x}^*(t)$  (für Regler im Zustandsraum) sind wie bisher über Gleichungen (3-5) definiert.

Sind bei nicht quadratischen Systemen (4-41) mit  $p_j < m$  die Ausgangskonfigurationen entkoppelbar, so können unabhängige Überführungstrajektorien für die einzelnen Ausgangskomponenten  $y_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, p_j$ , vorgegeben werden. Das Differenzialgleichungssystem (4-49) ist damit aber unterbestimmt. Um es lösbar zu

machen, müssen noch  $m - p_j$  Trajektorien für die Komponenten von  $\mathbf{y}_f$  vorgegeben werden, die zusätzliche Freiheitsgrade der Überführung darstellen.

Für unteraktuierte Systeme (4-41) mit  $p_j > m$  können Überführungstrajektorien für die Ausgangskomponenten  $y_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, p_j$ , nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden. Die Ausgangskonfigurationen  $\mathbf{y}_j$  sind in diesem Fall nicht entkoppelbar. Sind  $m$  Ausgangskomponenten von  $\mathbf{y}_j$  entkoppelbar, d. h. existiert ein entkoppelbarer Ausgangsvektor  $\hat{\mathbf{y}}_j$ , dessen Komponenten die Bedingung

$$\hat{\mathbf{y}}_j \subset \mathbf{y}_j, \dim \hat{\mathbf{y}}_j = m, \quad (4-50)$$

erfüllen, so können Überführungstrajektorien  $\hat{\mathbf{y}}_j^*$  vorgegeben werden. Diese bestimmen eindeutig das Differenzialgleichungssystem (4-49) und somit die Überführung. Ist  $\dim \hat{\mathbf{y}}_j = \hat{p}_j < m$ , so müssen noch zusätzliche  $m - \hat{p}_j$  Trajektorien für die Komponenten von  $\mathbf{y}_f$  vorgegeben werden.

Ist das lineare Mehrgrößensystem (4-41) nichtminimalphasig, kann analog zu nichtminimalphasigen Eingrößensystemen die Vorgabe der Trajektorien allein für den flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f$  vorgenommen werden. Die Sollwerte nach der Überführung  $\mathbf{y}_f(t_u + T)$  können dabei aus den Sollwerten für  $\mathbf{y}_j(t_u + T)$  nur dann vollständig gewonnen werden, wenn das System in Bezug auf  $\mathbf{y}_j$  entkoppelbar ist und die Dimension des Ausgangs  $\dim \mathbf{y}_j = m$  beträgt.

**Beispiel 4.3:** Als Beispiel eines linearen Mehrgrößensystems betrachten wir das 3-Tank-System aus [30]:

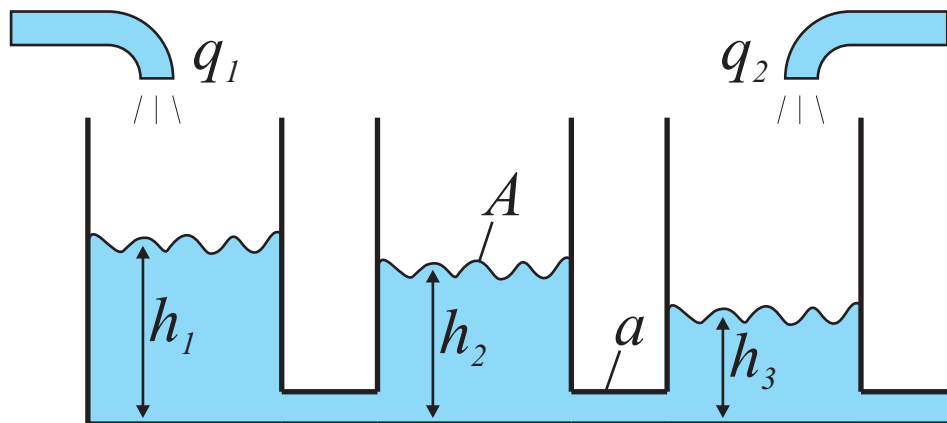


Abb. 4-8: 3-Tank-System

Die Systemgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} A\dot{h}_1 &= q_1 - a(h_1 - h_2), \\ A\dot{h}_2 &= a(h_1 - h_2) - a(h_2 - h_3), \\ A\dot{h}_3 &= a(h_2 - h_3) - ah_3 + q_2, \end{aligned} \quad (4-51)$$



wobei  $h_i$  die Füllstände der Tanks,  $A$  der Behälterquerschnitt der Tanks und  $a$  der Querschnitt der Verbindungsrohre sind.

Es ist gewünscht, zwischen den entworfenen Reglern der Füllstände  $h_1$ ,  $h_3$  und  $h_2$ ,  $h_3$  stoßfrei umzuschalten. In der Zustandsraumdarstellung erhält man dann für das 3-Tank-System mit den zwei Ausgangskonfigurationen die Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & -2\alpha \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} \\ \mathbf{c}_{12} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad (4-52)$$

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{21} \\ \mathbf{c}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

mit  $h_i = x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $q_j = u_j$ ,  $j = 1, 2$ , und den Koeffizienten  $\alpha = \frac{a}{A}$  und  $\beta = \frac{1}{A}$ .

Flacher Ausgang des Systems ist

$$\mathbf{y}_{f1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (4-53)$$

oder aber auch  $\mathbf{y}_{f2} = \mathbf{y}_2 = [x_2 \ x_3]^T$ .

Bei der Ausgangskonfiguration  $\mathbf{y}_2$  können also zwei unabhängige Trajektorien  $x_2^*(t)$  und  $x_3^*(t)$  vorgegeben werden, da sie als Ausgangskomponenten von  $\mathbf{y}_{f2}$  entkoppelbar sind. Die Differenzordnung des Systems  $\delta = \delta_{x_2} + \delta_{x_3} = 2 + 1 = 3$  und die Determinante der Rosenbrockschen Matrix

$$\det(\mathbf{P}(s)) = \begin{bmatrix} -\alpha - s & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \alpha & -2\alpha - s & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -2\alpha - s & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\alpha\beta^2 \quad (4-54)$$

bestätigen, dass das System mit  $\mathbf{y}_2$  als Ausgang entkoppelbar ist, da es nach Gleichung (4-54) keine invariante Nullstelle besitzt und  $n - \delta = 0$  ist.

Die Rosenbrocksche Matrix des Systems mit  $\mathbf{y}_1$  als Ausgang

$$\det(\mathbf{P}(s)) = \begin{bmatrix} -\alpha - s & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \alpha & -2\alpha - s & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -2\alpha - s & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -(2\alpha + s)\beta^2 \quad (4-55)$$

hat eine invariante Nullstelle  $\eta = -2\alpha$ . Da

$$\mathbf{c}_{11}^T \mathbf{B} = [\beta \ 0] \neq \mathbf{0}^T \text{ und } \mathbf{c}_{12}^T \mathbf{B} = [0 \ \beta] \neq \mathbf{0}^T \quad (4-56)$$

gilt, ist die Differenzordnung des Systems  $\delta = \delta_{x_1} + \delta_{x_3} = 2$ . Somit ist das System auch mit Ausgang  $\mathbf{y}_1$  entkoppelbar, weil die Differenz  $n - \delta = 1$  der Anzahl invarianter Nullstellen entspricht.

Für die Umschaltung zur Ausgangskonfiguration  $\mathbf{y}_2$  wird ein Spline mit Polynomen 3. und 4. Ordnung für  $x_2^*(t)$  gewählt:

$$\begin{aligned} P_a(t) &= a_3 t^3 + \dots + a_1 t + a_0, & 0 \leq t < t_b \\ P_b(t) &= b_4 (t - t_b)^4 + \dots + b_1 (t - t_b) + b_0, & t_b \leq t \leq T \end{aligned} \quad (4-57)$$

mit den Randbedingungen der Überführung

$$\begin{aligned} P_a(0) &= x_2(t_u), & \dot{P}_a(0) &= \dot{x}_2(t_u), & \ddot{P}_a(0) &= \ddot{x}_2(t_u), \\ P_a^{(k)}(t_b) &= P_b^{(k)}(t_b), \quad k = 0, 1, 2, & P_b(T) &= x_2(t_u + T) & P_b^{(l)}(T) &= 0, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (4-58)$$

Für die Überführungstrajektorie  $x_3^*(t)$  genügt ein Spline mit Polynomen 2. Ordnung

$$\begin{aligned} P_a(t) &= a_2 t^2 + a_1 t + a_0 & 0 \leq t < t_b \\ P_b(t) &= b_2 (t - t_b)^2 + b_1 (t - t_b) + b_0, & t_b \leq t \leq T \end{aligned} \quad (4-59)$$

parametriert durch die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} P_a(0) &= x_3(t_u), & \dot{P}_a(0) &= \dot{x}_3(t_u), & P_a^{(j)}(t_b) &= P_b^{(j)}(t_b), \quad j = 0, 1, \\ P_b(T) &= x_3(t_u + T) & \dot{P}_b(T) &= 0. \end{aligned} \quad (4-60)$$

Die Vorsteuerungstrajektorien für die Zuflüsse  $u_1^*(t)$ ,  $u_2^*(t)$  sind durch Gleichung

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta} \left( \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_f^2 + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}_f^2 + \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha & -2\alpha \end{bmatrix} \mathbf{y}_f^2 \right) \quad (4-61)$$

bestimmt.

Bei der Umschaltung zur Ausgangskonfiguration  $\mathbf{y}_1$  werden für  $x_1^*(t)$  und  $x_3^*(t)$  Splines (4-59) mit den für den jeweiligen Ausgang passenden Randbedingungen (4-60) gewählt. Die Vorsteuerungstrajektorien werden wieder über Gleichung (4-61) berechnet, wobei die zweite Komponente des flachen Ausgangs  $x_3^*(t)$  direkt vorgegeben wird und die erste  $x_2^*(t)$  die Lösung von

$$\alpha x_1^*(t) + \alpha x_3^*(t) = 2\alpha x_2^*(t) + \dot{x}_2^*(t) \quad (4-62)$$

ist.

#### 4.1.4 Systeme mit Reglern im Zustandsraum

Sind die umzuschaltenden Regler eines Systems im Zustandsraum entworfen, müssen ein paar Besonderheiten beachtet werden. Im Folgenden wird der Übersichtlichkeit halber der Entwurf für das lineare SISO-System (4-1) vorgestellt, gilt aber entsprechend auch für Mehrgrößensysteme.

Für die Anwendung der flachheitsbasierten Umschaltung ist eine Erweiterung des Zustandsreglers um einen Soll-/Istwert-Vergleich der Zustände notwendig, wie in Abbildung 3-2 gezeigt. Da außerdem die Vorsteuerungstrajektorie  $u_{vi}^*(t)$  der Solltrajektorie angepasst ist, entfällt das Vorfilter  $M$ . Die Gleichung für die Eingangsgröße der in Abbildung 4-9 gezeigten Struktur lautet deshalb

$$u(t) = \mathbf{k}_i^T \mathbf{e}_i + u_{vi}^*(t), \quad i = 1, 2, \quad (4-63)$$

mit der Abweichung  $\mathbf{e}_i = (\mathbf{x}_i^*(t) - \mathbf{x}(t))$  des Zustands von der Solltrajektorie.

Üblicherweise besitzt der Zustandsregler schon die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur, die aus einer Zustandsrückführung und einem Vorfilter zusammengesetzt ist:

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + M y_{soll}, \quad (4-64)$$

wobei das Vorfilter  $M$  für die stationäre Genauigkeit zuständig ist. Ein Soll-Istwert-Vergleich ist bei dieser Umsetzung nicht gegeben; die Zustandsrückführung hat nur Einfluss auf die Systemdynamik.

Da bei einem Zustandsregler nicht die Reglergröße, sondern der gesamte Zustandsvektor für die Berechnung der Stellgröße herangezogen wird, müssen anstatt der berechneten Solltrajektorie  $y_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2$ , die dazugehörigen Solltrajektorien für die Systemzustände  $\mathbf{x}_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2$ , vorgegeben werden. Diese werden aus den Gleichungen (3-5a) abgeleitet, nachdem die Solltrajektorie  $y_{fi}^*(t)$  aus den Gleichungen (4-7) bestimmt wurde. Bei linearen Systemen können die Zustände als eine lineare Kombination des flachen Ausgangs und einer endlichen Anzahl seiner Ableitungen ausgedrückt werden:

$$x_j = D_0^j y_f + D_1^j \dot{y}_f + \dots + D_{m_j}^j \overset{(m_j)}{y}_f, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4-65)$$

wobei  $m_j = n - r_j$  die Differenz zwischen der Systemordnung und dem relativen Grad des jeweiligen Zustandes ist.

Sollen bei der Umschaltung aus Abbildung 4-9 um PI-Regler erweiterte Zustandsregler nach Abbildung 4-10 zum Einsatz kommen, so werden neben den Solltrajektorien  $\mathbf{x}_i^*(t)$  auch die Trajektorien  $y_i^*(t)$  gebraucht. Zusätzlich müssten natürlich die Regler 4-10 auch um den Soll-/Istwert-Vergleich der Zustände erweitert werden, so dass die Eingangsgröße des Systems in diesem Fall mit

$$u = \mathbf{k}_i^T \mathbf{e}_i + R_P \dot{\xi}_i(t) + R_I \xi_i(t) + u_{vi}^*(t), \quad i = 1, 2, \quad (4-66)$$

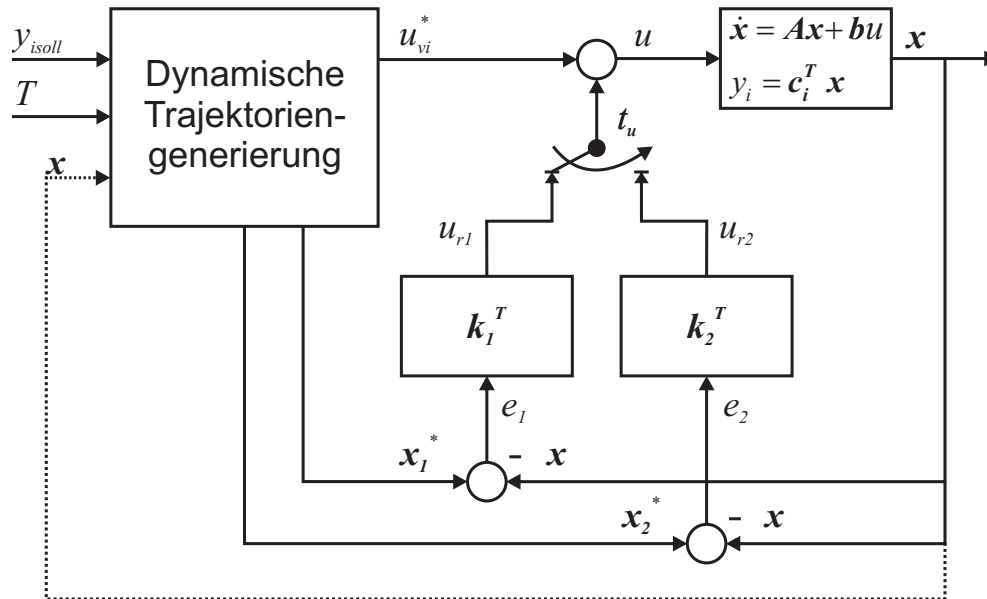


Abb. 4-9: Struktur zur flachheitsbasierten stoßfreien Umschaltung des Systems (4-1) mit Zustandsraum-Reglern

gegeben wäre, wobei  $\xi_i = y_i^*(t) - y_i(t)$  der Soll-/Istwert-Vergleich des jeweiligen Ausgangs  $y_i$  ist.

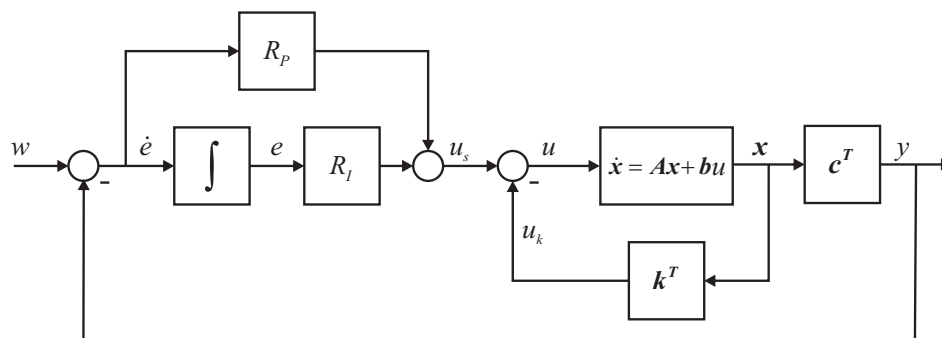


Abb. 4-10: Struktur eines PI-Zustandsreglers [30]

## 4.2 Entwurf flacher Reglerumschaltungen für nichtlineare Systeme

Damit die Reglerumschaltung bzw. Überführung eines Systems zum neuen Arbeitspunkt flachheitsbasiert erfolgen kann, müssen das System flach **und** der flache Ausgang bekannt sein. Die Bestimmung von  $y_f$  ist, wie bereits erwähnt, bei nichtlinearen Systemen wesentlich schwieriger als bei linearen, so dass im Allgemeinen der dazu notwendige Aufwand nicht bekannt ist. Da aber bei vielen Systemen der flache Ausgang heuristisch bzw. aus Erfahrung und dem Systemverständnis bestimmt werden kann, wird im Weiteren angenommen, dass der flache Ausgang eines nichtlinearen Systems bekannt ist.

Außerdem kann es bei nichtlinearen Systemen, anders als bei linearen, auch mehrere, endlich oder abzählbar unendlich viele Ruhelagen mit unterschiedlichem Stabilitätsverhalten geben, so dass die Stabilität keine globale Eigenschaft des Systems, sondern eine (lokale) der jeweiligen Ruhelage ist.

Betrachten wir zunächst das nichtlineare, flache Eingrößensystem der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (4-67a)$$

$$y_i = h_i(\mathbf{x}). \quad (4-67b)$$

Eine Ruhelage  $\mathbf{x}_r$  des Systems (4-67) ist stabil, wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta(\epsilon) > 0$  existiert, so dass  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_r\| < \epsilon$  gilt, falls  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_r\| < \delta$  ist.

Die Ruhelage  $\mathbf{x}_r$  ist (global) asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und außerdem  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_r$  (für alle  $\mathbf{x}_0$ ) gilt.

Existiert in einer Umgebung der Ruhelage  $\mathbf{x}_r$  eine (strenge) Ljapunov-Funktion, so ist die Ruhelage (asymptotisch) stabil.

Eine Funktion  $V(\mathbf{x})$  wird eine (strenge) Ljapunov-Funktion genannt, wenn in einer Umgebung von  $\mathbf{x}_r$

- $V(\mathbf{x})$  positiv definit und
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  negativ semi-definit (negativ definit)

sind. Das Gebiet, das die Ljapunov-Funktion  $V(\mathbf{x})$  im Zustandsraum umschließt, wird Ljapunov-Gebiet genannt.

Seien nun für das System (4-67) zwei Zustandsregler mit PI-Erweiterung nach Gleichung (4-66) für die zwei Ruhelagen  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2$  gegeben, so dass beide Ruhelagen (strenge) Ljapunov-Funktionen  $V_i$  haben, deren Ljapunov-Gebiete  $R_i$ ,  $i = 1, 2$ , einander überlappen. Außerdem soll der flache Ausgang  $y_f$  bekannt sein.

Die Gleichungen (3-4) und (3-5) vereinfachen sich beim System (4-67) ([20], [58]) zu

$$y_f = \phi(\mathbf{x}), \quad (4-68a)$$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}_1(y_f, \dot{y}_f, \dots, y_f^{(n-1)}), \quad (4-68b)$$

$$u = \psi_2(y_f, \dot{y}_f, \dots, y_f^{(n)}), \quad (4-68c)$$

mit  $n$  als Ordnung des Systems. Dabei sind die Ausgangskonfigurationen  $y_i$  nach [47] eine Funktion von  $y_f$  und seinen Ableitungen bis zur Ordnung  $n - \delta_i$ :

$$y_i = \psi_{3i}(y_f, \dot{y}_f, \dots, y_f^{(n-\delta_i)}), \quad (4-69)$$

wobei  $\delta_i$  die Differenzordnung des jeweiligen Ausgangs ist.

Im Unterschied zu linearen kann bei nichtlinearen Systemen die Trajektorie für die Überführung meistens nicht direkt für den Ausgang oder eine Zustandskomponente vorgegeben werden, denn eine analytische Lösung der Gleichungen (4-69) bzw. (4-68b) ist für gewöhnlich nicht möglich. Stattdessen ist es notwendig, unabhängig von der Stabilität der Nulldynamik der Ausgänge  $y_i$  die Überführungstrajektorien nach der Umschaltung für den flachen Ausgang  $y_f$  vorzugeben. Die Solltrajektorien für  $y_i^*(t)$ ,  $\mathbf{x}^*(t)$  und für die Vorsteuerung  $u^*(t)$  werden dann aus den Gleichungen (4-68) abgeleitet. Auch bei nichtlinearen Systemen gilt: Falls die entworfenen Regler keine Vorsteuerung und keinen Soll-Istwert-Vergleich der Zustandsgrößen haben, müssen sie um diese erweitert werden.

Da die Gleichungen (4-68) zumindest lokal invertierbar sind, werden die Randbedingungen für die Trajektorie  $y_f^*(t)$  durch den Istzustand des Systems zum Umschaltzeitpunkt  $\mathbf{x}(t_u)$  und den Sollwert  $y_i(t_u + T)$  nach der Überführung gegeben:

$$[y_f^*(t_u) \dot{y}_f^*(t_u) \dots y_f^{*(n-1)}(t_u)] = \psi_1^{-1}(\mathbf{x}(t_u)), \quad (4-70a)$$

$$y_f^{*(n)}(t_u) = \psi_2^{-1}(u(t_u), y_f^*(t_u), \dots, y_f^{*(n-1)}(t_u)) \quad (4-70b)$$

$$[y_f^*(t_u + T) 0 \dots 0] = \psi_{3i}^{-1}(y_{isoll}), \quad (4-70c)$$

$$y_f^{*(j)}(t_u + T) = 0, \quad j = n - \delta_i, \dots, n, \quad (4-70d)$$

wobei für  $y_f^*(t)$  der Spline (4-6)

$$\begin{aligned} P_a(t) &= a_{o_1} t^{o_1} + \dots + a_1 t + a_0, & 0 \leq t < t_b \\ P_b(t) &= b_{o_2} (t - t_b)^{o_2} + \dots + b_1 (t - t_b) + b_0, & t_b \leq t \leq T \end{aligned} \quad (4-71)$$

genommen werden kann. Damit der Spline (4-71) genügend freie Parameter für die Erfüllung der Randbedingungen hat, gilt für die Ordnung der Polynome  $o_1$  und  $o_2$  die Beziehung:  $o_1 + o_2 = 3n + 1$ ,  $o_i > n$ .

Abbildung 4-11 zeigt für ein System mit  $n = 2$  eine Überführungstrajektorie vom Zustand  $\mathbf{x}(t_u) = \mathbf{x}_0$  zur Ruhelage  $\mathbf{x}_2$  mit der Dauer  $T$ . Die Umschaltung vom Regler  $r_1$  auf den Regler  $r_2$  kann dabei nur in dem Teil des Zustandsraums erfolgen, in dem die Ljapunov-Gebiete  $R_1$  und  $R_2$  einander überlappen. Sind Ljapunov-Gebiete so groß, dass sie auch die jeweils andere Ruhelage umschließen, so kann die Umschaltung zum neuen Regler auch zum Zeitpunkt  $t_u$  mit dem Starten der Überführung erfolgen.

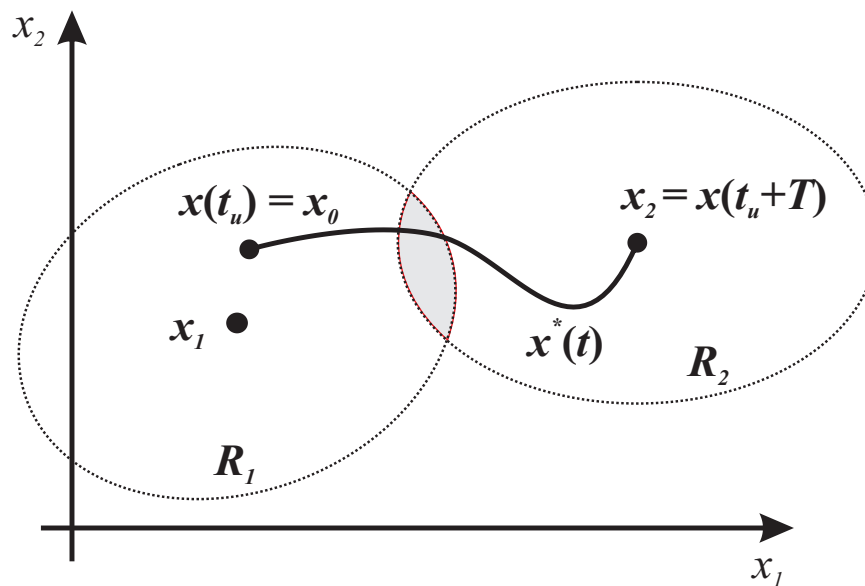


Abb. 4-11: Überführung zwischen zwei Ruhelagen bei einem flachen nichtlinearen Eingrößensystem mit  $n = 2$

Das beschriebene Vorgehen für nichtlineare Systeme kann auch in ähnlicher Form auf flache nichtlineare Mehrgrößensysteme (3-3) mit den Ausgangskonfigurationen

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{h}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{m_i}, \quad i = 1, 2, \quad (4-72)$$

übertragen werden. Sind für das Mehrgrößensystem zwei stabilisierende Regler  $\mathbf{u} = \mathbf{r}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)$ ,  $i = 1, 2$  für die Ruhelagen  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2$ , gegeben, kann die Überführung wieder über den flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f$  vorgegeben werden. Die neue Ruhelage nach der Umschaltung kann je nach Dimension und Entkoppelbarkeit des Ausgangs ganz oder teilweise aus  $\mathbf{y}_{isoll}$  errechnet werden.

Es wurde bisher als gegeben angenommen, dass sich das System auch um die Überführungstrajektorie stabil verhält. Im allgemeinen Fall muss diese Annahme nicht erfüllt sein, so dass die Ist-Trajektorie während der Umschaltung von der geplanten Soll-Trajektorie abweichen kann. Befindet sich das System nach der Umschaltung außerhalb des Ljapunov-Gebiets des aktiven Reglers, kann das System unter Umständen nicht mehr um die entsprechende Ruhelage stabilisiert werden, so dass die Umschaltung zur Instabilität führen kann. Inwieweit die Ist-Trajektorie von der geplanten Trajektorie in diesem Fall abweicht, hängt einerseits von unbekanntem Störgrößen, andererseits von der Genauigkeit des Systemmodells ab. Je genauer das Modell ist, umso genauer wird auch die Ist-Trajektorie, bei nicht vorhandenen Störgrößen, mit der geplanten Trajektorie übereinstimmen. Mit der Solltrajektorie  $\mathbf{x}^*(t)$  für den Systemzustand hat man außerdem die Möglichkeit die Überführung zur neuen Ruhelage zu überwachen. Weicht die Trajektorie des Systemzustandes von der geplanten Trajektorie ab und nähert

sie sich unerwünscht dem Rand des Einzugesbietes des aktiven Reglers, kann die Überführung rechtzeitig abgebrochen und die Systeminstabilität vermieden werden.

### 4.3 Reglerumschaltungen für nichtflache Systeme

Die vorgestellte flachheitsbasierte Umschaltung kann nur bei flachen Systemen angewendet werden. Ist ein lineares System nicht flach, so bedeutet dies, dass es ein nicht steuerbares Teilsystem gibt. Für dieses Teilsystem können keine Regler entworfen werden, und somit kann auch keine Umschaltung zwischen Reglern stattfinden, die diese Zustände als Regelgrößen haben. Das steuerbare Teilsystem ist flach, so dass bei diesem Teil die flachheitsbasierte Umschaltung wiederum angewendet werden kann.

Nichtlineare Systeme, die nicht flach sind, können aber durchaus steuerbar sein und auch mehrere Reglerkonfigurationen haben, zwischen denen zur Laufzeit umgeschaltet werden soll. Die Anwendung der hier vorgestellten Methode ist bei solchen Systemen im allgemeinen Fall nicht möglich. Die flachheitsbasierte Reglerumschaltung kann jedoch in Einzelfällen angewendet werden, wenn das nichtflache System linearisiert werden kann und die Umschaltung in dem Teil des Zustandsraums stattfindet, für den die Linearisierung hinreichend genau ist. Voraussetzung ist, dass das linearisierte System steuerbar ist.

Ein System, bei dem der Nutzen und die Anwendung dieses Vorgehens anschaulich demonstriert werden, ist das inverse Pendel. In Abschnitt 5.4 wird gezeigt, wie die flachheitsbasierte Umschaltung genutzt werden kann, um zwischen dem Regler, der zum Aufschaukeln des Pendels benutzt wird, und dem Regler, der für die Einhaltung der oberen Ruhelage zuständig ist, umzuschalten. Außerdem ist es durch die entstandene Struktur möglich, den Positionswechsel des Wagens in beiden Ruhelagen des Pendels ohne weiteren Mehraufwand durchzuführen.

### 4.4 Systeme mit Stellgrößenbegrenzung

Ein Sonderfall von nichtflachen, nichtlinearen Systemen sind Systeme, die zwar in ihrer Struktur flach sind, aber eine Stellgrößenbegrenzung des Eingangs besitzen:

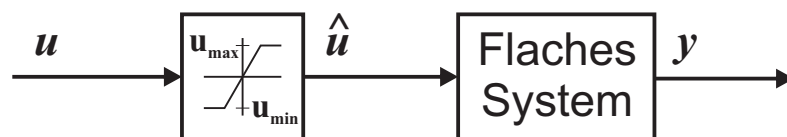


Abb. 4-12: Flaches System mit Stellgrößenbegrenzung



Wenn das flache System aus Abbildung 4-12 linear und zeitinvariant ist, so ist das Gesamtsystem vom Hammerstein-Typ, also eine Reihenschaltung von einer statischen Nichtlinearität und einem linearen zeitinvarianten System. Da praktisch alle realen Systeme eine Begrenzung der Eingangsgröße besitzen, wird im Folgenden erörtert, wie sich diese Nichtlinearität auf die flachheitsbasierte Umschaltung auswirkt und auf welche Kompromisse eingegangen werden muss.

#### 4.4.1 Flachheitsbasierte Umschaltung bei Stellgrößenbegrenzung

Ein Hammerstein-Eingrößensystem der Form 4-12 ist durch die linearen Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\hat{u}(t) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4-73a)$$

$$y_i(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad i = 1, 2, \quad (4-73b)$$

und den nichtlinearen Teil

$$\hat{u} = \begin{cases} u, & u_{min} < u < u_{max} \\ u_{max}, & u \geq u_{max} \\ u_{min}, & u \leq u_{min} \end{cases} \quad (4-73c)$$

beschrieben, mit der Annahme, dass die Eingangsbegrenzung symmetrisch ist:  $u_{max} = -u_{min} = u_{beg}$ . Im Unterschied zu anderen nichtflachen Systemen kann bei Systemen (4-73) mit Stellgrößenbegrenzung ein Ausgang  $\hat{y}$  gefunden werden, der die Dynamik des Systems beschreibt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\psi}(\hat{y}, \dot{\hat{y}}, \dots, \overset{(n-1)}{\hat{y}}), \quad (4-74a)$$

$$\hat{u} = \psi(\hat{y}, \dot{\hat{y}}, \dots, \overset{(n)}{\hat{y}}). \quad (4-74b)$$

Die Beziehungen (4-74) gelten aber nur, solange die resultierende Eingangsgröße im Begrenzungsintervall bleibt:  $\hat{u} \leq |u_{beg}|$ . Liegt nämlich die durch Gleichung (4-74b) bestimmte Eingangsgröße  $\hat{u}$  außerhalb des Begrenzungsintervalls, so wird sie nicht mehr mit der real erzeugbaren Größe übereinstimmen, da  $u$  ober- und unterhalb von  $\pm u_{beg}$  abgeschnitten wird. Diesem Umstand tragen auch die Autoren in [39] Rechnung und schlagen einen inversionsbasierten Vorsteuerungsentwurf für nichtflache Systeme vor. Der inversionsbasierte Entwurf basiert auf dem numerischen Lösen einer Randwertaufgabe mit Eingangsbeschränkungen, die sicherstellt, dass die Vorsteuerung in der vorgegebenen Begrenzung bleibt und somit auch die Solltrajektorie eingehalten werden kann. Das numerische Vorgehen eignet sich für den Vorsteuerungsentwurf, wenn es nur wenige Ruhelagen des Systems gibt, zwischen denen die Überführung stattfinden soll. Bei steigender Anzahl der Ruhelagen steigt der erforderliche Aufwand für den Vorsteuerungsentwurf schnell an. Unter der Annahme, dass aus jeder Ruhelage eine Überführung in eine an-

dere möglich sein soll, sind bei  $n$  Ruhelagen  $n(n - 1)$  Vorsteuerungen numerisch zu berechnen. Für eine stoßfreie Umschaltung, bei der aus jedem Istzustand eine Überführung in jede Ruhelage möglich sein soll, ist diese Methode deshalb nicht geeignet.

Es seien für die zwei Ausgangskonfigurationen  $y_i$  des Systems (4-73) zwei stabilisierende Regler  $G_{Ri}(s)$ ,  $i = 1, 2$ , gegeben, zwischen denen umgeschaltet werden soll. Die Stellgrößenbegrenzung (4-73c) wurde beim Entwurf der Regler explizit berücksichtigt, so dass das System mit Regler auch in der Stellgrößenbegrenzung stabil ist. Eine Möglichkeit, die stoßfreie Umschaltung zu realisieren, besteht darin, die Stellgrößenbegrenzung nicht zu berücksichtigen und die in Unterabschnitt 4.1.1 vorgestellte Methode unverändert an das durch die Gleichungen (4-73a) und (4-73b) beschriebene System anzuwenden. Bleibt dann die über  $\hat{y}$  berechnete Vorsteuerung  $\hat{u}^*(t)$  während der Überführung im gegebenen Begrenzungsintervall, so ist  $u^*(t) = \hat{u}^*(t)$ , und das System verhält sich, als ob es flach wäre. Die vorgegebene Solltrajektorie  $y_i^*(t)$  wird bei ausbleibender Störung befolgt und die gewünschte Führungsgröße in der vorgegebenen Zeit erreicht. Liegt ein Teil von  $\hat{u}^*(t)$  allerdings außerhalb der Stellgrößenbegrenzung, so kann die Solltrajektorie  $y_i^*(t)$  nicht eingehalten werden, und das System wird die Führungsgröße nicht in der vorgegebenen Zeit erreichen. Je größer dabei der Anteil der Fläche der Vorsteuerung außerhalb der Begrenzung in Relation zur Gesamtfläche unterhalb der Vorsteuerungstrajektorie

$$\sqrt{\int_0^T \hat{u}^{*2}(t) dt} \quad (4-75)$$

ist (Abbildung 4-13), desto größer wird die Abweichung des Verlaufs  $y_i(t)$  von der Solltrajektorie  $y_i^*(t)$  sein. Im Grenzfall  $T \rightarrow 0$  würde die Vorsteuerung sofort den Wert erreichen, der zum Halten der neuen Ruhelage nötig ist; der Rest von  $u^*(t)$  wäre wegen der Begrenzung vernachlässigbar. Die Umschaltung bliebe jedoch stoßfrei und stabil, da das System samt Regler stabil ist und die Vorsteuerung die Stabilität nicht beeinflusst.

Bisher wurden an die Dauer der Überführung keine einschränkenden Bedingungen gestellt. Sie konnte im Prinzip beliebig klein gewählt werden; die Überführungstrajektorien und die resultierenden Vorsteuerungen werden immer passend berechnet. Die Vorsteuerungen konnten dabei sehr große Bereiche durchlaufen, da es keine Einschränkungen gab. Bei realen Systemen können aber keine beliebig großen Kräfte bzw. Eingangsgrößen erzeugt werden, weshalb immer eine Nichtlinearität wie (4-73c) vorhanden sein wird. Abhängig von der Ausgangskonfiguration, die bei der Umschaltung zur Berechnung der Überführungstrajektorien aktuell ist, wird es Grenzen dafür geben, wie schnell die neue Führungsgröße erreicht werden kann. Deshalb ist es nicht sinnvoll, kleine Überführungszeiten  $T$  vorzugeben, die wegen der Stellgrößenbegrenzung nicht eingehalten werden

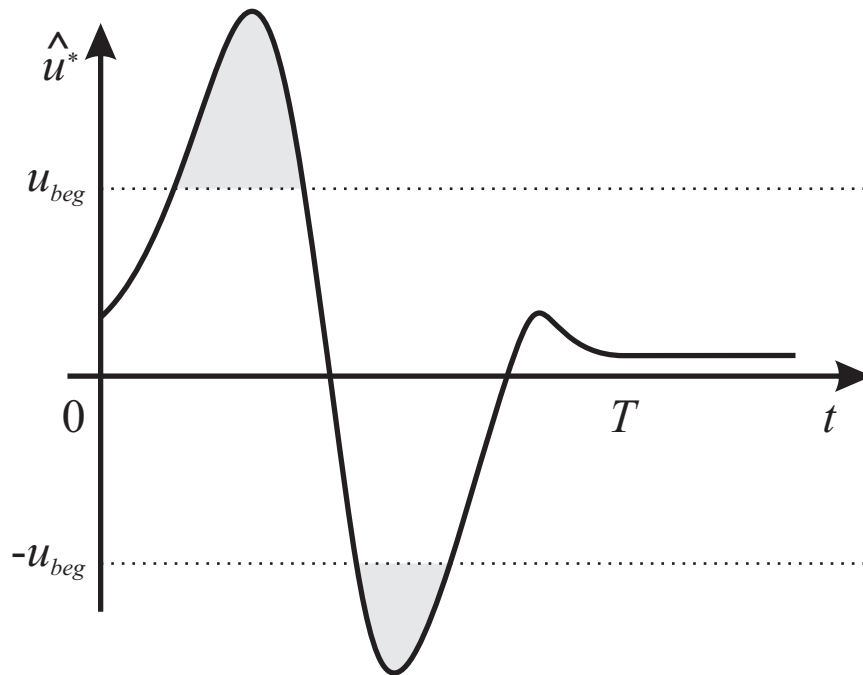


Abb. 4-13: Trajektorie der Vorsteuerung für eine Überführung nach der Reglerumschaltung. Die grauen Flächen liegen außerhalb der Begrenzung

können. Insgesamt aber stellt die Stellgrößenbegrenzung bei linearen Systemen für die Stoßfreiheit der Umschaltung kein Hindernis dar. Es muss jedoch beachtet werden, dass beim Überschreiten der Stellgrößenbegrenzung seitens der Vorsteuerungstrajektorie  $\hat{u}^*(t)$  die vorgegebenen Überführungszeiten nicht einzuhalten sind. Mit erhöhtem Online-Rechenaufwand ist es auch möglich, zu überprüfen, ob  $|\hat{u}^*(t)| \leq u_{max}$  für  $t \in [t_u, t_u + T]$  gilt. In einigen Fällen können sogar aus Gleichung (4-8) analytisch die Extrema  $\hat{u}_{max}^*$ ,  $\hat{u}_{min}^*$  für  $t \in [t_u, t_u + T]$  bestimmt werden, die eine Funktion von Ist-, Sollzustand und Überführungszeit sind.

Für lineare Mehrgrößensysteme mit Stellgrößenbegrenzung gelten die gleichen Einschränkungen wie für Eingrößensysteme, wobei je nach Ausgangskonfiguration eine Entkoppelbarkeit der Ausgänge beim Erreichen der Begrenzung unter Umständen nicht mehr gegeben ist.

**Beispiel 4.4:** Es wird nochmals der Gleichstrommotor aus Beispiel 3.1 betrachtet. Der simulierte Motor ist laut Datenblatt für eine Nennspannung von 48 [V] ausgelegt. Um Schäden durch zu hohe Spannungen zu vermeiden, wird seine Eingangsgröße auf  $\pm 48$  begrenzt. Die Regler für die Drehzahl und den Strom wurden um zusätzliche CAW-Schleifen erweitert, womit sie den Motor im gesamten Zustandsraum stabil halten. Um die Auswirkung der Begrenzung auf das Gesamtsystem zu verdeutlichen, wurde die Umschaltung aus Tabelle 4-3 für die Überführungsdauer  $T_1 = 0,05$  und  $T_2 = 0,01$  durchgeführt.

Abbildung 4-14 zeigt die Reglerumschaltungen aus Tabelle 4-3 des Gleichstrommotors mit Stellgrößenbegrenzung für  $T_i = 0,05$ . Da die resultierenden Vorsteue-

Tabelle 4-3: Hochfahren des Motors und Reglerumschaltung bei vorhandener Stellgrößenbegrenzung

ZEIT [s]	REGLER	SOLLWERT
0 – 0,1	Hochfahren - Stromregler	0,1 [A]
0,1 – 0,2	Stromregler	0,1 [A]
0,2 – (0,2 + $T_i$ )	Überführung - Drehzahlregler	450 [rad/s]
(0,2 + $T_i$ ) – 0,35	Drehzahlregler	450 [rad/s]

rungen innerhalb der Begrenzung bleiben, verhält sich das System wie ein flaches, und die Überföhrungsvorgänge entsprechen denen aus Beispiel 4.1. Die Ist-Drehzahl folgt dabei der Solltrajektorie  $\omega^*(t)$  ohne Abweichung.

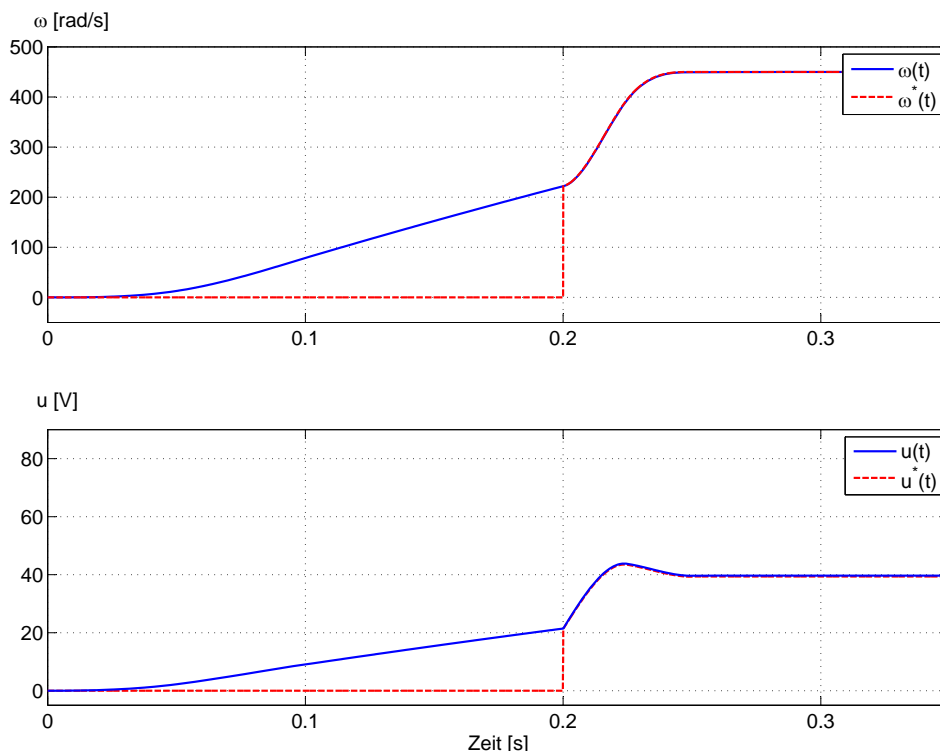


Abb. 4-14: Umschaltung des Gleichstrommotors mit Stellgrößenbegrenzung mit der Überföhrungsdauer  $T_i = 0,05$  [s]

Das Verhalten des Gleichstrommotors, wenn die Überföhrungszeit auf  $T_i = 0,01$  verringert wird, ist in Abbildung 4-15 abgebildet. Die Vorsteuerung  $u^*(t)$  hat nun Werte, die weit auöherhalb des Begrenzungintervalls liegen. Die Ist-Drehzahl  $\omega(t)$  kann der Solltrajektorie  $\omega^*(t)$  nicht folgen und braucht mehr Zeit, um zur vorgegebenen FührungsgröÖe zu gelangen. Dennoch bleibt die Systemantwort stabil und stoÖfrei.

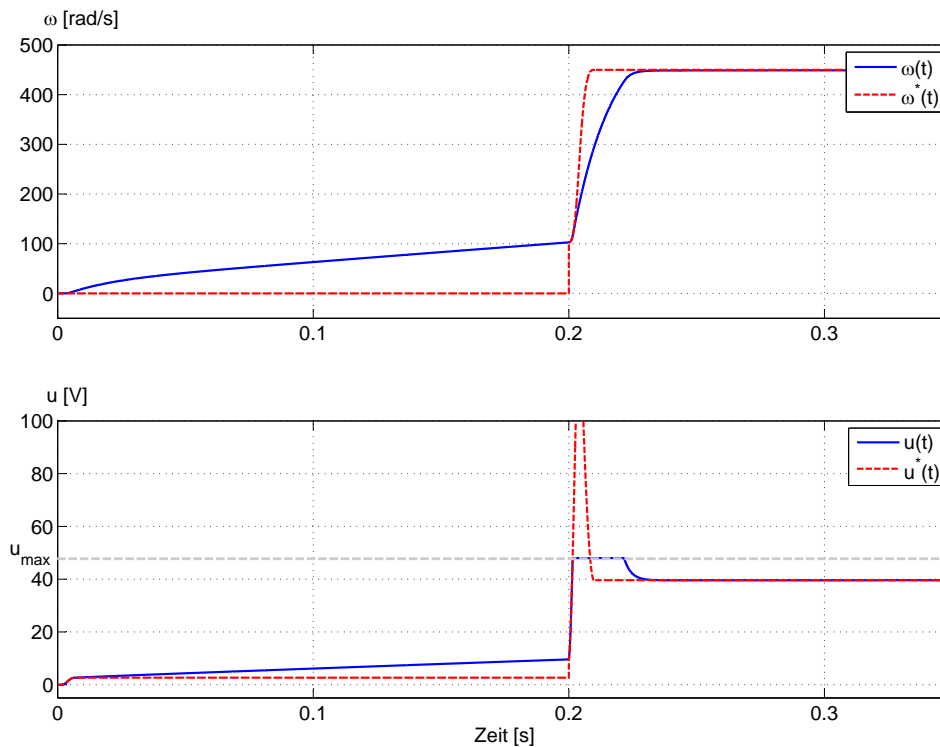


Abb. 4-15: Umschaltung des Gleichstrommotors mit Stellgrößenbegrenzung mit der Überföhrungsdauer  $T_i = 0,01$  [s]

Bei einer Vorgabe der Drehzahltrajektorie ist die Dauer der Überföhrung umgekehrt proportional zur Auslenkung der Stellgröße  $u(t)$ . Bei Umschaltung zur Stromregelung und Berechnung der damit verbundenen Überföhrungstrajektorie hat eine kürzere Dauer der Überföhrung keine größere Auslenkung der Stellgröße zur Folge. Dieses Verhalten des Systems ist aus praktischer Erfahrung zu erwarten gewesen, da das Drehmoment des Gleichstrommotors auch von der Ableitung der Eingangsspannung abhängt. Die Beschreibung des Systems im Zustandsraum bestätigt diesen Sachverhalt durch die Differenzordnung der Ausgänge, denn die Differenzordnung der Drehzahl  $\delta_\omega = 2$  ist größer als die des Stroms  $\delta_i = 1$ , d. h. die Eingangsgröße hat direkten Einfluss auf eine niedrigere Ableitung von  $i$  als bei  $\omega$ .

Die Auswirkungen einer Stellgrößenbegrenzung sind bei linearen Systemen je nach System und Einsatzgebiet für eine stoßfreie Umschaltung mehr oder weniger von Bedeutung. Vor allem bei Überföhrungen, die zeitkritisch sind oder bei denen die Solltrajektorie  $y_i^*(t)$  befolgt werden muss, führt die Stellgrößenbegrenzung zu einem wesentlichen Mehraufwand beim Entwurf. Die einzige Möglichkeit, diese Anforderungen zu erfüllen, wäre, die Systemkomponenten bzw. die Steller so zu dimensionieren, dass alle Überföhrungen im verlangten Zeitrahmen liegen und die Stellgrößenbegrenzung nicht verletzt wird.

Diese sehr restriktiven Einschränkungen sind aber nicht die Regel, so dass eine gewisse Dynamik vom System verlangt wird, diese aber nicht sicherheitsrelevant

ist und in Einzelfällen nicht eingehalten werden muss. In diesem Rahmen ist die Zielsetzung, unter den gegebenen Stellgrößenbegrenzungen die schnellste erreichbare Dynamik des Systems zu erhalten. Analog dazu ist auch der Wunsch, bei der Umschaltung die kürzesten Überführungszeiten unter den gegebenen Stellgrößenbeschränkungen zu ermöglichen. Dieser Aufgabe ist die beschriebene Methodik aus diesem Abschnitt nicht gewachsen. Sie stellt zwar die Stoßfreiheit der Umschaltung sicher; die Vorsteuerung ist aber nach Erreichen der Begrenzung nicht mehr passend, so dass die Dynamik des Systems während der restlichen Überführung im Wesentlichen von dem aktiven Regler abhängig ist. Durch eine Anpassung der Umschaltlogik kann die vorgestellte Methode jedoch auch aktiv für schnelle Überführungen bei Eingrößensystemen mit Stellgrößenbegrenzung (4-73) genutzt werden. Da die daraus resultierende Regelstruktur während der Überführung in der Begrenzung die Form einer weichen strukturvariablen Regelung annimmt, werden diese Reglerstrukturen in den folgenden Unterabschnitten vorgestellt.

#### 4.4.2 Weiche strukturvariable Regelungen

Strukturvariable Regler sind Regler, bei denen in Abhängigkeit vom Systemzustand zwischen verschiedenen Regelgesetzen umgeschaltet wird, um die Stabilität eines Systems mit Stellgrößenbeschränkungen sicherzustellen und den Stellbereich möglichst gut auszunutzen. Anders als bei der hier vorgestellten stoßfreien Umschaltung und entgegen ihrer Bezeichnung sind die strukturvariablen Regelungen, streng genommen, parametervariable Regelungen, denn beim Schalten wird nicht die Struktur des Reglers verändert, sondern seine Parameter, wie in Abbildung 4-16 gezeigt wird. Sie bestehen aus einer endlichen Anzahl von Regelgesetzen bzw. Zustandsrückführungen mit einer endlichen Anzahl unterschiedlicher Parametrierungen, die jeweils ein bestimmtes Ljapunov-Gebiet umreißen. Die Gebiete sind so gewählt, dass sie ineinander geschachtelt sind und jeder Regler in seinem Gebiet keine sättigende Stellgröße produziert. Die Stellgröße selbst ist bei der Parameteränderung nicht stetig. Eine einheitliche Theorie wurde von Kiendl bzw. Kiendl und Schneider in [63] und [64] vorgestellt.

Eine wesentliche Verbesserung der strukturvariablen Regler ist die weiche strukturvariable Regelung (**WSVR**) aus Abbildung 4-17, die eine bessere Regelgüte erreicht und stetige Stellgrößen ermöglicht. Diese wurde von Franke erstmals in [31], [32], [33] erwähnt. Bei der WSVR werden die Regler kontinuierlich parametrierung, im Gegensatz zu deren vorheriger endlicher Anzahl. In [2] ist die Funktionsweise der SVR- und WSVR-Methoden (dynamische WSVR, WSVR mittels impliziter Ljapunov-Funktion) ausführlich und leicht nachvollziehbar erörtert. Die WSVR-Methoden unterscheiden sich voneinander nicht in ihrer Struktur, sondern nur in der Art der Parametrierung des Zustandsreglers  $F(\mathbf{x}, p)$  und der zugehörigen Parametrierfunktion  $S(\mathbf{x}, p)$ .

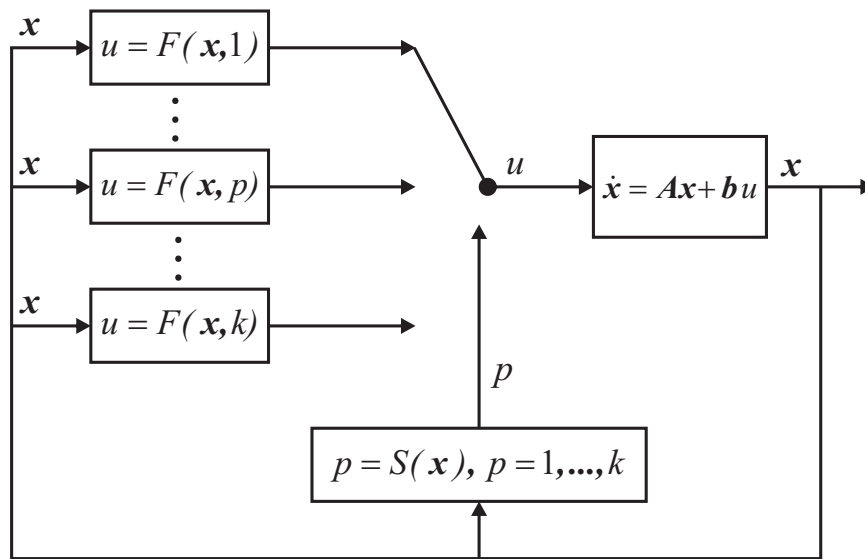


Abb. 4-16: Strukturvariable Regelung mit  $k$  Reglern und dem Auswahlgesetz  $S(\mathbf{x})$  [2]

Bei der WSVR mittels impliziter Ljapunov-Funktion ist der Regler  $u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x}$  für das System (4-73) so gewählt, dass die Pole  $\lambda_i$  des geschlossenen Regelkreises mit  $p \rightarrow 0$  gemäß

$$\lambda_i(p) = \frac{1}{p} \lambda_i(p=1) \quad (4-76)$$

immer weiter strahlenförmig nach links verschoben werden. Unter der Annahme, dass das System in der Regelungsnormalform<sup>2</sup> gegeben ist, d. h.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4-77)$$

ist dann die Rückführung gegeben als  $u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x}$ , wobei die gewünschte Polverschiebung durch das Rückführgesetz

$$\mathbf{k}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 p^{-n} - a_0 \\ \hat{a}_1 p^{-(n-1)} - a_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} p^{-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4-78)$$

<sup>2</sup> Jedes steuerbare System kann durch eine Zustandstransformation in die Regelungsnormalform gebracht werden.

mit der diagonalen Matrix

$$\mathbf{D}(p) = \text{diag}(p^n, p^{n-1}, \dots, p), \quad p \neq 0, \quad (4-79)$$

erreicht wird, mit  $\dim(\mathbf{x}) = n$ .

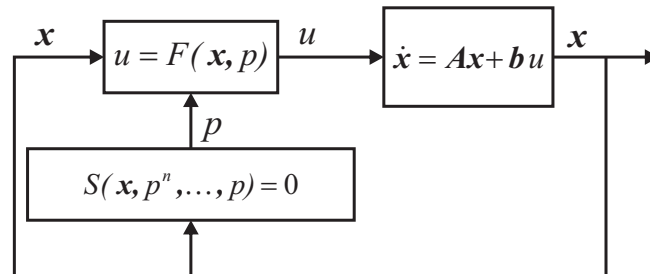


Abb. 4-17: Weiche strukturvariable Regelung mit dem kontinuierlich parametrisierten Regelgesetz  $F(\mathbf{x}, p)$  und der impliziten Parametrierfunktion  $S(\mathbf{x}, p^n, \dots, p) = 0$  [2]

Der Vektor

$$\mathbf{a}^T = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}]^T \quad (4-80)$$

erhält die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des unregulierten Systems und

$$\hat{\mathbf{a}}^T = [\hat{a}_0 \ \hat{a}_1 \ \dots \ \hat{a}_{n-1}]^T \quad (4-81)$$

die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des geregelten Systems von  $\mathbf{k}(1)$ . Die Systemmatrix des geregelten Systems ist

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p) = \mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T, \quad (4-82)$$

die wegen der Gleichungen (4-77) auch als

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \frac{1}{p}\mathbf{D}(p)\hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{D}^{-1}(p), \quad \hat{\mathbf{A}}_1 = \hat{\mathbf{A}}(1), \quad (4-83)$$

geschrieben werden kann. Es kann gezeigt werden, dass der Vektor  $\hat{\mathbf{a}}$  tatsächlich das charakteristische Polynom von  $\hat{\mathbf{A}}_1$  ist, wodurch die Eigenwerte von  $\hat{\mathbf{A}}(p)$  gemäß (4-76) nach links verschoben werden. Da die Eigenwerte mit der passenden Auswahl von  $\hat{\mathbf{a}}$  beliebig platziert werden können, gilt ohne Einschränkung der Allgemeinheit:  $p \in (0, 1]$ .

Nach der Platzierung der Pole werden die geeigneten Ljapunov-Gebiete  $G(p) = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}, p) < 0\}$  bestimmt. Da am meisten verbreitet, wurden von den Autoren



für die Ljapunov-Gebiete Ellipsen<sup>3</sup>  $G(p) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1 < 0\}$  gewählt, die zusätzlich mit der Funktion  $e(p) > 0$  multipliziert sind:

$$G(p) = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}, p) = e(p) \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1 < 0\} \quad (4-84)$$

mit

$$\mathbf{R}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(p). \quad (4-85)$$

Die Funktion  $e(p)$  ist ein Polynom in  $p$  der Ordnung  $2n$  und so gewählt, dass die Ellipsen  $G(p)$  die von der Stellgrößenbegrenzung gezogenen Geraden  $|\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x}| \leq u_{max}$  als Tangenten haben:

$$e(p) = \frac{\mathbf{k}^T(p) \mathbf{R}^{-1}(p) \mathbf{k}(p)}{u_{max}^2}. \quad (4-86)$$

Der Selektionsparameter  $p$  wird während der Regelung durch die implizite Gleichung

$$g(\mathbf{x}, p) = e(p) \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1 = 0 \quad (4-87)$$

bestimmt. Diese ist eine implizite Ljapunov-Funktion des Systems in  $p$  der Ordnung  $2n$  mit von  $\mathbf{x}$  abhängigen Koeffizienten und besitzt eine eindeutige Lösung, wenn die Ungleichungen

$$\mathbf{R}_1 \succ 0, \quad (4-88a)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 \prec 0, \quad (4-88b)$$

$$\dot{e}(p) \mathbf{R}_1 + \frac{e(p)}{p} (\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N}) \prec 0 \quad (4-88c)$$

im gesamten Intervall  $p \in (0, 1]$  erfüllt sind. Dabei ist

$$\mathbf{N} = \text{diag}(-n, \dots, -1) [2], [69]. \quad (4-89)$$

Damit die Stabilität des Regelgesetzes für alle  $\mathbf{x}_0$  gilt, müssen sich alle möglichen Anfangswerte  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$  innerhalb des größten Ljapunov-Gebiets befinden:

$$G(1) = \{\mathbf{x}_0 \mid g(\mathbf{x}, 1) = e(1) \mathbf{x}_0^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_0 - 1 < 0\}, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0. \quad (4-90)$$

Mit den Gleichungen (4-86) (4-90) ist sichergestellt, dass die mit  $p$  parametrisierte Rückführung (4-78) für jedes  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$  eine nichtsättigende Stellgröße produziert.

Im Allgemeinen ist die Selektionsfunktion (4-87) ein Polynom hohen Grades, weshalb dessen Lösung numerisch während der Regelzeit erfolgen muss. Die Existenz

---

<sup>3</sup> In [1] wurde gezeigt, dass auch andere Formen, z. B. polyedrische, für die Ljapunov-Gebiete der WSVR in Frage kommen.

und die Eindeutigkeit der Lösung im Intervall  $p \in (0, 1]$  sind jedoch durch (4-88) sichergestellt, so dass diese schon durch ein einfaches numerisches Verfahren wie z. B. die Bisektion mit ausreichender Geschwindigkeit bestimmt werden kann.

Da  $p(\mathbf{x})$  eine Ljapunov-Funktion auf dem Gebiet  $G(1)$  ist, wird  $p$  mit der Zeit streng monoton fallen. Das  $p \rightarrow 0$  verschiebt die Pole des Systems nach links, wodurch mit der Zeit die Regelung immer schneller wird, was in einer zufriedenstellenden Regelgüte resultiert. Mit sehr kleinen Werten für  $p$  kommen aber numerische Probleme auf, so dass für die praktische Nutzung ein Minimalwert  $p_{min} > 0$  benötigt wird. Ist dieser Wert während der Regelzeit erreicht, bricht das Verfahren ab; es kommt zu keiner weiteren Polverschiebung, und das System wird mit dem Regler  $\mathbf{k}(p_{min})$  betrieben.

Es bleibt noch zu klären, wie geeignete Parameter für  $\hat{\mathbf{a}}$  und  $\mathbf{R}_1$  zu bestimmen sind. Diese müssen die Ungleichungen (4-88) erfüllen und sicherstellen, dass alle möglichen Anfangswerte im Einzugsgebiet liegen (4-90). Eine Möglichkeit besteht darin, durch die Anwendung eines beliebigen Optimierungsverfahrens, z. B. eines evolutionären Algorithmus, mit den Bedingungen (4-88) und (4-90)  $\hat{\mathbf{a}}$  und  $\mathbf{R}_1$  festzulegen. Die Optimierungsverfahren liefern zwar sehr gute Ergebnisse, sind aber zeitaufwändig. Wesentlich schneller lässt sich das Optimierungsproblem lösen, wenn die Nebenbedingungen (4-88) in die Form linearer Matrixungleichungen (LMI) transformiert werden [104]. Da die Umformung in LMIs konservativ ist, werden die resultierenden Regelungen im allgemeinen Fall langsamer sein als diejenigen, die mit Hilfe des langsameren Optimierungsverfahrens bestimmt wurden.

Die vorgestellte Methode zum Entwurf von weichen strukturvariablen Reglern mittels Ljapunov-Funktion erreicht die Stellgrößenbegrenzung höchstens punktwise und nutzt sie nicht voll aus, was einer noch besseren Regelgüte im Wege steht. Eine Vermeidung der Sättigung hat jedoch den Vorteil, dass die Stellgrößenbegrenzung nicht explizit bei den Stabilitätsbedingungen beachtet werden muss. Eine Verbesserung des Entwurfs mittels Ljapunov-Funktion erfolgte in [69], so dass die WSVR nun auch in die Sättigung gehen kann. Im Fall sättigender Stellgrößen muss die Sättigung in den Stabilitätsbedingungen berücksichtigt werden, was mit dem folgenden Satz, dessen Beweis angelehnt an [42] und [55] in [69] zu finden ist, erfolgte:

**Bemerkung 10:** Gegeben sind das System (4-73) mit dem Regelgesetz

$$u = -\text{sat}(f(\mathbf{x})), \quad (4-91)$$

eine positiv definite Funktion  $v(\mathbf{x})$  und eine Menge  $G(v, \mathbf{x})$ , so dass gilt:

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}f(\mathbf{x})) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in G(v, \mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (4-92)$$

Die Menge  $G(v, \mathbf{x})$  ist genau dann ein Ljapunov-Gebiet für das obige System, wenn eine Funktion  $h(\mathbf{x})$  existiert, so dass  $G(v, \mathbf{x})$  ein Ljapunov-Gebiet unter der nichtsättigenden Rückführung  $u = -h(\mathbf{x})$  ist, d. h.

$$|h(\mathbf{x})| \leq u_{max}, \quad \forall \mathbf{x} \in G(v, \mathbf{x}), \quad (4-93a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}h(\mathbf{x})) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in G(v, \mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (4-93b)$$

Ein „sättigender Regler“ (4-91) stabilisiert also das System (4-73), wenn  $v(\mathbf{x})$  eine Ljapunov-Funktion sowohl für einen „nichtsättigenden Regler“ (4-93a) als auch für das Regelgesetz (4-91) ohne Stellgrößenbeschränkung ist.

Mit dem Entwurf der WSVR mittels Ljapunov-Funktion hat eine nichtsättigende Rückführung mit der impliziten Ljapunov-Funktion (4-87) zur Folge. Aus Bemerkung 10 folgt, dass für das System (4-73) eine stabile sättigende WSVR mittels Ljapunov-Funktion gegeben ist, wenn für die sättigende Rückführung

$$u = -sat(\tilde{\mathbf{k}}^T(p)\mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{k}}^T(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}, \quad (4-94)$$

mit der Selektionsfunktion (4-87) die Bedingungen

$$\mathbf{R}_1 \succ 0, \quad (4-95a)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 \prec 0, \quad (4-95b)$$

$$\dot{e}(p)\mathbf{R}_1 + \frac{e(p)}{p}(\mathbf{N}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{N}) \prec 0, \quad (4-95c)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \tilde{\mathbf{A}}_1 \prec 0 \quad (4-95d)$$

erfüllt sind, wobei

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{b}(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T, \quad (4-96a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T \quad (4-96b)$$

sind. Der Entwurf sättigender impliziter WSVR beinhaltet also den Entwurf einer nichtsättigenden WSVR mit den Anfangspolen (4-96a), für deren einmal bestimmte Selektionsfunktion (4-87) eine noch schnellere Polverschiebung (4-96b) mit derselben Ljapunov-Funktion  $G(v, \mathbf{x})$  gesucht wird. Auch hier muss gewährleistet sein, dass alle Anfangswerte  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$  sich innerhalb des größten Ljapunov-Gebiets  $G(1, \mathbf{x})$  befinden bzw. die Gleichung (4-90) erfüllt ist.

Die Parametrierung von  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}$  und  $\mathbf{R}_1$  lässt sich, ähnlich dem Fall der Nichtsättigung, entweder langsamer unter Anwendung eines Suchverfahrens (Evolution-Algorithmus) mit den Nebenbedingungen (4-95) oder schneller in transformierter LMI-Form lösen [69]. Während die schnellere Lösung eine nochmalige deutliche

Steigerung der Regelgüte im Vergleich zur nichtsättigenden WSVR erzielt, können durch den Evolutions-Algorithmus fast zeitoptimale Ergebnisse erreicht werden.

Außer der WSVR mittels impliziter Ljapunov-Funktionen gibt es auch andere Methoden, die eine Selektionsfunktion bestimmen können. So ist in [16] der  $\alpha$ -Regler vorgestellt, eine Variation der sättigenden WSVR mit einer zum Regler aus Abbildung 4-17 äquivalenten Struktur. Er gewährleistet eine stabile Regelung und eine gute Ausnutzung der Stellgrößenbegrenzung mit dem namensgebenden impliziten Reglerselektionsparameter  $\alpha$ . Zur Bestimmung von  $\alpha$  muss während der Laufzeit allerdings mehrmals pro Zeitschritt eine Riccati-Gleichung gelöst werden. Dieser relativ hohe Online-Rechenaufwand kann jedoch durch eine Offline-Berechnung von Stützstellen reduziert werden, so dass der  $\alpha$ -Regler keine wesentlichen Nachteile im Vergleich zum Ljapunov-Verfahren hat.

#### 4.4.3 Flachheitsbasierte Umschaltung mit sättigender WSVR

Bei flachen linearen Eingrößensystemen mit Stellgrößenbegrenzung (4-73) kann man die WSVR integrieren, um schnelle Überführungen zu realisieren, ohne die Struktur der flachheitsbasierten stoßfreien Umschaltung aus Abbildung 4-1 im Wesentlichen verändern zu müssen. Durch die bessere Ausnutzung des Regelbereichs werden die Ruhelagen wesentlich schneller erreicht, als ohne die Stellgrößenberücksichtigung möglich wäre.

Betrachten wir nochmals das System (4-73) mit der passend entworfenen flachheitsbasierten Umschaltung nach Unterabschnitt 4.4.1. Die Soll- und die Vorsteuerungstrajektorien  $y_i^*(t)$ ,  $u_v^*(t)$ ,  $t \in [t_u, t_u + T]$ , für die Überführung sind über eine Vorgabe der Trajektorie des flachen Ausgangs  $y_f^*(t)$  berechnet. Diese Annahme stellt keine Einschränkung dar, da die Berechnung immer über  $y_f$  erfolgen kann. Des Weiteren ist für  $y_f^*(t)$  ein Spline nach Gleichung (4-5) genügender Ordnung mit den Randbedingungen (4-28) und (4-29) ausgewählt:

$$y_f^*(t) = \begin{cases} P_1(t) = c_{o1} t^{o1} + \dots + c_1 t + c_0, & 0 \leq t < t_b \\ P_2(t) = d_{o2} (t - t_b)^{o2} + \dots + d_1 (t - t_b) + d_0, & t_b \leq t \leq T \end{cases} \quad (4-97)$$

Falls während der Umschaltung bzw. der Änderung der Ruhelage die Stellgröße unter der Begrenzung  $|u(t)| \leq u_{max}$  bleibt, wird die bisherige Struktur aus Abbildung 4-1 aktiv sein und die Überführung wie gehabt vollzogen. Wird aber die Begrenzung überschritten  $|u(t)| > u_{max}$ , so sollen die Soll- und die Vorsteuerungstrajektorien  $y_i^*(t)$ ,  $u_v^*(t)$  neu berechnet werden. Dies soll so lange geschehen, bis die Stellgröße wieder die Bedingung  $|u(t)| \leq u_{max}$  erfüllt. Infolgedessen wird während der Sättigung die äußere Schleife über den Systemzustand  $\mathbf{x}$  geschlossen, wie in Abbildung 4-18 gezeigt:

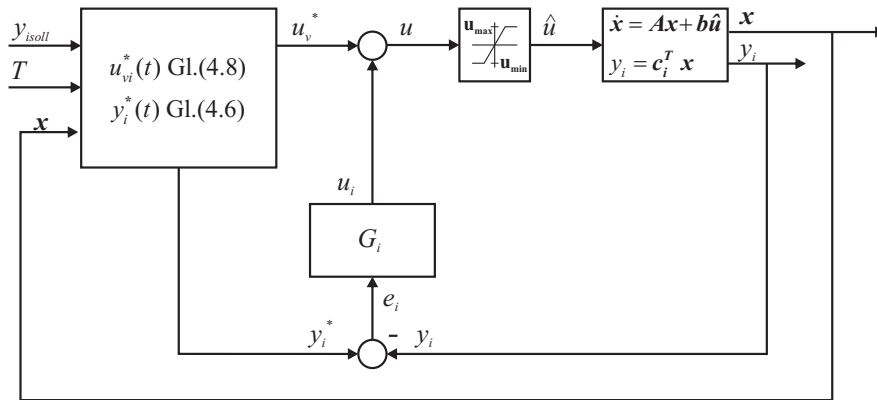


Abb. 4-18: Struktur zur stoßfreien Umschaltung des Systems (4-73) mit Neuberechnung von  $y_i^*(t)$  und  $u_v^*(t)$  bei Überschreitung der Stellgrößenbegrenzung

Durch die ständige Neuberechnung von  $y_i^*(t)$  und  $u_v^*(t)$  wechselt die Vorsteuerung ihre Rolle und wird zur Regelung, während der Regler in der Sättigung immer den aktuellen Istwert bzw. Istzustand (bei Zustandsreglern) als Sollwert (-zustand) bekommt. Da auch eventuell vorhandene Integratoren bei der Neuberechnung zurückgesetzt werden, ist die Stellgröße während der Sättigung gleich Null:  $u_i = 0$ . Des Weiteren kann die Überführungszeit ähnlich der sättigenden WSVR variiert werden, um schnellere Überführungen zu gewährleisten. Ist die Sättigung wieder verlassen, werden die letzten berechneten Vorsteuerungs- und Solltrajektorien wie gehabt bis zur nächsten Sättigungsphase verwendet.

Da  $u_v^*(t)$  über den flachen Ausgang und seine Ableitungen berechnet wird und diese wiederum den Systemzustand bestimmen, wird die Vorsteuerung  $u_v^*(t)$  in der Sättigung zum Zustandsregler des Systems. Transformieren wir zuerst den linearen Teil des Systems (4-73) in die Regelungsnormform:

$$\dot{z} = \mathbf{\Lambda}^T z + \tilde{\mathbf{b}} \hat{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{u}, \quad (4-98)$$

wobei  $z_1 = y_f$  gilt und die Matrix  $\mathbf{\Lambda}$  in Gleichung (3-16) definiert ist. Das Regelgesetz  $u_v^*$  ist wie zuvor über die Systemgleichungen und die Solltrajektorie  $y_f^*$  definiert:

$$u_v^* = a_0 y_f^* + a_1 \dot{y}_f^* + \dots + a_{n-1} \overset{(n-1)}{y_f^{*}} + \overset{(n)}{y_f^*}. \quad (4-99)$$

Weil in der Sättigung die Berechnung von  $y_f^*$  zu jedem Abtastschritt aufs Neue durchgeführt wird und somit allein der erste Teil des Splines bei der Berechnung

von  $u_v^*(t)$  benutzt wird, ist für das Regelgesetz (4-99) nur das erste Polynom  $P_1(t)$  aus Gleichung 4-97 von Bedeutung. Das Polynom  $P_1(t)$  wird  $n$ -mal abgeleitet und ersetzt in Gleichung (4-99) die Splines  $y_f^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$u_v^* = a_0 P_1(t) + \dots + a_i P_1^{(i)}(t) + \dots + a_{n-1} P_1^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{j=0}^{o_1-i} \binom{j+i}{j} t^j c_{i+j}. \quad (4-100)$$

Die Koeffizienten  $c_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , der Trajektorien  $P_i^{(i)}(0)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , sind von  $t_b$ ,  $T$ , dem flachen Ausgang und seinen Ableitungen  $y_f^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, n$  abhängig (4-28). Werden für  $t$ ,  $t_b$  feste Werte  $t_c, t_{bc}$ , ( $t_c \ll t_{bc}$ ) und für  $y_f^{(n)}$

$$y_f^{(n)} = u_v^* - a_0 y_f - a_1 \dot{y}_f - \dots - a_{n-1} y_f^{(n-1)} \quad (4-101)$$

eingesetzt, so bekommen wir die vom Systemzustand  $\mathbf{z}$  abhängige Zustandsrückführung:

$$\hat{u} = \text{sat}(u_v^*(\mathbf{z})) = \text{sat}(\mathbf{k}^T(T)\mathbf{z}) = \text{sat}([k_0(T) \dots k_{n-1}(T)]\mathbf{z}). \quad (4-102)$$

Der Parameter  $t_c$  kann kleiner oder gleich der Abtastschrittweite und  $t_{bc}$  abhängig von der Systemdynamik gewählt werden. Ohne die Stellgrößenbegrenzung ist das System durch

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ k_0(T) - a_0 & k_1(T) - a_1 & k_2(T) - a_2 & \dots & k_{n-1}(T) - a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (4-103)$$

beschrieben, wobei die Pole des Systems nicht wie bei der Rückführung (4-78) radial nach links verschoben werden, sondern gemäß der mit kleiner werdendem  $T$  immer schneller überführenden Trajektorie (4-97)  $T \in [T_{min}, T_{max}]$ . Die Untergrenze für  $T$  ist  $t_{bc}$ , da sonst der Spline (4-97) nicht realisiert werden kann. Mit  $T_{min} = t_{bc}$  besteht aber die Überführungstrajektorie nur aus dem Polynom  $P_1$ , so dass  $T_{min} > t_{bc}$  die bessere Wahl ist. Am anderen Ende ist  $T$  prinzipiell nicht begrenzt; jedoch ist durch den Wunsch nach schnellen Überführungen und die Menge der möglichen Anfangswerte  $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{Z}_0$  eine Obergrenze  $T_{max} < \infty$  gegeben.

Mit der normalisierten Überführungszeit  $T_n = \frac{T}{T_{max}}$ ,  $T_n \in [T_{nmin}, 1]$ , bekommt man den Rückführvektor

$$\hat{\mathbf{k}}^T(T_n) = [\hat{k}_0(T_n) \dots \hat{k}_{n-1}(T_n)], \quad T_n \in [T_{nmin}, 1], \quad (4-104)$$

für den, wie beim Entwurf sättigender WSVR, die Ljapunov-Gebiete

$$G(T_n) = \{ \mathbf{z} \mid g(\mathbf{z}, T_n) = e(T_n) \mathbf{z}^T \mathbf{R}(T_n) \mathbf{z} - 1 < 0 \}, \quad (4-105)$$

bestimmt werden, mit:

$$e(T_n) = \frac{\hat{\mathbf{k}}^T(T_n) \mathbf{R}(T_n) \hat{\mathbf{k}}(T_n)}{u_{max}^2}. \quad (4-106)$$

Das System (4-103) hat dann die Form

$$\dot{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{A}}(T_n) \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hat{a}_0 & \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \dots & \hat{a}_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{z}, \quad (4-107)$$

wobei  $\hat{a}_i = \hat{k}_i(T_n) - a_i$  und  $i = 0, \dots, n-1$  sind. Die Systemmatrix  $\hat{\mathbf{A}}(T_n)$  kann mithilfe von

$$\mathbf{D}_L(T_n) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{a}_1(1)}{\hat{a}_1(T_n)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hat{a}_2(1)}{\hat{a}_2(T_n)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\hat{a}_{n-1}(1)}{\hat{a}_{n-1}(T_n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4-108a)$$

$$\mathbf{D}_R(T_n) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{a}_0(T_n)}{\hat{a}_0(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\hat{a}_1(T_n)}{\hat{a}_1(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\hat{a}_{n-1}(T_n)}{\hat{a}_{n-1}(1)} \end{bmatrix}, \quad (4-108b)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \hat{\mathbf{A}}(1), \quad (4-108c)$$

auch folgendermaßen

$$\hat{\mathbf{A}}(T_n) = \mathbf{D}_L(T_n) \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{D}_R(T_n) \quad (4-109)$$

ausgedrückt werden. Die Ellipsen  $\mathbf{R}(T_n)$  können ähnlich wie in (4-85) gewählt werden:

$$\mathbf{R}(T_n) = \mathbf{D}_L(T_n) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}_L(T_n), \quad (4-110)$$

so dass mit  $T_n \rightarrow T_{nmin}$  die Gebiete der Ellipsen  $\mathbf{R}(T_n)$  immer kleiner werden.

Die implizite Gleichung  $g(\mathbf{z}, T_n)$  in  $T_n$  der Ordnung  $2n$  mit den von  $\mathbf{z}$  abhängigen Koeffizienten

$$g(\mathbf{z}, T_n) = e(T_n) \mathbf{z}^T \mathbf{R}(T_n) \mathbf{z} - 1 = 0, 2 \quad (4-111)$$

ist eine implizite Ljapunov-Funktion des Systems und besitzt eine eindeutige Lösung, wenn die Ungleichungen

$$\mathbf{R}(T_n) \succ 0, \quad (4-112a)$$

$$\hat{\mathbf{A}}^T(T_n)\mathbf{R}(T_n) + \mathbf{R}(T_n)\hat{\mathbf{A}}(T_n) \prec 0, \quad (4-112b)$$

$$\frac{\partial e(T_n)}{\partial T_n}\mathbf{R}(T_n) + e(T_n)\frac{\partial \mathbf{R}(T_n)}{\partial T_n} \prec 0 \quad (4-112c)$$

im gesamten Intervall  $T_n \in [T_{nmin}, 1]$  erfüllt sind und die Gleichung

$$G(1) = \{z_0 \mid g(z_0, 1) = e(1)z_0^T \mathbf{R}(1)z_0 - 1 < 0\} \quad (4-113)$$

für alle Anfangswerte  $z_0 \in \mathcal{Z}_0$  gilt.

Im Unterschied zum Rückführgesetz (4-78) können die Systempole für  $T_n = 1$  nicht beliebig platziert werden. Sie werden durch den Rückführvektor  $\hat{\mathbf{k}}_0^T = \hat{\mathbf{k}}^T(T_n = 1)$  bestimmt bzw. stellen die Lösung der charakteristischen Gleichung des Systems (4-103) für  $T = T_{max}$  dar. Die Anfangspole können also nicht beliebig platziert, aber mit geeigneter Auswahl von  $T_{max}$  und  $t_{bc}$  verschoben werden. Beim Entwurf ist dies ein Vorteil, denn die Suche nach geeigneten Anfangspolen gestaltet sich durch die Überführung in ein zweidimensionales Problem wesentlich einfacher und schneller als bei der impliziten WSVR mit freier Polvorgabe, wo jeder Pol des Systems beliebig gesetzt werden konnte. Allerdings hat man durch das Rückführgesetz (4-102) den Nachteil, dass die Bedingungen (4-112) nicht mehr vom Auswahlparameter  $T_n$  unabhängig sind, weshalb ihre Gültigkeit im gesamten Intervall  $T_n \in [T_{nmin}, 1]$  überprüft werden muss. Dieser Umstand verlangsamt die Suche nach passenden Parametern für  $\mathbf{R}(T_n)$ , wodurch die Zeitersparnis wieder eingebüßt wird.

Ist die nichtsättigende Lösung bestimmt, muss zusätzlich für die sättigende Rückführung die Bedingung

$$\tilde{\mathbf{A}}^T(T_n)\mathbf{R}(T_n) + \mathbf{R}(T_n)\tilde{\mathbf{A}}(T_n) \prec 0, \quad (4-114)$$

erfüllt sein, mit

$$\tilde{\mathbf{A}}(T_n) = \mathbf{A}^T + \tilde{\mathbf{k}}^T(T_n). \quad (4-115)$$

Da, wie bereits ausgeführt, die Systempole nicht beliebig platziert werden, ist die sättigende Rückführung  $\tilde{\mathbf{k}}^T(T_n)$  eine „straffer“ ausgelegte Rückführung  $\hat{\mathbf{k}}^T(T_n)$ , mit  $T_n = \frac{T}{T_{max}}, \tilde{T}_{max} < T_{max}$ , bei der die Bedingung (4-114) erfüllt sein muss.

**Beispiel 4.5:** Als „Benchmark-Aufgabe“ für die Leistungsfähigkeit der WSVR-Regelungen hat sich in der neueren Literatur ([2], [69], [16]) die Tiefenregelung



eines U-Bootes etabliert. Die Zustandsraumbeschreibung des U-Boots stammt von Gutman und Hagander [42]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0,005 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u), \quad (4-116)$$

wobei  $x_1$  die Tauchtiefe darstellt. Die Menge  $\mathcal{X}_0$  der möglichen Anfangswerte ist mit  $\mathcal{X}_0 = [\mathbf{x} \mid |x_1| \leq 10, |x_2| \leq 0,05, |x_3| \leq 0,0046]$ , gegeben, während die Stellgrößenbegrenzung  $|u| \leq 2,5 \cdot 10^{-5}$  beträgt.

Der flache Ausgang des Systems (4-116) ist die Tauchtiefe  $y_f = x_1$ , was wegen der Regelungsnormalform leicht überprüft werden kann. Für einen Arbeitspunktwechsel des flachen Ausgangs wird ein Spline 5. Ordnung gewählt:

$$y_f^*(t) = \begin{cases} P_1(t) = c_5 t^5 + \dots + c_1 t + c_0, & 0 \leq t < t_b \\ P_2(t) = d_5 (t - t_b)^5 + \dots + d_1 (t - t_b) + d_0, & t_b \leq t \leq T \end{cases}, \quad (4-117)$$

der die Solltrajektorie während der Überführung definiert und aus dem die Vorsteuerung gemäß

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \ddot{y}_f^*(t) + 0,005 \dot{y}_f^*(t) = \\ &= \begin{cases} u_1^*(t) = \ddot{P}_1(t) + 0,005 \dot{P}_1(t), & 0 \leq t < t_b \\ u_2^*(t) = \ddot{P}_2(t) + 0,005 \dot{P}_2(t), & t_b \leq t \leq T \end{cases}, \end{aligned} \quad (4-118)$$

berechnet wird. Die Randbedingungen zur Bestimmung der Splinekoeffizienten  $c_i$  und  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ , lauten:

$$\begin{aligned} P_1^{(j)}(0) &= x_{j+1}(0), \quad j = 0, 1, 2, & P_1^{(3)}(0) &= -0,005 \dot{x}_1(0) + u(0), \\ P_1^{(j)}(t_b) &= P_2^{(j)}(t_b), \quad j = 0, \dots, 3, & P_2(T) &= x_1(t_u + T), \\ P_2^{(j)}(T) &= 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4-119)$$

Sind die Splinekoeffizienten bestimmt und in (4-118) eingesetzt, bekommt man die WSVR-Rückführung durch Einsetzen von  $t = t_c$ ,  $[x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]^T = \mathbf{x}(t)$  und  $u(0) = u_1^*(t)$  in die Vorsteuerungstrajektorie  $u_1^*(t)$  und nochmaliges Auflösen nach  $u_1^*(t)$ . Das resultierende Rückführgesetz kann dann, nach der Normierung  $T_n = \frac{T}{T_{max}}$ , in die Form (4-104) transformiert werden:

$$\hat{u} = \text{sat}(u_1^*(\mathbf{x})) = \text{sat}(\hat{\mathbf{k}}^T(T_n) \mathbf{x}) = \text{sat}([\hat{k}_0(T_n) \ \hat{k}_1(T_n) \ \hat{k}_2(T_n)] \mathbf{x}). \quad (4-120)$$

Der Parameter  $t_c$  beträgt  $t_c = 0,01$ , was auch die Berechnungsschrittweite für die numerische Berechnung von  $T_n$  aus der impliziten Selektionsfunktion  $g(\mathbf{x}, T_n)$  ist. Eine gute, nichtsättigende Lösung der WSVR-Rückführung ist für die Werte  $t_b = 260$  und  $T_{max} = 3200$  für den Spline-Knotenpunkt und die maximale Um-

schaltzeit gegeben, welche die Matrix  $\hat{\mathbf{A}}(T_n)$  definieren. Die Suche nach geeigneten Ljapunov-Gebieten ergab die Matrix

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2,266 & 1,287 \cdot 10^3 & 5,369 \cdot 10^4 \\ 1,287 \cdot 10^3 & 1,075 \cdot 10^6 & 7,108 \cdot 10^7 \\ 5,369 \cdot 10^4 & 7,108 \cdot 10^7 & 1,821 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}, \quad (4-121)$$

welche die Bedingungen (4-112) und (4-113) erfüllt. Die sättigende WSVR, bei der die resultierende Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  die Stabilitätsbedingung (4-114) erfüllt, ist durch  $t_b = 165$  und  $T_{max} = 2000$  festgelegt.

In Abbildung 4-19 ist die Ausregelung der Tauchtiefe des U-Boots beim Anfangszustand  $\mathbf{x}_0^T = [0 \ 0 \ -0,004]$  mit verschiedenen Regelkonzepten gezeigt. Die zeitoptimale Regelung [9] regelt das System am schnellsten aus und stellt somit die Referenz dar; jedoch ist sie aufgrund der Nichtstetigkeit der Stellgröße und des Fehlens einer allgemein gültigen Entwurfsmethodik nicht praktikabel. Die nichtsättigende implizite WSVR nach [2] mit den Parametern

$$\hat{\mathbf{a}}^T = [ 1,117 \cdot 10^{-7} \quad 4,841 \cdot 10^{-5} \quad 8,610 \cdot 10^{-3} ], \quad (4-122a)$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2,592 \cdot 10^2 & 7,994 \cdot 10^3 \\ 2,592 \cdot 10^2 & 9,949 \cdot 10^4 & 6,578 \cdot 10^6 \\ 7,994 \cdot 10^3 & 6,578 \cdot 10^6 & 9,798 \cdot 10^8 \end{bmatrix}, \quad (4-122b)$$

erreicht auslegungsbedingt die maximale Stellgröße nur punktweise, was in diesem Vergleich zur langsamsten Ausregelung führt. Die sättigende implizite WSVR nach [69] mit den Werten:

$$\hat{\mathbf{a}}^T = [ 8,792 \cdot 10^{-8} \quad 3,353 \cdot 10^{-5} \quad 8,188 \cdot 10^{-3} ], \quad (4-123a)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^T = [ 1,369 \cdot 10^{-6} \quad 3,560 \cdot 10^{-4} \quad 4,775 \cdot 10^{-2} ], \quad (4-123b)$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 3,127 \cdot 10^{-5} & 6,990 \cdot 10^{-3} & 7,973 \cdot 10^{-1} \\ 6,990 \cdot 10^{-3} & 2,098 & 237,1 \\ 7,973 \cdot 10^{-1} & 237,1 & 3,682 \cdot 10^4 \end{bmatrix}, \quad (4-123c)$$

ist nach der zeitoptimalen die schnellste Regelung, wobei die flachheitsbasierte Umschaltung mit sättigender WSVR nur wenig langsamer ist.

Die im Vergleich zur sättigenden WSVR größere Ausregelzeit der flachheitsbasierten Umschaltung wird durch die nicht schneller werdende Regelung in den nichtsättigenden Abschnitten der Stellgröße verursacht. Abbildung 4-20 zeigt, wie während der Ausregelung und in der Sättigung der Stellgröße der Selektionsparameter  $T_n$  bzw. die Umschaltzeit  $T = T_n T_{max}$  monoton abfällt und für Werte  $|u| < u_{max}$  konstant bleibt. Der minimale Wert  $T_{min}$  wird in diesem Fall gar nicht erreicht, da die Stellgröße die Sättigung verlässt, noch bevor die  $T_{min}$  erreicht wird.

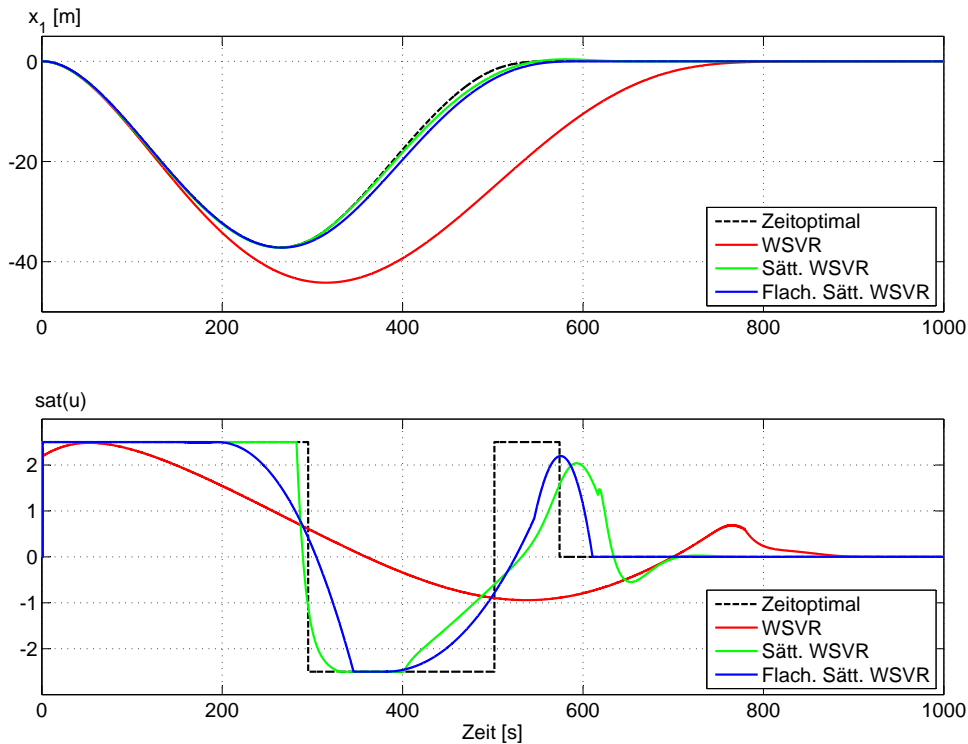


Abb. 4-19: Tauchtiefe  $x_1$  und Stellgröße  $sat(u)$  des U-Boots für den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0^T = [0 \ 0 \ -0,004]$

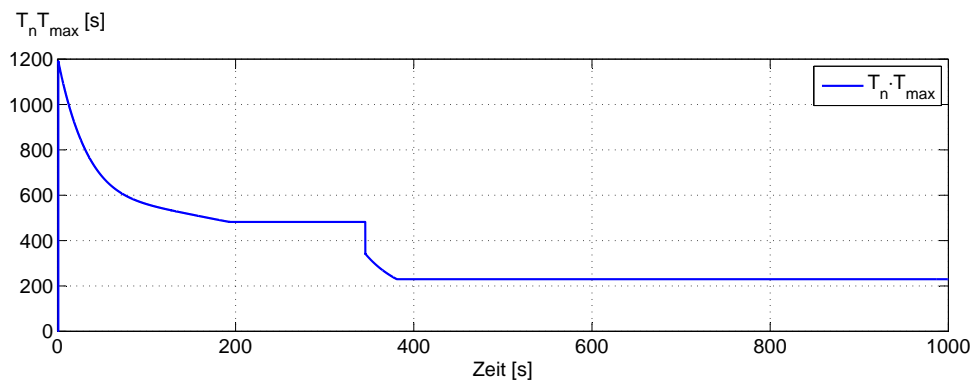


Abb. 4-20: Umschaltzeit  $T = T_n T_{max}$  der flachheitsbasierten Umschaltung mit sättigender WSVR während der Ausregelung aus Abbildung 4-19

Die WSVR-Erweiterung der flachheitsbasierten Umschaltung ermöglicht bei linearen Eingrößensystemen auch für stoßfreie Reglerumschaltungen eine fast zeitoptimale Überführung unter der gegebenen Stellgrößenbegrenzung. Die Überführungszeit kommt dabei nahe an die Zeiten der sättigenden WSVR-Methoden heran. Um dies zu erreichen, ist jedoch im Vergleich zu der gezeigten Lösung aus Unterabschnitt 4.4.1 ein viel größerer Aufwand beim Entwurf nötig. Die Hardwareanforderungen für die Steuergeräte werden aber nicht erhöht, da durch die WSVR-Erweiterung nicht mehr Rechenaufwand für einen Abtastschritt entsteht als bei der flachheitsbasierten Umschaltung ohne WSVR.

## 4.5 Zustandsschätzung

In den bisherigen Ausführungen wurde angenommen, dass der Zustand des Systems  $\mathbf{x}$  bzw. der flache Ausgang  $\mathbf{z}$  und seine Ableitungen messbar sind. Im allgemeinen Fall werden jedoch nur die Ausgänge der Systemkonfigurationen  $\mathbf{y}_i$  zur Verfügung stehen. Um die flachheitsbasierte Umschaltung realisieren zu können, muss man für das vorliegende System zusätzlich einen Beobachter entwerfen. Bei linearen Ein- (4-1) und Mehrgrößensystemen (4-41) ist nach dem Kalman-Kriterium die Beobachtbarkeit sichergestellt, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* \\ \mathbf{C}^* \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^* \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4-124)$$

den Höchststrang  $n$  hat bzw.  $n$  linear unabhängige Zeilenvektoren besitzt [30]. Die Matrix  $\mathbf{C}^*$  setzt sich aus den Vektoren  $\mathbf{c}_i$  bei Eingrößensystemen bzw. den Matrizen  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = 1, 2$  bei Mehrgrößensystemen zusammen:

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}. \quad (4-125)$$

Eine Übersicht über die Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme ist in [12] zu finden. Die Struktur zur flachheitsbasierten Umschaltung mit Beobachter, hier der Übersichtlichkeit halber für ein Eingrößensystem dargestellt, sieht dann folgendermaßen aus:

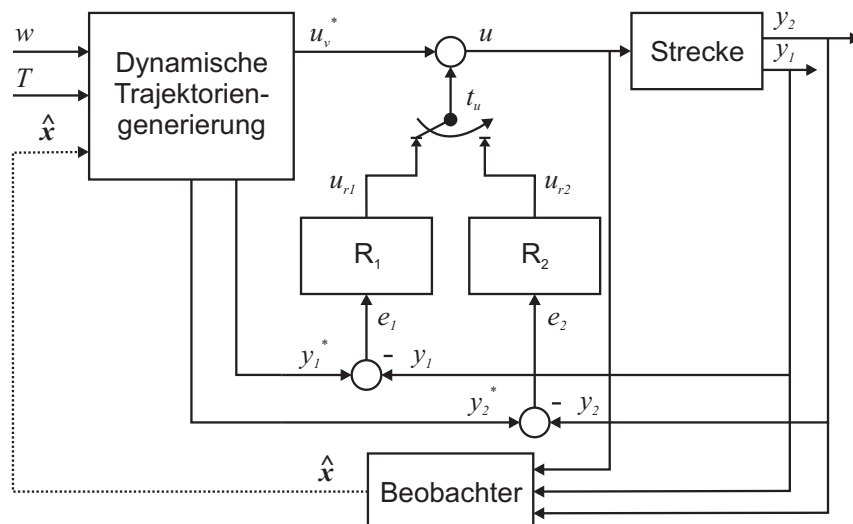


Abb. 4-21: Struktur zur stoßfreien Umschaltung eines Eingrößensystems mit zwei Ausgangskonfigurationen, klassischen Eingrößenreglern und Zustandsbeobachter

Der geschätzte Zustand  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  wird in Abbildung 4-21 nur für die Berechnung der Übergangstrajektorien genutzt, da der Istzustand für die Regelung nicht vonnöten ist. Der Zustand  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  wird also nur zur Berechnung der nominalen Überführungstrajektorien zum Umschaltzeitpunkt eingesetzt, weshalb sich der Beobachter nicht in der Regelschleife befindet und keinen Einfluss auf die Systemstabilität hat.

Bei Zustandsreglern wird der aktuelle Zustand auch für die Regelschleife gebraucht. In diesen Fällen ist bei linearen Systemen durch das Separationstheorem gesichert, dass die Dynamik des Beobachters und die der Regler unabhängig voneinander entworfen werden können. Dies ist bei nichtlinearen Systemen ohne weitere Annahmen nicht gegeben. In [88] ist für nichtlineare flache Systeme mit flachheitsbasierten Reglern der systematische Entwurf von Beobachtern mit zeitvarianter Verstärkung gezeigt.

Die Anwendung der flachheitsbasierten Umschaltung mit sättigender WSVR bei stellgrößenbegrenzten Eingrößensystemen hat zur Folge, dass sich der Beobachter während der Sättigung in der Regelschleife befindet. Die Stabilität der sättigenden WSVR-Regelung mit Beobachter wurde in [68] erörtert und bewiesen.

## 4.6 Zusammenfassung

Die in diesem Kapitel vorgestellte flachheitsbasierte Methode zur stoßfreien Umschaltung von Reglerstrukturen berücksichtigt explizit den neuen Sollwert bzw. die Ruhelage des Systems nach der Umschaltung. Im Gegensatz dazu stellen die bisherigen Methoden zur stoßfreien Umschaltung, wie in Kapitel 2 gezeigt, nur die Stetigkeit der Eingangsgröße sicher. Dies hat zur Folge, dass die Umschaltung meistens nur in der Umgebung des neuen Sollwertes bzw. der neuen Ruhelage zufriedenstellend funktioniert, denn das Erreichen des Sollwertes hängt bei diesen Methoden von den Reglern und ihrer beim Entwurf festgelegten Dynamik ab. Deswegen ist solch eine Reglerumschaltung nicht in jedem Zustand des Systems empfehlenswert, weshalb oftmals der Umschaltbefehl nicht sofort ausgeführt werden kann und auf einen günstigeren Zeitpunkt gewartet wird. Dieses Manko hat die flachheitsbasierte Methode nicht, denn die Generierung passender Vorsteuerungs- und Solltrajektorien geschieht unabhängig von der Reglerdynamik. Somit eignet sich die flachheitsbasierte Methode für Systeme, bei denen die Umschaltung sofort nach dem Umschaltbefehl stattfinden soll oder muss.

Die besseren Eigenschaften werden allerdings mit größerem Entwurfsaufwand und einem erhöhten, aber in Grenzen bleibenden Rechenaufwand zur Laufzeit erkauft. Da leistungsfähige Elektronik zunehmend günstiger und verfügbarer wird, ist der erhöhte Online-Rechenaufwand keine wesentliche Einschränkung. Beim Entwurf selbst hängt es nicht von den eingesetzten Reglern, sondern vom System ab, wie

aufwändig die Realisierung der flachheitsbasierten Umschaltung ist. Werden außerdem schon für die Regelung Beobachter entworfen, so sinkt nochmals der erforderliche Aufwand, da der Beobachter für die Bestimmung der Istwerte des flachen Ausgangs und seiner Ableitungen genutzt werden kann und keine zusätzlichen Zustandsschätzer erforderlich sind. Für lineare Systeme hält sich die erforderliche Zeit in Grenzen und ist gut eingrenzbare. Bei nichtlinearen Systemen jedoch kann die Suche nach dem flachen Ausgang zeitlich intensiv und sogar erfolglos sein. Sehr viele in der Praxis vorkommende nichtlineare Systeme haben jedoch einen flachen Ausgang, der mit vertretbarem Aufwand ausfindig gemacht werden kann. Den flachen Ausgang, der die Voraussetzung für die Anwendung der vorgestellten Methode ist, besitzen alle linearen und steuerbaren Systeme und eine Vielzahl der nichtlinearen Systeme. Dadurch hat das flachheitsbasierte Reglerumschalten ein breites Anwendungsfeld. Für spezielle Aufgaben kann das flachheitsbasierte Umschalten sogar bei nichtflachen Systemen eingesetzt werden. Am Beispiel des inversen Pendels in Abschnitt 5.4 sieht man, dass dabei die Eigenschaft der Umschaltung zu einem beliebigen Zeitpunkt verloren geht. Die Generierung der Vorsteuerungs- und der Solltrajektorien funktioniert bei nichtflachen Systemen nur in der Nähe der Ruhelage, um die das System linearisiert wurde.

Die Methode der flachheitsbasierten stoßfreien Umschaltung hat den Vorteil des sehr einfachen Entwurfs, der in den meisten Fällen vom Reglerentwurf unabhängig stattfinden kann. Dabei wird die Stabilität des Gesamtsystems nicht beeinflusst, da keine zusätzlichen Rückführungen geschaffen werden. Einzige Ausnahme ist die flachheitsbasierte Umschaltung mit sättigender impliziter WSVR, bei der das System um noch einen Regler ergänzt wird, der zusätzliche Stabilitätsuntersuchungen nach sich zieht. Außerdem können die Regler stärker auf die Aufgabe der Störgrößenregelung ausgelegt werden, da sie durch die vorhandene Generierung passender Vorsteuerungstrajektorien bei Sollwertwechseln entlastet werden.

Die flachheitsbasierte Umschaltung, ergänzt um die sättigende, weiche, strukturvariable Regelung aus Unterabschnitt 4.4.3, kann bei linearen Eingrößensystemen Überführungen realisieren, die sehr nah an den Zeitoptimalen liegen. Um dieses sehr gute Ergebnis zu erreichen, muss der Entwurfsaufwand nochmals wesentlich erhöht werden. Die notwendigen Suchalgorithmen zur Optimierung der WSVR-Komponente sind zeitintensiv und finden nur lokal die beste Lösung, so dass durchaus über mehrere Durchläufe das Ergebnis verbessert werden kann. Um die benötigte Zeit zu reduzieren, sind weitere Arbeiten notwendig, die untersuchen, ob sich das Optimierungsproblem in die LMI-Form überführen lässt, wie das der Fall bei WSV-Reglern ist. Dies würde die minimalen realisierbaren Überführungszeiten zwar vergrößern, hätte aber den Vorteil eines schnelleren Entwurfs. Außerdem sind die Fragen offen, ob das flachheitsbasierte Umschalten mit sättigender WSVR bei linearen Mehrgrößensystemen eingesetzt werden kann

und inwieweit sich die Methode auch auf nichtlineare Systeme mit Stellgrößenbeschränkung übertragen lässt.





## 5 Anwendungsbeispiele

Im Folgenden wird die Anwendung der flachheitsbasierten Methode zum stoßfreien Umschalten auf Systeme mit verschiedenen Eigenschaften gezeigt.

Als Beispiel für lineare Eingrößensysteme wird in Abschnitt 5.1 für einen Viertelfahrzeugprüfstand die stoßfreie Umschaltung zwischen den verschiedenen Reglern der Längsdynamik realisiert.

Abschnitt 5.2 behandelt den Parallelroboter TriPlanar, ein flaches, nichtlineares Mehrgrößensystem, bei dem, mithilfe der flachheitsbasierten Umschaltung, Hindernisse umfahren werden. Dabei wird zwischen der normalerweise aktiven Positionsregelung und einer Kraftregelung umgeschaltet. Die Kraftregelung wird eingesetzt, um unbekanntem Hindernissen auszuweichen, die sich auf vorgegebenen Trajektorien des Roboters befinden.

Ein weiteres interessantes Anwendungsbeispiel ist der flachheitsbasierte Arbeitspunktwechsel bei Kompressoren für Gas- und Dampf-Kombikraftwerke. Der Kompressor ist ein flaches, nichtlineares Mehrgrößensystem, dessen Aufgabe das Einhalten eines vorgegebenen Gasdrucks vor der Gasturbine ist. Schwankungen im Druck sind nur in geringem Maße tolerierbar und höchst unerwünscht, da beim Verlassen des erlaubten Druckniveaus die Gasturbine und damit auch der Prozess der Energieerzeugung abgeschaltet wird. Wie mittels des flachheitsbasierten Arbeitspunktwechsels eine signifikante Erhöhung der Regelgüte und damit auch eine Erhöhung der Verfügbarkeit der Gesamtanlage erreicht werden kann, ist in Abschnitt 5.3 vorgestellt.

Für das invertierte Pendel wird in Abschnitt 5.4 die Regelstruktur entworfen, die das Pendel nach dem Aufschaukeln stoßfrei in die aufrechte Position überführt. Obwohl das Pendel nicht flach ist, kann die flachheitsbasierte Umschaltung nach der Linearisierung des Systems genutzt werden, um es nahe der oberen Ruhelage aufzufangen und in die Sollposition des Wagens zu überführen.

### 5.1 Viertelfahrzeugprüfstand ModulX

Für den im Rahmen der Diplomarbeiten [97] und [78] entworfenen und konstruierten Viertelfahrzeugprüfstand ModulX wurde in [92] die flachheitsbasierte Umschaltung zwischen den Reglern des Moments, der Geschwindigkeit und der Position der Längsdynamik entworfen. Während des Prüfstandbetriebs ist es so möglich, zwischen Positions-, Geschwindigkeits- und Momentenregelung stoßfrei umzuschalten. Bleibt die Stellgröße während der Überführung unterhalb der Stellgrößenbegrenzung, werden auch die vorgegebenen Überführungszeiten eingehalten.

Im ModulX sind, wie in Abbildung 5-1 dargestellt, die passive und die aktive Federung, das Lenken und das Antreiben implementiert. Der Einfluss der Dynamik des Federbeins und der Aktoren auf Federung und Lenkung wurde bei der Modellbildung außer Acht gelassen, da nur die Längsdynamik von Interesse ist. Der Antriebsaktor für die Längsdynamik ist ein Gleichstrommotor mit  $U_{max} = \pm 12$ . Dessen Antriebswelle ist über ein Getriebe mit einer Übersetzung von 1 : 14 mit dem angetriebenen Rad verbunden. Die Längsdynamik beschreiben deshalb die bereits in Beispiel 3.1 aufgeführten Differenzialgleichungen (3-9), die allerdings hier mit der Position  $\varphi$  als zusätzlichem Zustand des Systems erweitert sind:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{K_m}{J} & -\frac{b}{J} \\ 0 & -\frac{R}{L} & -\frac{K_e}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u, \quad (5-1a)$$

$$y_1 = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}, \quad (5-1b)$$

$$y_2 = \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} = [0 \ 1 \ 0] \mathbf{x}, \quad (5-1c)$$

$$y_3 = \mathbf{c}_3^T \mathbf{x} = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}. \quad (5-1d)$$

Der Zustandsvektor setzt sich zusammen aus der Position und der Geschwindigkeit des Rades und dem Läuferstrom des DC-Motors  $\mathbf{x} = [\varphi \ \omega \ i]^T$ . Es ist leicht nachzuprüfen, dass der flache Ausgang des Systems (5-1) die Position  $\varphi$  ist.

Beim ModulX-Prüfstand sind konstruktionsbedingt<sup>1</sup> schnelle Arbeitspunktwechsel nicht erlaubt, weshalb die Schnelligkeit der Überführung nicht im Vordergrund steht. Aus diesem Grund wird beim Entwurf des Umschaltverfahrens auf die WSVR-Erweiterung verzichtet und die vorhandene Stellgrößenbegrenzung  $|u| \leq 12$  des Systems wie in Beispiel 4.4 berücksichtigt. Aus dem gleichen Grund wurden bei den durchgeführten Versuchen zu kurze Überführungszeiten  $T$  beim Umschalten zur Drehzahl- oder zur Positionsregelung vermieden bzw. keine großen Momente in Form von großen Sollströmen für die Stromregelung vorgegeben.

Die zum Teil aus den Datenblättern des Herstellers übernommenen und zum Teil identifizierten Parameter des Systems (5-1) sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Für die Momenten- bzw. Stromregelung wird ein PI-Regler mit der Übertragungsfunktion

$$G_{PI3}(s) = K_{P3} \frac{T_3 s + 1}{s} \quad (5-2)$$

verwendet, mit  $K_{P3} = 56,234$  und  $T_3 = 1,1 \cdot 10^{-3}$ .

---

<sup>1</sup> Das eingesetzte Getriebe kann wegen fehlender Momentenbegrenzung zu Schaden kommen.

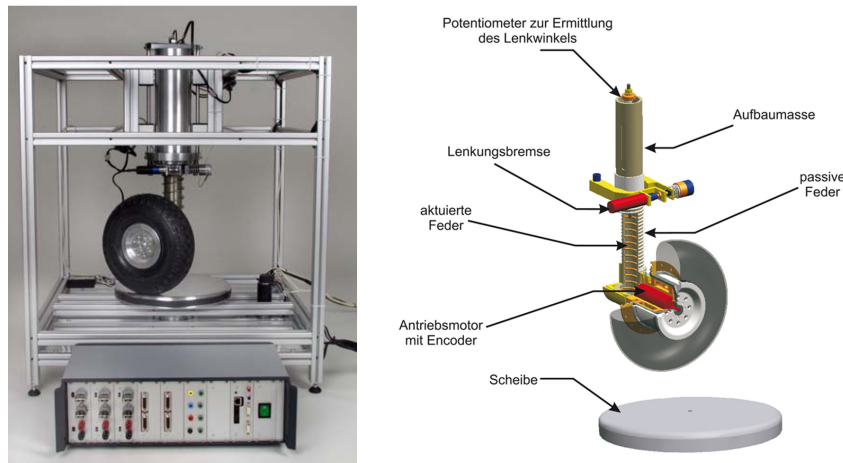


Abb. 5-1: Viertelfahrzeugprüfstand ModulX (links) mit Schnittansicht und Komponenten (rechts) [97], [78]

Tabelle 5-1: Parameter des Prüfstandes

PARAMETER	WERT
$R$	$0,16 [\Omega]$
$L$	$3 \cdot 10^{-5} [H]$
$K_m$	$1,68 \cdot 10^{-2} [Nm/A]$
$K_e$	$1,05 \cdot 10^{-2} [V/(rad/s)]$
$J$	$1,5 \cdot 10^{-4} [kgm^2]$
$b$	$1 \cdot 10^{-6} [Nm/(rad/s)]$

Die Drehzahlregelung erfolgt, gemäß der Struktur aus Abbildung 5-2, mithilfe eines um einen Integrator erweiterten Zustandsreglers, wobei die Reglerparameter  $K_{P2} = 100$  und  $\mathbf{k}_2 = [0 \ 0.197 \ 2.445]^T$  betragen.

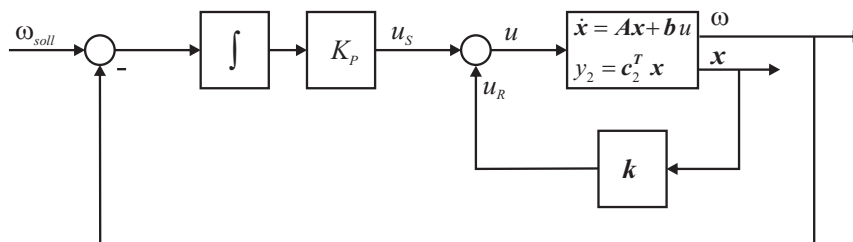


Abb. 5-2: Blockschaltbild einer Zustandsregelung mit I-Anteil [92]

Der Positionsregler ist, wie in Abbildung 5-3 dargestellt, eine dreischleifige Kaskadenregelung mit inneren Schleifen für die Strom- und die Drehzahlregelung. Die äußere Schleife enthält dabei nur einen P-Regler, da die Strecke bereits ein integrierendes Verhalten besitzt. Der PI-Regler der Drehzahl hat eine Übertra-

gungsfunktion nach Gleichung (5-2). Die Parameter des Kaskadenreglers sind:  $K_{\varphi P1} = 6,31$ ,  $K_{\omega P1} = 2,82$ ,  $T_{\omega 1} = 1,1 \cdot 10^{-3}$  und  $K_{iP1} = 0,1778$ .

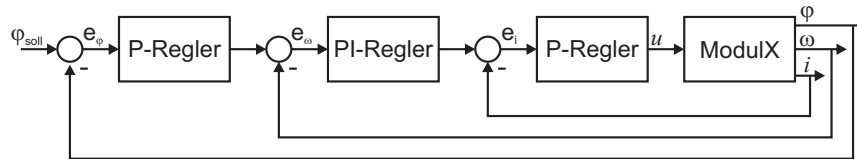


Abb. 5-3: Blockschaltbild der Kaskadenregelung für die Position

Da die Längsdynamik des ModulX durch stabile lineare Gleichungen beschrieben ist, werden die Soll- und die Vorsteuerungstrajektorien  $y_i^*(t)$  und  $u_v^*(t)$  für die Überführung nach der Umschaltung direkt über den jeweiligen Ausgang bestimmt. Für die Umschaltung zum Strom- und zum Drehzahlregler sind die Trajektorien bereits in Beispiel 4.1 berechnet und gegeben. Im vorliegenden Fall ist die Drehzahl  $\omega$  nicht der flache Ausgang des Systems, weshalb bei der Umschaltung zur Drehzahlregelung eigentlich auch die Solltrajektorie  $\varphi^*(t)$  für den Zustandsregler vorgegeben werden müsste. Da aber im Rückführvektor  $\mathbf{k}_2$  der erste Wert Null ist und somit die Position  $\varphi$  zur Berechnung der Stellgröße nicht verwendet wird, kann auf die Solltrajektorie  $\varphi^*(t)$  verzichtet werden.

Die Systemantwort auf eine Serie von Umschaltungen zwischen den entworfenen Reglern ist in den Abbildungen 5-5 und 5-6 zu sehen. Das Polynom

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} P_1(t) = a_6 t^6 + \dots + a_1 t + a_0, & 0 \leq t < t_b \\ P_2(t) = b_4 (t - t_b)^4 + \dots + b_1 (t - t_b) + b_0, & t_b \leq t \leq T \end{cases}, \quad (5-3)$$

wird als Solltrajektorie  $\varphi^*(t)$  für den Verlauf der Position während der Umschaltung gewählt, mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} P_1(0) &= \varphi_0 = \varphi_{ist}, & \dot{P}_1(0) &= \dot{\varphi}_0 = \omega_{ist}, \\ \ddot{P}_1(0) &= \ddot{\varphi}_0 = \dot{\omega}_{ist}, & \ddot{P}_1(0) &= \ddot{\varphi}_0 = \dot{\omega}_{ist}, \\ P_2(T) &= \varphi_{soll}, & \overset{(j)}{P}_2(T) &= 0, \quad j = 1, 2, 3, \\ \overset{(j)}{P}_1(t_b) &= \overset{(j)}{P}_2(t_b), \quad j = 0, \dots, 3, \end{aligned} \quad (5-4)$$

wobei die 3. Ableitung der Position über die Gleichung

$$\ddot{\varphi}_0 = \dot{\omega}_{ist} = \frac{1}{LJ} [-(Lb + RJ) \dot{\omega}_{ist} - (Rb + K_m K_e) \omega_{ist} + K_m u_{ist}] \quad (5-5)$$

berechnet wird. Bei der Kaskadenregelung sind, wie gezeigt, der Drehzahl- und der Stromregler dem Positionsregler unterlagert, was beim Umschalten zur Positionsregelung aus Abbildung 5-3 auch die Solltrajektorien  $\omega^*(t)$  und  $i^*(t)$  erfordert. Weil  $y_f = \varphi$  gilt, werden diese aus der Solltrajektorie für die Position und deren Ableitungen gewonnen.

Wie schon in Beispiel 4.1 für den Gleichstrommotor gezeigt (Gleichung (4-14)), wird auch hier der Knotenpunkt der Splines so gewählt, dass bei allen Umschaltbedingungen die resultierenden Solltrajektorien keine Überschwinger besitzen. Wenn der aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} P_1(0) &= \varphi_0 = \varphi_{ist}, & \dot{P}_1(0) &= \dot{\varphi}_0 = \omega_{ist}, \\ \ddot{P}_1(0) &= \ddot{\varphi}_0 = \dot{\omega}_{ist}, & \overset{(j)}{P}_1(0) &= \overset{(j)}{\varphi}_0 = \overset{(j)}{\omega}_{ist}, \\ P_1(t_b) &= \varphi_{soll}, & \overset{(j)}{P}_1(t_b) &= 0, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5-6)$$

berechnete Zeitpunkt innerhalb des Intervalls  $t_b \in [0, T]$  liegt, so wird er der Knotenpunkt des Splines  $\varphi^*(t)$ ,  $t \in [t_u, t_u + T]$ . Die Solltrajektorie hat damit keine Überschwinger, was allerdings nicht garantiert, dass auch die Systemantwort selbst ohne Überschwinger bleibt, da dies wegen vorhandener Stellgrößenbegrenzung immer auftreten kann.

Abbildung 5-4 stellt die Struktur für ein stoßfreies Umschalten des Prüfstands als Operator-Controller-Modul dar. Dabei befinden sich die Regler im Controller, während die Generierung der Umschalttrajektorien im Operator stattfindet. Dies findet im Block „Vorsteuerung Solltrajektorien“ statt, der dem Block „Konfigurationssteuerung“ aus Abbildung 1-4 entspricht und, wie auch die Regler, im Controller in harter Echtzeit läuft. Für die Berechnung der Trajektorien werden der Systemzustand  $\mathbf{x}_{ist}$ , seine Ableitung  $\dot{\mathbf{x}}_{ist}$  in Form von  $\dot{\omega}_{ist}$  und der Ausgangswert des aktuellen Reglers  $u_R$  gebraucht. Die Trajektorienberechnungen werden nur zum Umschaltzeitpunkt im Operator durchgeführt und stellen keine geschlossene Regelschleife dar, weshalb die Verbindungen von  $\mathbf{x}_{ist}$ ,  $\dot{\omega}_{ist}$  und  $u_R$  zum Operator in Abbildung 5-4 gestrichelt eingezeichnet sind.

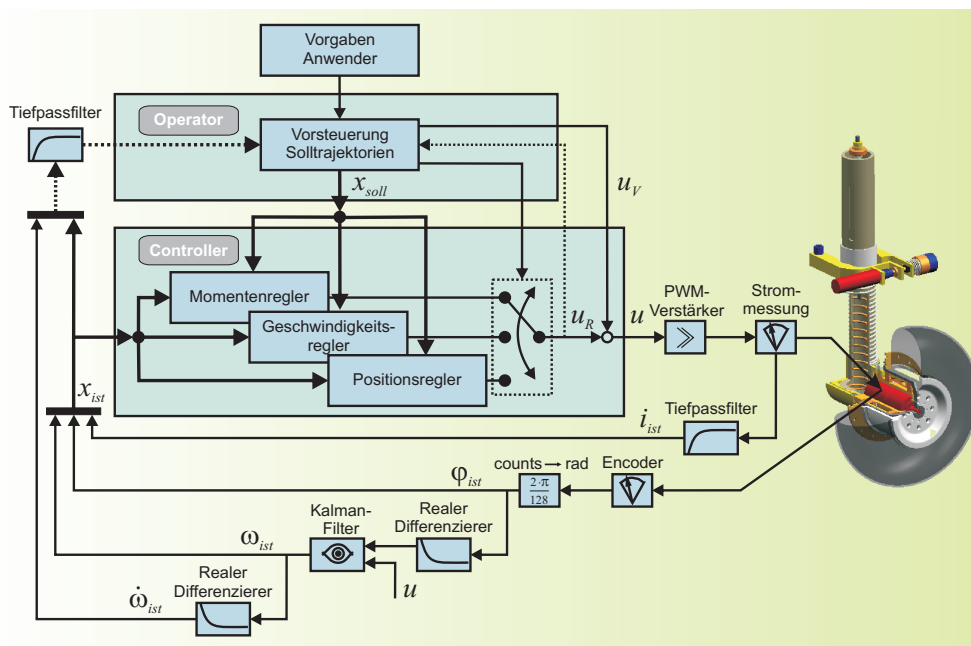


Abb. 5-4: OCM-Struktur des Viertelfahrzeugprüfstandes ModulX

Die Systemantwort des ModulX auf die Regelsequenz aus Tabelle 5-2 zeigen die Abbildungen 5-5 und 5-6. Im ersten Plot ist gut zu sehen, dass der Stellgrößenverlauf im Wesentlichen gut mit der berechneten Vorsteuerung  $u^*(t)$  übereinstimmt und es nur bei der Stromregelung zu größeren Abweichungen kommt. Dies ist die Folge der einfachen Modellierung der Längsdynamik, bei der die Reibung innerhalb des Systems und die Trägheit des Gesamtsystems, bestehend aus der Trägheit des Rades und der Getriebe-Motor Einheit, sehr grob approximiert und identifiziert wurden. Die Regler werden dennoch bei den Überführungen wesentlich „entlastet“, denn wie man aus Abbildung 5-7 sehen kann, sind die Regler höchstens zu einem Drittel an der Stellgröße beteiligt.

Tabelle 5-2: ModulX-Reglerumschaltungen bei frei drehendem Rad

PHASE	ZEIT [s]	REGLER	SOLLWERT
(1)	0-1,1	Hochfahren - Drehzahlregler	500 [rad/s]
(2)	1,1-3,1	Überführung - Stromregler	-0,65 [A]
(3)	3,1-7,1	Überführung - Positionsregler	1500 [rad]
(4)	7,1-8,1	Positionsregler	1500 [rad]
(5)	8,1-11,1	Überführung - Drehzahlregler	-500 [rad/s]
(6)	11,1-16,1	Überführung - Positionsregler	-140 [rad]
(7)	16,1-18	Überführung - Stromregler	0 [A]

Weil das Messsignal des Stroms sehr stark verrauscht ist, wird zur Filterung des Signals das Tiefpassfilter

$$G_{PT1} = \frac{1}{T_F s + 1} \quad (5-7)$$

verwendet, mit der Zeitkonstante  $T_F = 1,1 \cdot 10^{-3}$ . Das gefilterte Signal in Abbildung 5-6 wird für die Generierung der Solltrajektorien genutzt und ist mit einem Tiefpassfilter 1. Ordnung der Eckfrequenz  $f_n = 30$  gefiltert. Dies stellt einen besseren Kompromiss zwischen der Glattheit des Messsignals und einer zusätzlichen Phasenverzögerung für die Umschaltbedingungen dar als das Filter (5-7).

Die Solltrajektorien bzw. Sollwerte für die Ausgänge des Systems in Abbildung 5-5 und 5-6 gelten nur, während der jeweilige Ausgang auch aktiv geregelt wird. Aus diesem Grund müssen auch die Regler nur eingeschaltet sein, wenn sie gebraucht werden. Abbildung 5-7 zeigt, dass die Regler während der Inaktivität am Ausgang ihren letzten Wert behalten und nicht weiter ausgewertet werden. Da die Stellgröße während der Überführungen nicht in die Sättigung geht, bleiben die Regler- und die Sollwertwechsel erwartungsgemäß ohne Überschwinger.

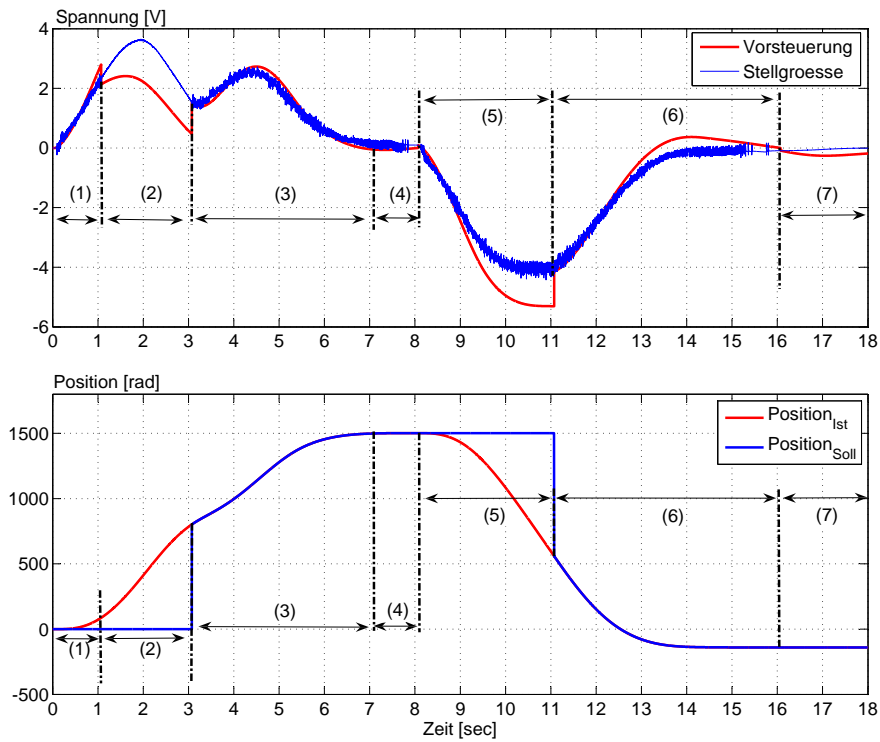


Abb. 5-5: Stellgröße und Position des Viertelfahrzeugprüfstandes ModulX für die Regelungssequenz aus Tabelle 5-2

Die Systemantworten des ModulX auf die Umschaltsequenz aus Tabelle 5-2 wurde bei freidrehendem Rad des Prüfstandes aufgenommen. Um die Robustheit der

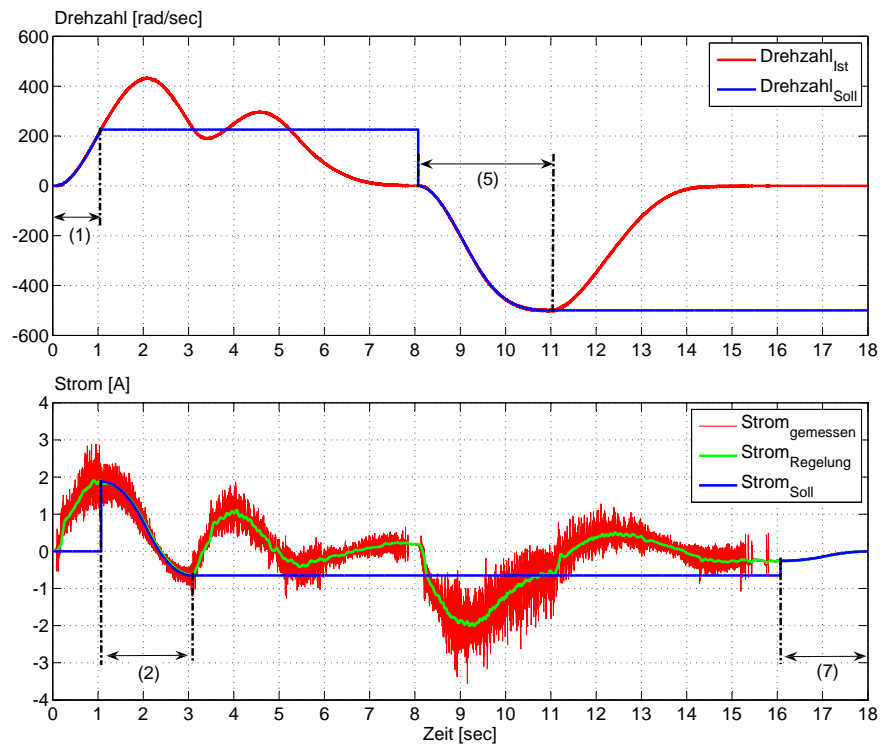


Abb. 5-6: Drehzahl und Strom des ModulX für die Regelungssequenz aus Tabelle 5-2 mit den Phasen, in denen die jeweilige Größe aktiv geregelt wird

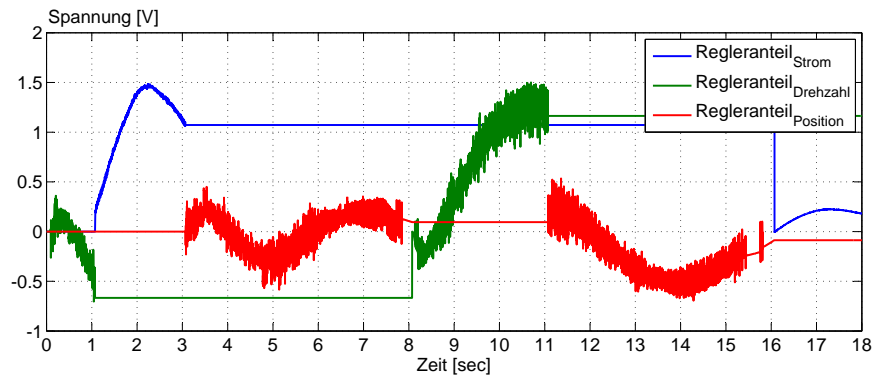


Abb. 5-7: Stellgrößenanteil der Regler beim ModulX für die Regelungssequenz aus Tabelle 5-2

Umschaltstruktur zu testen, wurde das Rad auf die nicht angetriebene Scheibe (Abb. 5-1) aufgesetzt, was als zusätzliche, unmodellerte Reibung und Trägheitsmoment in die Längsdynamik einfließt.

Die Systemantwort des ModulX mit Kontakt zur Scheibe auf die Reglerumschaltungen aus Tabelle 5-3 sind in Abbildung 5-8 zu sehen.

Tabelle 5-3: ModulX-Reglerumschaltungen mit Kontakt zur Scheibe

PHASE ZEIT [s]	REGLER	SOLLWERT	
(1)	0-2	Überführung - Stromregler	0,65 [A]
(2)	2-5	Überführung - Drehzahlregler	500 [rad/s]
(3)	5-7	Überführung - Stromregler	-0,65 [A]
(4)	7-12	Überführung - Positionsregler	242 [rad]
(5)	12-15	Überführung - Drehzahlregler	-500 [rad/s]
(6)	15-19	Überführung - Positionsregler	79 [rad]

Auffällig sind vor allem die starken Schwingungen der Stellgröße und des Stromes während der Drehzahl- und der Positionsregelung. Die Schwingungen sind auf die Unwucht des Reifens zurückzuführen, die sich bei vorhandenem Kontakt zur Scheibe sehr stark bemerkbar macht<sup>2</sup>.

Die erste Überführung zur Stromregelung  $t \in [0, 2]$  hat keinen Einfluss auf Drehzahl und Position des Rades. Das ist die Folge des erhöhten Anlaufmoments, das im gesamten Überführungsintervall nicht überwunden wird. Derselbe Effekt ist

<sup>2</sup> Bei höheren Geschwindigkeiten droht sie den Prüfstand zu beschädigen, weshalb größere Geschwindigkeiten vermieden wurden.



auch in kleinerem Ausmaß bei freidrehendem Rad im Zeitintervall  $t \in [16, 1, 18]$  zu beobachten.

Insgesamt erfüllt die Vorsteuerung weiterhin die Anforderungen sehr zufriedenstellend, da der Regleranteil an der Stellgröße nicht ansteigt. Das Modell des ModulX bildet die Unwucht des Reifens nicht ab, so dass die dadurch verursachten Schwingungen nicht bei der Berechnung der Vorsteuerung berücksichtigt werden können. Doch dies ist auch nicht unbedingt wünschenswert, denn, wie zu sehen ist, erfüllt das einfache Modell seine Aufgabe sehr gut, und die Ausregelung der Modellungenauigkeiten ist, wie vorgesehen, durch die Regler gegeben. Die Umschaltstruktur ist auch bei größeren Modellungenauigkeiten robust und sicher anwendbar. Bevor also die Modelltiefe beim Entwurf der Reglerumschaltung erhöht wird, sollte eine Kosten-Nutzen-Analyse durchgeführt werden, die klärt, ob der erhöhte Aufwand für ein komplexeres Modell notwendig ist.

## 5.2 Parallelroboter TriPlanar

Der TriPlanar ist ein Roboter mit Parallelkinematik, der am Lehrstuhl für Regelungstechnik und Mechatronik (früher Mechatronik Laboratorium Paderborn) der Universität Paderborn, basierend auf [72], entstanden ist. Parallelroboter haben im Unterschied zu seriellen Robotern eine geschlossene Geometrie, wie in Abbildung 5-9 zu sehen ist. Der Endeffektor<sup>3</sup> ist bei Parallelrobotern über unabhängige kinematische Ketten mit der Basis verbunden.

Der Parallelroboter hat konstruktionsbedingt eine höhere Steifigkeit als ein serieller Roboter, da sich unerwünschte Flexibilitäten der Gelenke nicht wie bei serieller Kinematik akkumulieren, sondern mitteln. Diese hohe Steifigkeit hat auch eine hohe Positioniergenauigkeit zu Folge, weil ihretwegen Verformungen der Glieder in viel kleinerem Maß auftreten. Ein weiterer Vorteil der parallelen Kinematik ist, dass sich die Aktoren bzw. Antriebe der kinematischen Glieder an der Basis befinden und nicht beschleunigt werden müssen, was in geringerer Trägheit der Glieder selbst und somit in hoher Positioniergeschwindigkeit resultiert. Andererseits hat die parallele Struktur auch Nachteile gegenüber der seriellen: So sind z. B. der Arbeitsraum kleiner und die das System beschreibenden mathematischen Gleichungen komplizierter. Außerdem sind Parallelkinematiken wesentlich häufiger und in größerer Anzahl mit Singularitäten behaftet. Eine gute Übersicht über parallele Roboter und deren Grundlagen ist unter anderem in [76] und [43] gegeben.

---

<sup>3</sup> Das letzte, ausführende Glied der kinematischen Kette (Werkzeug, Greifer etc.)

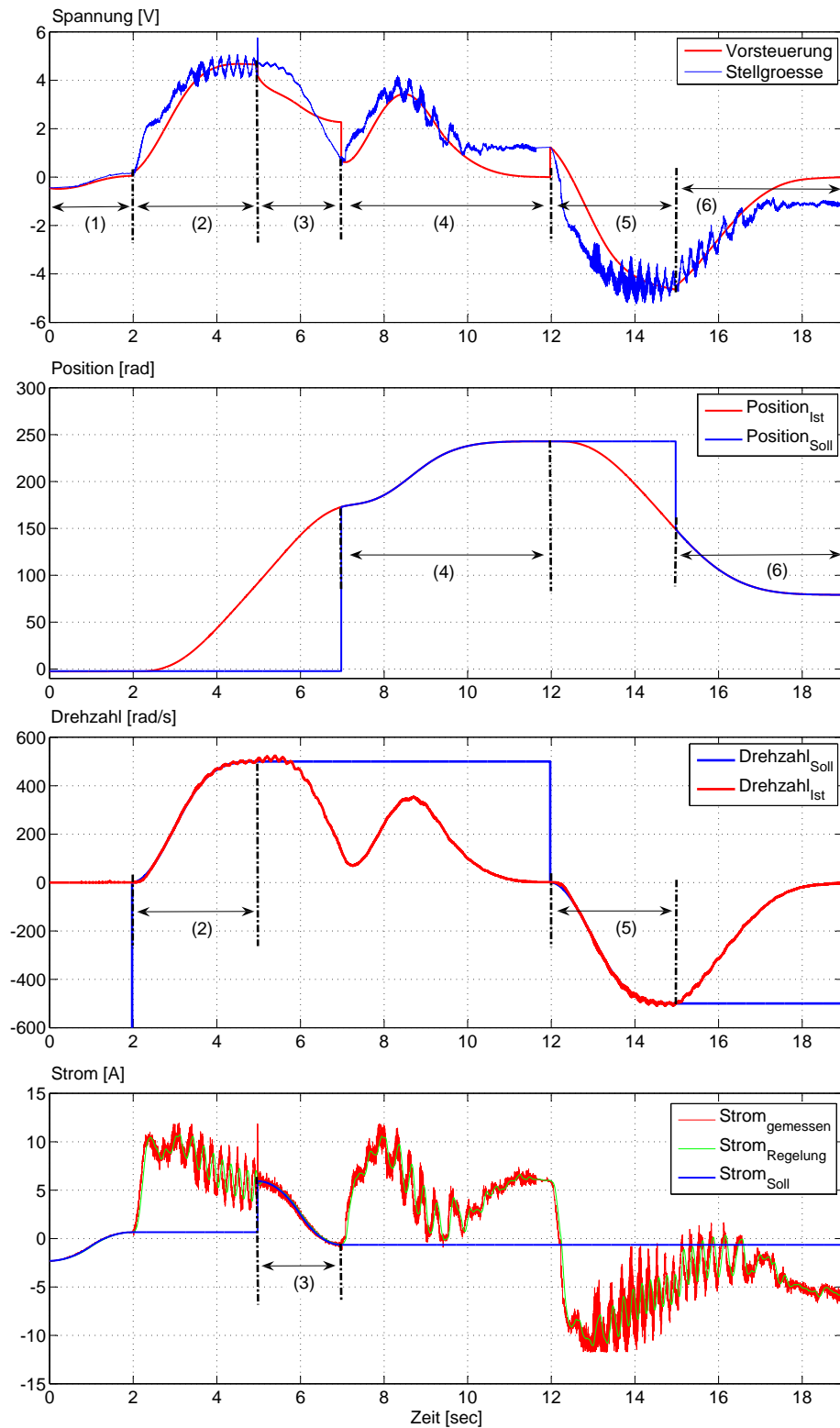


Abb. 5-8: Systemantwort des ModulX mit Kontakt zur Scheibe für die Regelsequenz aus Tabelle 5-3 mit den Phasen, in denen die jeweilige Regelgröße aktiv geregelt wird

Der TriPlanar selbst ist ein „Dreifüßer“ und besteht, wie in Abbildung 5-10 zu sehen, aus einer dreieckigen Plattform in der Funktion des Endeffektors, die mit

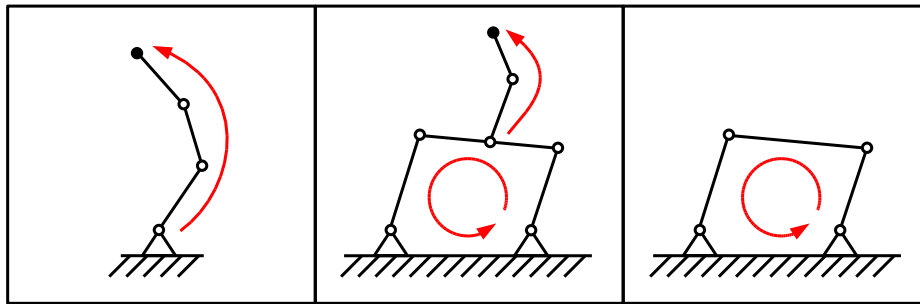


Abb. 5-9: Von links nach rechts: serielle Kinematik, hybride Kinematik, parallele Kinematik [81]

drei konstruktiv baugleichen Beinen drehbar verbunden ist. An den Endstücken der Beine sind mit Fußgelenken, bestehend aus Dreh- und Kardangeln, die Füße des TriPlanars angebracht. Dabei erfüllen das Dreh- und das Kardangeln in Kombination die Aufgabe eines Kugelgelenks.



Abb. 5-10: TriPlanar des Lehrstuhls für Regelungstechnik und Mechatronik (RtM) Paderborn

In den Füßen befinden sich die Läufer der planaren Hybridschrittmotoren, deren Stator die Platte unterhalb des TriPlanars ist. Abbildung 5-11 zeigt im Querschnitt ein Paar von Antriebsmodulen, von denen zwei pro Fuß eingebaut sind. Durch den mittels Luftdruck erzeugten 8 bis 15  $\mu\text{m}$  breiten Luftspalt wird die reibungsfreie Bewegung sichergestellt. Da Permanentmagneten in die Füße eingebaut sind, die das Eigengewicht des Aufbaus halten können, ist der TriPlanar in der Lage, auch kopfüber zu arbeiten.

Die Anordnung der Antriebsmodule und der Hall-Sensoren für die Richtungsmessung in einem TriPlanar-Fuß zeigt die Abbildung 5-12. Man sieht, dass für die

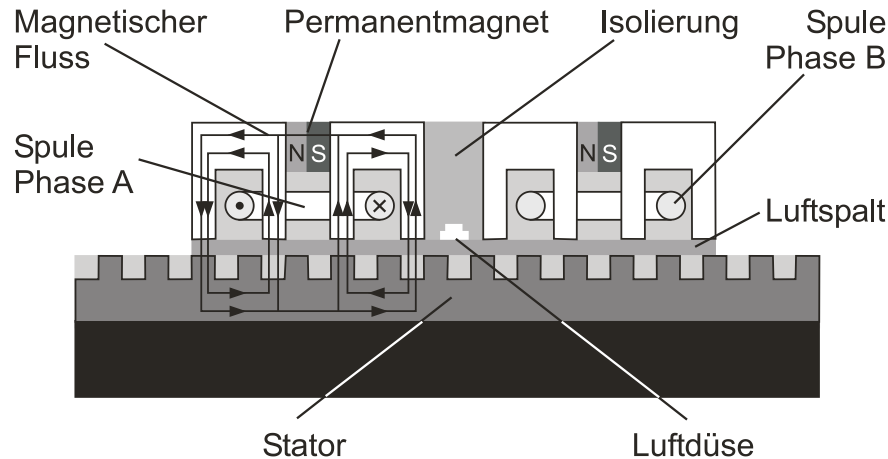


Abb. 5-11: Querschnitt eines Antriebsmoduls des TriPlanar [66]

Stellkraft in einer Richtung je ein Modulpaar zuständig ist und dass ein Fuß in zwei voneinander unabhängigen Richtungen bewegt werden kann. Damit ist der TriPlanar ein Mehrgrößensystem mit 6 Eingängen.

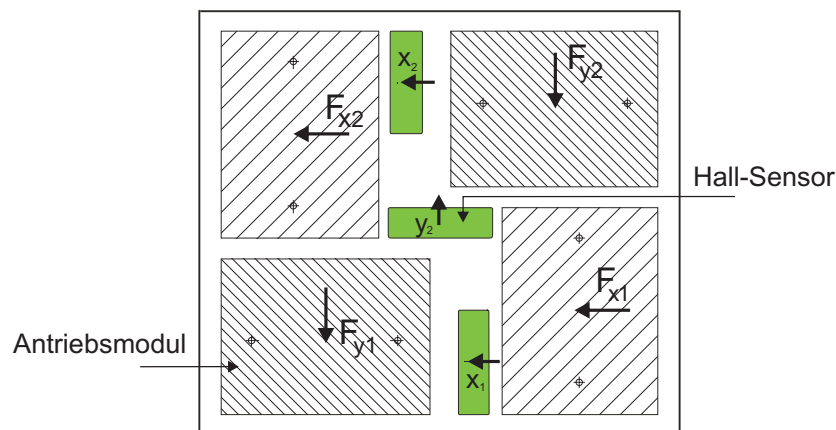


Abb. 5-12: Positionierung und Stellkräfte der Antriebsmodule und Hall-Sensor-Positionierung innerhalb eines Läufers [83]

Die Systemgleichungen im Zustandsraum bzw. die Dynamik des TriPlanar bauen auf Kinematikgleichungen auf, die in [81] erstellt und validiert wurden. Die direkte und die inverse Kinematik des TriPlanars beschreiben, wie in Abbildung 5-13 dargestellt, die Beziehung zwischen der Pose<sup>4</sup>  $\mathbf{q}_{TCP}$ , der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}_{TCP}$  und der Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{q}}_{TCP}$  des Endeffektors und den äquivalenten Größen der Füße des TriPlanars  $\mathbf{q}_{FP}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_{FP}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_{FP}$ , ohne die einwirkenden Kräfte zu betrachten. Der Endeffektor ist in diesem Fall der **T**ool-**C**entre-**P**oint (**TCP**), der die Zentrierspitze des auf der Arbeitsplattform befestigten Werkzeugs markiert.

<sup>4</sup> Die Pose stellt Position und Orientierung eines Körpers im Raum dar [23]

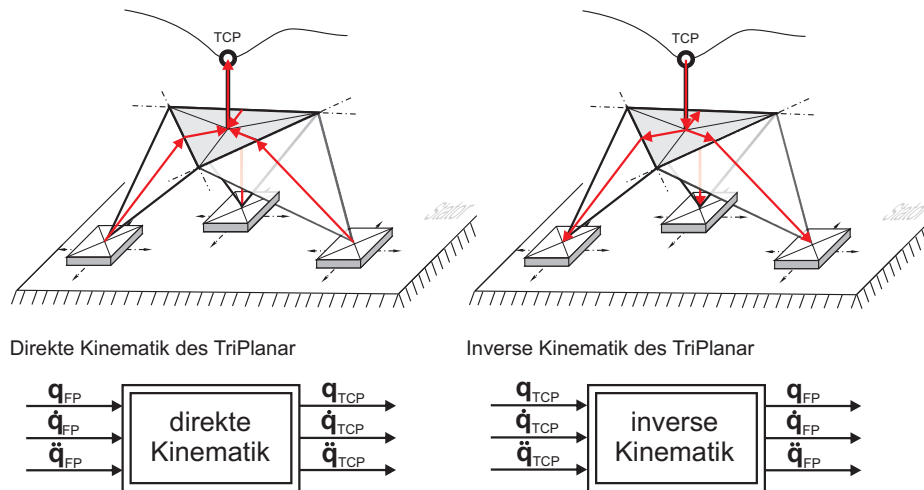


Abb. 5-13: Direkte und inverse Kinematik des TriPlanar [54]

Die Modellierung des TriPlanar ist in dem ortsfesten Inertialkoordinatensystem (ICS)  $N$  ausgeführt. Die Pose des TCP ist durch den Vektor

$$\mathbf{q}_{TCP} = [q_{TCP1}, q_{TCP2}, q_{TCP3}, q_{TCP4}, q_{TCP5}, q_{TCP6}]^T \quad (5-8)$$

beschrieben, der aus den generalisierten Koordinaten  $q_{TCPi}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , zusammengesetzt ist. Die ersten drei Koordinaten beschreiben mit dem Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{TCP} = q_{TCP1}\mathbf{n}_x + q_{TCP2}\mathbf{n}_y + q_{TCP3}\mathbf{n}_z \quad (5-9)$$

die Position des TCPs im Koordinatensystem  $N$ . Die Orientierung des TCPs ist durch die Winkel  $q_4 - q_6$  definiert, mit

$${}^N\mathbf{T}^D = \mathbf{T}_z(q_{TCP4})\mathbf{T}_y(q_{TCP5})\mathbf{T}_x(q_{TCP6}). \quad (5-10)$$

Die Drehreihenfolge der Drehtransformationsmatrizen  $\mathbf{T}_i$ ,  $i = x, y, z$ , für die Transformation in das ICS wurde dabei nach [24] ausgewählt und lautet Yaw-Pitch-Roll.

Die resultierenden nichtlinearen Gleichungen der inversen Kinematik nach [81] sind explizit, während die direkte Kinematik nur implizit gegeben ist und somit nur numerisch gelöst werden kann.

Die Dynamikgleichungen des TriPlanar wurden in [54] nach dem Formalismus von Kane und Levinson [61] aufgestellt. Dieser produziert im Vergleich zum Lagrange-Formalismus schlankere Gleichungen, die effizienter und schneller gelöst werden können, was bei Echtzeitanwendungen ein großer Vorteil ist. Abbildung 5-14 zeigt, dass die direkte Dynamik die Auswirkung des Aktorkräfte-Vektors  $\mathbf{F}_{FP}$  auf die Pose, deren Geschwindigkeit und Beschleunigung beschreibt, während die inverse Dynamik anzeigt, welcher Kraftvektor  $\mathbf{F}_{FP}$  benötigt wird, um eine bestimmte

Pose mit den dazugehörigen Ableitungen zu realisieren. Der Kraftvektor setzt sich dabei aus den planaren Antriebskräften der Füße zusammen:

$$\mathbf{F}_{FP} = [F_{Ax} \ F_{Ay} \ F_{Bx} \ F_{By} \ F_{Cx} \ F_{Cy}]^T. \quad (5-11)$$

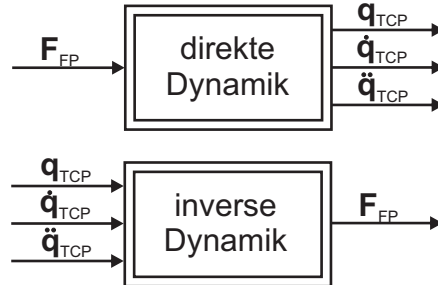


Abb. 5-14: Direkte und inverse Dynamik [54]

Wegen der Größe und der damit unausweichlichen Unübersichtlichkeit der resultierenden TriPlanar-Gleichungen wird hier auf Auflistung verzichtet und auf die bereits erwähnte Literatur, insbesondere [83], [81], [54], verwiesen.

Nach dem Aufstellen der Kinematik- und der Dynamik-Gleichungen kristallisiert sich die Pose  $\mathbf{q}_{TCP}$  als Kandidatin für den flachen Ausgang des TriPlanar heraus. Die direkte Kinematik beschreibt die Pose als eine Funktion des Eingangsvektors  $\mathbf{F}_{FP}$  und des Systemzustandes  $\mathbf{q}_{FP}$  des TriPlanar, womit die Bedingung (3-4) erfüllt ist. Durch die inverse Kinematik und Dynamik werden die Systemzustände und der Eingangsvektor als eine Funktion von  $\mathbf{q}_{TCP}$  und seinen ersten zwei Ableitungen wiedergegeben, was die Bedingungen (3-5) für den flachen Ausgang vorschreiben. Schließlich ist auch die Dimension des Vektors  $\mathbf{q}_{TCP}$  gleich der Dimension des Eingangsvektors  $\mathbf{F}_{FP}$ , was bedeutet, dass  $\mathbf{y}_f = \mathbf{q}_{TCP}$  ist.

Der TriPlanar selbst besitzt nur eine Steuerung, aber keine Regelung der TCP-Position. Der Steuerung unterlagert ist die Fußpunktregelung, die aus einem Zustandsregler mit Störgrößenaufschaltung und Vorsteuerung besteht [67] (Abbildung 5-15). Aus der vorgegebenen Trajektorie und den ersten beiden Ableitungen für den TCP werden die Fußpunktsolltrajektorien  $\mathbf{q}_{FPRef}$  mittels der inversen Kinematik berechnet. Die inverse Dynamik liefert dann die dazu passende Vorsteuerung  $\mathbf{F}_{FPff}$ .

Eine Regelung der Kontaktkraft am TCP ist beim TriPlanar wegen fehlender Sensorik nicht realisierbar, weshalb die in Abbildung 5-15 gezeigte Reglerstruktur benutzt wird, um die Kontaktkraft zu steuern. Dazu wird dem Fußpunktregler die aktuelle Position  $\mathbf{q}_{FPAct}$  als Sollwert  $\mathbf{q}_{FPRef}$  vorgegeben, so dass nur die Vorsteuerung  $\mathbf{F}_{FPff}$  aktiv ist. Die benötigten Fußkräfte werden über die inverse Dynamik aus dem zu erzielenden Kraftvektor für den TCP berechnet.

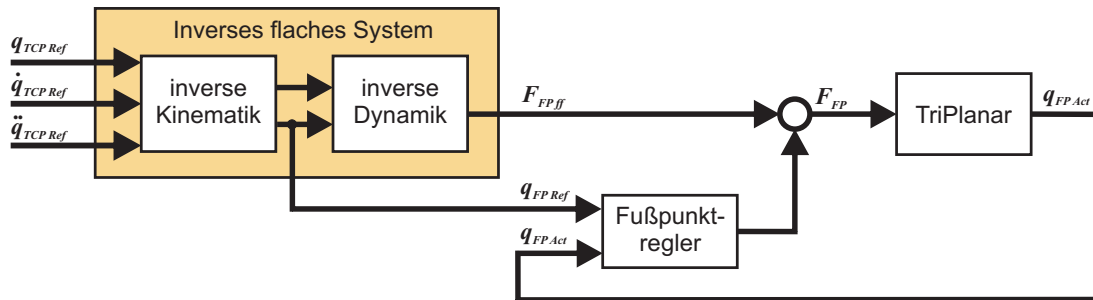


Abb. 5-15: Reglerstruktur des TriPlanar [83]

Die Berechnung der Kraftvektoren und das stoßfreie Umschalten für das Umfahren eines Hindernisses sind Gegenstand von [83] und werden dort ausführlich thematisiert. Die Grundidee ist in Abbildung 5-16 gezeigt. Diese zeigt ein Hindernis, das auf dem Pfad der Solltrajektorie in  $x$ -Richtung liegt. Nachdem das Hindernis über die Abweichung von der Solltrajektorie und erhöhte Reglerausgabewerte detektiert wurde, führen die berechneten Kraftvektoren das TCP zurück an die Solltrajektorie. Die Richtung der Kraftvektoren wird dabei mithilfe von Punkten an der Solltrajektorie festgelegt, die weiter vorn in Fahrtrichtung liegen. Diese Punkte der Solltrajektorie können für das TCP aber unerreichbar sein, da es vom unbekanntem Hindernis überdeckt wird. Deshalb wird laufend der Kraftvektor an einem neuen Punkt der Solltrajektorie ausgerichtet, der sich immer hinter dem vorherigen Ausrichtungspunkt befindet.

Diese Art der Vektorgenerierung ist nicht in jeder Kombination von Solltrajektorie und Hindernis in der Lage, das störende Objekt zu umfahren. Abbildung 5-17 zeigt, dass Hindernisse, die mit spitzem Winkel (kleiner als  $90^\circ$ ) eine gerade Solltrajektorie schneiden, nicht passierbar sind. Handelt es sich bei der Solltrajektorie nicht um eine Gerade, können aber auch spitzwinklige Barrieren umfahren werden, wie in Fall 4 dargestellt. Weiterführende Arbeiten, welche die Berechnung der Kraftvektoren optimieren und weniger Einschränkungen bezüglich der Hindernisform aufweisen, sind geplant.

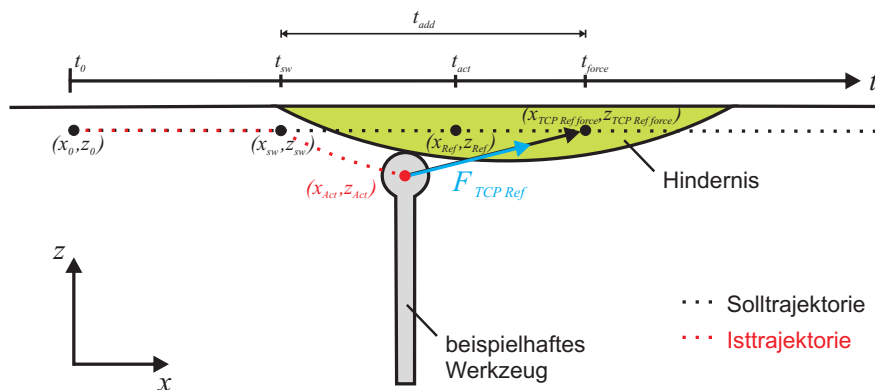


Abb. 5-16: Berechnung der Kraftvektoren beim Umfahren eines Hindernisses [83]

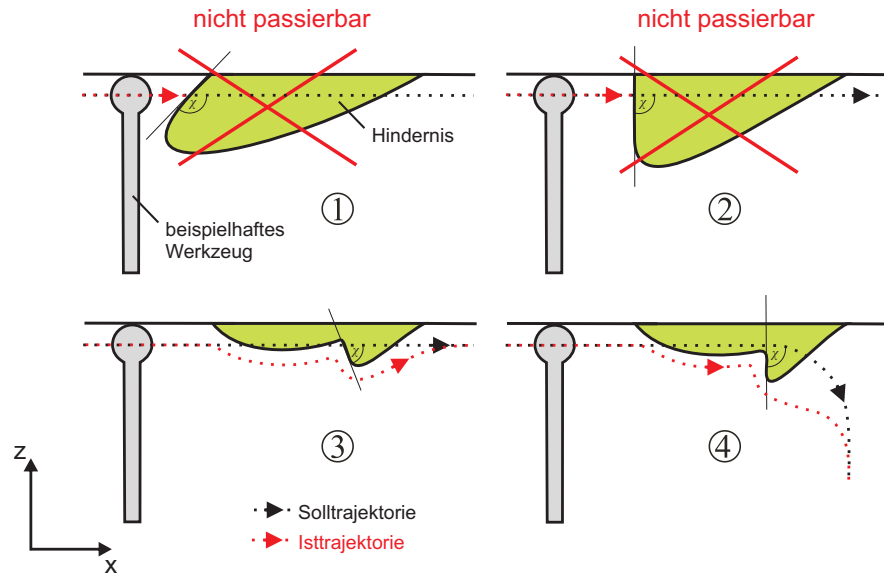


Abb. 5-17: Beispiele passierbarer und nicht-passierbarer Hindernisse [83]

Für die Solltrajektorien während der Umschaltung werden wie bisher Splines genügender Ordnung eingesetzt. Der TriPlanar wird anfangs immer mit der Positionsregelung betrieben; eine Umschaltung auf die Kraftregelung erfolgt erst, nachdem gegen ein Hindernis gefahren wurde und der TCP von der Solltrajektorie abweicht. Das Hindernis selbst soll mit einer definierten Kraft  $\mathbf{F}_{\text{Kontakt}} = 10$  abgetastet werden. Stimmen während der Kraftregelung dann der vorgegebene Kraftvektor und der Richtungsvektor der TCP-Bewegung überein, ist das Hindernis überwunden, und es wird wieder auf die Positionsregelung geschaltet.

Abbildung 5-18 zeigt das Umfahren eines Hindernisses seitens des TriPlanar-Tool-Centre-Points mit der vorgestellten Kraftregelung. Im oberen dreidimensionalen Plot erkennt man gut, wie der TCP die Form des auf der Solltrajektorie liegenden Objekts nachfährt. Das Hindernis selbst ist in Abbildung 5-19 zu sehen. Wegen der Form und der Positionierung des Objektes im Raum ist die Abweichung von der Solltrajektorie in der  $xy$ -Ebene sehr klein, d. h. die Kraftvektorberechnung versucht, die Solltrajektorie soweit wie möglich beizubehalten.

Die Umschaltung von der Trajektorienregelung auf die Kraftregelung kann, aufgrund eines fehlenden Kraftsensors am TCP, erst vorgenommen werden, wenn der Triplanar bereits mit dem Hindernis zusammengestoßen ist. Dadurch ergeben sich bei der Umschaltung Stöße im System, die nicht verhindert werden können. In weiteren Arbeiten ist geplant, den TCP des TriPlanar mit einem Kraftaufnehmer auszustatten. Dann sind Umschaltungen zwischen den Regelstrategien vor dem Aufprall auf das Hindernis möglich.



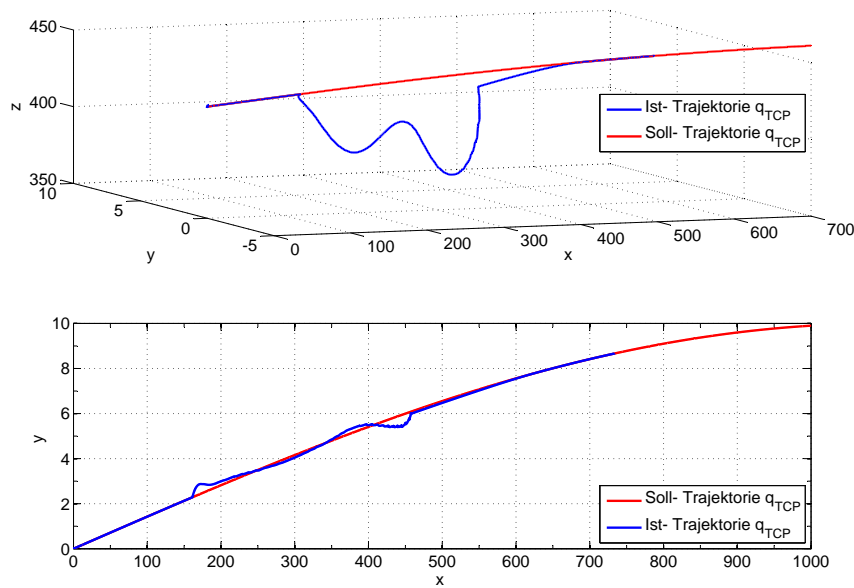


Abb. 5-18: Soll- und Isttrajektorie des Tool-Centre-Points beim Umfahren des Hindernisses 5-19 [83]

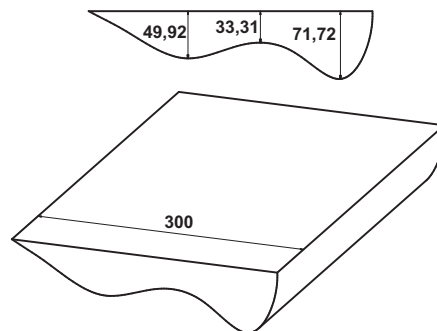


Abb. 5-19: Form des Hindernisses (Dimensionsangaben in mm) [83]

### 5.3 Fuel-Gas-Verdichter für Gas-und-Dampf-Kombikraftwerke

Bei GuD-Kombikraftwerken besteht die Aufgabe des sogenannten Fuel-Gas-Kompressors darin sicherzustellen, dass das Prozessgas, das in diesem Fall der primäre Energieträger der Energieumwandlung ist, stets mit konstantem Druck für den Verbrennungsprozess der Gasturbine bereitgestellt wird. Dabei muss der von der Gasturbine abgenommene Massenstrom bereitgestellt werden, während der Druck vom Turbinenhersteller vorgegeben wird und im Arbeitspunkt innerhalb der Grenzen von  $+1\%$  und  $-0\%$  und bei Arbeitspunktwechseln innerhalb von  $+4,5\%$  und  $-0\%$  konstant gehalten werden muss. Der abgenommene Massenstrom ist abhängig von der Last der Gasturbine, die während der Einspeisung der elektrischen Energie ins Netz dynamisch ist.

Der Kompressor ist eine Maschine mit rotierenden Schaufeln, die mit konstanter Drehzahl betrieben wird. Zusätzlich ist er mit nicht rotierenden Leitschaufeln, auch *inlet guide vanes* - IGVs genannt, ausgestattet, um im Kompressorkennfeld verschiedene Arbeitspunkte anfahren zu können. Die IGVs können in einem

Winkel von  $0^\circ$  bis  $110^\circ$  zur Strömungsrichtung des Gases verstellt werden, um dessen Rotationsdrall zu verändern. Der Arbeitspunkt des Verdichters ist durch den Massenstrom  $w_k$  durch den Verdichter und das Druckverhältnis  $p_d/p_s$  zwischen Austritts- und Saugdruck des Kompressors definiert. Im Kompressorkennfeld, wie in Abbildung 5-20 dargestellt, wird üblicherweise anstatt des Druckverhältnisses  $p_d/p_s$  die spezifische zugeführte Energie  $h$  (eng.: *head*) über dem Massenstrom aufgetragen, die zusätzlich zum Druckverhältnis auch den Temperaturanstieg während der Verdichtung und die thermodynamischen Eigenschaften des Prozessgases berücksichtigt.

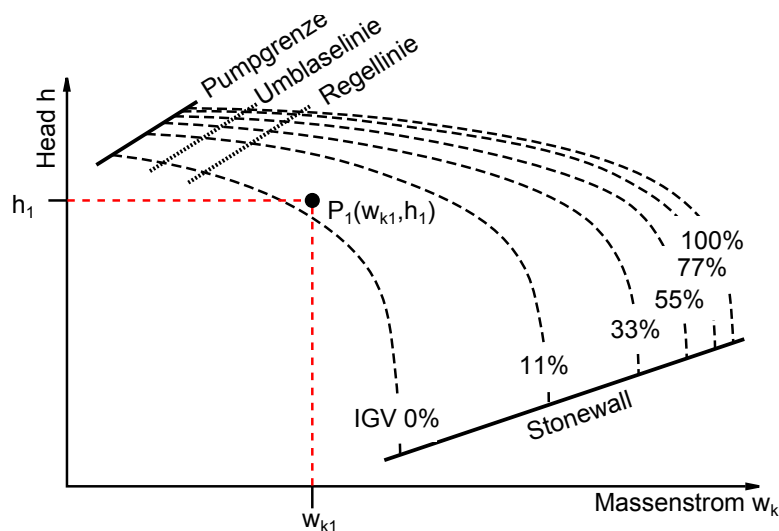


Abb. 5-20: Beispiel eines Kompressorkennfeldes

Der Arbeitsbereich des Verdichters ergibt sich durch die Verstellmöglichkeit der Leitschaufeln und wird durch zwei physikalische Phänomene, die Pumpgrenze und die Stonewall, begrenzt. Die Stonewall begrenzt den Arbeitsbereich des Verdichters in Richtung steigender Massenströme, da es bei jeder IGK-Stellung einen Punkt gibt, ab dem der Massenstrom nicht mehr durch Absenken des Strömungswiderstandes auf der Austrittsseite des Kompressors erhöht werden kann. Das tritt genau dann auf, wenn das Gas Schallgeschwindigkeit erreicht und nicht weiter beschleunigt werden kann. Das Pumpen begrenzt das Arbeitsfeld in Richtung niedriger Massenströme, wo ab einem bestimmten Strömungswiderstand eine weitere Erhöhung des Widerstands einen Rückfluss des Gases durch den Kompressor bewirkt. Während der längerfristige Betrieb des Verdichters an der Stonewall nicht empfehlenswert ist und auf Dauer durch hervorgerufene Vibrationen mechanische Schäden an Schaufeln verursachen kann, ist das Pumpen gefährlicher, denn je nach Verdichterart reichen relativ wenige Pumpstöße aus, um Schaufeln abzureißen und einen großen Schaden an der Maschine und im Prozess zu verursachen.

Abbildung 5-21 zeigt vereinfacht das System zur Versorgung der Gasturbine mit Prozessgas. Das Gas hat vor dem Saugdruckregelventil den Druck  $p_0$  und die Temperatur  $\theta_0$ . Der Gasmassenstrom  $w_0$  wird durch eine Pipeline dem Kompressor über das Saugdruckregelventil zugeführt, das den Saugdruck  $p_s$  auf den maximal zulässigen Saugdruck  $p_{smax}$  begrenzt. Der Kompressor läuft mit konstanter Drehzahl, verdichtet das Gas auf den Austrittsdruck  $p_d$  und befördert den Massenstrom  $w_k$  zur Austrittsseite. Dabei steigt die Gastemperatur von der Eintrittstemperatur  $\theta_s$  auf die Austrittstemperatur  $\theta_k$ . Dem Kompressor nachgeschaltet ist ein Kühler (4), der die während der Verdichtung entstandene Wärme dem Prozess wieder entzieht. Dieser ist so ausgelegt, dass die Temperatur auf der Austrittsseite des Kompressors  $\theta_d$  unabhängig von seinem Betriebspunkt konstant bleibt. Die eingebauten Leitschaufeln ermöglichen es, den Kompressor im Teillastbetrieb zu betreiben bzw. im Kompressorkennfeld zu verfahren. Zwischen der Gasturbine und dem Kompressor befindet sich eine Rückschlagklappe, die ein Zurückströmen des Gases zum Kompressor verhindert, wenn mehrere Kompressoren an eine Gasturbine angeschlossen sind. Durch die Gasturbine wird der Massenstrom  $w_t$  abgenommen, während der Turbineneingangsdruck  $p_t$  konstant gehalten werden soll.

Des weiteren befindet sich um den Kompressor eine Umblaseleitung, mit der einerseits der Kompressor vor dem Pumpen geschützt wird und andererseits extreme Teillastbereiche der Gasturbine gefahren werden können, bei denen der abgenommene Massenstrom der Gasturbine  $w_t$  links von der Pumpengrenze liegt und somit kleiner als der vom Kompressor geförderte Massenstrom  $w_k$  ist. In diesen Fällen wird das Umblaseventil geöffnet und der Massenstrom  $w_u$  umgeblasen, so dass der Gasturbine nur der Massenstrom  $w_h = w_k - w_u$  zugeführt wird. Für den Kompressor wird der Strömungswiderstand durch das Umblasen unter den Strömungswiderstand gesenkt, der von seinem Verbraucher zu dieser Zeit gegeben ist. Dies hat zur Folge, dass der Kompressor mehr Massenstrom befördert, als von seinem Verbraucher abgenommen wird, und damit kann der Arbeitspunkt des Kompressors in seinem Kennfeld rechts von der Pumpengrenze gehalten werden.

Die Regelung des Systems erfolgt dezentral mit drei PI-Reglern mit den Stellgrößen  $u_s$  (Saugdruckregelventil),  $u_r$  (Umblaseventil) und  $u_{igv}$  (Leitschaufeln). Alle Steller sind sowohl in der Stellgröße als auch in der Stellrate begrenzt. Mit dem Saugdruckregelventil wird der Saugdruck  $p_s$  geregelt bzw. auf den maximal zulässigen Wert begrenzt. Die Leitschaufeln regeln den Austrittsdruck  $p_d$  auf den konstanten vorgegebenen Wert ein. Mit dem Umblaseventil wird der Pumpschutz für den Kompressor realisiert. In Abbildung 5-20 sind rechts von der Pumpengrenze die Umblaselinie und die Regellinie des Pumpschutzreglers eingezeichnet. Die Umblaselinie befindet sich auf halber Distanz zwischen der Pumpengrenze und der Regellinie. Kommt der Kompressor mit seinem Arbeitspunkt in den Bereich links von der Regellinie, wird der Pumpschutzregler aktiv und öffnet, wenn nö-

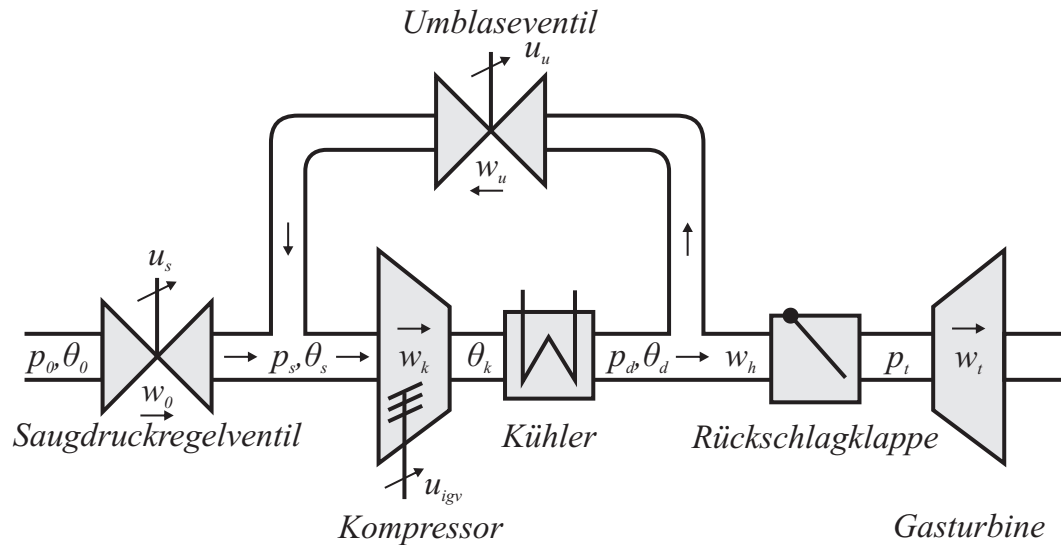


Abb. 5-21: Vereinfachte Darstellung des Systems zur Versorgung der Gasturbine mit Prozessgas

tig, geregelt das Umblaseventil. Damit wird der Arbeitspunkt des Kompressors auf die Regellinie zurückgefahren und ein weiteres „Wandern“ des Arbeitspunktes in Richtung der Pumpgrenze verhindert. Sind jedoch solche Prozessbedingungen gegeben, dass sich der Arbeitspunkt trotz des Eingriffs des Pumpschutzreglers weiter in Richtung Pumpgrenze bewegt, wird der Pumpschutzregler an der Umblaselinie überbrückt und das Ventil mittels der Schnellöffnungsfunktion geöffnet. Mit der Schnellöffnung wird das Pumpen verhindert, doch da damit auch der Gasturbineneintrittsdruck und der Massenstrom stark einbrechen, hat dies die Abschaltung der Turbine zur Folge. Das Erreichen der Umblaselinie sollte deshalb möglichst vermieden werden, und das Schnellöffnen des Ventils sollte nur als äußerstes Mittel zum Einsatz kommen, um das Pumpen des Kompressors zu verhindern.

Beim Fuel-Gas-System ist regelungstechnisch vor allem der Lastabwurf der Gasturbine eine Herausforderung. Beim Lastabwurf wird die Massenstromabnahme der Turbine in einer Sekunde vom Istmassenstrom auf 30 % des Nennmassenstroms gesenkt. Für den Kompressoraustrittsdruck  $p_d$  gilt dabei weiterhin die maximal zulässige Abweichung von +4,5 % und -0 %. Wird dieser Druck nicht innerhalb der Toleranzgrenzen gehalten, hat dies auch eine unzulässige Abweichung des Turbineneingangsdrucks zur Folge, weshalb die Turbine abgeschaltet und der Prozess der Stromerzeugung unter Umständen für mehrere Stunden angehalten wird, was für den Betreiber deutliche finanzielle Einbußen nach sich zieht. Typisch für den Lastabwurf ist, dass die Steuerung der Gasturbine den Lastabwurf mit einem binären Signal ankündigt.

Die Abbildungen 5-22 und 5-23 zeigen in der Simulation das Verhalten des Fuel-Gas-Systems bei einem Lastabwurf der Turbine vom Nennmassenstrom  $w_{tmax}$  auf 30 %  $w_{tmax}$ . Das Modell des Fuel-Gas-Systems und der Regler sind verifiziert und

bilden den aktuellen Stand der Technik ab. Sie stammen von einem namhaften Kompressor- und Turbinen-Hersteller. Die Regelung ist mit der schnellen Dynamik des Lastabwurfs überfordert und schafft es nicht,  $p_d$  bzw.  $p_t$  innerhalb der zulässigen Toleranzen zu halten. Der Druck  $p_t$  weicht bis zu +18 % und  $-3,5$  % vom vorgegebenen Wert ab. Die Stellgröße der IGVs und auch kurzzeitig die des Umblaseventils kommen während des Lastabwurfs in die Stellgrößenbegrenzung, sind aber mit einem CAW ausgestattet, so dass zumindest das weitere Aufintegrieren der Stellgröße in der Sättigung verhindert wird.

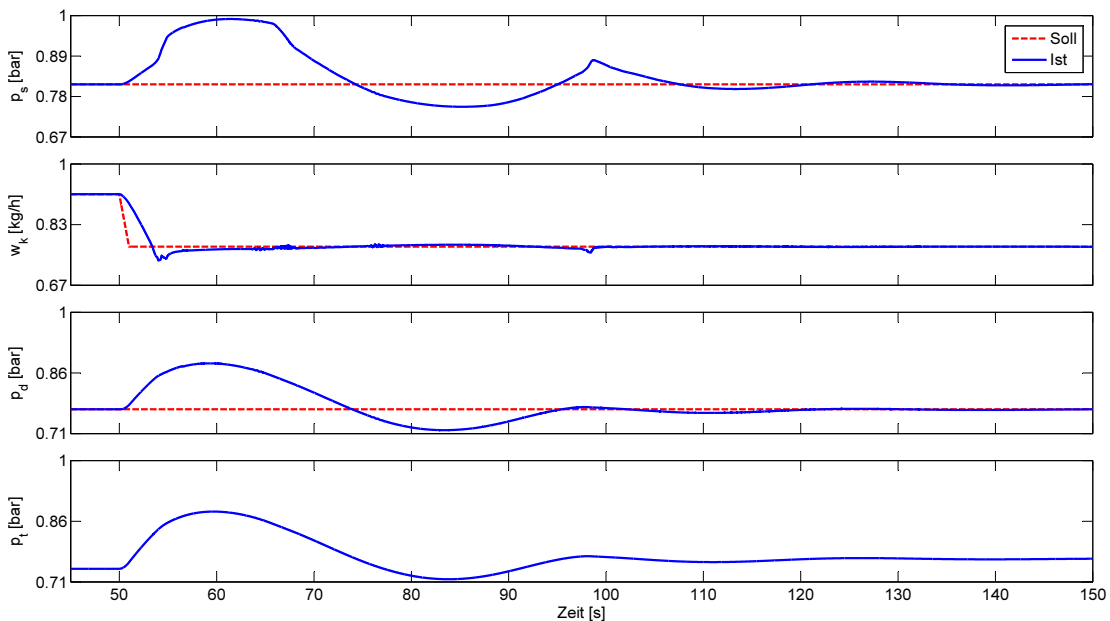


Abb. 5-22: Systemantwort auf Lastabwurf der Gasturbine vom Nennmassenstrom  $w_{tmax}$  auf 30 %  $w_{tmax}$

Sehr deutlich wird die Unzulänglichkeit der Regelung sichtbar, wenn der Lastabwurf im Kennfeld des Kompressors dargestellt wird. Abbildung 5-24 zeigt das Wandern des Kompressor-Arbeitspunktes im Kennfeld während des Lastabwurfs aus Abbildung 5-22. Die ersten 5 Sekunden nach dem Lastabwurf sind durch Punkte auf der Ist-Trajektorie gekennzeichnet. Nicht nur, dass der Arbeitspunkt des Kompressors „wild“ durch das Kennfeld wandert – nach etwas mehr als 3 Sekunden kommt er auch auf die Umblaselinie. Ab diesem Zeitpunkt würde eigentlich das Umblaseventil voll öffnen und deshalb der Gasturbinendruck und der Massenstrom stark einbrechen. In der Simulation wurde aber das Schnellöffnen an der Umblaselinie deaktiviert, damit der Eingriff der Regelung unverfälscht dargestellt wird. Um die gegebenen Toleranzen beim Lastabwurf einzuhalten, wird nach heutigem Stand der Technik über ein zusätzliches Abblaseventil auf der Austrittsseite des Kompressors ein Teil des geförderten Massenstroms während des Lastabwurfs in die Atmosphäre abgeblasen. Nachteile dieser Vorgehensweise sind, dass beim Abblasen Gas in die Umwelt gelangt und dass andererseits die-

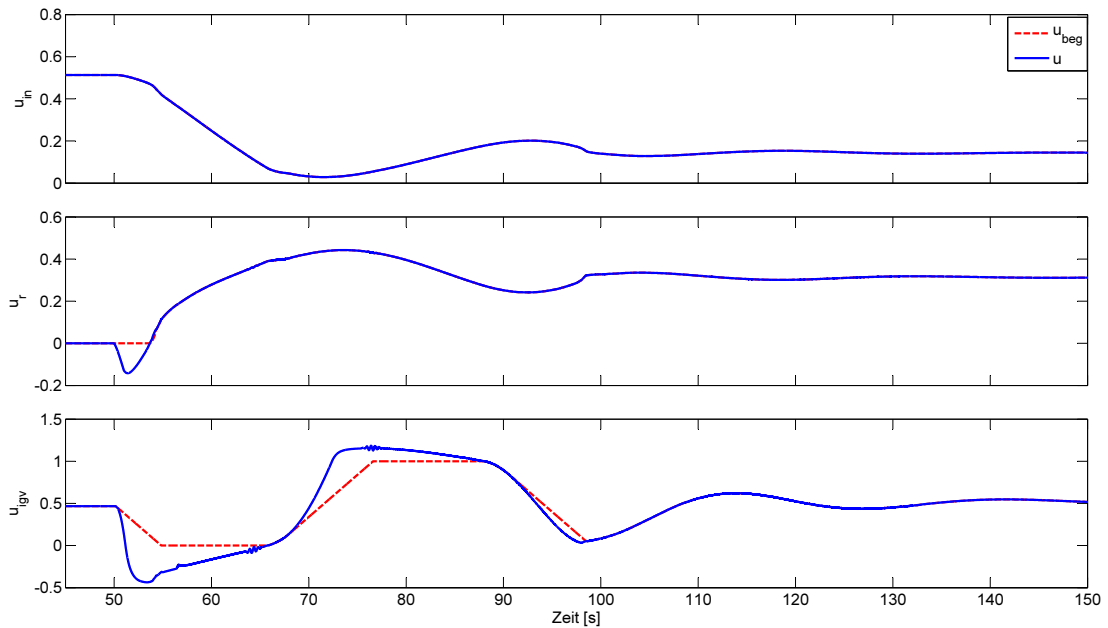


Abb. 5-23: Stellgrößen der Regler beim Lastabwurf der Gasturbine vom Nennmassenstrom  $w_{tmax}$  auf 30 %  $w_{tmax}$

se Methode unzuverlässig funktioniert, da es trotz dem Abblasen zu Einbrüchen des Gasturbinendrucks kommen kann. Der Grund dafür ist, dass das Abblaseventil gesteuert gefahren wird und dadurch auch zu viel Massenstrom abgeblasen werden kann, worauf der Gasturbinendruck unzulässig stark einbricht.

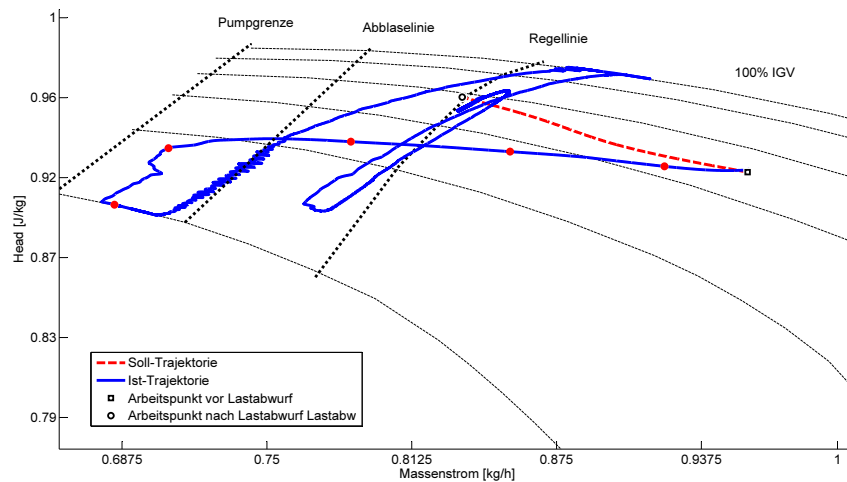


Abb. 5-24: Arbeitspunkt des Kompressors im Kennfeld beim Lastabwurf der Gasturbine vom Nennmassenstrom  $w_{tmax}$  auf 30 %  $w_{tmax}$

Da beim Lastabwurf der Verlauf des Massenstroms  $w_t$  genau beschrieben ist und ein binäres Signal den Lastabwurf „ankündigt“, bietet es sich bei diesen Arbeitspunktwechseln geradezu an, die Methode der flachheitsbasierten Reglerumschaltung anzuwenden, um ein besseres Systemverhalten zu erzielen. Mit den berechne-

ten Vorsteuer- und Führungsgrößentrajektorien sollte es möglich sein, den Druck  $p_t$  innerhalb der Toleranzgrenzen zu halten und ein Abschalten der Gasturbine zu verhindern. Voraussetzung für die Berechnung der Trajektorien ist ein flaches Modell des Systems, das im Folgenden vorgestellt wird.

Für die Modellierung werden die Rohrleitungen als Druckspeicher annähernd idealer Gase betrachtet, so dass die Differentialgleichungen

$$\dot{p}_s = \frac{\theta_s}{C_1} (w_0 + w_u - w_k), \quad (5-12a)$$

$$\dot{p}_d = \frac{\theta_d}{C_2} (w_k - w_u - w_h), \quad (5-12b)$$

$$\dot{p}_t = \frac{\theta_d}{C_3} (w_h - w_t), \quad (5-12c)$$

$$\dot{w}_h = \frac{1}{C_4} (p_d - p_t) \quad (5-12d)$$

die Systemdynamik vor und hinter dem Kompressor und vor der Gasturbine beschreiben. Dabei sind  $C_1$  und  $C_2$  jeweils die Fluidkapazitäten der Rohrleitungen am Kompressorein- und -austritt sowie  $C_3$  die Fluidkapazität am Gasturbineneintritt. Der Parameter  $C_4$  ist die Rohrleitungsträgheit zwischen Kompressorausstritt und Gasturbineneintritt. Da die Gastemperatur am Kompressorausstritt  $\theta_d$  wegen des Kühlers immer konstant ist und die Temperatur des Gases aus der Pipeline vor dem Saugdruckregelventil  $\theta_0$  immer gemessen und wegen ihrer langsamen Dynamik als konstant angenommen werden kann, gilt  $\theta_d = T_d = const.$  und  $\theta_0 = T_0 = const.$ , so dass die Gastemperatur am Kompressoreintritt mittels der Gleichung

$$\theta_s = \frac{T_0 w_0 + T_d w_u}{w_0 + w_u} \quad (5-13)$$

beschrieben werden kann. Die Dynamik der Rückschlagklappe wird bei der Modellierung vernachlässigt, da diese während des Betriebs immer geöffnet ist und in erster Näherung durch ein Rohrleitungselement approximiert werden kann.

Die Massenströme  $w_0$  und  $w_u$  werden über die Öffnungswinkel der Ventile bzw. die Stellgrößen  $u_s$  und  $u_u$  beeinflusst:

$$w_0 = k_{vs} u_s \operatorname{sign}(p_0 - p_s) \sqrt{p_0 - p_s}, \quad (5-14a)$$

$$w_u = k_{vu} u_u \operatorname{sign}(p_d - p_s) \sqrt{p_d - p_s}, \quad (5-14b)$$

wobei  $k_{vs}$  und  $k_{vu}$  die ventilspezifischen Durchflusskoeffizienten bezeichnen, die ein Maß für den erzielbaren Durchsatz des Gases durch die Ventile darstellen.

Der Kompressor selbst wird mit der Gleichung für den Massenstrom durch den Kompressor

$$\dot{w}_k = \frac{p_s}{C_5} (1 - \Phi(h, \theta_s)), \quad (5-15a)$$

$$h = f(w_k, u_{igv}) \quad (5-15b)$$

modelliert, wobei die Parameter  $C_5$  die Rohrleitungsträgheit zwischen Kompressoreintritt und -austritt ist. Der Head  $h$  wird durch das Kompressorkennfeld beschrieben, das bei jedem Verdichter schon früh in der Konstruktionsphase bestimmt wird, da es für die thermodynamische Auslegung der Maschine unumgänglich ist.

Der Piplinedruck  $p_0$  und der abgenommene Massenstrom an der Gasturbine  $w_t$  sind immer als Messgrößen verfügbar. Während  $p_0$  wegen seiner langsamen Dynamik als konstant angenommen werden kann, hat  $w_t$  beim Lastabwurf in der Zeit  $t_L$  bis  $t_L + 1$  eine definierte Solltrajektorie  $w_{tL}^*(t)$ , da der Lastabwurf immer innerhalb einer Sekunde eine Verringerung der Gasabnahme seitens der Gasturbine zur Folge hat und zwar vom Istmassenstrom zum Zeitpunkt des Lastabwurfs  $w_{tL}^*(t_L) = w_t(t_L)$  auf 30% des Nennmassenstroms der Gasturbine  $w_{tN}$ , d. h.  $w_{tL}^*(t_L + 1) = 0,3 w_{tN}$ . Damit kann  $w_t$  als eine bekannte Störgröße des Systems angenommen werden.

Mit den obigen Annahmen ist das mittels der Gleichungen (5-12) bis (5-13) beschriebene Fuel-Gas-System flach mit dem flachen Ausgang des Systems  $\mathbf{y}_f = [p_s \ w_k \ p_t]^T$ . Dies kann durch das Einsetzen von  $\mathbf{y}_f$  und seiner Ableitungen in die Gleichungen des Fuel-Gas-Systems leicht überprüft werden. Damit die Berechnung von Vorsteuerungstrajektorien aus den Trajektorien des flachen Ausgangs zur Laufzeit möglich ist, muss der explizite Ausdruck  $u_{igv} = \hat{f}(w_k, h)$  für das „inverse“ Kennfeld 5-15b aufgestellt werden. Die Approximation des Kennfelds gelingt mit der Arcustangens-Funktion

$$u_{igv} = a_1 \arctan \left( a_2 + \left( a_3 \frac{h}{w_k} - a_4 \right) (a_5 w_k + a_6) \right) + a_7 \quad (5-16)$$

zufriedenstellend, mit den Approximationsparametern  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ . Abbildung 5-25 zeigt zum Vergleich das Referenzkennfeld und die Head-Massenstrom-Projektion der Gleichung 5-16. Der Fehler der Approximation ist in jedem beliebigen Punkt im Kennfeld kleiner als 5 %.

Mit der analytischen Beschreibung des Kennfelds können nun für den kompletten Stellgrößenvektor  $\mathbf{u} = [u_s \ u_u \ u_{igv}]^T$  Vorsteuerungen zur Laufzeit aus den Solltrajektorien des flachen Ausgangs berechnet werden. Für die Solltrajektorien werden wieder Splines ausreichender Ordnung gewählt. Beim Lastabwurf sollen der Kompressoreintritts- und der -austrittsdruck während des Lastabwurfs konstant



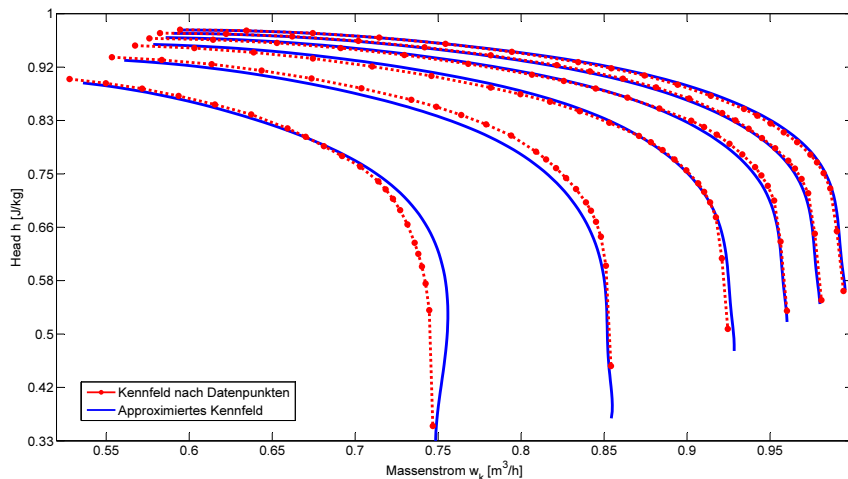


Abb. 5-25: Kompressorkennfeld und dessen Approximation mit der Gleichung (5-16)

bleiben, so dass sich die Randbedingungen für die Solltrajektorien aus folgenden Randbedingungen des Systems ergeben:

$$\begin{aligned}
 p_s(t_L) &= p_{sL}, & \dot{p}_s(t_L) &= \dot{p}_{sL}, \\
 \overset{(i)}{w}_k(t_L) &= \overset{(i)}{w}_{kL}, & \overset{(i)}{p}_t(t_L) &= \overset{(i)}{p}_{dL}, \quad i = 0, 1, \\
 p_s(t_L + 1) &= p_{sL}, & \dot{p}_s(t_L + 1) &= 0, \\
 w_k(t_L + 1) &= w_{kL1}, & \dot{w}_k(t_L + 1) &= 0, \\
 p_t(t_L + 1) &= p_{dL}, & \dot{p}_t(t_L + 1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5-17}$$

Zu beachten ist, dass der Kompressormassenstrom  $w_k$  nach dem Lastabwurf nicht 30 % des Gasturbinennennmassenstroms beträgt, der eigentlich von der Gasturbine gefordert wird. Der Grund dafür ist, dass dieser Massenstrom für den Kompressor zu klein ist und nicht im Kennfeld liegt, weshalb der Kompressor einen höheren Massenstrom befördern und einen Teil davon umblasen muss.

Die Abbildungen 5-26 und 5-27 zeigen die Systemantwort auf den schon gezeigten Lastabwurf der Gasturbine, dieses Mal jedoch mit der flachheitsbasierten Vorsteuerung. Die Abweichungen der Systemgrößen von den Vorgaben sind nun deutlich reduziert. Die Abweichung des Gasturbinendrucks bleibt unter 1 %, was sogar innerhalb der Toleranz für den konstanten Betrieb in einem Arbeitspunkt liegt. Während beim Lastabwurf ohne Vorsteuerung die Einschwingzeit des Systems über 50 Sekunden liegt, ist beim Lastabwurf mit Vorsteuerung das System nach 5 Sekunden praktisch im Arbeitspunkt. Auch bei den Stellgrößen ist ein deutlich ruhigerer Verlauf zu beobachten; sie sind zwar in den ersten zwei Sekunden nach dem Lastabwurf in der Stellratenbegrenzung, bleiben aber innerhalb der Stellgrößenbegrenzungen. In Abbildung 5-27 sieht man auch, dass die Vorsteuertrajektorien nicht nur dynamisch, sondern auch „statisch“, also im Arbeitspunkt nach dem Lastabwurf, von den tatsächlichen Stellgrößen abweichen.

Für das Systemmodell zur Berechnung der Trajektorien wurde bewusst ein „ungenaueres“ Kompressorkennfeld genommen, d. h. es weicht von dem Kennfeld des verifizierten Modells ab, mit dem die Lastabwürfe modelliert wurden. Diese Abweichung wurde mitberücksichtigt, da das Kennfeld des gebauten Kompressors immer in einem gewissen Rahmen von dem berechneten Kennfeld abweicht und die Kompressorhersteller oftmals nicht die Möglichkeit haben, das Kennfeld des fertiggestellten Kompressors aufzunehmen. Auch die eingeschlossenen Volumina der Rohrleitungen zwischen Kompressor und Gasturbine sind bei den Modellen unterschiedlich, da in der Praxis die Kompressorhersteller zwar ein gewisses minimales Volumen zwischen Kompressor und Gasturbine vorschreiben, aber die Leitungen nicht selbst auslegen, so dass ihnen das eingeschlossene Volumen nach dem Kompressor sehr oft nicht bekannt ist.

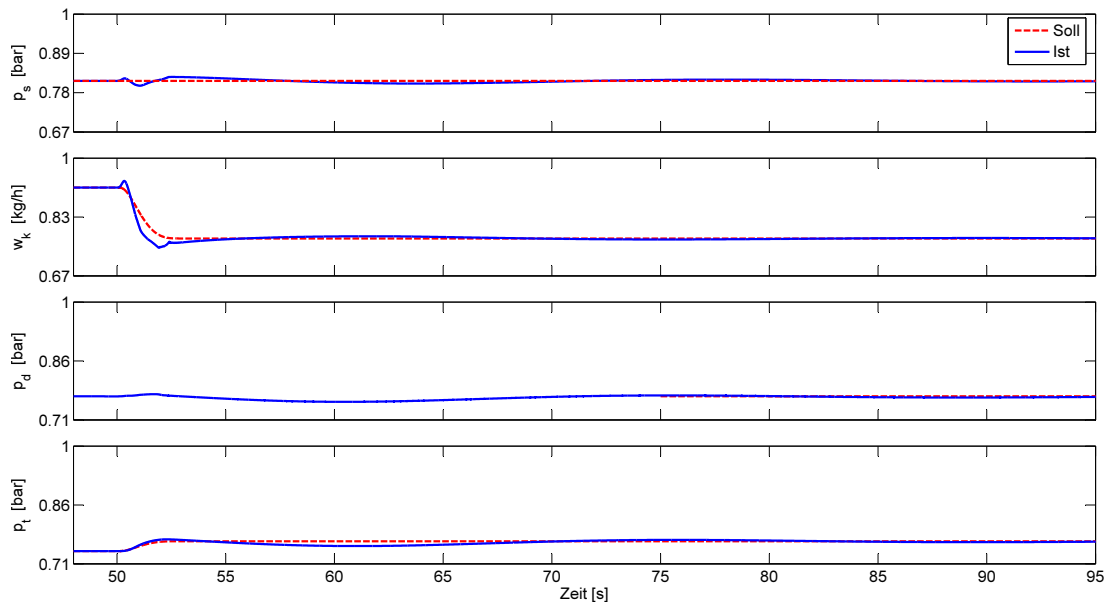


Abb. 5-26: Systemantwort auf Lastabwurf der Gasturbine vom Nennmassenstrom  $w_{tmax}$  auf 30 %  $w_{tmax}$  mit flachheitsbasierter Vorsteuerung

Abbildung 5-28 zeigt den Lastabwurf mit Vorsteuerung im Kennfeld des Kompressors. Die Trajektorie des Arbeitspunkts ist sehr ruhig und sehr nah an der gewünschten Solltrajektorie. Wo der Regler allein nicht verhindern konnte, dass der Arbeitspunkt über die Abblaselinie und nah an die Pumpgrenze kommt, werden mit der Vorsteuerung beim Lastabwurf die strengen Anforderungen an die Regelgüte eingehalten. Bei Fuel-Gas-Systemen bringt die Methode der flachheitsbasierten Umschaltung eine signifikante Verbesserung des Systemverhaltens bei lastabwurfsbedingten Arbeitspunktwechseln. Die praktische Anwendbarkeit der Methode wird auch vor allem dadurch sichergestellt, dass einerseits die Trajektorienberechnung online und für den aktuellen Ist- und Soll-Arbeitspunkt berechnet wird, andererseits die Berechnung selbst echtzeitfähig ist. Die Vorsteuerung kann auch bei anderen Arbeitspunktwechseln benutzt werden, um das Systemverhalten

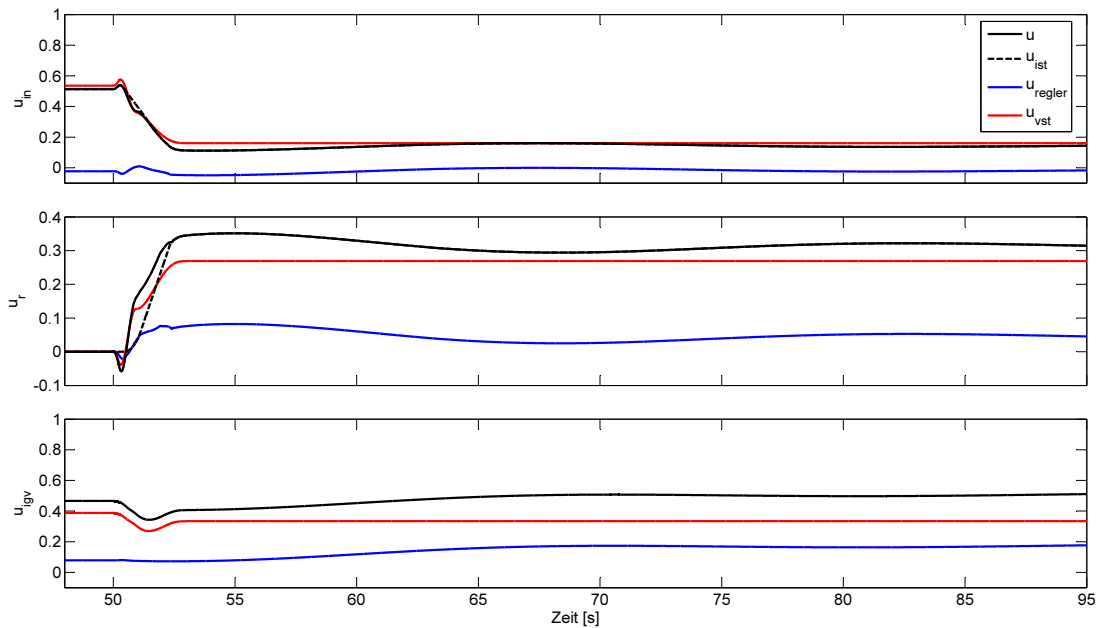


Abb. 5-27: Stellgrößen der Regler beim Lastabwurf der Gasturbine vom Nennmassenstrom  $w_{tmax}$  auf 30 %  $w_{tmax}$  mit flachheitsbasierter Vorsteuerung

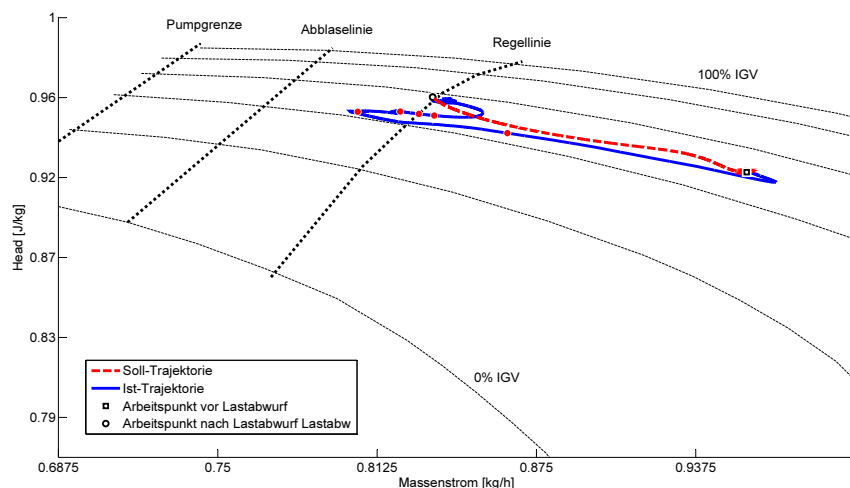


Abb. 5-28: Arbeitspunkt des Kompressors im Kennfeld beim Lastabwurf der Gasturbine vom Nennmassenstrom  $w_{tmax}$  auf 30 %  $w_{tmax}$  mit flachheitsbasierter Vorsteuerung

zu verbessern, der Lastabwurf ist jedoch der kritischste und wichtigste für den Betreiber der Anlage.

Von der Kostenseite ist es außerdem sehr vorteilhaft, dass keine zusätzliche Hardware (Aktuator, Messung, Steuergerät) im System installiert werden muss, um die Vorsteuerung zu implementieren. Es erhöht sich lediglich der Aufwand beim Engineering der Reglerstruktur, wobei dieser Aufwand einmalig hoch ist und bei Folgeprojekten fast gänzlich auf das Approximieren des Kompressorkennfelds re-

duziert wird. Dies hält die Kosten der Implementierung minimal bei gleichzeitig großem praktischen Nutzen.

## 5.4 Inverses Pendel

Das inverse Pendel ist ein sehr beliebtes akademisches Beispiel, um neue Regelungsansätze und -verfahren zu testen und deren Güte zu bewerten. Das Pendel gibt es in verschiedenen Ausführungen und Varianten. Das einfache Pendel aus Abbildung 4-5 ist am meisten verbreitet. Andere Ausführungen sind z. B. das Furuta-Pendel [34] oder das Doppelpendel mit einem gemeinsamen Gelenk [93]. In letzter Zeit haben viele Arbeiten das Doppel- [41] und das Dreifachpendel [40] mit zwei bzw. drei Gelenken zum Forschungsgegenstand.

Hier wird das inverse Pendel aus Beispiel 4.2 aufgegriffen. Bei diesem Pendel sind im Wesentlichen zwei Aufgaben zu erfüllen: Zum Einen muss das Pendel aus der unteren Ruhelage in die obere aufgeschaukelt werden, und zum Anderen ist es danach notwendig, das Pendel in der oberen Ruhelage zu halten. Da das Pendel ein stark nichtlineares, unteraktuiertes System ist, kann ein Regler diese Aufgaben nicht adäquat erfüllen. So gibt es zwar Ansätze wie in [94], wo mit einem Regler sowohl das Aufschaukeln als auch das Halten in der oberen Ruhelage realisiert werden, doch hat dieser Entwurf Nachteile hinsichtlich der Dynamik und der stationären Genauigkeit. Deshalb schlagen die Autoren in [8] vor, die beiden Aufgaben zu teilen und zum passenden Zeitpunkt zwischen den Reglern umzuschalten.

Im Beispiel 4.2 wurde das Pendel linearisiert um die obere Ruhelage

$$\Theta = 0, \dot{\Theta} = 0 \quad (5-18)$$

betrachtet, und die linearisierten Gleichungen des Systems (4-30) wurden aufgestellt. Das Pendel ist jedoch ein nichtlineares System, dessen Gleichungen

$$(M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\Theta} \cos \Theta - mL\dot{\Theta}^2 \sin \Theta = f \quad (5-19a)$$

$$mL\ddot{x} \cos \Theta + mL^2\ddot{\Theta} - mgL \sin \Theta = 0 \quad (5-19b)$$

lauten.

Das nichtlineare System (5-19) hat keinen flachen Ausgang, denn kein ausgeschauter Kandidat für  $y_f$  kann die drei Bedingungen der Definition 2 gleichzeitig erfüllen. Da jedoch die Reglerumschaltung beim inversen Pendel immer nahe der oberen Ruhelage (5-18) stattfinden soll, ist es möglich, die linearisierten Gleichungen (4-30) zu nutzen, um vom Regler für das Aufschaukeln auf diejenigen für das Hochhalten des Pendels umzuschalten. Außerdem kann dann die Flachheit der linearisierten Gleichungen für Berechnungen der Solltrajektorien und der Vorsteuerungen bei Positionsänderungen verwendet werden.

Für das Aufschaukeln des Pendels wird die Energieregung nach [8] eingesetzt. Dazu wird für das System (5-19) zuerst mit der Eingangstransformation

$$f = mL\ddot{\Theta} \cos \Theta - mL\dot{\Theta}^2 \sin \Theta + (M + m)u \quad (5-20)$$

der neue Eingang  $u$  eingeführt. Die Systemgleichungen sehen dann folgendermaßen aus:

$$\ddot{x} = u, \quad (5-21a)$$

$$mL^2\ddot{\Theta} - mgL \sin \Theta + mLu \cos \Theta = 0. \quad (5-21b)$$

Bei der Implementierung der Regelung wird zusätzlich in (5-20) die Beschleunigung des Pendels  $\ddot{\Theta}$  durch

$$\ddot{\Theta} = \frac{1}{L}(g \sin \Theta - u \cos \Theta) \quad (5-22)$$

ersetzt, womit die Realisierung der Transformation einfacher wird.

Die Energie des Pendels beträgt für  $f = 0$ :

$$E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\Theta}^2 + mgL(\cos \Theta + 1). \quad (5-23)$$

Somit besitzt das Pendel in der oberen Ruhelage (5-18) die Energie  $E_0 = 2mgL$ . Die Ableitung der Gleichung (5-23) für die Energie des unkontrollierten Pendels

$$\frac{dE}{dt} = mL^2\dot{\Theta}\ddot{\Theta} - mgL\dot{\Theta} \sin \Theta = -mLu\dot{\Theta} \cos \Theta \quad (5-24)$$

beantwortet die Frage, wie die Energie mit dem neuen Eingang  $u$ , d. h. mit der Beschleunigung des Wagens, beeinflusst wird. Gleichung (5-24) impliziert, dass die Steuerbarkeit für  $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$  und  $\dot{\Theta} = 0$  verloren geht. Der größte Einfluss auf die Energie kann bei  $\Theta = k\pi$ ,  $k = 0, 1$ , und großen Geschwindigkeiten  $\dot{\Theta}$  genommen werden. Wird als Ljapunovfunktion  $V = (E - E_0)^2 / 2$  gewählt, so ist deren Ableitung mit dem Reglergesetz

$$u = k(E - E_0)\dot{\Theta} \cos \Theta \quad (5-25)$$

immer negativ, da

$$\frac{dV}{dt} = (E - E_0) \frac{dE}{dt} = -mLk \left( (E - E_0) \dot{\Theta} \cos \Theta \right)^2 \quad (5-26)$$

gilt, wobei der Parameter  $k$  bestimmt, wie schnell die Energieregung ist.

Der Verlust der Steuerbarkeit in der horizontalen Lage ist für die Steuerung nicht sonderlich problematisch, da die horizontale Position keine Ruhelage ist und das Pendel von allein diese Arbeitspunkte verlässt. Für den Steuerbarkeitsverlust bei  $\dot{\Theta} = 0$  gilt dasselbe, falls das Pendel sich nicht in der unteren Ruhelage befindet. Diese Position kann nur als Anfangszustand auftreten, bei dem sich das Pendel nach dem Regelgesetz (5-25) nicht bewegen würde. Deswegen muss die Regelung

(5-25) um eine zusätzliche Steuerung erweitert werden, die nur in der besagten Anfangsposition eingreift und den Wagen in eine beliebige Richtung anstößt.

Für die obere Ruhelage wird ein flachheitsbasierter Regler nach [93] verwendet. Der flachheitsbasierte Regler baut auf den linearisierten Gleichungen (4-30) des Pendels, mit dem flachen Ausgang  $y_f = x + L\Theta$ , auf. Die Systemvariablen in Funktion des flachen Ausgangs und seiner Ableitungen lauten:

$$x = y_f - \frac{L}{g}\ddot{y}_f, \quad \dot{x} = \dot{y}_f - \frac{L^{(3)}}{g}y_f, \quad (5-27a)$$

$$\Theta = \frac{1}{g}\ddot{y}_f, \quad \dot{\Theta} = \frac{1^{(3)}}{g}y_f, \quad (5-27b)$$

$$f = (M + m)\ddot{y}_f - \frac{ML^{(4)}}{g}y_f. \quad (5-27c)$$

Mit der Eingangstransformation

$$f = (M + m)\ddot{y}_f - \frac{ML}{g}u \quad (5-28)$$

erhält man aus Gleichung (5-27c) das linearisierte System als die Integrationskette

$$u = \overset{(4)}{y}_f. \quad (5-29)$$

Wählt man als Rückführungsgesetz die Funktion

$$u = -k_3 \overset{(3)}{y}_f - k_2 \ddot{y}_f - k_1 \dot{y}_f - k_0 y_f, \quad (5-30)$$

kann mit der passenden Auswahl von  $k_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , eine stabile Regelung erzielt werden. Die Parameter  $k_i$  müssen so gewählt werden, dass das resultierende charakteristische Polynom des geschlossenen Systems ein Hurwitzpolynom ist. Für die Regelung werden der flache Ausgang und seine Ableitungen mithilfe des Systemzustands  $\mathbf{x}$  gebildet, als

$$y_f = x + L\Theta, \quad \dot{y}_f = \dot{x} + L\dot{\Theta}, \quad (5-31)$$

$$\ddot{y}_f = g\Theta, \quad \overset{(3)}{y}_f = g\dot{\Theta}. \quad (5-32)$$

Die Umschaltung von der Energieregung auf die Regelung der oberen Ruhelage mit definierten Wagenpositionen wird mittels der bereits in Beispiel 4.2 berechneten Soll- und Vorsteuerungstrajektorien (4-36), (4-38) durchgeführt. Der flachheitsbasierte Regler kann nur um den linearisierten Zustand die im Entwurf geplante Regelgüte halten,<sup>5</sup> und die Umschaltung wird nur dann vorgenommen,

---

<sup>5</sup> Bei zu großer Abweichung des Systemzustandes von der oberen Ruhelage wird der Regelkreis instabil.

wenn die Energie des Pendels nahe an  $E_0$  liegt, d. h.  $|E - E_0| \leq \epsilon$ , und der Pendelwinkel relativ klein ist:  $|\Theta| \leq \Theta_0$ . Somit ist sichergestellt, dass sowohl der Winkel als auch die Geschwindigkeit des Pendels zum Umschaltzeitpunkt nahe der oberen Ruhelage sind. Wird das Pendel vom flachheitsbasierten Regler geregelt und überschreitet der Winkel den Wert  $|\Theta| \geq \pi/2$ , wird wieder auf die Energieregung zurückgeschaltet.

Abbildung 5-29 zeigt das Aufschaukeln des Pendels aus der unteren Ruhelage und das Halten in der oberen Ruhelage bei Parametrierung der Regler nach Tabelle 5-4. Die Parameter des Pendels sind in (4-40) gegeben, wobei zusätzlich eine

*Tabelle 5-4: Reglerparameter des Pendels*

PARAMETER	WERT
$k$	100
$k_0$	$4,42 \cdot 10^4$
$k_1$	$4,76 \cdot 10^4$
$k_2$	$4,76 \cdot 10^4$
$k_3$	226
$\epsilon$	0,2
$\Theta_0$	0,01

Stellgrößenbegrenzung von  $|f| \leq 6$  vorhanden ist. Zuerst sorgt der Energieregler für die Zunahme der Energie des Pendels, die in Abbildung 5-29 normalisiert dargestellt ist. Obwohl die Energie lange vor dem Zeitpunkt  $T = 2$  den erforderlichen Wert erreicht, wird erst zum Zeitpunkt  $T = 2,13$  umgeschaltet, da erst dann auch der Pendelwinkel  $\Theta$  klein genug ist. Die Überführung zum Sollwert der Wagenposition  $x_{soll} = 5$  wird mit der Umschaltdauer  $T = 5$  und  $t_b = 2$  vorgenommen.

Die Vorsteuerung übernimmt nach der Umschaltung den größten Teil der Stellgröße, jedoch bleibt trotz vollständiger Systemkenntnis und Abwesenheit von Störungen ein Regleranteil erhalten. Dieser ist eine Folge der Linearisierung des Systems, durch die zwangsläufig eine Abweichung der berechneten Vorsteuerung vom tatsächlichen Stellgrößenverlauf entsteht. Der flache Ausgang kann in diesem Fall nur das linearisierte System beschreiben und ist desto fehlerhafter, je weiter das System von der oberen Ruhelage entfernt ist. Deshalb sind bei der Umschaltung relativ kleine Überführungszeiten unabhängig von der Stellgrößenbegrenzung nicht realisierbar, denn kleine Zeiten erfordern während der Überführung größere Abweichungen von der Ruhelage, da große Beschleunigungen vonnöten sind, um den Wagen rechtzeitig in die geforderte Sollposition zu fahren. Abbildung 5-30 zeigt, wie bei einer kürzer angesetzten Überführungszeit von  $T = 3$ ,  $t_b = 1,5$

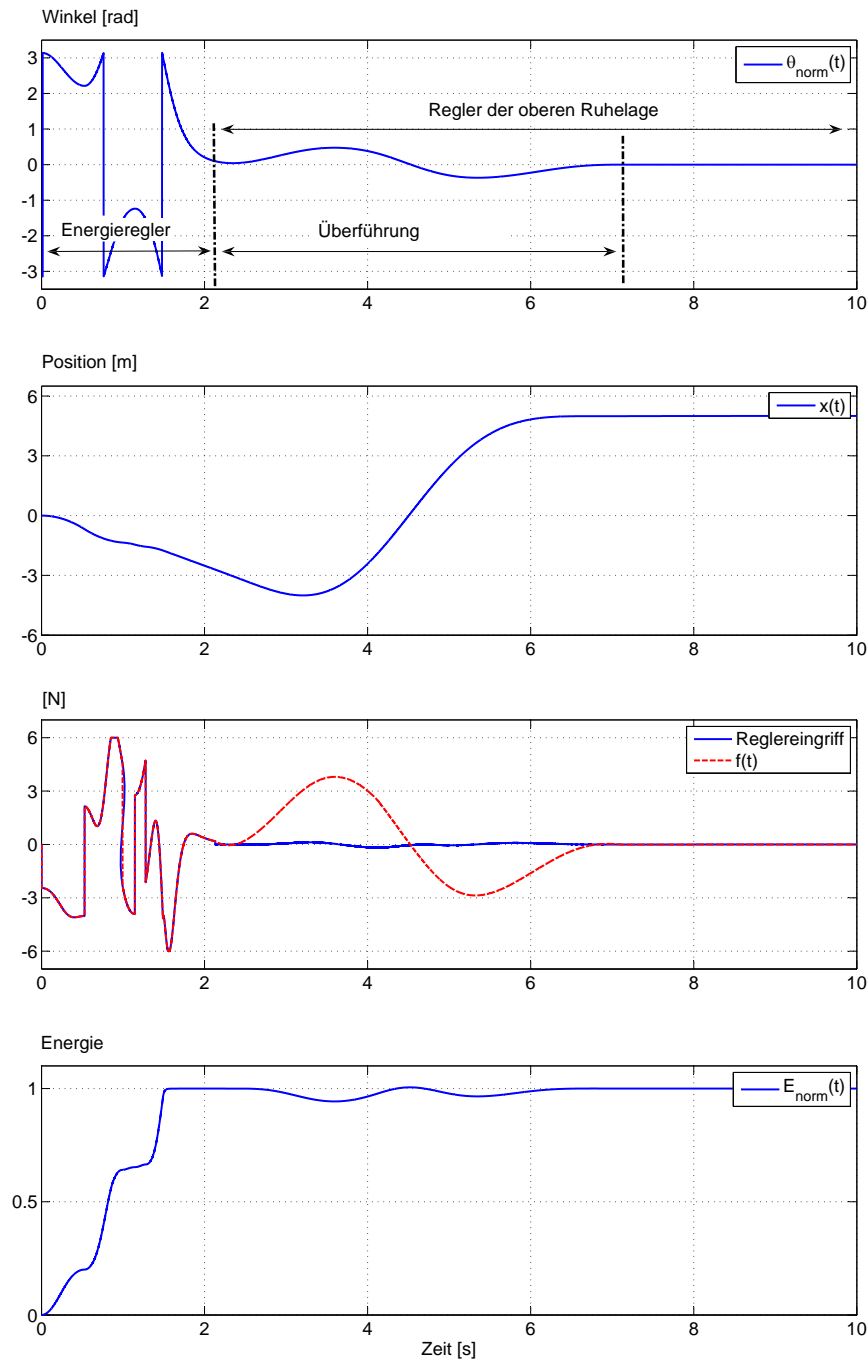


Abb. 5-29: Aufschaukeln des Pendels und Regelung der oberen Ruhelage

das Auffangen des Pendels in der oberen Ruhelage nicht auf Anhieb gelingt. Der erste Überführungsversuch bei  $t = 2,13$  wird nach kurzer Zeit abgebrochen, da das Pendel zu weit von der oberen Ruhelage ausschert, um die notwendige Geschwindigkeit für den geforderten Positionswechsel des Wagens zu erreichen. Es wird deshalb zurück zur Energieregulation umgeschaltet, und erst beim zweiten Anlauf, während der Überführung  $t \in [4,1; 7,1]$ , gelingt die Positionierung auf  $x_{\text{soll}} = 5, \Theta = 0$ .



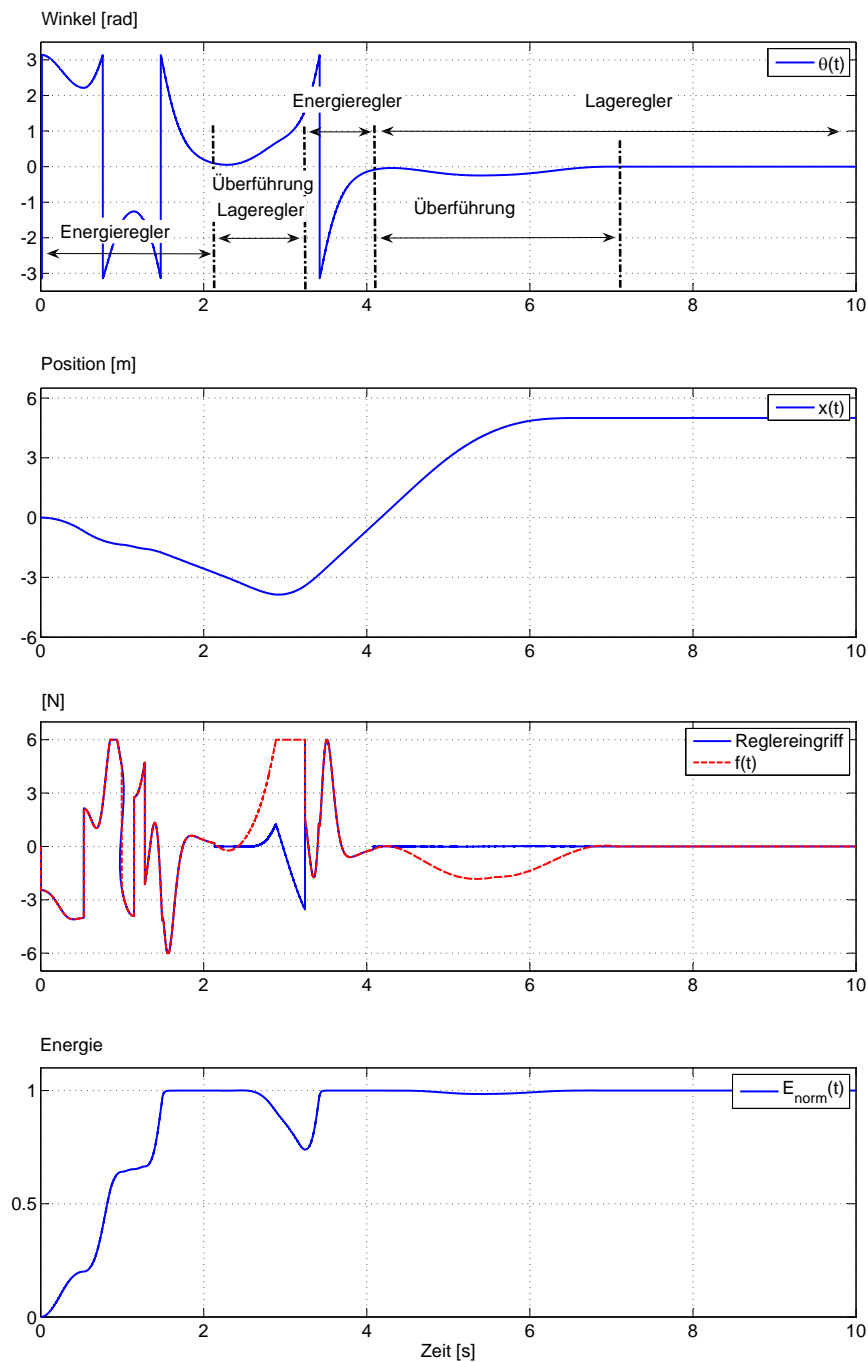


Abb. 5-30: Aufschaukeln des Pendels und Regelung der oberen Ruhelage bei verkürzter Umschaltzeit

## 5.5 Zusammenfassung

Im Kapitel 5 wurde anhand mehrerer Beispiele die Anwendung der flachheitsbasierten Umschaltung vorgestellt.

Das Beispiel des Viertelfahrzeugprüfstandes ModulX zeigt, wie die flachheitsbasierte Umschaltung in die OCM-Struktur eingebunden wird. Die Regler befinden sich im Controller-Modul und bekommen die benötigten Istwerte des Systemzustandes direkt von der Messeinrichtung. Im reflektorischen Operator werden

die Vorsteuerungs- und die Solltrajektorien berechnet, die in den Controller eingespeist werden. Wenn das System einen kognitiven Operator besitzt, werden dessen Optimierungsergebnisse, in Form von Regler- und Sollwertauswahl mit gewünschter Übergangsdauer, an den reflektorischen Operator übergeben, der die Reglerumschaltung und die Überführung zum Sollwert übernimmt. Des Weiteren zeigt dieses Beispiel, dass die flachheitsbasierte Umschaltung auch bei größeren Modellungenauigkeiten robust ist und die Umschaltungen auch dann stoßfrei ablaufen. Die Modellungenauigkeiten wirken sich vor allem auf die Überführung zum neuen Arbeitspunkt aus, bei der die Regler einen desto größeren Anteil übernehmen müssen, je größer die Abweichung des Modells vom realen System ist.

Die Methode kann aber auch unabhängig von der OCM-Struktur für stoßfreie Reglerumschaltungen und Arbeitspunktwechsel genutzt werden, wie die übrigen Beispiele zeigen. Besonders hervorzuheben ist die Anwendung bei Kompressoren für Gas-und-Dampf-Kombikraftwerke, wo eine erhebliche Verbesserung des Systemverhaltens mit relativ kleinem Modellierungs- und Implementierungsaufwand erzielt werden konnte. Dies gilt insbesondere für die kritischen Arbeitspunktwechsel bei Lastabwürfen; das verbesserte Systemverhalten ist aber auch bei anderen Arbeitspunktwechseln im Kennfeld wahrnehmbar.

Die vorgestellte Methode zum stoßfreien Umschalten wurde unter der Voraussetzung entworfen, dass eventuell vorhandene Integratoren inaktiver Regler immer auf Null zurückgesetzt werden. Diese Voraussetzung ist einerseits seit geraumer Zeit bei digitalen Reglern leicht zu erfüllen, andererseits aber auch nicht notwendig. Die stoßfreie Umschaltung kann auch ohne das Zurücksetzen der Integratoren realisiert werden, jedoch müsste in diesem Fall bei Kaskadenreglern in jeder Schleife, die einen Integrator besitzt, auch eine Vorsteuerung vorhanden sein.

Die Methode der flachheitsbasierten Umschaltung lässt sich sehr einfach umsetzen, wenn das zu regelnde System flach ist. In den meisten Fällen wird für die Implementierung die vorhandene Hardware ausreichen. In der Praxis kann die Bestimmung der Istwerte für die Berechnung der Solltrajektorien zu erhöhtem Aufwand führen. Je nach System und vorhandenen bzw. noch benötigten Messgrößen kann dabei der Einsatz eines Beobachters oder zusätzlicher Messinstrumentierung wirtschaftlicher sein.

## 6 Fazit

Die vorgestellte Methode erlaubt eine systematische Lösung des Problems der stoßfreien Umschaltung für eine große Anzahl von Systemen. Die Eigenschaft der Flachheit spielt dabei eine zentrale Rolle und erlaubt nicht nur eine stoßfreie Umschaltung zwischen beliebigen Reglern, sondern auch eine geordnete Überführung zum gewünschten Arbeitspunkt. Dabei werden die Anforderungen aus dem Abschnitt 1.2 zum größten Teil erfüllt.

Die Umschaltung kann aus jedem Zustand des Systems und zu jedem beliebigen Zeitpunkt erfolgen. Die Stabilität des Systems ist dabei während der Umschaltung gegeben. Es wird hierbei nur eine Umschaltung für sich betrachtet. Eine übergeordnete Steuerung kann im ungünstigsten Fall das System in einen „Umschaltzyklus“ bringen, bei dem es sich System instabil verhält. Dies muss bei der Auslegung der übergeordneten Steuerung (beim OCM wäre dies das Operator-Modul) berücksichtigt werden.

Bei der flachheitsbasierten Umschaltung sind die Stetigkeit der Systemzustände und bei Bedarf auch deren stetige Differenzierbarkeit sichergestellt. Die Überführungszeit kann dabei beliebig gewählt und eingehalten werden<sup>1</sup>.

Durch den Einsatz der modellbasiert berechneten Vorsteuerungen, die exakt zu den Solltrajektorien der Regelgrößen passen, kann während der Umschaltung die Systemdynamik unabhängig vom Regler vorgegeben werden. Im idealen Fall, wenn die Regelstrecke genau bekannt ist, hätten die Regler überhaupt keinen Einfluss auf die Systemdynamik während der Umschaltung, d. h. die Systemdynamik wäre während der Umschaltung vom Regler „entkoppelt“. Die Vorsteuerung würde dann das System genau entlang den Solltrajektorien in den neuen Arbeitspunkt überführen, und die Regeldifferenz des Reglers wäre während der gesamten Umschaltdauer, bei nicht vorhandener Störgröße, identisch Null. In der Praxis wird der ideale Fall nicht zu erreichen sein, und der Regler wird immer einen Einfluss auf die Dynamik auch während der Umschaltung haben. Dennoch zeigen die Anwendungsbeispiele aus Kapitel 5, dass die mit schon stark vereinfachten Modellen berechnete Vorsteuerung während der Umschaltung den größeren Anteil an der Stellgröße hat. Je genauer das Modell des Systems ist, desto weniger werden die Regler an der Überführung und der Systemdynamik während der Umschaltung „beteiligt“ sein. Dies kann wiederum genutzt werden, um die Regler für die Störgrößenausregelung zu optimieren, da sie bei den Umschaltungen durch die Vorsteuerung entlastet werden.

---

<sup>1</sup> Da Stellgrößenbegrenzungen bei realen Systemen immer existieren, werden die Überführungszeiten immer begrenzt sein.

Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen sind Nichtlinearitäten, die bei allen realen Systemen vorhanden sind und für das System den Verlust der Flachheit zur Folge haben. In dieser Arbeit wurden Stellratenbegrenzungen, wie im Beispiel 5.3 gezeigt, im Zuge der Modellbildung vernachlässigt, und es stellt sich die Frage, ob diese in die vorgestellte Methode eingebunden werden können, damit die berechneten Stellgrößentrajektorien noch besser an das reale System angepasst sind. Für die Berücksichtigung der Stellgrößenbegrenzung bei linearen SISO-Systemen ist die WSVR-Struktur in Abschnitt 4.4.3 vorgestellt worden. Es bleibt noch zu klären, ob diese auch bei linearen Mehrgrößensystemen und nichtlinearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkung eingesetzt werden kann.

Bei vielen realen Systemen ist es möglich, ihre Dynamik mit flachen Modellen gut abzubilden, weshalb die vorgestellte Struktur auch bei vielen praktischen Problemen angewendet werden kann. In Einzelfällen und abhängig von der Problemstellung kann die Struktur auch bei steuerbaren, nichtflachen Systemen (siehe Absatz 5.4) mithilfe der Linearisierung erfolgreich eingesetzt werden.

## Literaturverzeichnis

- [1] J. Adamy, *Strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen*, Dissertation, Universität Dortmund, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1991.
- [2] J. Adamy, A. Flemming, „Soft variable-structure controls: a survey“, *Automatica* 40 (2004), 1821-1844.
- [3] P. Adelt et al., *Selbstoptimierende Systeme des Maschinenbaus: Definitionen, Anwendungen, Konzepte*. Universität Paderborn, HNI-Verlag, Paderborn, 2009.
- [4] F. Antritter, J. Lévine, „Towards a Computer Algebraic Algorithm for Flat Output Determination“, *ISSAC'08. 21st International Conference on Symbolic and Algebraic Computation*, Hagenberg, Austria, 2008, 7-14.
- [5] A. B. Arehart, W. A. Wolovich, „Bumpless Switching Controllers“, *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, 1996.
- [6] E. Arnold, J. Neupert, O. Sawodny, K. Schneider, „Modell-prädiktive Trajektoriengenerierung für flachheitsbasierte Folgeregelungen am Beispiel eines Hafenmobilkrans“, *at - Automatisierungstechnik* 56 (2008), 395-405.
- [7] K. J. Åström, B. Wittenmark, *Computer-controlled Systems, Theory and Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2nd ed., 1984.
- [8] K. J. Åström, K. Furuta, „Swinging up a pendulum by energy control“, *Automatica* 36 (2000), 287-295.
- [9] M. Athans, P. L. Falb, *Optimal control*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [10] J. D. Bendtsen, J. Stoustrup, K. Trangbaek, „Bumpless transfer between observer-based gain scheduled controllers“, *International J. Control* 78 (2005), 491-504.
- [11] R. Bindel, R. Nitsche, R. Rothfuß, M. Zeitz, „Flachheitsbasierte Regelung eines hydraulischen Antriebs mit zwei Ventilen für einen Großmanipulator“, *at - Automatisierungstechnik* 48 (2000), 124-130.
- [12] J. Birk, *Rechnergestützte Analyse und Synthese nichtlinearer Beobachtungsaufgaben*, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1992.
- [13] A. Bloch, „Test von Abstandsregeltempomaten von BMW 5er, Audi A5, VW Passat CC, Ford Mondeo“, *Auto Motor und Sport*, Januar 2010.
- [14] A. Bloch, „Nah Dran“, *Auto Motor und Sport*, 24/2006, 72-78.
- [15] P. Brunovský, „A classification of linear controllable systems“, *Kybernetika* 3 (1970), 173-188.
- [16] M. Buhl, P. Joos, B. Lohmann, „Sättigende weiche strukturvariable Regelung“, *at - Automatisierungstechnik* 56 (2008), 316-323.
- [17] S. Burmester, H. Giese et al., „Incremental Design and Formal Verification with UML/RT in the FUJABA Real-Time Tool Suite“, *Proc. of the International Workshop on Specification and Validation of UML Models for Real Time and Embedded Systems, SVERTS2004*, Lisbon, Portugal, 2004.
- [18] P. J. Campo, M. Morari, C. N. Nett, „Multivariable Anti-Windup and Bumpless Transfer: A General Theory“, *Proc. American Control Conference '89* (1989), Pittsburgh, PA, 1706-1711.

- [19] P. J. Campo, M. Morari, „Robust control of processes subject to saturation nonlinearities“, *Comput. Chem. Eng.* 14 (1990), 343-358.
- [20] B. Charlet, J. Lévine, R. Marino, „On dynamic feedback linearization“, *Systems Control Letters* 13 (1989), 143-151.
- [21] O. Chocron, E. Delaleau, J. L. Fleureau, „Flatness-Based Control of a Mechatronic Weed Killer Autonomous Robot“, *Proc. ISIE 2007. IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, Vigo, Spain, 2007, 2214-2219.
- [22] A. Dell’Aere, M. Hirsch et al., *Verlässlichkeit selbstoptimierender Systeme: Potenziale nutzen und Risiken vermeiden*. Universität Paderborn, HNI-Verlag, Paderborn, 2009.
- [23] Deutsche Industrienorm DIN EN ISO 8373, *Industrieroboter-Wörterbuch*, Berlin, 1996.
- [24] Deutsche Industrienorm DIN 9300, *Luft- und Raumfahrt; Begriffe, Größen und Formelzeichen der Flugmechanik; Bewegungen des Luftfahrzeugs und der Atmosphäre gegenüber der Erde*, Berlin, 1987.
- [25] C. Edwards, I. Postlethwaite, „Anti-windup and Bumpless-transfer Schemes“, *Automatica* 34 (1998), 199-210.
- [26] Chr. Fleck, A. Schönbohm, „Entwurf einer flachheitsbasierten Vorsteuerung für die induktive Erwärmung beim Thixioforming“, *at - Automatisierungstechnik* 52 (2004), 403-410.
- [27] M. Fliess, J. Lévine et al., „On differentially flat nonlinear systems“, *Nonlinear Control Systems Design*, Pergamon Press, Oxford, 1992, 408-412.
- [28] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, „Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples“, *International J. Control* 61 (1995), 1327-1361.
- [29] M. Fliess, H. Sira-Ramirez, R. Marquez, „Regulation of non-minimum phase outputs: a flatness based approach“, *Perspectives in Control - Theory and Applications: a tribute to Ioan Doré Landau*, Springer, London, 1998, 143-164.
- [30] O. Föllinger, *Regelungstechnik. Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 8. Aufl., Hüthig, Heidelberg 1994.
- [31] D. Franke, „Ausschöpfung von Stellgrößenbeschränkungen mittels weicher strukturvariabler Regelung“, *Regelungstechnik* 30 (1982), 348-355.
- [32] D. Franke, „Strukturvariable Regelung ohne Gleitzustände“, *Regelungstechnik* 30 (1982), 271-276.
- [33] D. Franke, „Ein nichtlinearer dynamischer Regler mit adaptiven Eigenschaften“, *Regelungstechnik* 31 (1983), 369-374.
- [34] K. Furuta, M. Yamakita, S. Kobayashi, „Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback“, *Journal of Systems and Control Engineering* (1992), 263-269.
- [35] J. Gausemeier, J. Lückel, *Entwicklungsumgebungen Mechatronik*, HNI-Verlagsschriftenreihe 80, Paderborn, 2000.
- [36] J. Gausemeier, J. Lückel, F. Rammig (Hrsg.), *Sonderforschungsbereich 614 - Selbstoptimierende Systeme des Maschinenbaus*. Universität Paderborn, Paderborn, 2001. Finanzierungsantrag 2002-2005.
- [37] S. F. Graebe, A. Ahlen, „Dynamic Transfer Among Alternative Controllers and Its Relation to Antiwindup Controller Design“, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 4 (1996), 92-99.
- [38] S. F. Graebe, A. Ahlen, „Bumpless Transfer“, *The Control Handbook*, CRC press, Boca Raton 1996, 381-388.

- [39] K. Graichen, M. Zeitz, „Inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf mit Ein- und Ausgangsbeschränkungen“, *at - Automatisierungstechnik* 54 (2006), 187-199.
- [40] K. Graichen, M. Zeitz, „A new approach to feedforward control design under output constraints applied to the side-stepping of the triple inverted pendulum“, *4th IFAC Symposium on Mechatronic Systems*, Heidelberg, 2006, 181-186.
- [41] K. Graichen, M. Treuer, M. Zeitz, „Swing-up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation“, *Automatica* 43 (2007), 63-71.
- [42] P.-O. Gutman, P. Hagander, „A New Design of Constrained Controllers for Linear Systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985), 22-33.
- [43] M. Hebsacker, *Entwurf und Bewertung paralleler Werkzeugmaschinen*, Dissertation, ETH Zürich, Zürich, 2000.
- [44] H. Giese, M. Tichy et al., *Towards the Compositional Verification of Real-Time UML Designs*, Lehrstuhl für Softwaretechnik, Universität Paderborn, 2003.
- [45] V. Hagenmeyer, E. Delaleau, „Exact feedforward linearization based on differential flatness“, *International J. Control* 76 (2003), 537-556.
- [46] V. Hagenmeyer, M. Zeitz, „Flachheitsbasierter Entwurf von linearen und nichtlinearen Vorsteuerungen“, *at - Automatisierungstechnik* 52 (2004), 3-12.
- [47] V. Hagenmeyer, M. Zeitz, „Internal dynamics of flat nonlinear SISO systems with respect to a non-flat output“, *Systems & Control Letters* (2004), 323-327.
- [48] M. E. Hangstrup, J. Stoustrup et al., „Gain-Scheduled Control of a Fossil-Fired Power Plant Boiler“, *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, Kohala Coast, Hawaii, 1999, 905-909.
- [49] R. Hanus, „A new technique for preventing control windup“, *Journal A* 21 (1980), 15-20.
- [50] R. Hanus, M. Kinnaert, J.-L. Henrotte, „Conditioning Technique, a General Anti-windup and Bumpless Transfer Method“, *Automatica* 23 (1987), 729-739.
- [51] T. Hestermeyer, M. Becker, N. Neuendorf, „Nichtlineare ABC-Regelungen mit Operator-Controller-Struktur, abgestimmt auf Führung und Störung der Straße“, *Driveability, Haus der Technik*, Essen, 2001.
- [52] T. Hestermeyer, O. Oberschelp, H. Giese, „Structured Information Processing for Self-Optimizing Mechatronic Systems“, *ICINCO* (2004), Setúbal, Portugal, 230-237.
- [53] I. M. Horowitz, *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press, New York, 1963.
- [54] C. Hölscher, *Entwurf einer inversen Dynamik mittels KANE-Formalismus und Validierung am MKS-Modell des Parallelroboters TriPlanar*, Studienarbeit, RtM, Universität Paderborn, Paderborn, 2009.
- [55] T. Hu, Z. Lin, *Control Systems with Actuator Saturation*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [56] R. A. Hyde, K. Glover, „The application of scheduled  $H_\infty$  controllers to a VSTOL aircraft“, *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (1993), 1021-1039.
- [57] F. Jadot, P. Martin, P. Rouchon, „Industrial sensorless control of induction motors“, *Non-linear control in the Year 2000*, Springer, Berlin Heidelberg, 2000, 535-544.
- [58] B. Jakubczyk, W. Respondek, „On linearization of control systems“, *Bulletin de L'Académie Polonaise des Sciences Série des Sciences Mathématiques* 28 (1980), 517-522.
- [59] M. V. Kothare, P. J. Campo et al., „A Unified Framework for the Study of Anti-windup Designs“, *Automatica* 30 (1994), 1869-1883.

- [60] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [61] T. R. Kane, D. A. Levinson, *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1985.
- [62] A. Kharitonov, O. Sawodny, „Flachheitsbasierte Steuerung und Regelung für parabolische Systeme mit verteilten Parametern und gleichverteiltem Eingriff“, *at - Automatisierungstechnik* 55 (2007), 615-623.
- [63] H. Kiendl, *Suboptimale Regler mit abschnittweise linearer Struktur*, Springer, Berlin, 1972.
- [64] H. Kiendl, G. Schneider, „Synthese nichtlinearer Regler für die Regelstrecke  $\text{const}/s^2$  aufgrund ineinander geschachtelter abgeschlossener Gebiete beschränkter Stellgröße“, *Regelungstechnik und Prozeßdatenverarbeitung* 20 (1972), 289-296.
- [65] G. Kreisselmeier, „Struktur mit zwei Freiheitsgraden“, *at - Automatisierungstechnik* 47 (1999), 266-269.
- [66] W. Kuhlbusch, W. Moritz, J. Lückel, S. Toepper, F. Scharfeld, „TRIPLANAR - A New Process-Machine Type Developed by Means of the Mechatronic Design“, *Proc. IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, Atlanta, GA, 1999, 514-519.
- [67] W. Kuhlbusch, W. Moritz, J. Lückel, S. Toepper, „Triplanar - A New Parallel 6-DOF Robot for Highly Precise Measurement and Process Tasks“, *Mechatronics 2000, 1st IFAC Conference on Mechatronic Systems*, Darmstadt, 2000.
- [68] H. Lens, „Schnelle Regelung mit Ausgangsrückführung für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen“, Dissertation, Universität Darmstadt, Darmstadt, 2009.
- [69] H. Lens, J. Adamy, „Schnelle Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen“, *at - Automatisierungstechnik* 57 (2009), 70-79.
- [70] J. Lévine, „On necessary and sufficient conditions for differential flatness“, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing* 22 (2011), 47-90.
- [71] J. H. Lewis, „The Kronecker indices of affine-nonlinear control systems“, *24th IEEE Conference on Decision and Control* (1985), Fort Lauderdale, FL, 371-374.
- [72] J. Lückel, W. Moritz, W. Kuhlbusch, *Vorrichtung zum Positionieren einer Arbeitseinheit*, Offenlegungsschrift DE 19920776 A 1, Deutsches Marken- und Patentamt, Aktenzeichen 199 20 776.3, München, 1998.
- [73] T. Maier, C. Woernle, „Flachheitsbasierte Bahnsteuerung von seilgeführten Handhabungssystemen“, *at - Automatisierungstechnik* 51 (2003), 265-273.
- [74] P. Martin, P. Rouchon, „Flatness and sampling control of induction motors“, *Proc. 13th IFAC World Congress '96*, San Francisco, CA, 1996, 389-394.
- [75] A. McIlhenny, W. Grove, *Transfer From Manual to Automatic Control in Automatic Control Systems*, United States Patent Office, Nr. 2.679.022, 1954.
- [76] J.-P. Merlet, *Parallel Robots - Second Edition*, Springer, Dordrecht, 2006.
- [77] T. Meurer, M. Zeitz, „Flachheitsbasierte Steuerung und Regelung eines Wärmeleitungssystems“, *at - Automatisierungstechnik* 52 (2004), 411-420.
- [78] V. Nachtigal, „Modellbasierter Entwurf eines integrierten Radmoduls und Erprobung von Regelstrategien an einem Hardware-in-the-Loop-Prüfstand“, Diplomarbeit, MLaP, Universität Paderborn, Paderborn, 2004.
- [79] R. Naumann, *Modellierung und Verarbeitung vernetzter intelligenter mechatronischer Systeme*, Dissertation, Universität Paderborn, Paderborn, 2000.



- [80] R. Nitsche, J. Hanschke, D. Schwarzmann, „Nonlinear Internal Model Control of Diesel Air Systems“, *Proc. E-COSM. Rencontres Scientifiques de l'IFP*, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison, 2006, 121-131.
- [81] R. Nölle, *Identifikation der Kinematik des Parallelroboters TriPlanar durch Anpassung eines nichtlinearen Fehlermodells unter Verwendung weniger redundanter Meßgrößen*, Diplomarbeit, RtM, Universität Paderborn, Paderborn, 2006.
- [82] O. Oberschelp, *Strukturierter Entwurf selbstoptimierender mechatronischer Systeme*, Dissertation, Universität Paderborn, HNI-Verlag, Paderborn, 2008.
- [83] F. Oestersötebier, „Flachheitsbasierte Reglerumschaltung zum kraftgesteuerten Ausweichen eines stationären Hindernisses mit dem Parallelroboter TriPlanar“, Diplomarbeit, RtM, Universität Paderborn, Paderborn, 2010.
- [84] S. Osmić, A. Trächtler, „Flatness-based Online Controller Reconfiguration“, *IECON 2008. 34th Annual Conference of IEEE*, Orlando, FL (2008), 204-209.
- [85] G. Roppenecker, B. Lohmann, „Vollständige modale Synthese von Entkopplungsregelungen“, *at - Automatisierungstechnik* 36 (1988), 434-441.
- [86] G. Roppenecker, „Zustandsregelung linearer Systeme - Eine Neubetrachtung“, *at - Automatisierungstechnik* 57 (2009), 491-498.
- [87] H. H. Rosenbrock, *State-space and Multivariable Theory*, Th. Nelson and sons, London, 1970.
- [88] R. Rothfuß, „Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme“, Dissertation, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [89] R. Rothfuß, J. Rudolph, M. Zeitz, „Flachheit: ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme“, *at - Automatisierungstechnik* 45 (1997), 517-525.
- [90] R. Rothfuß, A. Riek, M. Reuss, „Flachheitsbasierte Regelung und Zustandsschätzung für einen Fedbatch-Bioprozess“, *at - Automatisierungstechnik* 48 (2000), 224-234.
- [91] J. Rudolph, F. Woittennek, „Flachheitsbasierte Randsteuerung von elastischen Balken mit Piezoaktuatoren“, *at - Automatisierungstechnik* 50 (2002), 412-421.
- [92] C. Schweers, *Implementierung einer flachheitsbasierten Reglerumschaltstrategie am Viertelfahrzeugprüfstand ModulX*, Diplomarbeit, RtM, Universität Paderborn, Paderborn, 2009.
- [93] H. Sira-Ramirez, S. K. Agrawal, *Differentially Flat Systems*, Marcel Dekker, New York/Basel, 2004.
- [94] B. Srinivasan, P. Huguenin, D. Bonvin, „Global stabilization of an inverted pendulum - Control strategy and experimental verification“, *Automatica*, Vol. 45 (2009), 265-269.
- [95] F. Svaricek, „Nullodynamik linearer und nichtlinearer Systeme: Definitionen, Eigenschaften und Anwendungen“, *at - Automatisierungstechnik* 54 (2006), 310-322.
- [96] S. Tarbouriech, M. Turner, „Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems“, *IET Control Theory and Applications* 3 (2007), 1-19.
- [97] V. Teichrieb, *Konstruktiver Entwurf eines integrierten Radmoduls und Realisierung eines Hardware-in-the-Loop-Prüfstands*, Diplomarbeit, MLaP, Universität Paderborn, Paderborn, 2004.
- [98] M. Treuer, T. Weißbach, U. Smolka, „Flachheitsbasierte Führung und Regelung von Kraftwerken“, *9. GMA/ETG-Fachtagung: Netzregelung und Systemführung*, München (2008), 75-83.

- 
- [99] M. C. Turner, D. J. Walker, „Modified linear quadratic bumpless transfer“, *Proc. Amer. Contr. Conf.* (1999), 2285-2289.
- [100] M. C. Turner, D. J. Walker, „Linear quadratic bumpless transfer“, *Automatica* 36 (2000), 1089-1101.
- [101] R. Uram, „Bumpless Transfer Under Digital Control“, *Control engineering* 18, 3 (1971), 59-60.
- [102] H. Vöcking, *Multirate-Verfahren und Umschaltstrategien für verteilte Reglersysteme*, Diplomarbeit, Universität Paderborn, Paderborn, 2003.
- [103] K. S. Walgama, S. Rönnbäck, J. Sternby, „Generalisation of the conditioning technique for anti-windup compensators“, *Proc. IEE* 139 (1992), 109-118.
- [104] D. Yankulova, J. Adamy, „LMI-Entwurf schneller Regler mit impliziten Ljapunov-Funktionen“, *at - Automatisierungstechnik* 56 (2008), 636-643.
- [105] L. Zaccarian, A. R. Teel, „The  $L_2$  bumpless transfer problem for linear plants: Its definition and solution“, *Automatica* 41 (2005), 1273-1280.
- [106] M. Zeitz, „Flachheitsbasierter Entwurf linearer zeitvarianter SISO-Systeme“, *at - Automatisierungstechnik* 60 (2012), 351-360.
- [107] M. Zeitz, „Vorsteuerungs-Entwurf im Frequenzbereich: Offline oder Online“, *at - Automatisierungstechnik* 60 (2012), 375-383.