



**UNIVERSITÄT PADERBORN**  
*Die Universität der Informationsgesellschaft*

**FAKULTÄT FÜR  
ELEKTROTECHNIK,  
INFORMATIK UND  
MATHEMATIK**

**Sensorfusion und sequenzielle Parameterschätzung  
in einer schwach gekoppelten Filterstruktur  
zur Navigation**

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik  
der Universität Paderborn

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Maik Bevermeier

Erster Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Reinhold Häb-Umbach
Zweite Gutachterin:	Prof. Dr.-Ing. Bärbel Mertsching

Tag der mündlichen Prüfung: 21.12.2011

Paderborn 2011

Diss. EIM-E/281



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Nachrichtentechnik der Universität Paderborn.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Reinhold Häb-Umbach für die Betreuung, dessen umfassende Unterstützung und das Vertrauen bei der Durchführung dieser Arbeit bedanken. Außerdem gilt mein Dank Frau Prof. Dr.-Ing. Bärbel Mertsching für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse und die Übernahme der Zweitbegutachtung. Herrn Prof. Dr. Peter J. Schreier danke ich für die Übernahme des Vorsitzes der Promotionskommission.

Des Weiteren möchte ich mich bei meinen wissenschaftlichen Kollegen vom Fachgebiet Nachrichtentechnik, Dr.-Ing. Jörg Schmalenströer, Dipl.-Ing. Dang Hai Tran Vu und M. Sc. Hoang Kha für die vielen ausgiebigen Diskussionen und ihre Hilfe bedanken. Dazu zählt ebenfalls Jörg Ullmann, der als Systemadministrator vor allem bei Computerproblemen stets hilfsbereit zur Stelle war. Besonders bedanken möchte ich mich auch bei meinen Kollegen Dipl.-Inf. Sven Peschke, Dr.-Ing. Alexander Krüger sowie Dipl.-Ing. Volker Leutnant für die vielfältigen Diskussionen und Anregungen bei der Ausarbeitung dieser Dissertationsschrift. Nicht zuletzt gilt mein Dank aber auch den beiden guten Seelen des Fachgebiets Ursula Stiebritz und Peter Schütte sowie den vielen Studenten, die ich während meiner Zeit als Mitarbeiter betreuen durfte und die immer motiviert mitgearbeitet haben. Dies sind in erster Linie meine ehemaligen Studenten Dipl.-Ing. Florian Jacob, Dipl.-Ing. Oliver Walter und Dipl.-Ing. Aleksej Chinaev, die dem Fachgebiet Nachrichtentechnik als wissenschaftliche Mitarbeiter erhalten geblieben sind.

Vor allem aber bedanke ich mich bei meiner Freundin Stefanie, ihrer und ganz besonders meiner Familie für die Geduld und die Unterstützung, die sie während der Durchführung meines Studiums, der nachfolgenden wissenschaftlichen Tätigkeit sowie meiner Promotion vor allem in anstrengenden Zeiten aufgebracht haben. Ihr Vertrauen gab mir den notwendigen Rückhalt und hat mir diesen Weg überhaupt erst ermöglicht.

Paderborn, im Dezember 2011

Maik Bevermeier



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Stand der Forschung und Technik</b>	<b>3</b>
2.1	Navigation und Ortung von Fahrzeugen . . . . .	4
2.1.1	Satellitenbasierte Systeme . . . . .	7
2.1.1.1	GPS . . . . .	7
2.1.1.2	Galileo . . . . .	7
2.1.1.3	Stützung für satellitenbasierte Navigationssysteme . . . . .	8
2.1.2	Kartenbasierte Navigation . . . . .	9
2.1.3	Sensoren für die Fahrzeugnavigation . . . . .	11
2.1.3.1	Inertiale Sensoren . . . . .	12
2.1.3.2	Barometrische Sensoren . . . . .	16
2.1.4	Sensorfehler . . . . .	16
2.1.5	Systeme auf Basis von integrierten Sensoren . . . . .	18
2.1.5.1	Inertiale Navigation . . . . .	18
2.1.5.2	Koppelnavigation . . . . .	19
2.1.5.3	Berücksichtigung spezifischer Bewegungsmodelle . . . . .	20
2.1.5.4	Kamerabasierte Systeme . . . . .	21
2.2	Sensorfusionsverfahren . . . . .	21
2.3	Verfahren zur Schätzung von unbekannten Parametern . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Wissenschaftliche Ziele</b>	<b>27</b>
3.1	Verbesserung der Positionsschätzung . . . . .	27
3.2	Berücksichtigung von Messungenauigkeiten . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Grundlagen der gekoppelten Navigation</b>	<b>33</b>
4.1	Inertiale Messtechnik . . . . .	33
4.1.1	Koordinatensysteme . . . . .	34
4.1.2	Höhendefinitionen . . . . .	37
4.2	Bezugssystemtransformation . . . . .	38
4.2.1	Eulerwinkelparametrisierung . . . . .	38
4.2.2	Quaternionenparametrisierung . . . . .	41
4.3	Strapdown-Berechnung . . . . .	44
4.4	Das <i>Global Positioning System</i> . . . . .	47
4.5	Fehlermodelle für inertielle Sensoren . . . . .	48
4.6	Zustands- und Parameterschätzung . . . . .	54
4.6.1	KALMAN-Filter . . . . .	54

4.6.2	Fehlerfilter . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Kombiniertes Navigationsfilter</b>	<b>61</b>
5.1	Systemübersicht . . . . .	61
5.2	Schwach gekoppelte Fehlerfilterung . . . . .	63
5.2.1	Filtergleichungen . . . . .	63
5.2.1.1	Systemmodell . . . . .	63
5.2.1.2	Messmodell . . . . .	65
5.2.2	Korrektur des externen Systemzustandes . . . . .	69
5.3	Implementierungsaspekte . . . . .	70
5.3.1	Ablauf der Filterung . . . . .	70
5.3.2	Zeitlich verzögerte Satellitenmessungen . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Barometrisches Höhenfilter und topografische Datenbank</b>	<b>75</b>
6.1	Systemübersicht . . . . .	76
6.1.1	Fehlermodellierung für barometrische Sensoren . . . . .	77
6.1.2	Barometrische Höhenmessung . . . . .	79
6.2	Topografischer Kartenabgleich . . . . .	80
6.3	Aufbau des barometrischen Fehlerfilters . . . . .	82
6.3.1	Systemmodell . . . . .	82
6.3.2	Messmodell . . . . .	82
6.3.3	Korrektur der Höhenmessung . . . . .	83
6.4	Ergebnisse . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Sequenzielle Parameterschätzung</b>	<b>87</b>
7.1	Sequenzieller <i>Expectation-Maximization</i> -Algorithmus . . . . .	87
7.1.1	Herleitung der Gleichungen . . . . .	88
7.1.2	Details zur Umsetzung . . . . .	95
7.1.3	Erweitertes Zustandsmodell . . . . .	96
7.1.4	Sekundärfilterung . . . . .	97
7.2	Empirische Parameterschätzung . . . . .	100
7.2.1	Ausgangsbasis . . . . .	100
7.2.2	Kovarianzmanagement . . . . .	102
7.2.3	Modifiziertes Kovarianzmanagement . . . . .	103
7.3	Parameterschätzung durch Auswertung von Messwertdifferenzen . . . . .	105
<b>8</b>	<b>Analyse der inertialen Sensoreinheit</b>	<b>109</b>
8.1	ALLAN-Varianz . . . . .	109
8.2	<i>Miniature Tracking inertial</i> -Sensoreinheit . . . . .	111
8.3	Einfluss von Trajektoriendynamik . . . . .	114

<b>9</b>	<b>Untersuchungsergebnisse</b>	<b>117</b>
9.1	Kombination des barometrischen Teilsystems und des Fehlerfilters . . . . .	117
9.1.1	Simulationsergebnisse . . . . .	118
9.1.1.1	Vergleich der Höhenschätzungen . . . . .	118
9.1.1.2	Gesamtnavigationslösung . . . . .	121
9.1.2	Ergebnisse unter Verwendung von Felddaten . . . . .	123
9.1.2.1	Höhenprofil . . . . .	124
9.1.2.2	GPS-Signalabbrüche . . . . .	125
9.2	Sequenzielle Parameterschätzung mit Fehlerfilterung . . . . .	127
9.2.1	Simulationsergebnisse . . . . .	127
9.2.1.1	Wahl heuristischer Parameter . . . . .	128
9.2.1.2	Einfluss bekannter Korrelationen auf das Kovarianzmanagement .	130
9.2.1.3	Schätzungen der Rauschparameter . . . . .	131
9.2.1.4	Eigenschaften der Filterstruktur . . . . .	136
9.2.1.5	Auswirkung der Parameterschätzung auf die Navigationslösung . .	139
9.2.2	Tiefpassfilterung der Inertialsensordaten . . . . .	143
9.2.3	Ergebnisse unter Verwendung von Felddaten . . . . .	145
9.2.4	Gegenüberstellung der sequenziellen Schätzverfahren . . . . .	148
9.2.4.1	Vor- und Nachteile . . . . .	148
9.2.4.2	Komplexität . . . . .	150
9.2.4.3	Fazit . . . . .	151
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>153</b>
<b>A</b>	<b>Ergänzungen zum <i>Global Positioning System</i></b>	<b>157</b>
A.1	Fehlerquellen . . . . .	157
A.2	Proprietäre PUBX-Datensätze . . . . .	159
<b>B</b>	<b>Ergänzungen zum Navigationsfilter</b>	<b>161</b>
B.1	Mathematische Zusammenhänge . . . . .	161
B.2	Herleitung der Navigationsfiltergleichungen . . . . .	161
B.3	Herleitung der Systemgleichung des Fehlerfilters . . . . .	164
<b>C</b>	<b>Herleitung der Filtergleichungen zur Berücksichtigung zeitverzögerter Messungen</b>	<b>169</b>
<b>D</b>	<b>Herleitung der barometrischen Höhenformel</b>	<b>173</b>
<b>E</b>	<b>Ergänzungen zu den Parameterschätzverfahren</b>	<b>177</b>
E.1	Sequenzieller <i>EM</i> -Algorithmus . . . . .	177
E.2	Empirische Parameterschätzung . . . . .	179
E.3	Auswertung von Messwertdifferenzen . . . . .	181

<b>F</b>	<b>Erzeugung künstlicher Daten</b>	<b>185</b>
F.1	Datensatz 1 . . . . .	191
F.2	Datensatz 2 . . . . .	192
<b>G</b>	<b>Ergänzung zur Analyse einer inertialen Sensoreinheit</b>	<b>193</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>195</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>199</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>211</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>213</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>215</b>
	<b>Eigene Publikationen</b>	<b>225</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Die genaue Lokalisierung von sich bewegenden Objekten ist bereits seit vielen Jahren für Wissenschaft und Industrie ein bedeutsames Forschungsthema. Eine Reihe theoretischer und technischer Innovationen ging daraus hervor. Im Zusammenhang mit Lokalisierung ist heutzutage jedoch nicht nur die reine Ortsbestimmung von Personen, Fahrzeugen, Schiffen oder anderen Objekten gemeint. Vielmehr gehen die Begriffe Lokalisierung/Ortung und Navigation einher. Unter Navigation werden im Wesentlichen drei Teilbereiche zusammengefasst [TW04]. Neben der Bestimmung einer geografischen Position durch Ortsbestimmung nach unterschiedlichen Verfahren spielt die Berechnung des optimalen Weges zu einem Ziel und das Führen z. B. eines Fahrzeuges zu genau diesem Ziel eine wichtige Rolle. Um die damit verbundenen Probleme bewältigen zu können, werden in unterschiedlichen Bereichen wie der Seeschifffahrt oder der Luftfahrt und nicht zuletzt im Bereich der Kraftfahrzeug (KFZ)-Technik unterschiedliche Messeinrichtungen und Hilfsmittel verwendet, die sich im Laufe der Jahre immer weiterentwickelt haben.

Ein möglichst einwandfrei funktionierendes Navigationssystem ist im KFZ-Bereich schon seit langem nicht mehr wegzudenken, und im Laufe der Zeit haben sich die Anforderungen an diese Systeme immer weiter erhöht. Somit scheint die Forderung nach einem wenig fehleranfälligen System, das auch bei einem beeinträchtigten *Global Positioning System (GPS)*-Empfang noch zuverlässige Positionsangaben liefert, äußerst naheliegend. Zudem werden Navigationssysteme mehr und mehr mit anderen Systemen kombiniert, was vor allem bei zukünftigen Verkehrsleitsystemen in Kombination mit einer *Car-2-Car (C2C)*-Kommunikationsinfrastruktur prognostiziert wird [Cvi].

In dieser Arbeit werden zwei Ansätze aufgegriffen, um die Navigationslösung eines Ortungs- bzw. Navigationssystems von beispielsweise Fahrzeugen langfristig zu stabilisieren: die Stützung des Systems mit Hilfe von verbesserten Höheninformationen sowie die Schätzung von Rauschparametern inertialer Sensorsignale. Das als Ausgangsbasis verwendete Navigationsfilter ist bereits seit mehreren Jahren etabliert und wird in der Praxis aufgrund seiner Robustheit gegenüber nicht vorhersagbarer Messungenauigkeiten eingesetzt [Wen07]. Dieses basiert auf dem Ansatz, nicht eine absolute Navigationsgröße zu filtern, sondern deren Fehler, wobei hauptsächlich ein *GPS*-Empfänger zur Stützung verwendet wird. Die eigentliche Navigationslösung wird außerhalb des Filters auf Basis inertialer Sensordaten berechnet, die in erster Linie von Drehraten- und Beschleunigungssensoren geliefert werden.

Ein Schwachpunkt bei der Stützung eines Navigationsfilters durch bereits vorgefilterte *GPS*-Daten ist die Höhenkoordinate, die einen hohen Messfehler aufweist [AP99]. In dieser Arbeit soll dieser Fehler mit Hilfe eines Ansatzes auf Basis von Temperatur- und Luftdruckmessungen sowie kartografischer Informationen vermindert werden. Des Weiteren wird hier ein Verfahren hergeleitet, das eine sequenzielle Schätzung der Rauschparameter von Signalen einer inertialen Messeinheit (IME) ermöglicht. Den Ausgangspunkt hierfür bildet der auf dem Gebiet der Parameterschätzung etablier-

te iterative *Expectation-Maximization (EM)*-Algorithmus. Er geht ursprünglich von Beobachtungen aus, die in Blöcken vorhanden sind [Moo96], [LK99]. Hier wird er jedoch so abgewandelt, dass eine sequenzielle, abtastwertweise Verarbeitung ermöglicht wird.

In Kapitel (Kap.) 2 wird anhand etablierter und aktueller Arbeiten der Stand der Forschung und der Stand aktueller Techniken dargestellt, um ein Fahrzeug zu orten und an einen bestimmten Zielort navigieren zu können. Dabei wird ein kurzer allgemeiner Einblick in die Fahrzeugnavigation gegeben. Im Anschluss werden die drei Hauptkomponenten, die in diesem Bereich momentan die größte Rolle spielen, detailliert betrachtet: satellitenbasierte Systeme, kartenbasierte Systeme sowie Sensorsysteme. Es wird dabei u. a. ein Schwerpunkt auf die inertialen Sensoren und ihre Fehler gelegt. Außerdem werden Verfahren vorgestellt, die dazu dienen, die Daten verschiedener Informationsquellen zu fusionieren. In Bezug auf den Schwerpunkt dieser Arbeit wird darüber hinaus ein Überblick über aktuelle Algorithmen gegeben, mit deren Hilfe unbekannte Parameter, welche die Navigationslösung beeinträchtigen, geschätzt und kompensiert werden können. Dies schließt vor allem Verfahren ein, die eine Nachführung von zeitveränderlichen Varianzen ermöglichen.

Auf dieser Basis werden in Kap. 3 die wissenschaftlichen Ziele dieser Arbeit im Detail dargelegt. Im Anschluss daran werden in Kap. 4 die benötigten Grundlagen erläutert, die im Zusammenhang mit der inertialen Navigation und für die weiteren Ausführungen eine Rolle spielen. Gegenstand von Kap. 5 ist dann die Vorstellung des eingesetzten Navigationsfilters mit den dazugehörigen Komponenten. Im Mittelpunkt von Kap. 6 steht das barometrische Teilsystem, das für die Stützung des Navigationsfilters mit Hilfe einer Höheninformation entwickelt wurde. Diese wird mit Hilfe der barometrischen Höhenformel gewonnen. Das vorgestellte Filter dient dazu, die Fehler, die sich aus der barometrischen Messung ergeben, schätzen und nachfolgend kompensieren zu können. In Kap. 7 wird schließlich das sequenzielle Parameterschätzverfahren präsentiert, das aus dem *EM*-Algorithmus hergeleitet wird und eine Schätzung der Systemrauschvarianzen im Rahmen eines Fehlerfilters (FF) ermöglicht. Im Mittelpunkt steht dabei die Verwendung des NEWTON-Verfahrens. Des Weiteren werden einige Besonderheiten erörtert, die sich durch den Einsatz eines linearisierten KALMAN-Filters (LKF) in Kombination mit dem Parameterschätzverfahren ergeben. Neben dem modifizierten *EM*-Algorithmus werden zwei weitere Schätzverfahren vorgestellt, wobei das so genannte Kovarianzmanagement (KM) auf einer empirischen Mittelwert- und Varianzberechnung beruht und das Messwertdifferenzen-Verfahren (MD) zeitliche Korrelationen auf Basis der Differenz aufeinanderfolgender Messungen rekursiv berechnet. Im nachfolgenden Kapitel werden dann einige Voruntersuchungen zu der verwendeten IME hinsichtlich ihrer charakteristischen Parameter präsentiert. Die Ergebnisse der Untersuchungen zum barometrischen Höhenfilter als Bestandteil des gesamten Navigationssystems sowie zum sequenziellen *Expectation-Maximization*-Algorithmus (SEM) im Vergleich zu den anderen Ansätzen werden in Kap. 9 aufgeführt. Den Abschluss dieser Arbeit bildet eine Zusammenfassung, in der auch ein Resümee gezogen sowie ein Ausblick auf weiterführende Arbeiten gegeben wird.

## Kapitel 2

### Stand der Forschung und Technik

In der Schifffahrt wurde, wie in [Tog04] beschrieben, bereits zu Zeiten von KOLUMBUS auf Basis einer Richtungs- und Geschwindigkeitsbestimmung anhand von Sternen als Fixpunkte navigiert. Auch Seekarten und Seehandbücher wurden verwendet. Bis zum 8. Jahrhundert wurde nur mit einem Lot und einer einfachen Koppelnavigation der Weg in der Seefahrt bestimmt. Dieses geschah aber immer in Sichtweite zur Küste, da die Koppelnavigation allein, d. h. die Bestimmung eines Wegpunktes anhand einer Richtung und des zurückgelegten Weges, nicht ausreichte. Im 12. Jahrhundert wurde in Europa zum ersten Mal auch der Kompass verwendet, der die magnetische Eigenschaft einer kleinen Magnetit-Nadel ausnutzt, weil diese in Richtung eines magnetischen Pols zeigen kann [Fri06]. Effekte wie Deklination, die den Unterschied zwischen geografischem Pol und dem magnetischen Pol beschreibt, Deviation, welche die Missweisungen eines Kompasses aufgrund von sich in der Nähe befindender magnetischer Felder beschreibt, Inklination oder Kompassdrehfehler wurden dabei erst einige Jahre später erkannt. Die geografische Breite konnte, wenn auch relativ ungenau, zum ersten Mal im 14. Jahrhundert mit einem so genannten Jakobsstab bestimmt werden. Der ca. 200 Jahre später entwickelte Quadrant bot mit einer Genauigkeit von bis zu  $1^\circ$  etwas mehr Zuverlässigkeit, denn es konnten damit Himmelskörper angepeilt werden. Mit Hilfe eines Fadens, an dem ein Gewicht befestigt war, das von der Erdanziehungskraft nach unten gezogen wurde, konnte durch Anpeilen der Sonne der Winkel zwischen Sonne und einem anderen Himmelskörper oder dem Horizont ermittelt werden. Höhere Genauigkeiten erreichte man später mit einem Sextanten. Dieser war bis auf  $0,1^\circ$  genau. Das Chronometer machte es dann viele Jahre später möglich, auch den Längengrad zu messen. Die mechanischen Gesetze von Sir ISAAC NEWTON waren der Grundstein für die inertielle Navigation, wie wir sie heute kennen. Allerdings wurden erst 200 Jahre später die ersten inertialen Sensoren entwickelt. Weitere bahnbrechende Navigationsmethoden entwickelten sich im Laufe des letzten Jahrhunderts. Dazu zählt vor allem die Satellitennavigation zu Beginn der 60er Jahre [FB99]. Das so genannte *TRANSIT-Navy Navigation Satellite System (TRANSIT-NNSS)* der *United States (US)*-Marine war der Vorreiter zu den heute bekannten satellitenbasierten Systemen wie beispielsweise dem *GPS*. Auch die terrestrische Seenavigation entwickelte sich erst später. Bei dieser Navigationsart werden neben terrestrischen Standlinien (fest definierte Linien, auf denen sich ein Schiff zum Zeitpunkt einer Beobachtung befindet) so genannte Funkbaken eingesetzt, die zur Navigation von Schiffen in Küstennähe dienen sollen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit spielen jedoch zwei weitere Navigationsarten eine Rolle: die Inertialnavigation und die integrierte Navigation. Bei der Inertial- oder auch Trägheitsnavigation werden Kreisel und Beschleunigungsmesser als Basisinstrumente verwendet. Durch ein- bzw. zweifache Integration über die Zeit erhält man die Geschwindigkeit und die dadurch resultierende Positionsänderung. Die integrierte Navigation stellt keine neue Navigationsart dar. Vielmehr werden hierbei die Vorteile der Trägheitsnavigation und der Satellitennavigation in einem Verfahren kombiniert, so dass

einerseits eine zuverlässigere Aussage über eine Position getroffen werden kann, andererseits aber auch ein Qualitätsmaß für die Schätzung vorliegt (Integrität). Nachteilig bei der reinen Inertialnavigation sind Abweichungen, die sich sogar quadratisch mit der Zeit kumulieren können. Daher wird eine Stützung durch ein anderes Verfahren bevorzugt, um diesen Abweichungen entgegenzuwirken. Häufig ist die Satellitennavigation dafür geeignet. Im Folgenden werden aufgrund des beschriebenen Zusammenhangs die Begriffe „inertiale Navigation“ und „integrierte Navigation“ gleichbedeutend verwendet und eine detailliertere Übersicht über den Stand der Forschung und Entwicklung dieses Themenbereichs gegeben.

## 2.1 Navigation und Ortung von Fahrzeugen

Die heutzutage gängigste Art, ein Fahrzeug von einem Ziel zum anderen ohne Kenntnis einer speziellen Wegstrecke zu navigieren, geschieht mit Hilfe eines Navigationscomputers, der entweder in ein Fahrzeug integriert ist oder nachgerüstet werden kann. Letztere können allerdings anfällig sein, wenn sie ausschließlich satellitenbasierte Daten wie die eines *GPS*-Empfängers verwenden, denn diese sind u. U. aufgrund von z. B. Abschattungseffekten nicht immer verfügbar. In Europa wurden in den letzten Jahren mehrere Millionen dieser relativ kostengünstigen Geräte vertrieben und dabei technisch immer weiter verbessert. Es wurden beispielsweise der Detailgrad der mitgelieferten Straßenkarten weiter erhöht und immer mehr Interessenspunkte (engl. *Points Of Interest (POI)*) hinzugefügt. Diese umfassen u. a. Positionsinformationen von z. B. Tankstellen, Hotels oder auch fest installierten Radarfallen. Mit Hilfe der Karten soll der Fahrer eines Fahrzeugs in der Lage sein, seine Position und die Umgebung laufend zu verfolgen. In einer Reihe von Fahrzeugen, z. B. Taxis oder Polizeiwagen, sind solche Systeme seit Jahren unersetzlich.

Ein Fahrer soll außerdem in naher Zukunft mit modernen Verkehrsüberwachungssystemen bei der Navigation unterstützt werden. Dies schließt z. B. die Fahrzeug-zu-Fahrzeug (engl. *Car-2-Car (C2C)*) oder Fahrzeug-zu-Infrastruktur (engl. *Car-2-Infrastructure (C2I)*)-Kommunikation mit ein [Car]. Hierbei sollen neben anderen Fahrzeugen auch Kommunikationsbaken oder Verkehrsschilder mit dem Fahrzeug Informationen austauschen. Auf diese Weise sollen ein besserer Verkehrsfluss erreicht und Unfälle vermieden werden. Projekte, welche die *C2C*-Idee verfolgen, sind u. a. *PREVENTive and Active Safety Applications (PREVENT)* [Pre] und *Smart Vehicles on Smart Roads (SAFESPOT)*, wobei die Entwicklung autonomer Fahrzeuge im Mittelpunkt steht [Saf]. Im *Cooperative Vehicle-Infrastructure Systems (CVIS)*-Projekt werden Möglichkeiten für Fahrerassistenzsysteme (engl. *Advanced Driver Assistance Systems (ADAS)*), elektronische Mauterhebung, Flottenmanagement und Systeme zur Verkehrsüberwachung untersucht [Cvi]. Dabei spielt vorrangig die Zuverlässigkeit der Informationen und der Übertragung eine Rolle. Dies wird auch in [SBBD08] untersucht.

In den Forschungsarbeiten der letzten Jahre wurden im Wesentlichen die in Abbildung (Abb.) 2.1 aufgeführten Informationsquellen zur Navigation genutzt [SH09]. Während ein satellitenbasiertes System (engl. *Global Navigation System (GNS)*) direkt die Ortsbestimmung eines Fahrzeugs durchführen kann, liefern die anderen Informationsquellen i. d. R. lediglich Hilfsdaten für den in rot dargestellten Fusionsalgorithmus [JDW03]. Die Sensoren zur Bestimmung der Fahrdynamik können jedoch direkt den Zustand eines Fahrzeugs bestimmen (z. B. die Lage in Bezug auf ein vorher definiertes Koordinatensystem). Zusätzliches Kartenmaterial oder Bewegungsmodelle erlauben es, die durch die anderen Informationen gewonnenen Schätzungen auf Konsistenz zu überprüfen. Bei der Auswertung von Karteninformationen für die Navigation spricht man auch von *Map Matching (MM)*. Dies wird

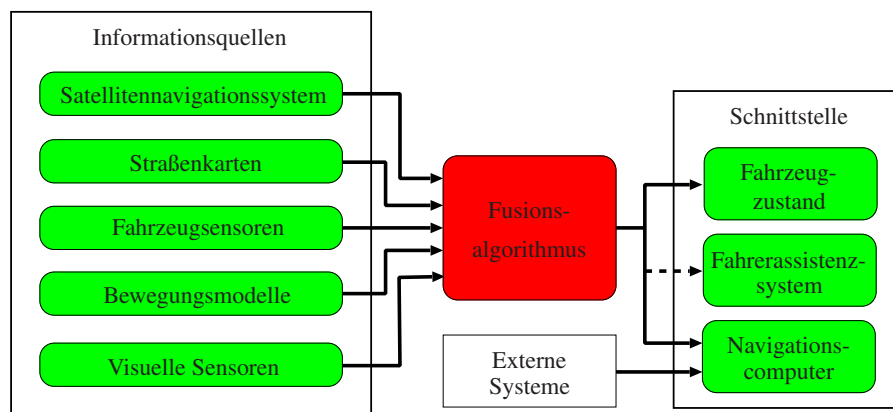


Abbildung 2.1: Verfügbare Informationsquellen und Informationsfluss in einem Fahrzeugnavigationssystem [SH09]

im Folgenden noch ausführlicher erläutert. Die visuellen Sensoren liefern keine direkten Daten zur Position oder zum Zustand des eigenen Fahrzeugs, sondern vielmehr Beobachtungen von der Umgebung des Fahrzeugs. Sie spielen vorrangig eine Rolle bei Systemen zur Unfallvermeidung [HL04], [MT06]. Moderne KFZ bieten die Möglichkeit, auf Basis solcher Sensoren eine Abstandsmessung zu Fahrzeugen in der unmittelbaren Umgebung durchzuführen und im Falle der Unterschreitung einer festgelegten Distanz Warnmeldungen an den Fahrzeugführer herauszugeben (Fahrerassistenzsysteme). Um eine weitere Verbesserung beim Navigieren zu erreichen, ist es außerdem denkbar, Informationen eines Verkehrsleitsystems zu verwenden. Diese können direkt mit den Systemen des Fahrzeugs verbunden werden, um z. B. dem integrierten Navigationssystem aufgrund von Verkehrsstaus eine Routenänderung zu empfehlen.

Aus den erwähnten Informationsquellen gilt es, eine geeignete Auswahl oder Kombination zu finden, die für die jeweilige Anwendung hinsichtlich Leistungsfähigkeit oder auch hinsichtlich Komplexität und Kosten am besten geeignet ist. Um die Leistungsfähigkeit eines Systems beurteilen zu können, spielen nach [Hei00] folgende Punkte eine Rolle:

- **Verfügbarkeit/Abdeckung:** Maßangabe, wie groß das Abdeckungsgebiet eines Navigationssystems ist. Im Fall von *GPS* ist es die Verfügbarkeit aufgrund der möglichen Satellitenkonstellationen unter Berücksichtigung von Abschattungen etc. Diese liegt momentan bei ca. 98 %, d.h. 98 % der Orte auf der Erdoberfläche sind zu jedem Zeitpunkt durch so viele Satelliten abgedeckt, dass eine Ortsbestimmung möglich ist.
- **Zuverlässigkeit:** Maßangabe, inwiefern man der beobachteten Größe, z. B. *Pseudorange*- oder *Deltarange*-Messung, vertrauen kann. Aufgrund statistischer Annahmen bei der Filterung ist die zu schätzende Größe auch nach der Filterung mit einem Restfehler behaftet. Die a posteriori-Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für die Zuverlässigkeit einer Beobachtung.
- **Ausfallwahrscheinlichkeit:** Die Ausfallwahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass das jeweilige System kontinuierlich Informationen an den Empfänger oder den Fusionsalgorithmus liefern kann.
- **Genauigkeit:** Die Genauigkeit ist ein Maß für die Qualität der jeweiligen Information, die geliefert wird. Sie gibt den Abstand zwischen der gelieferten Beobachtung und der eigentlichen, wahren Größe an.



Wenn Signale von weniger als vier Satelliten empfangen werden, so ist eine Positionsschätzung lediglich mit Hilfe geeigneter Filteralgorithmen möglich (z. B. KALMAN-Filterung) [MBH05]. Dabei wird aber lediglich auf Basis eines Bewegungsmodells der Fahrzeugzustand prädictiert. Mit Kartendaten kann die geschätzte Position zusätzlich auf Rationalität überprüft werden, denn ein Fahrzeug wird sich i. d. R. nicht 5 m neben einer Fahrspur auf einem Feld befinden. Neben einer unzureichenden Anzahl an empfangbaren Satelliten können weitere Effekte zu einer schlechten Navigationslösung führen. Dazu zählen die Mehrwegeausbreitung und die Abschattung durch Gebäude und andere Objekte. Erstere können vom Empfänger nicht registriert werden, wodurch die Zuverlässigkeit reduziert wird. Mehrwegeausbreitungseffekte werden in [GTC07] und [LL07] untersucht. In [GTC07] wird beispielsweise ein Ansatz vorgestellt, um die Mehrwegeausbreitung mit Hilfe von Partikelfiltern zu kompensieren. Eine Empfängerstruktur, die diese Effekte konstruktiv ausnutzt, findet man in [EMR05].

Aus den genannten Gründen wird z. B. in [BPHU09a] eine Komplementärfilterung mit verschiedenen inertialen Sensoren vorgeschlagen. Hier wird eine Filterung der einzelnen Sensorkomponenten und deren Fehler, aber auch der GPS-Daten in separaten KALMAN-Filtern durchgeführt. Auf diese Weise entsteht eine mehrstufige Filterstruktur. Die einzelnen Schätzungen werden dabei durch einen BAYES'schen Kombinationsalgorithmus unter Berücksichtigung der individuellen Schätzfehlervarianzen zusammengeführt. Des Weiteren wird durch Rückkopplung erreicht, dass der geschätzte Sensorfehler (z. B. Bias) direkt von der Sensormessung am Eingang abgezogen wird und sich dadurch nicht kumuliert. In [OLS07] wird dagegen eine Kombination von odometrischen Daten und Informationen eines Gyroskops untersucht und in einem realen Fahrzeug getestet. Diese Kombination wird ebenfalls als Koppelnavigation bezeichnet, weil ausgehend von einer initialen Position diese mit Hilfe der Sensordaten aufintegriert wird. Das Ergebnis wird anschließend mittels Zustandsmaschinen einem *Map Matching* (MM)-Verfahren unterzogen. Beim MM wird eine aktuelle Positionsschätzung laufend mit Einträgen einer Datenbank verglichen. Diese enthält Koordinaten von Straßenzügen oder auch einzelnen Fahrbahnspuren. Aktuelle Navigationssysteme in einem Fahrzeug nutzen nicht nur Informationen eines Satellitensystems wie GPS, sondern bilden diese zusätzlich per MM auf Straßenkarten ab [OLS07], [BLN07]. In [GGB<sup>+</sup>02] wird das Resultat eines MM wiederum genutzt, um durch Rückkopplung die Sensorfehler zu kompensieren und folglich die Schätzgenauigkeit zu erhöhen.

Ein Nachteil, der sich bei der ausschließlichen Verwendung eines Empfängers für Satellitennavigation ergibt, ist dessen relativ geringe Messwertaktualisierungsrate von  $1 \frac{1}{s}$  bis  $4 \frac{1}{s}$ . Durch den Einsatz inertialer Sensoren kann der Zeitraum zwischen den Aktualisierungszeitpunkten, in dem keine Satellitendaten verfügbar sind, überbrückt werden. Moderne, günstige Sensoren besitzen Datenraten von bis zu  $200 \frac{1}{s}$ . Eine für diese Arbeit verwendete inertielle Messeinheit (IME) der Fa. XSens, Niederlande, arbeitet mit einer maximalen Frequenz von 120 Hz [B.V09b].

Die Leistungsfähigkeit eines Fahrzeugnavigationssystems ist von vielen Faktoren abhängig. Zum einen hängt sie im Falle von MM vom verwendeten Kartenmaterial ab. Zum anderen wird aber in [AP99] festgestellt, dass hauptsächlich der satellitenbasierte Empfänger und die damit zusammenhängenden Fehler für die Genauigkeit des gesamten Navigationssystems verantwortlich sind. Wenn ein GPS-Signalausfall auftritt, so sind die Fehlercharakteristika (Drift und Bias) der Komponenten zur Koppelnavigation ausschlaggebend. Wichtig ist auch der Kalibrierungsprozess, der beim Aufbau der Sensoren durchlaufen wurde.

Im Folgenden werden die fünf genannten Informationsquellen aus Abb. 2.1 im Detail betrachtet. Dieses waren die satellitenbasierten Systeme, Straßenkarten, Fahrzeugsensoren, Bewegungsmodelle und visuelle Sensoren. Des Weiteren sollen Fusionsverfahren beschrieben werden, um die Daten der

einzelnen Quellen geeignet zu kombinieren.

### 2.1.1 Satellitenbasierte Systeme

Wenn man heutzutage von satellitenbasierter Navigation spricht, so denkt im amerikanischen und europäischen Raum zunächst jeder an das *GPS*-System. Neben dem von den *United States of America* (*USA*) entwickelten *GPS* existieren aber auch weitere Systeme, die jedoch vom Aufbau und von der Funktionsweise her ähnlich sind. Das russische System trägt den Namen *Globalnaja Nawigazionnaja Sputnikowaja Sistema* (*GLONASS*). Ein sich in der Entwicklung befindendes indisches System wird mit *Indian Regional Navigation Satellite System* (*IRNSS*) bezeichnet, wobei ein Hilfssystem mit Namen *Global Positioning System Aided Geo Augmented Navigation* (*GAGAN*) bereits in Betrieb ist. Das chinesische System heißt *COMPASS*. Die Basis der satellitenbasierten Ortung ist die Messung von Signallaufzeiten und die daraus mögliche Schätzung der Distanzen zu den jeweiligen Satelliten. Durch Triangulation kann schließlich die Position des Nutzers gefunden werden. Im Folgenden wird nur auf das *GPS* und das europäische Galileo-System näher eingegangen.

#### 2.1.1.1 GPS

Das *GPS* ist der Nachfolger des ersten satellitenbasierten Navigationssystems *TRANSIT-NNSS*. Es nutzt die zwei Frequenzen 1227,6 MHz und 1575,42 MHz und insgesamt 24 Satelliten [Wen07]. Des Weiteren ist eine dritte Frequenz in Planung, die bei 1176,45 MHz liegt [TW04]. Diese soll dazu beitragen, die Empfangsqualität weiter zu verbessern. Mit einer Fertigstellung dieser Erweiterung ist seit 2010 und mit einem Regelbetrieb ab 2013 zu rechnen. *GPS* ist so ausgelegt, dass für mittlere Breitengrade eine gute Abdeckung vorhanden ist. Ursprünglich war *GPS* ausschließlich für militärische Zwecke gedacht, wurde dann aber auch für die zivile Nutzung freigegeben. Hier überzeugt es heute im Optimalfall durch Positionsgenauigkeiten von wenigen Metern. Wie auch die anderen Systeme verwendet *GPS* kodierte Satellitensignale, mit denen ständig Positionen und die genaue Uhrzeit ausgestrahlt werden. Theoretisch reichen zur Positionsbestimmung eines Nutzers Signale von drei Satelliten aus. Die Uhren in einem handelsüblichen Empfänger sind allerdings nicht genau genug, um mit nur drei Satelliten eine genaue Laufzeitmessung zu erhalten. Daher sollten mindestens vier Satelliten in Empfängerreichweite sein, so dass auch die genaue Uhrzeit im Empfänger bestimmt werden kann. Die Lebensdauer eines *GPS*-Satelliten liegt mit ca. 7,5 Jahren deutlich über der eines *GLONASS*-Satelliten mit ca. drei Jahren. Damit sich Ausfälle nicht negativ auf die Systemleistung auswirken, sind mehr als die genannten 24, insgesamt ca. 30 Satelliten vorhanden, wobei einige als Ersatz dienen. Weitere Details zum *GPS* sind in [TW04] oder [Dix05] zu finden.

#### 2.1.1.2 Galileo

Einen großen Mehrnutzen verspricht man sich in den nächsten Jahren von dem von der *European Space Agency* (*ESA*) entwickelten Galileo-System, das noch in der Aufbauphase ist [ESA07]. Momentan befinden sich drei Satelliten im Orbit. Bis zum Jahre 2013 soll jedoch die volle Funktionalität gewährleistet sein und es sollen insgesamt 30 Satelliten für Galileo zur Verfügung stehen. Galileo soll von Beginn an in erster Linie zivilen Bedürfnissen genügen. Die Ähnlichkeit von *GPS* und Galileo führt so weit, dass eine Kompatibilität der Empfängerstrukturen beider Systeme möglich sein wird. Die *GPS*-Empfänger der Fa. Navilock mit u-blox-Komponenten [ubl] lassen sich beispielsweise durch eine Software-Aktualisierung direkt als Galileo-Empfänger nutzen. Man verspricht sich bei Galileo vor allem eine Zunahme an Genauigkeit, Zuverlässigkeit und Integrität

gegenüber *GPS*. Für Galileo sind vier Trägerfrequenzen vorgesehen: 1176,45 MHz, 1207,14 MHz, 1278,75 MHz und 1575,42 MHz.

### 2.1.1.3 Stützung für satellitenbasierte Navigationssysteme

Neben den Hauptsystemen zur Satellitennavigation werden auch eine Reihe von so genannten Hilfsystemen (engl. *Satellite Based Augmentation System (SBAS)*) eingesetzt. Wie in [FB99] und [Dix05] dargelegt, sind diese in erster Linie zur Reduzierung der systembedingten und nicht systembedingten Fehler vorgesehen, wie sie in Kap. 4.4 im Rahmen von *GPS* noch näher beschrieben werden. Dazu zählen z. B. Fehler, die durch die verschiedenen atmosphärischen Schichten bedingt sind. Die Basis solcher Systeme sind Referenzstationen auf der Erde, deren Position annähernd perfekt bekannt ist. Durch Vergleich der idealen mit der gemessenen Position kann die wirkliche Laufzeit des Satellitensignals an der Referenzstation bestimmt werden. Damit steht auch eine Information über den daraus resultierenden Positionsfehler bzw. die Zuverlässigkeit der Messung für mobile Empfänger in der Umgebung der Referenzstation zur Verfügung. Die Referenzstationen senden ihre Daten in erster Linie an eine Basisstation, welche sie aufbereitet und weitersendet. Die Basisstation kann zusätzlich Fehler berechnen, die aus Fehlern der einzelnen Satellitenuhren oder aus den variierenden Satellitenbahnen (Ephemeridendaten) resultieren. Es existieren verschiedene Verfahren, um dem Anwender die Korrektursignale zur Verfügung zu stellen. Die gängigen Empfänger können Korrektursignale (*Pseudorange* oder Phasenlagenkorrektur) von speziell zur Korrektur vorgesehenen geostationären Satelliten auf der  $L_1$ -Frequenz 1575,42 MHz empfangen. In Europa wird dieses System als *European Geostationary Navigation Overlay Service (EGNOS)* bezeichnet. Das amerikanische Vergleichssystem ist das *Wide Area Augmentation System (WAAS)*. Aber auch andere Länder wie Japan haben sich dazu entschlossen, ein Hilfssystem in Betrieb zu nehmen [Dix05]. Das japanische *Multifunctional Satellite Augmentation System (MSAS)* ist seit 2007 aktiv. Einige dieser Systeme sind in der Lage, nicht nur *GPS*, sondern auch andere Hauptsysteme wie *GLONASS* oder Galileo zu stützen und damit die Positionsschätzgenauigkeit zu erhöhen. Des Weiteren ist ein Informationsaustausch möglich.

Neben der Unterstützung per Satellit existiert auch die Möglichkeit, über Internet, über Telefon oder über Funk Korrektursignale von Referenzstationen zu erhalten. In Deutschland werden solche bodengestützten Ergänzungssysteme (engl. *Ground Based Augmentation System (GBAS)*), bestehend aus einer Telefonverbindung und einem hochgenauen Empfänger, z. B. in der Landesvermessung eingesetzt. Ein Sender, über dessen Mittelwellenfrequenz die Korrekturdaten alle 3 s gesendet werden, ist der Deutschlandfunk. Einige Empfänger sind allerdings auch in der Lage, die Signale der Bodenstationen zu empfangen. In Untersuchungen wie [CL04] konnte gezeigt werden, dass bei Verwendung von *EGNOS* oder *WAAS* eine Positionsgenauigkeit von annähernd 1 m in der horizontalen Ebene und bis zu 2 m in vertikaler Richtung möglich ist. Diese kann noch weiter erhöht werden, indem Zweifrequenz-Empfänger eingesetzt werden, welche allerdings relativ kostenaufwändig und damit für kommerzielle Anwendungen weniger geeignet sind. Beispielsweise wird in [EM99] untersucht, welche Genauigkeit mit diesen erreicht werden kann. Ist eine Echtzeitverarbeitung nicht notwendig, so kann auch auf Nachverarbeitungsverfahren zurückgegriffen werden. Auch dies wird in der Landesvermessung heutzutage noch praktiziert. Trotz dieser Stützsysteime bleiben allerdings noch Fehlerinflüsse bestehen. Dazu zählen z. B. die variierende Anzahl sichtbarer Satelliten durch ungünstige Satellitenkonstellationen und die Mehrwegeausbreitung. Weitere Effekte werden im Anhang näher erläutert.

Neben den Fehlern, die durch Hilfssysteme kompensierbar sind, existieren auch Fehler, die nicht



eliminiert werden können, weil sie z. B. durch das Empfängerdesign, die Empfängerumgebung, Probleme mit der verwendeten Software etc. zustande kommen. Einige dieser Fehlerquellen werden in [BO07] näher erläutert. *Receiver Autonomous Integrity Monitoring (RAIM)* ist eine Möglichkeit, die Integrität eines GPS-Empfängers zu überprüfen. Sie wird in [Bro92] vorgestellt. *RAIM* dient dabei nicht nur der Fehlerentdeckung, sondern auch der Fehlerkompensation. Allerdings müssten hierfür mindestens sechs Satelliten beobachtbar sein. Für die Navigationslösung könnte eine Fehlerentdeckung bedeuten, dass eine bestimmte Informationsquelle für diesen Fehler ggf. verantwortlich ist und deshalb nicht mehr für die momentane Lösung berücksichtigt werden sollte. Daraus würde eine Fehlerunterdrückung resultieren. Die notwendigen redundanten Daten können in Form eines *SBAS* oder auch in Form von weiteren Sensoren einfließen. Im Falle eines fehlerhaften Satellitensignals könnte z. B. die daraus resultierende fehlerhafte absolute Position durch eine Koppelnavigation ersetzt werden, wobei auf die letzte gültige, fehlerfreie absolute Position lediglich Distanzen addiert werden, um eine neue Positionsschätzung zu erhalten. Diese Distanzen könnten mit Hilfe von Geschwindigkeitssensoren erfasst werden. Wie in [BOF07] beschrieben, sollte man allerdings bedenken, dass ebenso ein *SBAS* fehleranfällig sein kann, beispielsweise verursacht durch Interferenzen.

### 2.1.2 Kartenbasierte Navigation

Eine einfache Möglichkeit, dem Fahrer oder Anwender eine Positionsschätzung zur Verfügung zu stellen, ist die Anzeige von Längen-, Breitengrad und Höhe als Koordinaten auf einem Display. Dies ist für einen Autofahrer jedoch wenig hilfreich, da sich die Daten schlecht interpretieren lassen. Daher wird bei heutigen Navigationsgeräten Kartenmaterial mitgeliefert, so dass sich der Fahrer auf seiner aktuellen Route besser zurechtfinden und auf zukünftige Fahrmanöver rechtzeitig einstellen kann. Das vorausschauende Fahren wird besser unterstützt, indem die aktuelle Position auf dem jeweils aktuellen Kartenausschnitt abgebildet wird. Man spricht in diesem Zusammenhang von dem bereits erwähnten *MM*, wobei in [QON07] eine Auflistung der gängigen Methoden zu finden ist. Weiterhin ermöglicht eine digitale Karte, zusätzliche Informationen in die Navigationslösung mit einfließen zu lassen. Es scheint z. B. unrealistisch, dass sich ein Fahrzeug parallel zur Fahrbahn auf einem Feld bewegt oder dass sich auf einer Autobahn die Richtung schlagartig ändert. In [PH08] und [SBLCP09] werden weitere Möglichkeiten vorgestellt, um solche Nebenbedingungen in der Navigationslösung zu berücksichtigen. Untersuchungen zur Leistungsfähigkeit aktueller *MM*-Methoden werden auch in [QNO09] präsentiert.

Die ersten digitalen Karten, die allerdings für die Fahrzeugnavigation ungeeignet sind, waren die typischen Rasterkarten, die nur eine elektronische Abbildung von gedruckten Karten sind. Bei den heutzutage verwendeten digitalen Raster- oder Vektorkarten sollte allerdings berücksichtigt werden, dass es sich nicht um Abbilder von kartografischen Karten handelt. Vielmehr sind es Datenbanken, bestehend aus Straßenkoordinaten und ausgewählten Zusatzinformationen, die für einen Fahrzeugführer interessant sind. Dies können Straßennamen, Postleitzahlen, vorgeschriebene Geschwindigkeit oder Straßenart (Autobahn, Landstraße, etc.) sein [Tom07]. Es können aber auch sekundäre Details als *Points Of Interest (POI)* in der Datenbank abgespeichert sein. Diese können z. B. fest installierte Radarfallen, Tankstellen oder Restaurants umfassen. Aber auch diese *POI* sind lediglich mittels Koordinaten in der Datenbank hinterlegt. Details über den Aufbau digitaler Karten zur Navigation sind in [Zha97] oder auch in [Whi93] zusammengefasst. In den meisten Fällen sind die Positionen als planare Größen in einer Karte hinterlegt. Die Höheninformation wird zwar angezeigt, dabei handelt es sich jedoch meist um die mittels *GPS*-Gerät erfasste Höhe. Die Kurven werden durch eine endliche Anzahl stückweise linearer Bogenelemente repräsentiert. Bei den Konturknoten laufen dabei

mehrere Bögen und/oder gerade Strecken zusammen (Kreuzungen), während die stückweise geraden Elemente durch Konturpunkte verbunden sind.

Um eine digitale Karte zu erstellen, müssen verschiedene Kenngrößen festgelegt werden. Dazu zählen der Maßstab, die benötigte Auflösung, d. h. die Genauigkeit, mit der auch das *MM* erfolgen sollte, und die Aktualität der Karte. Es ist zu bedenken, dass sich jedes Jahr 10 % bis 15 % des deutschen Straßennetzes ändern [Tom07]. Außerdem verbleiben durch die Digitalisierung Restfehler, die z. B. durch die Topologie hervorgerufen werden [QON07]. Hinzu kommen geometrische Fehler aufgrund falscher Annahmen bei den Straßenabmessungen (Abstände, Kurvenform, etc.), die zusammengekommen auch zu einem fehlerhaften *MM* führen können. Daher ist es sinnvoll, auch eine Information über die Zuverlässigkeit von Kartendaten in das *MM* mit einfließen zu lassen und laufend das Ergebnis zu kontrollieren. In [CLYC05] und [QON07] werden Untersuchungen durchgeführt, bei denen die Integrität des *MM* basierend auf den Fehlern der Fahrzeugsensoren oder des *GPS* analysiert wird.

Die bisherigen Betrachtungen gingen davon aus, dass die Kartendaten die Schätzungen auf Basis der Fahrzeugsensoren oder des satellitenbasierten Systems verbessern. In [GGB<sup>+</sup>02] und [NB07] wird gezeigt, wie die Karteninformationen wiederum genutzt werden können, um die Fehler der verwendeten Sensoren zu kompensieren bzw. zu filtern. Die Karte dient dabei als weitere Beobachtung im Rahmen einer Datenfusion.

Sobald eine Positionsschätzung auf Basis von Sensor- oder Satellitendaten vorliegt, wird das anschließende *MM* in drei Schritten durchgeführt: Zunächst sollte ein Kartenbereich ausgewählt werden, in dem die geschätzte Position mit hoher Wahrscheinlichkeit (auf Basis vorheriger Schätzungen) liegt. Dazu zählt auch eine Auswahl passender Konturelemente (Knoten und Zwischenpunkte). Anschließend wird die bedingte Wahrscheinlichkeit (Likelihood) einer korrekten Positionsschätzung auf Basis der in Frage kommenden Datenbankeinträge berechnet, wobei auch die letzten Positionen und die Straßengeometrie berücksichtigt werden [Tom07]. Der jeweilige Pfad kann einschließlich der vorherigen Wegelemente mit den entsprechenden Kandidaten in der Karte korreliert werden. Der letzte Schritt ist schließlich die Auswahl des Pfades mit der größten Likelihood.

Es werden auch topologische und geometrische Informationen berücksichtigt. Geometrische Informationen umfassen dabei u. a. die Differenzen von Richtungsdaten zwischen bestimmten Straßensegmenten und denen, die sich aus der Navigationslösung ergeben, oder einfach dem Abstand zwischen einer geschätzten Position und einer in Frage kommenden Straße in nächster Nähe. In [WHU08] wird mittels visueller Sensoren, einer digitalen Karte und unter Zuhilfenahme verschiedener Kurvenmodelle (parabolisches, clothoides und polynomiales Kurvenmodell) eine Schätzung gerader Strecken und Kurven bis zu 40 m vor einem Fahrzeug vorgenommen. Es wird gezeigt, dass man durch die Separierung einer Kurve mit Hilfe verschiedener Modelle bessere Ergebnisse in der Abschätzung der Kurvenabmessungen erzielt. Dies führt wiederum zu einer verbesserten Positionsabschätzung im Vergleich zur Verwendung von konstanten Kurvenmodellen.

Ein topologisches Überprüfungskriterium hingegen ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten bestimmter aufeinanderfolgender Straßensegmente. Möglichkeiten, die genannten Kriterien miteinander zu kombinieren, werden in [Zha97] und in [OSW<sup>+</sup>03] vorgestellt. Inwieweit Zustandsmaschinen dafür eingesetzt werden können, wird z. B. in [OLS07] erläutert. Der beschriebene Algorithmus setzt dabei zwei Zustandsautomaten ein. Der erste wird für Sensordaten des Fahrzeugs eingesetzt und besteht aus vier Zuständen, die eine geradlinige Bewegung, Anfang, Durchlaufen oder Ende einer Abbiegephase beschreiben. Die Zustandsübergänge sind dabei von gemessenen Winkelinkrementen  $\Delta\psi$  und Streckeninkrementen  $\Delta l$  abhängig. Der zweite Zustandsautomat ist ähnlich wie der erste

aufgebaut, besteht aber aus nur drei Zuständen, da der Beginn einer Kurve durch die Karte selbst definiert ist. Die Zustandsübergänge entsprechen denen des ersten Automaten, die Ausgänge bestehen aus den summierten Winkelinkrementen  $\sum \Delta\psi$  bzw. Wegstrecken  $\sum \Delta l$ . Diese werden auch als „Merkmale“ (engl. *Features*) oder Eigenschaften bezeichnet. Mit Hilfe der Merkmale aus dem Automaten zur Koppelnavigation (engl. *Dead Reckoning (DR)*) und derjenigen, die sich aus der Karte für alle möglichen Folgetrajektorien ergeben, wird schließlich die Likelihood an signifikanten Wegstellen (z. B. Kreuzungen) berechnet. Durch Feldtests zeigen die Autoren, dass sich auf diese Weise eine genaue Wegstreckenführung und Positionierung durchführen lässt.

### 2.1.3 Sensoren für die Fahrzeugnavigation

Neben den bisher angesprochenen Möglichkeiten zur Ortung existieren eine Reihe verschiedener Sensoren, die diese unterstützen und verbessern können. Durch die Drehratensensoren des Antiblockiersystems (ABS) können z. B. Driftbewegungen des Fahrzeugs erfasst und notwendige Bremsvorgänge eingeleitet werden. Eine genaue Übersicht über Sensoren, die sich in einem Fahrzeug befinden, ist in [BCD02] zu finden. Eine physikalische Betrachtungsweise über den Aufbau von Sensoren gewährt [Sch04]. Bei der Verwendung von Fahrzeugsensoren muss eine Reihe verschiedener Aspekte beachtet werden, die ausführlicher in Kap. 4 erörtert werden. Dazu zählen sowohl die unterschiedlichen Koordinatensysteme, die für die Kombination von Informationen verschiedener Quellen berücksichtigt werden müssen, als auch die auftretenden Sensorfehler. Die Sensoren können direkt für Navigationszwecke eingesetzt werden, können aber auch ausschließlich bei der Stabilisierung wie in [Tab08] eine Rolle spielen.

Als typische Sensoren, die Teilbewegungen eines Fahrzeugs erfassen können, sind Beschleunigungssensoren, odometrische Sensoren oder Drehratensensoren zu nennen. In Kombination mit einem *GNS*-Empfänger ist damit eine genauere absolute Positionsmessung möglich als es bei einem System der Fall wäre, das lediglich den *GNS*-Empfänger verwendet. Außerdem können daraus Informationen zum Fahrzeugzustand (Orientierung oder Lage) gewonnen werden. Übliche Sensoren und die von ihnen gelieferte Messwerte sind in Tabelle (Tab.) 2.1 aufgeführt. Es gibt zusätzliche Senso-

Sensor	Messgröße
Odometrische Sensoren	Zurückgelegte Strecke in [m]
Lenkwertgeber	Ausrichtung der Räder der Frontachse in [°] oder [rad]
Geschwindigkeitsaufnehmer	Laterale Geschwindigkeit in [m/s]
Drehratensensoren (Gyroskope)	Winkelgeschwindigkeit/Drehrate in [°/s] oder [rad/s]
Beschleunigungssensoren	Inertiale Beschleunigung in [m/s <sup>2</sup> ]

Tabelle 2.1: Fahrzeugsensoren und deren Messwerte

ren, die aber weder üblich noch für eine Navigation zwingend erforderlich sind. Hierzu zählen das Magnetometer und der barometrische Hözensensor (siehe Tab. 2.2).

**Odometrische Sensoren** Ein odometrischer Sensor wird auch Odometer genannt. Dieser wird neben anderen Sensoren in [ANLC03] untersucht. Er misst die Distanz, die ein Fahrzeug zwischen zwei Zeitpunkten zurückgelegt hat. Dieses geschieht häufig über die Messung der Raddrehzahl und der Kenntnis des Radumfangs. Die Drehzahl wird dabei über Impulsgeber gemessen. In [Gus09] wird beispielsweise eine Übersicht gegeben, wie mit Hilfe von zwei Drehratensensoren eine Bestimmung

Sensor	Messgröße
Magnetfeldsensoren (Magnetometer)	Magnetfelder in [G] oder [T]
Barometrische Sensoren	Druck in [Pa] und Temperatur in [°C] oder [K]

Tabelle 2.2: Weitere Sensoren, welche die Navigation unterstützen können

der zurückgelegten Wegstrecke möglich ist. Dabei sind verschiedene Fehlereinflüsse zu beachten. Der Reifendruck kann z. B. je nach Witterung, Beladung und Fahrsituation variieren, wodurch die Schätzung der Wegstrecke mit relativ großen Fehlern behaftet sein kann.

**Lenkwertgeber** Ein Lenkwertgeber misst den Einschlagwinkel eines Lenkrades. Da der Lenkwinkel proportional zur Stellung der Vorderräder ist, existiert unter Berücksichtigung einer ggf. vorhandenen geschwindigkeitsabhängigen Lenkunterstützung ein Faktor, durch den auf die Bewegungsrichtung geschlossen werden kann. Berücksichtigt man zusätzlich die Umdrehungen der Vorderräder, so ist damit auch eine Angabe der Gierwinkelrate möglich wie [Gus09] zeigt.

**Geschwindigkeitsaufnehmer** Ein Geschwindigkeitsaufnehmer basiert prinzipiell auf den gleichen Messungen wie die des Odometers. Anhand der Umdrehungen eines Rades und durch Kenntnis des Umfangs kann eine Wegstrecke und damit die Geschwindigkeit berechnet werden. Durch Messung der Drehraten von mehr als einem Rad kann ferner die Drehrate des Fahrzeugs um die Querachse bestimmt werden. Dieses wird beim ABS ausgenutzt, um Driftbewegungen des Fahrzeugs, z. B. beim Bremsen auf glatten Straßen, verhindern zu können [Wie09]. Untersuchungen dazu werden auch in [CGP04] präsentiert. Durch Verwendung der ABS-Sensoren zu Navigationszwecken hat man zwar den Vorteil, bereits vorhandene Sensoren verwenden zu können, allerdings muss man auch ungenauere Schätzergebnisse in Kauf nehmen, da die eingesetzten Sensoren häufig von geringerer Güte sind.

### 2.1.3.1 Inertiale Sensoren

**Drehratensensoren** Im KFZ-Bereich wird ein Gyroskop derzeit überwiegend für das ABS zur Unfallvermeidung verwendet. Dabei sind durchaus weniger präzise Sensorelemente ausreichend, da lediglich detektiert werden muss, ob eine bestimmte Messwertschwelle überschritten wird. Eine Kategorisierung der gebräuchlichsten Gyroskopelemente lässt sich nach [Sch04] wie folgt vornehmen:

- Elektrostatische Gyroskope (ESG)
- Drehratenwandler (z. B. magnethydropneumatische Sensoren)
- Optische Gyroskope (z. B. Ringlasergyroskope (RLG) und fiberoptische Gyroskope (FOG))
- Mikrosysteme und elektromechanische Gyroskope.

Die ersten elektrostatischen Sensoren wurden in den 50er Jahren entwickelt. Diese Sensoren basieren auf einer Berilliumkugel, die sich in einem elektrostatischen Vakuumfeld befindet und fest (bezogen auf den Inertialraum) ausgerichtet ist. Jede Bewegung des Systems wird mit einer hohen Genauigkeit erfasst, wobei die Drift nur bei ca.  $1 \cdot 10^{-4}^\circ/\text{h}$  liegt. Problematisch bei dieser Sensorart ist allerdings, dass auch bereits kleinste Vibrationen erfasst werden, die u. a. durch den Auslesevorgang selbst oder durch die Betriebsumgebung auftreten können. Hinzu kommen eine kostenintensive

Herstellung und der aufwändige Betrieb des Systems, um eine Selbstzerstörung durch z. B. Spannungsabfall zu vermeiden. Auf Basis dieser Technik wurden hochgenaue Drehratensensoren entwickelt, die überwiegend in der Flugzeugnavigation eingesetzt werden.

Die Drehratenwandler wurden erst in den 60er Jahren entwickelt und weisen beträchtliche Langzeitinstabilitäten auf, da deren Drift bei mehreren Hundert Grad pro Stunde liegen kann [DJ03]. Bestandteil eines typischen Drehratenwandlers ist eine Kugel, die aus schwerer Flüssigkeit (z. B. Quecksilber) besteht und sich in einem Hohlkörper befindet. Wird durch äußeren Einfluss nun diese Flüssigkeit in Bewegung gesetzt, so wird das Drehmoment der Kugel von Messaufnehmern mit piezoelektrischen Kristallen erfasst, die wiederum ein entsprechendes elektrisches Signal erzeugen. Das beschleunigungsabhängige Bias dieser Sensoren liegt üblicherweise zwischen  $0,294^\circ \cdot \text{m}/(\text{s} \cdot \text{s}^2)$  und  $0,49^\circ \cdot \text{m}/(\text{s} \cdot \text{s}^2)$ , während der temperaturabhängige Anteil bei bis zu  $0,5^\circ/\text{s}$  liegen kann. Der nicht-lineare Skalierungsfehler beträgt ca. 0,5 % der maximalen Drehrate und der temperaturabhängige Skalierungsfehler meist um die 5 %. Die magnethydrodynamischen Sensoren dagegen bestehen nicht aus einer gleitenden Masse, sondern aus einem Winkelbeschleunigungsmesser. Dieser erzeugt ein elektrisches Signal, das proportional zur Drehrate ist.

Die optischen Drehratensensoren enthalten keine rotierenden Bauelemente. Vielmehr nutzen sie den so genannten *Sagnac*-Effekt, wobei ein Lichtstrahl einen optischen kreisrunden Leiter in entgegengesetzte Richtungen durchläuft. Im Falle einer Rotation des Leiters müsste der Lichtstrahl für den einen Weg eine längere Strecke  $\Delta l$  zurücklegen als für den anderen Weg, da sich dieser um  $\Delta l$  verkürzt.

Bei einem Ringlasergyroskop wird ein Laserstrahl durch einen Glaskörper in gegenläufige Richtungen geschickt [Aro99]. Je nach Hersteller kann es sich hierbei um einen dreieckigen oder viereckigen Körper handeln, an dessen Ecken sich Spiegel befinden, um die Laserstrahlen zu reflektieren. Verstärkt wird der Laser durch ein Gasgemisch. Befindet sich die gesamte Anordnung nun nicht mehr in Ruhe, sondern rotiert, so verändern sich auch die Frequenzen der Laserstrahlen, wobei ein kürzerer Weg mit einer kürzeren Wellenlänge und damit einer höheren Frequenz einhergeht. Die Frequenzdifferenz beider Laserstrahlen ist ein Maß für die Rotationsgeschwindigkeit. Um die Differenz detektieren zu können, ist einer der Spiegel halb durchlässig. Hinter ihm befindet sich ein Detektor, der das Interferenzmuster der Strahlen anhand zweier Photodioden auswertet. Die Richtung des sich bewegenden Interferenzmusters gibt Aufschluss über die Drehrichtung. Der so genannte *Lock-in*-Effekt stellt das größte Problem bei diesem Sensor dar, denn die Frequenz ändert sich erst ab einer bestimmten Drehrate, wodurch niedrige Rotationsraten nicht erfasst werden können. Abhilfe schafft ein *Dither*, der das System in festgelegte oszillatorische Rotationsbewegungen versetzt, damit der Sensor auch in einem anderen Erfassungsbereich arbeiten kann.

Bei einem faseroptischen Kreisel wird ebenso die Phasendifferenz von zwei Lichtstrahlen gemessen, die eine Induktionsspule in unterschiedliche Richtungen durchlaufen [Sch04]. Ein Photodetektor registriert diese Phasendifferenz und erzeugt ein dazu proportionales elektrisches Signal. Die Phasenverschiebung der beiden Lichtstrahlen ist ein Maß für die Rotation des Sensors. Die Querschnittsfläche entspricht bei den faseroptischen Kreiseln genau der Fläche, die vom Laserstrahl eingeschlossen wird. Die Anzahl der Windungen der Spule ist häufig sehr hoch, wodurch die Sensitivität und die Genauigkeit des Sensors erhöht wird. Die Sensitivität ist damit auch proportional zur eingeschlossenen Querschnittsfläche. Im Gegensatz zu anderen Sensoren sind die faseroptischen Kreisel äußerst robust und zuverlässig. Daneben zeichnen sie sich durch vergleichsweise geringe Anschaffungskosten und ihre Langlebigkeit aus. In Bezug auf Genauigkeit können sie allerdings nicht an die vorher beschriebenen Ringlasergyroskope heranreichen.



In die Klasse der *Microelectromechanical System (MEMS)*-Kreisel fallen mehrere unterschiedliche Varianten von Gyroskopen. Im Grundsatz werden mit *MEMS* jedoch kostengünstige Sensoren bezeichnet, die eine sehr kleine Bauform haben und von geringerer Güte bezüglich ihrer Genauigkeit und Fehleranfälligkeit sind [TW04]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde auf eine inertielle Sensoreinheit zurückgegriffen, die aus *MEMS*-Bauelementen besteht. Bei *MEMS* werden in einer mikroskopisch kleinen Struktur sowohl mechanische Bauelemente als auch integrierte elektronische Schaltkreise auf einem Substrat zusammengefasst. Der Aufbau eines *MEMS*-Gyroskops basiert meist auf zwei polykristallinen Siliziumstrukturen, die einen *Dither* enthalten. Ähnlich wie beim *Lock-in*-Effekt wird dieser *Dither* elektrostatisch in Resonanz versetzt, um zu erreichen, dass bereits bei einer geringen Eigenbewegung ein Signal erzeugt wird. Durch die externe Drehbewegung wird eine Corioliskraft erzeugt, die zu einer Beschleunigung des *Dither* führt. Die *Dither*-Bewegung kann anschließend kapazitiv gemessen werden, denn an dessen Enden befinden sich so genannte kapazitive *Pick-off*-Strukturen (feste und bewegliche Kammstrukturen, die ineinandergreifen). Die Lageänderung bzw. Drehrate  $\omega$  des *MEMS*-Sensors wird über die Kapazitätsänderung registriert. Über nachgeschaltete Demodulations- und Verstärkerstufen wird schließlich ein elektrisches Signal geliefert.

**Beschleunigungsmesser** Im Vergleich zu einer Rotation ist ein Sensor, mit dem man translatorische Bewegungen erfassen möchte, etwas einfacher zu realisieren. Im Grundsatz basieren alle Beschleunigungsmesser auf dem ersten NEWTON'schen Axiom des Trägheitsprinzips, das besagt, dass ein Körper in seinem Ruhezustand oder im Zustand einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung verbleibt, sofern keine äußere Kraft auf diesen einwirkt. Wird auf diesen Körper eine Kraft ausgeübt, so wird er in die Richtung der Kraft bezüglich des Inertialraumes beschleunigt. Dies lässt sich durch  $F = m \cdot a$  ausdrücken, wobei  $F$  die Kraft,  $m$  die Masse des beschleunigten Körpers und  $a$  die Beschleunigung ist. Die Kraft verteilt sich dabei auf zwei wesentliche Anteile, wobei einer durch die Gravitation der Erde verursacht wird, der andere durch die zusätzliche externe Kraft.

Bei den meisten Beschleunigungsmessern wird eine Testmasse verwendet, deren Trägheit genutzt wird. Diese ist mittels einer Feder oder eines Pendels mit einem Gehäuse verbunden und wird auf diese Weise auch gedämpft. Die Auslenkung der Masse kann über ein dazu proportionales elektrisches Signal mit Hilfe von kapazitiven oder induktiven Weggebern registriert und ausgelesen werden. Beschleunigungsmesser lassen sich wie folgt kategorisieren:

- Mechanische und halbmechanische Sensoren (z. B. Feder-Masse-, Pendel-, Servobeschleunigungssensoren)
- Festkörper-Beschleunigungsmesser (engl. *Solid-state*, z. B. *Vibrating-beam*-Beschleunigungssensoren, fiberoptische Sensoren)
- Inklinometer, piezoelektrische Sensoren etc.

Mechanische Sensoren beruhen im Wesentlichen auf dem im vorigen Absatz beschriebenen Aufbau. Auch der so genannte *Vibrating-beam*-Beschleunigungssensor gehört zu dieser Gruppe. Bei diesem befindet sich ebenfalls eine Testmasse an einem Pendel, das im Inneren eines Gehäuses aufgehängt ist. Außerdem ist die Testmasse durch eine dehnbare Stahlschwingsaite mit einer der Seitenwände verbunden [Sch04]. Unterliegt diese Masse nun einer Beschleunigung, so wird die Saite gespannt. Ihre Eigenfrequenz ändert sich bei diesem Vorgang proportional zu der Beschleunigung, die von außen einwirkt. Ein Servobeschleunigungsmesser verwendet stattdessen einen Rückstellmotor, um

die Testmasse immer im Gleichgewicht zu halten. Die aufzubringende Rückstellkraft und die dazu benötigte Stromstärke sind proportional zur Beschleunigung.

Andere Sensoren, die nach einem ähnlichen Prinzip wie die *Vibrating-beam*-Sensoren arbeiten, beruhen auf dem Einsatz von Quarzen. Diese werden so angeordnet, dass unter Beschleunigung ein Quarz gedehnt, ein anderer zusammengestaucht wird. Im unbeschleunigten Zustand schwingen die Quarze mit einer bestimmten Eigenfrequenz, während sich die Eigenfrequenzen im beschleunigten Zustand erhöhen bzw. verringern.

Bei Beschleunigungssensoren werden im Prinzip zwei verschiedene Arten unterschieden, je nachdem, wie der Abgriff des Sensorsignals erfolgt: das *Open-loop*- und das *Closed-loop*-Prinzip. Beim *Open-loop*-Prinzip wird die Auslenkung des Testkörpers aus der Nullposition direkt gemessen. Über die Kalibrierung der Federung kann dabei die Größe geliefert werden, die ein Maß für die einwirkende Kraft ist. Bei dem *Closed-loop*-Betrieb wird hingegen die Kraft gemessen, die nötig ist, um den Testkörper in der Nullposition festhalten zu können. Dieses Prinzip wurde bereits bei den Servobeschleunigungsmessern erläutert.

*MEMS*-Beschleunigungssensoren lassen sich analog zu den bisher betrachteten Varianten in zwei Klassen einteilen: pendelbasierte Typen, die eine Sensitivität bis zu  $24,5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  aufweisen und Resonanzsensoren, die sogar noch höhere Genauigkeiten erreichen können [TW04].

**Magnetometer** Messwertaufnehmer, welche die Stärke von Magnetfeldern bestimmen können, werden als Magnetometer bezeichnet [Whi88]. Ein elektronischer Kompass, wie er heutzutage auch schon in Mobiltelefonen zu finden ist, besteht aus solchen Magnetometern. Sie sind in der Lage, die Ausrichtung eines Fahrzeugs in Bezug auf den magnetischen Nordpol zu bestimmen. Dazu wird die Richtung des Erdmagnetfeldes bestimmt. Da sich magnetischer und geografischer Pol unterscheiden, muss die positionsabhängige Differenz immer berücksichtigt werden. Aus [Wen07] geht hervor, wie ein Magnetometer genutzt werden kann, um die Lage eines inertialen Navigationssystems (INS) zu stützen. Da in der Annahme einer rein horizontalen Bewegung kaum Änderungen beim Roll- und Nickwinkel auftreten, beschränkt man sich dabei häufig auf eine Stützung des Gierwinkels. In einem elektronischen Kompass ist ein Sensor zur Erfassung des Roll- und Nickwinkels bereits häufig integriert.

In [YF03] wird ein Navigationssystem vorgestellt, welches Messungen einer IME (engl. *Inertial Measurement Unit (IMU)*), *GPS*-Daten und die von zwei Magnetometern in einem Komplementärfilter kombiniert. Die Magnetometer werden dazu genutzt, die horizontalen Distanzen zu messen und dann in die Navigation mit einfließen zu lassen. Dieses ist möglich, indem Magnete entlang von Straßenzügen positioniert und von den Magnetometern erfasst werden können. Dabei wird gezeigt, dass durch Verwendung präziser Sensoren auch eine Positionsgenauigkeit von wenigen Zentimetern erreicht werden kann. Die Magnetometer stützen die Navigationslösung vor allem zu den Zeitpunkten, an denen es einem *GPS*-Empfänger aufgrund seiner geringeren Aktualisierungsrate nicht möglich ist.

Da in den letzten Jahren der Bedarf an verschiedenen Sensoren im Bereich der Fahrzeugnavigation, aber auch für Anwendungen innerhalb von Gebäuden stetig gewachsen ist, sind diverse Hersteller dazu übergegangen, die Sensoren nicht nur einzeln zu verkaufen, sondern auch als kombinierte Einheiten. Diese inertialen Sensoreinheiten umfassen i. d. R. drei Drehratensensoren, drei Beschleunigungssensoren und drei Magnetometer für sechs Freiheitsgrade, so dass sie für Ortungsaufgaben in drei Dimensionen verwendet werden können.

### 2.1.3.2 Barometrische Sensoren

Das klassische Anwendungsgebiet für barometrische Sensoren oder Altimetern ist die Flugzeugnavigation [Flü09]. Bei diesen Sensoren wird ausgenutzt, dass sich mit der Höhe über dem Meeresniveau auch die Temperatur und der Luftdruck ändern. Diese Abhängigkeit wird vereinfacht in der internationalen barometrischen Höhenformel

$$P(h) = 1013,25 \text{ hPa} \left( 1 - \frac{0,0065 \text{ K/m} \cdot h[\text{m}]}{288,15 \text{ K}} \right)^{5,255} \quad (2.1)$$

zusammengefasst [Us176]. Hierbei bezeichnet  $P(h)$  den Luftdruck in der Höhe  $h$ . Eine ausführliche Beschreibung der Atmosphärenphysik ist in [Roe00] und [Sch04] zu finden.

Bei barometrischen Sensoren ist problematisch, dass lokale Luftdruckänderungen aufgrund von Wetterbedingungen, Tiefdruck-, Hochdruckgebieten oder anderen Umgebungseinflüssen auftreten können. Um diese Variationen ausgleichen zu können, wird eine Nullpunktmarke vom Nutzer benötigt, die laufend aktualisiert werden muss. In Gleichung (Gl.) (2.1) wird davon ausgegangen, dass dieser Referenzdruck bei 1013,25 hPa liegt. Dieser kann in der Realität jedoch variieren, weshalb für hochgenaue Anwendungen die Konstanten in Gl. (2.1) als zeitvariante Variablen aufgefasst werden sollten. Nach [Klo08] beschreibt der Wert  $-0,0065$  den vertikalen (negativen) Temperaturgradienten, der hier im Mittel zu  $-0,65 \text{ K pro } 100 \text{ m}$  bei einer angenommenen Temperatur von  $15^\circ\text{C}$  oder  $288,15 \text{ K}$  festgelegt ist. Der Exponent mit  $\frac{\kappa_0}{\kappa_0-1} = 5,255$  entspricht dabei einem Isotropenkoeffizienten von  $\kappa_0 = 1,235$ . Aufgrund dieser Näherungen ist die internationale Höhenformel bis zu einer Höhe von 11 km mit geringen Abweichungen verwendbar.

In [WR07] wird ein Drucksensor zur Verbesserung der Positionsschätzung eines Flugzeugs eingesetzt, um neben der GPS-Höhe eine weitere Höheninformation zu erhalten. Diese wird verwendet, um eine nachfolgende Stufe, bestehend aus einer IME, zu stützen. Aufgrund der beschriebenen Abhängigkeiten wird hier der Drucksensor selbst durch ein weiteres Altimeter gestützt.

### 2.1.4 Sensorfehler

Jede Art von Messung unterliegt Störungen. Dies können Störungen sein, die sich durch äußere Einflüsse ergeben oder die abhängig von der Bauart des gewählten Sensors sind. Bei den bisher beschriebenen Sensoren ist zu beachten, dass die Berechnungen von Gierwinkel, Geschwindigkeit oder Distanz von Faktoren wie dem Reifendruck, dem Fahrbelag, konstanten Wetterverhältnissen usw. abhängen. Zur Umrechnung einer rotatorischen Größe in eine lineare Größe relativ zur zurückgelegten Distanz müssen idealisierte Annahmen getroffen werden, die in der Realität nicht zutreffen, denn die genannten Faktoren müssen in dem Fall berücksichtigt werden. Einige dieser Fehler werden bei der Betrachtung eines Odometers in [AP99] als Skalierungsfaktor zusammengefasst. Dieser wird benötigt, um von der Anzahl der gemessenen Pulse, die von einer Radumdrehung initiiert werden, auf eine Distanz schließen zu können. Dazu kommen noch Ungenauigkeiten bei den Radabmessungen verschiedener Räder, ein zu geringes Auflösungsvermögen der Sensoren, so genannte Quantisierungsfehler, sowie Schleuder- oder Driftbewegungen. Einige dieser Fehler lassen sich systematisch beschreiben und damit in der Navigationslösung berücksichtigen. Andere Faktoren wie der temperatur- oder geschwindigkeitsabhängige Reifendruck lassen sich nur schwer in eine Gleichung fassen, können aber als zusätzliche statistische Ungenauigkeit durch GAUSS-verteilte Zufallsvariablen modelliert werden. Die Drift des Skalierungsfaktors und des Quantisierungsfehlers sind laut [AP99] bei Verwendung von Odometern für die Navigationslösung ausschlaggebend. Die Fehler, die



bei inertialen Sensoren auftreten, unterscheiden sich von denen eines Odometers. Die signifikantesten Fehler sind nach [FB99] und [FWB05]: temperatur- und beschleunigungsabhängige Sensorbias ( $g_0$ - und  $g_0^2$ -abhängig), Nichtorthogonalität der Teilsensoren (Asymmetrie), Nichtlinearitäten, inhärentes Rauschen, Skalierungs-, Nullpunkt- und frequenzabhängige Fehler. Beschleunigungssensoren und Gyroskope weisen prinzipiell die gleichen Fehlermerkmale auf. Die qualitativen Verläufe einiger dieser Fehlertypen sind in Abb. 2.2 dargestellt. Dabei ist der reale Messwert  $x$  über dem Sensor-

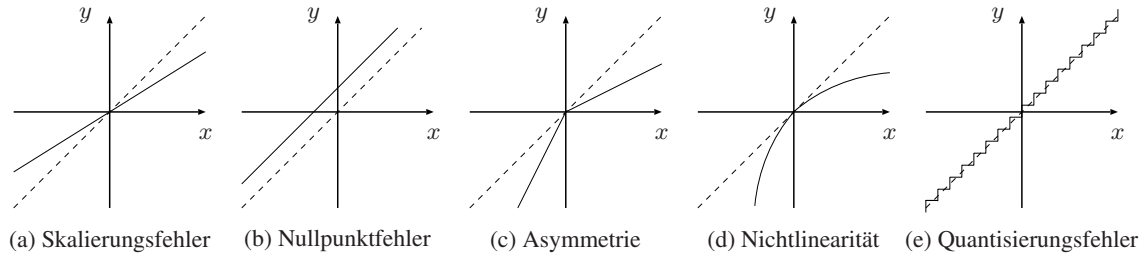


Abbildung 2.2: Typische Sensorfehler bei inertialen Sensoren

ausgang  $y$  aufgetragen. Der ideale Verlauf ist gestrichelt dargestellt. Die typischen Fehlerverläufe werden durch eine durchgezogene Linie repräsentiert. Teilbild (a) zeigt den qualitativen Fehlerverlauf aufgrund eines fehlerhaften Skalierungsfaktors. Dieser bewirkt eine unterschiedliche Neigung im Vergleich zu der idealen Kurve. Dabei werden die Ausgangsgrößen auf andere Wertebereiche als die der wahren Größen abgebildet. In [AP99] wird deutlich, dass bei einem Gyroskop ein Skalierungsfehler von ca. 1 % nach einer Drehung um  $90^\circ$  zu einem Ausrichtungsfehler von  $0,9^\circ$  führt. Die beschleunigungsabhängigen Bias sind im Vergleich zu einer Biasdrift oder inhärentem Rauschen weniger ausschlaggebend. Gyroskope sind jedoch sensitiv gegenüber der Beschleunigung. Je nach Frequenz und Betrag der Beschleunigung führt sie zu einem zusätzlichen Bias. Die Auswirkungen eines Nullpunktfehlers sind in Teilbild (b) dargestellt. Ein Nullpunktfehler (engl. *Offset*) entspricht einem konstanten Wert, der im gesamten Wertebereich eine gleichmäßige Abweichung verursacht. Ein ab dem Einschaltvorgang des Sensors zeitlich konstanter Nullpunktfehler kann durch einfache Subtraktion behoben werden. Ist der Nullpunktfehler hingegen zeitvariant, wird dieser auch als Drift bezeichnet. In diesem Fall muss der Wert parallel zur Filterung geschätzt werden. Allerdings ist zu beachten, dass sich auch der zeitlich konstante Nullpunktfehler von einem Einschaltvorgang zum anderen unterscheiden kann. Eine Drift ergibt sich aus Umwelteinflüssen wie beispielsweise Temperaturschwankungen oder aus den Materialeigenschaften der Sensoren. Die Folgen der Asymmetrie und Nichtlinearität sind in den Teilbildern (c) und (d) dargestellt. Charakteristischerweise werden bei beiden Fehlertypen die Abweichungen in einem hohen Messbereich größer. In einer Umgebung um den Nullpunkt entspricht der Ausgabewert annähernd dem wahren Wert. Quantisierungsfehler entstehen durch die endliche Darstellungsgenauigkeit in rechnergestützten Systemen. Der Verlauf ist typischerweise treppenförmig, wobei jede Stufe einen diskreten Wert beschreibt. Da die Genauigkeit aufgrund der Analog-Digital Umwandlung (ADU) beschränkt ist, können keine Werte zwischen den Diskretisierungsstufen dargestellt werden. Der dazugehörige Verlauf ist in Teilbild (e) dargestellt. Zudem kann die endliche Auflösung numerische Fehler verursachen.

In [ZPW90] werden die negativen Einflüsse, die auf ein Magnetometer im Rahmen einer Anwendung im Fahrzeug einwirken können, genauer untersucht. Dies sind u. a. Fehler, die aus hochfrequenten Magnetfeldern resultieren, welche unter Umständen durch den Motor aufgebaut werden. Statische Magnetfelder können durch eine Kalibrierung herausgerechnet werden. Treten jedoch Wirbelfelder (z. B. durch das variierende Erdmagnetfeld oder bei Annäherung an große Metall-

brücken) auf, so wird die Messung negativ beeinflusst. Das Messrauschen wird üblicherweise durch ein additives weißes GAUSS'sches Rauschen (AWGR) modelliert, das dem wahren Wert überlagert ist. In [Whi88] wird des Weiteren gezeigt, wie neigungsabhängige Fehler bei einem magnetischen Kompass durch eine kardanische Aufhängung kompensiert werden können. In [AP99] wird verdeutlicht, dass die Verwendung von Magnetometern bei der Bestimmung der Ausrichtung des Fahrzeugs große Vorteile bringen kann, solange sich die Störeinflüsse in Grenzen halten. Allerdings können magnetische Störungen unvorhersehbar auftreten und damit die Navigation deutlich beeinflussen, wenn keine Kompensation erfolgt. Weitere Untersuchungen zur Modellierung und Kompensation von Fehlern, die bei einer IME auftauchen können, werden in [XGE08] durchgeführt.

## 2.1.5 Systeme auf Basis von integrierten Sensoren

### 2.1.5.1 Inertiale Navigation

Wie bereits erwähnt, sind das Gyroskop und der Beschleunigungsmesser die klassischen Werkzeuge der inertialen Navigation. Während Anfang des 19. Jahrhunderts das erste Festkörpergyroskop entwickelt wurde, erschien im 20. Jahrhundert der erste Gyrokompass, der sensitiv auf Beschleunigungen reagierte. Drehratenmessinstrumente, die bereits mit einem künstlichen Horizont für die Flugzeugnavigation ausgestattet waren, wurden in den 20er Jahren eingeführt. Im ersten und zweiten Weltkrieg wurde dann die Entwicklung durch den Bedarf an Lenkvorrichtungen für Waffen immer weiter vorangetrieben. Das erste Konzept für ein *Strapdown*-System, welches auch in der vorliegenden Arbeit behandelt wird, wurde 1949 vorgestellt [TW04], bevor in den frühen 50er Jahren die erste stabilisierte Inertialplattform für Flugzeuge entwickelt wurde. Seitdem gehören solche Systeme zur Standardausstattung eines jeden Schiffes, U-Bootes und Flugzeuges, und es wird kontinuierlich versucht, ihre Anfälligkeit gegenüber äußeren Einflüssen hinsichtlich Robustheit und Genauigkeit zu verbessern, aber auch ihre Baugröße zu verringern. Ein INS umfasst heutzutage zwei Einheiten: die Inertialplattform oder IME und den Navigationscomputer, der die Berechnungen durchführt, um die Messwerte in das gewünschte Koordinatensystem umzuwandeln. Dabei müssen Effekte wie Gravitation oder Erddrehrate berücksichtigt werden. Um aus den Sensordaten letztendlich eine Lage-, Geschwindigkeits- und Positionsschätzung zu erhalten, werden Integrationsverfahren angewendet, wie in [Wen07] beschrieben. Ausführliche Beschreibungen sind ebenso in [FB99], [TW04], [GWA07] wie auch in [Sav98a] und [Sav98b] zu finden. In diesem Zusammenhang spricht man auch von einem *Strapdown*-Algorithmus, der in Kap. 4.3 näher beschrieben wird. Im Gegensatz zu einem Plattformsystem sind hierbei die Sensoren fest mit dem Navigationskörper, dem Fahrzeug, verbunden. Für den Ansatz ist bezeichnend, dass hohe Frequenzen unterdrückt, tiefe Frequenzen jedoch verstärkt werden können. Durch das Integrieren führt dieses schließlich zu Fehlern in der Geschwindigkeits- und Positionsschätzung. Aus diesem Grund wird mit Hilfe von zusätzlichen Filteralgorithmen versucht, die beschriebenen Sensorfehler zu kompensieren, denn Fehler, wie z. B. das Bias eines Beschleunigungssensors, würden zu Fehlern in der Position führen, die quadratisch mit der Zeit ansteigen. Da i. d. R. die Navigationslösung in einem anderen Koordinatensystem berechnet wird als dem, in welchem die Messwerte von der IME geliefert werden, muss eine fortlaufende Aktualisierung der Lage des körperbezogenen Systems in Relation zum Navigationssystem stattfinden. Des Weiteren muss berücksichtigt werden, dass sich Größen wie die Gravitation mit dem Ort ändern können. Die Aufgabe eines inertialen Messsystems lässt sich, in Anlehnung an die bisherigen Betrachtungen, somit nach [FB99] wie folgt beschreiben:

- Bestimmung der translatorischen und rotatorischen Bewegungen des Fahrzeugs

- Bestimmung des Einflusses des Gravitationsfeldes auf die Messsensoren innerhalb einer IME
- Konvertierung der aufgenommenen Daten in ein Referenzkoordinatensystem, in dem die eigentliche Navigation stattfinden soll
- Integration der gefilterten Daten, um Geschwindigkeit und Position des Fahrzeugs zu erhalten.

### 2.1.5.2 Koppelnavigation

Koppelnavigation bezeichnet eine fortlaufende Ortsbestimmung eines bewegten Objekts durch Messen der Geschwindigkeit, der Bewegungsrichtung und der Zeit. Zwischen den Zeitintervallen wird die Geschwindigkeit als konstant angenommen. Bei einfachen Navigationsaufgaben beschränkt man sich häufig darauf, lediglich ein zweidimensionales Problem zu lösen. Das bedeutet, dass die Höhenkomponente dabei vernachlässigt wird. In [OLS07] wird vorgestellt, wie ein Koppelnavigationsansatz für einen zweidimensionalen Fall aussieht (siehe Abb. 2.3). Um die instantane Position  $(n_k, e_k)$  zu

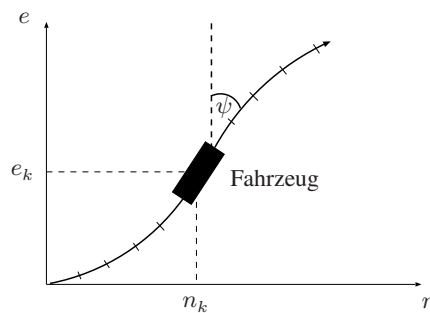


Abbildung 2.3: Zweidimensionale Koppelnavigation

einem Zeitpunkt  $k$  abschätzen zu können, werden mindestens zwei Größen benötigt: ein Inklinometer oder ein Gyroskop, auf dessen Basis anhand der Drehrate die Richtung  $\psi$  in Bezug auf ein festes Referenzkoordinatensystem bestimmt werden kann, sowie ein Sensor, der die Wegstreckeninkremente z. B. anhand der Geschwindigkeit errechnen kann. Eine Alternative wäre die Bestimmung der Längs- und Querbeschleunigung durch zwei Beschleunigungsmesser. In dem vorgestellten DR-Verfahren werden mit Hilfe dieser Informationen zwei Ansätze verglichen, um eine neue Positionsschätzung zu erhalten. Der einfache Ansatz basiert darauf, im Zeitdiskreten die Weginkremente aufzusummieren. Für die Position in der als Fläche angenommenen Nord-Ost-Ebene gilt dabei:  $n_k = n_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Delta l_j \cdot \cos(\psi_j)$  und  $e_k = e_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Delta l_j \cdot \sin(\psi_j)$ . Wie in [OLS07] beschrieben wird, ist diese Art der Koppelnavigation allerdings von geringerer Güte, da auf diese Weise noch vorhandene Restfehler ebenfalls aufsummiert werden und somit eine immer größer werdende Abweichung zwischen idealer und geschätzter Position entsteht. Bei einer direkten Implementierung der Gleichungen hat man zusätzlich das Problem, dass die zugehörigen Rauschterme im Zustandsmodell nicht unkorreliert sind, weil beide Variablen  $n$  und  $e$  vom Weginkrement  $\Delta l$  sowie dem Winkel  $\psi$  abhängen. Des Weiteren wird hier nicht die eigentliche, gekrümmte Form der Erde berücksichtigt. Ein alternativer Ansatz basiert daher auf einer Transformation der planaren Koordinaten in das *World Geodetic System 1984 (WGS84)*-Erdmodell [HWLW07]. Hierbei wird nicht von ebenen Positionen ausgegangen, sondern diese werden fortlaufend auf eine angenäherte Erdform angepasst. Die eigentliche Lokalisierung wird in diesem Kontext von den Autoren von [OLS07] um eine Kombination mit digitalen kartografischen Daten ergänzt, um die Güte zu steigern. Weitere Details zur Koppelnavigation sind auch in [CGP04] zu finden.

Wie bereits erwähnt, ist ein Koppelnavigationssystem vorrangig für planare Navigationsaufgaben geeignet. In [DSNDW01] wird allerdings gezeigt, dass die Navigationsgenauigkeit drastisch abnimmt, wenn diese Voraussetzung nicht mehr gegeben ist. Dies wird sogar problematisch, wenn bei der Kombination mit einem satellitenbasierten System dieses für mehrere Minuten ausfällt und die Navigation ausschließlich auf einer zweidimensionalen *DR*-Berechnung beruht. Der Nachteil einer planaren Bewegungsannahme wird mit der Verwendung einer IME umgangen, weil sie die Bewegung des damit verbundenen Fahrzeugs in drei Dimensionen erfassen kann.

### 2.1.5.3 Berücksichtigung spezifischer Bewegungsmodelle

In den meisten Arbeiten zur Fahrzeugnavigation wird die vereinfachende Annahme getroffen, dass sich ein Fahrzeug durch einen infinitesimal kleinen Punkt darstellen lässt. Driftbewegungen, durchdrehende Reifen oder andere Nebeneffekte werden ebenfalls häufig außer Acht gelassen. Allerdings können diese Annahmen auch dazu genutzt werden, die Navigationsberechnung zu stützen und Sensorfehler zu kompensieren. Nebenbedingungen dieser Art werden u. a. in [DSNDW01] verwendet.

Diese typischen Nebenbedingungen können aber auch in verschiedenen Bewegungsmodellen für ein Fahrzeug berücksichtigt werden. Solche Modelle sind dann hilfreich, wenn kurzzeitig keine Sensordaten verfügbar sind und eine Vorhersage des Fahrzeugzustandes auf Basis des Modells durchgeführt werden soll. Würden Sensoren allerdings keine Fehler aufweisen, so könnte man durch Bewegungsmodelle keine weiteren Informationen gewinnen. Da dies vor allem bei kostengünstigen Sensoren nicht zutrifft, sind zusätzliche Bewegungsmodelle hilfreich.

In [LJ00] und [RLJ03] werden verschiedene dynamische Bewegungsmodelle im Rahmen von Zielführungen und Observationen kleiner Objekte vorgestellt und klassifiziert. Dies schließt zwei- und dreidimensionale Modellierungen ein. Es wird außerdem zwischen Modellen unterschieden, die durch einen zusätzlichen Steuereingang beschrieben oder nicht beschrieben werden und bei denen die Bewegungen in unterschiedlichen Koordinaten miteinander gekoppelt oder entkoppelt sind. Des Weiteren wird unterschieden, ob sich eine Beschleunigung ggf. als zufälliger Prozess (MARKOV-Prozess, Weißer Prozess oder Semi-MARKOV-Prozess) beschreiben lässt oder als deterministische Eingangsgröße. Im Dreidimensionalen sind die folgenden Modelle gängig: stückweise konstante Geschwindigkeit, stückweise konstante Beschleunigung, koordinierte oder stückweise konstante Drehung. Im Rahmen der inertialen Navigation spielen vorrangig jedoch Differenzialgleichungen, wie in [TW04] beschrieben, eine Rolle. Verschiedene Fahrsituationen werden bei den klassischen Gleichungen nicht berücksichtigt.

Oftmals kann in einer Systembeschreibung nur eine Art der Bewegung berücksichtigt werden. Eine Möglichkeit, die verschiedenen Bewegungsformen dennoch einfließen zu lassen, besteht in dem „Schalten“ zwischen Bewegungsmodellen. Modelle, die dies erlauben, sind „schaltende dynamische Modelle“ [BSLK01]. Algorithmen zum Schalten zwischen diesen Modellen werden z. B. in [Frä05] beschrieben. Dabei wird der Zustandsraum neben dem eigentlichen Zustandsvektor noch um eine so genannte Regimevariable  $r$  ergänzt. Diese bestimmt zu jedem Zeitpunkt das jeweils gültige Modell und legt damit die aktuelle Zustands- und Messgleichung fest. Da somit ein insgesamt gemischt kontinuierliches und diskretes Schätzproblem vorliegt, ist das KALMAN-Filter (KF) nun auch nicht mehr der optimale Schätzer. Eine gängige Praxis bei der Betrachtung von Mehrmodellsätzen ist die Annahme eines MARKOV-Modells, wobei jeder Wert, den die Regimevariablen annehmen kann, einem Zustand des Modells zugeordnet ist. Eine Übergangsmatrix  $\Pi$  mit den Einträgen  $\pi^{i'i''} = P(r_k = i'' | r_{k-1} = i')$ ,  $i', i'' \in \{1, R\}$  charakterisiert die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang zwischen zwei Modellen zum Zeitpunkt  $k$ . Die initialen Auftrittswahrscheinlichkeiten

$\pi^{i'} = P(r_0 = i')$  werden dabei als bekannt vorausgesetzt und können durch Messungen bestimmt werden. Eine exakte Lösung im *Minimum Mean Square Error (MMSE)*-Sinn führt zu einem mit der Zeit exponentiell steigenden Aufwand, weshalb auf eine Approximation zurückgegriffen wird, bei der jedem Modell ein Filter (meist KF) zugeordnet ist. Zusätzlich werden die aus der Interaktion der Modelle resultierenden Mischungsverteilungen jeweils durch eine Normalverteilung approximiert. Die gesuchten Schätzwerte  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  und  $\mathbf{P}_{k|k}$  (Schätzung des Systemzustandsvektors und dessen Schätzfehlerkovarianzmatrix) können nach der fortlaufenden Berechnung der Modellwahrscheinlichkeiten  $\pi^{i'} = P(r_k = i' | \mathbf{z}_{1:k})$ , wobei  $\mathbf{z}_{1:k}$  die Beobachtungssequenz darstellt, über eine Kombination von  $\pi^{i'}$  und den Ausgangsgrößen der einzelnen Filter bestimmt werden. Die Schätzung mit Hilfe von schaltenden Modellen ist durch die parallele Filterstruktur vergleichsweise aufwändig. Ist eine Echtzeitverarbeitung der Daten nicht zwingend erforderlich, so kann das Schätzergebnis durch eine zeitlich rekursive Glättung mit Hilfe des RAUCH-TUNG-STRIEBEL-Algorithmus [RTS65] wie er auch in [HBH95] und [LK07] verwendet wird, zusätzlich verbessert werden. Dabei existieren vielfältige Möglichkeiten, die Glättung mit der Filterung auf Basis schaltender Modelle zu kombinieren. Diese Verfahren werden in [LK99] detailliert untersucht. In [HL05] werden diese Multi-Modelle mit rekursiver Glättung für eine Fusion verschiedener Sensorquellen wie Kamera, Radar, Inertialsensoren mit Hilfe eines erweiterten KALMAN-Filters (EKF) verwendet. In dem betrachteten Szenario geht es in erster Linie um Fahrzeuge, die in einer Kolonne fahren und der Kurs von vorausfahrenden Fahrzeugen durch die nachfolgenden bestimmt werden soll. In [NGG07] wird der *Interacting-Multiple-Model (IMM)*-Ansatz mit verschiedenen Modellen getestet und mit einem klassischen KF verglichen, das nur ein Modell verwendet. Dabei wird gezeigt, dass in bestimmten Fahrsituationen die Restunsicherheit in der Position auch bei der Verwendung von drei Modellen noch relativ hoch sein kann, da die damit verbundenen Modellwahrscheinlichkeiten in manchen Fahrsituationen ungenau geschätzt werden können. Ein weiteres Anwendungsfeld des IMM-Inferenzalgorithmus wird in [TMZI09] vorgestellt. Die Autoren verwenden Modelle, die speziell die Straßenführungen von mehrspurigen Schnellstraßen beschreiben. Es wird gezeigt, dass der Inferenzalgorithmus erfolgreich für die Detektion eines Spurwechsels eingesetzt werden kann. Dabei werden gute Ergebnisse für den Fall erzielt, dass die Straßenführungen eine geringe Kurvenanzahl aufweisen. Für mehrkurvige Szenarien werden dann gesonderte Modelle und erweiterte Zustandsvektoren eingesetzt, in die spezielle Kurvenparameter einfließen. Bei beiden Konfigurationen tritt eine geringe Latenz von teilweise weniger als 0,4 s zur Detektion einer Fahrspuränderung auf.

#### 2.1.5.4 Kamerabasierte Systeme

Kameras, Radar oder andere optische Sensoren werden weniger für eine direkte Navigation verwendet. Vielmehr dienen sie als Unterstützung anderer Systeme oder um Positionen anderer Verkehrsteilnehmer relativ zur eigenen Position zu bestimmen. Eine vollständige Positionsschätzung des eigenen Fahrzeugs ist allerdings mit ausschließlich solchen Sensoren weniger gewinnbringend.

## 2.2 Sensorfusionsverfahren

Das Ziel einer Fusion von Daten verschiedener Sensorquellen ist es, die Nachteile, welche die einzelnen Sensoren aufweisen, gegenseitig zu kompensieren. Daraus resultiert in den meisten Fällen ein verbessertes Ergebnis in der Kombinationsgröße. In [HL05] wird ein Verfahren zur Sensorfusion auf Basis optischer und inertialer Sensoren, dynamischer Modelle und Kartendaten vorgestellt. In [TW04], [Jek01] und [GWA07] wird zwischen zwei allgemeinen Strukturen unterschieden, eine



Filterung und Kombination einzelner Sensorgrößen vorzunehmen: die zentralisierte und die dezentralisierte Filterstruktur. Bei der zentralisierten Filterstruktur werden die Daten aller Sensoren in einem Filter zusammengefasst und vollständig integriert. Alle Rohsignale (z. B. Spannungen) werden in einer einzigen integrierten Schaltung verarbeitet, die aus Verstärkern und den Filtern selbst besteht. Der Vorteil eines zentralisierten Filters liegt im geringen Informationsverlust aufgrund von niedrigem Rauschen, denn alle Informationen stehen dem Filter ohne Umwege direkt zur Verfügung. Außerdem ist auf diese Weise eine hohe Platzersparnis möglich.

In [Wen07] werden die *Ultra tight*- und die *Deep integration*-Methode als Varianten für eine zentralisierte Filterstruktur genannt. In [LW06] wird z. B. gezeigt, wie in der *Delay-Locked Loop (DLL)* eines *GPS*-Empfängers die Codephasenfehler verringert werden können und sich dadurch verbesserte *Pseudorange*-Messungen ergeben. Durch eine genaue Analyse der Korrelationen der *Pseudorange*-Messfehler und der Schätzfehler der Integrationslösung ist es dabei möglich, ein Filter, das die auftretenden Inphasen- und Quadraturkomponenten verarbeitet, direkt auf Signalebene einzusetzen. Daraus würde eine höhere Stabilität und Qualität bezüglich auftretender Signalinterferenzen und letztendlich auch eine bessere Navigationslösung resultieren, wenn auf diese Weise ein INS gestützt wird. Das Problem bei diesen Verfahren ist jedoch, dass ein Zugriff auf die empfängerinternen Signale benötigt wird. Dieser wird allerdings von den meisten Herstellern eines *GPS*-Gerätes nicht ermöglicht. Die *Deep integration*-Methode zeichnet sich ferner dadurch aus, dass eine Signalverarbeitung in zwei Richtungen vorgenommen wird, denn die Navigationslösung selbst wird wieder zur Stützung der internen Verarbeitung des Satellitenempfängers verwendet, z. B. um die Berechnung der Dopplerverschiebung zu verbessern [SGVG08], [SH09].

Die eng gekoppelten Systeme (engl. *Tightly coupled systems*) fallen ebenso in diese Gattung. Auch hier werden Signale eines satellitenbasierten Empfängers verarbeitet, die i. d. R. dem Nutzer nicht zur Verfügung stehen [TW04]. Dabei handelt es sich um die *Pseudorange*- und *Deltarange*-Messungen sowie ggf. auch um weitere Signale. Das System beschränkt sich nicht nur darauf, dass ein INS durch Satellitensignale gestützt wird, sondern auch umgekehrt der *GPS*-Empfänger durch das INS. Wenn die zweite Stützung nicht vorgenommen wird, so spricht man von einem direkt gekoppelten System (engl. *Closely coupled system*). Wie beim *Ultra tight system* ist das Ziel, die Bandbreite der so genannten *Tracking*-Schleife zu verringern, um eine höhere Präzision zu erlangen. Da eine *Pseudorange*- und *Deltarange*-Messung auch mit weniger als vier Satelliten vorgenommen werden kann, ist dieses bei schwierigeren Umgebungsbedingungen ein entscheidender Vorteil. Außerdem können Satellitenuhrzeitfehler mit einem geeigneten Filteransatz, wie er in [Wen07] vorgestellt wird, durch die zur Verfügung stehenden Rohsignale kompensiert werden. Aber auch für das eng gekoppelte System ist der Integrationsaufwand durch den notwendigen Zugriff auf die empfängerinterne Struktur erhöht.

Das dezentralisierte Filter zeichnet sich im Gegensatz zum zentralisierten Filter dadurch aus, dass mehrere Instanzen parallel arbeiten, wobei jede die Sensorinformation zunächst separat verarbeitet [WS90], [SH09]. Auf diese Weise steht für die Einheit, welche die eigentliche Navigationslösung liefern soll, von jedem Sensor quasi bereits eine geschätzte Navigationsgröße zur Verfügung. Der Vorteil liegt darin, dass ein geringerer Aufwand in der Signalverarbeitung nötig und dass durch den einfachen Aufbau eine Möglichkeit der Fehlerdetektion vorhanden ist. Dies erfolgt jedoch auf Kosten der Genauigkeit der Navigationslösung. Des Weiteren können mehrstufige Filterstrukturen in einigen Fällen zu Divergenzen führen, da bestimmte signalverarbeitungstechnische Voraussetzungen für die nachfolgende Filterstruktur nicht mehr zwangsläufig gegeben sind. Dieses kann z. B. die nicht mehr gültige Annahme sein, dass das Messrauschen eines KF zeitlich unkorreliert ist. Außerdem können

räumliche Korrelationen und damit Kreuzkovarianzen in den Beobachtungsgrößen auftreten [FB99]. Eine typische dezentralisierte Struktur ist mit einem schwach gekoppelten System gegeben, wobei von einem *GPS*-Empfänger mit Position und Geschwindigkeit bereits vorgefilterte Werte, die beispielsweise direkt in den *National Marine Electronics Association (NMEA)*-Sätzen abgelesen werden können, zur Stützung des INS verwendet werden. Da die Signalverarbeitung unidirektional ist, d. h. es erfolgt keine Rückkopplung der Filterergebnisse zum *GPS*-Empfänger, kann dieses Filter relativ einfach realisiert werden. Problematisch ist jedoch, dass für eine zuverlässige Lösung mindestens vier Satelliten „sichtbar“ sein müssen. Durch die interne Filterung eines *GPS*-Empfängers ist jedoch auch bei einer geringeren Satellitenanzahl eine Schätzung vorhanden. Diese kann jedoch zu Fehlern in der nachfolgenden INS-Lösung führen, da keine unabhängigen Messungen mehr vorhanden sind. Es ist deshalb sinnvoll, die Anzahl der beobachtbaren Satelliten anhand des *NMEA*-Datensatzes fortlaufend zu überprüfen und ggf. die *GPS*-Stützung zu deaktivieren, so dass sich die Fehler durch das *GPS* nicht auf die INS-Lösung auswirken. Eine andere Möglichkeit ist die Berücksichtigung der Schätzfehler des *GPS*-Filters, wie es mit dem in dieser Arbeit verwendeten Empfänger der Fa. Navilock [ubl] möglich ist.

Die Entscheidung für ein zentralisiertes oder dezentralisiertes Filter hängt im Wesentlichen davon ab, welche Signale als Beobachtungen zur Verfügung stehen und welche Modelle für die Fahrdynamik eingesetzt werden. Außerdem spielt es eine Rolle, wie hoch der rechnerische Aufwand und wie robust das gewählte Verfahren gegenüber Modellierungsfehlern sein darf [BSLK01].

Unabhängig davon, welche Filterstruktur für die eigentliche Problemlösung in Frage kommt, muss man sich darüber im Klaren sein, dass die Navigationslösung unter idealen Bedingungen im Wesentlichen von der Leistungsfähigkeit des *GPS*-Satellitensignals abhängt. In [AP99] werden Untersuchungen auf Basis eines gekoppelten Navigationsansatzes vorgestellt, bestehend aus Odometer, Gyroskop und *GPS*. Dabei wird gezeigt, dass bei Verfügbarkeit einer gültigen *GPS*-Position, der *Root Mean Square (RMS)*-Fehler quer zur Bewegungsrichtung des Gesamtsystems von der Genauigkeit des *GPS*-Signals dominiert wird. Verantwortlich dafür ist zu 90 % das *GPS*-Bias, also der Fehler, der auf zeitlich korrelierte Fehler in der *GPS*-Position zurückzuführen ist. Das unkorrelierte Rauschen hingegen macht sich erst bemerkbar, wenn die Zuverlässigkeit und damit die Genauigkeit der *GPS*-Position zunimmt. Das Navigationsfilter kann allerdings die korrelierten Fehler besser unterdrücken als die zeitlich unkorrelierten, da in einem unkorrelierten Signal keine Information zur Prädiktion des Systemzustandes vorhanden ist. Ähnliche Ergebnisse konnten die Autoren von [AP99] auch bei den Fehlern feststellen, die sich auf die Positionen entlang der gefahrenen Strecke beziehen. Auch die Verwendung von qualitativ besseren Inertialsensoren hat keine signifikanten Auswirkungen, wenn kein zuverlässiges *GPS*-Signal zur Stützung vorliegt. Des Weiteren wird gezeigt, dass ein verbessertes Sensorsignal für eine Komponente geringe Auswirkungen auf die Genauigkeit in einer anderen Komponente hat, obwohl es über die Richtungskosinusmatrix (RKM) (siehe Kap. 4) durchaus Kopplungen gibt. Beispielsweise hat eine verbesserte Gyroskopmessung zur Bestimmung des Gierwinkels geringen Einfluss auf die Genauigkeit der Position in Bewegungsrichtung. Genauso kann ein gutes Odometer nur zu einer geringen Leistungssteigerung bzgl. der Position in Längsrichtung führen. Selbst bei einem *GPS*-Ausfall ist die Güte der Inertialsensoren nicht entscheidend. Vielmehr spielt eine Rolle, wie gut die Sensoren durch das *GPS* vor dem Ausfall gestützt und kalibriert wurden, denn davon hängt ab, wie gut z. B. das Sensorbias oder das inhärente Rauschen vor dem Ausfall bestimmt werden konnten und folglich dann auch während der Nichtverfügbarkeit des *GPS*-Signals die Navigationslösung beeinflussen. Würde das differenzielle *GPS (Differential Global Positioning System (DGPS))* zur Verfügung stehen, so könnte auch die Kalibrierung verbessert werden. Das Problem bei einem Gy-

roskop ist, wie bereits erwähnt, dass sich jeder Fehler durch das zweifache Integrieren verstärkt. Die Odometerdaten müssen stattdessen nur einfach integriert werden und aus diesem Grund wirken sich Odometerfehler geringfügiger aus als Gyroskopfehler, weshalb die Positionsfehler in Bewegungsrichtung auch geringer sind als die quer zur Bewegungsrichtung [AP99]. Eine gute Gyroskopfehlerkompensation ist daher von entscheidender Bedeutung bei einem INS. Werden Beschleunigungssensoren an Stelle von Odometern verwendet, so wirken sich deren Fehler wegen der ebenfalls zweifachen Integration genauso stark aus wie bei Gyroskopen.

Als Filterverfahren für die beschriebenen Fusionsmöglichkeiten hat sich in den letzten Jahren das bereits erwähnte KF durchgesetzt. Es existieren mittlerweile verschiedene Varianten dieses Filters, wobei deren Güte im Wesentlichen durch die Systembeschreibung und den Zusammenhang von Messvektor und Systemzustand gegeben ist. Liegt eine rein lineare Beschreibung vor, so liefert das klassische KF das im *MMSE*-Sinn beste Ergebnis [RAG04], [Frä05]. Bei nicht allzu ausgeprägten Nichtlinearitäten bietet sich das erweiterte KALMAN-Filter (EKF) an, das auf einer Linearisierung von System- und Messgleichung beruht [FB99], [RAG04]. Bei der Verwendung des EKF ist zu bedenken, dass kein erwartungstreuer Schätzer vorliegt, wie es beim linearen KF der Fall ist. Des Weiteren können Divergenzen auftreten, da die Fehlerkovarianzmatrix kleiner geschätzt werden kann als sie tatsächlich ist, womit die Schätzung nicht mehr konsistent ist. Bei stärkeren Nichtlinearitäten reicht die Genauigkeit des EKF häufig nicht mehr aus. Daher wird für einige Anwendungen auf das Sigma-Punkt KALMAN-Filter oder auch *Unscented KALMAN Filter (UKF)* zurückgegriffen [WVDM00], [JU04], [SES07]. Dies beruht auf einer skalierten *Unscented*-Transformation, bei der  $2\mathcal{D} + 1$  Sigma-Punkte berechnet werden (in dem hier betrachteten Fall ist  $\mathcal{D}$  die Dimension des Zustandsvektors). Ziel ist es, eine Reihe gewichteter Werte (Sigma-Punkte) so auszuwählen, dass Mittelwert und Kovarianz dieser Werte den tatsächlich statistischen Eigenschaften des aus Zustand und Messrauschen zusammengesetzten Zufallsprozesses entsprechen. Die sequenziellen Monte-Carlo-Methoden (engl. *Importance sampling*) bilden eine geeignete Basis für starke Nichtlinearitäten. Aus ihnen resultierte eine Reihe von so genannten Partikelfiltern [RAG04]. Trotz heutiger Rechnerleistungen ist aufgrund ihrer hohen Komplexität das *UKF* oder das Partikelfilter (PF) ggf. unpraktikabel. Die Autoren von [GNK10] verwenden das PF für eine *Inertial Navigation System/Global Positioning System (INS/GPS)*-Lösung auf Basis einer reduzierten Anzahl von Sensoren. Dabei wird gezeigt, dass eine dreidimensionale Lösung mit nur einem Gyroskop, zwei Beschleunigungsmessern, einem Odometer und einem *GPS*-Empfänger selbst gegenüber Inertialsystemen mit sechs Freiheitsgraden bessere Positionsergebnisse liefern kann. Im Bereich der Navigation tritt allerdings noch eine weitere Variante der KALMAN-Filterung auf: das linearisierte KALMAN-Filter (LKF). Dieses wird in Kap. 4.6 näher betrachtet. Beim linearisierten Filter treten die zu schätzenden Navigationsgrößen nicht direkt als Zustandsvariablen auf, sondern sie werden außerhalb des Filters anhand von geschätzten Fehlertermen korrigiert. Dieses führt vor allem bei einer dezentralen Struktur zu einer robusteren Signalverarbeitung, wie in [Cra01] festgestellt wird.

## 2.3 Verfahren zur Schätzung von unbekannten Parametern

Sensormodelle, Fehlermodelle oder Bewegungsmodelle enthalten häufig unbekannte Parameter, die entweder vor der Filterung bestimmt oder im Rahmen der Filterung mitgeschätzt werden müssen. Aufgrund der bereits beschriebenen verschiedenen Fehlereinflüsse wird nach Verfahren gesucht, diese zu schätzen und zu kompensieren. Nach [SH09] lassen sich solche Verfahren in zwei Klassen einteilen: diejenigen, die blockweise arbeiten, d. h. Verfahren, die mehrere Datensätze auf einmal für



die Parameterschätzung verwenden, und diejenigen, die rein sequenziell arbeiten, d. h. Datensatz für Datensatz verarbeiten. Die Verfahren unterscheiden sich auch dadurch, ob der Parameter als feste, unbekannte Größe oder als Zufallsvariable oder sogar als zeitveränderlicher Prozess aufgefasst wird.

In [Wen07] wird ein Lösungsansatz vorgestellt, bei dem die Rauschparameter direkt aus den Messdaten ermittelt werden können. Dies geschieht auf Basis von Messwertdifferenzen, d. h. es werden die zeitlichen Differenzen direkt aufeinanderfolgender Messwerte verwendet, um rekursiv Korrelationen für unterschiedliche zeitliche Verschiebungen dieser Differenzen bestimmen zu können. Diese können wiederum dazu genutzt werden, um die Parameter eines vorgegebenen Modells für zeitlich korreliertes Rauschen abschätzen zu können. Erschwerend bei diesem Ansatz ist, dass die Fahrdynamik großen Einfluss auf die Messwerte hat und somit zu ungenauen Schätzwerten führen kann. Eine explizite Berücksichtigung spezieller dynamischer Modelle ist in diesem Rahmen außerdem sehr schwierig.

Ein weiterer Ansatz setzt bei der direkten Analyse der Innovationssequenz eines KF an, da diese Informationen über die statistischen Eigenschaften der Rauschprozesse beinhaltet. Wie in [Meh70] gezeigt wird, lassen sich über die Autokorrelationsfunktion dieser Innovationssequenz die entsprechenden Kovarianzmatrizen berechnen. Eine Realisierung dieses Ansatzes in einem *INS/GPS*-Navigationsfilter wird in [MS99] vorgestellt, wobei eindeutige Verbesserungen der Navigationslösung im Vergleich zu einem nicht-adaptiven Filter aufgezeigt werden. Allerdings werden die Innovationssequenzen in den genannten Arbeiten blockweise verarbeitet, was eine Zwischenspeicherung der Daten erfordert und eine Verzögerung der aktuellen Lösung für die nachfolgenden Bearbeitungsschritte zur Folge hat. Eine echtzeitfähige Verarbeitung ist daher nur mit einer entsprechenden Latenz möglich.

Die blockweise Verarbeitung spielt auch in [HL05] eine besondere Rolle, denn dort werden mit Hilfe des blockweise arbeitenden *EM*-Algorithmus die Kovarianzmatrizen des Systemrauschens für verschiedene Fahrsituationen im Rahmen eines *IMM*-Ansatzes geschätzt. Allerdings wird hier davon ausgegangen, dass lediglich eine Messrauschkovarianzmatrix vorhanden ist, die ebenfalls geschätzt werden kann. Um eine Schätzung durchführen zu können, werden gefensterte Datenblöcke betrachtet. Diese wird dann noch dadurch verbessert, dass neben der Filterung auch eine rekursive Glättung durch eine zeitlich inverse Filterung der Daten und eine anschließende BAYES'sche Kombination beider Instanzen durchgeführt wird. Der *EM*-Algorithmus wird ebenfalls bei [EMRH09] sowie [EFM10] eingesetzt, um die Rauschkovarianzmatrizen bzw. die Transitionsmatrix des Systemmodells zu schätzen. In [EFM10] wird zunächst gezeigt, dass zu einem festen Zeitpunkt eine *Maximum Likelihood (ML)*-Schätzung der Komponenten der Zustandsübergangsmatrix  $\Phi_k$  des Systemmodells  $\mathbf{x}_k = \Phi_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_k \mathbf{n}_k$  über eine iterative Berechnungsvorschrift vorgenommen werden kann. Das Verfahren lässt sich mit Hilfe eines gleitenden Fensters in ein echtzeitfähiges Verfahren überführen. Die alternative Variante auf Basis des *EM*-Algorithmus und unter der Annahme zeitinvarianter Rauschkovarianzmatrizen liefert eine vergleichbare echtzeitfähige Vorschrift. Dabei wird in [EFM10] gezeigt, dass die Schätzfehlerkovarianzmatrix des Systemzustandes monoton von der Schätzfehlerkovarianzmatrix des Residuums abhängt, welches sich aus der Prädiktion des Systemzustandes im E-Schritt ergibt. Ebenso wird gezeigt, dass die Kovarianzmatrix des Residuums im M-Schritt von der Schätzfehlerkovarianzmatrix des Systemzustandes monoton abhängt und somit Bedingungen für eine zuverlässige Berechnung von  $\Phi_k$  aufgestellt werden können. Hierbei wird allerdings eine Kenntnis des Systemrauschens vorausgesetzt. Ein ähnliches Konzept wird in [EMRH09] zur Schätzung der Kovarianzmatrizen eines zeitlich unkorrelierten System- und Messrauschprozesses im Rahmen einer inertialen Navigation angewendet. Die Ausgangslage bildet auch hier die RICCATI-Differenzengleichung. Es wird gezeigt, dass sich bei einem vernachlässigbar kleinen Messrauschen

die Schätzungen der Systemrauschkovarianzmatrix asymptotisch den wahren Varianzen annähern und umgekehrt die Messrauschkovarianzschätzungen gegen die wahren Werte konvergieren, wenn die Systemrauschkovarianzen vergleichsweise klein sind. Auch hier wird Echtzeitfähigkeit bewirkt, indem ein gleitendes Fenster über die letzten Schätzungen des Systemzustandes und der Beobachtungen gelegt wird.

Auch in der Sprachsignalverarbeitung spielt die Schätzung von Rauschkovarianzmatrizen eine wichtige Rolle. In [DDA01] und [DDA03] wird der *EM*-Algorithmus mit Hilfe des *NEWTON*-Iterationsschemas in ein sequenzielles Schätzverfahren überführt, so dass z. B. eine echtzeitfähige Schätzung der unbekannten Parameter erreicht wird, ohne eine gleitendes Fenster über die zurückliegenden Daten legen zu müssen. Dieser Ansatz wird in [WHU09] wieder aufgegriffen, um explizit die Messrauschkovarianzmatrix im Rahmen einer *KALMAN*-Filterung zu schätzen, wobei die Beobachtungen einem verrauschten cepstralen Merkmalsvektor entsprechen und ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen dem Merkmalsvektor der unverrauschten Sprache und den Störungen besteht. Zusätzlich wird dabei von mehreren linearen dynamischen Zustandsmodellen ausgegangen, zwischen denen während des Filterprozesses wie beim *IMM*-Inferenzalgorithmus „geschaltet“ wird.

Die Autoren von [WN08] vergleichen eine schwach gekoppelte KF-Struktur mit der eines so genannten „kompakten“ KF. Bei diesem werden sämtliche unbekannte Parameter, Position, Geschwindigkeit sowie Winkel- und Beschleunigungsfehler, die sich aus den Vibrationen des Objekts ergeben, in einem einzigen Filter ohne Rückkopplung verarbeitet. Zur Stabilisierung der Berechnungen, die sich ggf. auf ungenaue Annahmen hinsichtlich der statistischen Eigenschaften der beteiligten Rauschprozesse stützen, wird ein zeitvarianter Parameter zur Prädiktion der Schätzfehlerkovarianzmatrix eingesetzt. Dieser ist abhängig von der Innovationssequenz. Steigt diese an, führt dies zu einer Verringerung der prädizierten Schätzfehlerkovarianzmatrix und damit zu einer Abnahme der *KALMAN*-Gewichtungsmatrix. Die Gewichtungsmatrix stellt sich entsprechend den möglichen Änderungen bei den beteiligten Rauschprozessen oder entsprechend der Modellungenauigkeiten adaptiv ein, welches letztlich wiederum zu einer Verminderung der Positions- und Lageschätzfehler führt.

## Zusammenfassung

Der Stand der Forschung und der Stand der Technik wurden in dem vorliegenden Kapitel behandelt. Ein Schwerpunkt lag dabei auf den Möglichkeiten zur Navigation und Ortung von Fahrzeugen. In diesem Kontext wurde eine Einführung in die verschiedenen Navigationsarten gegeben, was sowohl die kartenbasierte als auch die satellitenbasierte Navigation einschließt. Es konnte des Weiteren ein Einblick in die für eine inertielle Navigation benötigten Sensoren verschafft werden. Dieses betrifft in erster Linie Drehraten- und Beschleunigungssensoren. Da Sensorfehler im Rahmen einer Filterung der verschiedenen Sensorsignale eine bedeutende Rolle spielen, wurden diese hier ebenfalls behandelt. Außerdem wurde ein Überblick über die Navigationssysteme gegeben, die auf Messwerte von integrierten Sensoren beruhen und deren Schätzergebnisse durch die Annahme spezieller Bewegungsmodelle verbessert werden können. Weitere Schwerpunkte dieses Kapitels lagen auf der Betrachtung von Verfahren zur Fusion verschiedener Sensorsignale, wobei das zentralisierte und dezentralisierte Filter eine wesentliche Rolle spielen. Das Kapitel schließt mit einer kurzen Zusammenfassung aktueller Verfahren zur Schätzung von Modell- oder Sensorparametern ab, da diese teilweise als unbekannt und fest, zeitvariant oder Zufallsvariablen aufzufassen sind und daher im Rahmen eines Filterprozesses häufig nachgeführt werden müssen.

## Kapitel 3

### Wissenschaftliche Ziele

Dieses Kapitel verfolgt die Erläuterung der zwei wesentlichen Ziele: zum einen die Verbesserung der vertikalen Positionsschätzung und zum anderen eine verbesserte Modellierung von Messungenauigkeiten und eine daraus letztlich wieder resultierende zuverlässigere Berechnung der Navigationslösung. Bei der Navigation ist zu beachten, dass in erster Linie die horizontale Positionsgenauigkeit eine wichtige Rolle spielt, obwohl es auch Situationen gibt, in denen die vollständige dreidimensionale Positionsschätzung von großem Vorteil sein kann. Die sensorabhängigen Messungenauigkeiten betreffend wurde bereits in Kap. 2 erwähnt, dass eine Messung durch verschiedene zeitvariante Effekte beeinflusst wird. Dies können z. B. äußere Einflüsse wie das Vibrieren des Objekts sein, an oder auf dem der Sensor befestigt ist. Auch der Sensor selbst kann Ursache dieser Ungenauigkeiten sein, weil thermische Fluktuationen oder andere bauteilabhängige Effekte die Messungen beeinträchtigen. Daher ist es von Interesse, die Ausgangssignale einer IME so zu entrauschen, dass für eine weitere Verarbeitung möglichst fehlerfreie Signale zur Verfügung stehen. Im Folgenden wird die Motivation zur Untersuchung dieser Problemfelder näher erläutert.

#### 3.1 Verbesserung der Positionsschätzung

Lange Zeit stand die Positionsbestimmung in der horizontalen Ebene im Mittelpunkt, was für die bisherigen Anwendungen auch häufig ausreichend war. Man stelle sich aber die Situation vor, in der sich ein Fahrzeug in einem Parkhaus mit mehreren Ebenen befindet. Meist stehen dem Navigationssystem in diesem Fall keine Karteninformationen zur Verfügung, weshalb ein Kartenabgleich nicht möglich ist. Eine zuverlässige Information über die Höhe, in der sich das Fahrzeug befindet, könnte jedoch von einem Leitsystem verwendet werden, um das Fahrzeug zum nächsten freien Parkplatz zu lotsen. Zuverlässige Höhenmessungen können außerdem dazu genutzt werden, die Lageschätzung in einem INS zu verbessern. Die Höhe ist dabei als weitere Stützgröße anzusehen, welche die Leistungsfähigkeit des Navigationsfilters erhöht und damit Einfluss auf die Schätzgrößen nimmt, die mit der Höhe korreliert sind. In Kap. 5 wird gezeigt, dass ein direkter Zusammenhang zwischen der Position einer IME sowie der Schätzung deren Position über die Lage und dem Abstand zwischen der IME und einem Positionsschätzer wie einem *GPS*-Empfänger besteht. Problematisch ist dabei, dass bei einer falschen Höhenbestimmung auch eine falsche Annahme hinsichtlich der Schwerebeschleunigung in der Navigationslösung getroffen wird. Ist die Differenz zwischen geschätzter und wahrer Höhe sehr hoch, so ist die daraus berechnete Schwerebeschleunigung in den meisten Fällen zu gering. Ein Teil der Schwerebeschleunigung wird dann in der Navigationsberechnung ggf. nicht kompensiert, was wiederum den Fehler weiter erhöht. Die so genannten SCHULER-Oszillationen beschreiben in diesem Kontext das Problem, dass durch horizontale Positionsfehler die Schwerebeschleunigung fehlerhaft kompensiert wird und somit zu Höhenfehlern führt, denn die Schwerebeschleunigung hängt

vom Breitengrad ab (siehe nachfolgendes Kap. 4) [FB99]. Ein wissenschaftliches Ziel dieser Arbeit ist es demnach, eine zuverlässige und robuste Möglichkeit zur vertikalen Positionsschätzung zu entwickeln, die auf einer barometrischen Höhenschätzung beruht, und diese zu untersuchen. In der industriellen Anwendung ist man meistens darauf bedacht, eine möglichst kostengünstige und flexible Lösung für die genannten Probleme zu finden. Neben der Intention, dass das Verfahren zur Höhenschätzung auf bereits erprobte Ansätze aufbaut (z. B. indem Kartendaten verwendet werden) ist daher ein weiteres Ziel, kostengünstige Hardware einzusetzen. Aus diesem Grund wurde ein barometrischer *MEMS*-Sensor mit einer *Universal Serial Bus (USB)*-Schnittstelle der Fa. Toradex verwendet, der die Temperatur und den Luftdruck misst. Da ein barometrischer Sensor auch dann noch zuverlässige Informationen liefern kann, wenn andere Stützgrößen (z. B. *GPS*-Ausfall aufgrund von Signalabschattung) ausbleiben, kann die Stabilität der Navigationslösung vor allem in den Fällen erhöht werden, in denen das INS autonom arbeiten muss [Wen07]. Da auch barometrische Sensoren Skalierungsfehlern und Biasdriften unterworfen sind, war das Ziel, im Rahmen einer Filterstruktur diese Fehler möglichst zuverlässig zu schätzen und anschließend zu kompensieren, um sie zur Stützung eines *INS/GPS* verwenden zu können.

In der Literatur werden häufig Filterstrukturen untersucht, die einen Einsatz im realen Umfeld aufgrund ihrer Komplexität nicht zulassen [TW04]. Aus diesem Grund stehen Filter wie z. B. das *Unscented KALMAN Filter (UKF)* oder Partikelfilter (PF) hier nicht im Mittelpunkt und es wurde auf einen Ansatz wie den *IMM*-Inferenzalgorithmus verzichtet [HL05]. Dagegen wird hier ein Fehlerfilter (FF) zur Bestimmung des Navigationsfehlers eingesetzt, welches den eigentlichen Systemzustand, die Position und Geschwindigkeit eines Fahrzeugs, außerhalb des Filters korrigiert. Diese Art der Filterung wird im Bereich der Navigation seit einigen Jahren erfolgreich genutzt. Das hier verwendete linearisierte KALMAN-Filter (LKF) lässt aufgrund seiner Struktur die einfache Berücksichtigung einer Bewegungsdifferentialgleichung zu. Im Vergleich dazu bedeutet ein KF, welches direkt Position, Geschwindigkeit und die Lage einer IME schätzen soll, einen Mehraufwand, da der Systemzustand um weitere Komponenten wie z. B. die Beschleunigung erweitert werden muss. Dieses ist in erster Linie auf die Differentialgleichungen für den Orientierungsvektor  $\sigma$  und den Geschwindigkeitsvektor  $v$  eines Fahrzeugs zurückzuführen, die in Kap. 4 näher behandelt werden.

## 3.2 Berücksichtigung von Messungenauigkeiten

Ein ebenso wichtiger Aspekt bei der Filterung inertialer Sensordaten sowie satellitenbasierter Informationen ist, dass die dabei auftretenden und zum Teil nicht vorhersagbaren Störungen für eine effiziente Navigationslösung genau modelliert werden müssen. Diese Effekte lassen sich vereinfachend durch additive weiße GAUSS-verteilte Rauschprozesse repräsentieren, bei denen lediglich Aussagen über die statischen Eigenschaften (erstes und zweites zentrales Moment) getroffen werden müssen. Das Rauschen wird allerdings durch Vibrationen, die nicht mehr aufgelöst werden können, oder durch eine unzureichend genaue Modellierung der Fahrdynamik induziert. Häufig handelt es sich bei den Vibrationen um Schwingungen mit einer bestimmten Eigenfrequenz, womit das Leistungsdichtespektrum (LDS) nicht mehr konstant ist und man somit nicht mehr von einem weißen Rauschprozess ausgehen kann. Es muss ebenfalls erwähnt werden, dass eine Differentialgleichung, die eine Fahrzeugbewegung beschreibt, in einem zeitdiskreten Filter durch eine Taylorreihenentwicklung und anschließenden Abbruch nach dem linearen Glied approximiert werden kann. Die damit verbundene Unsicherheit durch die approximative Lösung kann sich letztendlich auch in dem Rauschen widerspiegeln.

Zusammenfassend können temperaturabhängige, sensorinhärente oder vibrationsinduzierte Effekte durch zeitlich korrelierte Rauschprozesse angenähert werden. Dies muss bei der Filterung explizit berücksichtigt werden, da ein KF zunächst von weißen Störgrößen ausgeht. Eine Möglichkeit, korrelierte System- oder Messrauschprozesse zu berücksichtigen, besteht darin, den Systemzustandsvektor um einen zeitkorrelierten Rauschvektor  $\mathbf{n}_k \in \mathbb{R}^D$  zu erweitern, der sich anhand von  $\mathbf{n}_k = \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{n}_{k-1} + \boldsymbol{\eta}_k$  mit  $p(\boldsymbol{\eta}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{0}_{D \times 1}, \mathbf{Q}_\eta)$ ,  $\forall k$  beschreiben lässt. Dabei ist  $\mathbf{Q}_\eta := E[\boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T]$  die Rauschkovarianzmatrix des mittelwertfreien, weißen GAUSS-verteilten Rauschprozesses, der das zeitkorrelierte Rauschen  $\mathbf{n}_k$  treibt.<sup>1</sup> Da dies sowohl Beschleunigungs- und Drehraten- als auch ggf. Magnetfeldsensordaten betrifft, würde eine solche Erweiterung des Filterzustandsvektors mit einem höheren Berechnungsaufwand bei der Filterung einhergehen, was sich vor allem bei der Matrixinversion im Aktualisierungsschritt eines KF bemerkbar machen würde. Dieses hätte u. U. auch Auswirkungen auf die Schätzgenauigkeit. Es existiert zudem die Möglichkeit, die Einträge einer zeitvarianten Zustandsübergangsmatrix selbst im Rahmen der Filterung zu schätzen [EFM10].

Im Gegensatz zu den genannten Verfahren soll hier das Ziel verfolgt werden, zeitliche Korrelationen ohne eine Erweiterung des Filters zu berücksichtigen. Dabei wird das Rauschen  $\mathbf{n}_k$  weiterhin durch eine Gleichung wie oben beschrieben und zusätzlich eine als zeitvariant angenommene Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\eta,k}$ <sup>2</sup> parallel zum Filterprozess geschätzt. Dazu soll ein Schätzverfahren hergeleitet werden, das auf einem bereits etablierten Verfahren, dem so genannten EM-Algorithmus aufbaut, der in seiner ursprünglichen Form jedoch nicht für eine echtzeitfähige Verarbeitung geeignet ist, sondern die dafür notwendigen Beobachtungen blockweise erwartet. Das bedeutet, dass eine ausreichende Anzahl an Beobachtungen zur Lösung des Schätzproblems erst vorhanden sein muss. Durch eine angepasste Formulierung des Schätzproblems kann dieses Verfahren in einen sequenziellen Algorithmus überführt werden. In der vorliegenden Arbeit wird dies in Kap. 7 im Detail vorgestellt. Ein Vorteil liegt darin, dass der präsentierte Ansatz annähernd echtzeitfähig ist. Zusätzlich kann eine fehlerhafte Annahme der Varianzen oder eine falsche Initialisierung der Parameter auf diese Weise kompensiert werden. Hierbei sei allerdings angemerkt, dass sich Vibrationen nicht ausschließlich in der Kovarianzmatrix des Messrauschens widerspiegeln müssen, sondern dass das gesamte Modell zur Beschreibung der zeitlichen Korrelationen betrachtet werden sollte. Der Erwartungswert lässt sich zwar i. d. R. durch einen empirischen Mittelwert annähern, dieser ändert sich jedoch in Abhängigkeit der Länge des Beobachtungsintervalls und des Mittelwerts des zugrunde liegenden Rauschens  $\boldsymbol{\eta}_k$ . Ebenso spielt es eine Rolle, ob die Zustandsübergangsmatrix  $\mathbf{D}_n$  als zeitvariant oder zeitinvariant angenommen wird.

Zur Veranschaulichung der zeitlichen Korrelationen betrachten wir Abb. 3.1. In den Teilbildern (a) und (c) sind die ungefilterten Ausgangssignale der Drehraten- und Beschleunigungssensortriade und in den Abb. (b) und (d) die Verläufe von geschätzten Standardabweichungen angenommener GAUSS-MARKOV-Prozesse (GMP) erster Ordnung einer *Miniature Tracker inertial (MTi)*-Sensoreinheit über der diskreten Zeit  $t_k := t(k) = k \cdot \Delta t_{\text{IME}}$  aufgetragen, wobei  $\Delta t_{\text{IME}}$  das Abtastintervall der IME ist. Zu dieser Sensoreinheit werden in Kap. 9 weitere Untersuchungsergebnisse präsentiert. Es sind beispielhaft einzelne Phasen eingezeichnet, in denen das Fahrzeug während einer Messaufnahme entweder still gestanden hat (ohne und mit laufendem Motor, bezeichnet als Phase  $\check{P}_O$  und Phase  $\check{P}_M$ ) oder in denen sich das Fahrzeug bewegt hat (Phase  $\check{P}_B$ ). Bei den übrigen Abschnitten

<sup>1</sup>In dieser Arbeit wird auf eine Unterscheidung zwischen der Zufallsvariablen und der Realisierung verzichtet, es sei denn, aus dem Kontext ist nicht ersichtlich, um was es sich handelt. Dies gilt für die Berechnungen von Erwartungswerten (notiert durch  $E[\dots]$ ), Varianzen (notiert durch  $\mathbb{V}[\dots]$ ) und Verteilungsdichtefunktionen (notiert durch  $p(\dots)$ ).

<sup>2</sup>Der zusätzliche Index  $k$  kennzeichnet die Zeitvarianz.



traten mehrmalige Wechsel zwischen den Bewegungsphasen auf. Sie wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht kenntlich gemacht. Bei den dargestellten Signalausschnitten lag hauptsächlich eine asphaltierte Straße vor, wodurch geringere Vibrationen hervorgerufen wurden als bei einer Fahrt über Kopfsteinpflaster. Das Schätzverfahren, das hier eingesetzt wurde, basiert auf der Berechnung von

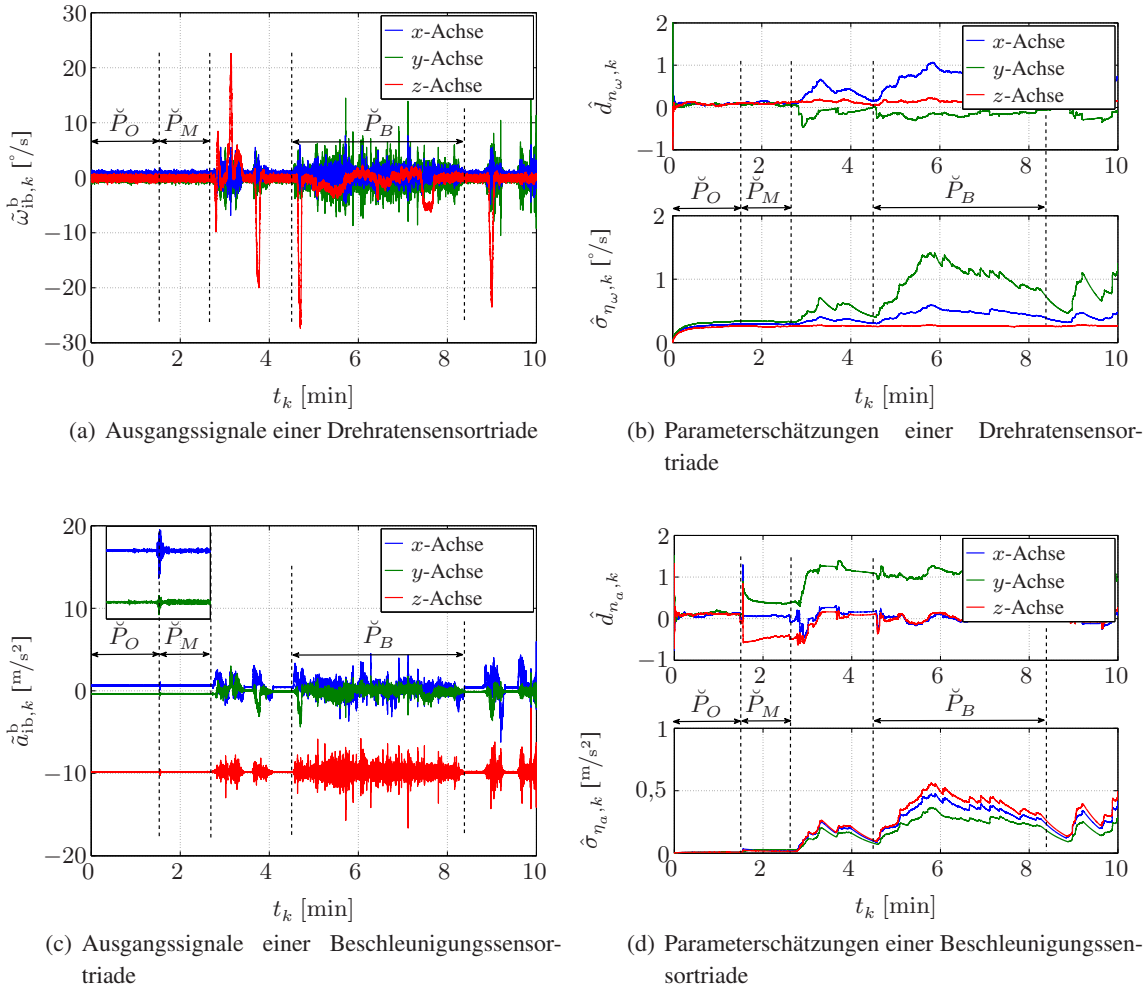


Abbildung 3.1: Typische Ausgangssignale einer *MTi*-Sensoreinheit und geschätzte Parameter zeitkorrelierter Rauschprozesse

Differenzen aufeinanderfolgender Messwerte. Dies wird in Kap. 7 genauer erläutert [Wen07]. Die Parameter  $\hat{d}_{n_{\omega},k}$  und  $\hat{d}_{n_a,k}$  bezeichnen hier die Schätzungen der Diagonalkomponenten der als zeitvariant angenommenen Matrix  $\mathbf{D}_{n,k}$ , welche jeweils drei Komponenten des Beschleunigungs- und Drehratensensormodells enthält. Die Parameter  $\hat{\sigma}_{\eta_{\omega},k}$  und  $\hat{\sigma}_{\eta_a,k}$  entsprechen der Wurzel der jeweiligen Diagonalkomponenten der geschätzten Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\eta,k}$ .

Aufgrund einer nicht waagerechten Anfangsausrichtung der *MTi*-Sensoreinheit teilt sich die Schwerkerebeschleunigung auf die  $x$ - und die  $z$ -Achse auf, woraus Nullpunktfehler resultieren, wie in Abb. 3.1 (c) zu sehen ist. Diese werden später im Vorfeld der Signalverarbeitung kompensiert. Der Übergang zwischen der Ruhephase  $\check{P}_O$  und  $\check{P}_M$  ist bei den Drehratensensorsignalen im Gegensatz zum Übergang von  $\check{P}_M$  nach  $\check{P}_B$  kaum zu erkennen. Eine Ursache dafür ist eine zu den Beschleu-

nigungsmessern vergleichsweise geringe Auflösung. Bei diesen ist der Unterschied zwischen  $\check{P}_O$  und  $\check{P}_M$  jedoch in dem vergrößerten Ausschnitt zu erkennen. Auch die Schätzungen in der rechten Abb. 3.1 (d) weist an dieser Stelle auf zusätzliche Vibrationen hin. In der Phase  $\check{P}_B$  wird bei den Drehratensensoren hauptsächlich die nach oben gerichtete  $z$ -Komponente beeinflusst, da diese die eigentliche Drehbewegung des Fahrzeugs in der horizontalen Ebene beinhaltet. Starke Signalschwankungen in dieser Komponente sind im Wesentlichen auf die Vibrationen der Karosserie aufgrund der Straße und des Motors zurückzuführen. Gleiches gilt für die Messungen  $\tilde{a}_{ib,x,k}^b$  und  $\tilde{a}_{ib,y,k}^b$ .

Betrachtet man an dieser Stelle im Vorgriff auf die späteren Untersuchungsergebnisse die geschätzten Parameter des GMP der MTi-Sensoreinheit in Abb. 3.1 (b), welche auf Basis der genannten Messwertdifferenzen bestimmt wurden, so wird deutlich, dass diese einen zeitvarianten Verlauf unter der Annahme einer zeitvarianten Zustandsübergangsmatrix  $\mathbf{D}_{n,k}$  aufweisen. Die Parameter in Phase  $\check{P}_O$  stimmen dabei mit denen im Datenblatt des Sensors überein, während sie jedoch in den Phasen  $\check{P}_M$  und  $\check{P}_B$  um ein Vielfaches ansteigen. In Phase  $\check{P}_B$  fallen des Weiteren Signalausschnitte auf, in denen die Parameter deutlich abfallen. Hierbei kam das Fahrzeug an einer Ampel zum Stehen, womit eine Phase  $\check{P}_M$  vorlag.

Motivierend für das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren zur Schätzung zeitvarianter Varianzen war, den EM-Algorithmus, der in seiner ursprünglichen Form blockweise arbeitet, aber aufgrund seiner durch die Literatur belegte Leistungsfähigkeit [HL05] zuverlässige Schätzergebnisse liefert, in ein sequenzielles Verfahren zu überführen. Dabei sollten die Parameter auf Basis des eingesetzten System- bzw. Messmodells geschätzt werden, so dass sie letztendlich unabhängig von einer möglichen Vorverarbeitung sind. Im Rahmen des in dieser Arbeit eingesetzten Filterverfahrens soll auf diese Weise in erster Linie eine langfristige Stabilisierung des inertialen Navigationssystems erreicht werden. In Kap. 8 wird gezeigt, dass systembedingt nicht sämtliche Effekte dabei berücksichtigt werden können, da ein schwach gekoppeltes Navigationssystem dies aufgrund der Abhängigkeit von weiteren Sensorinformationen nur eingeschränkt zulässt. Das betrifft u. a. die abtastwertweise Korrektur von sehr kurzzeitig auftretenden Störungen in der Navigationslösung.

In Kap. 8 werden außerdem weitere Analysewerkzeuge angegeben, mit denen sensorspezifische Parameter, die seitens der Hersteller in Datenblättern vorgegeben sind, überprüft werden können. In Kap. 7.2 wird auch ein weiteres sequenzielles Verfahren vorgestellt, das empirisch den Mittelwert und die Varianz eines ergodischen Prozesses schätzt. Es wird allerdings gezeigt, dass dieses nur näherungsweise die für die Filterung benötigten Parameter schätzen kann, da das verwendete Systemmodell bei diesem Ansatz unberücksichtigt bleibt.

## Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die wissenschaftlichen Ziele dieser Arbeit definiert. Dabei wurde einerseits begründet, warum eine vertikale Positionsschätzung von Fahrzeugen ebenso wichtig sein kann wie die horizontale Positionsschätzung. Außerdem wurde aufgezeigt, dass bestimmte Sensorparameter in der Realität durch ein zeitinvariantes Modell nur approximativ beschrieben werden können, wodurch die Kompensation von Fehlern durch den Filteralgorithmus erschwert wird. Daher wurde neben bisherigen Lösungsansätzen aus der Literatur ein Verfahren motiviert, das auf der Voraussetzung von zeitvarianten Rauschkovarianzmatrizen beruht. Dieses kann zeitliche Korrelationen im Filterungsprozess berücksichtigen, ohne das Rauschen explizit schätzen zu müssen. Auf diese Weise bleibt einerseits die Kausalität bei der Signalverarbeitung gewahrt, andererseits reduziert sich der Filteraufwand durch eine geringere Dimension des Zustandsvektors.





## Kapitel 4

### Grundlagen der gekoppelten Navigation

Das vorliegende Kapitel behandelt die Grundlagen der inertialen Navigation. Dabei werden zunächst die unterschiedlichen Koordinatensysteme vorgestellt, die für Navigationsaufgaben von entscheidender Bedeutung sind. Dies schließt auch eine geeignete Modellierung der Erdform ein. Anschließend werden verschiedene Höhenangaben definiert. Um Messwerte, die in unterschiedlichen Koordinatensystemen angegeben werden, auf eine gemeinsame Basis zu beziehen, wird ein detaillierter Überblick zur Transformation solcher Daten gegeben. Dabei stehen die Eulerwinkel- und Quaternionenparametrisierung im Vordergrund. Es wird außerdem der *Strapdown*-Algorithmus vorgestellt, mit dessen Hilfe aus inertialen Sensordaten Position und Geschwindigkeit berechnet werden können. Hinzu kommt eine genaue Betrachtung und Modellierung inertialer Sensorfehler. Die Kombination mit Daten eines *GPS*-Empfängers bildet die Basis für das implementierte Fehlerfilter (FF), dessen Herleitung dieses Kapitel abschließt.

#### 4.1 Inertiale Messtechnik

Der Begriff „inertia“ in INS bedeutet „Trägheit“ und zeigt, dass hierbei das Prinzip der Massenträgheit von Körpern gegenüber linearen und rotatorischen Bewegungen ausgenutzt wird. Wie beschrieben, dienen sowohl Beschleunigungsmesser als auch Kreisel, die Richtungsinformationen liefern, als Sensoren. In der vorliegenden Arbeit werden jeweils drei Beschleunigungsmesser und drei Drehratensensoren verwendet, um die nötigen Informationen in drei Freiheitsgraden zu liefern. In modernen Kraftfahrzeugen (KFZ) sind bereits inertielle Sensoren zur Detektion von Driftbewegungen des Fahrzeugs vorhanden. Dabei handelt es sich um kostengünstige *MEMS*-Sensoren im ABS.

Wie in Kap. 2 bereits erörtert, unterscheidet man i. d. R. zwei Typenklassen, die den Aufbau und die Funktionsweise eines INS charakterisieren:

- **Plattformsystem:** Die Sensoren befinden sich in einer raumfesten Lage bezüglich des Inertialraumes oder auch des erdorientierten Systems (siehe Kap. 4.1.1). Ihre Lage ist unabhängig von der eigentlichen Fahrzeugbewegung, da sie durch eine kardanische Aufhängung vollständig von dem Fahrzeug entkoppelt sind. Ein solches System ist aufgrund der notwendigen Mechanik und der relativ hohen Anfälligkeit gegenüber Ausfällen mit hohen Kosten verbunden [Cra01].
- **Trägerorientiertes System:** Das trägerorientierte (engl. *Strapdown*) System ist im Gegensatz zum Plattformsystem fest mit dem Trägersystem verbunden. Sämtliche Bewegungen des Fahrzeugs werden daher von der Messeinheit erfasst. Dies schließt auch unerwünschte Vibrationen ein, welche dann in einer zum Teil aufwändigen Nachfilterung eliminiert werden müssen [TW04].

Die beiden genannten Systeme lassen sich zusätzlich dahingehend klassifizieren, ob es sich um eine hochgenaue Anwendung handelt oder ob ein gewisses Fehlermaß tolerierbar ist. Von hochgenauen Anwendungen spricht man i. d. R., wenn der Fehler ohne externe Stützung bei weit unter 1 sm/h (Seemeile pro Stunde) liegt, also unter  $1852^{\text{m}}/\text{h}$ . Bei Systemen mittlerer Genauigkeit liegt die Positionsabweichung bei ca. 1 sm/h und bei Systemen niedriger Genauigkeit bei bis zu mehreren Kilometern pro Stunde. Tab. 4.1 führt die unterschiedlichen Klassen gemäß Positions- und Winkelerfassung im Detail auf [Cra01]. In der hohen Genauigkeitsklasse sind fast ausschließlich Plattformsysteme

	<b>Zeitliches Intervall</b>	<b>Niedrige Systemgenauigkeit</b>	<b>Mittlere Systemgenauigkeit</b>	<b>Hohe Systemgenauigkeit</b>
Position	1 h	100 km ... 300 km	1 km ... 3 km	300 m ... 500 m
	1 min	30 m ... 50 m	0,5 m ... 3 m	0,3 m ... 0,5 m
	1 s	0,3 m ... 0,5 m	0,02 m ... 0,1 m	0,01 m ... 0,02 m
Neigung	1 h	1° ... 3°	0,01° ... 0,05°	0,003° ... 0,008°
	1 min	0,2° ... 0,3°	0,004° ... 0,005°	0,0003° ... 0,0005°
	1 s	0,01° ... 0,03°	0,003° ... 0,004°	<0,0003°
	Preis in €	1000 ... 5000	10 000 ... 100 000	100 000 ... 1 000 000

Tabelle 4.1: Genauigkeitsklassen inertialer Navigationssysteme [Cra01]

zu finden, während für mittlere und niedrigere Genauigkeiten meist trägerorientierte Systeme verwendet werden. Seit einigen Jahren geht der Trend aber auch in der oberen Klasse immer mehr zu trägerorientierten Systemen, da sie günstiger zu realisieren sind und Bauformen geringeren Ausmaßes aufweisen.

#### 4.1.1 Koordinatensysteme

In einem INS werden Informationen aus unterschiedlichen Quellen gewonnen, die wiederum auf verschiedene Koordinatensysteme bezogen sind. Daher ist es nötig, diese für eine kollektive Verarbeitung in ein gemeinsames Koordinatensystem zu transformieren. Im Folgenden sollen die Koordinatensysteme vorgestellt werden, die im Bereich der Navigation eine wichtige Rolle spielen.

Eine Übersicht über die gängigsten vier Systeme wird in Abb. 4.1 gegeben. Das *GPS* beispielsweise benötigt keinen Bezugspunkt auf der Erdoberfläche. Es gibt die Position im so genannten *Earth-Centered Earth-Fixed (ECEF)*-Koordinatensystem an. Dieses hat seinen Ursprung im Erdmittelpunkt bzw. dem Geozentrum. Ein Beschleunigungsmesser und ein Gyroskop allerdings messen ihre Daten in ihrem körpereigenen System bezogen auf das inertielle Koordinatensystem. Auch dieses hat seinen Ursprung in der Mitte der Erde. Um die verschiedenen Messdaten in Einklang zu bringen, wird häufig das Navigationskoordinatensystem verwendet, welches seinen Ursprung an einem vorab definierten Ort auf der Erdoberfläche hat:

- *Inertiales Koordinatensystem* (i-Rahmen): Das Zentrum des inertialen Koordinatensystems, auch i-Rahmen genannt, liegt im Erdzentrum. Die Achsen des Systems sind jedoch nur in Bezug auf die Sterne als fest anzusehen. Die Erde ist demnach ein Objekt, welches sich im Koordinatenursprung dreht, das System selbst bewegt sich jedoch nicht mit.
- *Erdbezogenes Koordinatensystem* (e-Rahmen): Das erdbezogene *ECEF*-System, welches auch als e-Rahmen bezeichnet wird, hat ebenso wie der i-Rahmen seinen Ursprung im Erdmittel-

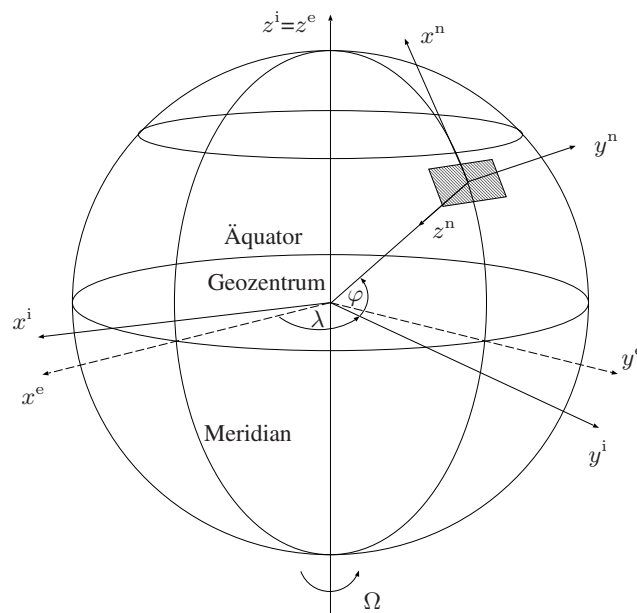


Abbildung 4.1: Koordinatensysteme: inertial (i-Rahmen), erdbezogen (e-Rahmen) und lokal (n-Rahmen)

punkt. Seine  $x$ - und seine  $y$ -Achse drehen sich jedoch mit der Erde. Die  $x$ -Achse schneidet dabei genau den Greenwich-Meridian und den Äquator. Das *GPS*-System ortet Objekte auf der Erdoberfläche in diesem Koordinatensystem, weil die Satelliten in geostationären Umlaufbahnen um die Erde kreisen. Gegenüber dem i-Rahmen rotiert der e-Rahmen mit der Erddrehrate  $\Omega$  aus Tab. 4.2.

- *Navigationssystem* (n-Rahmen): Das Navigationskoordinatensystem ist das System, in welches die Größen der Messinstrumente häufig umgerechnet werden, so dass eine gemeinsame Ausgangsbasis für die weiteren Berechnungen vorhanden ist. Der Ursprung liegt auf der Erdoberfläche und ist vorab definiert. Die Achsen weisen von dort aus in Nord- bzw. Ostrichtung sowie zum Erdmittelpunkt. Aus diesem Grund wird auch vom lokalen *North-East-Down (NED)*-Koordinatensystem gesprochen. Durch eine einfache Transformation erhält man aus dem *NED*-Koordinatensystem das *East-North-Up (ENU)*-Koordinatensystem, welches sich lediglich durch die in entgegengesetzte Richtung (entgegen der Schwerebeschleunigung) definierte  $z$ -Achse (Aufwärtskomponente) unterscheidet.
- *Körperbezogenes Koordinatensystem* (b-Rahmen): Der Ursprung des körperbezogenen Systems ist, wie der Name schon sagt, durch den Körper (mit dem das Messinstrument fest verbunden ist) selbst definiert. Die Achsen sind dementsprechend durch den Messsensor vorgegeben. Die Ausrichtung der Achsen ändert sich durch die Gier-, Nick- und Rollbewegung des Körpers. Eine IME misst Beschleunigungen und Drehraten des b-Rahmens bezüglich des i-Rahmens, da u. a. auch die Erddrehrate erfasst wird. In der Praxis ist zu beachten, dass eine vollständige Orthogonalität zwischen den Achsen nicht gewährleistet ist. Dies wird jedoch häufig vernachlässigt. Nur bei Anwendungen mit hohen Genauigkeitsanforderungen wird durch eine softwarebasierte Nachbearbeitung versucht, die Orthogonalität zu verbessern.

Inertiale Sensoren erfassen ihre Messwerte im körperbezogenen System, dem b-Rahmen, bezogen auf

das inertielle System  $i$ . Dies wird nachfolgend durch die beiden tiefgestellten Indizes  $ib$  einer skalaren Größe oder Vektorgröße symbolisiert. Der obere Index bezeichnet dabei das Koordinatensystem, in dem die Größe angegeben ist. Ein von einem Sensor gemessener Beschleunigungsvektor könnte beispielsweise durch  $a_{ib}^e$  in Koordinaten des  $e$ -Rahmens angegeben werden.

Wie oben beschrieben, werden *GPS*-Koordinaten im  $e$ -Rahmen angegeben. Dieses geschieht jedoch nicht direkt durch Angabe in  $x^e$ -,  $y^e$ - und  $z^e$ -Koordinaten, sondern mittels des Längengrads  $\lambda$ , des Breitengrads  $\varphi$  und der Höhe  $h$  über Normalnull (NN) bezüglich eines definierten Erdellipsoids. Man spricht dabei auch von geodätischen *Longitude-Latitude-Height (LLH)*-Koordinaten. Die Höhe wird dabei im Folgenden in Richtung Sterne als positiv angegeben. In der Literatur ist dies teilweise auch in entgegengesetzter Richtung üblich.

Der gängigste Referenzellipsoid wurde im Jahre 1984 durch das geodätische Referenzsystem bzw. dem *WGS84* festgelegt [HWLW07]. Dieses besteht aus einer Bezugsoberfläche, die der Erdoberfläche grob angepasst ist: einem detaillierten Modell für die von der idealisierten Form abweichenden Erdfigur (Geoid) und einem so genannten Referenzrahmen. Es handelt sich dabei um zwölf über der Erde verteilte Fundamentalstationen, mit deren Hilfe der Bezug zwischen den genannten Modellen und der Erdkruste durch Angabe von zeitabhängigen Koordinaten definiert wird. Tab. 4.2 enthält die wichtigsten Parameter, über die das Referenzsystem bestimmt ist [Wen07]. Die Schwere- und die

Bezeichnung	Symbol	Wert
Halbachse des Ellipsoids (groß)	$a$	6378,137 km
Halbachse des Ellipsoids (klein)	$b$	$a(1 - f_0) = 6356,752\,314\,2$ km
Abflachung des Ellipsoids	$f_0$	$1 - \frac{b}{a} = 298,257\,223\,563 \cdot 10^{-1}$
Exzentrizität des Ellipsoids	$e_0$	$\sqrt{f_0(2 - f_0)} = 8,181\,919\,084\,26 \cdot 10^{-2}$
Krümmungsradius (Nord-Süd)	$R_n$	$a \frac{1 - e_0^2}{(1 - e_0^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$
Krümmungsradius (Ost-West)	$R_e$	$\frac{a}{\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 \varphi}}$
Durchschnittlicher Krümmungsradius	$R_0$	$\sqrt{R_n R_e}$
Erddrehrate	$\Omega$	$7,292\,115 \cdot 10^{-5}$ rad/s
Gravitationskonstanten	$g_0$	$9,780\,318$ m/s <sup>2</sup>
	$g_1$	$5,3024 \cdot 10^{-3}$
	$g_2$	$5,9 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 4.2: Parameter des *WGS84*-Referenzsystems [Wen07]

Zentripetalbeschleunigung bleiben von der nun nicht mehr als kugelförmig angenommenen Erdform im Wesentlichen unberührt. Lediglich die  $z$ -Komponente des Schwerebeschleunigungsvektors liefert einen Beitrag ungleich Null:

$$\mathbf{g}^n(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 (1 + g_1 \sin^2(\varphi(t)) + g_2 \sin^2(2\varphi(t))) \left( \frac{R_0}{R_0 - h(t)} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Man erkennt, dass die Gravitation ortsbezogen und zeitabhängig ist, da sie vom Breitengrad  $\varphi(t)$  und von der Höhe  $h(t)$  abhängt. Es sollte jedoch bedacht werden, dass der lokale Schwerebeschleunigungsvektor aufgrund der angenäherten Form der Erde nicht zwangsläufig zum Erdmittelpunkt

weist. Im Falle eines vereinfachten Erdmodells, z. B. einer Kugelform, lässt sich die Gravitation in  $z$ -Richtung auf die Konstante  $g_0$  reduzieren.

#### 4.1.2 Höhendefinitionen

In den bisherigen Betrachtungen wurde davon ausgegangen, dass die Höhe eine fest definierte Größe ist. Es existieren allerdings verschiedene Möglichkeiten, eine Höhe anzugeben, die sich im Wesentlichen durch den verwendeten Bezugspunkt unterscheiden. Abb. 4.2 zeigt den Vergleich zwischen den unterschiedlichen Höhendefinitionen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit beachtet werden müssen.

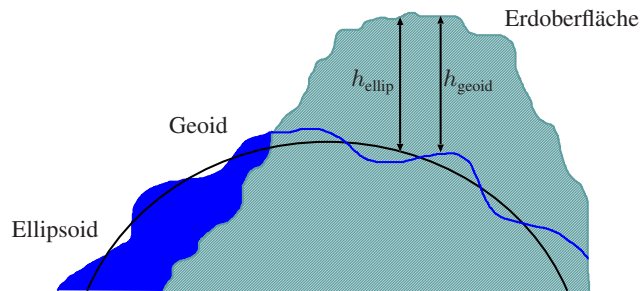


Abbildung 4.2: Vergleich von ellipsoider und geoider Höhe

**Höhe über dem Ellipsoid** Im WGS84-Referenzmodell ist die Form der Erde durch ein Ellipsoid approximiert, das einem idealen Meeresspiegel angepasst ist. Die Höhe über dem Ellipsoid  $h_{\text{ellip}}$  bezieht sich demnach auf die Höhe über dem idealen Meeresspiegel. Dieser ist dabei ausschließlich durch die Gravitation und die Zentrifugalkraft der rotierenden Erde definiert. Allerdings wird der Meeresspiegel auch durch eine ungleiche Massenverteilung auf der Erde beeinflusst, weshalb die Annahme ungenau ist. Daraus resultiert, dass die Höhe über dem Ellipsoid, wie sie meist auch von einem GPS-Empfänger angegeben wird, i. Allg. nicht der wahren Höhe über dem Meeresspiegel entspricht.

**Höhe über dem Geoid** Es wird versucht, die genannte Problematik bei der Ellipsoidhöhe durch das so genannte Geoidmodell auszugleichen [NAS96]. Hierbei werden die lokalen Abweichungen des Meeresspiegels berücksichtigt, so dass eine genauere Angabe der realen Höhe ermöglicht werden kann. Die Abweichungen zwischen einer ellipsoiden Höhe  $h_{\text{ellip}}$  und der Geoidhöhe  $h_{\text{geoid}}$  können dabei bis zu  $\pm 110$  m betragen. Heutige GPS-Empfänger können intern mittlerweile auch die Geoidhöhe annähernd berechnen, weil sie auf das entsprechende Modell zurückgreifen können. Da es eine Reihe unterschiedlicher Modelle gibt, können diese Geoidhöhen allerdings von Empfänger zu Empfänger abweichen.

**Geopotentielle Höhe** Die geopotentielle Höhe  $h_{\text{geop}}$  ist ein Sonderfall, der in Abb. 4.2 nicht aufgeführt werden kann. Diese Höhe wird durch den Quotienten der Energie, die benötigt wird, um ein Objekt von Meereshöhe auf eine geometrische Höhe  $h_{\text{geom}}$  zu heben, und einer Schwerebeschleunigung  $g_0$  definiert, welche auf der jeweiligen Meereshöhe als konstant angenommen wird:

$$h_{\text{geop}} = \frac{1}{g_0} \int_0^{h_{\text{geom}}} g(h) \, dh. \quad (4.2)$$

Durch diese Definition kann in der inertialen Navigation, statt mit der vereinfachten Annahme einer konstanten Schwerebeschleunigung, mit ortsabhängigen Schwerebeschleunigungen gerechnet werden, was wiederum zu höheren Genauigkeiten führt. Durch Auswertung von Gl. (4.2) folgt mit Berücksichtigung des WGS84-Modells:

$$h_{\text{geop}} = \frac{R_0 \cdot h_{\text{geom}}}{R_0 + h_{\text{geom}}}. \quad (4.3)$$

## 4.2 Bezugssystemtransformation

Da in den vorangegangenen Abschnitten die nötigen Koordinatensysteme vorgestellt wurden, sollen im Folgenden die Verfahren betrachtet werden, wie Informationen, die in einem System erfasst wurden, in ein anderes Koordinatensystem überführt werden können. Die Transformationsmatrix, die eine Überführung von dem Bezugssystem  $\Phi_2$  zu dem Bezugssystem  $\Phi_1$  erlaubt, soll mit  $\mathbf{C}_{\Phi_2}^{\Phi_1}$  bezeichnet werden und gehört zu der Gruppe der orthonormalen Matrizen [Dam99]: Eine quadratische und reellwertige Matrix  $\mathbf{C}_{\Phi_2}^{\Phi_1}$  von der Ordnung  $\mathcal{D}$  ist dann orthonormal, wenn sie regulär ist und  $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$  gilt. Daraus resultiert, dass  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ , wobei  $\mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$  die Einheitsmatrix der Dimension  $[\mathcal{D} \times \mathcal{D}]$  ist.<sup>3</sup> Dieses bedeutet, dass die Zeilen- und Spaltenvektoren ein Orthonormalsystem im  $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$  bilden. Betrachtet man in diesem Zusammenhang zwei orthonormale Matrizen  $\mathbf{C}_1$  und  $\mathbf{C}_2$ , so sind auch deren Inversen  $\mathbf{C}_1^{-1}$  und  $\mathbf{C}_2^{-1}$  und deren Produkt  $\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2$  orthonormal. Des Weiteren gilt für jede orthonormale Matrix nach (B.5) im Anhang, dass  $\det\{\mathbf{C}\} = \pm 1$ , denn  $\det\{\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}\} = 1$  [Wen07].

Für die Transformation eines Richtungsvektors  $\mathbf{s}^{\Phi_2}$  von einem Koordinatensystem  $\Phi_2$  in ein anderes Koordinatensystem  $\Phi_1$  wird nun folgende Berechnung durchgeführt:

$$\mathbf{s}^{\Phi_1} = \mathbf{C}_{\Phi_2}^{\Phi_1} \cdot \mathbf{s}^{\Phi_2}. \quad (4.4)$$

Die Matrix  $\mathbf{C}_{\Phi_2}^{\Phi_1}$  wird auch als Richtungskosinusmatrix (RKM) bezeichnet, denn jedes Element der Matrix lässt sich durch den Kosinus des jeweiligen Winkels zwischen den dazugehörigen Koordinatenachsen von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  beschreiben [Jek01]. Es sei erwähnt, dass Vektoren und die damit zusammenhängenden Vektoroperationen unabhängig vom Koordinatensystem sind, wenn diese über Gl. (4.4) miteinander verknüpft sind.

### 4.2.1 Eulerwinkelparametrisierung

Im letzten Abschnitt wurde die Vektortransformation auf Basis einer orthonormalen Rotationsmatrix erläutert. Diese besitzt i. d. R. neun Variablen, wovon allerdings aufgrund der Orthonormalität nur drei unabhängig sind. Das Prinzip der Grundrotation, welches verwendet werden kann, um Transformationen zwischen zwei orthonormalen Koordinatensystemen mit drei Parametern durchzuführen, wird daher im Folgenden betrachtet.

Die Grundrotation ermöglicht es, Rotationstransformationen von Vektoren zwischen zwei Koordinatensystemen durchzuführen. Die drei folgenden orthogonalen Matrizen beschreiben jeweils eine Rotation um eine Koordinatenachse, so dass spätestens nach Anwendung aller drei Grundrotationen

<sup>3</sup>Im Folgenden wird durch die Indizierung  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$  eine Matrix der Größe  $[\mathcal{D} \times \mathcal{D}]$  bzw. durch  $\mathcal{D} \times 1$  ein Vektor der Dimension  $[\mathcal{D} \times 1]$  bezeichnet.  $\mathcal{D}$  sei dabei eine allgemeingültige Dimensionsgröße.



um die Winkel  $\phi$ ,  $\theta$  und  $\psi$ , ein Koordinatensystem in ein anderes überführt ist:

$$\underbrace{\mathbf{C}_x(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}}_{\text{Rotation um die } x\text{-Achse}}, \quad \underbrace{\mathbf{C}_y(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{\text{Rotation um die } y\text{-Achse}}$$

$$\underbrace{\mathbf{C}_z(\psi) := \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rotation um die } z\text{-Achse}}. \quad (4.5)$$

In der Literatur [Dam99] sind weitere Grundrotationen zu finden, die allerdings zum gleichen Ergebnis führen. Da die Matrixmultiplikation keine kommutative Operation ist, ist auch die Rotationssequenz nicht kommutativ, d. h. dass z. B. für zwei beliebige Bezugssysteme  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  die Ungleichung  $\mathbf{C}_{\Phi_2}^{\Phi_1} = \mathbf{C}_x(\phi) \cdot \mathbf{C}_y(\theta) \neq \mathbf{C}_y(\theta) \cdot \mathbf{C}_x(\phi)$  gilt. Allerdings kann dieselbe Gesamtrotation durch unterschiedliche Rotationssequenzen beschrieben werden, so dass  $\mathbf{C}_{\Phi_2}^{\Phi_1} = \mathbf{C}_x(\phi) \cdot \mathbf{C}_y(\theta) = \mathbf{C}_y(\theta') \cdot \mathbf{C}_x(\phi')$  gilt, wobei  $\phi \neq \phi'$  und  $\theta \neq \theta'$ . Es existieren also keine einheitlichen Rotationswinkel. Die Kenntnis der Rotationsreihenfolge ist daher von entscheidender Bedeutung.

Es soll nun die Grundrotation in Bezug auf die bereits eingeführten und in der Navigation üblichen Koordinatensysteme betrachtet werden.

#### Transformation zwischen dem *ECEF*-Koordinatensystem und dem *NED*-Koordinatensystem

Es wird ein Vektor betrachtet, der in *ECEF*-Koordinaten bzw. im e-Koordinatensystem angegeben ist und in das Navigationskoordinatensystem n transformiert werden soll. Dazu sind zwei Grundrotationen notwendig, wie auch anhand von Abb. 4.1 zu erkennen ist [FB99]. Die Rotation um die  $z^e$ -Achse ist nötig, um eine neue Ausrichtung der  $y^e$ -Achse zu erreichen, welche jetzt mit  $y^{e'}$  bezeichnet wird. Sie ist gemäß Gl. (4.5) definiert durch

$$\mathbf{C}_z(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & 0 \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

wobei  $\lambda$  wieder die geografische Länge des Koordinatenursprungs des Navigationskoordinatensystems in [rad] ist. Anschließend wird eine Rotation um die neue  $y^{e'}$ -Achse vorgenommen, um die  $z^e$ -Achse neu auszurichten. Diese wird nun mit  $z^{e''}$  bezeichnet. Die zweite Rotation ist definiert durch

$$\mathbf{C}_y\left(-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

wobei  $\varphi$  die geografische Breite des Koordinatenursprungs vom n-Rahmen in [rad] ist. Für die Rotationssequenz folgt schließlich:

$$\mathbf{C}_e^n := \mathbf{C}_y\left(-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \mathbf{C}_z(\lambda) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cos(\lambda) & -\sin(\varphi) \sin(\lambda) & \cos(\varphi) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ -\cos(\varphi) \cos(\lambda) & -\cos(\varphi) \sin(\lambda) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Für die Transformation eines Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}_{ib}^e$  in das Navigationskoordinatensystem ist demnach die Operation  $\mathbf{v}_{ib}^n = \mathbf{C}_e^n \cdot \mathbf{v}_{ib}^e$  nötig. Die Rücktransformation kann aufgrund der Orthonormalität der Matrix mit  $\mathbf{C}_n^e = (\mathbf{C}_e^n)^{-1} = (\mathbf{C}_e^n)^T$  vorgenommen werden.

**Transformation zwischen dem körperbezogenen und dem *NED*-Koordinatensystem** Im vorherigen Abschnitt wurden lediglich zwei Grundrotationen benötigt. Bei der Transformation eines Vektors vom körperbezogenen Koordinatensystem in das *NED*-Koordinatensystem wird i. d. R. eine Sequenz, bestehend aus allen drei Grundrotationsmatrizen, benötigt. Abb. 4.3 zeigt, wie ein körperbezogenes Koordinatensystem mit Hilfe von drei Eulerwinkeln in das *NED*-Koordinatensystem überführt werden kann. Die erste Drehung findet dabei in der  $x^b y^b$ -Ebene um den Winkel  $\psi$  mit

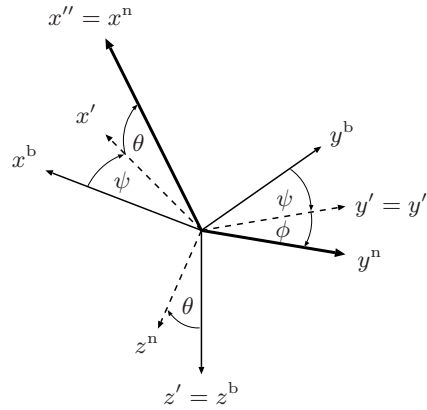


Abbildung 4.3: Transformation mit Hilfe von Eulerwinkeln

Hilfe von  $\mathbf{C}_z(\psi)$  statt. Dementsprechend wird im zweiten Schritt das daraus resultierende Koordinatensystem mit den neuen Achsen  $x', y'$  und  $z' = z^b$  mittels  $\mathbf{C}_y(\theta)$  transformiert, so dass man die Achsen  $x'' = x^n, y'' = y'$  und  $z''$  erhält. Die Rotation beschreibt also eine Drehung in der  $x'z'$ -Ebene. Schließlich fehlt noch die Drehung in der  $y''z''$ -Ebene durch  $\mathbf{C}_x(\phi)$ . Es wird wiederum deutlich, dass die Reihenfolge der Drehungen durch die umgekehrte Reihenfolge der Matrixmultiplikationen festgelegt wird. Die Eulerwinkel  $\phi, \theta$  und  $\psi$  entsprechen in diesem Fall den so genannten Roll- (engl. *roll*), Nick- (engl. *pitch*) und Gierwinkeln (engl. *yaw*). Der Gierwinkel wird häufig auch als Azimuth bezeichnet und der Nickwinkel als Elevationswinkel. Für die Gesamtrotation zur Transformation des Vektors  $\mathbf{v}_{ib}^n$  in den Vektor  $\mathbf{v}_{ib}^b$  und umgekehrt folgt demnach:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ib}^b &= \mathbf{C}_x(\phi) \cdot \mathbf{C}_y(\theta) \cdot \mathbf{C}_z(\psi) \cdot \mathbf{v}_{ib}^n \\ &= \mathbf{C}_n^b \cdot \mathbf{v}_{ib}^n, \end{aligned} \quad (4.9)$$

wobei

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{pmatrix} c(\theta)c(\psi) & c(\theta)s(\psi) & -s(\theta) \\ s(\theta)s(\phi)c(\psi) - c(\phi)s(\psi) & s(\theta)s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi) & c(\theta)s(\phi) \\ s(\theta)c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi) & s(\theta)c(\phi)s(\psi) - s(\phi)c(\psi) & c(\theta)c(\phi) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

mit den abkürzenden Schreibweisen  $c(\psi, \theta, \phi) := \cos(\psi, \theta, \phi)$  und  $s(\psi, \theta, \phi) := \sin(\psi, \theta, \phi)$  gilt. Neben den bisherigen Vorschriften zur RKM sei angemerkt, dass sich  $\mathbf{C}_n^b$  auch durch die Multiplikation von  $\mathbf{C}_n^e$  mit der RKM  $\mathbf{C}_e^b$  berechnen lässt, was häufig eine nützliche Eigenschaft in den Navigationsberechnungen ist. Analoges gilt für andere Rotationsmatrizen. In der inertialen Navigation ist vor allem die Matrix  $\mathbf{C}_b^n$  zur Rücktransformation wichtig, für die  $\mathbf{C}_b^n = (\mathbf{C}_n^b)^{-1} = (\mathbf{C}_n^b)^T$  gilt, weil die Zeilen und Spalten von  $\mathbf{C}_b^n$  jeweils orthogonal zueinander sind.

**Transformation zwischen dem inertialen und dem erdbezogenen Koordinatensystem** Ein Sonderfall ist die Transformation eines Vektors vom i-Koordinatensystem in das e-Koordinatensystem. In der Regel lässt sich auch die RKM  $C_i^e$  durch drei Einzelmatrizen beschreiben. Wie bereits in Kap. 4.1.1 angeführt, besitzen beide Systeme den gleichen Koordinatenursprung und unterscheiden sich lediglich in einer Drehung um die  $z^i$ -Achse (siehe Abb. 4.1). Es finden keine Rotationen um die  $x^i$ - und  $y^i$ -Achse statt. Aus diesem Grund lässt sich die Matrix  $C_i^e$  auch ausschließlich durch  $C_z(\psi)$  mit

$$C_i^e := C_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

beschreiben.

Im Umkehrschluss können anhand der RKM die Eulerwinkel zurückgewonnen werden [TW04], denn es gilt:

$$\phi = \arctan 2 \left( \frac{\sin(\phi) \cos(\theta)}{\cos(\phi) \cos(\theta)} \right) = \arctan 2 \left( \frac{(C_b^n)^{(3,2)}}{(C_b^n)^{(3,3)}} \right) \quad (4.12)$$

$$\theta = \arcsin(\sin(\theta)) = -\arcsin \left( (C_b^n)^{(3,1)} \right) \quad (4.13)$$

$$\psi = \arctan 2 \left( \frac{\cos(\theta) \sin(\psi)}{\cos(\theta) \cos(\psi)} \right) = \arctan 2 \left( \frac{(C_b^n)^{(2,1)}}{(C_b^n)^{(1,1)}} \right). \quad (4.14)$$

Dabei wird z. B. das Element in der dritten Zeile und ersten Spalte der RKM  $C_b^n$  durch  $(C_b^n)^{(3,1)}$  gekennzeichnet. Diese Umrechnung spielt sowohl im Rahmen des *Strapdown*-Algorithmus als auch in dem in Kap. 5 beschriebenen Filter eine Rolle, da die Eulerwinkel z. B. zur Berechnung der Schwerbeschleunigung benötigt werden.

Die Bezugssysteme befinden sich in ständiger Bewegung zueinander, weshalb die Eulerwinkel fortlaufend aktualisiert werden müssen. Relativ einfach ist dieses mit Hilfe der Ableitungen der Eulerwinkel möglich, welche dann zum Aufintegrieren genutzt werden. Da als Messgrößen i. d. R. nur die Winkelgeschwindigkeiten einer inertialen Sensoreinheit zur Verfügung stehen, muss ein geeigneter Zusammenhang zwischen diesen Größen gefunden werden. Mit Hilfe der bereits beschriebenen Grundrotationen kann zwischen den Eulerwinkelableitungen und den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{nb}^b$  im körperbezogenen Koordinatensystem Gl. (4.15) aufgestellt werden [Dam99]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin(\phi(t)) \tan(\theta(t)) & \cos(\phi(t)) \tan(\theta(t)) \\ 0 & \cos(\phi(t)) & -\sin(\phi(t)) \\ 0 & \frac{\sin(\phi(t))}{\cos(\theta(t))} & \frac{\cos(\phi(t))}{\cos(\theta(t))} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{nb,x}^b(t) \\ \omega_{nb,y}^b(t) \\ \omega_{nb,z}^b(t) \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Mit  $(\dot{\cdot})$  wird hier die Ableitung einer skalaren Größe bzw. eines Vektors nach der Zeit  $t$  gekennzeichnet, d. h.  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Die Terme  $\omega_{nb,x}^b$ ,  $\omega_{nb,y}^b$  und  $\omega_{nb,z}^b$  bezeichnen die Winkelgeschwindigkeiten der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse der Drehratensensortriade. An dieser Stelle sei auf ein Problem hingewiesen, welches in der Literatur als *Gimbal-lock* bezeichnet wird und die Möglichkeit des Auftretens einer Singularität bei  $\theta = \pm 90^\circ$  in Gl. (4.15) beschreibt. Das Umgehen dieses Phänomens ist dabei durch die Verwendung von Quaternionen möglich, die im folgenden Abschnitt näher betrachtet werden.

#### 4.2.2 Quaternionenparametrisierung

Als Verallgemeinerung der komplexen Zahlen erlauben die Quaternionen häufig eine rechnerisch elegante Beschreibung des dreidimensionalen Raumes, insbesondere im Kontext von Drehungen.

Die Quaternionenparametrisierung ist in der Literatur auch als HAMILTON-Parametrisierung bekannt [Syn37]. Bei Verwendung von Quaternionen an Stelle von Drehmatrizen werden weniger Rechenoperationen benötigt, was vor allem bei mehreren Drehoperationen Vorteile in der Verarbeitungsgeschwindigkeit mit sich bringt. Weitere Vorteile sind:

- Rotationen erfolgen direkt um die gewünschte Achse
- Das genannte *Gimbal-lock*-Problem tritt nicht auf.

Als vierdimensionale reelle Algebra bilden die Quaternionen einen vierdimensionalen reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^4$ , weshalb jedes Quaternion durch vier reelle Komponenten  $\check{q}_0, \check{q}_1, \check{q}_2$  und  $\check{q}_3$  eindeutig bestimmt ist. Die Basiselemente des Vektorraums bilden vier Elemente der Länge Eins, die orthogonal zueinander sind:  $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$  sowie  $\mathbf{k}$ . Die Menge der komplexen Zahlen kann zwar auf verschiedene Weisen in die Quaternionen eingebettet werden, die Quaternionen sind jedoch keine  $\mathbb{C}$ -Algebra. Dennoch spricht man hier auch von hyperkomplexen Zahlen [BSMM00]. Die Linearkombination der vier Komponenten mit den Basisvektoren lautet:

$$\check{\mathbf{q}} := \mathbf{1} \cdot \check{q}_0 + \mathbf{i} \cdot \check{q}_1 + \mathbf{j} \cdot \check{q}_2 + \mathbf{k} \cdot \check{q}_3, \quad (4.16)$$

wobei

$$\mathbf{i} \circ \mathbf{i} = \mathbf{j} \circ \mathbf{j} = \mathbf{k} \circ \mathbf{k} = -\mathbf{1} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{i} \circ \mathbf{j} = -\mathbf{j} \circ \mathbf{i} = \mathbf{k} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{j} \circ \mathbf{k} = -\mathbf{k} \circ \mathbf{j} = \mathbf{i} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{k} \circ \mathbf{i} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{k} = \mathbf{j} \quad (4.20)$$

gilt. Das  $\circ$  kennzeichnet dabei die nicht kommutative Quaternionenmultiplikation. Diese lässt sich vereinfacht für zwei Quaternionen  $\check{\mathbf{q}}$  und  $\check{\mathbf{p}}$  gemäß Gl. (4.21) auch durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation ausdrücken:

$$\check{\mathbf{q}} \circ \check{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \check{q}_0 & -\check{q}_1 & -\check{q}_2 & -\check{q}_3 \\ \check{q}_1 & \check{q}_0 & -\check{q}_3 & \check{q}_2 \\ \check{q}_2 & \check{q}_3 & \check{q}_0 & -\check{q}_1 \\ \check{q}_3 & -\check{q}_2 & \check{q}_1 & \check{q}_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \check{p}_0 \\ \check{p}_1 \\ \check{p}_2 \\ \check{p}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Betrachtet man nun einen Vektor  $\mathbf{s}^{\Phi_2}$ , der mit Hilfe von Quaternionen in das Koordinatensystem  $\Phi_1$  transformiert werden soll, so kann dies über die abbildende Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{s}^{\Phi_1} \end{pmatrix} = \check{\mathbf{q}} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{s}^{\Phi_2} \end{pmatrix} \circ \check{\mathbf{q}}^* \quad (4.22)$$

geschehen, wobei  $\check{\mathbf{q}}^* := (\check{q}_0 \quad -\check{q}_1 \quad -\check{q}_2 \quad -\check{q}_3)^T$  der konjugiert komplexe Quaternionenvektor ist. Durch Ausmultiplizieren von (4.22) mit Hilfe von Gl. (4.21) erhält man den Zusammenhang

$$\mathbf{s}^{\Phi_1} = \mathbf{C}_{\Phi_2}^{\Phi_1} \cdot \mathbf{s}^{\Phi_2}, \quad (4.23)$$

wobei für die aus den Quaternionen abgeleitete Rotationsmatrix

$$\mathbf{C}_{\Phi_2}^{\Phi_1} = \begin{pmatrix} \check{q}_0^2 + \check{q}_1^2 - \check{q}_2^2 - \check{q}_3^2 & 2(\check{q}_1\check{q}_2 - \check{q}_0\check{q}_3) & 2(\check{q}_1\check{q}_3 + \check{q}_0\check{q}_2) \\ 2(\check{q}_1\check{q}_2 + \check{q}_0\check{q}_3) & \check{q}_0^2 - \check{q}_1^2 + \check{q}_2^2 - \check{q}_3^2 & 2(\check{q}_2\check{q}_3 - \check{q}_0\check{q}_1) \\ 2(\check{q}_1\check{q}_3 - \check{q}_0\check{q}_2) & 2(\check{q}_2\check{q}_3 + \check{q}_0\check{q}_1) & \check{q}_0^2 - \check{q}_1^2 - \check{q}_2^2 + \check{q}_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

gilt. Wird nun die Quaternionenparametrisierung verwendet, um eine Vektortransformation vom körperbezogenen  $b$ -System zum Navigationssystem  $n$  durchzuführen, so gilt mit  $\Phi_2 = b$  und  $\Phi_1 = n$ :  $C_b^n = C_{\Phi_2}^{\Phi_1}$ . Ebenso können die Eulerwinkel jetzt auch anhand der Quaternionen berechnet werden. Durch direkten Vergleich der Matrixkomponenten aus Gl. (4.24) mit denen aus Gl. (4.10) resultiert:

$$\phi = \arctan 2 \left( \frac{2(\check{q}_2\check{q}_3 + \check{q}_0\check{q}_1)}{\check{q}_0^2 + \check{q}_3^2 - \check{q}_1^2 - \check{q}_2^2} \right) \quad (4.25)$$

$$\theta = \arcsin (2(\check{q}_0\check{q}_2 - \check{q}_1\check{q}_3)) \quad (4.26)$$

$$\psi = \arctan 2 \left( \frac{2(\check{q}_1\check{q}_2 + \check{q}_0\check{q}_3)}{\check{q}_0^2 + \check{q}_1^2 - \check{q}_2^2 - \check{q}_3^2} \right). \quad (4.27)$$

Falls diese Gleichungen aufgrund der möglichen Singularitäten nicht lösbar sind, können andere Parametrisierungen angewendet werden, welche sich aus den verschiedenen möglichen Rotationssequenzen ergeben.

Es existiert eine Reihe von Möglichkeiten, um schließlich noch ein Quaternion aus den Elementen der RKM zu berechnen [Wen07]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde jedoch lediglich auf die folgende Umrechnung zurückgegriffen:

$$\kappa' := \frac{1}{2} \sqrt{1 + (C_b^n)^{(1,1)} + (C_b^n)^{(2,2)} + (C_b^n)^{(3,3)}}, \quad (4.28)$$

wobei

$$\check{q}_0 = \kappa' \quad (4.29)$$

$$\check{q}_1 = \frac{1}{4\kappa'} \left( (C_b^n)^{(3,2)} - (C_b^n)^{(2,3)} \right) \quad (4.30)$$

$$\check{q}_2 = \frac{1}{4\kappa'} \left( (C_b^n)^{(1,3)} - (C_b^n)^{(3,1)} \right) \quad (4.31)$$

$$\check{q}_3 = \frac{1}{4\kappa'} \left( (C_b^n)^{(2,1)} - (C_b^n)^{(1,2)} \right) \quad (4.32)$$

gilt. Auf die weiteren Umrechnungsvarianten wird hier nicht näher eingegangen.

Im vorherigen Abschnitt wurde erläutert, dass die Lage von zwei Koordinatensystemen über drei oder weniger Drehmatrizen beschrieben werden kann. Ebenso lässt sich diese Rotation auch mit lediglich einer Rechtsdrehung anhand eines einzelnen Orientierungsvektors  $\sigma := (\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z)^T$  durchführen. Der Vektor gibt die Achse im Raum an, um die ein Koordinatensystem gedreht werden muss, um in ein anderes System überführt zu werden. Der Betrag des Vektors entspricht dabei dem Betrag des Winkels, um den das Koordinatensystem zu drehen ist. Es muss demnach ein Zusammenhang zwischen RKM, Orientierungsvektor und Quaternion bestehen. Im Fall der Drehung zwischen dem Navigationssystem  $n$  und dem Körpersystem  $b$  lautet der Zusammenhang zwischen dem auf die Länge Eins normierten Quaternionenvektor  $\check{q}_b^n$  und dem Orientierungsvektor  $\sigma$

$$\check{q}_b^n = \begin{pmatrix} \cos(\frac{|\sigma|}{2}) \\ \frac{\sigma_x}{|\sigma|} \sin(\frac{|\sigma|}{2}) \\ \frac{\sigma_y}{|\sigma|} \sin(\frac{|\sigma|}{2}) \\ \frac{\sigma_z}{|\sigma|} \sin(\frac{|\sigma|}{2}) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

wobei  $|\cdot|$  hier die Vektornorm kennzeichnet. Wie bei der RKM lässt sich auch obiges Quaternion durch eine geeignete Verkettung von weiteren Quaternionenvektoren mittels einer Quaternionenmultiplikation ausdrücken, z. B.  $\check{q}_b^n = \check{q}_e^n \circ \check{q}_b^e$ .

### 4.3 Strapdown-Berechnung

Der *Strapdown*-Algorithmus ist eine iterative Rechenvorschrift die beschreibt, wie man aus gemessenen Winkeldrehraten und Beschleunigungen einer IME zu einer Navigationslösung gelangt, d. h. der Angabe einer absoluten Position, Geschwindigkeit und der Lage der IME. Durch den Integrationsprozess muss i. d. R. auch die Navigationslösung des vorherigen Zeitschrittes berücksichtigt werden [TW04]. Abb. 4.4 zeigt ein Blockschaltbild des *Strapdown*-Algorithmus, wobei Daten in einem körperbezogenen b-System aufgenommen und im Navigationskoordinatensystem n berechnet werden. Da der tiefgestellte Index SD für „Strapdown“ erst in Kap. 5 aus Gründen der Übersichtlichkeit benötigt wird, wird an dieser Stelle bei den Größen auf ihn verzichtet. Des Weiteren wird zunächst darauf verzichtet, inertielle Messgrößen durch eine ( $\sim$ ) und Schätzgrößen durch ein ( $\hat{\cdot}$ ) zu kennzeichnen. Der

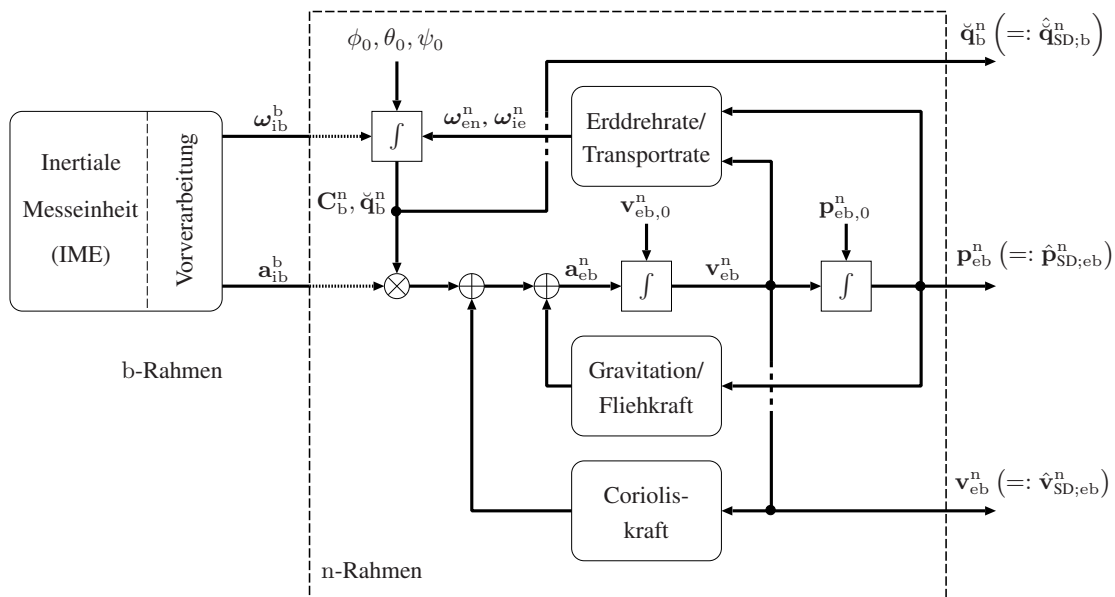


Abbildung 4.4: Strapdown-Algorithmus

*Strapdown*-Algorithmus umfasst die folgenden Schritte:

- Berechnung der Corioliskraft, Schwerebeschleunigung, Transportrate  $\omega_{en}^n$  und Erddrehrate  $\omega_{ie}^n$  auf Basis aktueller Positions- und Geschwindigkeitsinformationen ( $p_{eb}^n$  und  $v_{eb}^n$ )
- Lageberechnung der IME mit Hilfe der gemessenen Drehraten  $\omega_{ib}^b$ , der Transport- und Erddrehrate durch Aufintegrieren der Eulerwinkel oder durch eine Quaternionenaktualisierung
- Aktualisierung der Geschwindigkeit durch das Aufintegrieren der gemessenen Beschleunigungen  $a_{ib}^b$ , der Schwerebeschleunigung und der durch die Corioliskraft verursachten Beschleunigung
- Aktualisierung der Position durch das Aufintegrieren der Geschwindigkeiten.

Bei der *Strapdown*-Berechnung wird idealerweise davon ausgegangen, dass die beteiligten Messgrößen fehlerfrei sind. Eine Kompensation der Fehler, die auf die IME selbst zurückzuführen sind, d. h. auf systematische Fehler, ist bei der Berechnung hier nicht vorgesehen. Wie beschrieben, werden jedoch Einflüsse wie Gravitation und Corioliskraft berücksichtigt. Dieses wird im Folgenden genauer erläutert. Die Kompensation der anderen Fehler wird in den nachfolgenden Kapiteln betrachtet.



**Berechnung der Lage** Die Lage bzw. Orientierung der IME in Bezug auf das Navigationskoordinatensystem ist von entscheidender Bedeutung für die Navigationslösung, da sie sich fortlaufend ändert. Daher muss diese Orientierungsänderung in Abhängigkeit von den gemessenen Drehraten in jedem Zeitschritt neu bestimmt werden. Da die Lage der IME durch die Eulerwinkel, einen Orientierungsvektor oder durch Quaternionen beschrieben werden kann, existieren demnach auch mindestens drei Möglichkeiten, um eine fortlaufende Lageberechnung durchzuführen.

Die BORTZ'sche Differenzialgleichung wird zur permanenten Aktualisierung der IME-Lage  $\sigma$  verwendet [Bor71]. Sie beschreibt die Abhängigkeit der Lage von den Sensordrehraten in  $\omega_{nb}^b$  und lautet:

$$\dot{\sigma}(t) = \omega_{nb}^b(t) + \frac{1}{2}\sigma(t) \times \omega_{nb}^b(t) + \frac{1}{|\sigma(t)|^2} \left( 1 - \frac{|\sigma(t)| \cdot \sin(|\sigma(t)|)}{2(1 - \cos(|\sigma(t)|))} \right) \sigma(t) \times (\sigma(t) \times \omega_{nb}^b(t)). \quad (4.34)$$

Mit  $(\times)$  wird hier das Kreuzprodukt zweier Vektoren bezeichnet. Um die Auswertung der auftretenden trigonometrischen Funktionen zu vermeiden, kann unter der Annahme eines kurzen Aktualisierungsintervalls und damit kleiner Drehungen in jedem Zeitintervall, der Klammerterm mit Hilfe einer Reihenentwicklung (Exponentialreihe) als konstanter Faktor approximiert werden, so dass sich Gl. (4.34) wie folgt vereinfachen lässt:

$$\dot{\sigma}(t) \approx \omega_{nb}^b(t) + \frac{1}{2}\sigma(t) \times \omega_{nb}^b(t) + \frac{1}{12}\sigma(t) \times (\sigma(t) \times \omega_{nb}^b(t)). \quad (4.35)$$

Dabei ist  $\omega_{nb}^b$  die Drehrate des Fahrzeugs im b-Rahmen ohne Einfluss der Erddrehrate  $\omega_{ie}^n(t)$  oder  $\omega_{en}^n(t)$ , was auch als Transportrate bezeichnet wird. Die Orientierung hängt auch direkt mit der Reihenfolge der Drehungen zusammen. Wie bereits erwähnt, ist die Rotationsreihenfolge nicht kommutativ. Eine IME kann allerdings keine Angabe über eine bestimmte Rotationsreihenfolge liefern. Der damit einhergehende Fehler wird durch die Annahme von kleinen Drehungen pro Zeitintervall minimiert. Die Kreuzprodukt-Terme, die auch als *Coning*-Terme bezeichnet werden, müssen bestmöglich approximiert werden, wenn während einer Lageaktualisierung mehrere Abtastintervalle der IME liegen. Dieses würde u. U. die Lagegenauigkeit erhöhen. Auf einen speziellen Kompensationsalgorithmus, wie er in [Jek01] oder [TW04] vorgestellt wird, wird hier allerdings verzichtet.

Weil die IME normalerweise nur die Drehraten  $\omega_{ib}^b$  liefert, wird sie von der Erddrehrate  $\omega_{ie}^n$  und der Transportrate  $\omega_{en}^n$  beeinflusst. Dieser Einfluss soll beim *Strapdown*-Verfahren herausgerechnet werden, um  $\omega_{nb}^b$  zu erhalten. Der Zusammenhang zwischen  $\omega_{ib}^b$  und  $\omega_{nb}^b$  lautet:

$$\omega_{ib}^b(t) = \omega_{nb}^b(t) + C_n^b(t) (\omega_{ie}^n(t) + \omega_{en}^n(t)), \quad (4.36)$$

wobei für die Transportrate und die Erddrehrate gemäß [TW04]

$$\omega_{en}^n(t) = \begin{pmatrix} \frac{v_{eb,e}^n(t)}{R_e + h(t)} \\ -\frac{v_{eb,n}^n(t)}{R_n + h(t)} \\ -\frac{v_{eb,e}^n(t) \cdot \tan(\varphi(t))}{R_e + h(t)} \end{pmatrix}, \quad \omega_{ie}^n(t) = \begin{pmatrix} \Omega \cdot \cos(\varphi(t)) \\ 0 \\ -\Omega \cdot \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

gilt, wenn die Höhe positiv (von der Erde wegweisend) gezählt wird. Dabei sind  $v_{eb,n}^n$  und  $v_{eb,e}^n$  die Nord- und Ostkomponente des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}_{eb}^n$ .

Auf Basis von Gl. (4.34) oder (4.35) ist es nun im Zeitdiskreten möglich, die Orientierung schrittweise zu aktualisieren. Dazu wird nach Gl. (4.33) ein Korrekturterm  $\check{\mathbf{r}}$  berechnet, der die im betrachteten Zeitintervall erfolgte Orientierungsänderung  $\Delta\sigma := (\Delta\sigma_x \ \Delta\sigma_y \ \Delta\sigma_z)^T$  als Quaternion nach

Gl. (4.38) darstellt:

$$\check{\mathbf{r}}_k = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{|\Delta\boldsymbol{\sigma}_k|}{2}\right) \\ \frac{\Delta\sigma_{x,k}}{|\Delta\boldsymbol{\sigma}_k|} \sin\left(\frac{|\Delta\boldsymbol{\sigma}_k|}{2}\right) \\ \frac{\Delta\sigma_{y,k}}{|\Delta\boldsymbol{\sigma}_k|} \sin\left(\frac{|\Delta\boldsymbol{\sigma}_k|}{2}\right) \\ \frac{\Delta\sigma_{z,k}}{|\Delta\boldsymbol{\sigma}_k|} \sin\left(\frac{|\Delta\boldsymbol{\sigma}_k|}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Das aktualisierte Quaternion, welches die aktuelle Lage auf Basis der Lage zum vorherigen Zeitschritt und  $\check{\mathbf{r}}_k$  beschreibt, ist anschließend durch

$$\check{\mathbf{q}}_{b,k}^n = \check{\mathbf{q}}_{b,k-1}^n \circ \check{\mathbf{r}}_k \quad (4.39)$$

gegeben. Mit Gl. (4.24) kann abschließend die aktualisierte RKM und damit die Lage gewonnen werden.

**Berechnung der Geschwindigkeit** Der nächste Schritt im *Strapdown*-Algorithmus ist die Berechnung der Geschwindigkeit des Fahrzeugs im Navigationskoordinatensystem oder n-Rahmen. Hierzu wird die gemessene Beschleunigung der IME benötigt, da sie die Änderung der Geschwindigkeit beschreibt. Da jedoch die Geschwindigkeit in einem raumfesten Koordinatensystem von Interesse ist, muss die aktuelle Orientierung der IME und damit die des Fahrzeugs berücksichtigt werden. Neben der fahrzeugeigenen Beschleunigung misst der Sensor auch die Schwerebeschleunigung, die gemäß (4.1) in dem Vektor  $\mathbf{g}^n$  zusammengefasst ist und die Coriolisbeschleunigung, die durch die Erddrehung sowie die Drehung des Navigationskoordinatensystems bei der Bewegung über die gekrümmte Erdoberfläche hervorgerufen wird. Die Differenzialgl. (4.40) aus [TW04] beschreibt die Zusammenhänge zwischen diesen Effekten und der Geschwindigkeit des Fahrzeugs:

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^n(t) = \mathbf{C}_b^n(t) \mathbf{a}_{ib}^b(t) - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t) + \boldsymbol{\omega}_{en}^n(t)) \times \mathbf{v}_{eb}^n(t) + \mathbf{g}^n(t). \quad (4.40)$$

Die zugehörige Geschwindigkeitsänderung erhält man durch Integrieren der rechten Seite über ein Zeitintervall. Der erste Term auf der rechten Seite kann dabei im Gegensatz zu den übrigen Termen nicht durch eine Konstante angenähert werden. Für das Integral über das Produkt  $\mathbf{C}_b^n(t) \cdot \mathbf{a}_{ib}^b(t)$  folgt nach [Wen07] mit  $\Delta t := t_k - t_{k-1}$  und der Annahme, dass in diesem Zeitintervall annähernd konstante Drehraten und Beschleunigungen vorliegen:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_b^n(t) \cdot \mathbf{a}_{ib}^b(t) dt \approx \mathbf{C}_{b,k-1}^n \left( \mathbf{a}_{ib,k}^b \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\sigma}_k \times \mathbf{a}_{ib,k}^b \cdot \Delta t \right). \quad (4.41)$$

Die absolute aktuelle Geschwindigkeit im Zeitdiskreten erhält man mit  $\mathbf{v}_{eb,k}^n = \mathbf{v}_{eb,k-1}^n + \Delta\mathbf{v}_{eb,k}^n$ , wobei sich die gesuchte Änderung mit Gl. (4.41) zu

$$\Delta\mathbf{v}_{eb,k}^n = \left( \mathbf{C}_{b,k-1}^n \left( \mathbf{a}_{ib,k}^b + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\sigma}_k \times \mathbf{a}_{ib,k}^b \right) - ((2\boldsymbol{\omega}_{ie,k-1}^n + \boldsymbol{\omega}_{en,k-1}^n) \times \mathbf{v}_{eb,k-1}^n + \mathbf{g}_{k-1}^n) \right) \cdot \Delta t \quad (4.42)$$

ergibt.

**Berechnung der Position** Der letzte Schritt ist die Positionsberechnung. Die Aktualisierung wird dabei im zeitdiskreten Fall mittels  $\mathbf{p}_{\text{eb},k}^n = \mathbf{p}_{\text{eb},k-1}^n + \Delta \mathbf{p}_{\text{eb},k}^n$  vorgenommen, wobei  $\Delta \mathbf{p}_{\text{eb},k}^n = \mathbf{v}_{\text{eb},k}^n \cdot \Delta t$  gilt. Dabei ist  $\Delta \mathbf{p}_{\text{eb}}^n := \left( \Delta p_{\text{eb},n}^n \ \Delta p_{\text{eb},e}^n \ \Delta p_{\text{eb},d}^n \right)^T$  die Positionsänderung im Navigationskoordinatensystem. Für das Navigationsfilter in dieser Arbeit ist vor allem die absolute Position im erdfesten Koordinatensystem (e-Rahmen) von Interesse. Des Weiteren ändert sich die Orientierung des Navigationskoordinatensystems mit jedem Zeitschritt. Die Aktualisierung würde in dem Fall

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \frac{\Delta p_{\text{eb},n,k}^n}{R_n + h_{k-1}} \quad (4.43)$$

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \frac{\Delta p_{\text{eb},e,k}^n}{(R_e + h_{k-1}) \cos(\varphi_{k-1})} \quad (4.44)$$

$$h_k = h_{k-1} - \Delta p_{\text{eb},d,k}^n \quad (4.45)$$

lauten, wobei die Differenzialgleichungen

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{v_{\text{eb},n}^n(t)}{R_n + h(t)} \quad (4.46)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{v_{\text{eb},e}^n(t)}{(R_e + h(t)) \cos(\varphi(t))} \quad (4.47)$$

$$\dot{h}(t) = -v_{\text{eb},d}^n(t) \quad (4.48)$$

ausgenutzt wurden. Bei der Aktualisierung im zeitdiskreten Fall muss die Erdkrümmung explizit berücksichtigt werden, da diese Gleichungen nur Näherungslösungen darstellen, bei denen die Nord-Ost-Ebene des n-Rahmens mit der Tangentialebene an der Erdoberfläche übereinstimmt. Für Trajektorien von mehr als 2000 km, die hier allerdings nicht behandelt werden, würde diese Lösung daher unzureichend sein.

Durch den *Strapdown*-Algorithmus können nun die Position, die Geschwindigkeit und die Lage in jedem Zeitschritt mit Hilfe der inertialen Sensordaten aktualisiert werden. Da allerdings eine Reihe weiterer Fehler wie sie auch in Kap. 2.1.4 beschrieben wurden, die *Strapdown*-Lösung beeinflussen, wird auf ein zusätzliches KF zurückgegriffen. Dieses wird am Ende dieses Kapitels näher erläutert.

## 4.4 Das Global Positioning System

Einige Grundlagen zur satellitenbasierten Navigation wurden bereits in Kap. 2.1.1 erörtert. An dieser Stelle soll nun kurz auf das *Navstar* (*Navigation by satellite time and range*) *GPS* und einige technische Details eingegangen werden. Ein großer Vorteil des *GPS* ist, dass die Nutzeranzahl unbegrenzt ist und es somit kostengünstig einer Vielzahl von Anwendern zur Verfügung gestellt werden kann.

Obwohl das *GPS* bereits in den späten 60er Jahren entwickelt und für erste Tests Ende der 70er Jahre in Betrieb genommen wurde, hat es sein volles Potenzial erst in den letzten Jahren erreicht. Es wird durch modernere Satelliten stetig verbessert [KH05]. Aktuell sind bis zu 27 Satelliten in Betrieb, wobei jeder die zwei Trägerfrequenzen  $L_1 = 1575,42$  MHz und  $L_2 = 1227,6$  MHz verwendet. Jede ist mit ein oder zwei Signalen mittels *Code Division Multiple Access* (*CDMA*) moduliert. Dabei handelt es sich um Pseudozufallsfolgen, die jedem Satelliten eindeutig zugeordnet sind. Während die *Coarse/Aquisition* (*C/A*)-Folge eine Chiprate von 1,023 MHz hat und für den so genannten Standardlokalisierungsservice (engl. *Standard Positioning Service* (*SPS*)) verwendet wird, der jedem Nutzer

frei zugänglich ist (Zivilnutzung), hat die P-Folge eine Frequenz von 10,23 MHz und ist für den präzisen Lokalisierungsservice (engl. *Precise Positioning Service (PPS)*) verantwortlich. Der *PPS* war bis vor einigen Jahren ausschließlich dem Militär vorbehalten. Die P-Folge ist auf beide Trägerfrequenzen aufmoduliert, die C/A-Folge jedoch nur auf  $L_1$ . Für eine Verschlüsselung der P-Folge wird ein weiterer Code verwendet, der eine Chiprate von 511,5 kHz hat. Es werden auch weitere Navigationsdaten mit einer Bitrate von 50/s auf das Trägersignal über eine Phasenmodulation aufmoduliert. Diese Daten enthalten Informationen über spezifische Fehler von Satelliten, deren interne Uhren nach und nach mehr von der idealen Uhrzeit abweichen können. Diese Nachrichten können auch Bahndaten enthalten, d. h. Informationen über die Umlaufbahn des jeweiligen Satelliten. Diese sind zum einen Almanachdaten, die grobe Bahninformationen beinhalten und dem Nutzer helfen sollen festzustellen, welche Satelliten zur Navigation verwendet werden können. Die Ephemeridendaten dagegen enthalten detaillierte Satellitenbahninformationen. Weitere Daten sind dafür vorgesehen, Fehler zu kompensieren, die durch die Übertragung über verschiedene atmosphärische Schichten auftreten.

**Fehlerquellen** Man kann die Fehler in *Non-Common-Mode*- und *Common-Mode*-Fehler einteilen. Die *Non-Common-Mode*-Fehler hängen vom Empfangsgerät selbst (z. B. durch die integrierten Schaltkreise) oder der jeweiligen Empfangssituation ab. Zu ihnen zählen vor allem empfängerseitige Zeitfehler, Empfängerrauschen sowie Fehler aufgrund der Mehrwegeausbreitung des Signals. Die *Common-Mode*-Fehler sind typischerweise Uhrenfehler auf Seite der Satelliten, Verzögerungen, die auf die Atmosphäre zwischen Erde und Satelliten zurückzuführen sind, Fehler aufgrund der Ephemeridendaten oder auch künstlich generierte Fehler. Letztere wurden in Krisenzeiten vom amerikanischen Militär eingesetzt, sind heute aber nur noch von geringer Bedeutung. Die Details zu den verschiedenen Fehlerarten werden im Anhang A ausführlicher erläutert. Der detaillierte Systemaufbau ist u. a. in [TW04] beschrieben.

**Protokolle** Üblicherweise verwenden die momentan am Markt verfügbaren *GPS*-Empfänger ein einheitliches Protokoll, das von annähernd jeder Navigationssoftware interpretiert werden kann. Das so genannte *NMEA-0183* Protokoll ist ein Standard, der es erlaubt, die empfangenen Daten im *American Standard Code for Information Interchange (ASCII)*-Format bereitzustellen. Die Ausgabe erfolgt zeilenweise in Blöcken, wobei ein dem Block vorangestellter Bezeichner festlegt, welche Daten in dem nachfolgenden Datensatz zu finden sind. Es kann sich dabei um Daten über die Satellitenkonstellation, die Anzahl der sichtbaren Satelliten, Positions- und Geschwindigkeitsschätzungen sowie auch Informationen über die Restunsicherheit der Daten nach der empfängerinternen Filterung handeln. Details zu den verschiedenen *NMEA*-Datensätzen können [NME] entnommen werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird auf die *NMEA*-Sätze *GPGGA*, *GPGSA*, *GPGST* und *GPGBS* sowie auf zwei der proprietären ublox-Sätze *PUBX* zurückgegriffen. Diese sind der *PUBX00*- und der *PUBX04*-Datensatz. Die Tab. A.1 (a) und A.1 (b) im Anhang zeigen Beispiele der jeweiligen Datensätze. In der Tab. 4.3 sind außerdem die vom Hersteller Navilock angegebenen wichtigsten technischen Daten des mit einem ublox-Chipsatz bestückten *GPS*-Empfängers zu finden.

## 4.5 Fehlermodelle für inertielle Sensoren

In Kap. 2.1.4 wurden bereits die typischen Fehler vorgestellt, die im Zusammenhang mit einer IME auftreten können. An dieser Stelle soll eine mathematische Beschreibung folgen. Der Einfachheit

Parameter	Wert
Maximale Aktualisierungsfrequenz	4 Hz
Maximale Anzahl verwendeter Kanäle	50
Horizontale Positionsgenauigkeit $\sigma_{\text{GPS};p,n}$ bzw. $\sigma_{\text{GPS};p,e}$	2,1 m
Vertikale Positionsgenauigkeit $\sigma_{\text{GPS};p,d}$	4,0 m
Geschwindigkeitsgenauigkeit $\sigma_{\text{GPS};v}$	0,1 m/s

Tabelle 4.3: Empfängereigenschaften des Navilock NL-402U

halber werden in der Literatur [TW04] vor allem das inhärente und thermische Rauschen, vibrations-induziertes Rauschen oder die parasitären Biaseffekte durch stochastische Zufallsprozesse modelliert.

Wir nehmen an, dass  $\mathbf{n}(t)$  ein reellwertiger, weißer GAUSS-verteilter Rauschvektor mit  $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$  ist. Damit gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(\mathbf{n}(t))$  mit dem Mittelwertvektor  $\boldsymbol{\mu}_n := E[\mathbf{n}(t)]$  (erstes zentrales Moment nach dem zentralen Grenzwertsatz) und der Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}' := E[(\mathbf{n}(t) - \boldsymbol{\mu}_n) \cdot (\mathbf{n}(t) - \boldsymbol{\mu}_n)^T]$  (zweites zentrales Moment):

$$p(\mathbf{n}(t)) = \mathcal{N}(\mathbf{n}(t); \boldsymbol{\mu}_n, \mathbf{Q}') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\mathcal{D}} \cdot \det\{\mathbf{Q}'\}}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{n}(t) - \boldsymbol{\mu}_n)^T (\mathbf{Q}')^{-1} (\mathbf{n}(t) - \boldsymbol{\mu}_n)\right)}. \quad (4.49)$$

Unter der Annahme, dass beide Momente über die Zeit konstant sind, ist  $\mathbf{n}(t)$  stationär. In dieser Arbeit steht jedoch die Annahme im Vordergrund, dass für bestimmte Prozesse das zweite zentrale Moment zeitvariant ist, d. h.  $\mathbf{Q}' \rightarrow \mathbf{Q}'(t)$ , also  $\mathbf{n}(t)$  instationär ist.

Nimmt man an, dass eine Orthogonalität der Sensorachsen durch Kalibrierungsmaßnahmen vorhanden ist, so reduziert sich die Matrix mit den spektralen Leistungsdichten auf eine Diagonalmatrix, denn die einzelnen Komponenten von  $\mathbf{n}(t)$  können als voneinander statistisch unabhängig und gleichverteilt angesehen werden mit  $E[n^{(i')}(t) \cdot n^{(i'')}(t)] = 0$  für  $i' \neq i''$  und  $i', i'' = 1, \dots, \mathcal{D}$ . Die Kalibrierungsfaktoren, die als annähernd statisch angenommen werden können, werden in [Wen07] und [TW04] durch eine Skalierungsmatrix  $\mathbf{S}$  berücksichtigt. Dies ist möglich, sofern man davon ausgeht, dass die entsprechenden Faktoren weder temperaturabhängig sind noch durch die Anregung selbst variieren können. Die Skalierungsmatrix hat i. d. R. folgende Form:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_x & \bar{s}_{xy} & \bar{s}_{xz} \\ \bar{s}_{yx} & s_y & \bar{s}_{yz} \\ \bar{s}_{zx} & \bar{s}_{zy} & s_z \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Sie besteht auf ihrer Hauptdiagonalen aus den Skalierungsfaktoren  $s_{x,y,z}$ , die für jeden Freiheitsgrad die Abweichung von der jeweiligen idealen Kennlinie beschreiben (siehe Abb. 2.2), und auf den Nebendiagonalen aus den Fehlausrichtungsfaktoren, gekennzeichnet durch das zusätzliche  $(-)$ . Diese bestimmen die Nichtorthogonalität, die z. B. vorhanden ist, wenn eine Drehung um die  $z$ -Achse in die Sensorwerte einkoppelt, die eigentlich zur  $y$ -Achse gehören.

Kommen wir noch einmal zurück zur Modellierung des inhärenten Rauschens und nehmen für die folgende Betrachtung im Zeitbereich an, dass die einzelnen Werte um den Nullpunkt streuen, d. h.  $\boldsymbol{\mu}_n = \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}$  (Nullvektor der Dimension  $[\mathcal{D} \times 1]$ ) ist, und dass  $\mathbf{n}(t)$  zunächst stationär ist. Die Autokorrelationsfunktion (AKF)  $r_{n^{(i')}n^{(i')}}(\tau) := E[n^{(i')}(t_1) \cdot n^{(i')}(t_2)]$  der  $i'$ -ten Komponente

hängt nur von der Zeitdifferenz  $\tau := t_2 - t_1$  ab. Unter der Annahme, dass  $\mathbf{n}(t)$  ein weißer Prozess ist, also für ein beliebig kleines Zeitintervall  $\tau > 0$  die Elemente  $n^{(i')}(t)$  und  $n^{(i')}(t + \tau)$  unkorreliert und nicht selbstähnlich sind, folgt  $r_{n^{(i')n^{(i')}}}(\tau) = q'^{(i')} \cdot \delta(\tau)$ , wobei  $\delta$  hier den Dirac-Impuls kennzeichnet. Durch die FOURIER-Transformierte (FT) von  $r_{n^{(i')n^{(i')}}}(\tau)$  ist dann das LDS gegeben:

$$R_{n^{(i')n^{(i')}}}(\mathbf{j}\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} r_{n^{(i')n^{(i')}}}(\tau) \cdot e^{-\mathbf{j}\omega\tau} d\tau. \quad (4.51)$$

Aus (4.51) resultiert die  $i'$ -te Komponente  $q'^{(i')}$  der Leistungsdichte.

Für eine zeitdiskrete Beschreibung des Rauschens zum Zeitpunkt  $t_k = t_0 + k \cdot \Delta t$  mit dem Abtastintervall  $\Delta t$  und  $k \in \mathbb{Z}$  gilt

$$n_k^{(i')} := n^{(i')}(t_k) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1} + \Delta t} n^{(i')}(\tau) d\tau \quad (4.52)$$

und für die zugehörige Varianz

$$\begin{aligned} q^{(i')} &:= E \left[ \frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1} + \Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1} + \Delta t} n^{(i')}(\tau_1) n^{(i')}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1} + \Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1} + \Delta t} q'^{(i')} \cdot \delta(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1} + \Delta t} q'^{(i')} d\tau = \frac{q'^{(i')}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Die Abhängigkeit der Varianz von der Abtastzeit führt dazu, dass zur Charakterisierung des inhärenten Sensorrauschens häufig die Wurzel der spektralen Leistungsdichte  $q'^{(i')}$ , welche unabhängig von  $\Delta t$  ist, in Datenblättern verwendet wird. Bei Beschleunigungssensoren spricht man dabei vom *Velocity Random Walk (VRW)*, der üblicherweise in  $[\text{m}/(\text{s}^2 \cdot \sqrt{\text{Hz}})]$  angegeben wird. Bei Drehratensensoren wird der Parameter als *Angle Random Walk (ARW)* mit der Angabe in  $[^\circ/(\text{s} \cdot \sqrt{\text{Hz}})] = [^\circ/\sqrt{\text{s}}]$  bezeichnet.

Neben dem inhärenten Rauschen soll das weiße GAUSS-verteilte Rauschen auch verwendet werden, um zeitveränderliche und temperaturabhängige Bias bzw. zeitvariante Drifte geeignet zu modellieren. In [Wen07] wird dafür ein GAUSS-MARKOV-Prozess (GMP) oder ein Zufallsbewegungsprozess (engl. *Random Walk Process (RWP)*) vorgeschlagen. Dabei gilt für das Bias die Differenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{b}}(t) := \frac{\partial \mathbf{b}(t)}{\partial t} = \mathbf{n}_b(t). \quad (4.54)$$

Hierbei ist  $\mathbf{n}_b(t) := \left( n_{b,x}(t) \ n_{b,y}(t) \ n_{b,z}(t) \right)^T$  additives mittelwertfreies, weißes GAUSS'sches Rauschen, dessen Kovarianzmatrix mit  $\mathbf{Q}'_b$  bezeichnet werden soll. Gl. (4.54) ist das Modell eines RWP. Während  $\mathbf{n}_b(t)$ , das treibende weiße Rauschen, stationär ist, ist  $\mathbf{b}(t)$  instationär [Neu05]. Seine Varianz nimmt linear mit der Zeit zu.

Fassen wir nun die bisherigen Betrachtungen in einem Modell zusammen, so erhält man entsprechend [Wen07] durch Überlagerung der Prozesse für einen Drehratensensor die Gleichung

$$\dot{\omega}_{ib}^b(t) = \mathbf{S}_\omega \cdot \omega_{ib}^b(t) + \mathbf{b}_\omega(t) + \mathbf{n}_\omega(t) \quad (4.55)$$



mit  $\mathbf{n}_\omega(t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_\omega(t); \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}'_\omega)$  und

$$\dot{\mathbf{b}}_\omega(t) = \mathbf{n}_\omega(t) \quad (4.56)$$

mit  $\mathbf{n}_{b_\omega}(t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_{b_\omega}(t); \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}'_{b_\omega})$ , wobei  $\omega_{ib}^b(t) := \left( \omega_{ib,x}^b(t) \ \omega_{ib,y}^b(t) \ \omega_{ib,z}^b(t) \right)^T$  die idealen Winkelgeschwindigkeiten der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse enthält und durch  $(\sim)$  die Messgröße bezeichnet wird. Da die Skalierungsmatrix  $\mathbf{S}_\omega$  seitens des Sensorherstellers auch vorab bestimmt werden kann, ist an Stelle von Gl. (4.55) für die korrigierten Sensorausgangssignale die Gleichung

$$\tilde{\omega}_{ib}^b(t) = \omega_{ib}^b(t) + \mathbf{b}_\omega(t) + \mathbf{n}_\omega(t) \quad (4.57)$$

möglich. Die entsprechenden Modelle für die Beschleunigungssensortriade lauten

$$\tilde{\mathbf{a}}_{ib}^b(t) = \mathbf{a}_{ib}^b(t) + \mathbf{b}_a(t) + \mathbf{n}_a(t) \quad (4.58)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_a(t) = \mathbf{n}_{b_a}(t) \quad (4.59)$$

mit  $\mathbf{n}_a(t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_a(t); \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}'_a)$  und  $\mathbf{n}_{b_a}(t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_{b_a}(t); \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}'_{b_a})$ , wobei die idealen Beschleunigungen im  $b$ -Rahmen in  $\mathbf{a}_{ib}^b(t) := \left( a_{ib,x}^b(t) \ a_{ib,y}^b(t) \ a_{ib,z}^b(t) \right)^T$  zusammengefasst sind und  $\mathbf{b}_a(t)$  der zugehörige Biasvektor ist.

Um aus den zeitkontinuierlichen Modellen nun zeitdiskrete Zusammenhänge abzuleiten, betrachten wir wieder Gl. (4.54). Durch den Differenzenquotienten lässt sich die zeitliche Ableitung als Grenzwert annähern:

$$\mathbf{n}_b(t_k) = \dot{\mathbf{b}}(t) \Big|_{t=t_k} \approx \frac{\mathbf{b}_k - \mathbf{b}_{k-1}}{\Delta t}, \quad (4.60)$$

wobei durch Auflösen nach  $\mathbf{b}_k$  mit  $\mathbf{n}_{b,k} := \mathbf{n}_b(t_k)$  und  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$  der Zusammenhang  $\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_{k-1} + \Delta t \cdot \mathbf{n}_{b,k}$  resultiert. Für den Rauschterm kann hierbei  $\mathbf{n}_{b,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_{b,k}; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}_b)$  mit  $\mathbf{Q}_b = \frac{\mathbf{Q}'_b}{\Delta t}$  verwendet werden.

Nach diesen Betrachtungen können nun, ausgehend von den o. g. vereinfachten Modellgleichungen, die äquivalenten zeitdiskreten Gleichungen sowohl für die Drehratensensortriade als auch für die Beschleunigungssensortriade angegeben werden:

$$\tilde{\omega}_{ib,k}^b = \omega_{ib,k}^b + \mathbf{b}_{\omega,k} + \mathbf{n}_{\omega,k} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{b}_{\omega,k} = \mathbf{b}_{\omega,k-1} + \Delta t \cdot \mathbf{n}_{b_\omega,k}, \quad (4.62)$$

wobei  $\mathbf{n}_{\omega,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_{\omega,k}; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}_\omega)$ ,  $\mathbf{n}_{b_\omega,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_{b_\omega,k}; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}_{b_\omega})$  und

$$\tilde{\mathbf{a}}_{ib,k}^b = \mathbf{a}_{ib,k}^b + \mathbf{b}_{a,k} + \mathbf{n}_{a,k} \quad (4.63)$$

$$\mathbf{b}_{a,k} = \mathbf{b}_{a,k-1} + \Delta t \cdot \mathbf{n}_{b_a,k} \quad (4.64)$$

mit  $\mathbf{n}_{a,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_{a,k}; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}_a)$ ,  $\mathbf{n}_{b_a,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_{b_a,k}; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}_{b_a})$  gilt. Dabei ist  $\mathbf{Q}_\omega = \frac{\mathbf{Q}'_\omega}{\Delta t}$ ,  $\mathbf{Q}_a = \frac{\mathbf{Q}'_a}{\Delta t}$  sowie  $\mathbf{Q}_{b_\omega} = \frac{\mathbf{Q}'_{b_\omega}}{\Delta t}$  und  $\mathbf{Q}_{b_a} = \frac{\mathbf{Q}'_{b_a}}{\Delta t}$ .

Wie bereits erwähnt, sind die bisherigen Ausführungen zu den Messmodellen in den Gl. (4.61)–(4.64) unter der Annahme durchgeführt worden, dass das Messrauschen in  $\mathbf{n}_\omega$  und  $\mathbf{n}_a$  jeweils einer Verteilung mit konstanter Kovarianzmatrix entstammt. In der Realität ist es jedoch schwierig,

sämtliche Effekte, die die Messungen beeinflussen, in ein geschlossenes Gleichungssystem zu bringen. Auch die herstellerseitige Kalibrierung kann nicht zu einer vollständigen Eliminierung von Skalierungs- oder Fehlausrichtungsfehlern führen. Restfehler verbleiben und dadurch treten in den meisten Fällen weiterhin Korrelationen zwischen den Messwerten einzelner Sensorachsen auf. Außerdem sind im Rahmen einer fahrzeugbasierten Anwendung die Inertialsensoren z. T. starken Vibrationen ausgesetzt, die als zusätzliches Rauschen in den Messwerten auftauchen. Diese Vibrationen besitzen teilweise eine bestimmte Eigenfrequenz (z. B. durch den Motor) und können somit nicht durch einen weißen Rauschprozess mit konstantem LDS modelliert werden. Es treten zeitliche Korrelationen auf, die durch die Modellierung in Gl. (4.61) oder (4.63) häufig nicht ausreichend erfasst sind. Ein gängiges Verfahren zur Berücksichtigung dieser Korrelationen ist die Modellierung des Rauschprozesses selbst durch einen *RWP* oder *GMP*. Das Sensorrauschen in (4.61) bzw. (4.63) würde im zeitdiskreten Fall durch

$$\mathbf{n}_{\omega,k} = \mathbf{D}_{n_{\omega}} \cdot \mathbf{n}_{\omega,k-1} + \mathbf{\Gamma}_{n_{\omega}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\omega,k} \quad (4.65)$$

$$\mathbf{n}_{a,k} = \mathbf{D}_{n_a} \cdot \mathbf{n}_{a,k-1} + \mathbf{\Gamma}_{n_a} \cdot \boldsymbol{\eta}_{a,k} \quad (4.66)$$

modelliert werden können, wobei nun  $\boldsymbol{\eta}_{\omega}$  und  $\boldsymbol{\eta}_a$  als weißes GAUSS-verteiltes Rauschen mit  $\boldsymbol{\eta}_{\omega,k} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_{\omega,k}; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}_{\eta_{\omega}})$  und  $\boldsymbol{\eta}_{a,k} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_{a,k}; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}_{\eta_a})$  angenommen wird. Die Matrizen  $\mathbf{\Gamma}_{n_{\omega}}$  und  $\mathbf{\Gamma}_{n_a}$  würden hier aus Kombinationen von Einheits- und Nullmatrizen bestehen. Die Differenzialgleichung, aus der (4.65) und (4.66) hervorgehen, würde im Fall eines GMP erster Ordnung durch

$$\dot{\mathbf{n}}_{\dagger}(t) = \mathbf{A}_{\dagger} \cdot \mathbf{n}_{\dagger}(t) + \mathbf{B}_{\dagger} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\dagger}(t) \quad (4.67)$$

mit  $\dagger \in \{\omega, a\}$  beschreibbar sein, wobei auf der Hauptdiagonalen der Matrix  $\mathbf{B}_{\dagger}$  die Terme  $\sigma_{\dagger} \sqrt{\frac{2}{t_c}}$  mit  $t_c$  als Korrelationszeit stehen [Wen07]. Für die Matrix  $\mathbf{A}_{\dagger}$  gilt  $\mathbf{A}_{\dagger} = -\frac{1}{t_c} \mathbf{I}_{3 \times 3}$ . Die AKF ist dabei  $r_{\boldsymbol{\eta}_{\dagger}^{(i')}, \boldsymbol{\eta}_{\dagger}^{(i')}}(\tau) = 1 \cdot \delta(\tau)$  für  $i' \in \{1, 2, 3\}$  und  $\sigma_{\dagger}$  die Standardabweichung des GMP. Die

Elemente auf der Hauptdiagonalen von  $\mathbf{D}_{n_{\dagger}}$  würden in diesem Fall durch die Terme  $e^{-\frac{\Delta t}{t_c}}$  gegeben sein. Diese Modellierung ist auch bei einem zeitkorrelierten Rauschen hilfreich, wie es bei *GPS*-Messungen auftritt. Auch dieses ist nach [TW04] durch ein Modell erster oder zweiter Ordnung meist hinreichend beschrieben.

Geht man allerdings von einer bekannten Differenzialgleichung nach (4.67) aus, deren zeitdiskretes Äquivalent sowie dessen Parameter bestimmt werden sollen, so gilt nach [Wen07] annähernd

$$\mathbf{\Gamma}_{n_{\dagger}} \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\eta}_{\dagger}} \mathbf{\Gamma}_{n_{\dagger}}^T = \mathbf{\Gamma}_{n_{\dagger}} E [\boldsymbol{\eta}_{\dagger,k} \boldsymbol{\eta}_{\dagger,k}^T] \mathbf{\Gamma}_{n_{\dagger}}^T \approx \frac{1}{4} \Delta t \left( \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{D}_{n_{\dagger}} \right) \mathbf{B}_{\dagger} \mathbf{Q}'_{\boldsymbol{\eta}_{\dagger}} \mathbf{B}_{\dagger}^T \left( \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{D}_{n_{\dagger}} \right)^T \quad (4.68)$$

$$\approx \Delta t \mathbf{Q}'_{\boldsymbol{\eta}_{\dagger}}, \quad (4.69)$$

wobei  $\boldsymbol{\eta}_{\dagger}(t) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_{\dagger}(t); \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}'_{\boldsymbol{\eta}_{\dagger}})$ . Dabei enthält  $\mathbf{Q}'_{\boldsymbol{\eta}_{\dagger}} := \text{diag}(\mathbf{q}'_{\boldsymbol{\eta}_{\dagger}})$  die spektralen Leistungsdichten des Rauschvektors  $\boldsymbol{\eta}_{\dagger}(t)$ . Dieser Zusammenhang resultiert aus der Reihenentwicklung der Matrixexponentialfunktion, wobei das Integral in (4.70) durch eine unendliche Reihe mit Abbruch nach dem linearen Glied angenähert wird:

$$\mathbf{n}_{\dagger,k} = \underbrace{e^{\mathbf{A}_{\dagger}(t_k - t_{k-1})}}_{\mathbf{D}_{n_{\dagger}}} \mathbf{n}_{\dagger,k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1} + \Delta t} e^{\mathbf{A}_{\dagger}(t_k - \tau)} \mathbf{B}_{\dagger} \boldsymbol{\eta}_{\dagger}(\tau) d\tau. \quad (4.70)$$

Mit  $\mathbf{D}_{n_{\dagger}} = e^{\mathbf{A}_{\dagger}(t_k - t_{k-1})}$  ist dieses das zeitdiskrete Äquivalent zu Gl. (4.67). Dieser Zusammenhang ist für die inertielle Fehlerfilterung in Kap. 5 von Bedeutung, um von den dort verwendeten Bewegungsdifferenzialgleichungen auf die zeitdiskrete Modellierung im Rahmen der Filterung schließen zu können. Den Zustandsvektor könnte man dabei um genau die Terme in Gl. (4.65) bzw. Gl. (4.66) erweitern. Dies wäre allerdings mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden. Hinzu kommt, dass u. U. numerische Probleme auftreten können und diese zusätzlichen Zustände durch die Messungen auch häufig nicht beobachtbar sind, wie in [Wen07] beschrieben wird. Um eine Erweiterung des Vektors zu vermeiden, existiert allerdings eine alternative Möglichkeit.

In Kap. 4.6 werden Filtergleichungen vorgestellt, die die zeitlichen Korrelationen ohne diese Erweiterung berücksichtigen können. Dabei müssen jedoch Kenntnisse über die Zustandsübergangsmatrizen  $\mathbf{D}_{n_{\omega}}$  und  $\mathbf{D}_{n_a}$  des Rauschprozesses vorhanden sein. Ist die Korrelationszeit  $t_c$  nicht bekannt, ist eine Schätzung dieser Matrizen möglich, indem man den Erwartungswert  $E[\mathbf{n}_{\dagger,k} \mathbf{n}_{\dagger,k-1}^T]$  berechnet:

$$E[\mathbf{n}_{\dagger,k} \mathbf{n}_{\dagger,k-1}^T] = \mathbf{D}_{n_{\dagger}} E[\mathbf{n}_{\dagger,k-1} \mathbf{n}_{\dagger,k-1}^T] + \mathbf{\Gamma}_{n_{\dagger}} E[\boldsymbol{\eta}_{\dagger,k} \mathbf{n}_{\dagger,k-1}^T]. \quad (4.71)$$

Da das zeitkorrelierte Rauschen  $\mathbf{n}_{\dagger,k-1}$  nicht mit dem weißen Rauschen  $\boldsymbol{\eta}_{\dagger,k}$  korreliert ist, verschwindet der letzte Term in (4.71). Mit Hilfe von Stichproben aus  $K$  Messwerten resultiert nach [Upt08] für den *ML*-Schätzwert mit BESSEL-Korrektur zur Gewährleistung der Erwartungstreue

$$\frac{1}{K-2} \sum_{k=2}^K \mathbf{n}_{\dagger,k} \mathbf{n}_{\dagger,k-1}^T = \mathbf{D}_{n_{\dagger}} \frac{1}{K-2} \sum_{k=2}^K \mathbf{n}_{\dagger,k-1} \mathbf{n}_{\dagger,k-1}^T \quad (4.72)$$

und damit die Schätzung

$$\hat{\mathbf{D}}_{n_{\dagger}} = \left( \sum_{k=2}^K \mathbf{n}_{\dagger,k} \mathbf{n}_{\dagger,k-1}^T \right) \cdot \left( \sum_{k=2}^K \mathbf{n}_{\dagger,k-1} \mathbf{n}_{\dagger,k-1}^T \right)^{-1}. \quad (4.73)$$

Auf die Wahl der entsprechenden Parameter bei Verwendung von Felddaten wird in Kap. 5 im Rahmen der Fehlerfilterung nochmal eingegangen. Setzt man nun die Schätzung  $\hat{\mathbf{D}}_{n_{\dagger}}$  in (4.65) bzw. (4.66) ein, so kann man auch die Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}_{\eta_{\omega}}$  bzw.  $\mathbf{Q}_{\eta_a}$  abschätzen. Mit Hilfe der Modelle in (4.65), (4.66) können jedoch zeitliche Veränderungen nur ungenau nachgebildet werden, vor allem dann, wenn die Zustandsübergangsmatrizen als konstant (zeitinvariant) angenommen werden. Diese zeitlichen Abhängigkeiten könnten durch GMP höherer Ordnung mit Hilfe der YULE-WALKER-Gleichungen beschrieben werden, haben aber auch den Nachteil, dass der daraus resultierende Zustandsvektor des autoregressiven Prozesses leicht eine sehr hohe Dimension erreichen würde [TW04]. Alternativ könnten für das hier verwendete Modell eine zeitvariante Zustandsübergangsmatrix und eine konstante Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\eta_{\dagger}}$  angenommen werden. Um  $\mathbf{D}_{n_{\dagger}}$  zu schätzen, müsste das zeitkorrelierte Rauschen  $\mathbf{n}_{\dagger}$  dann jedoch zu jedem Zeitpunkt annähernd bekannt sein. Dieser Ansatz soll im Rahmen des in dieser Arbeit vorgestellten Parameterschätzverfahrens jedoch nicht verfolgt werden.

Eine Möglichkeit, die Zeitvarianz in (4.65) oder (4.66) dennoch zu berücksichtigen, ist die Annahme von zeitvarianten Messrauschkovarianzmatrizen, d. h. man überführt  $\mathbf{Q}_{\eta_{\omega}} \rightarrow \mathbf{Q}_{\eta_{\omega,k}}$  und  $\mathbf{Q}_{\eta_a} \rightarrow \mathbf{Q}_{\eta_{a,k}}$ . Dies könnte ebenso in (4.61) und (4.63), im Fall von zeitlich nicht korreliertem Rauschen, angenommen werden:  $\mathbf{Q}_{\omega} \rightarrow \mathbf{Q}_{\omega,k}$  und  $\mathbf{Q}_a \rightarrow \mathbf{Q}_{a,k}$ . Sequenzielle Verfahren, die diese zeitvarianten Kovarianzmatrizen schätzen, werden in Kap. 7 vorgestellt. Auf entsprechende Ansätze für biastreibendes Rauschen wird verzichtet, da hier von sich zeitlich sehr langsam veränderlichen Prozessen

ausgegangen wird. Es wird angenommen, dass sich diese durch *RWP* mit konstanten Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}_{b_w}$  bzw.  $\mathbf{Q}_{b_a}$  ausreichend modellieren lassen. Des Weiteren führt die hier eingesetzte *MTi*-Sensoreinheit eine Biaskorrektur im Rahmen einer internen Signalverarbeitung durch, wodurch das jeweilige Bias bereits im Vorfeld reduziert wird.

## 4.6 Zustands- und Parameterschätzung

Nachdem bereits die wichtigsten Grundlagen der inertialen Navigation behandelt worden sind, sollen nun die wesentlichen Punkte der KALMAN-Filterung vorgestellt werden, da dieses für die Datenfusion eingesetzt wird. Wie bereits in Kap. 2 erwähnt, existieren verschiedene Formen des KF, wobei hier nicht jede im Detail behandelt werden soll. Es ist aber von Bedeutung, dass sich die Wahl des Filters nach dem Anwendungsfall und dem System- bzw. Messmodell richtet, welches jeweils linear oder nichtlinear sein kann. Das von RUDOLF E. KALMAN entwickelte zeitvariante Verfahren, das die Schätzung des Zustandes eines dynamischen Systems erlaubt, wird in [Kal60], [KSH01] und [RAG04] detailliert beschrieben. Hier spielt eine indirekte Variante der KALMAN-Filterung eine Rolle, die nicht den Systemzustand, sondern dessen Fehler schätzt. Mit diesem kann der eigentliche Systemzustand dann korrigiert werden. Dieses wird in 4.6.2 näher betrachtet.

### 4.6.1 KALMAN-Filter

Beim KF-Algorithmus wird eine lineare oder nichtlineare Systembeschreibung, z. B. in der Form einer Differenzialgleichung entsprechend

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{n}(t) \quad \text{oder} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{n}(t) \quad (4.74)$$

benötigt, wobei die Vektoren  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{n}(t)$  den Systemzustandsvektor und den Systemrauschvektor beschreiben. Der Steuervektor  $\mathbf{u}(t)$  kann ggf. entfallen. Die Vektoren sind über die Systemmatrix  $\mathbf{F}(t)$  sowie die Störmatrix  $\mathbf{G}(t)$  miteinander verknüpft. Mit Hilfe geeigneter Initialwerte lassen sich mit Gl. (4.74) sämtliche Folgezustände berechnen. Von der Störgröße ist der eigentliche Wert i. d. R. nicht bekannt. Allerdings können die statistischen Eigenschaften dieses Terms, der die Modellunsicherheit beschreibt, unabhängig von den Betrachtungen im vorigen Kapitel über beispielsweise Langzeitmessungen bestimmt werden. In vielen Fällen geht man davon aus, dass  $\mathbf{n}(t) \sim p(\mathbf{n}(t)) = \mathcal{N}(\mathbf{n}(t); \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}, \mathbf{Q}')$  gilt, die Störgröße demnach weißes GAUSS-verteiltes Rauschen mit der Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}'$  ist. Im Fall von zeitkorreliertem Rauschen kann wiederum ein Ansatz nach Gl. (4.65), (4.66) verwendet werden.

Der Zusammenhang zwischen dem Systemzustand und einer vorliegenden Messung  $\mathbf{z}(t)$  kann über

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{w}(t) \quad \text{oder} \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{w}(t) \quad (4.75)$$

beschrieben werden, wobei die Messmatrix  $\mathbf{H}(t)$  den linearen Zusammenhang zwischen Messung und Zustand widerspiegelt und  $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$  einen nichtlinearen Zusammenhang beschreibt. Die Matrix  $\mathbf{M}(t)$  sei hier die diejenige, die den Einfluss des Messrauschvektors auf den Messvektor beschreibt.

Das KF liefert neben einer Schätzung des Systemzustandes  $\hat{\mathbf{x}}(t|t) = E[\mathbf{x}(t) | \mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(t)]$  auch eine Angabe über die Zuverlässigkeit der Schätzung mit Hilfe der Schätzfehlerkovarianzmatrix. Diese lautet  $\mathbf{P}(t|t) := E[(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))^T | \mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(t)]$ . Ist das Messrauschen

zeitlich unkorreliert, so wird für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\mathbf{w}(t)) = \mathcal{N}(\mathbf{w}(t); \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}, \mathbf{R}')$  angenommen. Im Falle von zeitkorreliertem Messrauschen ist wieder ein zu (4.65) oder (4.66) äquivalenter Ansatz zu wählen.

Um ein zeitdiskretes Filter verwenden zu können, müssen die vorliegenden zeitkontinuierlichen Gleichungen in den zeitdiskreten Bereich transformiert werden. Die Systemgl. (4.74) und die Messgl. (4.75) gehen mit  $\mathbf{x}_k := \mathbf{x}(t_k)$  und  $\mathbf{z}_k := \mathbf{z}(t_k)$ ,  $t_k = t_0 + k \cdot \Delta t$  im linearen Fall in

$$\mathbf{x}_k = \Phi_k \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}_k \quad (4.76)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{w}_k \quad (4.77)$$

über, wobei  $\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{Q}'}{\Delta t}$  hier die Rauschkovarianzmatrix des Vektors  $\mathbf{n}_k$  ist. Entsprechend kann man für die Systemmatrix und die Störmatrix analog zu (4.68) und (4.70)

$$\Phi_k = e^{\mathbf{F}(t_k) \cdot (t_k - t_{k-1})} \approx \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} + \mathbf{F}(t_k) \Delta t \quad (4.78)$$

$$\mathbf{G}_k = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} + \Phi_k \right) \mathbf{G}(t_k) \Delta t \approx \mathbf{G}(t_k) \Delta t \quad (4.79)$$

folgern.

Die KF-Gleichungen basieren schließlich auf einer Betrachtung des Orthogonalitätsprinzips in zwei Schritten: dem Propagationsschritt und dem Aktualisierungsschritt. Details zu den Gleichungen sind in [RAG04], [Wen07], [Frä05] und [FB99] zu finden. Wenn  $\mathbf{n}_k$  in (4.76) und  $\mathbf{w}_k$  in (4.77) nicht weiß sind und aufgrund zeitlicher Korrelationen durch die Gleichungen

$$\mathbf{n}_k = \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{n}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_n \cdot \boldsymbol{\eta}_k \quad (4.80)$$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{D}_w \cdot \mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_w \cdot \boldsymbol{\nu}_k \quad (4.81)$$

dargestellt werden können, wobei  $\boldsymbol{\eta}_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_k; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\eta},k})$  und  $\boldsymbol{\nu}_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_k; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{R}_{\boldsymbol{\nu}})$  gilt, dann lassen sich mit

$$\check{\mathbf{x}}_k := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k^T & \mathbf{n}_k^T & \mathbf{w}_k^T \end{pmatrix}^T \quad (4.82)$$

folgende erweiterte Zustands- und Messgleichungen angeben:

$$\check{\mathbf{x}}_k = \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_k & \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{D}_n & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{D}_n & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{D}_w \end{pmatrix}}_{\check{\Phi}_k} \cdot \check{\mathbf{x}}_{k-1} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{\Gamma}_n & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{\Gamma}_n & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{\Gamma}_w \end{pmatrix}}_{\check{\mathbf{G}}_k} \cdot \check{\mathbf{n}}_k \quad (4.83)$$

$$\mathbf{z}_k = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}_k \end{pmatrix}}_{\check{\mathbf{H}}_k} \cdot \check{\mathbf{x}}_k. \quad (4.84)$$

Die Matrizen  $\mathbf{\Gamma}_n$  und  $\mathbf{\Gamma}_w$  seien konstant und beschreiben den Zusammenhang zwischen dem treibenden Rauschen und dem jeweiligen zeitlich korrelierten Rauschen. Die ebenfalls als konstant angenommenen Matrizen  $\mathbf{D}_n$  und  $\mathbf{D}_w$  definieren den Zustandsübergang für die jeweiligen Rauschprozesse zum Zeitpunkt  $k$ . Der additive Messrauschterm ist in dem Modell (4.83) nun Teil des Systemrauschvektors  $\check{\mathbf{n}}_k = (\boldsymbol{\eta}_k^T \ \boldsymbol{\nu}_k^T)^T$ . Dieser ist weiß, so dass ein lineares KF als optimaler Schätzer der

a posteriori-Verteilung  $p(\hat{\mathbf{x}}_k | \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k)$  verwendet werden kann. Die KF-Gleichungen lauten:<sup>4</sup>

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \check{\Phi}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (4.85)$$

$$\check{\mathbf{P}}_{k|k-1} = \check{\Phi}_k \check{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} \check{\Phi}_k^T + \check{\mathbf{G}}_k \check{\mathbf{Q}}_k \check{\mathbf{G}}_k^T \quad (4.86)$$

$$\mathbf{K}_k = \check{\mathbf{P}}_{k|k-1} \check{\mathbf{H}}_k^T \cdot \left( \check{\mathbf{H}}_k \check{\mathbf{P}}_{k|k-1} \check{\mathbf{H}}_k^T \right)^{-1} \quad (4.87)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \check{\mathbf{H}}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \quad (4.88)$$

$$\check{\mathbf{P}}_{k|k} = \check{\mathbf{P}}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \check{\mathbf{H}}_k \check{\mathbf{P}}_{k|k-1}. \quad (4.89)$$

Dabei ist  $\check{\mathbf{Q}}_k := E[\check{\mathbf{n}}_k \check{\mathbf{n}}_k^T]$ . Die Matrix  $\check{\mathbf{P}}_{k-1|k-1}$  stellt hier die zu  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  gehörende Schätzfehlerkovarianzmatrix des vorherigen Aktualisierungsschrittes dar, nachdem die zu dem Zeitpunkt vorhandenen Messungen verarbeitet worden sind.  $\mathbf{K}_k$  ist der KALMAN-Gewinn (engl. KALMAN-Gain).

Eine alternative Behandlung von zeitlich korreliertem System- und Messrauschen nach den Gl. (4.76) und (4.77), die die Erweiterung des Zustandsvektors gemäß (4.82) und damit den erhöhten Rechenaufwand weitgehend vermeidet, wurde in [Wen07] vorgestellt. Der Schätzer ist bezüglich des mittleren quadratischen Fehlers ebenfalls optimal. Die zugehörigen Schätzgleichungen lauten:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &= \Phi_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_k^T + \Phi_k \mathbf{P}_{xn,k-1|k-1} \mathbf{D}_n^T \mathbf{G}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{P}_{xn,k-1|k-1}^T \Phi_k^T \\ &\quad + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{P}_{nn,k-1} \mathbf{D}_n^T \mathbf{G}_k^T + \mathbf{G}_k \Gamma_n \mathbf{Q}_{\eta,k} \Gamma_n^T \mathbf{G}_k^T \\ &= \Phi_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{P}_{xn,k-1|k-1}^T \Phi_k^T + \mathbf{P}_{xn,k|k-1} \mathbf{G}_k^T \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\mathbf{P}_{xn,k|k-1} = \Phi_k \mathbf{P}_{xn,k-1|k-1} \mathbf{D}_n^T + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{P}_{nn,k-1} \mathbf{D}_n^T + \mathbf{G}_k \Gamma_n \mathbf{Q}_{\eta,k} \Gamma_n^T \quad (4.92)$$

$$\mathbf{P}_{xw,k|k-1} = \Phi_k \mathbf{P}_{xw,k-1|k-1} \mathbf{D}_w^T \quad (4.93)$$

$$\mathbf{P}_{nn,k} = \mathbf{D}_n \mathbf{P}_{nn,k-1} \mathbf{D}_n^T + \Gamma_n \mathbf{Q}_{\eta,k} \Gamma_n^T \quad (4.94)$$

$$\mathbf{P}_{ww,k} = \mathbf{D}_w \mathbf{P}_{ww,k-1} \mathbf{D}_w^T + \Gamma_w \mathbf{R}_w \Gamma_w^T \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \left( \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T \right) \\ &\quad \cdot \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1}^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{ww,k} \mathbf{M}_k^T \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \quad (4.97)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1}^T \quad (4.98)$$

$$\mathbf{P}_{xn,k|k} = \mathbf{P}_{xn,k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xn,k|k-1} \quad (4.99)$$

$$\mathbf{P}_{xw,k|k} = \mathbf{P}_{xw,k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{ww,k}. \quad (4.100)$$

Der Berechnungsaufwand kann somit deutlich verringert werden, sofern ein Schätzwert für  $\mathbf{n}_k$  oder  $\mathbf{w}_k$  nicht benötigt wird. Eine ausführliche Herleitung ist in Anhang B.2 aufgeführt. Durch den Verzicht auf die Vektorerweiterung können die zeitkorrelierten Terme nicht bei der Prädiktion des Systemzustandes  $\mathbf{x}_k$  in Gl. (4.90) sowie der Innovation in (4.97) berücksichtigt werden.  $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$  stellt

<sup>4</sup>Durch  $(\dots)_{k|k-1}$  wird eine Größe kenntlich gemacht, die nach Verarbeitung der Messung zum Zeitpunkt  $k-1$  für den aktuellen Zeitpunkt  $k$  prädiiziert wird. Entsprechend ist  $(\dots)_{k|k}$  eine Größe zum Zeitpunkt  $k$ , nachdem sämtliche Beobachtungen bis zum aktuellen Zeitpunkt verarbeitet wurden.



hier die zu  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  gehörende Schätzfehlerkovarianzmatrix des vorherigen Aktualisierungsschrittes dar, nachdem die zu dem Zeitpunkt vorhandenen Messungen verarbeitet worden sind. Entsprechend sind  $\mathbf{P}_{xn,k|k-1}$  und  $\mathbf{P}_{xw,k|k-1}$  die prädierten Kovarianzmatrizen zwischen dem Systemzustandsfehler  $\Delta \mathbf{x}_{k|k-1} := \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  und dem jeweiligen Rauschvektor und  $\mathbf{P}_{nn,k}$ ,  $\mathbf{P}_{ww,k}$  die Autokovarianzmatrizen der zeitkorrelierten Rauschvektoren. An dieser Stelle gelte des Weiteren  $\mathbf{Q}_{\eta,k} := E[\boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T]$  und  $\mathbf{R}_\nu := E[\boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T]$ . Während  $\mathbf{Q}_{\eta,k}$  also als zeitvariant angenommen wird, soll die Kovarianzmatrix  $\mathbf{R}_\nu$ , die das Messrauschen treibt, zeitinvariant sein. Wenn  $\mathbf{D}_n$  und  $\mathbf{D}_w$  Nullmatrizen sind, also kein zeitkorreliertes Rauschen vorliegt, gehen die Gl. (4.90) bis (4.100) wieder in die klassischen KF-Gleichungen über. Neben dem klassischen KF wird hier das LKF verwendet, welches in Kap. 4.6.2 vorgestellt wird.

Betrachtet man die Herleitung des KF im Detail [RAG04], so lassen sich einige Eigenschaften formulieren, die im Rahmen dieser Arbeit von großer Bedeutung sind. Wie bereits erwähnt, stellt das klassische KF im BAYES'schen Sinne den optimalen *MMSE*-Schätzer für ein System dar, das sich durch lineare Zustandsübergänge und eine lineare Messgleichung beschreiben lässt. Es handelt sich um einen wirksamen und erwartungstreuen Schätzer. Im Mittel stimmen die geschätzten Größen mit den tatsächlichen Zuständen überein und es wird eine Schätzung mit einer möglichst geringen Varianz gewonnen. Das Filter liefert allerdings nicht nur einen Punktschätzwert, sondern die komplette a posteriori-Verteilung des Zustandes zu einem bestimmten Zeitpunkt gegeben alle bisherigen Beobachtungen. Wenn man das Filter für  $t \rightarrow \infty$  beobachtet, so ist der notwendige Initialisierungsvektor  $\hat{\mathbf{x}}_0$  sowie die Matrix  $\mathbf{P}_0$  nicht mehr relevant für die Schätzung.

#### 4.6.2 Fehlerfilter

In einem Fehlerfilter (FF) werden nicht physikalische Größen direkt, sondern deren Fehler als Zustandsgrößen des Filters verwendet. Hier wird ein FF auf Basis des linearisierten KALMAN-Filters (LKF) betrachtet. Die eigentlich interessierende zu schätzende Größe liegt dabei außerhalb des Filters und wird durch Rückführung des Filterausgangs auf diese Größe korrigiert, weshalb man auch von einer indirekten KALMAN-Filterung spricht (siehe Abb. 4.5). Im Folgenden wird bei der zu interessierenden Größe auch vom „äußeren Systemzustand“ gesprochen, während der Ausgang  $\Delta \mathbf{x}$  des LKF auch als „innerer Systemzustand“ bezeichnet wird. Dieser kann (aber muss nicht) auch Schätzungen von Fehlern zur Korrektur der Stützsensormessungen enthalten.

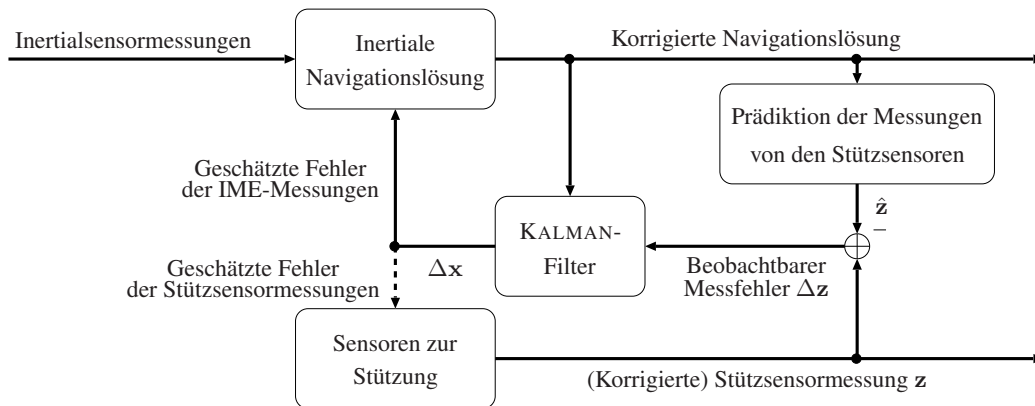


Abbildung 4.5: Closed-loop-Fehlerfilter

Zunächst wird die nichtlineare, zeitkontinuierliche Systembeschreibung in (4.74) betrachtet. Nach

Entwicklung in eine Taylorreihe um die Linearisierungspunkte  $\mathbf{x}'(t)$  und  $\mathbf{u}'(t)$ , wobei nach dem linearen Glied abgebrochen wird, lautet diese:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) \approx & f\left(\mathbf{x}'(t), \mathbf{u}'(t)\right) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}'(t)} \cdot \left(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'(t)\right) \\ & + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \right|_{\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}'(t)} \cdot \left(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}'(t)\right) + \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{n}(t). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Hierbei ist  $\mathbf{u}(t)$  eine deterministische Eingangsgröße. Berechnet man den bedingten Erwartungswert  $\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) := E[\dot{\mathbf{x}}(t)|\mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(t-1)]$  von Gl. (4.101), erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) \approx & f\left(\mathbf{x}'(t), \mathbf{u}'(t)\right) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}'(t)} \cdot \left(\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) - \mathbf{x}'(t)\right) \\ & + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \right|_{\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}'(t)} \cdot \left(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}'(t)\right). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Nach Subtraktion beider Gleichungen erhält man

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}'(t)} \cdot (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)) + \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{n}(t). \quad (4.103)$$

Wird nun der Schätzwert für den Systemzustand  $\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$  selbst als Linearisierungspunkt gewählt, so erhält man mit  $\Delta \mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$ :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\left. \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}(t)=\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)}}_{\mathbf{F}(t)} \cdot \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{n}(t), \quad (4.104)$$

wobei die Ableitung am Linearisierungspunkt durch die JACOBI-Matrix  $\mathbf{F}(t)$  ausgedrückt werden kann. Entsprechend erhält man für die zeitdiskrete Variante von Gl. (4.104):

$$\Delta \mathbf{x}_k = \Phi_k \cdot \Delta \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}_k, \quad (4.105)$$

wobei  $\Phi_k$  wie in Gl. (4.78) gewählt wird und für  $\mathbf{n}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_k; \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}, \mathbf{Q})$  gilt.

Analog zu obigen Gleichungen geht man auch bei den Messgleichungen vor. Dazu betrachtet man direkt die nichtlineare, jedoch zeitdiskrete Form von (4.75):

$$\mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{w}_k, \quad (4.106)$$

wobei  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_k; \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}, \mathbf{R})$ . Diese wird ebenso in eine Taylorreihe um den Linearisierungspunkt  $\mathbf{x}'_k$  mit Abbruch nach dem linearen Glied entwickelt:

$$\mathbf{z}_k \approx h_k(\mathbf{x}'_k) + \left. \frac{\partial h_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k=\mathbf{x}'_k} \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k) + \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{w}_k. \quad (4.107)$$

Durch die Erwartungswertbildung  $\hat{\mathbf{z}}_k := E[\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{k-1}]$  könnte für die geschätzte Messung  $\hat{\mathbf{z}}_k := h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$  dann ebenfalls

$$\hat{\mathbf{z}}_k = h_k(\mathbf{x}'_k) + \left. \frac{\partial h_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k=\mathbf{x}'_k} \cdot (\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{x}'_k) \quad (4.108)$$

geschrieben werden. Wenn man nun Gl. (4.108) von Gl. (4.107) subtrahiert, erhält man mit dem Entwicklungspunkt  $\mathbf{x}'_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  und  $\Delta \mathbf{x}_k := \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  die Messgleichung, die dem FF zugrunde liegt:

$$\Delta \mathbf{z}_k := \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k = \underbrace{\frac{\partial h_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \bigg|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}}_{\mathbf{H}_k} \cdot \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{w}_k. \quad (4.109)$$

Von besonderer Bedeutung ist dabei wieder der differenzielle Term, der für die Filterung durch die JACOBI-Matrix  $\mathbf{H}_k$  mit  $\mathbf{H}_k := \frac{\partial h_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \bigg|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$  ausgedrückt werden kann.

Wie eingangs erwähnt, wird die eigentlich interessierende Größe nicht innerhalb des Filters bestimmt, sondern durch Rückführung des geschätzten Fehlers zur Korrektur von diesem. Es tritt augenscheinlich also eine Schleife auf, weshalb das Filter auch als *Closed-loop*-Fehlerfilter bezeichnet wird. Nach der Korrektur muss allerdings darauf geachtet werden, dass der Zustandsvektor des Filters, also der Fehler, jedes Mal, nachdem ein Messwert verarbeitet wurde, auf Null gesetzt wird, d. h.  $\Delta \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}$ . Die Propagation des Filterzustandes ist daher unnötig. Im Gegensatz dazu wird aber die Schätzfehlerkovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k$  mit Hilfe der JACOBI-Matrix  $\mathbf{F}(t)$  bzw. der daraus resultierenden Transitionsmatrix  $\Phi_k$  propagiert. Die geschätzte Messung  $\hat{\mathbf{z}}_k$ , die man für den Messeingang  $\Delta \mathbf{z}_k$  benötigt, wird ebenso außerhalb des Filters anhand der nichtlinearen Messgleichung bestimmt. Die JACOBI-Matrix  $\mathbf{H}_k$  wird hier lediglich für die Berechnung des KALMAN-Gewinns (wird auch als KALMAN-Gewichtungsmatrix bezeichnet) und die Aktualisierung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers benötigt. Die Berechnung des Terms der Innovationssequenz, der von dem propagierten Systemzustand des Filters abhängt, kann hier ebenfalls entfallen, da dieser einem Nullvektor entspricht. Die Innovationssequenz entspricht hier somit dem Messeingangsvektor  $\Delta \mathbf{z}_k$ . Die Hauptaufgabe des FF liegt damit in der fortlaufenden Bestimmung der Schätzfehlerkovarianzmatrix und der Berechnung von Korrekturgrößen für eine „Zustandsgröße“ außerhalb des Filters. Dies zeigt aber auch, dass die Leistungsfähigkeit des FF im Wesentlichen von der Qualität der Stützsensoren (Abb. 4.5) und der Datenrate abhängt, mit der diese die Stützinformationen bereitstellen können.

### Zusammenfassung

Zu Beginn dieses Kapitels wurden die Grundlagen der inertialen Navigation vorgestellt. Diese umfassen die Vorstellung der unterschiedlichen Koordinatensysteme, die bei den verschiedenen Berechnungsvorschriften eine wichtige Rolle spielen. Da die Filterung von Höheninformationen im weiteren Verlauf der Arbeit näher betrachtet wird, wurden hier zunächst die unterschiedlichen Definitionen gegeben, die in diesem Kontext eine Rolle spielen. Die Sensorinformationen, die von verschiedenen Quellen dem *INS/GPS*-Filter zur Verfügung stehen, müssen durch geeignete Transformationen zusammengeführt werden. Daher wurden sowohl die Eulerwinkel- als auch die Quaternionenparametrisierung betrachtet. Die *Strapdown*-Berechnung ist der erste Schritt im Navigationsfilter, das in Kap. 5 vorgestellt wird. Die detaillierte Abfolge wurde daher in Kap. 4.3 behandelt. Da das *GPS* die Stützinformationen für das System liefert, diese allerdings auch mit einigen Fehlern behaftet sind, wurde darauf in Abschnitt 4.4 ausführlich eingegangen. Von besonderer Bedeutung ist hier die Modellierung von zeitkorrelierten Sensorfehlern, die in Kap. 4.5 beschrieben sind. Die Grundlagen des FF, das im Rahmen dieser Arbeit angewendet wird und das auf einer KALMAN-Filterung beruht, wurden zum Abschluss des vorliegenden Kapitels behandelt.



## Kapitel 5

### Kombiniertes Navigationsfilter

Das Navigationsfilter bildet die zentrale Komponente des integrierten Navigationssystems, welches die verschiedenen Sensorquellen zusammenführt und Ausgangspunkt für die Parameterschätzung ist, die in Kap. 7 erörtert wird. Bevor die Navigationsfiltergleichungen dazu im Detail hergeleitet werden, sollen zunächst die Vorteile einer *INS/GPS*-Integration genannt werden. Es handelt sich dabei um ein schwach gekoppeltes KF. Das Filter wurde bereits in Kap. 4.6.2 eingeführt. Im Anschluss an die Herleitung wird die Korrektur der Messgrößen erörtert. Abschließend wird ein Verfahren angeführt, welches die hier verwendete Filterstruktur so ergänzt, dass Beobachtungen berücksichtigt werden können, die erst zeitlich verzögert zur Verfügung stehen. Dieses ist bei *GPS*-Messungen der Fall.

#### 5.1 Systemübersicht

In Kap. 4.5 wurde gezeigt, dass inertielle Messwerte fehlerbehaftet sind und wie sich diese Fehler modellieren lassen. Diese Fehler können dazu führen, dass man durch die ausschließliche Anwendung des Verfahrens in Kap. 4.3 zu einer ebenso fehlerhaften Navigationslösung gelangt, denn durch die zweifache Integration der Sensorwerte für eine Positionsschätzung akkumulieren sich auch die in den Messwerten noch vorhandenen Fehler. Typischerweise sind mit kostengünstigen IME Datenraten zwischen 50 Hz und 200 Hz möglich. Die Lösung eines INS ist aus diesem Grund nur kurzzeitig stabil. Im Gegensatz dazu bietet das *GPS* langzeitstabile Messungen. Die Schätzgrößen, die ein üblicher *GPS*-Empfänger mit einer Datenrate bis zu mehreren Hertz liefert, sind Geschwindigkeits- und Positionswerte, die bereits gefiltert sind. Aber auch diese Schätzwerte können trotz Vorfilterung im Empfänger weiterhin fehlerbehaftet sein (siehe Kap. 4.4).

Mit Hilfe der *GPS*-Messungen ist es möglich, die durch die IME anwachsenden Fehler so zu korrigieren, dass sie sich nicht innerhalb der Navigationslösung akkumulieren. Da aber die *GPS*-Messungen ebenso fehleranfällig und vorrangig für eine horizontale Positionsschätzung ausgelegt sind, wird in dieser Arbeit zusätzlich ein barometrisches Sensorelement eingesetzt, um die vertikale Positionsschätzung zu stützen. Abb. 5.1 zeigt das Filtersystem mit sämtlichen Teilkomponenten, die im Folgenden im Detail vorgestellt werden.<sup>5</sup> Die Parameterschätzung spielt in diesem Kapitel keine Rolle und soll daher zunächst außer Acht gelassen werden. Der Ausgang der IME, d. h. die Messgrößen nach Gl. (4.61) und (4.63), sind zusammen mit den Messungen  $\tilde{\mathbf{m}}^b$  einer Magnetfeldsensortriade in dem Vektor  $\mathbf{z}_{\text{IME}} := \left( (\tilde{\mathbf{a}}_{ib}^b)^T \quad (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b)^T \quad (\tilde{\mathbf{m}}^b)^T \right)^T$  zusammengefasst. Da die zur Stützung verwendeten *GPS*-Daten zeitlich verzögert auftreten, wird in Kap. 5.3.2 eine Möglichkeit vorgestellt, wie die Schätzungen des satellitengestützten Teilsystems weiterhin effektiv berücksichtigt werden können.

<sup>5</sup>In der Abbildung ist der Zeitindex  $k$  der Einfachheit halber nicht aufgeführt. Schätzgrößen werden hier und im Folgenden durch  $(\hat{\cdot})$  und Messgrößen durch  $(\tilde{\cdot})$  gekennzeichnet.

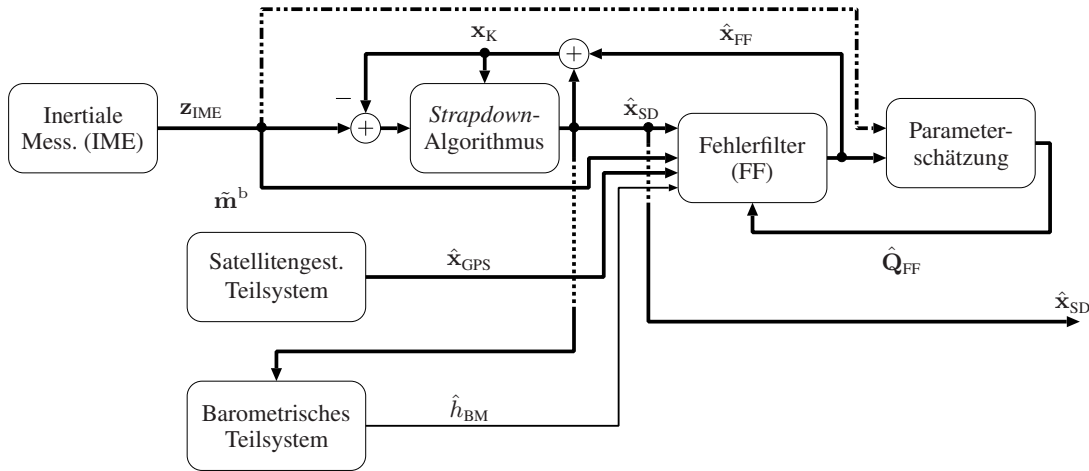


Abbildung 5.1: Gesamtsystem mit Fehlerfilterung und Parameterschätzung

Bei dem eingesetzten GPS-Empfänger der Fa. Navilock konnte auf Basis von Langzeitmessungen festgestellt werden, dass die durchschnittliche Verzögerungszeit der Daten bei 150 ms bis 250 ms liegt und damit zusätzlich kompensiert werden muss.

Der Ausgang des Strapdown-Blocks, der auch gleichzeitig der Ausgang der Gesamtfilterstruktur ist, sei nach Kap. 4.3 mit  $\hat{x}_{SD}$  gekennzeichnet, während die korrigierten Strapdown-Größen im Folgenden mit  $x_K$  bezeichnet werden sollen. Das barometrische Teilsystem, das aus weiteren Teilkomponenten besteht und in Kap. 6 ausführlich vorgestellt wird, liefert hier die vertikale Positionskomponente  $\hat{h}_{BM}$ . Auf die entsprechende Schätzgröße des satellitengestützten Teilsystems wird daher für die Fehlerfilterung verzichtet, in welche die verschiedenen Ausgangsgrößen einfließen. Dennoch werden sowohl die horizontalen als auch die vertikale Geschwindigkeitskomponente des GPS-Teilsystems aufgrund ihrer Genauigkeit als Stützgrößen  $\hat{x}_{GPS}$  verwendet. Die geschätzten Fehler in  $\hat{x}_{FF}$  werden nach einer Rückkopplung zur Korrektur verwendet, so dass am Eingang jeweils die korrigierten Positions-, Geschwindigkeits- und Lagekomponenten des vorherigen Zeitschritts anliegen. Ein besonderer Algorithmus, der die Rauschkovarianzmatrix des zeitkorrelierten Sensorrauschens zur Fehlerfilterung schätzen soll, wird im Rahmen dieses Kapitels nicht betrachtet, sondern erst in Kap. 7. Dieser nutzt die Ausgangssignale des Fehlerfilters (FF). Zwei alternative Ansätze, die in Kap. 7 ebenfalls vorgestellt werden, basieren direkt auf den Beobachtungen  $z_{IME}$  (hier durch den gestrichelten Pfeil dargestellt).

Das in Abb. 5.1 aufgeführte satellitengestützte Teilsystem besteht im Wesentlichen aus einem KF, welches die *Pseudorange*- und *Deltarange*-Messungen als Messgrößen verwendet und mit Hilfe der *Dilution of Precision* (DOP)-Werte so filtert, dass absolute Positions- und Geschwindigkeitsschätzungen zur Verfügung stehen. Für Untersuchungen mit realen Messungen standen durch Verwendung des GPS-Empfängers von Navilock mit ublox-Chipsatz [ubl] bereits die notwendigen Größen in den PUBX-Datensätzen zur Verfügung (siehe auch Anhang A.2). Dazu zählen auch die Standardabweichungen der Positionsfehler im n-Rahmen, die im Folgenden in der Messrauschkovarianzmatrix  $R_{GPS}$  zusammengefasst werden. Auf eine genaue Betrachtung der internen Struktur des Teilsystems wird hier verzichtet, da sie nicht Gegenstand der Untersuchungen war.



## 5.2 Schwach gekoppelte Fehlerfilterung

Das Filter, das neben den Biasfehlern der Gyroskope und Beschleunigungssensoren auch die Fehler in der Position, der Geschwindigkeit und der Lage der IME im Navigationsrahmen schätzt, ist ein schwach gekoppeltes FF nach Kap. 4.6.2.

### 5.2.1 Filtergleichungen

Gegenüber den üblichen KF-Varianten wie z. B. einem erweiterten KALMAN-Filter (EKF) hat der hier vorgestellte Ansatz einer *Error-State-Space*-Formulierung einige Vor- und Nachteile. Wie auch bei einem EKF basiert das verwendete LKF als Realisierung eines FF auf einer Linearisierung der System- und Messgleichungen, so dass eine Zustandsübergangsmatrix  $\Phi_{\text{FF};k}$  und eine Messmatrix  $\mathbf{H}_{\text{FF};k}$  für die Berechnungen vorliegt. Allerdings wird nach jedem Aktualisierungsschritt der Systemzustandsvektor auf einen Nullvektor gesetzt, da sich die eigentlich interessierende Größe außerhalb des Filters befindet [May82]. Dieses führt in Kombination mit den Differenzen der korrigierten Schätzungen des *Strapdown*-Algorithmus und des *GPS*-Filters als Messeingang zu einer robusten Filterstruktur [TW04], [Wen07]. Starke Nichtlinearitäten, die beispielsweise mit einem *UKF* oder *PF* berücksichtigt werden können, sind mit einem LKF nicht zu erfassen.

#### 5.2.1.1 Systemmodell

Die Fehler, die das Filter schätzen soll, sind der Positionsfehler  $\Delta \mathbf{p}_{\text{eb}}^n$ , der Geschwindigkeitsfehler  $\Delta \mathbf{v}_{\text{eb}}^n$ , der Fehler in der Orientierung  $\Delta \boldsymbol{\Upsilon}$  sowie die Biasfehler der Beschleunigungs- und Drehratensensortriade  $\Delta \mathbf{b}_a$  und  $\Delta \mathbf{b}_\omega$ . Der obere Index  $n$  zeigt an, dass es sich dabei um die Fehler im Navigationskoordinatensystem handelt. Im Propagationsschritt werden die korrigierten Messwerte der IME zusätzlich als deterministische Größen behandelt. Dieses bringt kaum Nachteile, da beim FF der Propagationsschritt lediglich der Berechnung der Schätzfehlerkovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{\text{FF};k|k-1}$  dient. Die eigentliche Navigationsaufgabe obliegt dem *Strapdown*-Algorithmus. Die Navigationslösung ist damit Teil von  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{SD}}$ . Für den Zustandsvektor des FF mit  $\mathbf{x}_{\text{FF}} \in \mathbb{R}^{15}$  gilt:

$$\mathbf{x}_{\text{FF}} := \left( \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta p_{\text{eb},n}^n \\ \Delta p_{\text{eb},e}^n \\ \Delta p_{\text{eb},d}^n \end{pmatrix}^T}_{\text{Positionsfehler } (\Delta \mathbf{p}_{\text{eb}}^n)^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta v_{\text{eb},n}^n \\ \Delta v_{\text{eb},e}^n \\ \Delta v_{\text{eb},d}^n \end{pmatrix}^T}_{\text{Geschwindigkeitsfehler } (\Delta \mathbf{v}_{\text{eb}}^n)^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix}^T}_{\text{Lagefehler } (\Delta \boldsymbol{\Upsilon})^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta b_{a,x} \\ \Delta b_{a,y} \\ \Delta b_{a,z} \end{pmatrix}^T}_{\text{Biasfehler } (\Delta \mathbf{b}_a)^T \text{ der Beschleunigungs- sensoren}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta b_{\omega,x} \\ \Delta b_{\omega,y} \\ \Delta b_{\omega,z} \end{pmatrix}^T}_{\text{Biasfehler } (\Delta \mathbf{b}_\omega)^T \text{ der Drehraten- sensoren}} \right)^T. \quad (5.1)$$

Das Systemmodell berücksichtigt demnach nicht nur die deterministischen Sensorfehler, sondern auch die Auswirkung der Fehler auf die Navigationslösung, um anschließend die notwendige Korrektur durchführen zu können. Die Differenzialgl. (4.35), (4.40) und (4.46) bis (4.48) zeigen, dass Nichtlinearitäten auftreten, die für das FF linearisiert und anschließend zeitlich diskretisiert werden müssen. Die vollständige Herleitung der für das Systemmodell benötigten Matrizen ist in Anhang B.3

aufgeführt. Sie lauten mit Vernachlässigung des Zeitindex  $t$

$$\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(1,1)} := \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{v_{\text{eb},n}^n}{R_n+h} \\ \frac{v_{\text{eb},e}^n \tan(\varphi)}{R_n+h} & 0 & \frac{v_{\text{eb},e}^n}{R_e+h} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \bigg|_{\substack{\mathbf{p}_{\text{eb}}^e = \hat{\mathbf{p}}_{\text{SD};\text{eb}}^e \\ \mathbf{v}_{\text{eb}}^n = \hat{\mathbf{v}}_{\text{SD};\text{eb}}^n}} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(1,2)} := \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,2)} := \left( \begin{array}{ccc} \frac{v_{\text{eb},d}^n}{R_n+h} & -2\Omega \sin \varphi - 2 \frac{v_{\text{eb},e}^n \tan \varphi}{R_e+h} & \frac{v_{\text{eb},n}^n}{R_n+h} \\ 2\Omega \sin \varphi + \frac{v_{\text{eb},e}^n \tan \varphi}{R_e+h} & \frac{v_{\text{eb},n}^n \tan \varphi}{R_e+h} + \frac{v_{\text{eb},d}^n}{R_e+h} & 2\Omega \cos \varphi + \frac{v_{\text{eb},e}^n}{R_e+h} \\ -2 \frac{v_{\text{eb},n}^n}{R_n+h} & -2\Omega \cos \varphi - 2 \frac{v_{\text{eb},e}^n}{R_e+h} & 0 \end{array} \right) \bigg|_{\substack{\mathbf{p}_{\text{eb}}^e = \hat{\mathbf{p}}_{\text{SD};\text{eb}}^e \\ \mathbf{v}_{\text{eb}}^n = \hat{\mathbf{v}}_{\text{SD};\text{eb}}^n}} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,3)} := -[\hat{\mathbf{a}}_{\text{ib}}^n \times] = -[\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};\text{b}}^n \hat{\mathbf{a}}_{\text{ib}}^b \times] \quad (5.5)$$

$$\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,4)} := -\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};\text{b}}^n \quad (5.6)$$

$$\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,1)} := - \left( \begin{array}{ccc} -\frac{\Omega \sin(\varphi)}{R_n+h} & 0 & \frac{v_{\text{eb},e}^n}{(R_e+h)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_{\text{eb},n}^n}{(R_n+h)^2} \\ -\frac{\Omega \cos(\varphi)}{R_n+h} - \frac{v_{\text{eb},e}^n}{(R_e+h)(R_n+h) \cos^2(\varphi)} & 0 & -\frac{v_{\text{eb},e}^n \tan(\varphi)}{(R_e+h)^2} \end{array} \right) \bigg|_{\substack{\mathbf{p}_{\text{eb}}^e = \hat{\mathbf{p}}_{\text{SD};\text{eb}}^e \\ \mathbf{v}_{\text{eb}}^n = \hat{\mathbf{v}}_{\text{SD};\text{eb}}^n}} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,2)} := - \left( \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{R_e+h} & 0 \\ -\frac{1}{R_n+h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan(\varphi)}{R_e+h} & 0 \end{array} \right) \bigg|_{\substack{\mathbf{p}_{\text{eb}}^e = \hat{\mathbf{p}}_{\text{SD};\text{eb}}^e \\ \mathbf{v}_{\text{eb}}^n = \hat{\mathbf{v}}_{\text{SD};\text{eb}}^n}} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,3)} := -[\boldsymbol{\omega}_{\text{in}}^n \times] \big|_{\substack{\mathbf{p}_{\text{eb}}^e = \hat{\mathbf{p}}_{\text{SD};\text{eb}}^e \\ \mathbf{v}_{\text{eb}}^n = \hat{\mathbf{v}}_{\text{SD};\text{eb}}^n}} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,5)} := -\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};\text{b}}^n \quad (5.10)$$

und bilden unter Einbeziehung von (4.56) und (4.59) das Differenzialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{FF}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(1,1)} & \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(1,2)} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,2)} & \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,3)} & \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,4)} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,1)} & \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,2)} & \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,3)} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,5)} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{\text{FF}}} \mathbf{x}_{\text{FF}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};\text{b}}^n & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};\text{b}}^n & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}_{\text{FF}}} \mathbf{n}_{\text{FF}}, \quad (5.11)$$

wobei  $\mathbf{n}_{\text{FF}} := (\mathbf{n}_a^T \ \mathbf{n}_\omega^T \ \mathbf{n}_{b_a}^T \ \mathbf{n}_{b_\omega}^T)^T$  ist.<sup>6</sup> In Gl. (5.5) wurde davon ausgegangen, dass es sich bei  $\hat{\mathbf{a}}_{\text{ib}}^b$  um Messwerte handelt, bei denen bereits im Rahmen der Rückkopplung eine Biaskorrektur durchgeführt wurde. Die Bias werden mit Hilfe von (5.11) nicht direkt bestimmt. Wie bei den anderen Zustandsgrößen werden hier lediglich deren Fehler berücksichtigt, welche die Größe außerhalb des

<sup>6</sup>Die Schreibweise  $[\mathbf{x} \times]$  in den Gl. (5.5) und (5.9) bedeutet hier, dass es sich um eine schiefsymmetrische Matrix handelt, die aus dem in den eckigen Klammern eingeschlossenen Vektor  $\mathbf{x}$  gebildet wird (siehe auch Anhang B.1).

Filters korrigieren. Geht man nun von der Differenzialgl. (5.11) in eine zeitdiskrete, äquivalente Darstellung über, so folgt

$$\mathbf{x}_{\text{FF};k} = \Phi_{\text{FF};k} \mathbf{x}_{\text{FF};k-1} + \mathbf{G}_{\text{FF};k} \mathbf{n}_{\text{FF};k}, \quad (5.12)$$

wobei  $\Phi_{\text{FF};k} := e^{\mathbf{F}_{\text{FF}} \Delta t} \approx \mathbf{I}_{15 \times 15} + \mathbf{F}_{\text{FF}} \Delta t$  und  $\mathbf{G}_{\text{FF};k} := \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{15 \times 15} + \Phi_{\text{FF};k}) \mathbf{G}_{\text{FF}} \Delta t \approx \mathbf{G}_{\text{FF}} \Delta t$  mit  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$  gilt (vereinfachte Annahme, dass  $\mathbf{F}_{\text{FF}}$  im Intervall  $[t_k, t_{k-1})$  zeitinvariant).

Bisher wurden bezüglich des Systemrauschvektors  $\mathbf{n}_{\text{FF}}$  keine weiteren Einschränkungen getroffen. Dieses ist jedoch für die spätere Parameterschätzung wichtig. In Kap. 4.6.1 wurden die Filtergleichungen so hergeleitet, dass ein zeitkorreliertes System- und Messrauschen angenommen werden kann, ohne dass der Systemzustand um genau diese Komponenten erweitert werden muss. Voraussetzung dafür ist daher eine entsprechende Gleichung für  $\mathbf{n}_{\text{FF}}$ . Diese wird hier zu

$$\mathbf{n}_{\text{FF};k} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_a \\ \mathbf{n}_\omega \\ \mathbf{n}_{b_a} \\ \mathbf{n}_{b_\omega} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\text{FF};n_a} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{D}_{\text{FF};n_\omega} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_a \\ \mathbf{n}_\omega \\ \mathbf{n}_{b_a} \\ \mathbf{n}_{b_\omega} \end{pmatrix}_{k-1} + \Gamma_{\text{FF};n} \boldsymbol{\eta}_{\text{FF};k} \quad (5.13)$$

angenommen, wobei  $\Gamma_{\text{FF};n} := \mathbf{I}_{12 \times 12}$  und  $\boldsymbol{\eta}_{\text{FF};k} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_{\text{FF};k}; \mathbf{0}_{12 \times 1}, \mathbf{Q}_{\text{FF};k})$ . In Gl. (5.13) wird das biastreibende Rauschen als zeitlich unkorreliert angenommen. Zur Bestimmung von  $\mathbf{D}_{\text{FF};n_a}$  und  $\mathbf{D}_{\text{FF};n_\omega}$  mit Hilfe von Gl. (4.73) sei erwähnt, dass bei Verwendung von Trainingsdaten die „Trajektoriendynamik“ im Vorfeld nicht vollständig eliminiert werden kann (unter „Trajektoriendynamik“ werden hier die Positionen und Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten zusammengefasst, die für die ideale Navigationslösung verantwortlich sind). Die Trainingsdaten sollten jedoch auch zeitlich korrelierte Messungen enthalten, weswegen vorrangig auf Messungen einer ruhenden (mit Vibrationen durch einen Motor) IME zurückgegriffen wurde. Die IME wird in Kap. 8 noch näher untersucht. Nach Auswertung der Daten folgte für die Zustandsübergangsmatrix die Approximation  $\mathbf{D}_{\text{FF};n_a} = \mathbf{D}_{\text{FF};n_\omega} \approx 0,7 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}$ . Aus dieser ergab sich mit  $f_{\text{IME}} = 100$  Hz wiederum eine Korrelationszeit von  $t_{\text{IME};c} \approx 2,8 \cdot 10^{-2}$  s. Auf diese Werte wurde auch bei der Generierung der simulierten Inertialsensordaten zurückgegriffen. Damit wird diese Zustandsübergangsmatrix als konstant für den Filterprozess angenommen, was aufgrund der Qualität der Sensordaten der IME gerechtfertigt ist. Die Rauschdynamik, die sich durch Modellierungsungenauigkeiten, Vibrationen oder das inhärente Rauschen erhöht oder verringert, soll der als zeitvariant modellierten Rauschkovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\text{FF};k}$  zugeschrieben werden. Dennoch sei an dieser Stelle der Vollständigkeit halber darauf hingewiesen, dass hier sowohl zeitvariante Zustandsübergangsmatrizen als auch zeitkorrelierte Prozesse höherer Ordnung möglich wären. Dies stand jedoch nicht im Fokus der vorliegenden Arbeit.

### 5.2.1.2 Messmodell

Der Zusammenhang zwischen den von einem GPS-Empfänger gelieferten Schätzwerten  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{GPS}}$  und dem zu schätzenden Systemzustand  $\mathbf{x}_{\text{FF}}$  in Abb. 5.1, der die INS-Lösung korrigiert, ist nichtlinear. Um das in Kap. 4.6.2 beschriebene Filter einsetzen zu können, muss auch die benötigte Messmatrix durch Linearisierung gewonnen werden. Für die folgenden Herleitungen wird wieder auf eine Angabe des Zeitindex  $t$  bzw.  $k$  verzichtet. Bei der Implementierung der folgenden Gleichungen müssen aufgrund der unterschiedlichen Sensorabstraten einige Details beachtet werden, die jedoch erst in Kap. 5.3

diskutiert werden. Der Messvektor sei im Folgenden durch

$$\mathbf{z}_{\text{FF}} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{\text{FF};p}^T & \mathbf{z}_{\text{FF};v}^T & \mathbf{z}_{\text{FF};m}^T \end{pmatrix}^T \quad (5.14)$$

gegeben, wobei  $\mathbf{z}_{\text{FF};p}$  Positionsmessungen,  $\mathbf{z}_{\text{FF};v}$  Geschwindigkeitsmessungen und  $\mathbf{z}_{\text{FF};m}$  Messungen von Magnetometern enthält.

**Positionsmessung** Am Ausgang des *GPS*-Empfängers stehen Positionsschätzungen zur Verfügung, die als Breiten- und Längengrad  $\hat{\varphi}_{\text{GPS}}$ ,  $\hat{\lambda}_{\text{GPS}}$  sowie Höhe  $\hat{h}_{\text{GPS}}$  über dem Erdellipsoid angegeben sind. Die Höhenmessung soll jedoch wahlweise auch durch die Schätzgröße  $\hat{h}_{\text{BM}}$  des in Kap. 6 beschriebenen Teilsystems ersetzt werden können, so dass für die Differenzberechnung am Eingang des FF der Vektor  $\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{\text{GPS}} & \hat{\lambda}_{\text{GPS}} & \hat{h}_{\text{GB}} \end{pmatrix}^T$  mit  $\hat{h}_{\text{GB}} \in \{\hat{h}_{\text{BM}}, \hat{h}_{\text{GPS}}\}$  zur Verfügung steht. Aus numerischen Gründen wird der Differenzvektor  $\mathbf{z}_{\text{FF};p}$  jedoch nicht im e-Rahmen angegeben, sondern im n-Rahmen:

$$\mathbf{z}_{\text{FF};p} := \begin{pmatrix} (R_n + \hat{h}_{\text{SD}}) \cdot (\hat{\varphi}_{\text{GPS}} - \hat{\varphi}_{\text{SD}}) \\ (R_e + \hat{h}_{\text{SD}}) \cdot \cos(\hat{\varphi}_{\text{SD}}) \cdot (\hat{\lambda}_{\text{GPS}} - \hat{\lambda}_{\text{SD}}) \\ -(\hat{h}_{\text{GB}} - \hat{h}_{\text{SD}}) \end{pmatrix} - \hat{\mathbf{l}}_{\text{GPS}}^n, \quad (5.15)$$

wobei  $\hat{\varphi}_{\text{SD}}$ ,  $\hat{\lambda}_{\text{SD}}$  und  $\hat{h}_{\text{SD}}$  die korrigierten *Strapdown*-Positionsponenten sind und

$$\hat{\mathbf{l}}_{\text{GPS}}^n = \hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n \mathbf{l}_{\text{GPS}}^b \quad (5.16)$$

ist, wobei  $\mathbf{l}_{\text{GPS}}^b$  der Richtungsvektor zwischen der IME und der *GPS*-Antenne ist. Um den Zusammenhang zwischen dem Differenzvektor in Gl. (5.15) und dem Systemzustandsvektor  $\mathbf{x}_{\text{FF}}$  zu erhalten, wird hier und bei den folgenden Betrachtungen angenommen, dass sich die idealen Positionen von Barometer und *GPS*-Antenne nicht unterscheiden und im n-Rahmen durch  $\mathbf{p}_{\text{GPS}}^n$  angegeben sind. Zusätzlich sei  $\mathbf{p}_{\text{eb}}^n$  die Position der IME. Ausgehend von dem Zusammenhang

$$\mathbf{p}_{\text{GPS}}^n = \mathbf{p}_{\text{eb}}^n + \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{\text{GPS}}^b \quad (5.17)$$

lässt sich mit Hilfe von Gl. (B.27), (B.28) und (5.16) die Gleichung

$$\mathbf{p}_{\text{GPS}}^n = \mathbf{p}_{\text{eb}}^n + \hat{\mathbf{l}}_{\text{GPS}}^n - \left[ \hat{\mathbf{l}}_{\text{GPS}}^n \times \right] \boldsymbol{\Upsilon} \quad (5.18)$$

herleiten, wobei hier der Zusammenhang  $\boldsymbol{\Psi} \hat{\mathbf{l}}_{\text{GPS}}^n = - \left[ \hat{\mathbf{l}}_{\text{GPS}}^n \times \right] \boldsymbol{\Upsilon}$  ausgenutzt wurde (siehe auch die mathematischen Zusammenhänge in Anhang B.1). Durch (4.109) wird deutlich, dass nun in

$$\mathbf{z}_{\text{FF};p} = \hat{\mathbf{p}}_{\text{GPS}}^n - \hat{\mathbf{p}}_{\text{SD};eb}^n = \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{p}_{\text{GPS}}^n}{\partial \mathbf{p}_{\text{eb}}^n} \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{\text{GPS}}^n}{\partial \mathbf{v}_{\text{eb}}^n} \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{\text{GPS}}^n}{\partial \boldsymbol{\Upsilon}} \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{\text{GPS}}^n}{\partial \mathbf{b}_a} \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{\text{GPS}}^n}{\partial \mathbf{b}_\omega} \right)}_{\mathbf{H}_{\text{FF};p}} \mathbf{x}_{\text{FF}} + \mathbf{M}_{\text{FF};p} \mathbf{w}_{\text{FF};p} \quad (5.19)$$

der Teil der gesamten JACOBI-Matrix  $\mathbf{H}_{\text{FF}}$ , der mit der Positionsmessung zusammenhängt (hier durch  $\mathbf{H}_{\text{FF};p}$  gekennzeichnet), durch die jeweiligen Differenziationen gewonnen wird. Der Vektor  $\mathbf{w}_{\text{FF};p}$  sei hier der entsprechende Anteil des zeitkorrelierten Messrauschvektors  $\mathbf{w}_{\text{FF}}$  und  $\mathbf{M}_{\text{FF};p} := \mathbf{I}_{3 \times 3}$ . Für  $\mathbf{H}_{\text{FF};p}$  folgt

$$\mathbf{H}_{\text{FF};p} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & - \left[ \hat{\mathbf{l}}_{\text{GPS}}^n \times \right] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Bei den letzten Betrachtungen wurde davon ausgegangen, dass die Höhenmessungen eines barometrischen Sensors und des *GPS*-Empfängers gleichzeitig vorliegen.

**Geschwindigkeitsmessung** Da sich der *GPS*-Empfänger und die IME üblicherweise nicht am selben Ort befinden, sondern mehrere Zentimeter voneinander entfernt sind, unterscheiden sich auch die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_{\text{eb}}^n$  und  $\mathbf{v}_{\text{GPS}}^n$  geringfügig voneinander. Mit der Annahme, dass die Erddrehrate im Vergleich zu den Drehbewegungen des Fahrzeugs vernachlässigbar klein ist, lässt sich die Approximation

$$\mathbf{v}_{\text{GPS}}^n \approx \mathbf{v}_{\text{eb}}^n + \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{\text{ib}}^b \times \mathbf{l}_{\text{GPS}}^b) \quad (5.21)$$

aufstellen. Als Differenzgeschwindigkeitsvektor lässt sich daher

$$\mathbf{z}_{\text{FF};v} := \hat{\mathbf{v}}_{\text{GPS}}^n - \hat{\mathbf{v}}_{\text{SD};\text{eb}}^n = \mathbf{H}_{\text{FF};v} \mathbf{x}_{\text{FF}} + \mathbf{M}_{\text{FF};v} \mathbf{w}_{\text{FF};v} \quad (5.22)$$

mit  $\mathbf{M}_{\text{FF};v} := \mathbf{I}_{3 \times 3}$  schreiben. Des Weiteren ist für (5.21) durch Verwendung von (B.27), (B.28) und unter Berücksichtigung von (4.57) mit wenigen Vereinfachungen die Näherung

$$\mathbf{v}_{\text{GPS}}^n \approx \mathbf{v}_{\text{eb}}^n + \hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ib}}^b \times \mathbf{l}_{\text{GPS}}^b + \hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n \left[ \mathbf{l}_{\text{GPS}}^b \times \right] \mathbf{b}_\omega - \left[ \hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{ib}}^b \mathbf{l}_{\text{GPS}}^b \times \right] \boldsymbol{\Upsilon} \quad (5.23)$$

möglich, die ebenso nach den einzelnen Komponentenvektoren in  $\mathbf{x}_{\text{FF}}$  differenziert werden muss, um den Teil  $\mathbf{H}_{\text{FF};v}$  der JACOBI-Matrix zu erhalten, der von den Geschwindigkeitsmessungen abhängt. Dabei wurde auch  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{ib}}^b = [\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ib}}^b \times]$  ausgenutzt. Für  $\mathbf{H}_{\text{FF};v}$  erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{FF};v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{GPS}}^n}{\partial \mathbf{p}_{\text{eb}}^n} & \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{GPS}}^n}{\partial \mathbf{v}_{\text{eb}}^n} & \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{GPS}}^n}{\partial \boldsymbol{\Upsilon}} & \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{GPS}}^n}{\partial \mathbf{b}_a} & \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{GPS}}^n}{\partial \mathbf{b}_\omega} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & - \left[ \hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{ib}}^b \mathbf{l}_{\text{GPS}}^b \times \right] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n \left[ \mathbf{l}_{\text{GPS}}^b \times \right] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

**Magnetfeldmessung** Bei den bisherigen Betrachtungen zur JACOBI-Matrix, die durch  $\mathbf{H}_{\text{FF}} = (\mathbf{H}_{\text{FF};p}^T \mathbf{H}_{\text{FF};v}^T)^T$  gegeben ist, wenn lediglich *GPS*-Schätzungen oder barometrische Höheninformationen ohne explizite Richtungsinformationen vorliegen, fällt auf, dass eine Abhängigkeit zwischen diesen und der Lage nur dann besteht, wenn  $\mathbf{l}_{\text{GPS}}^b \neq \mathbf{0}_{3 \times 1}$  gilt. Ansonsten würden die Messungen der Position auch nur auf die entsprechenden Komponenten des Systemzustandsvektors Einfluss haben. Gleiches gilt für die Geschwindigkeit. In dem Fall würde die Lage nur durch den in Gl. (5.11) beschriebenen Zusammenhang indirekt beeinflusst werden.

Daher soll im Folgenden durch Verwendung von Erdmagnetfeldmessungen eine weitere Orientierungsbestimmung betrachtet werden. Durch bauliche Einrichtungen wie z. B. Stahlbrücken können Magnetfeldmessungen zwar negativ beeinflusst werden [YF03], die Auswirkungen auf die Navigationslösung hängen allerdings auch von der Güte der Sensoren ab. Selbst wenn durch Störungen ein Gierwinkelfehler von bis zu  $15^\circ$  resultieren würde, so würde die Navigationslösung nur unwesentlich beeinträchtigt werden [Wen07]. Alternativ wäre eine Gierwinkelberechnung auch auf Basis der Geschwindigkeitsdaten des *GPS*-Empfängers möglich, jedoch muss dazu die Ausrichtung der IME perfekt bekannt sein. Des Weiteren könnten die Unterschiede beim Vorwärts- und Rückwärtsfahren zu Ungenauigkeiten führen.

Der allgemeine Zusammenhang zwischen dem lokalen Magnetfeld in Koordinaten des b-Rahmens und dem Feld in Koordinaten des n-Rahmens ist durch

$$\mathbf{m}^b = (\mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{m}^n \quad (5.25)$$

gegeben (siehe auch Gl. (F.10)). Unter der Voraussetzung, dass die RKM auf den *Strapdown*-Berechnungen beruht, erhält man durch Einsetzen von (B.27) bei vorhandenen Magnetfeldmessungen

$\tilde{\mathbf{m}}^b$  die Gleichung

$$\mathbf{z}_{\text{FF},m} = \tilde{\mathbf{m}}^b - (\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n)^T \mathbf{m}^n = \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{m}^b}{\partial \mathbf{p}_{\text{eb}}^n} \quad \frac{\partial \mathbf{m}^b}{\partial \mathbf{v}_{\text{eb}}^n} \quad \frac{\partial \mathbf{m}^b}{\partial \mathbf{Y}} \quad \frac{\partial \mathbf{m}^b}{\partial \mathbf{b}_a} \quad \frac{\partial \mathbf{m}^b}{\partial \mathbf{b}_w} \right)}_{\mathbf{H}_{\text{FF};m}} \mathbf{x}_{\text{FF}} + \mathbf{M}_{\text{FF};m} \mathbf{w}_{\text{FF};m}. \quad (5.26)$$

Während hier  $\frac{\partial \mathbf{m}^b}{\partial \mathbf{Y}} = (\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n)^T [\mathbf{m}^n \times]$  gilt, entsprechen die anderen Terme einer  $[3 \times 3]$ -Nullmatrix. Außerdem sei  $\mathbf{R}_m := E[\mathbf{w}_{\text{FF};m} \mathbf{w}_{\text{FF};m}^T]$  die Kovarianzmatrix des als mittelwertfrei angenommenen weißen GAUSS-verteilten Rauschvektors  $\mathbf{w}_{\text{FF};m}$  und  $\mathbf{M}_{\text{FF};m} := \mathbf{I}_{3 \times 3}$ .

Das vollständige Messmodell lautet hier nun für den zeitdiskreten Fall zum Zeitpunkt  $k$ :

$$\mathbf{z}_{\text{FF};k} = \mathbf{H}_{\text{FF};k} \mathbf{x}_{\text{FF};k} + \mathbf{M}_{\text{FF}} \mathbf{w}_{\text{FF};k}, \quad (5.27)$$

wobei  $\mathbf{H}_{\text{FF};k} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\text{FF};p,k} \\ \mathbf{H}_{\text{FF};v,k} \\ \mathbf{H}_{\text{FF};m,k} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{M}_{\text{FF}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\text{FF};p} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}_{\text{FF};v} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}_{\text{FF};m} \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{w}_{\text{FF};k} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\text{FF};p,k} \\ \mathbf{w}_{\text{FF};v,k} \\ \mathbf{w}_{\text{FF};m,k} \end{pmatrix}$  ist.

Die Matrix  $\mathbf{M}_{\text{FF}}$  sei also konstant.

Analog zum zeitkorrelierten Systemrauschen soll auch beim Modellieren des Messrauschens vorgegangen werden. Die Annahme zeitkorrelierten Messrauschens ist notwendig, da die GPS-Daten, die zum Stützen des FF verwendet werden, selbst aus einem KF stammen. Selbst bei dem im Rahmen dieser Arbeit verwendeten ublox-Empfänger stehen aber lediglich Informationen über den Positionsschätzfehler des Empfängers in Form von Standardabweichungen für die horizontale Ebene und die vertikale Komponente zur Verfügung. Deshalb müssen die übrigen Parameter anhand von Trainingsdaten und den Angaben des Herstellers abgeschätzt werden [u-b09]. Das Modell für das zeitkorrelierte Messrauschen sei hier zu

$$\mathbf{w}_{\text{FF};k} = \mathbf{D}_{\text{FF};w} \mathbf{w}_{\text{FF};k-1} + \mathbf{\Gamma}_{\text{FF};w} \boldsymbol{\nu}_{\text{FF};k} \quad (5.28)$$

gewählt, wobei  $\boldsymbol{\nu}_{\text{FF};k} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_{\text{FF};k}; \mathbf{0}_{9 \times 1}, \mathbf{R}_{\text{FF}})$  mit der Diagonalmatrix  $\mathbf{R}_{\text{FF}}$  und  $\mathbf{\Gamma}_{\text{FF};w} := \mathbf{I}_{9 \times 9}$  ist. Im Rahmen von Ruhemessungen über einen Zeitraum von 60 h konnten die in Tab. 5.1 angegebenen Werte für die Standardabweichungen der Empfängerdaten ermittelt werden. In der Annahme, dass

	$\sigma_{\text{GPS};p}$ (berechnet)	$\sigma_{\text{GPS};p}$ (gemittelte Empfängerausgabe)	$\sigma_{\text{GPS};v}$ (berechnet)
<b>Horizontal</b>	4,69 m	4,55 m	0,13 m/s
<b>Vertikal</b>	7,34 m	4,53 m	0,12 m/s

Tabelle 5.1: Standardabweichungen von GPS-Messungen

diese Werte den Standardabweichungen von  $\mathbf{w}_{\text{FF};p,k}$  bzw.  $\mathbf{w}_{\text{FF};v,k}$  entsprechen und damit Elemente der Matrix  $\mathbf{R}_{\text{GPS}}$  sind, lässt sich über die ML-Schätzung

$$\mathbf{R}_{\text{FF}} = E[\mathbf{w}_{\text{FF};k} \mathbf{w}_{\text{FF};k}^T] \cdot (\mathbf{I}_{9 \times 9} - \mathbf{D}_{\text{FF};w}^2) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\text{GPS}} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{R}_m \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{I}_{9 \times 9} - \mathbf{D}_{\text{FF};w}^2) \quad (5.29)$$

die Kovarianzmatrix des treibenden Rauschens in (5.28) bestimmen. Dazu muss jedoch  $\mathbf{D}_{\text{FF};w}$  bekannt sein. In [TW04] wird angegeben, dass die Korrelationszeit von Positionsmessungen eines GPS-Empfängers bei ca. 10 s, die von Geschwindigkeitsmessungen üblicherweise bei ca. 1 s liegt



(siehe Gl. (4.67)). Diese Werte sind auch in [u-b09] für den u-blox5-Chipsatz zu finden. Bei den Magnetometermessungen wird hier von zeitlich unkorrelierten Daten ausgegangen. Die in Tab. 5.1 aufgeführten Standardabweichungen für die Positionsschätzungen liegen über den Angaben des Herstellers, dessen Wert für die horizontale Ebene nach Tab. 4.3 beispielsweise ca. 2 m beträgt. Bei anderen Empfängern mit geringerer Abtastrate treten durchaus höhere Standardabweichungen auf.

Ein Problem, das noch verbleibt, sind die unterschiedlichen Abtastraten der Messsysteme im Vergleich zu der Rate, mit der das FF arbeitet. Auch wenn keine Messung vorhanden ist, soll das Filter aufgrund der späteren Parameterschätzung zu diesen Zeitpunkten eine Prädiktion durchführen. Bei Betrachtung von (4.93) in Kap. 4.6.1 fällt auf, dass die Berechnung von  $\mathbf{P}_{xw,k|k-1}$  mit der Matrix  $\mathbf{D}_{\text{FF};w}$  unter der Voraussetzung geführt wird, dass die Rate, mit der die GPS-Daten eintreffen, mit der Datenrate des Filters übereinstimmt. Dies gilt hier nicht. Aus diesem Grund können die Gl. (B.10) bis (B.25), die für das FF benötigt werden, nicht uneingeschränkt verwendet werden. Die IME-Daten stehen mit 100 Hz zur Verfügung, während die GPS-Signale mit 4 Hz und die barometrischen Sensorsignale mit 10 Hz bereitgestellt werden. Wenn keine Stützung erfolgen kann, existiert also auch keine Korrelation zwischen  $\mathbf{x}_{\text{FF}}$  und  $\mathbf{w}_{\text{FF}}$ . Sowohl Gl. (B.13) als auch (B.16) dürfen daher nur bei Verfügung der entsprechenden Messwerte berechnet werden.

### 5.2.2 Korrektur des externen Systemzustandes

Sind gemäß der vorigen Betrachtungen die Fehler in der Navigationslösung bestimmt worden, so werden die Ausgangsgrößen des *Strapdown*-Algorithmus  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{SD}}$  mit  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{FF}}$  zu  $\mathbf{x}_{\text{K}}$  korrigiert. Für die korrigierte Position in erdfesten Koordinaten resultiert

$$\varphi_{\text{K};k} = \hat{\varphi}_{\text{SD};k} + \frac{\Delta \hat{p}_{\text{eb},n,k}^n}{R_n(\hat{\varphi}_{\text{SD};k}) + \hat{h}_{\text{SD};k}} \quad (5.30)$$

$$\lambda_{\text{K};k} = \hat{\lambda}_{\text{SD};k} + \frac{\Delta \hat{p}_{\text{eb},e,k}^n}{\left(R_e(\hat{\varphi}_{\text{SD};k}) + \hat{h}_{\text{SD};k}\right) \cos(\hat{\varphi}_{\text{SD};k})} \quad (5.31)$$

$$h_{\text{K};k} = \hat{h}_{\text{SD};k} - \Delta \hat{p}_{\text{eb},d,k}^n. \quad (5.32)$$

Für die Korrektur der Position und der Geschwindigkeit im n-Rahmen folgt

$$\mathbf{p}_{\text{K;eb},k}^n = \hat{\mathbf{p}}_{\text{SD;eb},k}^n + \Delta \hat{\mathbf{p}}_{\text{eb},k}^n \quad (5.33)$$

$$\mathbf{v}_{\text{K;eb},k}^n = \hat{\mathbf{v}}_{\text{SD;eb},k}^n + \Delta \hat{\mathbf{v}}_{\text{eb},k}^n. \quad (5.34)$$

Aus den Orientierungsfehlern muss zunächst ein Korrekturquaternionenvektor  $\check{\mathbf{r}}_k$  wie in (4.38) errechnet werden, allerdings mit Hilfe von  $\Delta \hat{\mathbf{Y}}_k$  an Stelle von  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_k$ . Erst dann kann die Quaternionenmultiplikation

$$\check{\mathbf{q}}_{\text{K;b},k}^n = \check{\mathbf{r}}_k \circ \hat{\mathbf{q}}_{\text{SD;b},k}^n \quad (5.35)$$

durchgeführt werden. Die Berechnung in (5.35) ist äquivalent zu dem Zusammenhang in Gl. (B.27), wenn diese entsprechend  $\mathbf{C}_{\text{K;b}}^n = (\mathbf{I}_{3 \times 3} + \boldsymbol{\Psi}) \hat{\mathbf{C}}_{\text{SD;b}}^n$  umgestellt wird. Dabei wird die Schätzung  $\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD;b}}^n$  mittels  $\mathbf{I}_{3 \times 3} + \boldsymbol{\Psi}$  korrigiert. Das entsprechende Korrekturquaternion auf der rechten Seite in (5.35) ist aus diesem Grund vorangestellt und damit umgekehrt wie in (B.27). Damit die korrigierten Terme im nächsten Schritt der *Strapdown*-Berechnung zur Verfügung stehen, müssen nach

Anwendung von (5.30) – (5.35) die folgenden Zuweisungen erfolgen:

$$\varphi_{SD;k} \leftarrow \varphi_{K;k} \quad (5.36)$$

$$\lambda_{SD;k} \leftarrow \lambda_{K;k} \quad (5.37)$$

$$h_{SD;k} \leftarrow h_{K;k} \quad (5.38)$$

$$\mathbf{p}_{SD;eb,k}^n \leftarrow \mathbf{p}_{K;eb,k}^n \quad (5.39)$$

$$\mathbf{v}_{SD;eb,k}^n \leftarrow \mathbf{v}_{K;eb,k}^n \quad (5.40)$$

$$\check{\mathbf{q}}_{SD;b,k}^n \leftarrow \check{\mathbf{q}}_{K;b,k}^n. \quad (5.41)$$

Die Korrektur der Inertialsensorbias durch

$$\mathbf{b}_{K;a,k} = \mathbf{b}_{K;a,k-1} + \Delta \hat{\mathbf{b}}_{a,k} \quad (5.42)$$

$$\mathbf{b}_{K;\omega,k} = \mathbf{b}_{K;\omega,k-1} + \Delta \hat{\mathbf{b}}_{\omega,k} \quad (5.43)$$

ist wichtig, um dem *Strapdown*-Algorithmus im nächsten Zeitschritt annähernd biasfreie Messwerte zur Verfügung stellen zu können, so dass im Vorfeld der nächsten *Strapdown*-Berechnung die Zuweisung  $\tilde{\mathbf{a}}_{ib,k+1}^b \leftarrow \tilde{\mathbf{a}}_{ib,k+1}^b - \mathbf{b}_{K;a,k}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib,k+1}^b \leftarrow \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib,k+1}^b - \mathbf{b}_{K;\omega,k}$  vorgenommen werden kann. Auch hier wurde der Einfachheit halber angenommen, dass eine Korrektur zu jedem Zeitpunkt  $k$  durch eine vorhandene Stützung möglich ist. Dies hängt jedoch von den Abtastraten der einzelnen Sensoren ab.

## 5.3 Implementierungsaspekte

### 5.3.1 Ablauf der Filterung

Aufgrund der unterschiedlichen Abtastraten müssen einige Details bei der Realisierung des Filteralgorithmus beachtet werden. Der grobe Ablauf der Filterung ist nochmals in Abb. 5.2 skizziert. Da die Sensoren zwar mit einer festen Abtastfrequenz, aber nicht vollständig synchron arbeiten, kann auch das barometrische Teilsystem nicht synchron zum restlichen System arbeiten: Das zeitliche Intervall zwischen barometrischen Messwerten und denen eines *GPS*-Empfängers variiert fortlaufend. Aus diesem Grund wurde das Filtersystem so entworfen, dass der *Strapdown*-Algorithmus mit der IME-Datenrate von  $f_{\text{IME}} = 100$  Hz arbeitet. Das nachgeschaltete FF arbeitet ebenso mit der IME-Datenrate, welches die maximale Datenrate in dem System ist. Sobald eine *GPS*-Messung zur Stützung eintrifft, wird ein Prädiktions- sowie Messschritt durchgeführt. Andernfalls wird nur der Prädiktionsschritt des FF durchgeführt. Die maximale Rate, mit der Messdaten verarbeitet werden, ist die *GPS*-Datenrate. Hier wird angenommen, dass  $f_{\text{IME}} = k_1 \cdot f_{\text{BM}} = k_2 \cdot f_{\text{GPS}}$  gilt, wobei  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ . Dabei ist  $f_{\text{GPS}}$  die Frequenz, mit der die *GPS*-Daten vom Empfänger zur Verfügung gestellt werden und  $f_{\text{BM}}$  die Abtastfrequenz eines barometrischen Sensors.

Nach den *Strapdown*-Berechnungen wird zunächst die Verfügbarkeit der *GPS*-Daten überprüft. Anschließend wird geprüft, ob barometrische Stützinformationen vorliegen. Das FF verarbeitet die vorhandenen Informationen und korrigiert damit die Berechnungen im *Strapdown*-Block sowie die Inertialbias am Eingang. Liegen ausschließlich *GPS*-Daten vor, so wird zusätzlich die letzte gültige Höhenschätzung des barometrischen Teilsystems genutzt, damit Gl. (5.19) weiterhin ohne Modifikation verwendet werden kann. Eine alternative Stützung durch die Höheninformation des *GPS*-Empfängers würde ansonsten eine fortlaufende Anpassung der Messrauschkovarianzmatrix erfordern. Da  $\hat{h}_{\text{BM}}$  mit einer ausreichend hohen Datenrate zur Verfügung steht, ist die genannte approximative

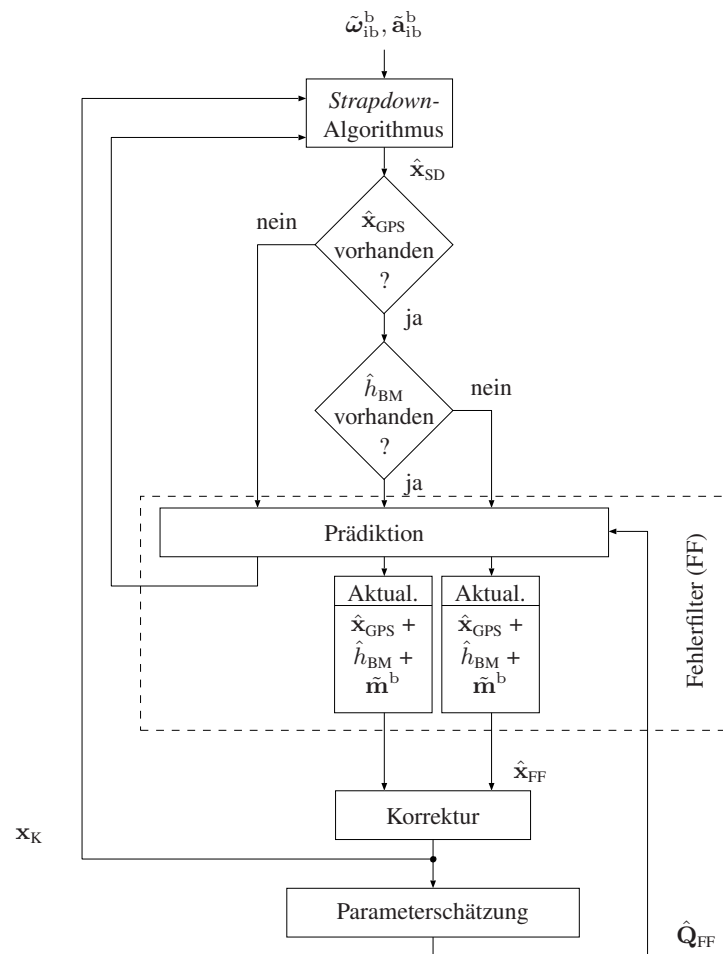


Abbildung 5.2: Ablauf der Filterung im Navigationssystem

Lösung hinreichend und es wurde auf weitere Modifikationen verzichtet. Die Magnetfeldsensordaten werden ebenfalls nur dann verwendet, wenn *GPS*-Daten zur Stützung vorliegen. Eine alleinige Lagestützung ohne entsprechende Positions- und Geschwindigkeitsinformationen findet damit nicht statt.

### 5.3.2 Zeitlich verzögerte Satellitenmessungen

Ein grundlegendes Problem, das auftritt, wenn reale *GPS*-Daten verwendet werden, ist, dass der Zeitpunkt, an dem die Daten dem Nutzer bzw. dem Navigationssystem zur Verfügung stehen, und der Zeitpunkt, zu dem die Positionsschätzung durchgeführt wurde, nicht übereinstimmen (siehe Abb. 5.3). Diese Verzögerungen können wenige Nanosekunden bis zu mehrere Millisekunden betragen. Die Dauer richtet sich im Wesentlichen nach den Fehlerquellen, die das *GPS*-Signal beeinflussen können und bereits in Kap. 4.4 erörtert wurden. Ist die Verzögerung sehr groß, kann das zu ungenauen Ergebnissen in der Filterung führen, denn das FF liefert ebenso fehlerhafte Schätzwerte für die Bias-, Lage- und Positionskorrektur. Das Filter würde zeitlich nicht zueinander passende Inertialsensordaten und *GPS*-Daten verarbeiten. Die Kompensation der zeitlichen Differenz der Sensorsignale kann durch Anpassung der KALMAN-Filtergleichungen durchgeführt werden. Eine Möglichkeit wäre die Erweiterung des Systemmodells, so dass eine Filtergleichung zwischen der aktuellen Messung und

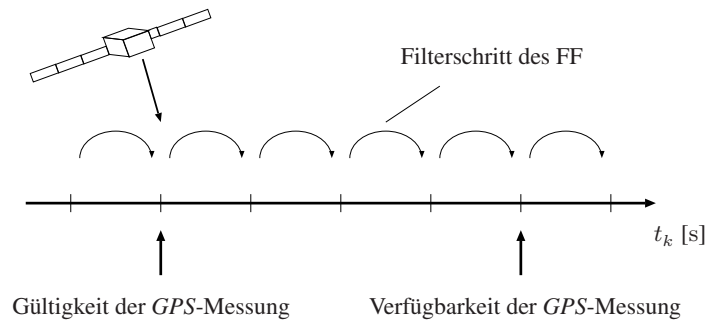


Abbildung 5.3: Verzögert verfügbare GPS-Messungen [Wen07]

dem Systemzustand hergestellt werden kann. Dies hat allerdings den Nachteil, dass sich dadurch die Dimension des Zustandsvektors erhöht, was einen erhöhten Rechenaufwand bedeutet. Diese Lösung wird daher in der Praxis meist vermieden [Wen07]. Alternativ soll hier die Methode aus [LARP98] eingesetzt werden, bei welcher der übliche Ablauf der Filterung nicht verändert werden muss. Es können sogar während des Verzögerungszeitraumes einer GPS-Messung weiterhin Prädiktions- und Messschritte durchgeführt werden. Das Konzept zum Verfahren aus [LARP98] wird hier jedoch für den Fall von zeitlich korreliertem Messrauschen erweitert. Die vollständige Herleitung der benötigten Gleichungen kann dem Anhang C entnommen werden.

Das Konzept in [LARP98] basiert auf der Berechnung eines extrapolierten Messvektors  $\mathbf{z}_{\text{FF}}^* := (\mathbf{z}_{\text{FF};p}^T \ \mathbf{z}_{\text{FF};v}^T \ \mathbf{z}_{\text{FF};m}^T)^{T*}$ , der zu einem Residuum  $\boldsymbol{\varepsilon}_k^*$  führt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^* := \mathbf{z}_{\text{FF};k}^* - \mathbf{H}_{\text{FF};k} \hat{\mathbf{x}}_{\text{FF};k|k-1}. \quad (5.44)$$

Dieses entspricht dem Vektor, der berechnet werden könnte, wenn die Messung zum Gültigkeitszeitpunkt hätte verarbeitet werden können. Ist  $\mathbf{z}_{\text{FF};k}^{k-i'}$  der Messvektor, der zum Zeitpunkt  $k-i'$  gültig war, aber erst zum Zeitpunkt  $k$  verfügbar ist, so führt dieser jedoch zu einem Residuum

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k-i'} := \mathbf{z}_{\text{FF};k}^{k-i'} - \mathbf{H}_{\text{FF};k-i'} \hat{\mathbf{x}}_{\text{FF};k-i'|k-i'-1}. \quad (5.45)$$

Dabei wird mit

$$\mathbf{w}_{\text{FF};k-i'} = \mathbf{D}_{\text{FF};w} \mathbf{w}_{\text{FF};k-i'-1} + \mathbf{\Gamma}_{\text{FF};w} \boldsymbol{\nu}_{\text{FF};k-i'} \quad (5.46)$$

und  $\boldsymbol{\nu}_{\text{FF};k-i'} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_{\text{FF};k-i'}; \mathbf{0}_{9 \times 1}, \mathbf{R}_{\text{FF}})$  von dem Zusammenhang

$$\mathbf{z}_{\text{FF};k}^{k-i'} = \mathbf{H}_{\text{FF};k-i'} \mathbf{x}_{\text{FF};k-i'} + \mathbf{M}_{\text{FF}} \mathbf{w}_{\text{FF};k-i'} \quad (5.47)$$

ausgegangen. Nach Gleichsetzen der Residuen (5.44) und (5.45) und einigen Umrechnungen (siehe Anhang C) stellt man fest, dass das Messrauschen  $\mathbf{w}_{\text{FF};k}^*$  des extrapolierten Messwertes

$$\mathbf{z}_{\text{FF};k}^* = \mathbf{H}_{\text{FF};k} \mathbf{x}_{\text{FF};k} + \mathbf{w}_{\text{FF};k}^* \quad (5.48)$$

mit den verzögerten und nicht verzögerten Zustandsvektoren korreliert ist. Nach einigen Anpassungen, die im Detail in Anhang C beschrieben werden, erhält man für die modifizierten KALMAN-Filtergleichungen

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{FF};k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{\text{FF};k|k-1} + \mathbf{K}_k^* \left( \mathbf{z}_{\text{FF};k}^{k-i'} - \mathbf{H}_{\text{FF};k-i'} \hat{\mathbf{x}}_{\text{FF};k-i'|k-i'-1} \right) \quad (5.49)$$

$$\mathbf{P}_{\text{FF};k|k} = \mathbf{P}_{\text{FF};k|k-1} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_{\text{FF};k-i'} \mathbf{P}_{\text{FF};k-i'|k-i'-1}^T \quad (5.50)$$

wobei

$$\mathbf{K}_k^* = \mathbf{P}_{\text{FF};k,k-i'|k-1} \mathbf{H}_{\text{FF};k-i'}^T \left( \mathbf{H}_{\text{FF};k-i'} \mathbf{P}_{\text{FF};k-i'|k-i'-1} \mathbf{H}_{\text{FF};k-i'}^T + \mathbf{H}_{\text{FF};k-i'} \mathbf{P}_{\text{FF};xw,k-i'|k-i'-1} \mathbf{M}_{\text{FF}}^T + \mathbf{M}_{\text{FF}} \mathbf{P}_{\text{FF};xw,k-i'|k-i'-1}^T \mathbf{H}_{\text{FF};k-i'}^T + \mathbf{M}_{\text{FF}} \mathbf{P}_{\text{FF};ww,k-i'} \mathbf{M}_{\text{FF}}^T \right)^{-1} \quad (5.51)$$

das modifizierte KALMAN-Gewicht ist. Die Gleichungen unterscheiden sich bisher nicht von denen eines üblichen KF unter Berücksichtigung zeitlich korrelierter Rauschprozesse. Der eigentliche Unterschied liegt in der Berechnung des Erwartungswertes des Produktes aus dem aktuell prädizierten Fehler des Systemzustandes und der Prädiktion des Fehlers zum Zeitpunkt  $k - i'$ , d. h.

$$\mathbf{P}_{\text{FF};k,k-i'|k-1} = E \left[ \left( \mathbf{x}_{\text{FF};k} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{FF};k|k-1} \right) \left( \mathbf{x}_{\text{FF};k-i'} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{FF};k-i'|k-i'-1} \right)^T \middle| \mathbf{z}_{\text{FF};1:k-1} \right]. \quad (5.52)$$

Nach einigen Umrechnungen wird deutlich, dass zu jedem Zeitpunkt zwischen Gültigkeit und Verfügbarkeit der jeweiligen Messungen bestimmte Matrizen der KALMAN-Filterung zwischengespeichert werden müssen, damit diese zum Zeitpunkt  $k$  für die Berechnung von Gl. (5.53) zur Verfügung stehen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{FF};k,k-i'|k-1} &= \left( \prod_{m'=1}^{i'} \Phi_{\text{FF};k-m'+1} \left( \mathbf{I}_{15 \times 15} - \mathbf{K}_{k-m'} \mathbf{H}_{\text{FF};k-m'} \right) \right) \mathbf{P}_{\text{FF};k-i'|k-i'-1} \\ &\quad - \left( \prod_{m'=1}^{i'-1} \Phi_{\text{FF};k-m'+1} \left( \mathbf{I}_{15 \times 15} - \mathbf{K}_{k-m'} \mathbf{H}_{\text{FF};k-m'} \right) \right) \Phi_{\text{FF};k-i'+1} \mathbf{K}_{k-i'} \mathbf{M}_{\text{FF};k-i'} \mathbf{P}_{\text{FF};xw,k-i'|k-i'-1}^T. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Da nicht berücksichtigt werden kann, wie sich ein *GPS*-Messvektor, wenn er auch zum Zeitpunkt  $k - i'$  verfügbar gewesen wäre, auf die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers zu eben diesem Zeitpunkt auswirkt, handelt es sich hierbei um ein suboptimales Verfahren. Andernfalls hätte dies zu einer Änderung des KALMAN-Gewichts geführt, die wiederum die nachfolgenden Berechnungen beeinflussen würde. Da der Verzögerungszeitraum allerdings hier im ungünstigsten Fall weniger als 250 ms beträgt, wird dies vernachlässigt.

### Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die zentralen Filterkomponenten vorgestellt, die benötigt werden, um die durch den *Strapdown*-Algorithmus berechnete Navigationslösung aufgrund der Sensorfehler korrigieren zu können. Dazu wurden die Filtergleichungen auf Basis der bekannten Differenzialgleichungen so hergeleitet, dass Daten eines *GPS*-Empfängers, eines Magnetfeldsensors und eines barometrischen Sensors als Messgrößen für das FF verwendet werden können. Zum Abschluss wurde gezeigt, wie der eigentliche Systemzustand (bestehend aus Position, Geschwindigkeit und Lage), der sich außerhalb des Filters befindet, korrigiert wird und mögliche Verzögerungen im *GPS*-Signal im Rahmen des Filterprozesses berücksichtigt werden.





## Kapitel 6

### Barometrisches Höhenfilter und topografische Datenbank

In diesem Kapitel wird eine Höhenschätzung auf Basis barometrischer Daten und einer topografischen Datenbank vorgestellt, die im Vergleich zu einer allein auf dem *GPS* basierenden Höhenschätzung eine genauere Positionsbestimmung in vertikaler Richtung zulassen und eine genauere Bestimmung der Schwerebeschleunigung ermöglichen soll. Im Folgenden wird zunächst die Beschreibung eines Systems zur Lokalisierung gegeben, wobei die Modellierung der bei barometrischen Messungen typischen Fehler im Fokus steht. Anschließend wird ein Verfahren zum Abgleich der Messungen mit einer topografischen Datenbank erläutert. Ausgehend von der barometrischen Höhenformel, deren Herleitung in Anhang D zu finden ist, wird ein Fehlerfilter sowie die damit mögliche Korrektur der Messgrößen betrachtet. Abgeschlossen wird das Kapitel mit Testergebnissen, die mit Hilfe von künstlich generierten Sensordaten gewonnen wurden. Der hier präsentierte Ansatz wurde vom Autor bereits im Rahmen eines internationalen Seminars veröffentlicht [BWPHU10], wird in dieser Arbeit dennoch im Detail hergeleitet und analysiert.

Zuverlässige Höheninformationen können z. B. in neuartigen Verkehrsleitsystemen eine wichtige Rolle spielen, wenn diese dazu eingesetzt werden sollen, Fahrzeuge zu einer freien Parkposition in einem Parkhaus zu leiten. Wie ebenso noch gezeigt wird, kann sich eine verbesserte Höhenschätzung auch positiv auf die Positionsschätzung in der Ebene auswirken, da über die RKM in Kap. 5.2.1.2 eine Kopplung zwischen den verschiedenen Komponenten besteht, sofern  $\hat{\mathbf{I}}_{\text{GPS}}^n \neq \mathbf{0}_{3 \times 1}$ , woraus wiederum eine bessere Lageschätzung resultiert. Außerdem wird das in Kap. 3.1 angesprochene Problem der SCHULER-Oszillationen reduziert [TW04]. Obwohl aus einer Höhendifferenz von 20 m lediglich eine Änderung von ca.  $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$  in der  $z$ -Komponente des Schwerebeschleunigungsvektors  $\mathbf{g}^n(t)$  resultiert, sollen in dieser Arbeit die Auswirkungen einer falschen Höhenberechnung auf die Gesamtlage- und Positionsschätzung untersucht werden.

Bei barometrischen Sensoren besteht allerdings das Problem, dass sich bei der Berechnung die damit verbundenen Fehler wie bei einer IME akkumulieren können. Die Ursache liegt in der benötigten Kenntnis von Referenzwerten für den Luftdruck und die Temperatur auf einer fest vorgegebenen Referenzhöhe  $h_0$ . In der Literatur wird zur Vereinfachung häufig angenommen, dass diese Referenzwerte konstant sind [Tip99]. In einer realen Umgebung können diese Werte (z. B. die Temperatur auf NN-Niveau, d. h. Meereshöhe) jedoch variieren, was wiederum eine fehlerhafte Höhenberechnung zur Folge hat. Daher sollten idealerweise auch die Änderungen dieser Referenzwerte in der Berechnung berücksichtigt werden. In den folgenden Abschnitten wird vorgestellt, wie die Fehler, die aus der Höhenberechnung mit Hilfe eines barometrischen Sensors resultieren, durch ein KF kompensiert werden können. Dieses Verfahren ist ähnlich zu dem in [WR07], hier wird jedoch kein zweiter barometrischer Sensor zur Fehlerkompensation eingesetzt. Im Rahmen dieser Arbeit wird zusätzlich ein topografischer Kartenabgleich genutzt, wobei das Vorhandensein einer entsprechenden Datenbank vorausgesetzt wird. Die Idee ist, dass an bestimmten Positionen eine Referenzhöhe aus einer topografischen

Datenbank bekannt ist und diese genutzt wird, um die Abweichung zur momentan gemessenen barometrischen Höhe zu bestimmen. Dies ist hilfreich, um wiederum die Sensorfehler zu berechnen und in den aktuellen sowie den zukünftigen Messungen zu berücksichtigen, bei denen keine Referenzdaten zur Verfügung stehen. Auf diese Weise steht eine zuverlässige Schätzung der Fehler für die jeweilige Höhe zur Verfügung, denn i. d. R. liefern topografische Karten bzw. Datenbanken sehr präzise Höheninformationen [Whi93]. Dies ist möglich, da diese meist durch hochgenaue Profilmodelle der Erdoberfläche berechnet oder manuell mit Hilfe des *Differential Global Positioning System* (DGPS) und Katasterkarten durch das Landesamt für Kartographie bestimmt werden. Hierdurch sind die Höhenangaben auf bis zu 0,5 m genau.

Der Vorteil der hier vorgestellten barometrischen Höhenmessung mit Fehlerkompensation ist, dass eine Kalibrierung des Sensors bzw. eine Temperaturkompensation wie es in der Geodäsie oder Luftfahrt häufig notwendig ist, um z. B. Genauigkeiten im Dezimeterbereich zu erhalten, nicht mehr vorgenommen werden muss. In der Luftfahrt muss ein Pilot vor dem Start für eine genaue Anzeige der Flughöhe seinen Höhenmesser manuell auf den aktuellen meteorologischen Luftdruck kalibrieren bzw. die bekannte Höhe berücksichtigen, auf der sich der Flughafen befindet. Betrachtet man die Situation, in der sich ein KFZ auf offener Straße bewegt und sich der Umgebungsluftdruck nur aufgrund der Höhe ändert, so ist die barometrische Höhenberechnung ein äußerst zuverlässiges Mittel zur vertikalen Positionsbestimmung. Allerdings kann sich die Situation z. B. bei der Einfahrt in ein Parkhaus aufgrund der baulichen Gegebenheiten drastisch ändern, da die Luftdruckänderung nicht mehr ausschließlich auf die Höhenänderung zurückzuführen ist. Dies ist allerdings dann unproblematisch, wenn auch für diese Gegebenheiten Referenzwerte vorliegen. Solche Situationen bleiben im Rahmen dieser Arbeit unberücksichtigt. Der Vorteil eines Barometers ist, dass es in jeder Situation Messwerte liefern kann, hingegen vergleichbare GPS-Messungen gerade in geschlossenen Räumlichkeiten meistens nicht verfügbar sind.

Im Rahmen der Fahrzeugnavigation ist häufig ein Kartenabgleich auf Basis der üblicherweise eingesetzten Navigationskarten ausreichend, die z. T. ebenfalls Höheninformationen gespeichert haben. Letztendlich spielt nicht unbedingt die Höhe eines Fahrzeugs über Normalnull (NN) die entscheidende Rolle, sondern lediglich die absolute Position des Fahrzeugs bezogen auf die eingesetzte Karte (es handelt sich dabei nicht unbedingt um hochgenaue topografische Karten). Eine genaue Berechnung der Schwerebeschleunigung im Rahmen einer Inertialnavigation mit sechs Freiheitsgraden – selbst wenn dadurch nur eine geringfügig höhere Genauigkeit zu erwarten ist – kann jedoch durch das hier beschriebene Verfahren erreicht werden, da das Höhenniveau über NN explizit berücksichtigt wird.

## 6.1 Systemübersicht

In Abb. 5.1 wurde bereits das Gesamtsystem vorgestellt, das für die Schätzung der inertialen Sensorfehler verwendet wird. Das barometrische Teilsystem kann im Detail in Abb. 6.1 betrachtet werden. Das dargestellte barometrische Fehlerfilter (BF) ist kein Fehlerfilter wie es für die Filterung der inertialen Sensorfehler verwendet wird. Für das barometrische Teilsystem wird stattdessen ein lineares KF eingesetzt. Hier wird jedoch die Linearisierung der Messgleichung nicht nur zur Berechnung der Schätzfehlerkovarianzmatrix durchgeführt, sondern auch zur Zustandsschätzung. Auf eine Berücksichtigung zeitlicher Korrelationen des System- bzw. Messrauschens wird verzichtet. Das für die Untersuchungen eingesetzte Barometer ist ein USB-Sensor der Fa. Toradex, der die Temperatur und den Luftdruck misst.

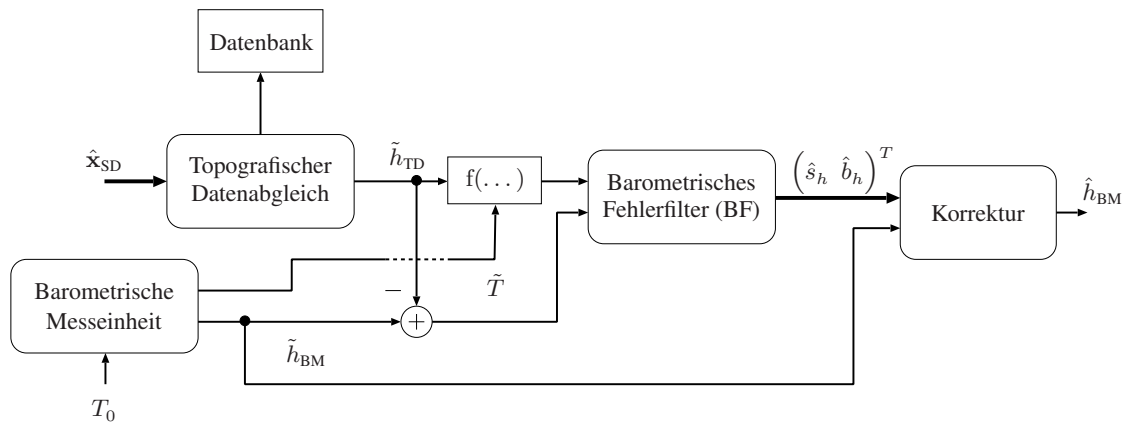


Abbildung 6.1: Systemübersicht des Teilsystems mit Barometer

Die Funktionsweise des Teilsystems kann wie folgt zusammengefasst werden: Der barometrische Sensor liefert Messwerte (Temperatur  $\tilde{T}$  und Luftdruck  $\tilde{P}$ ), die für eine Höhenschätzung  $\tilde{h}_{BM}$  verwendet werden können. Um die damit zusammenhängenden Fehler zu kompensieren, werden die aktuellen, bereits korrigierten horizontalen Positionsdaten in  $\hat{x}_{SD}$  laufend mit Einträgen einer Datenbank verglichen. Ist der euklidische Abstand zwischen den korrigierten horizontalen Positionsdaten und denen in der Datenbank unterhalb eines bestimmten Schwellenwertes  $d_{\max}$ , so wird statt der barometrisch berechneten Höhe die Höhe aus der Datenbank als Hilfsgröße zur Fehlerfilterung verwendet. Die im BF geschätzten Fehler dienen im nachfolgenden Schritt lediglich der Korrektur der Höhe  $\tilde{h}_{BM}$ . Diese wird demnach außerhalb des Filters durchgeführt. Die korrigierte barometrische Höhe  $\hat{h}_{BM}$  wird wiederum als Stützinformation für das Gesamtsystem in Kap. 5.1 verwendet.

### 6.1.1 Fehlermodellierung für barometrische Sensoren

In [Us176] und weiterer einschlägiger Literatur wird die barometrische Höhenformel

$$h_{BM}(P, P_0, T_0) = h_0 + \left( \left( \frac{P_0}{P} \right)^{\frac{\ell \gamma_0}{M g_0}} - 1 \right) \cdot \frac{T_0}{\gamma_0} \quad (6.1)$$

als Mittel angegeben, um aus einem Luftdruck  $P$  auf eine Höhe  $h_{BM}(P, P_0, T_0)$  über NN zu schließen, die bei passendem Referenzdruck  $P_0 := P(h_0)$  der Höhe über dem Geoid entspricht. Die Konstanten in (6.1) sind in Tab. 6.1 zusammengefasst. Die detaillierte Herleitung von (6.1) ist in Anhang D

Bezeichnung	Symbol	Wert
Molare Masse (Luft)	$M$	$2,896\,44 \cdot 10^{-2} \text{ kg/mol}$
Universelle Gaskonstante nach [Us176]	$\ell$	$8,314\,32 \text{ N} \cdot \text{m}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
Temperaturgradient (negativ)	$\gamma_0$	$-6,5 \cdot 10^{-3} \text{ K/m}$
Schwerebeschleunigung auf Referenzhöhe (z. B. Meereshöhe)	$g_0$	$\approx 9,81 \text{ m/s}^2$

Tabelle 6.1: Konstanten und Variablen für die barometrische Höhenberechnung

zu finden. Zur Auswertung wird demnach auch eine Referenzhöhe sowie eine Temperatur und ein

Druck auf dieser Referenzhöhe benötigt. Eine entsprechende Referenzhöhe festzulegen ist unproblematisch, da sich diese i. d. R. nicht ändern wird. Allerdings können sich naturgegeben die Temperatur  $T_0 := T(h_0)$  und der Druck  $P_0$  für diesen Ort mit der Zeit ändern, je nachdem, welche Tageszeit oder welche Wetterumstände vorliegen. Ebenfalls ändert sich mit der Zeit der Momentandruck  $P$  am Messort. Dies hat zum einen die selben Gründe wie bei  $P_0$ , liegt zum anderen aber auch an der Ortsabhängigkeit, da sich das Fahrzeug bewegt. Die Abb. 6.2 (a) und (b) zeigen typische Verläufe über einen Zeitraum von ca. 40 h für die zeitveränderlichen Parameter an einer fest installierten Wetterstation.

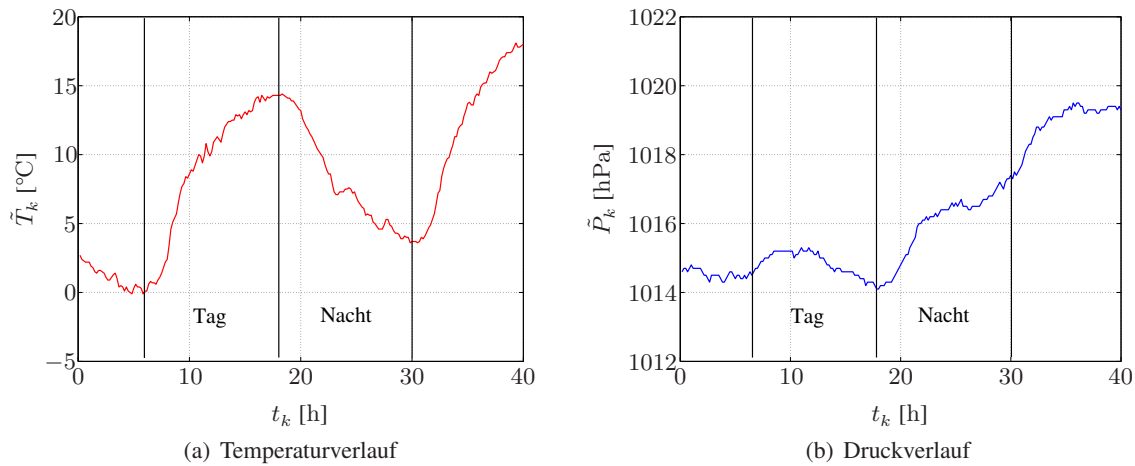


Abbildung 6.2: Messwerte für Temperatur und Druck

Eine zeitdiskrete Beschreibung der Referenzparameter würde mittels *RWP*-Modellen wie folgt lauten:

$$T_{0,k} = T_{0,k-1} + \Delta t_{\text{BM}} \cdot n_{T_0,k} \quad (6.2)$$

$$P_{0,k} = P_{0,k-1} + \Delta t_{\text{BM}} \cdot n_{P_0,k}, \quad (6.3)$$

wobei  $n_{T_0,k} \sim \mathcal{N}(n_{T_0,k}; 0, \sigma_{T_0}^2)$  und  $n_{P_0,k} \sim \mathcal{N}(n_{P_0,k}; 0, \sigma_{P_0}^2)$  seien. Die Variable  $\Delta t_{\text{BM}} := \frac{1}{f_{\text{BM}}}$  bezeichnet hier das Abtastintervall des barometrischen Sensors. Die Multiplikation mit  $\Delta t_{\text{BM}}$  führt dazu, dass die Verläufe für fest vorgegebene Varianzen unabhängig vom Abtastintervall sind.

Für die Berechnung der notwendigen Standardabweichungen des jeweiligen treibenden Rauschens in (6.2) und (6.3) wurden neben den Messungen in Abb. 6.2 auch Messungen an einem festen Ort über einen Zeitraum von sieben Tagen durchgeführt, wobei innerhalb von zwölf Stunden Druck- und Temperaturschwankungen von bis zu 12 hPa bzw. 17 K auftraten. Durch Auswertung der Daten konnten die in Tab. 6.2 angegebenen Werte für die Standardabweichungen der treibenden Rauschprozesse näherungsweise ermittelt werden. Es wird davon ausgegangen, dass die Messungen an dem

Parameter	Standardabweichung
$T_0$	$4 \cdot 10^{-3} \text{ K}/\sqrt{\text{s}}$ (bei $f_{\text{BM}} = 10 \text{ Hz}$ ) $\rightarrow \sigma_{P_0} = 1,265 \cdot 10^{-2} \text{ K/s}$
$P_0$	$0,4 \text{ Pa}/\sqrt{\text{s}}$ (bei $f_{\text{BM}} = 10 \text{ Hz}$ ) $\rightarrow \sigma_{T_0} = 1,265 \text{ Pa/s}$

Tabelle 6.2: Messtechnisch ermittelte Standardabweichungen für die Referenztemperatur  $T_0$  und den Referenzluftdruck  $P_0$

hier gewählten Ort trotz der geringen Datenbasis auch auf andere Positionen übertragbar sind und mögliche Unterschiede ausreichend durch den jeweiligen *RWP* berücksichtigt werden können.

Neben zeitvarianten Referenzwerten wird angenommen, dass die Messwerte von Druck und Temperatur jeweils von GAUSS-verteiletem Rauschen, entsprechend Gl. (6.4) und (6.5), überlagert sind:

$$\tilde{T}_k = T_k + n_{T,k} \quad (6.4)$$

$$\tilde{P}_k = P_k + n_{P,k}. \quad (6.5)$$

Dabei ist  $n_{\dagger,k} \sim \mathcal{N}(n_{\dagger,k}; 0, \sigma_{\dagger}^2)$  mit  $\dagger \in \{T, P\}$  eine GAUSS-verteilte Zufallsvariable mit Mittelwert Null und der Varianz  $\sigma_{\dagger}^2$ .

### 6.1.2 Barometrische Höhenmessung

Wir betrachten nun wieder Gl. (6.1). An dieser Stelle sollen die Gleichungen hergeleitet werden, die für die Bestimmung der barometrischen Fehler mit Hilfe des BF benötigt werden. Der Zeitindex  $k$  wird dabei zunächst wieder außer Acht gelassen. Es sei noch darauf hingewiesen, dass die barometrische Höhenformel auch direkt als Messgleichung eines KF eingesetzt werden kann. Allerdings soll hier eine alternative Möglichkeit vorgestellt werden, die es darüber hinaus erlaubt, externe Größen aus einer Datenbank als zusätzliche Stützinformationen auszunutzen und damit die Sensorfehler zu schätzen.

Es wird zunächst eine Taylorreihenentwicklung um die Entwicklungspunkte  $T_0 := T'_0 - \Delta T_0$  und  $P_0 := P'_0 - \Delta P_0$  mit Abbruch nach dem linearen Glied vorgenommen, um die Auswirkungen der Referenzwerte zu bestimmen:<sup>7</sup>

$$h_{\text{BM}}(P, T'_0, P'_0) \approx h_{\text{BM}}(P, T_0, P_0) + \left. \frac{\partial h_{\text{BM}}(P, P'_0, T'_0)}{\partial T'_0} \right|_{\substack{T'_0=T_0 \\ P'_0=P_0}} \Delta T_0 + \left. \frac{\partial h_{\text{BM}}(P, P'_0, T'_0)}{\partial P'_0} \right|_{\substack{T'_0=T_0 \\ P'_0=P_0}} \Delta P_0. \quad (6.6)$$

Für die Ableitungen auf der rechten Seite von Gl. (6.6) gilt dann:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h_{\text{BM}}(P, P'_0, T'_0)}{\partial T'_0} \right|_{\substack{T'_0=T_0 \\ P'_0=P_0}} &= \left( \left( \frac{P_0}{P} \right)^{\frac{\ell \gamma_0}{M g_0}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\gamma_0} \\ &= \frac{h_{\text{BM}}(P, P_0, T_0) - h_0}{T_0} \end{aligned} \quad (6.7)$$

und

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h_{\text{BM}}(P, P'_0, T'_0)}{\partial P'_0} \right|_{\substack{T'_0=T_0 \\ P'_0=P_0}} &= \frac{T_0 \ell \gamma_0}{\gamma_0 M g_0} \left( \frac{1}{P} \right)^{\frac{\ell \gamma_0}{M g_0}} \cdot P_0^{\frac{\ell \gamma_0}{M g_0} - 1} \\ &= \frac{T_0 \ell}{M g_0 P_0} \left( \frac{P_0}{P} \right)^{\frac{\ell \gamma_0}{M g_0}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

<sup>7</sup>Im Vergleich zu früher wird hier mit ( ' ) nicht der Linearisierungspunkt bezeichnet, sondern der Punkt, für den man die Nichtlinearität approximieren will.

Für die erste Ableitung wurde wieder (6.1) ausgenutzt. Setzt man (6.7) und (6.8) in (6.6) ein, so ergibt sich:

$$h_{\text{BM}}(P, T'_0, P'_0) \approx h_{\text{BM}}(P, T_0, P_0) + (h_{\text{BM}}(P, T_0, P_0) - h_0) \underbrace{\left( \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)}_{s_h} + \underbrace{\frac{T_0 \ell}{M g_0} \left( \frac{\Delta P_0}{P_0} \right) \left( \frac{P_0}{P} \right)^{\frac{\ell \gamma_0}{M g_0}}}_{b_h}. \quad (6.9)$$

Mit der Annahme, dass  $\left( \frac{P_0}{P} \right)^{\frac{\ell \gamma_0}{M g_0}} \approx 1$  und den in Gl. (6.9) verwendeten Faktoren  $s_h$  und  $b_h$  kann nun ein einfacher Ausdruck für ein Fehlermodell zur barometrischen Höhenberechnung angegeben werden. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass hier  $h_{\text{BM}}(P, T_0, P_0)$  der korrekten Höhe  $h$  entspricht und damit die fehlerhafte Höhe  $\tilde{h}_{\text{BM}}$  durch

$$\tilde{h}_{\text{BM}} = h + s_h \cdot (h - h_0) + b_h \quad (6.10)$$

ausgedrückt werden kann. Die Höhe  $\tilde{h}_{\text{BM}}$  setzt sich demnach aus der korrekten Höhe, einem Bias  $b_h$  und einer durch einen Skalierungsfaktor  $s_h$  beeinflussten Höhendifferenz aus korrekter Höhe und Referenzhöhe  $h_0$  zusammen. Während der Skalierungsfaktor von der Referenztemperaturänderung  $\Delta T_0$  und der initialen Temperatur  $T_0$  auf Referenzhöhe abhängt, ist das Bias eine Funktion des entsprechenden Luftdrucks  $P_0$  und der Druckänderung  $\Delta P_0$ .

Der Skalierungsfaktor und das Bias sollen später fortlaufend mit Hilfe eines KF geschätzt werden. Mit der festgelegten Referenzhöhe  $h_0 = 0$  m lässt sich die benötigte Messgl. (6.10) unter Berücksichtigung des Zeitindex  $k$  wie folgt ergänzen:

$$\tilde{h}_{\text{BM};k} = (1 + s_{h,k}) \cdot h_k + b_{h,k} + n_{h,k}, \quad (6.11)$$

wobei  $n_{h,k} \sim \mathcal{N}(n_{h,k}; 0, \sigma_h^2)$  einen zusätzlichen zufälligen Fehler in der Höhenberechnung beschreibt, der durch Sensorrauschen verursacht wird (siehe Gl. (6.4) und (6.5)). Da die momentane Temperatur  $T_k$  nicht in die barometrische Höhenformel (6.1) eingeht, ist auch die Standardabweichung  $\sigma_h$  unabhängig von  $\sigma_T$ . Im Folgenden verwenden wir die Näherung  $\sigma_h \approx \sigma_P \cdot 0,1 \text{ m/Pa}$ . Diese gibt an, dass eine Druckänderung von 1 Pa einer Höhenänderung von 0,1 m entspricht. Im Allgemeinen wird die Höhenänderung, die aus einer Druckänderung von 1 hPa resultiert, als barometrische Höhenstufe bezeichnet, welche etwa 10 m entspricht [Tip99].

## 6.2 Topografischer Kartenabgleich

Wie eingangs erwähnt, soll die Filterung durch Daten aus einer topografischen Datenbank unterstützt werden. Voraussetzung ist dabei, dass die in der Datenbank abgelegten Referenzhöhen  $h_{\text{Topo}}$  mit ausreichender Genauigkeit vorliegen. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Datenbankwerte entstammen der Deutschen Grundkarte (DGK), welche die Höhe über NN angibt. Dieses ist eine topografische Karte, die neben anderen Informationen auch Höhenlinien (auch Isohypsen genannt) enthält und diese je nach Auflösung im Abstand von 0,5 m bis 5 m darstellt. Ein Beispiel ist in Abb. 6.3 zu sehen. Die Erstellung solcher Karten basiert häufig auf so genannten Flurplänen. Dies sind topografische Karten, die Positionsangaben in GAUSS-KRÜGER-Koordinaten enthalten und auf Vermessungen und orthographischen Fotos seitens der Landesämter beruhen. Man kann daher davon ausgehen, dass die Höheninformationen – je nach verwendeter Karte und deren Abbildung in einer



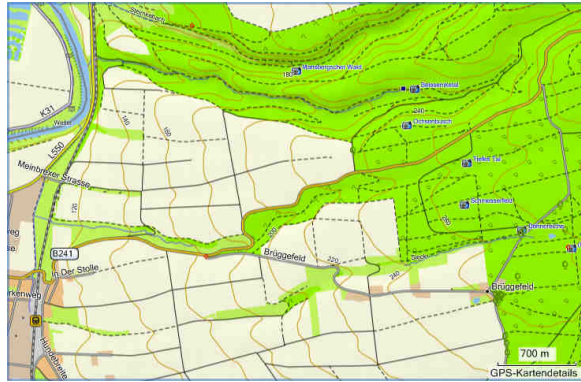


Abbildung 6.3: Topografische Karte von GARMIN (© GARMIN 2010, MAPSOURCE 2010, BKG 2010)

Datenbank – mit einer ausreichend hohen Auflösung zur Verfügung stehen. Des Weiteren kann davon ausgegangen werden, dass die Angaben, auch wenn die Höhenlinien z. T. auf mathematischen Interpolationen beruhen, im Vergleich zu einer *GPS*-basierten Höhenschätzung sehr genau sind.

Wir gehen im Folgenden dennoch davon aus, dass die entsprechenden topografischen Daten mit einer geringen Auflösung zur Verfügung stehen, denn Referenzmessungen von Höhen im Zentimeterbereich, sind meist nur in unregelmäßigen Abständen von bis zu mehreren Kilometern vorhanden. Dieses können Messungen sein, die z. B. für Baumaßnahmen, Bahnhöfe oder andere öffentliche Gebäude mit der entsprechenden Ausrüstung vorgenommen wurden. Das hier vorgestellte Verfahren ist allerdings so ausgelegt, dass eine Fehlerbestimmung im Abstand von mehreren Minuten kein Problem darstellt.

Die Verwendung von topografischen Höhendaten an Stelle der *GPS*-Höhe entspricht einem Kartenabgleich. Dabei wird fortlaufend die Position in der horizontalen Ebene (Breitengrad  $\varphi$  und Längengrad  $\lambda$ ) mit den entsprechenden Daten aus der topografischen Datenbank verglichen. Befindet sich der Nutzer, d. h. das Fahrzeug, innerhalb eines bestimmten vordefinierten Radius zu einem Datenbankeintrag, so kann die zugehörige Referenzhöhe zur Stützung des Filters genutzt werden. Um festzustellen, ob ein passender Datenbankeintrag verwendet werden kann, sollen die folgenden Schritte durchgeführt werden:

1. Zunächst muss der minimale euklidische Abstand zwischen der aktuellen horizontalen Position, bestehend aus Breiten- und Längengrad, mit sämtlichen zu den Referenzhöhen korrespondierenden Positionen aus der Datenbank verglichen werden. Die Abstandsbestimmung wird analog zu (5.15) für jeden Zeitschritt  $k$  mit

$$\Delta p_{eb,n,k}^{n,(i')} := R_0 \cdot \left( \hat{\varphi}_{SD;k} - \varphi_{Topo}^{(i')} \right) \quad (6.12)$$

$$\Delta p_{eb,e,k}^{n,(i')} := R_0 \cdot \cos(\hat{\varphi}_{SD;k}) \cdot \left( \hat{\lambda}_{SD;k} - \lambda_{Topo}^{(i')} \right) \quad (6.13)$$

durchgeführt, wobei  $R_0 \approx 6371$  km der mittlere Erdradius (Krümmungsradius) aus Tab. 4.2 ist und  $\hat{\varphi}_{SD;k}$  und  $\hat{\lambda}_{SD;k}$  die Positionsschätzungen am Ausgang des *Strapdown*-Algorithmus zum Zeitpunkt  $k$  sind. Diese werden demnach mit sämtlichen Einträgen  $\varphi_{Topo}^{(i')}$ ,  $\lambda_{Topo}^{(i')}$  mit  $i' \in [1, I']$

einer Datenbank der Länge  $I'$  verglichen. Dazu wird der minimale Abstand gemäß

$$d_{\min;k} := \min_{i'} \left( \sqrt{(\Delta p_{\text{eb},n,k}^{n,(i')})^2 + (\Delta p_{\text{eb},e,k}^{n,(i')})^2} \right) \quad (6.14)$$

berechnet.

2. Liegt dieser minimale Abstand unterhalb eines festgelegten Schwellenwertes, d. h. ist  $d_{\min;k} < d_{\max}$ , so erfolgt die Zuweisung  $\tilde{h}_{\text{TD};k} \leftarrow h_{\text{Topo}}^{(i')}$ , wobei  $h_{\text{Topo}}^{(i')}$  die zu  $\varphi_{\text{Topo}}^{(i')}$  und  $\lambda_{\text{Topo}}^{(i')}$  korrespondierende Höhe ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, wird keine Referenzhöhe  $\tilde{h}_{\text{TD};k}$  verwendet. Hier wird der Schwellenwert  $d_{\max} = 5$  m gewählt.

Für die noch genauer zu definierende Fehlerfilterung wird angenommen, dass die topografischen Höhen und damit  $\tilde{h}_{\text{TD};k}$  äußerst genau sind. Es wird davon ausgegangen, dass die Referenzdaten ebenfalls durch ein Modell entsprechend

$$\tilde{h}_{\text{TD};k} = h_k + n_{\text{TD};k} \quad (6.15)$$

mit  $n_{\text{TD};k} \sim \mathcal{N}(n_{\text{TD};k}; 0, \sigma_{\text{TD}}^2)$  beschrieben werden können, wobei  $\sigma_{\text{TD}}$  die Standardabweichung von  $n_{\text{TD};k}$  ist und damit die Genauigkeit der Datenbankeinträge angibt. Zur Vereinfachung wird später zwar  $\sigma_{\text{TD}} = 0$  m festgelegt (eine solche Annahme ist u. a. deshalb gerechtfertigt, weil der Abstand zwischen wirklicher Höhe und der entsprechenden Höhe  $h_{\text{Topo}}^{(i')}$  bei  $d_{\max} = 5$  m i. Allg. vernachlässigt werden kann), dennoch soll zunächst der allgemeine Fall mit  $\sigma_{\text{TD}} \neq 0$  m betrachtet werden.

## 6.3 Aufbau des barometrischen Fehlerfilters

### 6.3.1 Systemmodell

Der Skalierungsfaktor  $s_h$  und das Bias  $b_h$  hängen direkt von der Referenztemperatur- bzw. der Referenzdruckänderung ab. Wie in (6.2) bzw. (6.3) sollen auch die Faktoren hier durch RWP-Modelle nachgebildet werden. Daher gilt

$$s_{h,k} = s_{h,k-1} + \Delta t_{\text{BM}} \cdot n_{s_h,k} \quad (6.16)$$

mit  $n_{s_h,k} \sim \mathcal{N}(n_{s_h,k}; 0, \sigma_{s_h}^2)$  und

$$b_{h,k} = b_{h,k-1} + \Delta t_{\text{BM}} \cdot n_{b_h,k} \quad (6.17)$$

mit  $n_{b_h,k} \sim \mathcal{N}(n_{b_h,k}; 0, \sigma_{b_h}^2)$ , wobei  $\sigma_{s_h}^2 = \left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2$  und  $\sigma_{b_h}^2 = \left(\frac{\ell T_0}{M g_0 P_0} \sigma_{P_0}\right)^2$  ist. Dabei stellen  $\sigma_{P_0}$  und  $\sigma_{T_0}$  die Standardabweichungen der Referenzwerte dar, und es wird für die Referenztemperatur auf NN  $T_0 \approx 270$  K angenommen. Die Gl. (6.16) und (6.17) bilden damit bereits das vollständige Systemmodell des BF.

### 6.3.2 Messmodell

Das zugehörige Messmodell sei wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} z_{\Delta h} \\ z_{s_h} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \tilde{h}_{\text{TD};k} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_h \\ b_h \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} n_{z_{\Delta h}} \\ n_{z_s} \end{pmatrix}_k. \quad (6.18)$$

Um Gl. (6.18) herzuleiten, bilden wir zunächst die Differenz aus (6.11) und der topografischen Referenzhöhe nach (6.15):

$$\tilde{h}_{\text{BM};k} - \tilde{h}_{\text{TD};k} = s_{h,k} h_k + b_{h,k} + n_{h,k} - n_{\text{TD};k}. \quad (6.19)$$

Löst man Gl. (6.15) nach  $h_k$  auf und setzt dieses in (6.19) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\text{BM};k} - \tilde{h}_{\text{TD};k} &= s_{h,k} \tilde{h}_{\text{TD};k} + b_{h,k} + n_{h,k} - (1 + s_{h,k}) n_{\text{TD};k} \\ \Rightarrow z_{\Delta h,k} &= s_{h,k} \tilde{h}_{\text{TD};k} + b_{h,k} + n_{z_{\Delta h},k}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

wobei  $z_{\Delta h,k} := \tilde{h}_{\text{BM};k} - \tilde{h}_{\text{TD};k}$  und  $n_{z_{\Delta h},k} \sim \mathcal{N}(n_{z_{\Delta h},k}; 0, \sigma_{z_{\Delta h},k}^2)$  ist. Unter der Annahme, dass  $n_{h,k}$  und  $n_{\text{TD};k}$  unkorreliert sind, sei hier außerdem  $\sigma_{z_{\Delta h},k}^2 := \sigma_h^2 + (1 + s_{h,k})^2 \sigma_{\text{TD}}^2$  festgelegt.

Zusätzlich zur Referenzhöhe aus der Datenbank kann die gemessene Temperatur zur Unterstützung des BF verwendet werden. Dazu wird in die Temperaturmessgl. (6.4) zunächst (D.8) aus dem Anhang eingesetzt, wobei  $h_0 = 0$  m angenommen wird:

$$\tilde{T}_k = T_{0,k} + \gamma_0 \cdot h_k + n_{T,k}. \quad (6.21)$$

Nun subtrahiert man von beiden Seiten in (6.21) den Term  $T_{0,0}$  und normiert anschließend, woraus unter Verwendung von (6.15)

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{T}_k - T_{0,0}}{T_{0,0}} &= \frac{T_{0,k} + \gamma_0 \cdot h_k - T_{0,0}}{T_{0,0}} + \frac{n_{T,k}}{T_{0,0}} \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{\tilde{T}_k - \gamma_0 \cdot \tilde{h}_{\text{TD};k} - T_{0,0}}{T_{0,0}}}_{z_{s_h,k}} &= \underbrace{\frac{T_{0,k} - T_{0,0}}{T_{0,0}}}_{s_{h,k}} + \underbrace{\frac{n_{T,k} - \gamma_0 \cdot n_{\text{TD};k}}{T_{0,0}}}_{n_{z_s,k}} \end{aligned} \quad (6.22)$$

resultiert. Da die Addition von zwei mittelwertfreien GAUSS-verteilten Zufallsvariablen ebenfalls mittelwertfrei und GAUSS-verteilt ist, gilt für  $n_{z_s,k}$  in (6.22)  $n_{z_s,k} \sim \mathcal{N}\left(n_{z_s,k}; 0, \frac{\sigma_T^2 + \gamma_0^2 \cdot \sigma_{\text{TD}}^2}{T_{0,0}^2}\right)$ . Somit steht ein vollständiges Gleichungssystem zur Verfügung, um aus Temperatur- und Druckmessungen den Skalierungsfaktor und das Bias für eine barometrische Höhenschätzung bestimmen zu können.

### 6.3.3 Korrektur der Höhenmessung

Sind alle Fehlerparameter bekannt, so kann für eine nach (6.1) berechnete Höhe  $\tilde{h}_{\text{BM};k}$ , welche ausschließlich auf barometrischen Messungen beruht, eine korrigierte Höhe angegeben werden. Dazu wird Gl. (6.11) nach  $h_k$  umgestellt. Für die korrigierte Höhe  $\hat{h}_{\text{BM}}$  folgt dann:

$$\hat{h}_{\text{BM};k} = \frac{\tilde{h}_{\text{BM};k} - \hat{b}_{h,k}}{1 + \hat{s}_{h,k}}. \quad (6.23)$$

Neben dem korrigierten Höhenwert wird für das FF in Abb. 5.1 allerdings auch eine entsprechende Schätzfehlervarianz benötigt. Diese kann mit der hier beschriebenen Filterstruktur zur Bestimmung

des Skalierungsfaktors und des Bias nicht berechnet, sondern muss gesondert betrachtet werden. Zunächst wird dazu Gl. (6.11) in (6.23) eingesetzt und die Differenz zu  $h_k$  berechnet:

$$\begin{aligned}\hat{h}_{\text{BM};k} - h_k &= \frac{(1 + s_{h,k}) h_k + b_{h,k} + n_{h,k} - \hat{b}_{h,k}}{1 + \hat{s}_{h,k}} - h_k \\ &= \frac{h_k (s_{h,k} - \hat{s}_{h,k}) + (b_{h,k} - \hat{b}_{h,k}) + n_{h,k}}{1 + \hat{s}_{h,k}}.\end{aligned}\quad (6.24)$$

Setzt man  $\Delta s_{h,k} := s_{h,k} - \hat{s}_{h,k}$  und  $\Delta b_h := b_h - \hat{b}_h$  in Gl. (6.24) ein, so folgt:

$$\hat{h}_{\text{BM};k} - h_k = \frac{h_k \Delta s_{h,k} + \Delta b_{h,k} + n_{h,k}}{1 + s_{h,k} - \Delta s_{h,k}}. \quad (6.25)$$

Wenn man nun den Erwartungswert  $E \left[ \left( h_k - \hat{h}_{\text{BM};k} \right) \left( h_k - \hat{h}_{\text{BM};k} \right)^T \middle| z_{\Delta h}, z_{s_h} \right]$  auf Basis von Gl. (6.25) berechnen möchte, so erkennt man nach einigen Schritten, dass es sich hierbei um eine CAUCHY-Verteilung handelt, da ein Quotient aus zwei GAUSS-verteilten Zufallsvariablen vorliegt. Eine CAUCHY-Verteilung besitzt nach [HU07] weder einen Mittelwert noch eine Varianz. Daher kann auch in diesem Fall keine eindeutige Schätzfehlervarianz bestimmt werden. Zur Vereinfachung wird daher im Folgenden angenommen, dass für den Nenner in (6.25)  $1 + s_{h,k} - \Delta s_{h,k} \approx 1$  gilt. Des Weiteren werden die Kreuzkorrelationen zwischen dem Skalierungsfehler und dem Bias vernachlässigt. Aus diesen Annahmen folgt für die Schätzfehlervarianz:

$$E \left[ \left( h_k - \hat{h}_{\text{BM};k} \right) \left( h_k - \hat{h}_{\text{BM};k} \right)^T \middle| z_{\Delta h}, z_{s_h} \right] \approx \hat{h}_{\text{BM};k-1}^2 \cdot E \left[ (\Delta s_{h,k})^2 \right] + E \left[ (\Delta b_{h,k})^2 \right] + \sigma_{h,k}^2. \quad (6.26)$$

Hier wurde zusätzlich davon ausgegangen, dass die Höhenänderung zweier aufeinanderfolgender Höhengschätzwerte relativ klein ist, so dass  $\hat{h}_k = \hat{h}_{\text{BM};k-1}$  gesetzt werden kann. Wie mit den anschließenden Untersuchungen gezeigt wird, hat diese Approximation keinen signifikanten Einfluss auf das Schätzergebnis.

## 6.4 Ergebnisse

Um die Funktionsfähigkeit des Filters zu verdeutlichen, sollen im Folgenden einige Simulationsergebnisse auf Basis künstlich generierter Daten sowie realer Felddaten präsentiert werden. Die künstlichen Daten wurden dabei mit Hilfe der Matlab-Softwarepakete *SatNav 3.0* und *INS 3.0* generiert. Eine detaillierte Beschreibung ist in Anhang F zu finden.

Zunächst wird ein bekanntes reales Höhenprofil aus einem Datensatz verwendet, der bei einer Testfahrt im Umkreis von Paderborn mit dem barometrischen *USB-Sensor Toradex Pressure & Temperature 1.2* aufgenommen wurde. Bei diesem Profil wird davon ausgegangen, dass es sich um unverfälschte, hochgenaue Referenzhöhen handelt, bei denen keine Messungenauigkeiten vorhanden sind. Mit der Annahme geeigneter Referenzwerte  $P_0, T_0, \sigma_{T_0}^2$  und  $\sigma_{P_0}^2$  für die Höhe  $h_0$ , können nun Profile für den Temperatur- und Luftdruckverlauf entsprechend der barometrischen Höhenformel berechnet werden (siehe Anhang F). Die Messwerte für Temperatur und Druck wurden dabei nach den Werten in Tab. 6.2 erzeugt, wobei die Standardabweichungen jedoch um einen Faktor 10 erhöht wurden, so

dass die Änderungen für die folgenden Untersuchungen sichtbar sind. Außerdem wurden für die Standardabweichungen in Gl. (6.4) und (6.5)  $\sigma_T = 0,1 \text{ K}$  und  $\sigma_P = 10 \text{ Pa}$  gewählt.

Die Abb. 6.4 (a) zeigt das Referenzhöhenprofil (schwarz) und ein daraus generiertes verrauschtes barometrisches Höhenprofil (grün). Zudem ist das durch das Filter korrigierte Profil (rot) zu sehen. Für das Kartenabgleichverfahren wurde eine Datenbank angelegt, wobei die Datenbankeinträge  $h_{\text{Topo}}^{(i')}$  für  $i' \in [1, I']$  den idealen Höhen in einem zeitlichen Abstand von 60 s entsprechen. Es ist zu erkennen, dass die korrigierten Höhen nach der barometrischen Filterung nur unwesentlich von den idealen Daten abweichen. Das BF ist in der Lage, den Skalierungsfehler und das barometrische Bias zu kompensieren, ohne ein Messrauschen explizit zu berücksichtigen.

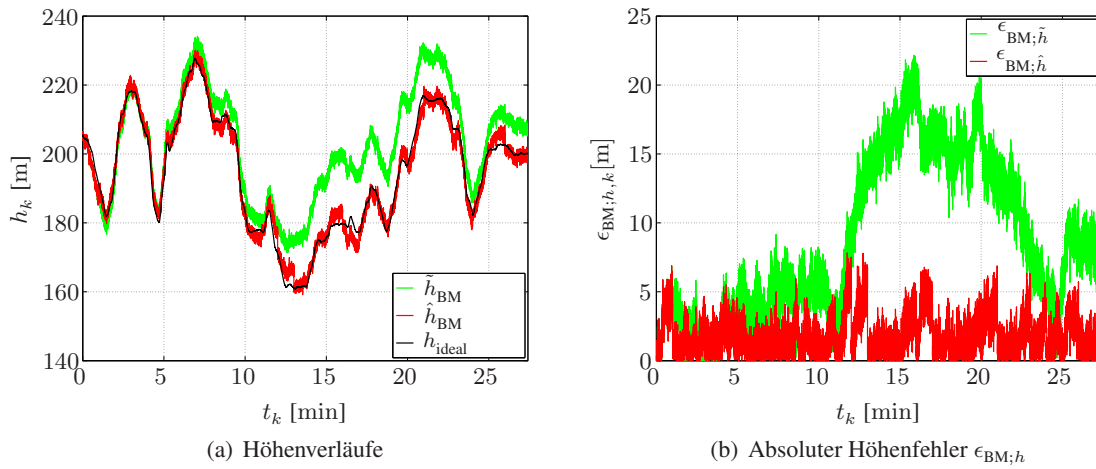


Abbildung 6.4: Höhenprofil nach barometrischer Höhenformel ohne und mit Korrektur

In Abb. 6.4 (b) ist der Höhenfehler  $\epsilon_{\text{BM};\tilde{h}} := |\tilde{h}_{\text{BM}} - h_{\text{ideal}}|$  ohne Korrektur (grün) bzw.  $\epsilon_{\text{BM};\hat{h}} := |\hat{h}_{\text{BM}} - h_{\text{ideal}}|$  mit Korrektur (rot) abgebildet. Wird nicht alle 60 s eine Korrektur durchgeführt, so ist deutlich zu erkennen, dass der Fehler mit fortlaufender Zeit aufgrund des zeitvarianten Bias zunimmt und bei ca. 15 min die größte Abweichung aufweist. Diese Abweichung wird nachfolgend zwar geringer, dennoch ist die Schätzfehlervarianz deutlich höher. Durch die Korrektur an den Referenzpunkten kann dieser Fehler deutlich reduziert werden, so dass ein mittlerer Höhenfehler von ca. 3 m verbleibt. Da übliche GPS-Messungen (bzw. -Schätzungen) teilweise deutliche Unterschiede zu den realen Höhen aufweisen können (bis zu 15 m) und hier des Weiteren relativ hohe Rauschvarianzen angenommen wurden, ist der hier ermittelte mittlere Fehler vergleichsweise gering.

Um die Zuverlässigkeit der Parameterschätzung zu bestätigen, sollen die Abb. 6.5 (a) und (b) betrachtet werden. Dabei können die theoretisch korrekten Werte mit den Filterausgangsgrößen des BF verglichen werden. Um die theoretischen Werte zu erhalten, wurden in Gl. (6.9) die Werte für  $s_h$  und  $b_h$  mit Hilfe der generierten Referenzdaten für die Temperatur bzw. den Luftdruck ausgewertet. Sowohl das Ergebnis für den Skalierungsfaktor als auch das für das Bias zeigt, dass die Abweichungen zwischen den theoretischen Parameterwerten (schwarz) und den entsprechenden Schätzungen (rot) gering sind. Es fällt zusätzlich auf, dass der Skalierungsfaktor nach einer Stunde maximal 2 % beträgt. Die Rauschparameter des dafür verantwortlichen RWP sind in Anlehnung an reale Werte gewählt worden. Bei den im rechten Teilbild dargestellten Schätzwerten ergeben sich größere Abweichungen, die auf die Linearisierung zurückzuführen sind. Des Weiteren ist zu erkennen, dass zwischen

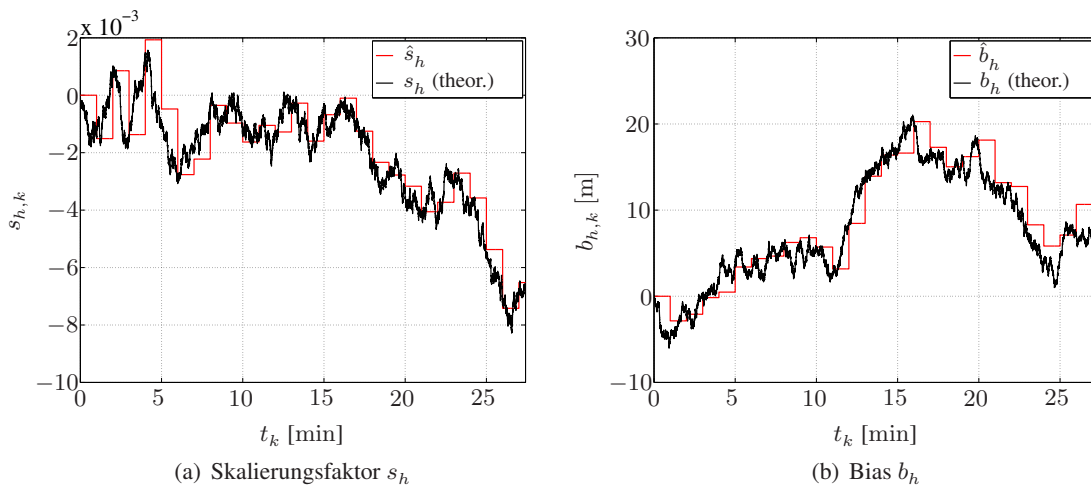


Abbildung 6.5: Theoretischer und geschätzter Skalierungsfaktor sowie Bias

den Verfügbarkeitszeitpunkten von Referenzhöhen die Schätzwerte konstant sind. Da davon ausgegangen wird, dass die Referenzdaten in einem relativ geringen zeitlichen Abstand zur Verfügung stehen, hat dieses allerdings keinen signifikanten Einfluss auf das Schätzergebnis. Diese Annahme ist auch deshalb erlaubt, da die Höhenschätzung weiterhin mit der Abtastfrequenz  $f_{\text{BM}}$  des barometrischen Sensors aktualisiert und korrigiert wird. Im ungünstigsten Fall würde lediglich eine geringe konstante Abweichung aus der Schätzung resultieren, die allerdings im Fall einer unkorrigierten, ungefilterten Messung auch vorhanden wäre. In Abb. 6.5 (b) liegt aufgrund der nicht vorhandenen Aktualisierung anhand von Messdaten die maximale Abweichung des geschätzten Bias zum idealen Wert bei ca. 8 m. Eine Prädiktion zwischen den Messwertaktualisierungen könnte den Fehler bei der Berechnung durch das BF verringern. Neben den genannten Gründen wird dieses jedoch vermieden, um den Berechnungsaufwand gering zu halten. Wie bereits erwähnt, wurden hier für die Parameter aus Tab. 6.2 zehnmal höhere Werte als angegeben gewählt. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass in einem realen System geringere Abweichungen aus den Schätzergebnissen resultieren würden.

### Zusammenfassung

Zu Beginn von Kap. 6 wurden die Grundlagen der barometrischen Höhenmessung erläutert, gefolgt von einer Systemübersicht der Struktur des Teilsystems, das verwendet wird, um barometrische Daten aufzubereiten. Als Teil des gesamten Navigationsfilters basiert dieses System auf einem KF und einer topografischen Datenbank. Das Filter wurde so entworfen, dass Skalierungsfehler und Bias der barometrischen Sensormessungen mit Hilfe topografischer Daten geschätzt werden können. Des Weiteren wurde beschrieben, wie die fehlerhaften Messungen korrigiert und dem INS zur Verfügung gestellt werden können. Zum Abschluss wurden Ergebnisse vorgestellt, die auf realen Höhenmessungen beruhen und mit simulierten Daten aufbereitet und gefiltert wurden. Die Ergebnisse zeigten, dass bei einer ausreichenden Anzahl topografischer Informationen die Fehler durch das BF mit hoher Genauigkeit geschätzt werden können und dadurch auch die Höhenschätzungen nur noch eine geringe Fehlervarianz aufweisen, wodurch unkorrigierte barometrische Messungen übertroffen werden.



## Kapitel 7

### Sequenzielle Parameterschätzung

In diesem Kapitel sollen die Verfahren zum Schätzen der statistischen Eigenschaften des Rauschens hergeleitet werden, welches das zeitkorrelierte Sensorrauschen treibt (siehe Abb. 5.1). Dazu wird u. a. ein in [TSM85] vorgestelltes und in [KM93], [DDA01] sowie [DDA03] für die Sprachsignalverarbeitung weiterentwickeltes Verfahren zur Rauschparameterschätzung für den Einsatz im Rahmen einer Fahrzeugortung modifiziert. Im Gegensatz zu [DDA03] und [WHU09], wo die Rauschkovarianzmatrix eines Messmodells geschätzt wird, soll hier die eines Systemmodells bestimmt werden. Um das Verfahren in Kombination mit dem hier verwendeten Fehlerfilter (FF) einsetzen zu können, müssen einige zusätzliche Filterschritte durchgeführt werden. Als Vergleichsansätze werden außerdem ein Verfahren auf Basis von Messwertdifferenzen sowie eines zur rekursiven Schätzung des Mittelwertes und der Varianz einer Verteilung vorgestellt.

#### 7.1 Sequenzieller *Expectation-Maximization*-Algorithmus

Die gesuchten Rauschparameter befinden sich, wie in Kap. 5.2.1 bereits gezeigt wurde, auf der Hauptdiagonalen der Systemrauschkovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\text{FF};k} := E \left[ \mathbf{n}_{\text{FF};k} \mathbf{n}_{\text{FF};k}^T \right]$ , die das inhärente Messrauschen der Inertialsensoren sowie das vibrationsinduzierte Rauschen nach Gl. (5.13) treibt. Um die Filterung mittels FF durchführen zu können, müssen sämtliche Parameter vollständig bekannt sein oder zumindest Schätzgrößen vorliegen. Systemtheoretisch ist die Schätzung der Modellparameter, welche nicht Teil des Zustandsvektors  $\mathbf{x}_{\text{FF}}$  sind, mit Hilfe des so genannten *Expectation-Maximization* (EM)-Algorithmus möglich [Moo96], [Bil98], [HL05]. Im ersten Schritt berechnet dieser den Erwartungswert der Zielfunktion, die im Falle der ML-Schätzung die *Log-Likelihood Function* (LLF) der kompletten Daten ist. Diese bestehen dabei aus einem beobachtbaren Anteil, den Messungen  $\mathbf{z}$ , und einem nicht-beobachtbaren Anteil, der im Folgenden durch den Zustandsvektor des KF gegeben ist. Im zweiten Schritt werden dann die Modellparameter so gewählt, dass dieser Erwartungswert maximiert wird. In der Literatur wird der EM-Algorithmus zu einer „blockorientierten“ Verarbeitung eingesetzt: Wenn eine ausreichende Anzahl an Beobachtungen  $\mathbf{z}$  vorliegt (ein „Block“), dann werden auf diesem Block iterativ die gesuchten Parameter geschätzt. Bei dieser Vorgehensweise wird vorausgesetzt, dass sich die Parameter über die Dauer des Blocks nicht ändern.

In [WHU09] wird der EM-Algorithmus so hergeleitet, dass die Schätzung der Diagonalelemente einer Messrauschkovarianzmatrix nicht mehr blockweise, sondern abtastwertweise erfolgen kann. Hier soll das Verfahren in abgewandelter Form für das Navigationsfilter eingesetzt werden, wobei jedoch die Kovarianzmatrix eines Rauschprozesses geschätzt werden soll, der Teil des Systemmodells und nicht Teil des Messmodells ist.

### 7.1.1 Herleitung der Gleichungen

In diesem Abschnitt soll zunächst allgemein die *ML*-Schätzung einer als zeitvariant angenommenen Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\eta,k}$  des Vektors  $\boldsymbol{\eta}_k \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$  und  $\boldsymbol{\eta}_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_k; \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}, \mathbf{Q}_{\eta,k})$  betrachtet werden, der das zeitlich korrelierte Systemrauschen  $\mathbf{n}_k \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$  mit

$$\mathbf{n}_k = \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{n}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_n \cdot \boldsymbol{\eta}_k \quad (7.1)$$

treibt. Anstelle eines Fehlerzustandsvektors, wie er beim FF vorhanden ist, wird hier zunächst ein allgemeiner Zustandsvektor  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{\mathcal{H}}$  betrachtet, der dem Systemmodell

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_k \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}_k \quad (7.2)$$

unterliegt.<sup>8</sup> Im Falle des blockweise arbeitenden *EM*-Algorithmus lautet die *LLF* der kompletten Daten  $\log(p(\mathbf{x}_{1:K}, \mathbf{z}_{1:K}; \mathbf{Q}_{\eta}))$ , wobei  $K$  die Länge des Intervalls mit der Beobachtungssequenz  $\mathbf{z}_{1:K} := \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_K$  ist und  $\mathbf{Q}_{\eta}$  innerhalb dieses Intervalls als konstant angenommen wird. Entsprechend ist  $\mathbf{x}_{1:K}$  eine Sequenz aus Zustandsvektoren. Die zwei Schritte des iterativen (blockweisen) *EM*-Algorithmus sind mit  $\mathcal{I}$  als Iterationsindex:

$$\tilde{L}_K(\mathbf{Q}_{\eta}, \hat{\mathbf{Q}}_{\eta}^{\{\mathcal{I}-1\}}) := E[\log(p(\mathbf{x}_{1:K}, \mathbf{z}_{1:K}; \mathbf{Q}_{\eta})) | \mathbf{z}_{1:K}; \hat{\mathbf{Q}}_{\eta}^{\{\mathcal{I}-1\}}] \quad (\text{E-Schritt}) \quad (7.3)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\eta}^{\{\mathcal{I}\}} = \underset{\mathbf{Q}_{\eta}}{\operatorname{argmax}} \left\{ \tilde{L}_K(\mathbf{Q}_{\eta}, \hat{\mathbf{Q}}_{\eta}^{\{\mathcal{I}-1\}}) \right\} \quad (\text{M-Schritt}). \quad (7.4)$$

Statt das Problem (7.3), (7.4) zu lösen, gehen wir unmittelbar auf eine abtastwertweise Schätzung über. Dies hat den Vorteil, dass keine Latenz aufgrund der blockweisen Verarbeitung entsteht und dass sich der Schätzwert für  $\mathbf{Q}_{\eta}$  von Abtastwert zu Abtastwert ändern kann, so dass einer Zeitvarianz von  $\mathbf{Q}_{\eta}$  besser Rechnung getragen werden kann (die Zeitvarianz von  $\mathbf{Q}_{\eta}$  wird im Folgenden wieder durch den zusätzlichen tiefgestellten Index  $k$  kenntlich gemacht, so dass  $\mathbf{Q}_{\eta,k}$  gilt).

**Aufstellung der Zielfunktion** Zunächst wird eine neue Zielfunktion  $\tilde{L}_k$  analog zu der in (7.3) definiert, wobei  $\mathbf{z}_{1:k}$  die Sequenz der Beobachtungsvektoren vom Zeitpunkt  $k = 1$  bis zum aktuellen Zeitpunkt  $k$  ist und  $\hat{\mathbf{Q}}_{\eta,1:k-1}$  der Parameterschätzwert, basierend auf  $\mathbf{z}_{1:k-1}$ . Da die Systemrauschkovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\eta,k}$  als Diagonalmatrix angenommen wird, kann der Berechnungsaufwand reduziert werden. Daher betrachten wir nachfolgend den Vektor  $\mathbf{q}_{\eta,k} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ , für den  $\operatorname{diag}(\mathbf{q}_{\eta,k}) =: \mathbf{Q}_{\eta,k}$  gilt. Hier bezeichnet  $\operatorname{diag}(\cdot)$  die Konvertierung eines Vektors in eine quadratische Diagonalmatrix, wobei der Vektor deren Hauptdiagonale bildet. Für die neue Zielfunktion gilt nun:

$$\tilde{L}_k(\mathbf{q}_{\eta}, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,1:k-1}) := E[\log(p(\mathbf{x}_{1:k}, \mathbf{z}_{1:k}; \mathbf{q}_{\eta})) | \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,1:k-1}]. \quad (7.5)$$

Vergleicht man Gl. (7.5) mit (7.3), so fällt auf, dass der Iterationsindex  $\mathcal{I}$  durch den Zeitindex  $k$  ersetzt wurde. Die Funktion  $\tilde{L}_k(\mathbf{q}_{\eta}, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,1:k-1})$  kann durch Anwendung von (E.9) geschrieben werden als

<sup>8</sup>Neben  $\mathcal{D}$  bezeichnet hier auch  $\mathcal{H}$  eine allgemeine Dimension (hier die Dimension des Zustandsvektors  $\mathbf{x}_k$ ).

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,1:k-1}) &= c + \sum_{\kappa=2}^k E \left[ \log(p(\mathbf{x}_\kappa | \mathbf{x}_{\kappa-1}; \mathbf{q}_\eta)) \mid \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right] \\
&\approx c + \sum_{\kappa=2}^{k-1} E \left[ \log(p(\mathbf{x}_\kappa | \mathbf{x}_{\kappa-1}; \mathbf{q}_\eta)) \mid \mathbf{z}_{1:\kappa}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,\kappa-1} \right] \\
&\quad + E \left[ \log(p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{q}_\eta)) \mid \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right] \\
&= \tilde{L}_{k-1}(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,1:k-2}) + \tilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}), \tag{7.6}
\end{aligned}$$

wobei  $\tilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) := E \left[ \log(p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{q}_\eta)) \mid \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right]$  der Anteil der Zielfunktion ist, der mit Hinzunahme der aktuellen Beobachtungen und des zum vorherigen Zeitpunkt geschätzten Varianzvektors  $\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}$  in  $\tilde{L}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,1:k-1})$  einfließt. Hier wurde ausgenutzt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(\mathbf{z}_{1:k} | \mathbf{x}_{1:k})$  und  $p(\mathbf{x}_1)$  unabhängig von  $\mathbf{q}_\eta$  und deren Erwartungswerte daher konstant gegenüber dem gesuchten Parameter sind. Ihr Beitrag zur Zielfunktion ist in der Konstanten  $c$  zusammengefasst (siehe auch Anhang E.1). Die Approximation im zweiten Schritt von (7.6) liegt darin, dass zur abtastwertweisen Verarbeitung der jeweilige bedingte Erwartungswert in der Summe aus Kausalitätsgründen nur auf Basis der Beobachtungssequenz  $\mathbf{z}_{1:\kappa}$  und der Schätzung  $\hat{\mathbf{q}}_{\eta,\kappa-1}$  berechnet werden kann (die Beobachtung  $\mathbf{z}_k$  kann zum Zeitpunkt  $k-1$  nicht vorhanden sein). Um dem aktuellen Beitrag zur Zielfunktion höheres Gewicht verleihen zu können, wird ein zusätzlicher heuristischer Faktor  $\gamma$  mit  $0 < \gamma < 1$  verwendet. Dieses führt zu folgender Rekursionsgleichung:

$$\tilde{L}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,1:k-1}) = \gamma \cdot \tilde{L}_{k-1}(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,1:k-2}) + \tilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}). \tag{7.7}$$

Das sequenzielle Schätzproblem lautet nun

$$\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{q}_\eta} \left\{ \tilde{L}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,1:k-1}) \right\} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{q}_\eta} \left\{ -\tilde{L}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,1:k-1}) \right\}, \tag{7.8}$$

d. h. der Schätzwert für den Systemrauschvarianzvektor  $\mathbf{q}_\eta$  ergibt sich als derjenige Wert, der die Zielfunktion  $\tilde{L}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,1:k-1})$  maximiert.

Als nächstes soll der aktuelle Beitrag  $\tilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})$  zur Zielfunktion näher betrachtet werden, um schließlich eine rekursive Schätzvorschrift zu gewinnen. Wir kombinieren zunächst die beiden Systemgleichungen (7.1) und (7.2), wodurch man

$$\mathbf{x}_k = \Phi_k \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \underbrace{\mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{n}_{k-1} + \mathbf{G}_k \Gamma_n \cdot \boldsymbol{\eta}_k}_{\mathbf{G}_k \mathbf{n}_k} \tag{7.9}$$

erhält. Würde man  $\mathbf{n}_{k-1}$  kennen, so würde an dieser Stelle

$$\tilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) = E \left[ \log(p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{n}_{k-1}; \mathbf{q}_\eta)) \mid \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right] \tag{7.10}$$

mit  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{n}_{k-1}; \mathbf{q}_\eta) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \Phi_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{G}_k \Gamma_n \operatorname{diag}(\mathbf{q}_\eta) \Gamma_n^T \mathbf{G}_k^T)$  gelten. Da  $\mathbf{n}_{k-1}$  jedoch unbekannt ist, muss die Likelihood

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{q}_\eta) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \Phi_k \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)) \tag{7.11}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta) &:= \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{nn,k} \mathbf{G}_k^T \\
&= \mathbf{G}_k (\mathbf{D}_n \mathbf{P}_{nn,k-1} \mathbf{D}_n^T + \Gamma_n \operatorname{diag}(\mathbf{q}_\eta) \Gamma_n^T) \mathbf{G}_k^T \tag{7.12}
\end{aligned}$$

und  $\mathbf{P}_{nn,k-1} := E[\mathbf{n}_{k-1}\mathbf{n}_{k-1}^T]$  berechnet werden. Mit der Abkürzung  $\Delta\mathbf{x}_k := \mathbf{x}_k - \Phi_k\mathbf{x}_{k-1}$  kann  $\widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})$  durch

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) &= E[\log(p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{q}_\eta)) | \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}] \\ &= -\frac{\mathcal{H}}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\det\{\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)\}) \Big|_{\mathbf{q}_\eta=\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}} \\ &\quad - \frac{1}{2} E[\Delta\mathbf{x}_k^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \Delta\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}]\end{aligned}\quad (7.13)$$

ausgedrückt werden, wobei  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{\mathcal{H}}$  sei. Da mit Gl. (E.2)

$$\Delta\mathbf{x}_k^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \Delta\mathbf{x}_k = \text{spur}\left\{(\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \Delta\mathbf{x}_k \Delta\mathbf{x}_k^T\right\} \quad (7.14)$$

gilt, kann (7.13) zu

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) &= -\frac{\mathcal{H}}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\det\{\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)\}) \Big|_{\mathbf{q}_\eta=\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{spur}\left\{(\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \Big|_{\mathbf{q}_\eta=\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}} \cdot E[\Delta\mathbf{x}_k \Delta\mathbf{x}_k^T | \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}]\right\}\end{aligned}\quad (7.15)$$

vereinfacht werden. Damit eine übersichtlichere Betrachtung der folgenden Gleichungen möglich ist, werden wir im Folgenden die Abkürzung  $\mathbf{E}_k := E[\Delta\mathbf{x}_k \Delta\mathbf{x}_k^T | \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}]$  verwenden. Zur Maximierung von Gl. (7.7) soll nun das NEWTON-Verfahren verwendet werden [WHU09]:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k} = \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} - (\mathbf{V}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) - \alpha_k \cdot \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}})^{-1} \mathbf{s}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}), \quad (7.16)$$

wobei der Gradientenvektor durch

$$\mathbf{s}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) := \frac{\partial \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})}{\partial \mathbf{q}_\eta} \Big|_{\mathbf{q}_\eta=\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}} \quad (7.17)$$

und die HESSE-Matrix durch

$$\mathbf{V}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) := \frac{\partial^2 \widetilde{L}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})}{\partial \mathbf{q}_\eta \partial \mathbf{q}_\eta^T} \Big|_{\mathbf{q}_\eta=\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}} \quad (7.18)$$

gegeben sind. Bei der Anwendung des NEWTON-Verfahrens kann es zu numerischen Instabilitäten kommen [KSDA10]. Diese können auftreten, wenn die HESSE-Matrix annähernd singular wird und damit deren Inverse möglicherweise falsch berechnet wird. Um sicherzustellen, dass Gl. (7.16) weiterhin zum lokalen Maximum konvergiert, muss die HESSE-Matrix negativ definit sein. Dieses wird erreicht, indem eine mit dem Faktor  $\alpha_k$  gewichtete Einheitsmatrix von der aktuellen HESSE-Matrix subtrahiert wird, so dass negative Definitheit der zu invertierenden Matrix sichergestellt ist. Der Faktor  $\alpha_k$  wird dabei in Abhängigkeit des maximalen Eigenwertes von  $\mathbf{V}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})$  gewählt:

$$\alpha_k = \begin{cases} \max\left\{\text{eig}\left(\mathbf{V}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})\right)\right\} + 1 \cdot 10^{-4}, & \text{falls } \max\left\{\text{eig}\left(\mathbf{V}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})\right)\right\} \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.19)$$

Um auch die HESSE-Matrix mittels einer rekursiven Vorschrift berechnen zu können, wird die zweite Ableitung von (7.7) gebildet:

$$\mathbf{V}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) = \gamma \cdot \mathbf{V}_{k-1}(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-2}) + \mathbf{J}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}), \quad (7.20)$$

wobei

$$\mathbf{J}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) := \frac{\partial^2 \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})}{\partial \mathbf{q}_\eta \partial \mathbf{q}_\eta^T} \bigg|_{\mathbf{q}_\eta = \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}} = \frac{\partial \mathbf{s}_k(\mathbf{q}_{\eta,k-1})}{\partial \mathbf{q}_\eta^T} \bigg|_{\mathbf{q}_\eta = \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}. \quad (7.21)$$

Durch die Anwendung des NEWTON-Verfahrens ist jedoch noch nicht gewährleistet, dass die später geschätzten Varianzen im Vektor  $\hat{\mathbf{q}}_\eta$  positiv sind. Des Weiteren können numerische Instabilitäten bei der Berechnung der HESSE-Matrix auftreten. Aus diesem Grund werden die Berechnungen in (7.16) und (7.20) mit  $\tilde{\mathbf{q}}_\eta := \log(\mathbf{q}_\eta)$  durchgeführt [KSDA10]. Nach der Schätzung des Logarithmus des gesuchten Varianzvektors wird eine Rücktransformation mit  $\hat{\mathbf{q}}_\eta = e^{\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_\eta}$  vorgenommen. Für die modifizierten Rekursionsgleichungen folgt dann mit Hinzunahme eines zeitvarianten Schrittweitenfaktors  $\varpi_k$ :

$$\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k} = \hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1} - \varpi_k \left( \mathbf{V}_k(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}) - \alpha_k \cdot \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} \right)^{-1} \mathbf{s}_k(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}) \quad (7.22)$$

$$\mathbf{V}_k(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}) = \gamma \cdot \mathbf{V}_{k-1}(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-2}) + \mathbf{J}_k(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}), \quad (7.23)$$

wobei

$$\mathbf{s}_k(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}) := \frac{\partial \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_\eta} \bigg|_{\mathbf{q}_\eta = e^{\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}}} \quad (7.24)$$

und

$$\mathbf{J}_k(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}) := \frac{\partial^2 \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_\eta \partial \tilde{\mathbf{q}}_\eta^T} \bigg|_{\mathbf{q}_\eta = e^{\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}}} = \frac{\partial \mathbf{s}_k(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_\eta^T} \bigg|_{\mathbf{q}_\eta = e^{\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}}}. \quad (7.25)$$

Während  $\alpha_k$  vom maximalen Eigenwert von  $\mathbf{V}_k(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1})$  abhängt, wird eine effiziente Schrittweite  $\varpi$  anhand der ARMIJO-Regel gewählt [Fro04]:

$$\varpi_k = \max \left\{ \beta_A^l \mid \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta + \beta_A^l \mathbf{d}_A, \hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}) \leq \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}) + \sigma_A \beta_A^l \mathbf{s}_k^T(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}) \mathbf{d}_A, \quad l \in \mathbb{N}_0 \right\}, \quad (7.26)$$

wobei  $\mathbf{d}_A := \left( \mathbf{V}_k(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}) - \alpha_k \cdot \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} \right)^{-1} \mathbf{s}_k(\hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1})$  und  $\beta_A, \sigma_A \in [0, 1]$  ist. In der Literatur werden diese Werte häufig zu  $\beta_A = 0,7, \sigma_A = 0,1$  gewählt, siehe z. B. [BB10]. Dies führt dazu, dass die Konvergenzgeschwindigkeit bei Bedarf reduziert und damit das NEWTON-Verfahren stabilisiert wird.

Wegen (7.12) und da für den Gradientenvektor  $\mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$  gilt, ist die totale Ableitung von  $\widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\tilde{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1})$  bezüglich der  $j'$ -ten Komponente  $\tilde{q}_\eta^{(j')} = \log(q_\eta^{(j')})$  nach Anwendung der Kettenregel u. a. abhängig von der partiellen Ableitung der einzelnen Komponenten von  $\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)$ . Dabei

sei  $U_k^{(m',f')}(\mathbf{q}_\eta)$  die Komponente in der  $m'$ -ten Reihe und  $f'$ -ten Spalte von  $\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)$ :

$$\frac{\partial \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})}{\partial \tilde{q}_\eta^{(j')}} = \sum_{m'=1}^{\mathcal{H}} \sum_{f' \geq m'}^{\mathcal{H}} \sum_{c'=1}^{\mathcal{D}} \frac{\partial \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})}{\partial U_k^{(m',f')}(\mathbf{q}_\eta)} \cdot \frac{\partial U_k^{(m',f')}(\mathbf{q}_\eta)}{\partial q_\eta^{(c')}} \cdot \frac{\partial q_\eta^{(c')}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(j')}} \Bigg|_{\mathbf{q}_\eta = \mathbf{e}^{\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}} . \quad (7.27)$$

Hierbei fällt auf, dass die zweite Summe lediglich über die Komponenten der oberen Dreiecksmatrix von  $\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)$  angewendet wird. Man nutzt an dieser Stelle bereits die Symmetrie der Matrix  $\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)$  aus [PP08]. Allerdings muss die Symmetrie von  $\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)$  auch bei den partiellen Ableitungen berücksichtigt werden, wie die folgenden Gleichungen zeigen. Die dritte Summe in Gl. (7.27) kann entfallen, da  $\frac{\partial q_\eta^{(c')}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(j')}} \neq 0$  lediglich für  $c' = j'$  ist. Auch dieses wird im Folgenden näher erläutert.

Mit (7.15) lautet der erste Term auf der rechten Seite von (7.27)

$$\frac{\partial \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})}{\partial U_k^{(m',f')}(\mathbf{q}_\eta)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log(\det \{\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)\})}{\partial U_k^{(m',f')}(\mathbf{q}_\eta)} - \frac{1}{2} \frac{\partial \text{spur} \{(\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k\}}{\partial U_k^{(m',f')}(\mathbf{q}_\eta)} \Bigg|_{\mathbf{q}_\eta = \mathbf{e}^{\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}} . \quad (7.28)$$

Da neben  $\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)$  auch  $\mathbf{E}_k$  eine symmetrische Matrix ist, gilt mit (E.4) bis (E.6) nach [Fuk90]:

$$\frac{\partial \log(\det \{\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)\})}{\partial U_k^{(m',f')}(\mathbf{q}_\eta)} = (2 - \delta_{m'f'}) \mathbf{a}_{m'}^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{a}_{f'} \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial \text{spur} \{(\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k\}}{\partial U_k^{(m',f')}(\mathbf{q}_\eta)} = -(2 - \delta_{m'f'}) \mathbf{a}_{m'}^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{a}_{f'}, \quad (7.30)$$

wobei  $\mathbf{a}_{m'} = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)^T$  einen Vektor darstellt, der aus Nullen besteht, bis auf die  $m'$ -te Stelle, an der eine Eins steht. Der Term  $\delta_{m'f'}$  ist hier das so genannte KRONECKER-Delta, wobei  $\delta_{m'f'} = 1$  für  $m' = f'$  und sonst  $\delta_{m'f'} = 0$  gilt. Damit können jetzt die Gl. (7.29) und (7.30) in (7.28) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})}{\partial U_k^{(m',f')}(\mathbf{q}_\eta)} &= -\frac{1}{2} (2 - \delta_{m'f'}) \mathbf{a}_{m'}^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{a}_{f'} \\ &\quad + \frac{1}{2} (2 - \delta_{m'f'}) \mathbf{a}_{m'}^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{a}_{f'} \Bigg|_{\mathbf{q}_\eta = \mathbf{e}^{\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}} \\ &= -\frac{1}{2} (2 - \delta_{m'f'}) \mathbf{a}_{m'}^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta) - \mathbf{E}_k) (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{a}_{f'} \Bigg|_{\mathbf{q}_\eta = \mathbf{e}^{\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}} . \end{aligned} \quad (7.31)$$

Der zweite Ausdruck auf der rechten Seite in (7.27) ist mit  $j' = c'$  wie folgt gegeben:

$$\frac{\partial U_k^{(m',f')}(\mathbf{q}_\eta)}{\partial q_\eta^{(j')}} = \frac{\partial U_k^{(f',m')}(\mathbf{q}_\eta)}{\partial q_\eta^{(j')}} = \tilde{G}_k^{(m',j')} \tilde{G}_k^{(f',j')}, \quad (7.32)$$



wobei  $\tilde{G}_k^{(m',j')}$  in der Matrix  $\tilde{\mathbf{G}}_k := \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{\Gamma}_n$  das Element in der  $m'$ -ten Reihe und  $j'$ -ten Spalte ist. Für den letzten Ausdruck gilt:

$$\frac{\partial q_\eta^{(j')}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(j')}} = e^{\tilde{q}_\eta^{(j')}} = q_\eta^{(j')}. \quad (7.33)$$

Mit (7.31) bis (7.33) resultiert nun für die  $j'$ -te Komponente von  $\mathbf{s}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})$ :

$$\begin{aligned} s_k^{(j')}(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) &= \left. \frac{\partial \tilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})}{\partial \tilde{q}_\eta^{(j')}} \right|_{\mathbf{q}_\eta = \mathbf{e}^{\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}} \\ &= -\frac{1}{2} q_\eta^{(j')} \sum_{m'=1}^{\mathcal{H}} \sum_{f' \geq m'}^{\mathcal{H}} (2 - \delta_{m'f'}) \tilde{G}_k^{(m',j')} \tilde{G}_k^{(f',j')} \mathbf{a}_{m'}^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \\ &\quad \cdot (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta) - \mathbf{E}_k) (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{a}_{f'} \Big|_{\mathbf{q}_\eta = \mathbf{e}^{\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}} \\ &= -\frac{1}{2} q_\eta^{(j')} \sum_{m'=1}^{\mathcal{H}} \sum_{f'=1}^{\mathcal{H}} \tilde{G}_k^{(m',j')} \tilde{G}_k^{(f',j')} \mathbf{a}_{m'}^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta) - \mathbf{E}_k) (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{a}_{f'} \Big|_{\mathbf{q}_\eta = \mathbf{e}^{\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Zur Bestimmung der HESSE-Matrix wird auch noch die zweite Ableitung von  $\tilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})$  benötigt. Für die einzelnen Einträge des aktuellen Anteils  $\mathbf{J}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})$  an der HESSE-Matrix erhält man unter Verwendung der Produktregel und  $\frac{\partial q_\eta^{(j')}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(r')}} = 0$  für  $j' \neq r'$  mit  $r' = 1, \dots, \mathcal{D}$ :

$$\begin{aligned} J_k^{(j',r')}(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) &= \left. \frac{\partial^2 \tilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})}{\partial \tilde{q}_\eta^{(j')} \partial (\tilde{q}_\eta^{(r')})^T} \right|_{\mathbf{q}_\eta = \mathbf{e}^{\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m'=1}^{\mathcal{H}} \sum_{f'=1}^{\mathcal{H}} \tilde{G}_k^{(m',j')} \tilde{G}_k^{(f',j')} \mathbf{a}_{m'}^T \left( \frac{\partial q_\eta^{(j')}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(r')}} \left( (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} - (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + q_\eta^{(j')} \frac{\partial \left( (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} - (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \right)}{\partial \tilde{q}_\eta^{(r')}} \right) \mathbf{a}_{f'} \Big|_{\mathbf{q}_\eta = \mathbf{e}^{\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}} \\ &= -\frac{1}{2} q_\eta^{(j')} \delta_{j'r'} \sum_{m'=1}^{\mathcal{H}} \sum_{f'=1}^{\mathcal{H}} \tilde{G}_k^{(m',j')} \tilde{G}_k^{(f',j')} \mathbf{a}_{m'}^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta) - \mathbf{E}_k) (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{a}_{f'} \\ &\quad - \frac{1}{2} q_\eta^{(j')} \sum_{m'=1}^{\mathcal{H}} \sum_{f'=1}^{\mathcal{H}} \tilde{G}_k^{(m',j')} \tilde{G}_k^{(f',j')} \mathbf{a}_{m'}^T \sum_{o'=1}^{\mathcal{H}} \sum_{s' \geq o'}^{\mathcal{H}} \frac{\partial \left( (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} - (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \right)}{\partial U_k^{(o',s')}(\mathbf{q}_\eta)} \\ &\quad \cdot \frac{\partial U_k^{(o',s')}(\mathbf{q}_\eta)}{\partial q_\eta^{(r')}} \cdot \frac{\partial q_\eta^{(r')}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(r')}} \mathbf{a}_{f'} \Big|_{\mathbf{q}_\eta = \mathbf{e}^{\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Um Gl. (7.35) zu lösen, wird wieder die Produktregel angewendet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k(\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1}}{\partial U_k^{(o',s')}(\mathbf{q}_\eta)} &= \frac{\partial (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1}}{\partial U_k^{(o',s')}(\mathbf{q}_\eta)} \mathbf{E}_k(\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \\ &\quad + (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k \frac{\partial (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1}}{\partial U_k^{(o',s')}(\mathbf{q}_\eta)}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

In (7.36) sowie in dem verbleibenden Term in (7.35) wird schließlich noch der Zusammenhang

$$\frac{\partial (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1}}{\partial U_k^{(o',s')}(\mathbf{q}_\eta)} = -(2 - \delta_{o's'}) (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{a}_{o'} \mathbf{a}_{s'}^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \quad (7.37)$$

benötigt. Mit einigen Vereinfachungen und der Tatsache, dass die erste Zeile von (7.35) dem Gradienten  $s_k^{(j')} \left( \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right)$  für  $j' = r'$  entspricht, erhalten wir letztlich

$$\begin{aligned} J_k^{(j',r')} \left( \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right) &= \delta_{j'r'} s_k^{(j')} \left( \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right) - \frac{1}{2} q_\eta^{(j')} q_\eta^{(r')} \sum_{m'=1}^{\mathcal{H}} \sum_{f'=1}^{\mathcal{H}} \sum_{o'=1}^{\mathcal{H}} \sum_{s'=1}^{\mathcal{H}} \tilde{G}_k^{(m',j')} \tilde{G}_k^{(f',j')} \tilde{G}_k^{(o',r')} \tilde{G}_k^{(s',r')} \\ &\quad \cdot \mathbf{a}_{m'}^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \left( \mathbf{a}_{o'} \mathbf{a}_{s'}^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k + \mathbf{E}_k (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{a}_{o'} \mathbf{a}_{s'}^T - \mathbf{a}_{o'} \mathbf{a}_{s'}^T \right) \\ &\quad \cdot (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{a}_{f'} \Big|_{\mathbf{q}_\eta = \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Neben den bereits genannten Modifikationen sollen abschließend noch durch

$$\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k} \leftarrow \min \left\{ \max \left\{ \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k}, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} - \beta \right\}, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} + \beta \right\} \quad (7.39)$$

die Änderungen der Varianzen in einem Aktualisierungsintervall begrenzt werden, um weitere Stabilität bei der Berechnung zu gewährleisten. Dabei ist  $\beta$  ein heuristischer Faktor, der im Rahmen dieser Arbeit zu  $\beta = 0,01$  gewählt ist. Dieser führt dazu, dass die Schätzungen um höchstens 1 % von Iteration zu Iteration schwanken.

**Erwartungswertberechnung** Bei den bisherigen Berechnungsschritten wurde die Matrix  $\mathbf{E}_k$  nicht näher betrachtet. Da  $\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \Phi_k \mathbf{x}_{k-1}$  gilt, erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k &= E \left[ \Delta \mathbf{x}_k \Delta \mathbf{x}_k^T | \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right] =: E \left[ \Delta \mathbf{x}_k \Delta \mathbf{x}_k^T | \dots \right] \\ &= E \left[ \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T | \dots \right] - \Phi_k E \left[ \mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_k^T | \dots \right] - E \left[ \mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}^T | \dots \right] \Phi_k^T + \Phi_k E \left[ \mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T | \dots \right] \Phi_k^T. \end{aligned} \quad (7.40)$$

In Anhang E.1 wird gezeigt, dass

$$E \left[ \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T | \dots \right] = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T + \hat{\mathbf{P}}_{k|k} \quad (7.41)$$

$$E \left[ \mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T | \dots \right] = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^T + \hat{\mathbf{P}}_{k-1|k} \quad (7.42)$$

$$E \left[ \mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}^T | \dots \right] = \left( E \left[ \mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_k^T | \dots \right] \right)^T = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^T + \hat{\mathbf{P}}_{k,k-1|k} \quad (7.43)$$

gilt. Die in (7.43) aufgeführte Matrix

$$\hat{\mathbf{P}}_{k,k-1|k} := E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right) \left( \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k} \right)^T \Big| \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right] \quad (7.44)$$

wird auch als *Lag-One*-Kovarianzmatrix des Schätzfehlers bezeichnet, in welcher die Korrelationen zwischen  $\mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{x}_{k-1}$  berücksichtigt werden. Die Berechnung von (7.41) bis (7.44) ist möglich, indem man die Systemgleichung und die Messgleichung erweitert. Die Kovarianzmatrizen  $\hat{\mathbf{P}}_{k|k}$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_{k-1|k}$  und  $\hat{\mathbf{P}}_{k,k-1|k}$  sind dabei Teil der Schätzfehlerkovarianzmatrix, die sich aus der Filterung ergibt. Dies führt allerdings zu einigen Besonderheiten, die nachfolgend näher erläutert werden.

### 7.1.2 Details zur Umsetzung

**Vereinfachte Berechnung von Gradientenvektor und HESSE-Matrix** Die Umsetzung der sequenziellen Parameterschätzung nach den Gl. (7.34) und (7.38) ist aufgrund der Summanden äußerst rechenintensiv. Da nach [PP08] für (7.27) auch

$$\frac{\partial \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})}{\partial \tilde{q}_\eta^{(j')}} = \text{spur} \left\{ \left( \frac{\partial \widetilde{W}_k(\mathbf{q}_\eta, \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1})}{\partial \mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)} \right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta)}{\partial \tilde{q}_\eta^{(j')}} \right\} \bigg|_{\mathbf{q}_\eta = \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}} \quad (7.45)$$

geschrieben werden kann, lässt sich die Berechnung des Gradientenvektors und die des aktuellen Anteils an der HESSE-Matrix vereinfachen. Mit (7.45) würde nach einigen Umrechnungen für die  $j'$ -te Komponente des Gradientenvektors

$$s_k^{(j')}(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) = -\frac{1}{2} q_\eta^{(j')} \mathbf{a}_{j'}^T \tilde{\mathbf{G}}_k^T \left( (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} - (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \right) \tilde{\mathbf{G}}_k \mathbf{a}_{j'} \bigg|_{\mathbf{q}_\eta = \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}} \quad (7.46)$$

und damit für den gesamten Gradientenvektor

$$\mathbf{s}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) = -\frac{1}{2} \text{diag}^{-1} \left( \tilde{\mathbf{G}}_k^T \left( (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} - (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \right) \tilde{\mathbf{G}}_k \right) \otimes \mathbf{q}_\eta \bigg|_{\mathbf{q}_\eta = \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}} \quad (7.47)$$

folgen, wobei  $\otimes$  hier eine elementweise Multiplikation darstellt und  $\text{diag}^{-1}(\dots)$  die Konvertierung der Diagonalelemente einer Matrix in einen Spaltenvektor beschreibt. Entsprechend erhält man durch Umformung von (7.38) für den Anteil der HESSE-Matrix, der zum Zeitpunkt  $k$  hinzukommt:

$$\mathbf{J}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Theta}_k + \text{diag} \left( \mathbf{s}_k(\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}) \right), \quad (7.48)$$

wobei der letzte Summand eine Diagonalmatrix ist, die aus den Elementen des Gradientenvektors gebildet wird. Außerdem ist die  $j'$ -te Zeile der Matrix  $\boldsymbol{\Theta}_k \in \mathbb{R}^{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$  mit  $j' \in [1, \mathcal{D}]$  und der Abkürzung  $\tilde{\mathbf{G}}_k^{(1:\mathcal{H},j')} := \tilde{\mathbf{G}}_k \mathbf{a}_{j'}$  durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}_k^{(j',1:\mathcal{D})} = & \text{diag}^{-T} \left( \tilde{\mathbf{G}}_k^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \left( \tilde{\mathbf{G}}_k^{(1:\mathcal{H},j')} \left( \tilde{\mathbf{G}}_k^{(1:\mathcal{H},j')} \right)^T - \mathbf{E}_k (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_k^{(1:\mathcal{H},j')} \left( \tilde{\mathbf{G}}_k^{(1:\mathcal{H},j')} \right)^T \right. \right. \\ & \left. \left. - \tilde{\mathbf{G}}_k^{(1:\mathcal{H},j')} \left( \tilde{\mathbf{G}}_k^{(1:\mathcal{H},j')} \right)^T (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \mathbf{E}_k \right) (\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_\eta))^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_k q_\eta^{(j')} \right) \otimes \mathbf{q}_\eta^T \bigg|_{\mathbf{q}_\eta = \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}} \end{aligned} \quad (7.49)$$

gegeben.  $\text{diag}^{-T}(\dots)$  bezeichnet dabei die Konvertierung der Diagonalelemente einer Matrix in einen Zeilenvektor.

**Iterativer sequenzieller *Expectation-Maximization-Algorithmus*** In Anlehnung an die Gl. (7.3) und (7.4) lässt sich, ähnlich wie in [DDA03], auch hier die Leistungsfähigkeit durch zusätzliches Iterieren innerhalb eines Zeitschrittes erhöhen, weil dadurch eine schnellere Konvergenz zum lokalen Maximum erreicht werden kann. In Algorithmus (Alg.) 1 sind nochmals, unter Berücksichtigung eines zusätzlichen Iterationsindex, die notwendigen Schritte des Verfahrens zusammengefasst. Dabei sei  $\mathcal{I}_{\max}$  die maximale Iterationsanzahl und  $\iota$  eine vorab definierte Schranke.

---

**Algorithmus 1:** Verarbeitungsschritte des sequenziellen *EM-Algorithmus*

---

```

1  wiederhole
2      wenn  $\mathcal{I} = 1$  dann
3           $\hat{\mathbf{q}}_\eta \leftarrow \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}^{\{\mathcal{I}_{\max}\}}$ 
4           $\hat{\hat{\mathbf{q}}}_\eta \leftarrow \hat{\hat{\mathbf{q}}}_{\eta,k-1}^{\{\mathcal{I}_{\max}\}}$ 
5      sonst
6           $\hat{\mathbf{q}}_\eta \leftarrow \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k}^{\{\mathcal{I}\}}$ 
7           $\hat{\hat{\mathbf{q}}}_\eta \leftarrow \hat{\hat{\mathbf{q}}}_{\eta,k}^{\{\mathcal{I}-1\}}$ 
8      Berechnung von  $\mathbf{U}_k(\hat{\mathbf{q}}_\eta)$  mit Gl. (7.12)
9      Berechnung von  $\mathbf{E}_k$  mit Gl. (7.40) unter Verwendung von  $\hat{\mathbf{q}}_\eta$ 
10     Berechnung des Gradientenvektors  $\mathbf{s}_k^{\{\mathcal{I}\}}(\hat{\hat{\mathbf{q}}}_\eta)$  anhand von (7.47)
11     Berechnung von  $\mathbf{J}_k^{\{\mathcal{I}\}}(\hat{\hat{\mathbf{q}}}_\eta)$  unter Verwendung von Gl. (7.48)
12     Berechnung der HESSE-Matrix  $\mathbf{V}_k^{\{\mathcal{I}\}}(\hat{\hat{\mathbf{q}}}_\eta)$  mit (7.23)
13     Bestimmung der optimalen Schrittweite  $\varpi$  anhand der ARMIJO-Regel (7.26)
14     Berechnung von  $\hat{\hat{\mathbf{q}}}_{\eta,k}^{\{\mathcal{I}\}} = \hat{\hat{\mathbf{q}}}_\eta - \varpi_k \left( \mathbf{V}_k^{\{\mathcal{I}\}}(\hat{\hat{\mathbf{q}}}_\eta - \alpha_k \cdot \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}) \right)^{-1} \mathbf{s}_k^{\{\mathcal{I}\}}(\hat{\hat{\mathbf{q}}}_\eta)$  mit (7.22)
15     Minimierung von starken Schwankungen in der Varianzschätzung mittels (7.39)
16     wenn  $\mathcal{I} \leq \mathcal{I}_{\max}$  dann
17         wenn  $\left| \hat{\hat{\mathbf{q}}}_{\eta,k}^{\{\mathcal{I}\}} \right| / \left| \hat{\hat{\mathbf{q}}}_{\eta,k}^{\{\mathcal{I}-1\}} \right| > \iota$  dann
18              $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} + 1$ 
19     sonst
20          $\hat{\hat{\mathbf{q}}}_{\eta,k}^{\{\mathcal{I}_{\max}\}} \leftarrow \hat{\hat{\mathbf{q}}}_{\eta,k}^{\{\mathcal{I}\}}$ 
21          $k \leftarrow k + 1$ 
22          $\mathcal{I} \leftarrow 1$ 
23 bis Abbruchbedingung erfüllt

```

---

### 7.1.3 Erweitertes Zustandsmodell

Während in Kap. 7.1.1 und 7.1.2 zum besseren Verständnis von einem allgemeinen Zustandsmodell (7.1) und (7.2) ausgegangen wurde, wird jetzt das komplexere Fehlerfilter (FF) betrachtet, in das der sequenzielle Schätzalgorithmus eingebettet werden soll. Die vorangegangenen Gleichungen lassen sich relativ einfach auf das FF überführen, wobei u. a. an Stelle von  $\mathbf{q}_{\eta,k}$  der Vektor  $\mathbf{q}_{\text{FF};k} := \text{diag}^{-1}(\mathbf{Q}_{\text{FF};k})$  verwendet werden muss. Allerdings müssen zunächst weitere Aspekte berücksichtigt werden.

Wird der Systemzustandsvektor des FF so erweitert, dass die Erwartungswerte in (7.40) berechnet werden können, d. h. wird die Systemgleichung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{FF};k} \\ \mathbf{x}_{\text{FF};k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{\text{FF};k} & \mathbf{0}_{15 \times 15} \\ \mathbf{I}_{15 \times 15} & \mathbf{0}_{15 \times 15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{FF};k-1} \\ \mathbf{x}_{\text{FF};k-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\text{FF};k} & \mathbf{0}_{15 \times 12} \\ \mathbf{0}_{15 \times 12} & \mathbf{0}_{15 \times 12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{\text{FF};k} \\ \mathbf{0}_{12 \times 1} \end{pmatrix} \quad (7.50)$$

eines vektorautoregressiven Prozesses verwendet, so wird deutlich, dass daraus ein erhöhter Rechenaufwand resultiert, denn die Schätzfehlerkovarianzmatrix

$$\hat{\Xi}_{k|k} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\text{FF};k|k} & \hat{\mathbf{P}}_{\text{FF};k,k-1|k} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\text{FF};k,k-1|k}^T & \hat{\mathbf{P}}_{\text{FF};k-1|k} \end{pmatrix} \quad (7.51)$$

sowie die Systemmatrix haben durch die Erweiterung die Dimension  $[30 \times 30]$ . Dies soll hier möglichst vermieden werden.

Es kann noch ein weiteres Problem bei der Berechnung von (7.40) im Rahmen des hier vorgestellten sequenziellen *Expectation-Maximization-Algorithmus* (SEM) auftreten. Betrachtet man die Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mathbf{x}_{\text{FF};k}; \Phi_{\text{FF};k} \mathbf{x}_{\text{FF};k-1}, \mathbf{U}_k(\mathbf{q}_{\text{FF};k}))$ , so wird deutlich, dass durch die Nullzeile in  $\mathbf{G}_{\text{FF};k}$  gemäß Gl. (5.11) eine singuläre Kovarianzmatrix  $\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_{\text{FF};k})$  resultiert, d. h.  $\det \{ \mathbf{U}_k(\mathbf{q}_{\text{FF};k}) \} = 0$  ist. Eine Berechnung des Gradientenvektors sowie der HESSE-Matrix wäre damit alternativ zwar über die MOORE-PENROSE-Pseudoinverse möglich (z. B. zur Berechnung von Gl. (7.29) oder Gl. (7.37)), die Lösung wäre jedoch nicht optimal und könnte somit zu einer Divergenz bei der KALMAN-Filterung führen.

Alternativ dazu könnte statt des NEWTON-Verfahrens das GAUSS-NEWTON-Verfahren eingesetzt werden. Dieses ist ein numerisches Verfahren zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme, welches die zu minimierende oder maximierende Funktion durch eine quadratische Näherung ersetzt [Deu04]. Hierbei kann zwar auf die Berechnung einer HESSE-Matrix und damit auf die Berechnung der zweiten Ableitung der Zielfunktion verzichtet werden, dennoch ist die CHOLESKY-Zerlegung einer JACOBI-Matrix notwendig. Zudem werden i. d. R. mehr Iterationsschritte zur Lösung des Problems benötigt als mit dem hier eingesetzten NEWTON-Verfahren. Dieser Ansatz wurde in dieser Arbeit jedoch nicht untersucht, sondern stattdessen ein Sekundärfilter (SF) mit reduziertem Systemzustandsvektor verwendet.

Abschließend sei noch erwähnt, dass wir hier ausschließlich an den Rauschvarianzen interessiert sind, die mit dem zeitlich korrelierten Systemrauschen zusammenhängen und als zeitvariant angenommen werden. Dies schließt lediglich einen Teilvektor von  $\mathbf{q}_{\text{FF};k}$  ein.

### 7.1.4 Sekundärfilterung

Es soll daher gemäß Abb. 7.1 ein zusätzliches Filter eingesetzt werden, das zum einen das Ergebnis des FF nutzt, zum anderen aber auch einen im Vergleich zum FF reduzierten Zustandsvektor enthält. Dies hängt jedoch von Steuereingangsgrößen ab, die in dem Vektor  $\mathbf{u}_{\text{SF}}$  zusammengefasst sind. Der Zustandsvektor dieses Filters wird im Folgenden mit  $\mathbf{x}_{\text{SF}}$  bezeichnet. Das FF kann in seiner ursprünglichen Form eingesetzt werden. Die Hauptaufgabe des SF ist es, die Erwartungswerte gemäß Gl. (7.40) zu berechnen. Singuläre Kovarianzmatrizen werden so vermieden. Die für das Filter

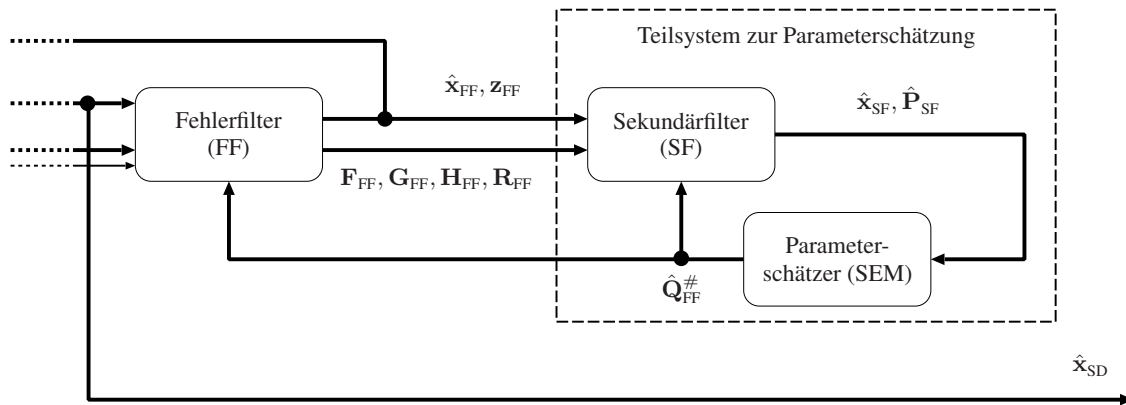


Abbildung 7.1: Sekundärfilterung mit sequenziellem EM-Algorithmus

benötigte Differenzialgleichung lautet (ohne Berücksichtigung des Zeitindex  $t$ ):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \dot{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^n \\ \Delta \dot{\Upsilon} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{\text{SF}}} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,2)} & \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,3)} \\ \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,2)} & \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,3)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{\text{SF}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{v}_{\text{eb}}^n \\ \Delta \Upsilon \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{\text{SF}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,4)} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,1)} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,5)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_{\text{SF}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{p}_{\text{eb}}^n \\ \Delta \mathbf{b}_a \\ \Delta \mathbf{b}_\omega \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_{\text{SF}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{FF}})} \\
 &+ \underbrace{\begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}_{\text{SF}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{n}_a \\ \mathbf{n}_\omega \end{pmatrix}}_{\mathbf{n}_{\text{SF}}} \quad (7.52)
 \end{aligned}$$

Da für die folgenden Betrachtungen lediglich die zeitlich korrelierten Rauschkomponenten von Interesse sind, bilden nur  $\mathbf{n}_a$  und  $\mathbf{n}_\omega$  den Vektor  $\mathbf{n}_{\text{SF}}$ . Die Matrix  $\mathbf{G}_{\text{SF}}$  enthält die entsprechenden Vorfaktoren der Matrix  $\mathbf{G}_{\text{FF}}$  aus Gl. (5.11) in Kap. 5.2.1.1. Ebenso wurde  $\mathbf{B}_{\text{SF}}$  aus den zugehörigen Teilmatrizen von  $\mathbf{F}_{\text{FF}}$  in (5.11) gebildet. Auf Basis dieser Gleichung wird nach der Diskretisierung eine Erweiterung des Zustandsmodells wie in (7.50) vorgenommen. Trotz der doppelten Filterung des Geschwindigkeits- und Lagefehlers und der dennoch notwendigen Zustandsvektorerweiterung, resultiert durch die Verwendung dieses zusätzlichen Filters eine Reduzierung des Berechnungsaufwandes, da keine  $[30 \times 30]$ -Matrix invertiert werden muss, sondern eine  $[12 \times 12]$ -Matrix. Zudem werden singuläre Matrizen vermieden. Des Weiteren konnte durch Vergleich der Schätzfehlerkovarianzmatrizen des FF und des SF in informellen Untersuchungen festgestellt werden, dass diese lediglich eine relative Abweichung von weniger als 1,4 % voneinander aufweisen.

Die Messgleichung des SF ist analog zu der des FF aufgebaut. Da hier die GPS-Geschwindigkeitsmessungen den signifikanten Beitrag zur Geschwindigkeitsfehlerschätzung liefern und die Magnetometermessungen den größten Einfluss auf die Lagefehlerschätzung haben, die wiederum direkt mit  $\mathbf{n}_a$  bzw.  $\mathbf{n}_\omega$  zusammenhängen, wird nur ein Teil des Messvektors  $\mathbf{z}_{\text{FF}}$  benötigt. Dabei stellt der Differenzmessvektor aus Gl. (5.22) auch den Messvektor des SF dar. Die Komponenten in (5.23), die in direktem Zusammenhang mit dem Drehratenbiasfehler  $\Delta \mathbf{b}_\omega$  und dem Lagefehler  $\Delta \Upsilon$  stehen, bilden mit der vorangestellten Matrix  $\Sigma_{\text{SF}}$  wiederum den deterministischen Eingangsvektor. So lässt sich mit  $\mathbf{H}_{\text{FF};v}^{(1,3)} = [\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n \tilde{\Omega}_{\text{ib}}^b \mathbf{1}_{\text{GPS}}^\top \times]$ ,  $\mathbf{H}_{\text{FF};v}^{(1,5)} = \hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n [\mathbf{1}_{\text{GPS}}^\top \times]$  und  $\mathbf{H}_{\text{FF};m}^{(1,3)} = (\hat{\mathbf{C}}_{\text{SD};b}^n)^T [\mathbf{m}^n \times]$  aus (5.24)



und (5.26) die Matrix

$$\mathbf{H}_{\text{SF};k} := \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{H}_{\text{FF};v,k}^{(1,3)} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{H}_{\text{FF};m,k}^{(1,3)} \end{pmatrix} \quad (7.53)$$

und schließlich

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{z}_{\text{FF};v,k} \\ \mathbf{z}_{\text{FF};m,k} \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}_{\text{SF};k}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\text{SF};k} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{SF};k} \\ \mathbf{x}_{\text{SF};k-1} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{H}_{\text{FF};v,k}^{(1,5)} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}}_{\Sigma_{\text{SF};k}} \cdot \mathbf{u}_{\text{SF};k} + \mathbf{M}_{\text{SF}} \cdot \mathbf{w}_{\text{SF};k} \quad (7.54)$$

aufstellen, wobei  $\mathbf{w}_{\text{SF};k} := \mathbf{w}_{\text{FF};k}$  das zeitlich korrelierte Messrauschen darstellt. Durch diese Maßnahme ändert sich die Berechnung der Prädiktion des Systemzustandes nach Gl. (4.90) sowie die Innovation nach Gl. (4.97):

$$\mathbf{x}_{\text{SF};k|k-1} = \Phi_{\text{SF};k} \cdot \mathbf{x}_{\text{SF};k-1|k-1} + \mathbf{B}_{\text{SF};k} \cdot \mathbf{u}_{\text{SF};k} \quad (7.55)$$

$$\varepsilon_{\text{SF};k} := \mathbf{z}_{\text{SF};k} - \mathbf{H}_{\text{SF};k} \cdot \mathbf{x}_{\text{SF};k|k-1} - \Sigma_{\text{SF};k} \cdot \mathbf{u}_{\text{SF};k}. \quad (7.56)$$

Dabei sind  $\Phi_{\text{SF};k} \approx \mathbf{I}_{6 \times 6} + \mathbf{F}_{\text{SF}}(t_k) \Delta t$  und  $\mathbf{B}_{\text{SF};k} \approx \mathbf{B}_{\text{SF}}(t_k) \Delta t$ . Der Steuereingangsvektor in (7.55) und (7.56) beeinflusst ebenso die *LLF*, die wiederum von der Verteilung

$$p(\mathbf{x}_{\text{SF};k} | \mathbf{x}_{\text{SF};k-1}; \mathbf{q}_{\text{FF}}^{\#}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{\text{SF};k}; \Phi_{\text{SF};k-1} \mathbf{x}_{\text{SF};k-1} + \mathbf{B}_{\text{SF};k-1} \mathbf{u}_{\text{SF};k-1}, \mathbf{U}_k(\mathbf{q}_{\text{FF};k}^{\#})) \quad (7.57)$$

abhängt. Für die Matrix  $\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_{\text{FF};k}^{\#})$  mit  $\mathbf{q}_{\text{FF};k}^{\#} := (\mathbf{q}_{\text{FF};a,k}^T, \mathbf{q}_{\text{FF};\omega,k}^T)^T$ , wobei  $\mathbf{q}_{\text{FF};a,k}$  und  $\mathbf{q}_{\text{FF};\omega,k}$  die ersten sechs Diagonalelemente der Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{FF};k}$  enthalten (siehe auch Gl. (5.13)), gilt dabei:

$$\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_{\text{FF};k}^{\#}) := \mathbf{G}_{\text{SF};k} \left( \mathbf{D}_{\text{SF};n} \mathbf{P}_{\text{SF};nn,k-1} \mathbf{D}_{\text{SF};n}^T + \Gamma_{\text{SF};n} \text{diag}(\mathbf{q}_{\text{FF};k}^{\#}) \Gamma_{\text{SF};n}^T \right) \mathbf{G}_{\text{SF};k}^T. \quad (7.58)$$

Die Matrizen  $\mathbf{D}_{\text{SF};n}$  und  $\Gamma_{\text{SF};n}$  sind hier die zu  $\mathbf{D}_{\text{FF};n}$  und  $\Gamma_{\text{FF};n}$  korrespondierenden Matrizen, die im Rahmen des SF verwendet werden. Die obigen Gleichungen führen dazu, dass der Erwartungswert in (7.40) auch von dem Steuereingangsvektor abhängt:

$$\mathbf{E}_k = E \left[ (\mathbf{x}_{\text{SF};k} - \Phi_{\text{SF};k} \mathbf{x}_{\text{SF};k-1} - \mathbf{B}_{\text{SF};k} \mathbf{u}_{\text{SF};k}) \cdot (\mathbf{x}_{\text{SF};k} - \Phi_{\text{SF};k} \mathbf{x}_{\text{SF};k-1} - \mathbf{B}_{\text{SF};k} \mathbf{u}_{\text{SF};k})^T \middle| \mathbf{z}_{\text{SF};1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k-1}^{\#} \right]. \quad (7.59)$$

Neben den Komponenten in (7.41) bis (7.43) mit Verwendung von  $\mathbf{x}_{\text{SF};k}$  und  $\mathbf{P}_{\text{SF};k}$  müssen nach Auflösung von Gl. (7.59) noch weitere additive Terme aufgrund des Steuereingangsvektors  $\mathbf{u}_{\text{SF};k}$  in der Matrix  $\mathbf{E}_k$  berücksichtigt werden. Diese lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_{\text{SF};k} \cdot E \left[ \underbrace{\mathbf{u}_{\text{SF};k} \mathbf{u}_{\text{SF};k}^T}_{\mathbf{u}_{\text{SF};k} \mathbf{u}_{\text{SF};k}^T} \middle| \mathbf{z}_{\text{SF};1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k-1}^{\#} \right] \cdot \mathbf{B}_{\text{SF};k}^T - E \left[ \underbrace{\mathbf{x}_{\text{SF};k} \mathbf{u}_{\text{SF};k}^T}_{\hat{\mathbf{x}}_{\text{SF};k|k} \mathbf{u}_{\text{SF};k}^T} \middle| \mathbf{z}_{\text{SF};1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k-1}^{\#} \right] \cdot \mathbf{B}_{\text{SF};k}^T \\ & - \mathbf{B}_{\text{SF};k} \cdot E \left[ \underbrace{\mathbf{u}_{\text{SF};k} \mathbf{x}_{\text{SF};k}^T}_{\mathbf{u}_{\text{SF};k} \hat{\mathbf{x}}_{\text{SF};k|k}^T} \middle| \mathbf{z}_{\text{SF};1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k-1}^{\#} \right] + \Phi_{\text{SF};k} \cdot E \left[ \underbrace{\mathbf{x}_{\text{SF};k-1} \mathbf{u}_{\text{SF};k}^T}_{\hat{\mathbf{x}}_{\text{SF};k-1|k} \mathbf{u}_{\text{SF};k}^T} \middle| \mathbf{z}_{\text{SF};1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k-1}^{\#} \right] \cdot \mathbf{B}_{\text{SF};k}^T \\ & + \mathbf{B}_{\text{SF};k} \cdot E \left[ \underbrace{\mathbf{u}_{\text{SF};k} \mathbf{x}_{\text{SF};k-1}^T}_{\mathbf{u}_{\text{SF};k} \hat{\mathbf{x}}_{\text{SF};k-1|k}^T} \middle| \mathbf{z}_{\text{SF};1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k-1}^{\#} \right] \cdot \Phi_{\text{SF};k}^T, \end{aligned} \quad (7.60)$$

wobei  $E \left[ \mathbf{x}_{\text{SF};k} \middle| \mathbf{z}_{\text{SF};1:k}, \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k-1}^\# \right] =: \hat{\mathbf{x}}_{\text{SF};k|k}$  und  $E \left[ \mathbf{x}_{\text{SF};k-1} \middle| \mathbf{z}_{\text{SF};1:k}, \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k-1}^\# \right] =: \hat{\mathbf{x}}_{\text{SF};k-1|k}$  verwendet wurden. Da mit dieser Sekundärfilterung neben den genannten Schätzgrößen ebenfalls noch nicht  $\mathbf{P}_{\text{SF};k,k-1|k}$  berechnet werden kann, muss das Filter ebenso mittels eines vektorautoregressiven Prozesses erweitert werden, wie es in Kap. 7.1.3 beschrieben wurde. Da hier  $\mathbf{x}_{\text{SF}} \in \mathbb{R}^6$  gilt, ist diese Erweiterung mit einem vergleichsweise geringen rechnerischen Mehraufwand verbunden als die in 7.1.3 beschriebene Variante. Außerdem liegen hier reguläre Matrizen vor.

Durch das Zurücksetzen des Zustandsvektors ist dieser im Gegensatz zur Schätzfehlerkovarianzmatrix des FF ungeglättet. In [RAG04] wird zur Glättung eine zeitlich inverse Filterung vorgeschlagen. Da dies ein nichtkausaler Vorgang ist, wird hier eine Alternative angewendet. Man separiert  $\mathbf{E}_k$  in zwei Funktionen  $f_{E_1} \left( \hat{\mathbf{x}}_{\text{SF};k|k}, \hat{\mathbf{x}}_{\text{SF};k-1|k}, \mathbf{u}_{\text{SF};k} \right)$ , die vom System- sowie Steuereingangsvektor abhängt, und  $f_{E_2} \left( \hat{\mathbf{P}}_{\text{SF};k|k}, \hat{\mathbf{P}}_{\text{SF};k-1|k}, \hat{\mathbf{P}}_{\text{SF};k,k-1|k} \right)$ , die ausschließlich von den Schätzfehlerkovarianzmatrizen abhängt. Der Erwartungswert in (7.59) lässt sich somit zusätzlich glätten, indem stattdessen

$$\mathbf{E}_k = \bar{f}_{E,k} + f_{E_2} \left( \hat{\mathbf{P}}_{\text{SF};k|k}, \hat{\mathbf{P}}_{\text{SF};k-1|k}, \hat{\mathbf{P}}_{\text{SF};k,k-1|k} \right) \quad (7.61)$$

verwendet wird. Dabei wird  $\bar{f}_{E,k}$  mittels

$$\bar{f}_{E,k} = (1 - \zeta_E) \bar{f}_{E,k-1} + \zeta_E f_{E_1} \left( \hat{\mathbf{x}}_{\text{SF};k|k}, \hat{\mathbf{x}}_{\text{SF};k-1|k}, \mathbf{u}_{\text{SF};k} \right) \quad (7.62)$$

bestimmt, wobei  $0 \leq \zeta_E < 1$  ein heuristischer Faktor ist. Auf eine geeignete Wahl von  $\zeta_E$  wird in Kap. 9.2 noch näher eingegangen.

## 7.2 Empirische Parameterschätzung

In [Bal09] wurde zur echtzeitfähigen Schätzung von Rauschparametern im Rahmen einer aktiven Schalldämpfung in Röhrensystemen das so genannte Kovarianzmanagement (KM) vorgestellt. Diese Methode soll hier näher betrachtet und später mit dem SEM verglichen werden. Das KM basiert auf einer rekursiven Berechnung des empirischen Mittelwertes sowie der Varianz einer ergodischen Größe. Weitere Varianten dieser rekursiven Berechnungsvorschrift werden zusätzlich im Anhang betrachtet. Da sich die Ausgangsbasis der KM-Methode von der der sequenziellen Parameterschätzung in Kap. 7.1 unterscheidet, soll nach der Herleitung der Gleichungen das Verfahren hinsichtlich seiner Fähigkeiten diskutiert und so modifiziert werden, dass es auch für das hier vorliegende Schätzproblem zufrieden stellende Ergebnisse liefert.

### 7.2.1 Ausgangsbasis

Bevor der in [Bal09] behandelte Schätzalgorithmus betrachtet wird, soll gezeigt werden, wie die gesuchten Parameter bestimmt werden können, wenn diese zeitinvariant sind, d. h. wenn die Messdaten einer ruhenden IME zum Teil oder vollständig vorliegen. Die hier vorgestellten Gleichungen dienen anschließend als Grundlage für das KM.

Wir gehen zunächst davon aus, dass das Sensorsignal eines ruhenden Sensors der Länge  $K := T_K \cdot f_{\text{IME}}$  vorliegt, wobei  $f_{\text{IME}}$  die Abtastfrequenz des Sensors und  $T_K$  die Gesamtdauer des Signals ist. Teilt man nun  $T_K$  in  $L$  gleich lange Signalausschnitte auf, dann lässt sich die Zeitachse

durch  $k = l \cdot \Delta K + p'$  mit  $l = 0, \dots, L-1$ ,  $l \in \mathbb{N}$  und  $p' = 0, \dots, \Delta K-1$ ,  $p' \in \mathbb{N}$  definieren, wobei  $\Delta K$  die Anzahl der Abtastwerte in einem Signalausschnitt der Länge  $\frac{L}{f_{\text{IME}}}$  ist. Ist  $\Delta T_l$  die Signalausschnittslänge in [s], resultiert daraus zudem  $\Delta K = \Delta T_l \cdot f_{\text{IME}}$ . Während hier  $l$  die Signalausschnitte zählt, werden mit  $p'$  die Werte innerhalb eines Ausschnittes gezählt. Geht man davon aus, dass der Nullpunktfehler vorab eliminiert werden konnte bzw. dieser als Teil des initialen Bias  $b_{\omega,0}$  aufgefasst werden kann, so folgt entsprechend Gl. (4.62) für das Ausgangssignal am Beispiel einer Drehratensensortriade mit  $\mathbf{n}_{\omega,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_{\omega,k}; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \text{diag}(\mathbf{q}_{\omega}))$ :

$$\tilde{\omega}_{\text{ib},k}^{\text{b}} = \mathbf{b}_{\omega,k} + \mathbf{n}_{\omega,k}. \quad (7.63)$$

Hierbei wird davon ausgegangen, dass das Auflösungsvermögen des Sensors zu gering ist, um die Erddrehung zu erfassen. Außerdem wurden keine Skalierungs- sowie Orthogonalitätsfehler aufgeführt, da angenommen wird, dass sie bereits im Vorfeld eliminiert wurden. Neben dem sensorinhärenten Rauschen weist das Ausgangssignal also lediglich eine unbekannte Biaskomponente auf, die sich zeitlich langsam verändert und somit eine niederfrequente Störung darstellt.

Aufgrund der Voraussetzung, dass die Biasdrift  $\mathbf{b}_{\omega,k}$  sich nur langsam mit der Zeit ändert, kann auch angenommen werden, dass diese innerhalb eines hinreichend kurzen Signalausschnitts  $l \in [0, L-1]$  konstant ist, d. h.  $\mathbf{b}_{\omega,k} = \text{konst.}$  für  $k \in [l\Delta K, (l+1)\Delta K - 1]$ . Somit kann die Biasdrift für den jeweiligen Signalausschnitt durch den Scharmittelwert angenähert werden:

$$\hat{\mathbf{b}}_{\omega,l} \approx \frac{1}{\Delta K} \sum_{k=l\Delta K}^{(l+1)\Delta K - 1} \tilde{\omega}_{\text{ib},k}^{\text{b}}, \quad l \in [0, L-1]. \quad (7.64)$$

Setzt man  $\hat{\mathbf{b}}_{\omega,k} = \hat{\mathbf{b}}_{\omega,l}$  für  $k \in [l\Delta K, (l+1)\Delta K - 1]$  und subtrahiert die berechnete Biasdrift anschließend von  $\tilde{\omega}_{\text{ib},k}^{\text{b}}$ , so kann man das als mittelwertfrei angenommene inhärente Rauschen für jeden Ausschnitt  $l$  abschätzen:

$$\hat{\mathbf{n}}_{\omega,k} = \tilde{\omega}_{\text{ib},k}^{\text{b}} - \hat{\mathbf{b}}_{\omega,k}. \quad (7.65)$$

Die Varianz des ergodischen Rauschprozesses lässt sich dann über die erwartungstreue Schätzung

$$\hat{\mathbf{q}}_{\omega} = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K \hat{\mathbf{n}}_{\omega,k}^2 \quad (7.66)$$

approximieren. Mit  $\widehat{\text{ARW}} := \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{q}}_{\omega}}{f_{\text{IME}}}}$  erhält man auch eine Schätzung der *Angle Random Walk* (ARW)-Parameter für die Komponenten der Sensortriade.

Die Biasdrift selbst wird hier gemäß (4.62) durch einen zeitdiskreten RWP modelliert, der von einem AWGR  $\mathbf{n}_{b_{\omega},k}$  getrieben wird. Da hier pro Signalausschnitt nur eine Schätzung für das Bias vorliegt, kann somit auch nur für jedes  $l$  ein Wert für  $\mathbf{n}_{b_{\omega},l}$  abgeschätzt werden:

$$\hat{\mathbf{n}}_{b_{\omega},l} = \frac{\hat{\mathbf{b}}_{\omega,l+1} - \hat{\mathbf{b}}_{\omega,l}}{\Delta T_l}, \quad l \in [0, L-2]. \quad (7.67)$$

Dessen Varianz kann ebenso wie in (7.66) über die erwartungstreue Stichprobe ermittelt werden:

$$\hat{\mathbf{q}}_{b_{\omega}} = \frac{1}{L-2} \sum_{l=0}^{L-2} \hat{\mathbf{n}}_{b_{\omega},l}^2. \quad (7.68)$$

Es muss beachtet werden, dass die beiden letzten Gleichungen hier eigentlich nur eine sehr approximative und ungenaue Lösung darstellen, die lediglich für sehr kurze Signalausschnitte gilt, denn hier wird angenommen, dass sich  $\mathbf{b}_\omega$  von Signalausschnitt zu Signalausschnitt ändert, jedoch innerhalb eines Signalausschnitts konstant ist. Dieses ist gerade bei sich langsam veränderlichen Prozessen wie bei einem Bias problematisch. Es sollte daher versucht werden,  $\Delta T_l$  möglichst gering zu halten, so dass  $\frac{\Delta T_l}{\Delta t} \approx 1$ , wenn  $\Delta t = \frac{1}{f_{\text{IME}}}$ . Dieses würde jedoch der Annahme widersprechen, die für (7.64) getroffen wurde. Zur Berechnung der statistischen Eigenschaften des Bias bieten sich daher alternative Varianten an, die in Kap. 8 erörtert werden.

Ähnlich der Vorgehensweise bei den Drehratensensoren kann man auch bei den Beschleunigungsmessern einer IME vorgehen. Bei den Beschleunigungssensoren ist allerdings zu beachten, dass diese in vertikaler Richtung zusätzlich noch die Erdbeschleunigung messen. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Messeinheiten haben Beschleunigungssensoren eingebaut, die ein höheres Auflösungsvermögen aufweisen als die Drehratensensoren. Erfährt der Sensor keine äußere Beschleunigung, so lässt sich mit (4.63) und (4.1) die folgende Gleichung aufstellen:

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\text{ib},k}^{\text{b}} = \mathbf{g}_k^{\text{n}} + \mathbf{b}_{a,k} + \mathbf{n}_{a,k}. \quad (7.69)$$

## 7.2.2 Kovarianzmanagement

Das KM kann im Prinzip als sequenzielle Variante des Verfahrens aus dem vorangegangenen Abschnitt angesehen werden, wobei hier für den Vektor  $\mathbf{z}_\dagger \in \{\tilde{\mathbf{a}}_{\text{ib}}^{\text{b}}, \tilde{\omega}_{\text{ib}}^{\text{b}}\}$  gelten soll. Für die Filterung in Kap. 5 wurde von mittelwertfreien, weißen Rauschprozessen ausgegangen, die ein zeitlich korreliertes Rauschen treiben. Wie im Folgenden deutlich wird, lassen sich diese Korrelationen mit dem KM nicht schätzen. Daher gehen wir nun von zeitlich unkorreliertem Rauschen aus, bei dem wir im Wesentlichen nur an den zugehörigen Varianzen interessiert sind. Im Zuge der Varianzschätzung müssen dabei auch die Mittelwerte geschätzt werden.

Es sei nun  $\mathbf{z}_\dagger$  die Realisierung eines reellen, mehrdimensionalen Zufallsprozesses, dessen Mittelwert und Varianz bestimmt werden sollen. Nach [Bal09] und [OS99] sei der zugrunde liegende Prozess (z. B. nach Gl. (7.63)) ergodisch und der Mittelwert konstant in einem begrenzten Intervall. Für den Mittelwert  $\boldsymbol{\mu}_\dagger$  und die korrespondierende Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_\dagger := \text{diag}(\mathbf{q}_\dagger)$ , wobei  $\dagger \in \{\omega, a\}$  sei, gilt nach den Gl. (E.17) bis (E.24) in Anhang E.2:

$$\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} + \frac{1}{k} \mathbf{z}_{\dagger,k}. \quad (7.70)$$

In (7.70) werden bereits sämtliche Vektoren  $\mathbf{z}_{\dagger,1}, \dots, \mathbf{z}_{\dagger,k-1}$  berücksichtigt. Um eine rekursive Form für die Berechnung der Kovarianzmatrix zu erhalten, kann nun (E.24) in Gl. (E.23) eingesetzt werden:

$$\mathbf{q}_{\dagger,k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \mathbf{q}_{\dagger,k-1} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{k} (\mathbf{z}_{\dagger,k} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1})^2, \quad (7.71)$$

wobei  $\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} = \frac{1}{k-1} \sum_{f=1}^{k-1} \mathbf{x}_f$  gilt. Man muss allerdings bedenken, dass die letzte Gleichung nur verwendet werden kann, wenn die Approximationen in (E.17) – (E.19) gültig sind. Dieses ist jedoch nur dann der Fall, wenn das Beobachtungsintervall sehr groß ist, so dass der Erwartungswert durch den empirischen Mittelwert ersetzt werden kann. Hier nehmen wir des Weiteren an, dass der initiale Varianzvektor ein Nullvektor ist, d. h.  $\mathbf{q}_{\dagger,0} = \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}$  gilt. Ist die Schätzung jedoch lediglich unterbrochen, z. B. durch eine Standphase des Fahrzeugs, so existieren nach dieser Phase initiale Werte für

Mittelwerte oder Varianzen auf Basis der letzten Werte in der Phase, bevor das Fahrzeug stand. Es liegt demnach a priori-Wissen vor, das berücksichtigt werden muss.

Auf ähnliche Weise lassen sich auch zwei weitere Varianten zur rekursiven Parameterschätzung mit individuellen Vor- und Nachteilen aufstellen, die allerdings hier nicht weiter beachtet werden sollen. Diese entstammen [Tys92] und [Oth03] und sind in Anhang E.2 aufgeführt.

### 7.2.3 Modifiziertes Kovarianzmanagement

Bei der Verwendung des KM muss beachtet werden, dass in den Signalen sowohl Bias als auch Trajektorien­dynamik auftauchen. Diese können das Ergebnis verfälschen. Die Trajektorien­dynamik ist in einem niederfrequenten Bereich zu finden, wie in Kap. 8 noch gezeigt wird. Neben Bias und Bewegungstrajektorie sind in dem Sensorsignalvektor  $\hat{\mathbf{a}}_{\text{ib}}^{\text{b}}$  bzw.  $\tilde{\omega}_{\text{ib}}^{\text{b}}$  noch die inhärenten und zeitlich korrelierten Rauschanteile zu finden. Diese seien dem Rauschen  $\mathbf{n}_a$  bzw.  $\mathbf{n}_\omega$  zugeordnet. Da ohne eine explizite Filterung, z. B. durch das FF, die Biasdrift und die Trajektorien­dynamik nicht voneinander separiert werden, sollen beide Komponenten zusammen durch eine dynamische Schätzung des Mittelwertes  $\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}$  berücksichtigt werden. Obwohl die Herleitung auf der Annahme eines konstanten Mittelwertes beruht, ist im Folgenden der Mittelwert also eine zeitvariante Größe.

Mit  $\zeta := \frac{1}{p' + p'_0}$ , wobei  $p'$  wieder der Laufindex ist und durch  $p'_0 \in \mathbb{R}$  hier die „Zeitveränderlichkeit“ eingestellt werden kann, folgt für Gl. (E.24):

$$\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k} = (1 - \zeta) \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} + \zeta \mathbf{z}_{\dagger,k}. \quad (7.72)$$

Durch die Wahl  $p' > 0$  wird die Mittelwertschätzung zu Beginn eines Ausschnittes  $l$  so beeinflusst, dass der Mittelwert aus dem Ausschnitt  $l - 1$ , d. h. das a priori-Wissen durch  $\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1}$  wenig, und die aktuelle Messung  $\mathbf{z}_{\dagger,k}$  stärker gewichtet ist. Je größer dann noch  $p'_0$  gewählt wird, desto träger ist der Verlauf von  $\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}$  und desto mehr Gewicht erhält das a priori-Wissen des vorherigen Signalausschnitts. Hier wurde  $p'_0 = 20$  gewählt, da sich dieser Wert in informellen Tests als guter Kompromiss herausgestellt hat.

Wir gehen nun wieder davon aus, dass ein Sensorsignal der Länge  $K$  mit  $K = T_K \cdot f_{\text{IME}}$  vorliegt. Für das Ausgangssignal würde am Beispiel einer Drehratensensortriade die Gl. (4.62) gelten. Um allerdings die zeitvarianten Varianzen des zeitkorrelierten Rauschprozesses abschätzen zu können, muss die Dynamik in die Mittelwertschätzung einfließen. Dieses kann einerseits durch den heuristischen Faktor  $\zeta$  in Gl. (7.72), andererseits durch eine geringe Fensterbreite  $\Delta T_l$  erreicht werden. Da aber auch die Varianzen eine Zeitveränderlichkeit als Folge der nicht modellierten zeitlichen Korrelationen aufweisen, muss diese auch bei deren Schätzung berücksichtigt werden. Die Dynamik sollte jedoch geringer sein als bei der Mittelwertschätzung, um eine zu starke Streuung der Werte zu vermeiden. Daher soll die abgewandelte Berechnungsvorschrift von (7.71) für eine rekursive Varianzschätzung bei vorhandener Fahrdynamik

$$\mathbf{q}_{\dagger,k} = (1 - \tilde{\zeta}) \mathbf{q}_{\dagger,k-1} + \tilde{\zeta} (\mathbf{z}_{\dagger,k} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1})^2 \quad (7.73)$$

lauten, wobei  $\tilde{\zeta} := \frac{1}{p' + \tilde{p}'_0} = \frac{1}{\frac{1}{\tilde{\zeta} + \tilde{p}'_0} - p'_0}$  mit  $\tilde{p}'_0 \in \mathbb{N}$  und  $\tilde{p}'_0 \gg p'_0$  gilt. Das Verfahren ist vollständig in Alg. 2 zusammengefasst. Die Fensterlänge wurde hier zu  $\Delta T_l = 0,25 \text{ s}$  und der zusätzliche Faktor zu  $\tilde{p}'_0 = 500$  gewählt. Auch diese Werte stellten sich anhand informeller Tests als optimal heraus. Es fällt auf, dass bei dem modifizierten Verfahren zur rekursiven Berechnung eines empirischen Mittelwertes und einer empirischen Varianz ein Fenster über die letzten Beobachtungen gelegt wird und die

---

**Algorithmus 2:** Algorithmus zur echtzeitfähigen Schätzung der Rauschparameter mit modifiziertem Kovarianzmanagement bei vorhandener Trajektorienndynamik

---

```

1 wiederhole
2   Berechnung des Mittelwertvektors  $\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}, \dagger \in \{\omega, a\}$  mit (7.72)
3   Berechnung des Rauschvarianzvektors  $\mathbf{q}_{\dagger,k}, \dagger \in \{\omega, a\}$  nach (7.73)
4   wenn  $k = l \cdot \Delta K$  dann
5      $l \leftarrow l + 1$ 
6    $k \leftarrow k + 1$ 
7 bis Abbruchbedingung erfüllt

```

---

gefensterten Daten mit einer Exponentialfunktion gewichtet werden, um die Dynamik in den gesuchten Parametern zu berücksichtigen. Die Abb. 7.2 verdeutlicht, wie das modifizierte KM im Rahmen der Filterung nach Kap. 5 eingesetzt wird. Hierbei gilt  $\mathbf{Q}_{\dagger,k} := \text{diag}(\mathbf{q}_{\dagger,k})$  mit  $\dagger \in \{\omega, a\}$ , wobei

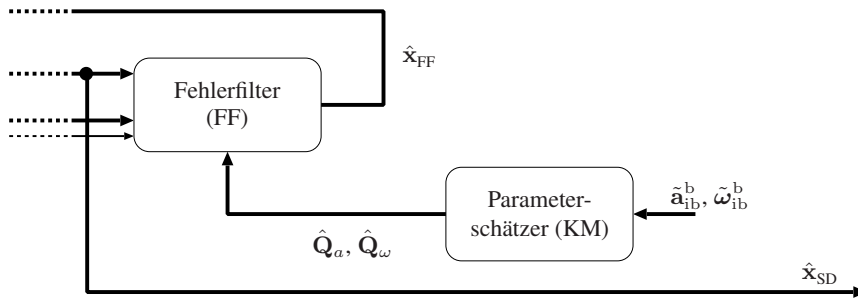


Abbildung 7.2: Parameterschätzung durch modifiziertes Kovarianzmanagement

nun nicht mehr von einem zeitlich korrelierten Rauschprozess wie in Gl. (5.13) ausgegangen, sondern jeweils  $\mathbf{n}_{\dagger,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}_{\dagger,k}; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}_{\dagger,k})$  angenommen wird.

Die Abb. 7.3 (a) und (b) zeigen die geschätzten Mittelwerte und Standardabweichungen des Rauschprozesses für die  $x$ -Achse der im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten *MTi*-Inertialsensoreinheit. Dabei wurden während einer Stadtfahrt einerseits verschiedene Straßenbeläge befahren (Bewegungsphasen  $\check{P}_B$ ), andererseits traten auch Standphasen mit laufendem Motor auf (Phase  $\check{P}_M$ ), wobei die Abbildungen Ausschnitte von einigen dieser Phasen zeigen. In Abb. 7.3 (a) ist zu sehen, dass die Mittelwertschätzung  $\hat{\mu}_{a,x,k}$  der Fahrdynamik der Messung  $\tilde{a}_{ib,x,k}^b$  gut folgen kann, was Grundvoraussetzung für eine zuverlässige Parameterschätzung ist. Es fällt auf, dass das Befahren einer gepflasterten Straße im Vergleich zu einer asphaltierten Straße von einer besonders hohen Bewegungsdynamik gekennzeichnet ist. Dies wirkt sich entsprechend auf die Schätzwerte der Rauschprozessparameter aus, die ebenfalls ansteigen. Die Tab. 7.1 (a) und (b) zeigen abschließend die ungefähren Wertebereiche für die drei Achsen der *MTi*-Sensoreinheit, in denen sich die Schätzungen der Standardabweichungen für die verschiedenen Bewegungsphasen bewegen. Hierbei gilt  $\sigma_{a,\dagger,k}^2 := E[n_{a,\dagger,k}^2]$  und  $\sigma_{\omega,\dagger,k}^2 := E[n_{\omega,\dagger,k}^2]$  mit  $\dagger \in \{x, y, z\}$ . In der Literatur wird die Standardabweichung auch häufig in der Einheit  $[\text{m}/(\text{s}^2 \cdot \sqrt{\text{Hz}})]$  bzw.  $[\text{°}/(\text{s} \cdot \sqrt{\text{Hz}})]$  angegeben. Diese ist auch in den nachfolgenden Kapiteln von Bedeutung. Dabei handelt es sich um die Wurzel der Rauschleistungsichte des entsprechenden zeitkontinuierlichen Rauschprozesses, die abtastzeitunabhängig ist. Sie wird durch die Skalierung der Varianz  $\sigma_{a,\dagger}^2$  bzw.  $\sigma_{\omega,\dagger}^2$  auf die Abtastfrequenz gewonnen und als *Velocity Random Walk (VRW)*-



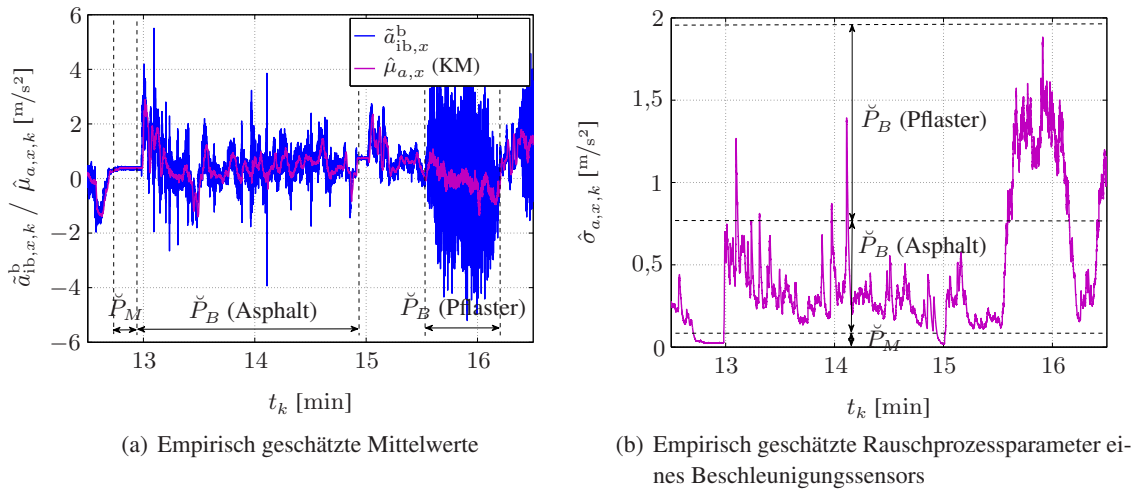


Abbildung 7.3: Empirische Mittelwertschätzung und Parameterschätzung mit Kovarianzmanagement auf Basis ungefilterter Inertialsensordaten

bzw. *Angle Random Walk (ARW)*-Parameter bezeichnet:

$$VRW_{\dagger} [\text{m}/(\text{s}^2 \cdot \sqrt{\text{Hz}})] := \sqrt{\frac{\sigma_{a,\dagger}^2 [(\text{m}/\text{s}^2)^2]}{f_{\text{IME}} [\text{Hz}]}} \quad (7.74)$$

$$ARW_{\dagger} [^{\circ}/(\text{s} \cdot \sqrt{\text{Hz}})] := \sqrt{\frac{\sigma_{\omega,\dagger}^2 [(^{\circ}/\text{s})^2]}{f_{\text{IME}} [\text{Hz}]}} \quad (7.75)$$

Der Vorteil liegt darin, dass eine explizite Angabe der Abtastrate (in dieser Arbeit ist das  $\frac{1}{f_{\text{IME}}}$  mit  $f_{\text{IME}} = 100 \text{ Hz}$ , sofern nicht anders angegeben) nicht mehr erfolgen muss.<sup>9</sup>

Die Wertebereiche, in denen sich die Schätzungen  $\hat{\sigma}_a$  bewegen, sind bei den drei Sensorachsen relativ ähnlich. Lediglich in der  $z$ -Komponente steigen sie etwas an. Dieses ist auf die nicht vollständig mögliche Dämpfung des Fahrzeugs zurückzuführen. Bei den Parametern der Drehratensensortriade hingegen wird deutlich, dass sich die Wertebereiche der einzelnen Phasen zum Teil deutlich überlappen. In der  $z$ -Komponente sind zwischen Phase  $\check{P}_M$  und Phase  $\check{P}_B$  im Falle einer asphaltierten Straße kaum Unterschiede zu erkennen.

### 7.3 Parameterschätzung durch Auswertung von Messwertdifferenzen

Eine weitere Methode ist die Parameterschätzung mit Hilfe von Messwertdifferenzen wie sie im Detail in Anhang E.3 aufgeführt ist und aus [Wen07] stammt. Dieses wird im Folgenden als Messwertdifferenzen-Verfahren (MD) bezeichnet. Dabei werden auf Basis der Differenz aufeinanderfolgender Messwerte  $z_{\dagger,k}$  (z. B. der skalaren Größe  $\tilde{\omega}_{ib,y,k}^b$  oder  $\tilde{a}_{ib,z,k}^b$ ) die zeitlichen Korrelationen  $r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(i')}$  rekursiv berechnet, wobei  $\dagger \in \{\omega, a\}$  ist. Der Abgriff der Sensormessdaten erfolgt wie in Abb. 7.2, wobei der KM-Block durch einen Block mit dem MD ersetzt werden muss.

<sup>9</sup>Während es üblich ist, die *RWP*-Parameter eines zeitlich nicht korrelierten Rauschprozesses mit *VRW* bzw. *ARW* anzugeben, wird i. d. R. bei einem zeitlich korrelierten Rauschen darauf verzichtet.

(a) Geschätzte Standardabweichungen  $\hat{\sigma}_a$ 

Phase \ Achse	$\hat{\sigma}_a \text{ [m/s}^2\text{]} / \widehat{VRW} [1 \cdot 10^{-1} \text{ m/(s}^2 \cdot \sqrt{\text{Hz}})]$	$x$	$y$	$z$
$\check{P}_M$		$2,4 \cdot 10^{-2} \dots 5,5 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2} \dots 5,5 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2} \dots 5,5 \cdot 10^{-2}$
$\check{P}_B$ (Asphalt)		$5,5 \cdot 10^{-2} \dots 7,5 \cdot 10^{-1}$	$5,5 \cdot 10^{-2} \dots 7,5 \cdot 10^{-1}$	$5,7 \cdot 10^{-2} \dots 1,0$
$\check{P}_B$ (Pflaster)		$7,5 \cdot 10^{-1} \dots 1,9$	$7,5 \cdot 10^{-1} \dots 1,9$	$1,0 \dots 2,2$

(b) Geschätzte Standardabweichungen  $\hat{\sigma}_\omega$ 

Phase \ Achse	$\hat{\sigma}_\omega \text{ [}^\circ\text{/s]} / \widehat{ARW} [1 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ\text{/(s} \cdot \sqrt{\text{Hz}})]$	$x$	$y$	$z$
$\check{P}_M$		$4,0 \cdot 10^{-3} \dots 7,0 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-3} \dots 7,0 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-3} \dots 6,0 \cdot 10^{-3}$
$\check{P}_B$ (Asphalt)		$7,0 \cdot 10^{-3} \dots 3,8 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-3} \dots 8,0 \cdot 10^{-2}$	$4,5 \cdot 10^{-3} \dots 4,2 \cdot 10^{-2}$
$\check{P}_B$ (Pflaster)		$3,0 \cdot 10^{-2} \dots 8,5 \cdot 10^{-2}$	$5,0 \cdot 10^{-2} \dots 1,2 \cdot 10^{-1}$	$3,8 \cdot 10^{-2} \dots 8,0 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 7.1: Wertebereiche der mittels KM geschätzten Rauschprozessparameter ungefilterter Inertialsensorsignale

Hier wird ein autoregressiver Prozess erster Ordnung betrachtet. Für die Korrelationen gilt Gl. (E.35). Sie lautet:

$$r_{\Delta n_{\dagger,k} \Delta n_{\dagger,k}}^{(i')} = (1 - \zeta') r_{\Delta n_{\dagger,k} \Delta n_{\dagger,k-1}}^{(i')} + \zeta' \Delta n_{\dagger,k} \Delta n_{\dagger,k-i'}. \quad (7.76)$$

Dabei stellt  $\Delta n_{\dagger,k-i'} := n_{\dagger,k-i'} - n_{\dagger,k-i'-1}$  mit  $i' \in \{0, 1\}$  die zeitliche Differenz des zeitlich korrelierten Rauschens dar, das bei einem sich langsam ändernden Bias und einer geringen Trajektorien-dynamik annähernd der Differenz der Messwerte entspricht.  $\zeta'$  ist ein heuristischer Parameter mit  $0 < \zeta' < 1$ , der hier zu  $\zeta' = 0,01$  gewählt ist. Je kleiner  $\zeta'$  gewählt wird, desto weniger schwanken die geschätzten Korrelationen [Wen07]. Durch Verwendung der Gleichung

$$n_{\dagger,k} = d_n n_{\dagger,k-1} + \eta_{\dagger,k} \quad (7.77)$$

an Stelle von (E.31), wobei hier  $\eta_{\dagger,k} \sim \mathcal{N}(\eta_{\dagger,k}; 0, \sigma_{\eta_{\dagger}}^2)$  mittelwertfreies, weißes GAUSS-verteiltes Rauschen mit der Varianz  $\sigma_{\eta_{\dagger}}^2$  ist, und anschließender Schätzung der Erwartungswerte  $E[\Delta n_{\dagger,k} \Delta n_{\dagger,k-i'} | z_{\dagger,1:k}]$  für  $i' \in \{0, 1\}$  und einer gegebenen Sequenz aus Beobachtungen  $z_{\dagger,1:k}$ , resultieren nach einigen Umrechnungen die Gl. (E.47) und (E.48):

$$d_n = \frac{r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(0)} + 2 r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(1)}}{r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(0)}} \quad (7.78)$$

$$\sigma_{\eta}^2 = r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(0)} + r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(1)}. \quad (7.79)$$

Durch die Annahme zeitvarianter Prozessparameter ( $d_n \rightarrow d_{n,k}$  und  $\sigma_{\eta_{\dagger}}^2 \rightarrow \sigma_{\eta_{\dagger,k}}^2$ ) lassen diese Gleichungen also auch eine sequenzielle Berechnung der Varianz des treibenden Rauschens zu. Ein Charakteristikum dieses Verfahrens ist, dass neben der Erfassung der Vibrationen des Fahrzeugs auch die Trajektorien-dynamik mit berücksichtigt wird, denn diese wird durch die Berechnung der Differenz zeitlich aufeinanderfolgender Messungen nicht vollständig eliminiert. Dieses muss allerdings nicht

zwangsläufig ein Nachteil sein, da Modellungenauigkeiten aufgrund einer vereinfachten Zustandsübergangsmatrix wie hier, dem Rauschen zugeordnet werden können. Ein besonderer Vorteil liegt hier allerdings in der Unabhängigkeit von weiteren Filtergrößen und der Möglichkeit, die Parameter mit der IME-Datenrate zu schätzen.

Ausgehend von (7.77) lässt sich nun die Varianz  $\sigma_{\dagger,k}^2 := E \left[ n_{\dagger,k} n_{\dagger,k}^T \middle| z_{\dagger,1:k} \right]$  über

$$\sigma_{\dagger,k}^2 = \frac{\sigma_{\eta_{\dagger},k}^2}{1 - d_{n,k}^2} \quad (7.80)$$

berechnen. Es muss in diesem Fall jedoch berücksichtigt werden, dass die Bedingung  $d_{n,k} < 1$  erfüllt bleibt, damit keine Singularitäten in Gl. (7.80) auftreten. Andernfalls wäre  $\sigma_{\dagger,k}^2 \rightarrow \infty$  bzw.  $\sigma_{\dagger,k}^2 < 0$  die Folge.

### Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden drei Verfahren vorgestellt, um die als zeitvariant angenommenen Varianzen bzw. Kovarianzmatrizen eines Rauschprozesses zu schätzen. Während das Kovarianzmanagement aus [Bal09] lediglich eingesetzt werden kann, um die Systemrauschkovarianzmatrix eines zeitlich unkorrelierten Rauschprozesses zu schätzen, lässt sich das auf Basis von Messwertdifferenzen aus [Wen07] und das hier im Detail hergeleitete sequenzielle Schätzverfahren unter Verwendung des *EM*-Algorithmus und dem *NEWTON*-Verfahren für ein zeitlich korreliertes Systemrauschen anwenden. Beim SEM werden einige spezielle Eigenschaften der HESSE-Matrix und der Kovarianzmatrix ausgenutzt, um möglichst robuste und zuverlässigere Parameterschätzungen zu erhalten. Die Ergebnisse, die in Verbindung mit den hier vorgestellten Schätzverfahren gewonnen wurden, werden in Kap. 9 vorgestellt.



## Kapitel 8

### Analyse der inertialen Sensoreinheit

Im Rahmen des vorliegenden Kapitels sollen Ergebnisse zu Voruntersuchungen der verwendeten IME, der *MTi*-Sensoreinheit der Fa. *Xsens Technologies B. V.*, Niederlande, präsentiert werden. Für einige Analysen befand sich die IME in einem ruhenden Zustand  $\check{P}_O$ , während für andere Analysen Felddaten aufgezeichnet wurden, bei denen unterschiedliche Fahrsituationen, wie z. B. Kurvenfahrten, und damit eine Bewegungsdynamik vorlag. Zunächst wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem die typischen und hier wichtigen Sensorparameter abgeschätzt werden können. Im Anschluss daran wird die verwendete IME auf ihre sensorspezifischen Eigenschaften hin untersucht, um u. a. die in den Datenblättern angegebenen Werte zu bestätigen und die zu erwartenden Rauschvarianzschätzungen beim Einsatz der IME in einem Fahrzeug besser einschätzen zu können.

#### 8.1 ALLAN-Varianz

Die Berechnung der ALLAN-Varianz ist, neben der in Anhang G beschriebenen Möglichkeit, eine Methode, um Sensorsignale im Zeitbereich näher analysieren zu können [Woo07]. Es handelt sich dabei um eine Varianz, die aus der Mittelung über mehrere Signalausschnitte resultiert. Sie wurde ursprünglich entwickelt, um die Frequenzstabilität von Oszillatoren untersuchen zu können.

An dieser Stelle wird angenommen, dass sich der Sensor in einem Ruhezustand befindet und somit kein „äußerer Einfluss“ durch eine Bewegungsdynamik vorhanden ist, siehe Gl. (7.63) und (7.69):

$$\tilde{\omega}_{ib,k}^b = \mathbf{b}_{\omega,k} + \mathbf{n}_{\omega,k} \quad (8.1)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_{ib,k}^b = \mathbf{g}_k^n + \mathbf{b}_{a,k} + \mathbf{n}_{a,k}. \quad (8.2)$$

Demnach wird ein *RWP* von einem weißen Zufallsprozess überlagert (in Gl. (8.2) tritt zusätzlich ein deterministischer Anteil in Form des Schwerebeschleunigungsvektors auf). Für die Berechnung wird wie folgt vorgegangen:

1. Aufteilung einer möglichst langen Sequenz von Sensorsignalen  $x_k$  mit  $x_k \in \{\tilde{a}_{ib,x,k}^b, \tilde{a}_{ib,y,k}^b, \tilde{a}_{ib,z,k}^b, \tilde{\omega}_{ib,x,k}^b, \tilde{\omega}_{ib,y,k}^b, \tilde{\omega}_{ib,z,k}^b\}$  in  $L$  gleich lange, nicht überlappende Signalausschnitte der Länge  $\Delta T_l$  (es sollten ausreichend Daten für mindestens  $L = 9$  Signalausschnitte vorhanden sein [Woo07]).
2. Mittelung der Daten in den jeweiligen Signalausschnitten für verschiedene Ausschnittslängen  $\Delta T_l = \frac{\Delta K}{f_{\text{IME}}}$  (siehe Kap. 7.2.1 bzgl. der Einteilung der Zeitachse):

$$\mu_{l,\Delta K} := \frac{1}{\Delta K} \sum_{p'=0}^{\Delta K-1} x_{l\Delta K+p'}, \quad \text{für } l = 0, \dots, L-1 \quad \text{und } \Delta K > 10, \quad (8.3)$$

so dass mit  $\mu_{0:L-1,\Delta K} := \mu_{0,\Delta K}, \dots, \mu_{l,\Delta K}, \dots, \mu_{L-1,\Delta K}$  eine Sequenz gemittelter Daten für verschiedene  $\Delta K$  vorliegt.

### 3. Berechnung der ALLAN-Varianz anhand

$$\sigma_{\text{AD};\Delta K}^2 := \frac{1}{2 \cdot (L-1)} \sum_{l=1}^{L-1} (\mu_{l,\Delta K} - \mu_{l-1,\Delta K})^2. \quad (8.4)$$

Erläuterung: Eine mathematisch korrekt definierte Varianz erfordert unendlich viele Stichproben bzw. die Mittelung über eine unendlich lange Ausschnittslänge ( $\Delta T_l \rightarrow \infty$ ). Um hier der realen Messsituation Rechnung zu tragen, wird auf eine Varianz zurückgegriffen, die auf zwei Stichproben beruht:

$$E \left[ \frac{1}{2-1} \sum_{n'=1}^2 \left( \mu_{n',\Delta K} - \frac{1}{2} \sum_{m'=1}^2 \mu_{m',\Delta K} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} E \left[ (\mu_{2,\Delta K} - \mu_{1,\Delta K})^2 \right]. \quad (8.5)$$

Aufgrund der Begrenzung der Mittelung auf  $L$  Werte ist es wichtig, wiederum die endliche Anzahl von Messpunkten zu berücksichtigen, weshalb Gl. (8.5) durch Gl. (8.4) angenähert wird.

Aus der ALLAN-Varianz (8.4) kann schließlich mit

$$\sigma_{\text{AD};\Delta K} = \sqrt{\sigma_{\text{AD};\Delta K}^2} \quad (8.6)$$

die ALLAN-Standardabweichung bestimmt werden, die auch häufig als logarithmische Funktion über  $\Delta T_l$  dargestellt wird. In dieser Darstellung (z. B. zeigt die Abb. 8.2 (a) die berechneten Werte der ALLAN-Standardabweichungen der Drehratensensortriade der *MTi*) lassen sich relativ einfach die verschiedenen Rauschprozesse, die auf das jeweilige Signal einwirken, identifizieren und deren charakteristische Parameter bestimmen. Die in dieser Arbeit wichtigen Parameter sind wie folgt ablesbar [IEE03]:

- Weißes GAUSS-verteiltes Rauschen erscheint in der Darstellung als Gefälle mit einer Steigung von  $-0,5$ . Die Parameter des zugehörigen *RWP* können bestimmt werden, indem eine Gerade durch das Gefälle gelegt und der Wert bei  $\Delta T_l = 1$  s abgelesen wird. Für einen Drehratensensor würde daraus der *ARW*-Parameter, für einen Beschleunigungssensor der *VRW*-Parameter resultieren (allerdings jeweils bezogen auf  $1/\sqrt{s}$ ), denn in [Sei04] wird gezeigt, dass die ALLAN-Varianz durch

$$\sigma_{\text{AD};\Delta K}^2 = \frac{RW^2}{\Delta T_l} + b^2 \frac{2}{\pi} \ln(2) + f(\Delta T_l, \dots) \quad (8.7)$$

angenähert werden kann, wobei hier  $b$  das Bias und  $RW$  den *RWP*-Koeffizienten (*ARW* oder *VRW*) darstellen. Die Funktion  $f(\Delta T_l, \dots)$  beschreibt weitere Abhängigkeiten von Rauschprozessen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden (z. B. Quantisierungsrauschen). Aus (8.7) resultieren die charakteristischen Parameter wie die *RWP*-Koeffizienten oder die so genannte Biasstabilität.

Des Weiteren gilt: Je kleiner  $\Delta T_l$ , desto eher stimmen die empirisch bestimmten Mittelwerte zweier aufeinanderfolgender Signalabschnitte für einen *RWP* überein. Für die  $x$ -Komponente

von  $b_a$  gilt dann z. B. :

$$\sum_{p'=0}^{\Delta K-1} b_{a,x,(l-1)\Delta K+p'} \approx \sum_{p'=0}^{\Delta K-1} b_{a,x,l\Delta K+p'}. \quad (8.8)$$

Der empirisch berechnete Mittelwert nähert sich allerdings erst mit steigender Intervalllänge dem Erwartungswert des weißen Rauschprozesses an. Der Einfluss des weißen Rauschprozesses auf die ALLAN-Varianz überwiegt demnach bei kleinen Intervalllängen. Aufgrund der Tatsache, dass ein *RWP* ein instationärer Prozess ist, gilt für ansteigende Ausschnittslängen  $\Delta T_l$  die Approximation in Gl. (8.8) nicht mehr. Der Einfluss des *RWP* nimmt zu.

- Die so genannte Biasstabilität  $\bar{\sigma}_{b_a,\Delta K}$  bzw.  $\bar{\sigma}_{b_\omega,\Delta K}$ , d. h. der zugehörige numerische Wert, kann im absoluten Minimum abgelesen werden. Dabei handelt es sich um die Änderung des Bias im Zeitraum  $\Delta T_{l,min}$ , wobei  $\Delta T_{l,min}$  das  $\Delta T_l$  ist, für welches die ALLAN-Varianz minimal ist.

Weitere Details zu den Parametern, die mit Hilfe der ALLAN-Varianz bestimmt werden können, sind in [IEE03] aufgeführt und werden an dieser Stelle nicht näher erörtert.

## 8.2 Miniature Tracking inertial-Sensoreinheit

Wie übliche IME besteht auch die *MTi*-Sensoreinheit aus einer Kombination mehrerer Sensorelemente in *MEMS*-Technologie: Drehratensensoren, Beschleunigungssensoren sowie Magnetfeldsensoren für drei Raumrichtungen. Dabei kann die Ausgabe der räumlichen Orientierung mit Hilfe eines digitalen Signalprozessors (DSP) wahlweise mit oder ohne direkte Unterstützung durch Magnetometerdaten erfolgen. Durch eine integrierte Vorfilterung wird die Biasdrift reduziert, wodurch eine Nachfilterung weniger aufwändig ist. Außerdem kann die *MTi*-Sensoreinheit durch einen zusätzlichen Sensor die Temperatur messen. Das Datenblatt der *MTi*-Sensoreinheit [B.V09a] gibt die Parameter der Einheit mit  $ARW = 5 \cdot 10^{-2} / (s \cdot \sqrt{Hz})$  und  $VRW = 2 \cdot 10^{-3} m / (s^2 \cdot \sqrt{Hz})$  an. Des Weiteren beträgt die Biasstabilität  $1^\circ/s$  bzw.  $2 \cdot 10^{-2} m/s^2$ . Die Magnetfeldsensoren haben eine Biasstabilität von 0,1 mG und weisen ein Messrauschen von 0,5 mG auf. Die Skalenfaktorstabilität beträgt hingegen 0,03 % für die Beschleunigungssensortriade bzw. 0,5 % für die Magnetfeldsensoren. Entsprechende Daten für die Drehratensensortriade sind nicht verfügbar. Die maximale Abtastfrequenz des Sensors beträgt zwar 120 Hz, im Folgenden wurde jedoch  $f_{IME} = 100$  Hz gewählt.

Ein ausgeprägter Biasverlauf, d. h. eine niederfrequente Störung, ist durch die interne Vorfilterung der *MTi*-Sensoreinheit nur geringfügig vorhanden, wie Abb. 8.1 (a) zeigt. Hierzu wurde eine Langzeitmessung der Dauer von 60 h mit annähernd konstanter Raumtemperatur durchgeführt, wobei die IME ruhte. Auftretende „Rest-Bias“ sind daher nur unwesentlich von der Temperatur abhängig. In der Abbildung sind die Periodogramme der Signale von den Sensorkomponenten zu sehen, welche die Drehraten in der *MTi*-Sensoreinheit messen. Für diese gilt hier:

$$R_\omega(f_{k'}) = \frac{1}{f_{IME} N'} \left| \sum_{n'=1}^{N'} \tilde{\omega}_{ib,n'}^b e^{-j \frac{2\pi f_{k'}}{f_{IME}} n'} \right|^2. \quad (8.9)$$

Dazu wurde eine  $N' = 48k$ -Schnelle FOURIER-Transformation (*FFT*) angewendet. Das inhärente Rauschen erstreckt sich von Natur aus gleichmäßig über den gesamten Frequenzbereich. Lediglich im unteren Bereich bis zu einer Frequenz von ca.  $f = 25 \cdot 10^{-4}$  Hz ist ein ausgeprägtes Grundrauschen zu finden. Nach [Neu05] ist dort das zeitlich (annähernd) konstante Bias zu finden. In



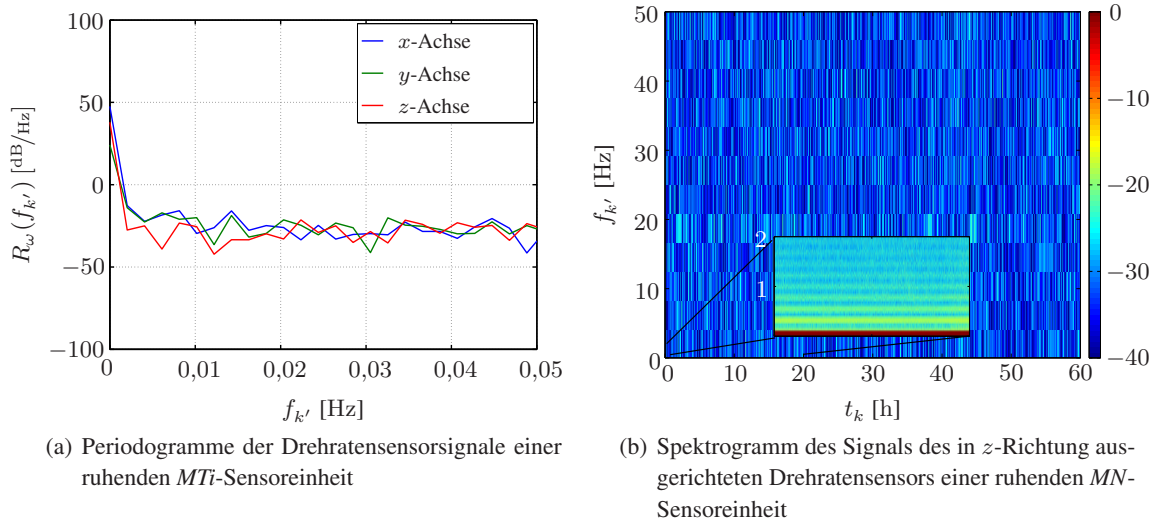
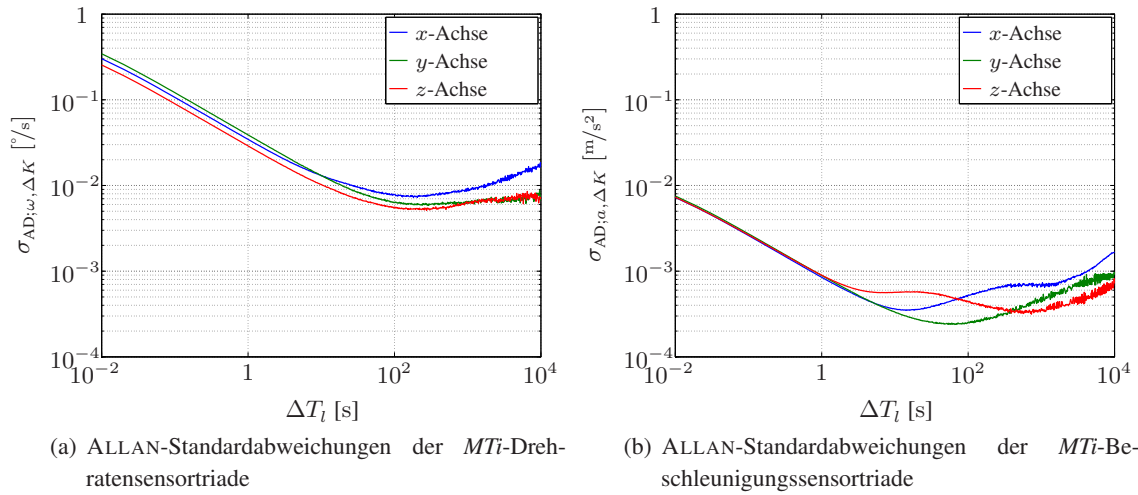


Abbildung 8.1: Leistungsdichtespektrum und Spektrogramm der Signale einer ruhenden Drehratensensortriade

den höheren Frequenzbereichen sind keine Auffälligkeiten auszumachen, weshalb hier nur Frequenzen bis 0,05 Hz aufgeführt sind. Im Gegensatz zur *MTi*-Sensoreinheit weist die *MotionNode* (*MN*)-Sensoreinheit der Fa. *GLI Interactive LLC*, USA, eine IME, die hier zu Vergleichszwecken herangeführt wurde [LLC08], unerwünschte Effekte im Ruhesignal auf, wie Abb. 8.1 (b) zeigt. Es ist im unteren Frequenzbereich des Spektrogramms ein Grundrauschen zu erkennen, das bis zu einer Grenzfrequenz von ca. 0,2 Hz reicht. Dieses ist in der Abbildung nochmals vergrößert dargestellt. Da kein äußerer Einfluss bei der Messung vorhanden war, handelt es sich nach Gl. (7.63) bei den Signalanteilen, die zwischen 0 Hz und 0,2 Hz liegen, um ein Bias. Es zeigt sich aber auch in anderen Frequenzbereichen ein zeitvariantes Rauschen. Bei ca. 10 Hz und bei 20 Hz ist zu erkennen, dass Rauschanteile auftreten, die sich mit der Zeit geringfügig ändern. Dies kann auf thermisches oder bauteilabhängiges Sensorrauschen zurückgeführt werden.<sup>10</sup>

Im Folgenden sollen die logarithmischen Verläufe der ALLAN-Standardabweichungen für die Drehraten- und Beschleunigungssensortriade in den Abb. 8.2 (a) und (b) betrachtet werden. Anhand der dargestellten Verläufe können für die angenommenen *RWP* zunächst die Werte in Tab. 8.1 abgelesen werden. Im rechten Teilbild fällt auf, dass sich die Minima der einzelnen Sensorachsen in unterschiedlichen Bereichen befinden. Der Grund dafür ist zum einen eine nicht vollständig orthogonale Anordnung der Beschleunigungssensoren sowie ihre unterschiedliche Güte, zum anderen aber auch ein nicht ausreichend langes Beobachtungsintervall. Die *VRW*- und *ARW*-Parameter sind vergleichbar mit den Ergebnissen, die mit dem in Anhang G aufgeführten Verfahren gewonnen wurden. Die Werte für die Biasstabilität sind dagegen deutlich geringer als die im Datenblatt angegebenen Werte [B.V09a]. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass in Datenblättern häufig die maximalen Werte angegeben sind, die sich aus Untersuchungen mehrerer Sensorklassen ergeben haben, wobei die Ergebnisse gemittelt wurden. Auch die Umgebungstemperatur spielt hierbei eine wichtige Rolle. Die Temperaturbereiche, in denen die *MTi*-Sensoreinheit vom Hersteller getestet wurde [B.V09a], wurden bei den Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit nicht durchlaufen.

<sup>10</sup>Da die *MN*-Sensoreinheit, mit Ausnahme der internen Biaskompensation, in der gleichen Kategorie wie die *MTi*-Sensoreinheit einzuordnen ist, wurde im Rahmen dieser Arbeit auf weitere Untersuchungen unter Verwendung der *MN*-Sensoreinheit verzichtet.

Abbildung 8.2: ALLAN-Standardabweichungen der *MTi*-Sensoreinheit

Achse	$\widehat{ARW} [^{\circ}/(s \cdot \sqrt{\text{Hz}})]$	$\hat{\sigma}_{b_{\omega}, \Delta K} [^{\circ}/s]$	$\Delta T_{l, \min} [s]$
$x$ -Achse   $y$ -Achse $z$ -Achse	$3,5 \cdot 10^{-2}$   $3,9 \cdot 10^{-2}$ $2,9 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-3}$   $5,9 \cdot 10^{-3}$ $5,1 \cdot 10^{-3}$	205,3   294,1 274,4
Achse	$\widehat{VRW} [m/(s^2 \cdot \sqrt{\text{Hz}})]$	$\hat{\sigma}_{b_a, \Delta K} [m/s^2]$	$\Delta T_{l, \min} [s]$
$x$ -Achse   $y$ -Achse $z$ -Achse	$8,5 \cdot 10^{-4}$   $8,9 \cdot 10^{-4}$ $9,0 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$   $2,4 \cdot 10^{-4}$ $3,1 \cdot 10^{-4}$	14,2   66,0 732,6

Tabelle 8.1: Anhand der ALLAN-Standardabweichung ermittelte Parameter für sensorinhärentes Rauschen und Biasstabilität der *MTi*-Sensoreinheit

Vergleicht man z. B. die geschätzten *VRW*-Parameter der ruhenden *MTi*-Sensoreinheit mit den Werten, die in Kap. 7.2.3 aus einer empirischen Berechnung resultierten, so fällt auf, dass die *VRW*-Schätzungen hier höhere Werte aufweisen als die minimalen Werte in der Phase  $\dot{P}_M$ , die im Rahmen des KM gemessen wurden. Dieses ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass das Rauschen, das in 7.2.3 mittels KM geschätzt wird, nicht ausschließlich dem inhärenten Rauschen entspricht, sondern von Vibrationen und der Trajektorien-dynamik überlagert wurde. Dieses ist bei den hier verwendeten Daten nicht der Fall. Außerdem wird in Kap. 7.2.3 die Varianz einer Variablen berechnet, die laufend um einen zeitvarianten Mittelwert bereinigt wird.

Auf Basis der Ergebnisse zur Biasstabilität in Tab. 8.1 und unter Berücksichtigung von Gl. (8.4) wurden außerdem über  $\frac{\hat{\sigma}_{b_{\omega}}}{\sqrt{\Delta T_{l, \min}}}$  bzw.  $\frac{\hat{\sigma}_{b_a}}{\sqrt{\Delta T_{l, \min}}}$  die Standardabweichungen des biastreibenden Rauschens in Tab. 8.2 ermittelt. Dabei sei angemerkt, dass sich in beiden Tabellen die Werte auf  $\sqrt{\text{Hz}}$  be-

Achse	$\hat{\sigma}_{b_{\omega}} [^{\circ}/(s^2 \cdot \sqrt{\text{Hz}})]$	$\hat{\sigma}_{b_a} [m/(s^3 \cdot \sqrt{\text{Hz}})]$
$x$ -Achse   $y$ -Achse $z$ -Achse	$5,1 \cdot 10^{-4}$   $3,5 \cdot 10^{-4}$ $3,1 \cdot 10^{-4}$	$9,2 \cdot 10^{-5}$   $2,9 \cdot 10^{-5}$ $1,1 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 8.2: Anhand der Biasstabilität geschätzte Standardabweichungen des biastreibenden Rauschens der *MTi*-Sensoreinheit

ziehen. Für die Komponente der  $x$ -Achse würde daher beispielhaft  $\hat{\sigma}_{b_{a,x}} = 9,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}/(\text{s}^3 \cdot \sqrt{\text{Hz}}) \rightarrow \hat{\sigma}_{b_{a,x}} = 9,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}/\text{s}^3$  (bei  $f_{\text{IME}} = 100 \text{ Hz}$ ) gelten.

Zur Erzeugung der simulierten Daten nach Anhang F.1 wurden die Werte in Tab. 8.1 und Tab. 8.2 gemittelt, so dass für die Standardabweichungen des Biasrauschens die Werte in Tab. F.1 resultierten. Obwohl hier nur die  $ARW$ - und  $VRW$ -Parameter bestimmt wurden, werden diese Werte aufgrund der relativ geringen Korrelationszeit  $t_{\text{IME};c}$  auch für die Standardabweichungen bzw. Varianzen verwendet, die das simulierte zeitkorrelierte Inertialsensorrauschen treiben. In Kap. 9.2 wird gezeigt, dass zwischen diesen lediglich ein Faktor von jeweils  $\left(1 - e^{-\frac{2}{f_{\text{IME}} \cdot t_{\text{IME};c}}}\right)^{-1/2} \approx 1,4$  liegt.

### 8.3 Einfluss von Trajektorien­dynamik

Bei den bisherigen Untersuchungen wurde die  $MTi$ -Sensoreinheit im ruhenden Zustand betrachtet. Das inhärente Rauschen konnte dabei als annähernd zeitinvariant angenommen werden, da Effekte wie z. B. Vibrationen nicht auftraten. Lediglich die Bias wurden als zeitvariant angenommen. In diesem Abschnitt soll eine Messfahrt (Fahrt durch die Innenstadt von Paderborn) dazu genutzt werden, um zu bestätigen, dass die übrigen Sensorparameter bei vorhandener Trajektorien­dynamik ebenfalls als zeitvariant modelliert werden können. Während der Fahrt wurden verschiedene Straßenbeläge befahren sowie starke Abbrems- und Beschleunigungsvorgänge vorgenommen. Des Weiteren sind in dem Datensatz Standphasen  $\ddot{P}_O$  an Ampeln vorhanden. Abb. 8.3 (a) zeigt die Ausgangssignale der  $MTi$ -Beschleunigungssensoren, die in den ersten 10 min der Messfahrt aufgenommen wurden. Durch eine nicht vollständig waagerechte Anfangsausrichtung tritt eine deutliche Nullpunkt­abweichung der  $x$ -Komponente auf. Dadurch wird die Schwerkbeschleunigung nicht nur von der Sensorkomponente in  $z$ -Richtung, sondern auch von der in  $x$ -Richtung gemessen. Unter der Annahme einer konstanten Schwerkbeschleunigung lässt dieses auf einen initialen Nickwinkel von ca.  $15^\circ$  gegenüber der Fahrzeug­längsachse schließen (siehe auch [Wen07]). Ebenso wird auch die Fahrzeugbewegung in Längs-

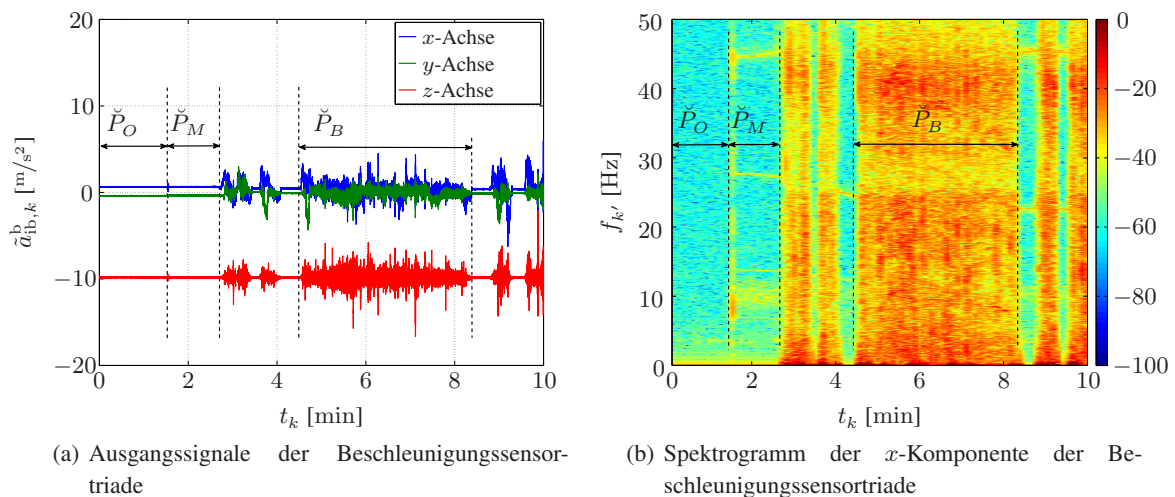


Abbildung 8.3: Ausgangssignale und Spektrum der Beschleunigungssensoren der  $MTi$ -Sensoreinheit

richtung von den Sensorelementen der  $x$ - und  $z$ -Achse erfasst. Durch eine manuelle Kalibrierung wird die initiale Lage des Sensors jedoch nachfolgend kompensiert, so dass sich diese in den anschließenden Filterschritten nicht bemerkbar macht. Während zwischen der Phase  $\ddot{P}_O$  und der Standphase mit laufendem Motor  $\ddot{P}_M$  kaum ein Unterschied bei den Beschleunigungssensorsignalen zu erkennen ist,

wird in der Bewegungsphase  $\check{P}_B$  die Trajektorie sehr deutlich von vibrationsinduziertem Rauschen überlagert. Ein Rückschluss auf die vorhandene Trajektorien­dynamik scheint nur schwer möglich.

In Kap. 8.2 wurde gezeigt, dass die Leistungsdichte für höhere Frequenzen annähernd konstant ist, wie es für eine ruhende Sensoreinheit zu erwarten ist. Die Vibrationen, die allerdings in der Phase einer Bewegung (z. B. aufgrund der Straßenverhältnisse oder an einer Ampel durch den Motor) zusätzlich in den Sensordaten auftreten, sind im Spektrogramm in Abb. 8.3 (b) zu erkennen. Während der Fahrt­dauer von ca. 40 min wurden verschiedene Straßenbeläge wie Pflaster und Teer befahren. In der Ruhephase  $\check{P}_O$  sind, außer einem Ausrichtungsfehler, keine störenden Rauschanteile zu beobachten. In der Phase  $\check{P}_M$ , in der lediglich der Motor läuft, werden die Frequenzen 13 Hz, 28 Hz und 45 Hz beeinflusst. Dies weist auf Eigenfrequenzen hin, die zu Vibrationen der Karosserie durch den Motor führen und damit direkt auf die IME wirken. Auch bei 10 Hz ist eine erhöhte Leistungsdichte zu erkennen. In der Bewegungsphase  $\check{P}_B$  fällt auf, dass neben der Trajektorien­dynamik zusätzliche Vibrationen hervorgerufen werden, die sich über den gesamten Frequenzbereich erstrecken.

Die Abb. 8.4 zeigt ergänzend die Periodogramme der Beschleunigungssensortriade für die in Abb. 8.3 (a) dargestellte Phase  $\check{P}_B$ . Es wird deutlich, dass die  $x$ - und  $z$ -Komponenten bei ca. 40 Hz eine etwas höhere Leistungsdichte aufweisen als die  $y$ -Signalkomponente. Das Rauschen lässt sich also nicht mehr über einen weißen, mittelwertfreien Rauschprozess beschreiben. Im vorliegenden Fall unterscheidet sich der Verlauf des LDS der  $y$ -Komponente etwas von den Verläufen des LDS der anderen Komponenten. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich z. B. durch die Fliehkräfte die Fahrdynamik bei Kurvenfahrten hauptsächlich auf die  $y$ -Achse der Sensortriade auswirkt, während sich lineare Beschleunigungsvorgänge und stärkere Vibrationen eher in der  $x$ - und  $z$ -Komponente bemerkbar machen.

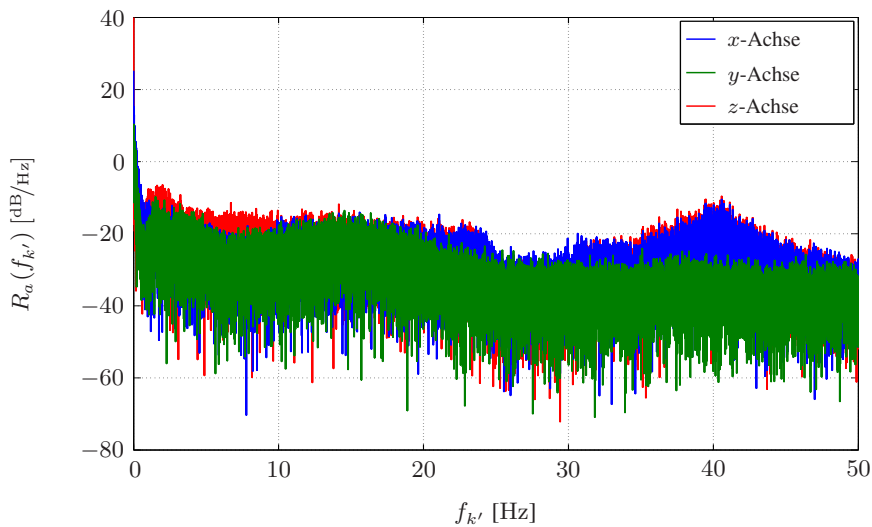


Abbildung 8.4: Periodogramme der Beschleunigungssensortriade der MTi-Sensoreinheit

Diese Ergebnisse zeigen, dass der gesamte Spektralbereich beeinflusst wird. Durch einen GAUSS-MARKOV-Prozess (GMP) lassen sich diese Effekte bereits sehr gut approximieren. Sehr starke hochfrequente Störungen (z. B. durch Schlaglöcher verursacht) werden durch einen GMP zwar nicht vollständig berücksichtigt, allerdings treten diese i. Allg. auch nur sporadisch auf und könnten durch eine entsprechende Tiefpassfilterung eliminiert werden (in [Neu05] wird erläutert, dass sich die Trajektorien­dynamik bei normaler Fahrweise hauptsächlich in einem Frequenzbereich unterhalb von ca. 5 Hz – 10 Hz befindet). Allerdings muss man bei einer Tiefpassfilterung bedenken, dass zu-

sätzliche Korrelationen auftreten können. Durch diese verändern sich die statistischen Eigenschaften des zeitlich korrelierten Rauschprozesses, was in Kombination mit einem Filteransatz wie hier in geeigneter Form berücksichtigt werden sollte.

Auf eine Tiefpassfilterung wird aber in Verbindung mit einem *INS/GPS*-Navigationsfilter auch aus anderen Gründen häufig verzichtet. In [Tab08] wird erläutert, dass vor allem die niederfrequenten Störungen im Rahmen der *Strapdown*-Berechnungen für die Positions- und Geschwindigkeitsabweichungen verantwortlich sind, da diese die Trajektorie überlagern. Hochfrequente, mittelwertfreie Störungen treten zwar als kurzfristige Störungen in der Navigationslösung auf, mitteln sich durch das Aufintegrieren jedoch langfristig heraus. Für die Langzeitstabilität der Navigationslösung spielen sie daher eine untergeordnete Rolle. Zudem beruht die Herleitung der *Strapdown*-Gleichungen (vor allem die Lageberechnung) auf Approximationen, die nur gültig sind, wenn die IME-Informationsrate hoch ist [Wen07]. Drehungen sind nicht kommutativ (siehe Kap. 4). Liegen tiefpassgefilterte und damit geglättete Drehraten  $\tilde{\omega}_{ib,k}^b$  vor, so könnten daraus andere Lageberechnungen resultieren als es bei nicht tiefpassgefilterten Daten der Fall ist. Die daraus ggf. resultierenden Fehler können sich binnen kurzer Zeit akkumulieren und letztendlich die gesamte Navigationslösung negativ beeinflussen.

In diesem Zusammenhang muss aber auch die Navigationsfilterstruktur selbst nochmals betrachtet werden. Bei einem schwach gekoppelten *INS/GPS*-System ist die Eliminierung kurzzeitiger Störungen im Rahmen der Fehlerfilterung generell nur in begrenztem Umfang möglich [SBS99]. Wie in Kap. 5 erläutert wurde, liegt am Messeingang des eingesetzten LKF effektiv nur dann ein Signal an, wenn entsprechende Stützgrößen vorhanden sind (es handelt sich dabei also um ein unterabgetastetes Signal). Die Korrektur der Größen des äußeren Systemzustandes erfolgt daher ebenso nur mit einer entsprechenden Datenrate. Die Bandbreite der Störungen, die vom Navigationsfilter direkt beobachtbar und korrigierbar sind, hängt ohne Tiefpassfilterung somit von den Stützsensoren ab, die eingesetzt werden. Es handelt sich dabei also größtenteils um Störungen, die langfristig und in dem Frequenzbereich auftreten, in dem auch die eigentliche Trajektorien-dynamik (die Bewegungsinformation) liegt. Dies können aber auch Ungenauigkeiten sein, die auf Approximationen bei der Bewegungsmodellierung zurückzuführen sind, Skalierungsfehler, die sich langfristig einstellen würden (z. B. durch Temperaturänderungen) oder hochfrequente Anregungen, die durch Aliaseffekte als vibrationsinduziertes Rauschen im Frequenzbereich der Trajektorien-dynamik wiederzufinden sind. Die Navigationslösung am *Strapdown*-Ausgang kann zwar nicht abtastwertweise korrigiert werden, diese Unsicherheiten können jedoch durch eine zeitvariante Systemrauschkovarianzmatrix und einem Parameterschätzverfahren wie dem SEM berücksichtigt werden. Dies ist sinnvoll, da sich Fehler zwischen zwei Messwertaktualisierungen eines LKF trotzdem akkumulieren können. Dies wird im folgenden Kapitel zusammen mit den Untersuchungsergebnissen ausführlich erläutert.

## Zusammenfassung

Mit Hilfe der ALLAN-Varianz war es möglich, die *MTi*-Sensoreinheit auf Basis von Ruhe- und Feldmessungen, bei denen die IME einer Trajektorien-dynamik unterlag, zu untersuchen und die Rauschprozessparameter zu ermitteln, die für das Systemmodell des Fehlerfilters benötigt werden. Es wurden ebenfalls die Varianzen des biastreibenden Rauschens bestimmt. Des Weiteren wurde erläutert, dass sich bei dem hier betrachteten Szenario die fahrdynamischen Signalanteile in einem niedrigen Frequenzbereich befinden, während sich die vibrationsinduzierten und inhärenten Störungen über den gesamten Frequenzbereich des Sensorsignals erstrecken. In diesem Zusammenhang wurde jedoch ebenso erörtert, dass nicht sämtliche Fehler im Rahmen eines schwach gekoppelten Navigationssystems gefiltert und korrigiert werden können.

# Kapitel 9

## Untersuchungsergebnisse

Die nachfolgenden Abschnitte beinhalten Untersuchungsergebnisse, die sich auf das in Kap. 5 vorgestellte inertielle Navigationsfilter und das in Kap. 6 behandelte barometrische Teilsystem beziehen. Auf eine sequenzielle Parameterschätzung mittels KM, MD oder SEM wird dabei zunächst verzichtet. Zum einen wird auf künstlich generierte inertielle Sensor- und Stützdaten zurückgegriffen, zum anderen werden auch Daten eingesetzt, die im Rahmen von Messfahrten aufgenommen wurden. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden dann die Parameterschätzverfahren miteinander verglichen, wobei die vollständige Filterstruktur einschließlich der sequenziellen Parameterschätzung zum Einsatz kommt.

### 9.1 Kombination des barometrischen Teilsystems und des Fehlerfilters

In diesem Abschnitt sollen die Auswertungen zur Gesamtfilterstruktur inklusive des barometrischen Teilsystems vorgestellt werden, wie es in Abb. 9.1 dargestellt ist. Ein Verfahren zur sequenziellen

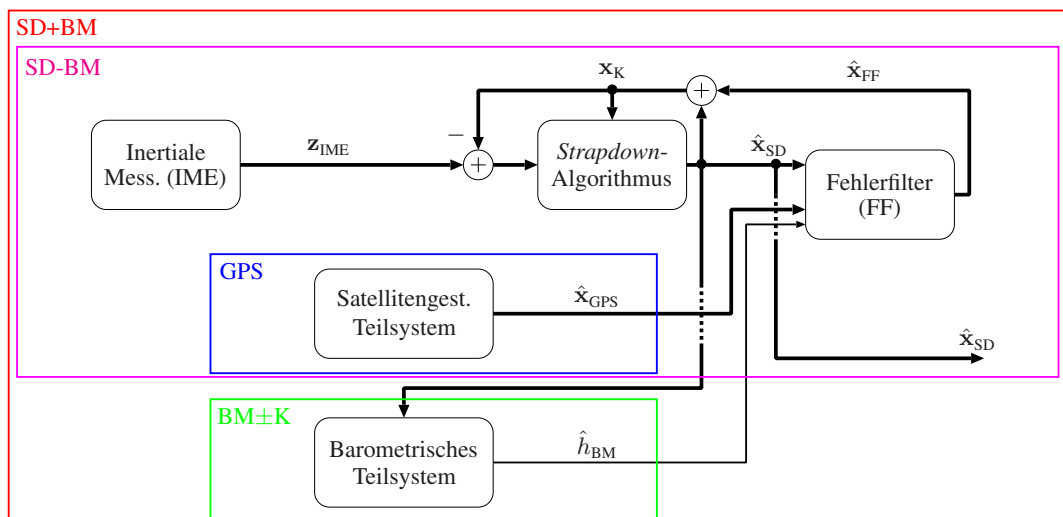


Abbildung 9.1: Filterstruktur ohne Magnetsensormessungen zur Untersuchung des barometrischen Teilsystems und des inertialen Fehlerfilters unter der Annahme einer zeitinvarianten Systemrauschkovarianzmatrix (verschiedene, farblich markierte Teilkonfigurationen sind eingegrenzt)

Parameterschätzung wird hier nicht eingesetzt. Stattdessen werden konstante Rauschvarianzen angenommen, die den entsprechenden Datenblättern der IME entnommen werden konnten [B.V09a]. Von einer Zeitvarianz der Kovarianzmatrix, die das zeitlich korrelierte Rauschen im Systemmodell des



FF treibt, wird daher nicht ausgegangen. Die verschiedenen Teilkonfigurationen, die hier untersucht werden sollen, sind in vorstehender Abbildung farblich eingegrenzt.

### 9.1.1 Simulationsergebnisse

Die folgenden Ergebnisse beziehen sich vorerst ausschließlich auf künstliche Daten, die anhand des in Anhang F vorgestellten Systems generiert wurden. Hierbei wurden die in Tab. F.1 angegebenen Parameter verwendet. Es wurden verschiedene Trajektorien mit unterschiedlicher Bewegungsdynamik, aber gleichen Rauschparametern erstellt. Da es sich um künstliche Daten handelt, musste bei den GPS-Messungen keine verzögerte Verfügbarkeit nach Kap. 5.3.2 berücksichtigt werden.

#### 9.1.1.1 Vergleich der Höhenschätzungen

In Abb. 9.2 (a) ist der Betrag der Höhenfehler für einen typischen Trajektorienausschnitt der Länge 5 min dargestellt, der aus der Verwendung der verschiedenen Teilkomponenten bzw. deren Kombination resultiert. Der Betrag ist hier durch

$$\epsilon_{\text{Konfig};h,k} = |\hat{h}_k - h_{\text{ideal},k}| \quad (9.1)$$

definiert, wobei  $\hat{h}_k$  die auszuwertende Schätzgröße darstellt. Nach Abb. 9.1 stellt die Abkürzung  $\epsilon_{\text{GPS};h}$  (Konfiguration GPS) den absoluten (betragsmäßigen) Höhenfehler der GPS-Höhenkomponente dar, während  $\epsilon_{\text{SD-BM};h}$  die betragsmäßige Abweichung der Ausgangshöhe  $\hat{h}_{\text{SD}}$  des *Strapdown*-Algorithmus ist, wenn das inertiale Fehlerfilter (FF) nicht durch eine barometrische Höhenmessung gestützt wird, sondern ausschließlich durch die Schätzungen im Vektor  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{GPS}}$ . Dieses schließt auch die GPS-Höhe  $\hat{h}_{\text{GPS}}$  ein. Die Tab. 9.1 veranschaulicht, welche Teilkomponenten bei den verschiedenen Konfigurationen verwendet wurden. Für  $\epsilon_{\text{BM-K};h}$  und  $\epsilon_{\text{BM+K};h}$  wurde lediglich das barometrische Teil-

Konfiguration	Systemkomponenten			Auszuwertende Größe
	Satellitengestütztes Teilsystem	Barometrisches Teilsystem	<i>Strapdown</i> -Berechnung mit Fehlerfilterung	
GPS	×			$\hat{h}_{\text{GPS}}$
BM-K		×		$\hat{h}_{\text{BM}}$
BM+K		×		$\hat{h}_{\text{BM}}$
SD-BM	×		×	$\hat{h}_{\text{SD}}$
SD+BM	×	×	×	$\hat{h}_{\text{SD}}$

Tabelle 9.1: Testkonfigurationen (Erläuterung: GPS (Satellitenbasierte Stützung), BM (Barometrische Stützung), SD (*Strapdown*), K (Korrektur))

system betrachtet, wobei entweder die nicht korrigierte Höhe  $\tilde{h}_{\text{BM}}$ , die auf Basis der barometrischen Höhenformel (6.1) berechnet wurde, oder die biasfreie und um den Skalierungsfehler korrigierte Höhe  $\hat{h}_{\text{BM}}$  ausgewertet wurde. Schließlich wurde zur Bestimmung von  $\epsilon_{\text{SD+BM};h}$  das gesamte Navigationsfiltersystem inklusive des barometrischen Teilsystems eingesetzt, das zusammen mit den horizontalen GPS-Positions- sowie den GPS-Geschwindigkeitskomponenten das FF stützt. Auch hier ist die ausgewertete Größe  $\hat{h}_{\text{SD}}$ , die ein Element des Ausgangsvektors  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{SD}}$  ist, der wiederum nach Abb. 9.1 durch die Rückkopplung des Fehlervektors  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{FF}}$  auf korrigierten inertialen Messungen beruht.

In Abb. 9.2 (a) ist zu erkennen, dass die betragsmäßige Abweichung  $\epsilon_{\text{SD-BM};h}$  bei der Konfiguration SD-BM im Vergleich zum Fehler  $\epsilon_{\text{GPS};h}$  ( $\hat{h}_{\text{GPS}}$  ist die Höhe, die in dem satellitengestützten



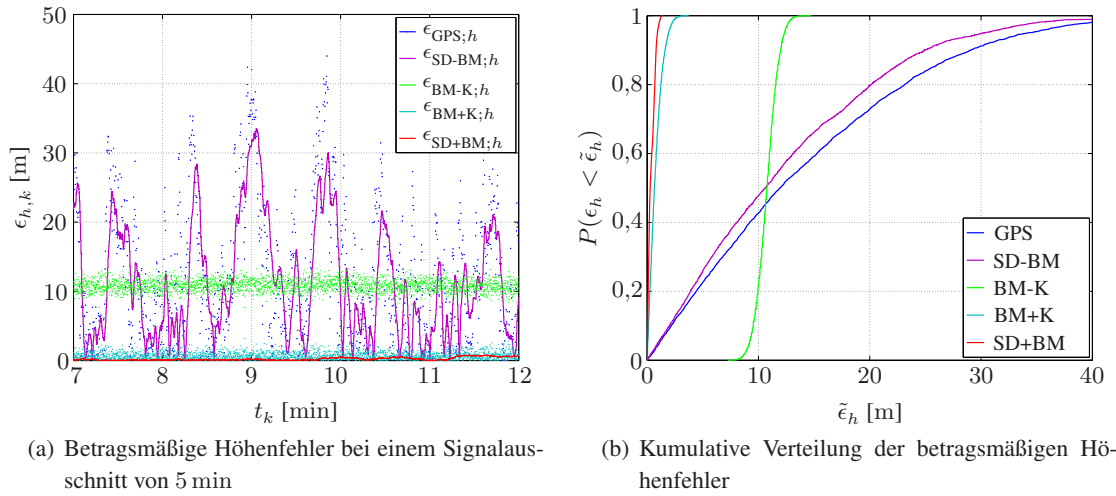


Abbildung 9.2: Mittlere betragsmäßige Höhenfehler über die Zeit für verschiedene Testkonfigurationen

Teilsystem berechnet wird), trotz der ausschließlichen Stützung anhand von *GPS*-Daten geringer ist. Dies kann damit begründet werden, dass die eigentliche Höheninformation durch die IME geliefert wird, die eine höhere Datenrate erlaubt. Des Weiteren besteht durch die SCHULER-Kompensation und die Lagekopplung ein enger Zusammenhang zwischen den horizontalen Positionskomponenten und der Höhe  $\hat{h}_{SD}$ , die vom *INS/GPS*-Navigationssystem berechnet wird. Dies führt zu einer besseren Kompensation der Höhenfehler.

In der Abbildung zeigt sich außerdem die vergleichsweise hohe Streuung der simulierten *GPS*-Höhe  $\hat{h}_{GPS}$ , die wiederum zu starken Schwankungen der Werte von  $\hat{h}_{SD}$  und damit der hohen betragsmäßigen Abweichung  $\epsilon_{SD-BM;h}$  führt. Die nach Gl. (6.1) berechnete Höhe  $\hat{h}_{BM}$  weist bereits zu Beginn des Datensignals (hier nicht dargestellt) ein deutliches zeitvariantes Bias auf. Dieser Effekt ist auf die Änderung der Referenzwerte  $T_{0,k}$  und  $P_{0,k}$  bei der Datengenerierung sowie auf das überlagerte Messrauschen  $n_{P,k}$  in Gl. (6.5) zurückzuführen. Diese z. T. ausgeprägten Abweichungen werden durch die Schätzung von  $s_h$  und  $b_h$  und die anschließende Korrektur in der Ausgangshöhe  $\hat{h}_{BM}$  jedoch deutlich verringert, wie  $\epsilon_{BM+K;h}$  zeigt. Da im Korrekturblock in Abb. 6.1 die Bias- und Skalierungsfaktorkorrektur durchgeführt wird, verbleibt nur noch ein Restfehler in der Größenordnung der Standardabweichung  $\sigma_h = \sigma_P \cdot 0,1 \text{ m/Pa} = 1 \text{ m}$ , der jedoch im Verhältnis zur Höhe als gering zu bewerten ist, wie die nachfolgenden Ergebnisse zeigen. Die Streuung ist in der Abb. 9.2 (a) deutlich zu erkennen. Abschließend zeigt  $\epsilon_{SD+BM;h}$ , dass die Stützung des FF durch die korrigierte Höhe  $\hat{h}_{BM}$  in Kombination mit den übrigen *GPS*-Daten das beste Resultat liefert. Der mittlere betragsmäßige Höhenfehler von  $\hat{h}_{SD}$  liegt weit unterhalb von 1 m.

Die Abb. 9.2 (b) führt zusätzlich die kumulative (empirische) Verteilung der Höhenfehler für die oben beschriebenen Varianten auf.<sup>11</sup> Für die Verteilungs-/Summenhäufigkeitsfunktion gilt hierbei:

$$P(\epsilon_h < \tilde{\epsilon}_h) = \frac{|M(\epsilon_h)|}{K} \quad \text{mit} \quad M(\epsilon_h) := \{ \epsilon_{h,k} \mid \epsilon_{h,k} < \tilde{\epsilon}_h, k \in \{1, \dots, K\} \}, \quad (9.2)$$

wobei  $K$  die Anzahl der Messwerte ist. Diese Verteilung gibt demnach an, wieviel Prozent der vorliegenden Stichprobe unterhalb einer vorgegebenen Fehlerschranke  $\tilde{\epsilon}_h$  liegen. Je „weiter links“ eine

<sup>11</sup>Die kumulative Verteilungsfunktion entspricht hier einer durch Stichproben gewonnenen empirischen Verteilungsfunktion, die auch als (relative) Summenhäufigkeitsverteilungsfunktion bezeichnet wird [PKB05].

Summenhäufigkeitsfunktion in der Abbildung liegt, desto geringer ist der Positionsfehler und umso besser damit die vertikale Positionsschätzung. Hierbei fällt zunächst auf, dass lediglich ca. 20 % der nicht korrigierten, auf der barometrischen Höhenformel (6.1) beruhenden Höhe  $\tilde{h}_{\text{BM}}$  eine geringere Abweichung als 10 m aufweisen, wie die grüne Kurve belegt. Des Weiteren wird der Unterschied zwischen den Verfahren deutlich, bei denen der Ausgang  $\hat{h}_{\text{SD}}$  des *Strapdown*-Algorithmus entscheidend ist, die jedoch auf unterschiedlichen Stützgrößen beruhen: Bei  $\epsilon_{\text{SD-BM};h}$  weisen ca. 80 % der Schätzungen einen um etwa 3 m geringeren betragsmäßigen Höhenfehler auf als es bei  $\epsilon_{\text{GPS};h}$  der Fall ist. Eine noch deutlichere Verbesserung ist jedoch zu beobachten, wenn die *GPS*-Höhe  $\hat{h}_{\text{GPS}}$  im Vektor  $\mathbf{z}_{\text{FF}}$  durch  $\hat{h}_{\text{BM}}$  ersetzt wird. Der Betrag des Höhenfehlers reduziert sich mit Betrachtung von  $\epsilon_{\text{SD+BM};h}$  dabei im Wesentlichen auf Werte unter 2 m, was aus der vorangegangenen Korrektur von  $\tilde{h}_{\text{BM}}$  resultiert.

In Tab. 9.2 sind als weitere Referenz die mittleren betragsmäßigen Höhenfehler  $\mu_{\epsilon_h}$ , die Mediane der betragsmäßigen Höhenfehler  $\xi_{\epsilon_h}$  sowie die Standardabweichungen  $\sigma_{\epsilon_h}$  der Höhenschätzfehler für die verschiedenen Testvarianten angegeben. Dabei muss zwischen den Verfahren unterschieden werden, bei denen im FF berücksichtigt wird, dass es sich um zeitlich korrelierte *GPS*-Signale handelt, und solchen, bei denen diese Korrelationen im Filter nicht berücksichtigt werden. Im ersten Fall gilt gemäß Gl. (5.28)

$$\mathbf{w}_{\text{FF};k} = \mathbf{D}_{\text{FF};w} \mathbf{w}_{\text{FF};k-1} + \mathbf{\Gamma}_{\text{FF};w} \boldsymbol{\nu}_{\text{FF};k}, \quad (9.3)$$

wobei  $\boldsymbol{\nu}_{\text{FF};k} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_{\text{FF};k}; \mathbf{0}_{9 \times 1}, \mathbf{R}_{\text{FF}})$ . Für den zweiten Fall wurde  $\mathbf{D}_{\text{FF};w} = \mathbf{0}_{9 \times 9}$  gewählt, wodurch von einem mittelwertfreien, weißen GAUSS-verteilten Messrauschen  $\mathbf{w}_{\text{FF};k}$  ausgegangen wird. Die Auswirkungen dieser (falschen) Annahme bei einem zugrunde liegenden zeitlich korrelierten Rauschprozess sollen im Folgenden am Beispiel der Konfiguration SD-BM analysiert werden.

Der mittlere betragsmäßige Schätzfehler  $\mu_{\epsilon_{\dagger}}$ , der Median des betragsmäßigen Schätzfehlers  $\xi_{\epsilon_{\dagger}}$  und die Standardabweichung des Schätzfehlers  $\sigma_{\epsilon_{\dagger}}$  sind hier gemäß [HU05] für die einzelnen Positions- und Geschwindigkeitskomponenten mit  $\dagger \in \{p, n; p, e; h; v, e; v, n; v, d\}$  wie folgt definiert:

$$\mu_{\epsilon_{\dagger}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \epsilon_{\dagger,k} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left| \hat{\dagger}_k - \dagger_{\text{ideal};k} \right| \quad (9.4)$$

$$\xi_{\epsilon_{\dagger}} = \inf \left\{ \forall \epsilon_{\dagger,k} \in \mathbb{R} : P(\epsilon_{\dagger}) \geq \frac{1}{2}, k \in \{1, \dots, K\} \right\} \quad (9.5)$$

$$\sigma_{\epsilon_{\dagger}} = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K \left( \left( \hat{\dagger}_k - \dagger_{\text{ideal};k} \right) - \left( \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\dagger}_k - \dagger_{\text{ideal};k} \right) \right)^2}. \quad (9.6)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird neben dem mittleren betragsmäßigen Schätzfehler auch die Wurzel des mittleren quadratischen Schätzfehlers (engl. *Root Mean Square Error (RMSE)*) als Fehlermaß verwendet. Diese entspricht der Standardabweichung des Schätzfehlers, wenn der Mittelwert in Gl. (9.6) Null ist. Bei der Korrektur der auf der barometrischen Höhenformel basierenden Höhenschätzung durch die topografischen Referenzhöhen sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, dass ein Datenbankeintrag nicht nur dann verwendet wird, wenn der horizontale Abstand zwischen der aktuell geschätzten Position  $\hat{\mathbf{p}}_{\text{eb},k}^n$  nach der Korrektur und einem Datenbankeintrag minimal ist, sondern immer dann, wenn die euklidische Distanz geringer als  $d_{\text{max}} = 5$  m ist. Dies kann aufgrund der Datenrate von  $100 \text{ } 1/\text{s}$ , mit der die korrigierten Daten der IME zur Verfügung stehen und auf dessen Basis die

Differenzberechnung zu den Datenbankeinträgen durchgeführt wird, mehrmals hintereinander auftreten. Da man jedoch davon ausgehen kann, dass in dem Zeitraum, in dem  $d_{\min;k} < d_{\max}$  erfüllt ist (siehe Kap. 6.2), sich die Höhe nur unwesentlich ändert, ist dieser Aspekt unerheblich.

	Berücksichtigung der zeitlichen Korrelationen in den GPS-Daten im Messmodell des FF					Keine Berücksichtigung der zeitlichen Korrelationen in den GPS-Daten im Messmodell des FF
	$\hat{h}_{\text{GPS}}$	$\hat{h}_{\text{SD-BM}}$	$\hat{h}_{\text{BM}}$	$\hat{h}_{\text{BM}}$	$\hat{h}_{\text{SD+BM}}$	$\hat{h}_{\text{SD-BM}}$
$\mu_{\epsilon_h}$ [m]	14,154	12,409	10,753	0,776	0,378	14,165
$\xi_{\epsilon_h}$ [m]	11,931	10,604	8,755	0,647	0,269	11,926
$\sigma_{\epsilon_h}$ [m]	17,544	15,468	0,954	0,92	0,386	17,545

Tabelle 9.2: Mittlere betragsmäßige Höhenschätzfehler, Mediane der betragsmäßigen Höhenschätzfehler und Standardabweichungen der Höhenschätzfehler für künstliche Daten mit und ohne Berücksichtigung der zeitlichen Korrelationen in den GPS-Daten im Messmodell des Fehlerfilters

Betrachtet man zunächst die Ergebnisse auf der linken Seite, bei denen die zeitlichen Korrelationen im FF berücksichtigt wurden, so fällt auf, dass das barometrische Teilsystem unter den gegebenen Voraussetzungen gegenüber den nicht korrigierten Werten für eine höhere mittlere Genauigkeit von ca. 10 m verantwortlich ist. Mit besserer Stützung des FF steigt auch die Genauigkeit der Höhenschätzung im Rahmen der *Strapdown*-Berechnung. Der Median, der den mittleren Wert einer geordneten Stichprobe angibt und damit robuster gegenüber Ausreißern ist, liefert geringere Werte. Ein Vergleich der Werte der individuellen Testvarianten zeigt jedoch die gleichen Abstände zueinander auf wie bei der mittleren betragsmäßigen Abweichung. Die Standardabweichung des Schätzfehlers sinkt ebenfalls mit besserer Stützung und liegt, mit Hinzunahme des barometrischen Teilsystems, bei 0,386 m.

Die rechte Spalte der Tab. 9.2 zeigt am Beispiel der Konfiguration SD-BM die Auswirkungen auf die Höhenschätzung des Gesamtsystems, für den Fall, dass die zeitlichen Korrelationen in den GPS-Daten bei der Nachfilterung im FF nicht berücksichtigt werden. Durch die fehlerhafte Stützung führt die gesamte Navigationsfilterung ohne barometrisches Teilsystem, im Vergleich zu  $\hat{h}_{\text{GPS}}$ , zu keiner höheren Genauigkeit in der Positionsschätzung. Die Werte entsprechen hier im Wesentlichen denen, die auf Basis des satellitengestützten Teilsystems allein berechnet werden konnten. Die Messrauschkovarianzmatrix wird hier zu klein angenommen, wodurch die KALMAN-Gewichtungsmatrix ebenfalls falsch berechnet wird.

### 9.1.1.2 Gesamtnavigationslösung

Als nächstes sollen die Folgen der Höhenstützung auf die gesamte Navigationslösung untersucht werden. Neben den mittleren betragsmäßigen Positionsabweichungen und den Standardabweichungen der zugehörigen Schätzfehler sind in Tab. 9.3 die entsprechenden Werte für die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten aufgeführt. Diese beruhen auf Auswertungen der unterschiedlichen Trajektorien. Die Gesamtfehler sind hervorgehoben, wobei sich der Betrag des Fehlers zu einem bestimmten Zeitpunkt am Beispiel des *Strapdown*-Ausgangs zu

$$\epsilon_{\dagger,k} = \sqrt{\left| \hat{t}_{\text{SD;eb},n,k}^n - t_{\text{SD;eb},n,k}^n \right|^2 + \left| \hat{t}_{\text{SD;eb},e,k}^n - t_{\text{SD;eb},e,k}^n \right|^2 + \left| \hat{t}_{\text{SD;eb},d,k}^n - t_{\text{SD;eb},d,k}^n \right|^2} \quad (9.7)$$

mit  $\dagger \in \{p, v\}$  berechnet. Dabei stellen  $\mu_{\epsilon_p}$  und  $\mu_{\epsilon_v}$  den mittleren betragsmäßigen Gesamtpositions- und den Gesamtgeschwindigkeitsfehler dar (Berechnung mittels Gl. (9.4), (9.7)). Zusätzlich sind die Mediane der betragsmäßigen Positions- und Geschwindigkeitsschätzfehler  $\xi_{\epsilon_p}$  und  $\xi_{\epsilon_v}$  aufgeführt. Für die Auswertung der Standardabweichungen  $\sigma_{\epsilon_p}$  und  $\sigma_{\epsilon_v}$  wurde statt  $(\dots)^2$  in Gl. (9.6) die euklidische Norm des jeweiligen Vektors berechnet. Nach der Tabelle ist eine verbesserte Positionsschät-

		Berücksichtigung der zeitlichen Korrelationen in den GPS-Daten im Messmodell des FF			Keine Berücksichtigung der zeitlichen Korrelationen in den GPS-Daten im Messmodell des FF
		GPS	SD-BM	SD+BM	SD-BM
Mittlere betragsmäßige Schätzfehler	$\mu_{\epsilon_p}$ [m]	<b>20,532</b>	<b>17,868</b>	<b>10,965</b>	<b>20,551</b>
	$\mu_{\epsilon_{p,n}}$ [m]	7,86	6,846	6,841	7,862
	$\mu_{\epsilon_{p,e}}$ [m]	7,987	6,845	6,801	8,011
	$\mu_{\epsilon_h}$ [m]	14,154	12,409	0,378	14,165
	$\mu_{\epsilon_v}$ [m/s]	<b>1,094</b>	<b>0,481</b>	<b>0,46</b>	<b>1,733</b>
	$\mu_{\epsilon_{v,n}}$ [m/s]	0,399	0,3	0,298	0,506
	$\mu_{\epsilon_{v,e}}$ [m/s]	0,389	0,29	0,285	0,489
	$\mu_{\epsilon_{v,d}}$ [m/s]	0,799	0,092	0,018	1,429
Mediane	$\xi_{\epsilon_p}$ [m]	<b>19,074</b>	<b>16,252</b>	<b>10,368</b>	<b>19,112</b>
	$\xi_{\epsilon_v}$ [m/s]	<b>1,020</b>	<b>0,452</b>	<b>0,429</b>	<b>1,547</b>
Standardabweichungen der Schätzfehler	$\sigma_{\epsilon_p}$ [m]	<b>22,477</b>	<b>19,651</b>	<b>12,147</b>	<b>22,488</b>
	$\sigma_{\epsilon_{p,n}}$ [m]	9,963	8,624	8,612	9,959
	$\sigma_{\epsilon_{p,e}}$ [m]	9,91	8,557	8,519	9,936
	$\sigma_{\epsilon_h}$ [m]	17,544	15,468	0,386	17,545
	$\sigma_{\epsilon_v}$ [m/s]	<b>1,212</b>	<b>0,534</b>	<b>0,515</b>	<b>1,582</b>
	$\sigma_{\epsilon_{v,n}}$ [m/s]	0,502	0,373	0,37	0,643
	$\sigma_{\epsilon_{v,e}}$ [m/s]	0,485	0,364	0,358	0,623
	$\sigma_{\epsilon_{v,d}}$ [m/s]	0,991	0,113	0,023	1,305

Tabelle 9.3: Mittlere betragsmäßige Positions- und Geschwindigkeitsschätzfehler, Mediane der betragsmäßigen Positions- und Geschwindigkeitsschätzfehler und Standardabweichungen der Positions- und Geschwindigkeitsschätzfehler für künstliche Daten mit und ohne Berücksichtigung der zeitlichen Korrelationen bei GPS-Daten im Messmodell des Fehlerfilters

zung nicht ausschließlich in der vertikalen Komponente zu beobachten, sondern geringfügig auch in den horizontalen Komponenten, wenn man beispielsweise die Werte für  $\mu_{\epsilon_{p,n}} = 6,846$  m (SD-BM) und  $\mu_{\epsilon_{p,n}} = 6,841$  m (SD+BM) miteinander vergleicht. Auch die entsprechenden Medianwerte und Standardabweichungen der Schätzfehler belegen dies. Gegenüber der GPS-Position ist die Schätzung der horizontalen Positionskomponenten am *Strapdown*-Ausgang um ca. 1 m genauer. Insgesamt führt dies bei der Konfiguration SD-BM zu einer Verbesserung von fast 3 m. Die vertikale Komponente  $\hat{h}_{\text{BM}}$  ist gegenüber den GPS-Messungen allerdings in erster Linie für den um 10 m geringeren mittleren betragsmäßigen Schätzfehler bei der Konfiguration SD+BM verantwortlich. Bei den Medianwerten ist dies ähnlich. Die Schwerebeschleunigung spielt hier ebenfalls eine Rolle. Sie macht

sich zum einen bei der Berechnung der Transportrate nach Gl. (4.37) und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\text{SD;eb}}^n$  (äußerer Systemzustand) bemerkbar. Die Transportrate beeinflusst wiederum die Schätzung der Lage und damit auch die nachfolgend berechneten absoluten Größen (Geschwindigkeit und Position). Zum anderen sei aber auch auf Gl. (5.15) verwiesen. Diese beweist die Abhängigkeit aller Positionsfehlerkomponenten des inneren Systemzustandes von der Höhenschätzung  $\hat{h}_{\text{SD}}$  (äußerer Systemzustand). Im Hinblick auf den SCHULER-Effekt, der in [Wen07] beschrieben wird, zeigt zudem Gl. (4.40), dass durch das Kreuzprodukt ein enger Zusammenhang zwischen der Beschleunigung des Fahrzeugs in  $z$ -Richtung und den Geschwindigkeitskomponenten in  $\mathbf{v}_{\text{eb}}^n$  besteht. Dies wirkt sich durch Integration der Geschwindigkeiten auf sämtliche nachfolgende Schätzungen aus.

Werden die zeitlichen Korrelationen nicht im Filter berücksichtigt, ist bei ausschließlicher Stützung des FF durch einen GPS-Empfänger (hier wieder am Beispiel der Konfiguration SD-BM) kaum ein Unterschied zu den GPS-Daten in der linken Spalte zu beobachten. Das Messrauschmodell, das im KALMAN-Filter verwendet wird, stimmt nicht mit dem wahren Rauschprozess überein. Es wird zuviel Gewicht auf die künstlich erzeugten GPS-Beobachtungen gelegt. Die Singulärwerte der KALMAN-Gewichtungsmatrix  $\mathbf{K}_k$  werden größer, wodurch sie einen größeren Einfluss auf den Aktualisierungsschritt nimmt. Auch die Lageschätzung spielt eine Rolle. Sie beruht, ohne die Verwendung der Magnetfeldsensormessungen, bei Betrachtung der Gleichungen in Abschnitt 5.2.1 vorrangig auf den Geschwindigkeitsmessungen. Eine fehlerhafte Korrektur der *Strapdown*-Größen ist die Folge.

### 9.1.2 Ergebnisse unter Verwendung von Felddaten

Nachdem die einzelnen Komponenten und die gesamte Filterstruktur anhand von künstlich erstellten Inertial- und Satellitendaten untersucht wurden, sollen in diesem Abschnitt Feldmessungen als Datenbasis dienen. In der Karte in Abb. 9.3 ist die vollständige Trajektorie mit Anfangs- und Endpunkt einer Messdatenaufnahme eingezeichnet. Neben einigen Ausfällen des GPS-Signals sind diese Daten

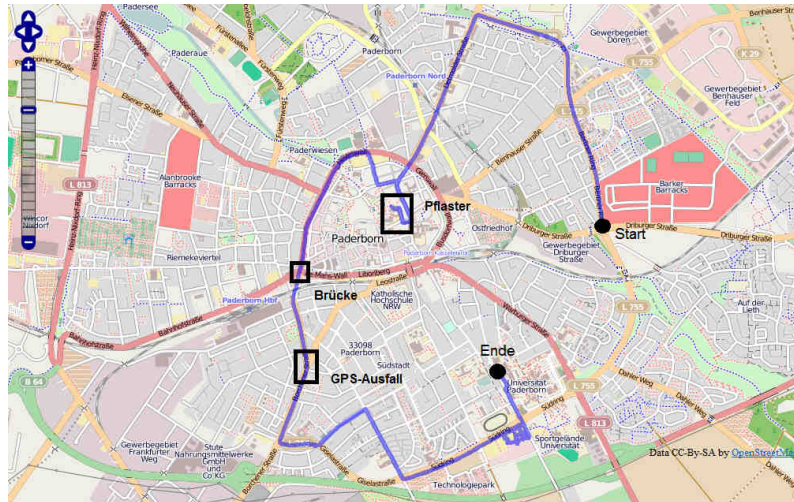


Abbildung 9.3: Messfahrt in der Innenstadt von Paderborn (Daten von *OpenStreetMap*, veröffentlicht unter Lizenz CC-BY-SA 2.0)

dadurch gekennzeichnet, dass während der Messfahrt auch verschiedene Straßenbeläge befahren wurden. Außerdem weist die Teststrecke ausgeprägte Höhenunterschiede und Kurvenfahrten auf. Sie enthält durch Wartezeiten an Ampeln ebenfalls Standphasen  $\check{P}_M$ . Die relative Lage des GPS-Empfängers zur MTi-Sensoreinheit betrug  $\mathbf{l}_{\text{GPS}}^b = (0 \text{ m}, 0 \text{ m}, 0,7 \text{ m})^T$ . Zur Aufzeichnung der Daten wurde ein ei-



gens entwickeltes Softwarewerkzeug verwendet, das die Daten der unterschiedlichen Sensoren auf wenige Millisekunden synchron zueinander aufzeichnet. Dies war nötig, um die zeitlichen Abweichungen der Sensorsignale zueinander und die Komplexität des nachgeschalteten Filters so gering wie möglich zu halten. Auf eine aufwändige, hardwarebasierte Lösung oder eine komplexe Multiratenfilterstruktur wurde dabei verzichtet. Die Daten der Magnetfeldsensortriade wurden bei den Untersuchungen in diesem Abschnitt nicht verwendet. Die Höhen sowie die horizontalen Referenzpunkte zum Aufbau der topografischen Datenbank wurden der DGK entnommen [Tim]. Die Aufzeichnung der IME-Daten wurde mit  $100\text{ }^1/\text{s}$  vorgenommen, die des barometrischen Sensors mit  $10\text{ }^1/\text{s}$  und die GPS-Daten mit  $4\text{ }^1/\text{s}$ . Die initialen Rauschparameter entsprachen dabei denen in Tab. F.1. Für die Korrelationszeiten der GPS-Empfängersignale wurde  $t_{\text{GPS};c,v} = 1\text{ s}$  bzw.  $t_{\text{GPS};c,p} = 10\text{ s}$  angenommen, während für die der IME  $t_{\text{IME};c} = 2,8 \cdot 10^{-2}\text{ s}$  eingesetzt wurde.

### 9.1.2.1 Höhenprofil

Die Abb. 9.4 zeigt einen Ausschnitt aus dem Höhenprofil der Teststrecke. Es ist zu beachten, dass hier

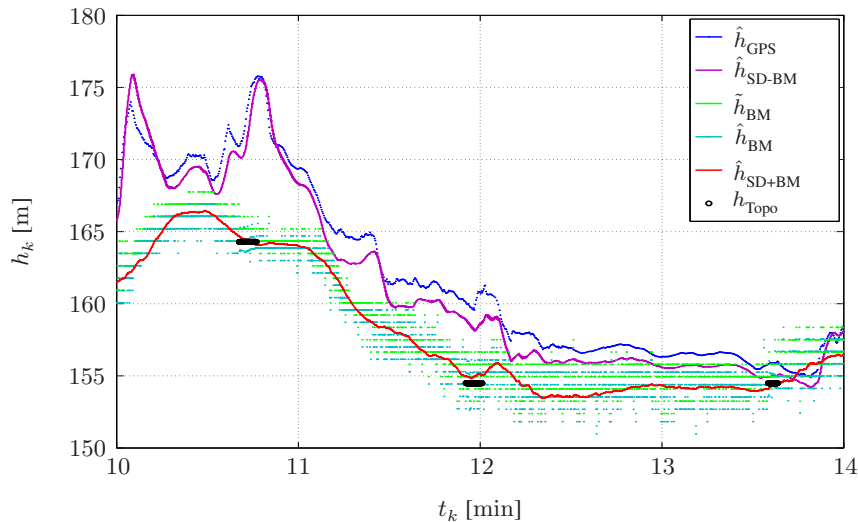


Abbildung 9.4: Höhenschätzung des kombinierten Navigationssystems SD+BM im Vergleich zu den Schätzungen der einzelnen Teilsysteme

die Höhe über dem Ellipsoid abgebildet ist, wobei der Unterschied zwischen dieser und Normalnull (NN) konstant 45,5 m beträgt. Die schwarzen Punkte markieren die Stützstellen, an denen topografische Referenzpunkte vorliegen und  $d_{\min;k} < 5\text{ m}$  ist. Da ein ideales Höhenprofil für diese Daten nicht vorliegt, können allerdings die topografischen Stützstellen als Vergleichsbasis dienen, um die einzelnen Schätzverfahren bewerten zu können. Es ist zu erkennen, dass  $\tilde{h}_{\text{BM}}$  von  $\hat{h}_{\text{BM}}$  abweicht. Dies ist durch die geänderten Referenzparameter  $T_0$  und  $P_0$  zu erklären, die sich durch das barometrische Fehlerfilter (BF) einstellen. Das barometrische Teilsystem ist demnach in der Lage, die daraus resultierenden Fehler ausreichend zu kompensieren. Beide Schätzungen weisen jedoch vergleichsweise hohe Streuungen auf (aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde für  $\tilde{h}_{\text{BM}}$  und  $\hat{h}_{\text{BM}}$  eine Darstellungsform mit nicht verbundenen Datenpunkten gewählt. Dies hängt mit der Abtastrate und den relativ hohen Standardabweichungen zusammen).

Es ist außerdem ein signifikanter Unterschied zwischen den Konfigurationen zu erkennen, die sich auf die barometrischen Höheninformationen stützen und denen, die ausschließlich GPS-Daten

verwenden. Da die *GPS*-Höhenschätzung eine hohe Fehlervarianz aufweist, ist auch die Stützung bei der Konfiguration SD-BM von vergleichsweise geringem Nutzen. Dennoch liegt  $\hat{h}_{\text{SD-BM}}$  im Mittel 1 m bis 2 m unterhalb von  $\hat{h}_{\text{GPS}}$ .

Der Unterschied zum Gesamtsystem, das mit korrigierten barometrischen Höhen gestützt wird (SD+BM), liegt hier bei bis zu 10 m. Ohne Beweis sei der Vollständigkeit halber erwähnt, dass die Schätzungen von  $b_h$  hier zwischen  $\pm 2$  m variieren. Diese Schwankungen sind auf die Referenzhöhen in der dafür angelegten Datenbank zurückzuführen, die aufgrund von  $d_{\text{max}} = 5$  m und den nicht vollständig unterdrückten Synchronisationsfehlern bei den Sensorsignalen mehrmals hintereinander zur Stützung eingesetzt wurden. Die Höhenwerte  $\hat{h}_{\text{SD+BM}}$  weisen zudem geringere Schwankungen auf als es z. B. bei der Konfiguration SD-BM der Fall ist. Die Differenz zu  $\hat{h}_{\text{SD-BM}}$  liegt zu Beginn des Ausschnitts bei bis zu 14 m. Orientiert man sich an den topografischen Stützstellen, so weist zusammenfassend  $\hat{h}_{\text{SD+BM}}$  die besten Höhenschätzwerte auf. Auch in den Zeiträumen, in denen keine Stützstellen vorhanden sind, zeigt das Verfahren eine relativ geringe Dynamik in den Schätzwerten. Schnelle Änderungen in den Schätzwerten in einem vergleichsweise kurzen Zeitraum (wie es beispielsweise bei  $\hat{h}_{\text{SD-BM}}$  der Fall ist) erscheinen unrealistisch.

### 9.1.2.2 GPS-Signalabbrüche

Ein Hauptziel beim Einsatz einer IME ist die Überbrückung möglicher Ausfälle des *GPS*-Satellitensignals über kürzere oder längere Perioden. Es soll daher im Folgenden untersucht werden, ob sich die hier vorgestellte Kombination aus Sensoren und Filterverfahren eignet, um einen Signalausfall zu kompensieren. Die durch das barometrische Teilsystem verfügbare Höheninformation ist dabei vom Signalausfall unbeeinflusst und steht weiterhin mit einer Rate von  $4^{1/\text{s}}$  zur Verfügung (eine Messwertaktualisierung im FF erfolgt nach Kap. 5.3.1 mit der *GPS*-Datenrate). In der entsprechenden Messgl. (5.27) reduziert sich damit der Messvektor auf die Höhe  $\hat{h}_{\text{BM}}$ .

Ein handelsüblicher *GPS*-Empfänger führt eine interne Filterung durch, um trotz Signalausfällen die absoluten Positionen und Geschwindigkeiten präzisieren zu können. Dies kann bei längeren Ausfällen dennoch zu starken Abweichungen von der idealen Trajektorie führen, da hier lediglich ein bestimmtes, vordefiniertes Bewegungsmodell berücksichtigt wird und z. B. Richtungsänderungen vom internen Filter nicht „bemerkt“ werden. Im Rahmen dieser Untersuchungen wurde ein *GPS*-Signalausfall durch das Weglassen der entsprechenden Stützgrößen in  $\mathbf{z}_{\text{FF};p}$  und  $\mathbf{z}_{\text{FF};v}$  simuliert. Es traten auch tatsächliche Signalausfälle während der Messfahrt auf, diese waren allerdings lediglich von einer Dauer von maximal 3 s.

Die Abb. 9.5 (a) – (d) zeigen für einen Trajektorienausschnitt die Auswirkungen des Ausfalls unter Verwendung verschiedener Systemkonfigurationen. Die simulierte Ausfalldauer betrug ca. 20 s, wie Abb. 9.5 (b) zeigt, wobei die Bewegungsrichtung von Norden nach Süden durch den Pfeil kenntlich gemacht ist. Die Abb. 9.5 (a) zeigt die mit dem ublox-*GPS*-Empfänger ermittelten Positionen in der Trajektorie. Hierbei fällt auf, dass diese vor der Rechtskurve in der Bildmitte an der eingekreisten Stelle einen leichten Sprung aufweisen, was auf ein Bias in den Schätzungen durch Empfängeruhrenfehler und damit auch auf die Signalverarbeitung im *GPS*-Empfänger zurückzuführen ist. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die gelben und weißen Referenzlinien in der Karte die realen Straßenverläufe lediglich approximativ widerspiegeln und keine Rückschlüsse auf die eigentliche Fahrbahnbreite zulassen. Gewöhnlich stimmen diese Linien jedoch mit der Fahrbahnmitte überein, wie mit entsprechendem Bildmaterial (z. B. *Google Maps*) gezeigt werden kann.

Teilbild (c) beweist, dass das INS, ohne Verwendung des barometrischen Teilsystems, kurzzei-





Abbildung 9.5: Auswirkungen eines GPS-Signalausfalls auf das vollständige Navigationsfilter (Bild-daten von *OpenStreetMap*, veröffentlicht unter Lizenz CC-BY-SA 2.0)

tig in der Lage ist, diesen Signalausfall und den „Sprung“ zu kompensieren. Die Trajektorie folgt weiterhin dem eingezeichneten Straßenverlauf. Die Abweichung steigt allerdings mit der Zeit an, da die Positionen lediglich durch Integration im *Strapdown*-Block berechnet werden und Fehler ( $\mathbf{x}_{\text{FF}}$ ) während dieser Zeit, aufgrund der fehlenden Stützinformationen, nur unzureichend kompensiert werden können. Lediglich die auf den Eingang des *Strapdown*-Blocks zurückgekoppelten Bias  $\mathbf{b}_{\text{K};a}$  und  $\mathbf{b}_{\text{K};\omega}$ , die jedoch konstant sind, da  $\Delta \hat{\mathbf{b}}_a = \Delta \hat{\mathbf{b}}_\omega = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ , werden weiterhin vom jeweiligen Sensorsignal subtrahiert, siehe Gl. (5.42) und (5.43). Die Qualität der verwendeten IME und die Synchronität der aufgezeichneten Daten spielen hierbei ebenfalls eine bedeutende Rolle (siehe auch Tab. 4.1).

In Abb. 9.5 (d) sind die Positionsschätzungen auf Basis des Gesamtsystems (SD+BM) abgebildet. Obwohl auch hier ein leichter Sprung während des Signalausfalls zu erkennen ist, wird deutlich, dass sich die Trajektorie zu Beginn näher am abgebildeten Straßenverlauf orientiert. Es ist ersichtlich, dass die vorhandene Höhenstützung durch die zuverlässigere Lagestützung (siehe Gl. (5.20)) und die davon ebenfalls betroffene Schwerkerebeschleunigungsschätzung auch Einfluss auf die horizontalen Positionsschätzungen hat. Dieses resultiert aus dem Zusammenhang in Gl. (4.40), denn die korrigierte RKM beeinflusst die prädizierte Geschwindigkeit und dadurch auch die Position. Ansonsten wirkt sich die Höhenschätzung beim Filter lediglich auf die Komponente  $\Delta p_{\text{eb},d}^n$  des Systemzustandsvek-

tors direkt aus. Dadurch ist der Fehler geringer als in Teilbild (c). Ein ähnliches Verhalten war auch bei den geschätzten Geschwindigkeiten zu beobachten, denn die Lageschätzung im Rahmen der *Strap-down*-Berechnungen wirkt sich indirekt auch auf diese Größen aus.

## 9.2 Sequenzielle Parameterschätzung mit Fehlerfilterung

Nachdem in Kap. 8 einige Voruntersuchungen zur *MTi*-Sensoreinheit und in dem vorherigen Abschnitt bereits Ergebnisse unter Zuhilfenahme des barometrischen Teilsystems präsentiert wurden, sollen nun die Untersuchungsergebnisse vorgestellt werden, die mit der zusätzlichen Integration der in Kap. 7 hergeleiteten Parameterschätzverfahren gewonnen wurden. Der SEM steht dabei im Vordergrund. Es soll untersucht werden, inwieweit sich die Schätzungen der Varianzen auf die Navigationslösung des schwach gekoppelten *INS/GPS*-Navigationsfilters auswirken, in dem die Messdaten fusioniert werden. Neben künstlich generierten Datensätzen, die nach den Tabellen in Anhang F erstellt wurden, wurde wiederum auf Daten zurückgegriffen, die im Rahmen von Messfahrten aufgezeichnet wurden. Bei der Analyse der Felddaten wurde der Schwerpunkt auf die Rauschparameter der Beschleunigungssensortriade gelegt, da sich gezeigt hat, dass der SEM unter den gegebenen Voraussetzungen nur eingeschränkt in der Lage ist, die entsprechenden Rauschvarianzen in  $\mathbf{q}_{\text{FF};\omega}$  zu schätzen. In Abschnitt 9.2.3 wird auf diesen Aspekt näher eingegangen.

Vor Betrachtung der Ergebnisse sei noch erwähnt, dass ein vollständiger und fairer Vergleich der Schätzverfahren aus Kap. 7 aufgrund der unterschiedlichen Voraussetzungen und Annahmen, die getroffen wurden, hier nur eingeschränkt erfolgen kann. Während das MD und der SEM beispielsweise auf a priori-Wissen in Form eines Rauschmodells zurückgreifen können, ist dies beim KM nicht möglich. Für den SEM besteht dagegen der Nachteil, dass ihm in einem festen Intervall weniger Beobachtungen zur Verfügung stehen als den anderen Verfahren, da bei der Fehlerfilterung nicht in jedem Zeitschritt eine Messwertaktualisierung erfolgen kann. Dies wird z. B. in Kap. 9.2.1.4 näher erläutert.

### 9.2.1 Simulationsergebnisse

Für die nachfolgenden Untersuchungsergebnisse wurde auf verschiedene, künstlich generierte Testdatensätze einer Gesamtstreckenlänge von ca. 270 km zurückgegriffen, die jeweils nach Tab. F.2 erstellt worden sind. Die Messrauschvarianzen des *GPS*-Empfängers entsprechen im Mittel den Parametern des ublox-*GPS*-Empfängers, der zur Aufnahme der Felddaten eingesetzt wurde (siehe Tab. 4.3).

Für die Untersuchungen in diesem Teilkapitel wurde auf eine Tiefpassfilterung der Inertialsensordaten verzichtet. In Kap. 9.2.2 sind Ergebnisse aufgeführt, die mit Einsatz eines Tiefpassfilters gewonnen wurden.

Da im Folgenden nur der Teil der Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{FF};k}$  eine Rolle spielt, der vom Inertialsensorrauschen abhängt und die Varianzen der biastreibenden Rauschterme als konstant angenommen werden, gelte hier (wie in Kap. 7.1.4):  $\mathbf{Q}_{\text{FF};k}^{\#} := \text{diag}(\mathbf{q}_{\text{FF};k}^{\#})$ , wobei  $\mathbf{q}_{\text{FF};k}^{\#} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{\text{FF};a,k}^T & \mathbf{q}_{\text{FF};\omega,k}^T \end{pmatrix}^T$  mit

$$\mathbf{q}_{\text{FF};a,k} = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{FF};a,x}^2 \\ \sigma_{\text{FF};a,y}^2 \\ \sigma_{\text{FF};a,z}^2 \end{pmatrix}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{q}_{\text{FF};\omega,k} = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{FF};\omega,x}^2 \\ \sigma_{\text{FF};\omega,y}^2 \\ \sigma_{\text{FF};\omega,z}^2 \end{pmatrix}_k. \quad (9.8)$$

### 9.2.1.1 Wahl der heuristischen Parameter

Um für den SEM die optimalen heuristischen Faktoren einstellen zu können, wurden die Daten so erzeugt, dass die Rauschvarianzen der Terme, die das zeitkorrelierte Inertialsensorrauschen treiben, zwischen den minimalen und maximalen Werten nach Tab. F.2 variierten. Es wurde sowohl von sich zeitlich langsam als auch schnell ändernden Parametern ausgegangen. Es wurde zudem von einer idealisierten Trajektorien­dynamik ohne starke Brems- oder Beschleunigungsvorgänge oder fahrer-spezifische Lenkbewegungen (typisch für Bewegungen innerhalb einer Fahrspur) ausgegangen. Die heuristischen Faktoren  $\zeta_E$  zum „Glätten“ der Matrix  $\mathbf{E}_k$  in Gl. (7.62) und  $\gamma$  (zur rekursiven Schätzung der Rauschvarianzen und zur Berechnung der HESSE-Matrix im Rahmen des NEWTON-Verfahrens) haben dabei Werte zwischen 0 und 0,5 bzw. 0,8 und 1 angenommen. Die maximale Iterationsanzahl wurde zu  $\mathcal{I}_{\max} = 50$  gewählt.

Die Tab. (9.4) zeigt für einen ausgewählten Datensatz die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung (engl. *RMSE*)

$$RMSE_{\epsilon_{\sigma_{FF;a}}} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \epsilon_{\sigma_{FF;a},k}^2} \quad (9.9)$$

für die verschiedenen Parameterkonstellationen, wobei

$$\epsilon_{\sigma_{FF;a},k} = \sqrt{\sum_{\dagger \in \{x,y,z\}} \left( \hat{\sigma}_{FF;a,\dagger,k} - \sigma_{FF;a,\dagger,k} \right)^2} \quad (9.10)$$

ist. Es fällt auf, dass für  $\zeta_E = 0$  der *RMSE* im Vergleich zu  $\zeta_E > 0$  deutlich höher ist und somit

$RMSE_{\epsilon_{\sigma_{FF;a}}} [1 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2]$		$\zeta_E$					
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\gamma$	0,8	9,96	5,94	5,47	5,26	5,42	5,62
	0,85	9,96	5,32	4,93	4,93	5,23	5,31
	0,9	9,93	3,56	4,01	4,44	4,79	5,07
	0,95	9,93	2,53	3,36	3,94	4,36	4,66
	0,98	9,89	2,38	2,84	3,25	3,57	3,82
	0,99	9,78	<b>2,31</b>	2,55	2,76	2,92	3,07
	1	8,49	7,55	7,48	7,44	7,41	7,39

Tabelle 9.4: *RMSE* der Schätzungen der Komponenten in  $\mathbf{q}_{FF;a}$  bei Verwendung des SEM für verschiedene heuristische Faktoren

eine Glättung der Anteile an der Matrix  $\mathbf{E}_k$ , die von den Zustandsschätzungen  $\hat{\mathbf{x}}_{SF;k|k}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{SF;k-1|k-1}$  sowie dem Steuereingangsvektor  $\mathbf{u}_{SF;k}$  abhängen, sinnvoll ist (siehe Gl. (7.62)). Die a posteriori-Schätzungen des LKF werden somit stärker geglättet, was beispielsweise in [RAG04] durch eine zusätzliche zeitlich inverse Filterung erreicht wird (eine zeitlich inverse Filterung führt allerdings zu einer höheren Latenz, was hier vermieden werden sollte). Durch das fortlaufende Zurücksetzen des inneren Systemzustandsvektors auf einen Nullvektor sind diese im Gegensatz zur Schätzfehlerkovarianzmatrix zeitlich ansonsten nur geringfügig geglättet. Der heuristische Faktor  $\gamma$  sollte dagegen nahe bei 1 liegen, wodurch zu schnelle Änderungen bei der Berechnung der HESSE-Matrix  $\mathbf{V}_k^{\{T\}} \left( \hat{\mathbf{q}}_{FF;k}^{\#} \right)$

und der Varianzen in  $\hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k}^{\#\{\mathcal{I}\}}$  verhindert werden. Für  $\gamma = 1$  ist der Fehler dagegen relativ hoch. Die Schätzungen  $\hat{\sigma}_{\text{FF};a,\dagger,k}$  variieren in dem Fall kaum und bleiben in der Nähe der initialen Werte, wie informelle Untersuchungen zeigten. Auf die Qualität der Schätzungen wird in den folgenden Abschnitten noch näher eingegangen.

Die Tab. 9.4 zeigt, dass für den vorliegenden Datensatz der *RMSE* für  $\gamma = 0,99$  und  $\zeta_E = 0,1$  minimal ist, weshalb diese heuristischen Faktoren auch für die nachfolgend beschriebenen Untersuchungen des SEM verwendet wurden.

Da sich vergleichbare Ergebnisse auch bei den entsprechenden Rauschparametern der Drehratensensortriade ergaben, sind diese hier nicht aufgeführt. Es hat sich (ohne einen expliziten Beweis anzuführen) gezeigt, dass zu starke Schwankungen in den Schätzungen wiederum zu größeren Abweichungen in der eigentlichen Navigationslösung führen. Dies ist u. a. damit zu begründen, dass die Abweichungen zwischen den im Laufe des Filterprozesses berechneten Gierwinkeln  $\hat{\psi}_{\text{SD};k}$  und den Richtungswinkeln, die anhand der *GPS*-Geschwindigkeiten über  $\hat{\psi}_{\text{GPS};k} = \arctan 2 \left( \frac{\hat{v}_{\text{GPS};n,k}^n}{\hat{v}_{\text{GPS};e,k}^n} \right)$  bestimmt werden können (die *GPS*-Geschwindigkeiten dienen ja als Stützinformationen), mit abfallendem  $\gamma$  und größer werdendem  $\zeta_E$  ebenfalls ansteigen.

**Konvergenzverhalten** Um das Konvergenzverhalten des SEM hinsichtlich der gewählten heuristischen Faktoren noch besser beurteilen zu können, wurde ein zusätzlicher informeller Test durchgeführt. Dabei wurden die Quelldaten allerdings mit einer zeitinvarianten (konstanten) Rauschkovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\text{FF}}^{\#}$  mit  $\sigma_{\text{FF};a} = 0,225 \text{ m/s}^2$  und  $\sigma_{\text{FF};\omega} = 0,4^\circ/\text{s}$  erstellt. Die anderen Parameter wurden gemäß Tab. F.2 gewählt. Der so erzeugte Datensatz wurde mehrmals hintereinander durchlaufen, wobei sowohl die Fehlerfilterung als auch der SEM mit  $\mathcal{I}_{\text{max}} = 50$  zum Einsatz kamen. Die Initialisierung der Rauschkovarianzmatrix erfolgte mit Werten, die 25-fach über den Idealwerten lag. Die am Ende eines Durchlaufs geschätzten Rauschvarianzen bzw. Standardabweichungen wurden für den jeweils nachfolgenden Durchlauf als Initialisierungswerte verwendet. Zusammenfassend zeigte sich:

- Für  $\gamma = 1$  und  $\varpi_k = 0$  werden Änderungen in den Schätzungen von  $\hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k}^{\#}$  mit fortschreitender Zeit immer geringer, da die Singulärwerte der HESSE-Matrix, deren Inverse zur Gewichtung des Gradienten dient, aufgrund von Gl. (7.22) immer größer werden.
- Bei Verwendung von  $\gamma = 1$  werden mehrere Durchläufe benötigt, damit die Schätzung  $\hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k}^{\#}$  gegen den korrekten Varianzvektor konvergiert.
- Ein Wert von  $\gamma < 1$  führt zu einer deutlich schnelleren Konvergenz von  $\hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k}^{\#}$  gegen den wahren Varianzvektor, was jedoch auch eine höhere Streuung der Schätzungen zur Folge hat. Mit  $\gamma = 0,99$  wurde im genannten Fall bereits nach wenigen Zeitschritten Konvergenz erreicht. Durch die ARMIJO-Schrittweitenregel sowie durch geeignete Wahl von  $\zeta_E$  konnte dies nochmals optimiert werden.
- Je kleiner  $\zeta_E$  gewählt wird, desto „zeitinvarianter“ ist die Schätzung des gesuchten Parameters und damit desto geringer die Schätzfehlervarianz, wenn der Parameter konstant ist.

Die Abb. 9.6 (a) zeigt einen Ausschnitt der Schätzergebnisse für  $\sigma_{\text{FF};a,y} = 0,225 \text{ m/s}^2$ , wobei  $\zeta_E = 0,1$  und unterschiedliche  $\gamma$  gewählt wurden. Auf den Einsatz der Schrittweitenregel wurde an dieser Stelle verzichtet.

**Parameterwahl beim Kovarianzmanagement und Messwertdifferenzen-Verfahren** Für die empirische Varianzberechnung mit Hilfe des modifizierten KM wurden die entsprechenden Parameter bei einer Ausschnittslänge von  $\Delta T_l = 0,25$  s nachfolgend zu  $p'_0 = 20$  und  $\tilde{p}'_0 = 500$  gewählt. Beim MD wird lediglich ein heuristischer Faktor zur Glättung benötigt, der im Folgenden  $\zeta' = 0,01$  sei. Dieser stellte bei Tests zum einen den besten Kompromiss zwischen den Änderungen in der Zeitkorrelationsstruktur und den Rauschvarianzabweichungen dar, sorgte zum anderen für ein stabiles Systemverhalten in Kombination mit dem Gesamtsystem. Die Abb. 9.6 (b) zeigt die Auswirkungen unterschiedlich gewählter Werte für den heuristischen Faktor  $\zeta'$  auf die Schätzungen der Rauschparameter  $\sigma_{\text{FF};a,x,k}$ . Hier sind zwei Bewegungsphasen von einer Standphase unterbrochen. Man erkennt, dass die Streuung um den Mittelwert mit abfallendem  $\zeta'$  ebenfalls abnimmt, jedoch auch eine deutlich langsamere Konvergenz resultiert.

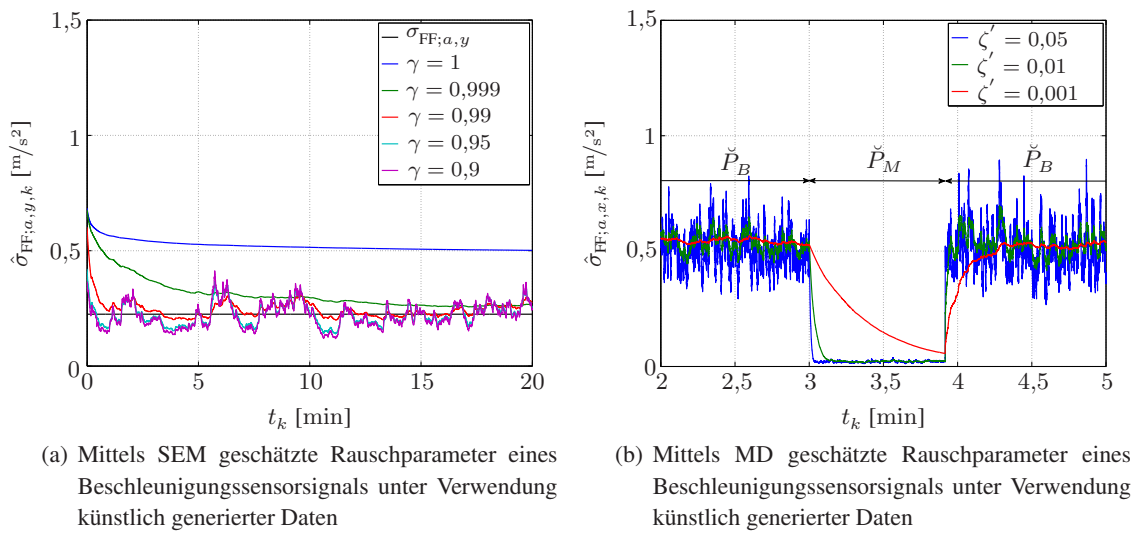


Abbildung 9.6: Geschätzte Rauschparameter eines Beschleunigungssensors für unterschiedliche heuristische Faktoren unter Verwendung künstlich generierter Daten

### 9.2.1.2 Einfluss bekannter Korrelationen auf das Kovarianzmanagement

Als nächstes soll gezeigt werden, welche Parameterschätzungen durch den SEM für das zugrunde liegende Systemmodell unter idealisierten und realistischen Bedingungen erfolgen. Bevor jedoch die entsprechenden Ergebnisse betrachtet werden, soll noch ein Aspekt diskutiert werden, der im Zusammenhang mit dem KM steht.

Obwohl das modifizierte KM nicht die gleichen Varianzen schätzt, die von den anderen Verfahren bestimmt werden, sondern Schätzungen für die Varianzvektoren  $\mathbf{q}_{a,k}$  bzw.  $\mathbf{q}_{\omega,k}$  liefert, ist es im Folgenden mit aufgeführt (vergleiche Gl. (7.22), (7.73) und (7.79)). Bei dessen Herleitung wurde von einem stationären, mittelwertbehafteten Rauschprozess ausgegangen. Dennoch werden die geschätzten Varianzen im Rahmen der Navigationsfilterung unter der Annahme verwendet, dass ein instationärer, mittelwertfreier Prozess vorliegt. Während das MD und der SEM den Varianzvektor  $\mathbf{q}_{\text{FF};k}^\# = \left( \mathbf{q}_{\text{FF};a,k}^T \mathbf{q}_{\text{FF};\omega,k}^T \right)^T$  unter der Annahme eines weißen, mittelwertfreien Rauschprozesses  $\boldsymbol{\eta}_{\text{FF};k}$  schätzen, wird für die Zustandsübergangsmatrix  $\mathbf{D}_{\text{FF};n}$  in Gl. (5.13)

$$\mathbf{n}_{\text{FF};k} = \mathbf{D}_{\text{FF};n} \mathbf{n}_{\text{FF};k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_{\text{FF};n} \boldsymbol{\eta}_{\text{FF};k} \quad (9.11)$$



beim KM die Annahme getroffen, dass  $\mathbf{D}_{\text{FF};n} = \mathbf{0}_{12 \times 12}$  ist. In dem Fall gilt mit  $\mathbf{\Gamma}_{\text{FF};n} := \mathbf{I}_{12 \times 12}$ :

$$\mathbf{q}_{\text{FF};a,k} = \mathbf{q}_{a,k} \quad \text{und} \quad \mathbf{q}_{\text{FF};\omega,k} = \mathbf{q}_{\omega,k}. \quad (9.12)$$

Da jedoch  $\mathbf{D}_{\text{FF};n}$  eine konstante Diagonalmatrix ist, liegt nach Gl. (7.80) der Unterschied in den jeweiligen Schätzparametern lediglich in einer Skalierungsmatrix  $\mathbf{I}_{12 \times 12} - \mathbf{D}_{\text{FF};n}^2$ , sofern

- $\mathbf{n}_{\text{FF};k-1}$  und  $\boldsymbol{\eta}_{\text{FF};k}$  unkorreliert sind und
- $\mathbf{q}_a$  und  $\mathbf{q}_\omega$  zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten annähernd konstant bleiben.

Somit müssen die Schätzungen der Systemrauschkovarianzmatrix mittels KM im Mittel auch um ca.  $(\mathbf{I}_{12 \times 12} - \mathbf{D}_{\text{FF};n}^2)^{-1}$  höher sein als die Schätzungen mittels MD, wodurch ohne Berücksichtigung der Biasterme in (5.13) der Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_a \\ \hat{\mathbf{q}}_\omega \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{D}_{\text{FF};n_a}^2 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{D}_{\text{FF};n_\omega}^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};a} \\ \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};\omega} \end{pmatrix}_k \quad (9.13)$$

folgt. Da die Diagonalelemente von  $\mathbf{D}_{\text{FF};n_a}$  und  $\mathbf{D}_{\text{FF};n_\omega}$  jeweils dem Wert  $e^{-\frac{\Delta t}{t_{\text{IME};c}}}$  entsprechen, sind im Idealfall die Varianzschätzungen im Mittel ungefähr doppelt bzw. die Standardabweichungen ca. 1,4-mal so hoch, wenn  $e^{-\frac{\Delta t}{t_{\text{IME};c}}} \approx 0,7$  gilt. Dies muss bei den folgenden Ergebnissen berücksichtigt werden.

### 9.2.1.3 Schätzungen der Rauschparameter

**Idealisierte Trajektoriendynamik und vollständig bekannte Korrelationen** Es soll zunächst ein Anhaltspunkt dafür gegeben werden, welche Parameterschätzungen durch die einzelnen Verfahren für das zugrunde liegende Systemmodell unter idealisierten Bedingungen erfolgen. Dazu wurde die Annahme getroffen, dass die zeitlichen Korrelationen entsprechend den GAUSS-MARKOV-Prozessen (GMP) (F.4), (F.7) den Schätzverfahren a priori bekannt sind, d. h. es kann jeweils von einem Prozess erster Ordnung mit vollständig bekannten Modellparametern ausgegangen werden. Weitere, nicht vorhersagbare Einflüsse, die sich z. B. durch ein zusätzliches AWGR modellieren lassen, treten hier nicht auf. Die Daten wurden dennoch mit zeitvarianten Rauschvarianzen des Rauschprozesses erstellt, der den GMP treibt. Auf eine Tiefpassfilterung der Inertialsensordaten wurde ebenfalls verzichtet.

Die Tab. 9.5 zeigt die *RMSE* für die einzelnen Sensorrauschparameter sowie für die Vektornorm (siehe Gl. (9.9) und (9.10)). Es liegen annähernd erwartungstreue Schätzungen vor. Bei den Werten des KM wurde der Skalierungsfaktor zwischen  $\sigma_{\text{FF};a,k}$  und  $\sigma_{a,k}$  bzw.  $\sigma_{\text{FF};\omega,k}$  und  $\sigma_{\omega,k}$  bereits berücksichtigt (siehe 9.2.1.2). Dennoch resultieren höhere Abweichungen als bei den Schätzungen des MD und des SEM. Für diesen vereinfachten Fall weisen MD und SEM nur geringe Unterschiede in den Schätzgenauigkeiten auf. Allerdings macht sich hier der Nachteil für den SEM kaum bemerkbar, dass dem FF in einem festen Intervall weniger Beobachtungen zur Verfügung stehen als dem MD (das FF führt 4-mal pro Sekunde eine Messwertaktualisierung durch). Die unterschiedlichen Ergebnisse für  $\sigma_{\text{FF};\omega,z}$  sind u. a. darauf zurückzuführen, dass die Schätzung des Gierwinkelfehlers indirekt von den beobachtbaren Beschleunigungen in der horizontalen Ebene abhängt. Da hier idealisierte Daten vorliegen, bei denen auch Abschnitte ohne Beschleunigungsvorgänge vorhanden sind, wirkt sich dies entsprechend auf die Schätzung von  $\sigma_{\text{FF};\omega,z}$  durch den SEM aus. Dieser Sachverhalt wird auch im folgenden Abschnitt diskutiert.



(a) Abweichungen der Parameterschätzungen (Beschleunigungssensortriade)

$\sigma_a / \sigma_{FF;a}$		INS/GPS-Variante		
		KM	MD	SEM
$RMSE_{\epsilon_{\sigma_a}} / RMSE_{\epsilon_{\sigma_{FF;a}}}$ [ $1 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$ ]	<i>x</i> -Achse	0,982	0,654	0,644
	<i>y</i> -Achse	0,78	0,639	0,638
	<i>z</i> -Achse	0,752	0,629	0,702
	<b>Gesamt</b>	<b>1,462</b>	<b>1,111</b>	<b>1,146</b>

(b) Abweichungen der Parameterschätzungen (Drehratensensortriade)

$\sigma_\omega / \sigma_{FF;\omega}$		INS/GPS-Variante		
		KM	MD	SEM
$RMSE_{\epsilon_{\sigma_\omega}} / RMSE_{\epsilon_{\sigma_{FF;\omega}}}$ [ $1 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ/\text{s}$ ]	<i>x</i> -Achse	2,166	1,895	2,026
	<i>y</i> -Achse	2,277	1,869	1,989
	<i>z</i> -Achse	2,187	1,876	4,82
	<b>Gesamt</b>	<b>3,829</b>	<b>3,256</b>	<b>5,65</b>

Tabelle 9.5: *RMSE* der Parameterschätzungen und Standardabweichungen der Parameterschätzfehler bei künstlich generierten Daten unter idealisierten Bedingungen (Beschleunigungs- und Drehratensensortriade)

**Realistische Trajektoriendynamik und unbekannte Störungen** Nach Abb. 8.3 (b) ist das LDS eines realen Sensorsignals nicht konstant. Durch nicht ideale Fahrzeugbewegungen, die dennoch der Trajektoriendynamik zugeordnet werden können (z. B. abrupte Lenkbewegungen, Beschleunigungsvorgänge, Spurwechsel), und Vibrationen ist die Leistungsdichte bei einigen Frequenzen höher als bei anderen. Um ein möglichst realistisches Frequenzspektrum zu erhalten, das nicht nur Störungen oder eine Trajektoriendynamik nach einem bestimmten Modell aufweist, wurden die entsprechenden Sensorsignale (Komponenten der Vektoren  $\mathbf{a}_{ib}^b$  bzw.  $\tilde{\mathbf{a}}_{ib}^b$  und  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  bzw.  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$ ) nach Anhang F so erzeugt, dass diese bei einigen Frequenzen (hier z. B. bei den Mittenfrequenzen 15 Hz und 25 Hz) eine höhere Leistungsdichte aufweisen.

Das Kurzzeit-Periodogramm eines typischen IME-Ausgangssignals  $\tilde{a}_{ib,x}^b$  der Beschleunigungssensortriade ist in Abb. 9.7 (a) dargestellt (zum Vergleich siehe auch die Abb. 8.4, die Periodogramme realer Sensorsignale zeigt). Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich unvorhersagbare Einflüsse auf die Parameterschätzungen in einem schwach gekoppelten System auswirken, wenn keine explizite Tiefpassfilterung der IME-Daten vorgenommen wird.

Die zeitlichen Korrelationen, die in dem für die Filterung ausschlaggebenden Frequenzbereich ( $< 10 \text{ Hz}$ ) auftreten, werden hier durch den GMP berücksichtigt. Bei diesem wird für verschiedene Trajektorienabschnitte zusätzlich von unterschiedlichen und damit zeitvarianten Rauschvarianzen des treibenden Rauschprozesses ausgegangen. Trotz des veränderten Frequenzspektrums ändern sich die statistischen Eigenschaften des beobachtbaren GMP, der in dem vom FF korrigierbaren Bereich dominiert, kaum. Daher wird im FF weiterhin von den bekannten Zustandsübergangsparametern  $d_{n_a} \approx 0,7$  und  $d_{n_\omega} \approx 0,7$  ausgegangen. Die zur Erzeugung des ursprünglichen GMP verwendeten Standardabweichungen des treibenden Rauschprozesses dienen deshalb im Folgenden als Referenzwerte.

Die Abb. 9.7 (b) zeigt für drei unterschiedliche Trajektorienabschnitte  $\check{P}_B^{(1)}$ ,  $\check{P}_B^{(2)}$  und  $\check{P}_B^{(3)}$ , die von zwei Standphasen  $\check{P}_M$  unterbrochen sind, den idealen, zeitvarianten Verlauf für die Standardabweichung  $\sigma_{FF;a,x,k}$ , der für das treibende Rauschen des GMP festgelegt wurde (schwarze Kurve).

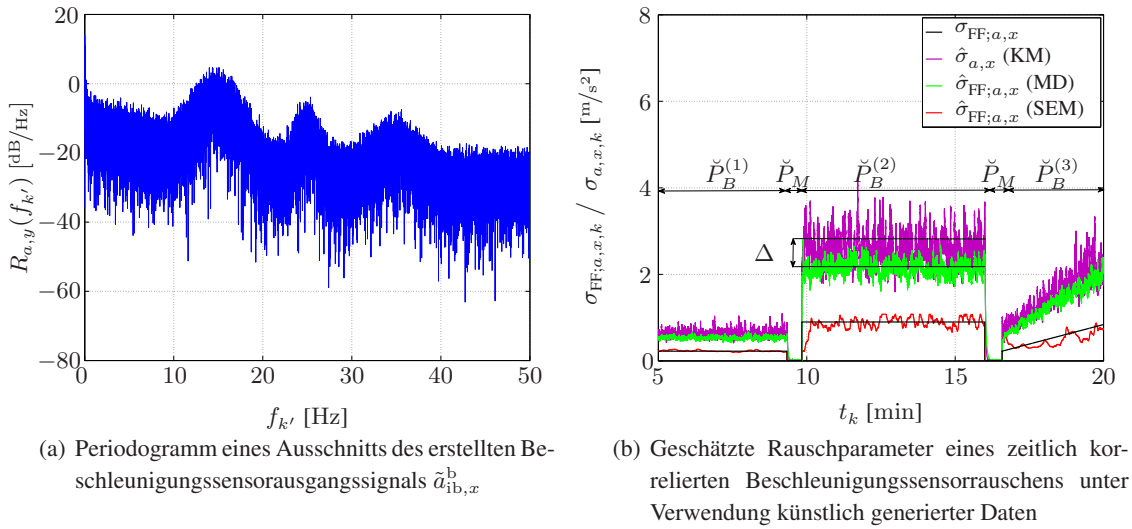


Abbildung 9.7: Periodogramm eines Ausschnitts des erstellten Beschleunigungssensorausgangssignals  $\hat{a}_{ib,x}^b$  und geschätzte Rauschparameter eines zeitlich korrelierten Beschleunigungssensorrauschens unter Verwendung künstlich generierter Daten

Wie erwähnt muss berücksichtigt werden, dass das MD und das KM unterschiedliche Rauschvarianzen schätzen. Die Schätzwerte des KM liegen hier nach Gl. (9.13) um den Faktor  $\sqrt{\frac{1}{1-d_{n_a}^2}}$  höher als die des MD, da das KM selbst nicht in der Lage ist, die Parameter eines zeitlich korrelierten Rauschprozesses zu schätzen. Daher gilt in der Abbildung  $\Delta \approx 2,2 \text{ m/s}^2 \cdot \left( \sqrt{\frac{1}{1-d_{n_a}^2}} - 1 \right)$ . Die Schätzungen beider Verfahren weisen z. B. in Phase  $\check{P}_B^{(2)}$  eine im Mittel konstante Abweichung gegenüber den Schätzungen des SEM auf. Diese systematischen Fehler resultieren aus der Leistung des ungefilterten Sensorsignals. Sowohl das KM als auch das MD können nicht eindeutig zwischen der Trajektorien-dynamik und den Rauschanteilen unterscheiden (siehe Kap. 7.2 und 7.3). Niederfrequente Signalanteile, die zur Trajektorien-dynamik gehören oder dem Bias zugeschrieben werden können, werden vom MD und KM ebenfalls als Rauschen interpretiert, das den GMP treibt. Diese Signalanteile werden ebenfalls im Rahmen der *Strapdown*-Berechnungen berücksichtigt. Der *Strapdown*-Algorithmus glättet Rausch- und Trajektorienanteile jedoch teilweise, da die Daten 2-fach integriert und zusätzlich korrigiert werden. Dies wird in Abschnitt 9.2.1.4 noch näher erläutert. Zunächst sollen die Schätzergebnisse betrachtet werden.

Die Ergebnisse zeigen, dass das modifizierte KM und das MD den jeweiligen zeitvarianten Parameter systematisch höher schätzen als der Parameter, der dem treibenden Rauschen des GMP im Zustandsmodell zugrunde liegt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Parameterschätzung bei diesen Verfahren auf ungefilterten Sensordaten  $\mathbf{z}_{IME}$  beruht. Es kann nicht vollständig zwischen Trajektorien-dynamik und zeitlich korreliertem Rauschen oder anderen Störungen unterschieden werden. Die daraus resultierenden systematischen Überschätzungen führen dazu, dass eine Über- oder Unterkorrektur der Fehler in der Navigationslösung vorgenommen wird, da höheres Gewicht auf die Beobachtungen der Stützsensoren gelegt wird als notwendig ist.

Sowohl die *RMSE*-Werte der einzelnen Komponenten ( $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse) als auch die zugehörigen Standardabweichungen der Parameterschätzfehler wurden in Tab. 9.6 (a) für die einzelnen Verfahren eingetragen. Die Berechnung der Werte erfolgte wie bei den Gl. (9.6) und (9.9). Für die

Berechnung der jeweiligen Gesamtabweichung wurde nicht über die Werte der einzelnen Komponenten gemittelt, sondern die euklidische Vektornorm verwendet.

Die Daten zeigen, dass sowohl das auf der Berechnung von Korrelationen basierende MD als auch das KM größere Abweichungen aufweisen. Je höher der systematische Fehler ist, desto höher sind auch die Standardabweichungen der Schätzfehler. Hinzu kommt, dass das KM die Varianzen nur empirisch nachführen kann, da seine Herleitung auf der Annahme von zeitinvarianten Parametern beruht (siehe Anhang E.2). Dementsprechend resultieren hier höhere Abweichungen bei den Schätzungen als bei den anderen Verfahren. Vergleichbare Beobachtungen können auch bei den zur Drehratensensortriade korrespondierenden Werte in Tab. 9.6 (b) gemacht werden.

(a) Abweichungen der Parameterschätzungen (Beschleunigungssensortriade)

$\sigma_a / \sigma_{\text{FF};a}$		INS/GPS-Variante		
		KM	MD	SEM
$RMSE_{\epsilon_{\sigma_a}} / RMSE_{\epsilon_{\sigma_{\text{FF};a}}}$ $[1 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2]$	x-Achse	8,706	7,787	1,124
	y-Achse	8,732	7,916	1,111
	z-Achse	8,574	7,615	1,259
	<b>Gesamt</b>	<b>15,018</b>	<b>13,465</b>	<b>2,021</b>
$\sigma_{\epsilon_{\sigma_a}} / \sigma_{\epsilon_{\sigma_{\text{FF};a}}}$ $[1 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2]$	x-Achse	5,263	4,878	1,099
	y-Achse	5,319	4,982	1,104
	z-Achse	5,193	4,707	1,256
	<b>Gesamt</b>	<b>9,108</b>	<b>8,302</b>	<b>2,001</b>

(b) Abweichungen der Parameterschätzungen (Drehratensensortriade)

$\sigma_{\omega} / \sigma_{\text{FF};\omega}$		INS/GPS-Variante		
		KM	MD	SEM
$RMSE_{\epsilon_{\sigma_{\omega}}} / RMSE_{\epsilon_{\sigma_{\text{FF};\omega}}}$ $[1 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ/\text{s}]$	x-Achse	23,01	20,536	2,313
	y-Achse	23,229	20,822	2,295
	z-Achse	22,837	20,538	5,596
	<b>Gesamt</b>	<b>39,878</b>	<b>35,737</b>	<b>6,476</b>
$\sigma_{\epsilon_{\sigma_{\omega}}} / \sigma_{\epsilon_{\sigma_{\text{FF};\omega}}}$ $[1 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ/\text{s}]$	x-Achse	9,342	8,912	2,268
	y-Achse	9,427	8,992	2,285
	z-Achse	9,312	8,889	3,538
	<b>Gesamt</b>	<b>16,212</b>	<b>15,469</b>	<b>4,783</b>

Tabelle 9.6: *RMSE* der Parameterschätzungen und Standardabweichungen der Parameterschätzfehler bei künstlich generierten Daten ohne Berücksichtigung des systematischen Fehlers (Beschleunigungs- und Drehratensensortriade)

Die *RMSE*, die bei Verwendung des MD zu  $13,465 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$  bzw.  $35,737 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ/\text{s}$  bestimmt wurden, weisen gegenüber den entsprechenden Fehlern beim KM mit  $15,018 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$  bzw.  $39,878 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ/\text{s}$  eine Verbesserung in der Schätzfehlerabweichung um ca. 10,34 % bzw. 10,38 % auf. Ähnliches gilt für Standardabweichungen der Schätzfehler.

Der SEM (dessen Ergebnisse in Abb. 9.7 (b) durch die rote Kurve dargestellt sind) weist sowohl bei den Rauschparametern der Drehraten- als auch der Beschleunigungssensortriade die geringsten Abweichungen zu den wahren Standardabweichungen des treibenden Rauschprozesses auf. Die Wer-

te, die im Mittel vom SEM geschätzt werden, entsprechen denen, die bei der Erzeugung der Simulationsdaten verwendet wurden. Durch die vorhandene Stützung mit künstlichen Magnetfeldsensordaten einerseits und den *GPS*- sowie barometrischen Daten andererseits, ist der SEM durch das SF in der Lage, die zeitvarianten Rauschvarianzen abtastwertweise nachzuführen. Dabei muss allerdings berücksichtigt werden, dass eine Messwertaktualisierung mit einer geringeren Rate durchgeführt wird als bei den beiden anderen Verfahren, denn die Beobachtungen werden im FF bzw. SF mit  $4\frac{1}{s}$  (*GPS*-Datenrate) verarbeitet. Die Parameterschätzung erfolgt dennoch mit  $100\frac{1}{s}$ , da z. B. Gl. (7.61) fortlaufend berechnet wird.

Die Verbesserung in der Genauigkeit, die mit dem SEM gegenüber dem KM im Mittel erreicht wird, liegt mit Werten von  $2,021 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$  und  $6,476 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ/\text{s}$  bei 86,54 % bzw. 83,76 %. Die Standardabweichungen der Gesamtschätzfehler von  $2,001 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$  bzw.  $4,783 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ/\text{s}$  belegen die zuverlässigen Schätzungen. Des Weiteren zeigt sich, dass die Genauigkeit bei den horizontalen Komponenten höher ist als bei den vertikalen Komponenten. Die barometrische Höhenstützung ist für die sequenzielle Parameterschätzung nicht gewinnbringend, da zwischen der Beobachtung einer Position und dem entsprechenden zeitkorrelierten Rauschen einer Beschleunigungssensortriade nur eine indirekte Kopplung durch die Filtergleichungen besteht. Deshalb wurde auch darauf verzichtet, Positionsmessungen als Beobachtungen für das SF zu verwenden (siehe Gl. (7.54)). Die Tatsache, dass die vertikale Geschwindigkeitskomponente der *GPS*-Schätzungen, die hier zur Stützung eingesetzt wird, von geringerer Güte als die horizontalen Komponenten ist, spiegelt sich auch in den Parameterschätzungen wider.

Eine Besonderheit stellt hier die  $z$ -Komponente  $\sigma_{\text{FF};\omega,z}$  dar. Der Fehler von  $5,596 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ/\text{s}$  ist darauf zurückzuführen, dass zwar eine Kopplung aufgrund der *GPS*-Geschwindigkeits- und Magnetfeldsensordaten zwischen dieser Komponente und einer Beobachtung besteht, die Kopplung ist bei der  $x$ - und  $y$ -Komponente jedoch wesentlich stärker. Dazu trägt indirekt auch die Beschleunigung bei. Die Beobachtbarkeit des Gierwinkelfehlers und damit die Schätzung von  $\sigma_{\text{FF};\omega,z}$  hängt davon ab, ob Beschleunigungen in den horizontalen Komponenten auftreten (ein *GPS*-Empfänger könnte beispielsweise nicht auf die Richtung bei einem stehenden Fahrzeug schließen ohne die Kenntnis der vorherigen Trajektorie).

Bevor eine Aussage über die Auswirkungen und die Qualität der Navigationslösung getroffen wird, sollte bedacht werden, dass die Genauigkeiten der Parameterschätzungen nicht ausschließlich ausschlaggebend sind. Der SEM hat den Vorteil, sich indirekt auf das Navigationsfilter einstellen zu können. Er bestimmt die Rauschkovarianzmatrix, die bei der aktuellen KALMAN-Schätzung die Lösung mit dem größten Erwartungswert der Likelihood darstellt. Es findet ein Abgleich zwischen den *ML*-Schätzungen des SEM und den a posteriori-Schätzungen des FF bzw. SF statt. Die Abb. 9.8 und 9.9 sollen hier den Unterschied zwischen dem MD und dem SEM verdeutlichen. Es zeigt sich, dass die MD-Schätzungen vollständig unabhängig von der vom FF geschätzten a posteriori-Verteilung durchgeführt werden. Mögliche Ungenauigkeiten in den Modellannahmen werden nicht berücksichtigt. Hinzu kommt, dass das MD lediglich die Korrelationen an zwei Verschiebungspunkten auswertet und ausgehend davon über eine Exponentialglättung auf die AKF schließt. Im Gegensatz dazu zeigt Abb. 9.9, dass die a posteriori-Schätzungen des FF bzw. SF von der Likelihood des SEM und dessen Schätzung umgekehrt in Abhängigkeit von den KALMAN-Filterausgangsgrößen durchgeführt wird. Es wird daher immer der annähernd optimale Schätzwert unter den gegebenen Bedingungen, d. h. mit Kenntnis der jeweils aktuellen Ausgangsgrößen des anderen Schätzers bestimmt. Für den SEM folgt dadurch eine Abhängigkeit von allen zur Verfügung stehenden Messungen, wohingegen das MD lediglich von den Inertialsensormessdaten  $\mathbf{z}_{\text{IME}}$  abhängt. Hier zeigt sich, dass die Filterstruktur Unge-

$$\begin{array}{c}
 \text{MD:} \\
 \boxed{E \left[ \left( \mathbf{z}_{\text{IME};k} - \mathbf{z}_{\text{IME};k-1} \right) \cdot \left( \mathbf{z}_{\text{IME};k} - \mathbf{z}_{\text{IME};k-1} \right)^T \middle| \mathbf{z}_{\text{IME};1:k} \right],} \\
 E \left[ \left( \mathbf{z}_{\text{IME};k} - \mathbf{z}_{\text{IME};k-1} \right) \cdot \left( \mathbf{z}_{\text{IME};k-1} - \mathbf{z}_{\text{IME};k-2} \right)^T \middle| \mathbf{z}_{\text{IME};1:k} \right] \\
 \downarrow \\
 \text{FF:} \\
 \boxed{p \left( \mathbf{x}_{\text{FF};k} \middle| \mathbf{z}_{\text{IME};1:k}, \mathbf{z}_{\text{GPS};1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k-1}^{\#} \right)}
 \end{array}$$

Abbildung 9.8: Abhängigkeit der a posteriori-Verteilung, die im FF geschätzt wird, von den Korrelationen in den IME-Messungen  $\mathbf{z}_{\text{IME}}$

$$\begin{array}{c}
 \text{SEM:} \\
 \boxed{\operatorname{argmax}_{\mathbf{q}_{\text{FF}}^{\#}} \left\{ E \left[ \log \left( p(\mathbf{x}_{\text{SF};k} | \mathbf{x}_{\text{SF};k-1}; \mathbf{q}_{\text{FF}}^{\#}) \right) \middle| \mathbf{z}_{\text{IME};1:k}, \mathbf{z}_{\text{GPS};1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k-1}^{\#} \right] + \sum_{\kappa=2}^{k-1} \dots \right\}} \\
 \left( \quad \right) \quad k := k + 1 \\
 \text{FF:} \\
 \boxed{p \left( \mathbf{x}_{\text{SF};k+1} \middle| \mathbf{z}_{\text{IME};1:k+1}, \mathbf{z}_{\text{GPS};1:k+1}; \hat{\mathbf{q}}_{\text{FF};k}^{\#} \right)}
 \end{array}$$

Abbildung 9.9: Zusammenhang zwischen der a posteriori-Verteilung, die im FF geschätzt wird, und dem Erwartungswert der *Log-Likelihood Function*, der mittels SEM maximiert wird (hier für den vereinfachten Fall  $\mathcal{I}_{\text{max}} = 1$  dargestellt)

naugigkeiten in den Parameterschätzungen des SEM eher verzeihen kann als es bei den Schätzungen der anderen Verfahren der Fall ist. Das FF und das SF stellen sich auf mögliche Abweichungen ein.

#### 9.2.1.4 Eigenschaften der Filterstruktur

Wie zuvor erwähnt spielen einige Eigenschaften der Filterstruktur ebenfalls eine wichtige Rolle. In diesem Zusammenhang soll Abb. 9.10 (a) betrachtet werden. Diese zeigt einen Ausschnitt des Ausgangssignals  $\hat{v}_{\text{SD};\text{eb},n}^n$  (Nordkomponente des Geschwindigkeitsvektors). Bei der blauen Kurve handelt es sich um die eigentliche Navigationslösung, die mit einer Datenrate von  $100 \text{ }^1/\text{s}$  bereitgestellt wird. Es ist deutlich zu erkennen, dass in der Navigationslösung einige zusätzliche Signalanteile vorhanden sind. Dies sind nicht nur Anteile aufgrund des Rauschens, sondern ebenso welche, die zur Trajektoriendynamik gehören. Durch die Integration und die Korrekturen reduzieren sich die Rauschanteile im Rahmen der *Strapdown*-Berechnungen bereits beträchtlich, so dass sie in den Positionsschätzungen nur noch geringfügig auftreten.

Die grüne Kurve ist das Signal (hier aus Gründen der Darstellung um einen konstanten Wert von  $1 \text{ m/s}$  angehoben, so dass die Kurven nicht übereinander liegen), das effektiv im Rahmen der Fehler- und der Sekundärfilterung am jeweiligen Messeingang anliegt. Da die *GPS*-Beobachtungen die Hauptkomponenten darstellen, mit denen das Navigationsfilter gestützt wird und die entsprechenden Informationen lediglich mit  $4 \text{ }^1/\text{s}$  zur Verfügung stehen, wird für das Fehlerfilter (FF) letztlich auch nicht jeder Wert der Navigationslösung als Messung genutzt. Als Beobachtungsvektor dient dem FF schließlich die Differenz von zwei Messvektoren, wie in Kap. 4.6.2 herausgestellt wurde.

Die Abbildung macht deutlich, dass am Eingang beider Filter, dem FF, aber auch dem Sekundärfilter (SF), das für die sequenzielle Parameterschätzung mittels SEM eingesetzt wird, so-

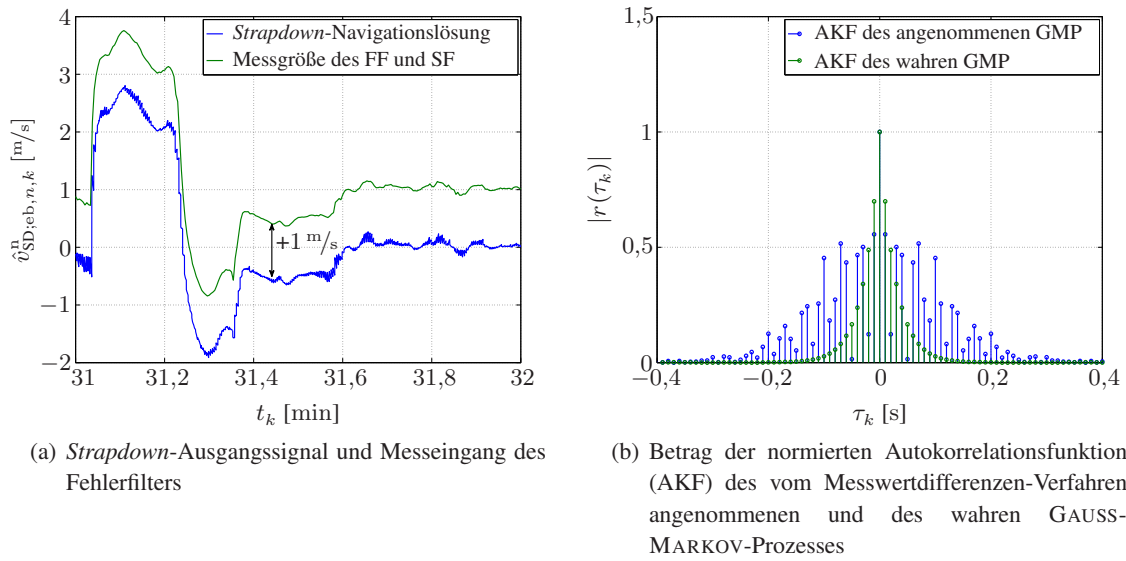


Abbildung 9.10: Vergleich des *Strapdown*-Ausgangssignals mit dem Messeingangssignal des Fehlerfilters/Sekundärfilters und Betrag der normierten Autokorrelationsfunktion des vom Messwertdifferenzen-Verfahren angenommenen und des wahren GAUSS-MARKOV-Prozesses

mit ein unterabgetastetes Signal anliegt, dass von der eigentlichen Trajektorien-dynamik und dem GMP dominiert wird. Während jedoch die Messwertaktualisierungen des FF und des SF mit  $4\frac{1}{s}$  durchgeführt werden, wird der jeweilige Prädiktionsschritt mit  $100\frac{1}{s}$  durchgeführt. Dies ist aus verschiedenen Gründen sinnvoll:

- Die Zustandsmatrizen nach den Gl. (5.2) – (5.10) sowie die Messmatrix  $\mathbf{H}_{FF}$  sind JACOBI-Matrizen, die von der aktuellen Navigationslösung  $\hat{\mathbf{x}}_{SD;k}$  abhängen. Wie erwähnt wird diese mit 100 Hz berechnet. Würde die Prädiktion im FF bzw. SF mit einer geringeren Datenrate als  $100\frac{1}{s}$  durchgeführt werden, so könnten bei der Berechnung der Schätzfehlerkovarianzmatrizen nicht die Navigationslösungen berücksichtigt werden, die zwischen den Messwertaktualisierungen am Messeingang bestimmt wurden.
- Die Parameter des GAUSS-MARKOV-Prozesses (GMP) (z. B. Korrelationszeit) wurden anhand von Signalen bestimmt, die mit 100 Hz bereitgestellt wurden. Eine Skalierung der Parameter ist nur approximativ möglich, da es sich bei einem GMP formal um einen instationären Prozess handelt. Für ein ausreichend langes Beobachtungsintervall ist ein GMP allerdings annähernd stationär.

Obwohl im vorliegenden Fall ein effektiver Korrekturvektor  $\hat{\mathbf{x}}_{FF;k|k}$  nur 4-mal pro Sekunde zur Verfügung steht, wird die Schätzfehlerkovarianzmatrix 100-mal pro Sekunde auf Basis des Systemrauschmodells nach Gl. (5.13) prädiiziert. Die Ausgangsgrößen und die laufend aktualisierten JACOBI-Matrizen des FF dienen dem SF, um neben  $\hat{\mathbf{x}}_{SF;k|k}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{SF;k-1|k-1}$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_{SF;k|k}$  und  $\hat{\mathbf{P}}_{SF;k-1|k-1}$  dennoch auch die *Lag-One*-Schätzfehlerkovarianzmatrix  $\hat{\mathbf{P}}_{SF;k,k-1|k}$  bestimmen zu können (siehe Kap. 7.1.4). Demnach erfolgt auch die Berechnung der Matrix  $\mathbf{E}_k$  in Gl. (7.61) anhand von aufeinanderfolgenden a posteriori-Schätzungen, zwischen denen eine zeitliche Differenz von  $t_k - t_{k-1} = 0,01\text{ s}$  liegt und



nicht eine Differenz von  $t_k - t_{k-1} = 0,25$  s. Somit basiert eine Schätzung des SEM dennoch auf der Zielfunktion (7.5) mit der Annahme, dass zwischen den a posteriori-Schätzwerten des erweiterten Sekundärfilters (SF) ein Intervall von  $t_k - t_{k-1} = 0,01$  s liegt. Eine Skalierung der Schätzung  $\hat{\mathbf{q}}_{\text{FF},k}^\#$  wird somit umgangen.

Die Beträge der normierten Kurzzeit-Autokorrelationsfunktionen (AKF) in Abb. 9.10 (b) zeigen beispielhaft den Unterschied zwischen dem GMP, der im Systemmodell des FF berücksichtigt werden muss (grüne Kurve) und dem vom MD angenommenen GMP (blaue Kurve), wenn keine explizite Tiefpassfilterung der Sensordaten vorgenommen wird. Es zeigt sich, dass durch die nicht vollständig unterdrückbare Trajektoriendynamik und den Umstand, dass die AKF lediglich auf der Berechnung von zwei spezifischen Werten  $r_{\Delta n \Delta n, k}^{(0)}$  und  $r_{\Delta n \Delta n, k}^{(1)}$  (Gl. (7.78) und (7.79)) resultiert, das MD ebenfalls andere Korrelationszeiten und Rauschvarianzen als die schätzt, die dem Prozess in Wirklichkeit zugrunde liegen. Somit würde auch eine Unterabtastung des Signals beim MD/KM dieses Ergebnis nicht beeinflussen.

Man kann somit Folgendes zusammenfassen:

- Die Varianzschätzungen des MD und die des KM können einen systematischen Fehler aufweisen, da nicht vollständig zwischen verschiedenen Rauschprozessen und Trajektoriendynamik unterschieden werden kann. Dies kann eine Überschätzung der eigentlich relevanten Parameter zur Folge haben, d. h. die Schätzungen entsprechen nicht den Varianzen des dominierenden GMP, der im Zustandsmodell des Filters berücksichtigt wird.
- Es treten durch das Integrieren der Beschleunigungen und Geschwindigkeiten im *Strapdown*-Block und durch die vorangegangene Korrektur der Navigationsgrößen weitere zeitliche Korrelationen auf, die berücksichtigt werden müssen. Da nach Abb. 9.8 allerdings die Parameterschätzung unabhängig von den a posteriori-Schätzwerten erfolgt, werden dort diese Korrelationen nicht berücksichtigt. Im Gegensatz dazu basiert die Schätzung des SEM auf dem bedingten Erwartungswert der *LLF* unter Berücksichtigung aller Beobachtungen am Messeingang des FF/SF.
- Unbekannte mittelwertfreie Rauschanteile mitteln sich im Rahmen der Integration im *Strapdown*-Algorithmus z. T. heraus. Für die Fehlerfilterung ist die Langzeitcharakteristik des zeitlich korrelierten Rauschens entscheidend, denn die Korrektur erfolgt nur mit der Datenrate, mit der auch die Beobachtungen am Messeingang des FF vorliegen.
- Mit höherer *GPS*-Datenrate kann die Fehlerkorrektur weiter verbessert werden, da die Abtastrate am Messeingang und die Datenrate, mit der Korrekturterme am Ausgang des FF bereitgestellt werden, erhöht wird. Aliaseffekte werden reduziert. Kostengünstige *GPS*-Empfänger mit einer Aktualisierungsrate von mehr als  $f_{\text{GPS}} = 10$  Hz sind in der Praxis allerdings selten erhältlich.

Abschließend sei noch angemerkt, dass eine Anpassung der Filterstruktur zwar möglich wäre (z. B. Verminderung der Prädiktionsrate oder Tiefpassfilterung der Inertialsensordaten), der Informationsgewinn durch die IME-Messungen würde allerdings reduziert werden. Auch eine Reduzierung der Rate, mit der die *Strapdown*-Lösung berechnet wird, ist nicht sinnvoll, da viele Vorteile einer *INS/GPS*-Integration verloren gehen würden. Dagegen spricht außerdem, dass Approximationen, die im Zusammenhang mit der Lageberechnung im *Strapdown*-Block gemacht wurden, nicht mehr gültig wären, denn es wird bei der Herleitung der Gleichungen von einer entsprechend hohen Datenrate

ausgegangen (siehe die Gl. (4.34) und (4.35)). Durch Einsatz des SEM werden diese Probleme umgangen.

### 9.2.1.5 Auswirkung der Parameterschätzung auf die Navigationslösung

Der folgende Abschnitt soll Aufschluss darüber geben, wie sich die Verbesserungen in der Parameterschätzung für den realistischen Fall in Abschnitt 9.2.1.3 durch Einsatz des SEM oder der anderen Verfahren in den Positions- und Geschwindigkeitsschätzungen des *Strapdown*-Algorithmus, d. h. des „äußeren“ Systemzustandes, unter den hier getroffenen Annahmen bemerkbar machen. Zusätzlich wird untersucht, wie sich die Annahme konstanter Systemrauschvarianzen auswirkt. Dazu wurden die folgenden Standardabweichungen für das Zustandsmodell des FF verwendet:  $\sigma_{FF;a} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$  bzw.  $\sigma_{FF;\omega} = 4 \cdot 10^{-1^\circ}/\text{s}$ . Diese Wahl entspricht den Werten, die sich aus der Ruhemessung ergeben haben (siehe Kap. 8).

Anhand Tab. 9.7 lassen sich die *RMSE* der Eulerwinkel am Ausgang des *Strapdown*-Blocks mit und ohne Parameterschätzung miteinander vergleichen. Es zeigt sich, dass durch den SEM die bes-

Methode		Winkelschätzfehler ( <i>RMSE</i> )			
		(Prozentuale Verbesserung gegenüber <i>GPS</i> /Konst.)			
		$RMSE_{\epsilon_\phi}$ [ $1 \cdot 10^{-1^\circ}$ ]	$RMSE_{\epsilon_\theta}$ [ $1 \cdot 10^{-1^\circ}$ ]	$RMSE_{\epsilon_\psi}$ [ $1 \cdot 10^{-1^\circ}$ ]	$RMSE_{\epsilon_\gamma}$ [ $1 \cdot 10^{-1^\circ}$ ]
<i>GPS</i>		–	–	<b>36,36</b>	–
<i>INS/GPS</i> - Variante	Konst.	<b>4,37</b>	<b>4,31</b>	12,03 ( <b>66,14 %</b> )	<b>13,5</b>
	KM	4,25 ( <b>2,78 %</b> )	4,21 ( <b>2,35 %</b> )	11,45 ( <b>68,51 %</b> )	12,92 ( <b>4,37 %</b> )
	MD	4,22 ( <b>3,44 %</b> )	4,2 ( <b>2,6 %</b> )	12,31 ( <b>66,14 %</b> )	13,67 ( <b>–1,25 %</b> )
	SEM	4,08 ( <b>6,64 %</b> )	4,12 ( <b>4,31 %</b> )	12,18 ( <b>66,5 %</b> )	13,2 ( <b>2,22 %</b> )

Tabelle 9.7: Winkelschätzfehler und prozentuale Verbesserungen der Lageschätzungen bei der Navigationsfilterung mit sequenzieller Parameterschätzung gegenüber einer konstant gewählten Kovarianzmatrix bzw. gegenüber dem mittels *GPS*-Geschwindigkeiten berechneten Gierwinkel

ten Ergebnisse, vor allem beim Roll- und Nickwinkel ( $\phi$ ,  $\theta$ ), erreicht werden. Betrachtet man die prozentualen Verbesserungen bei den Gierwinkelschätzungen (Verbesserungen gegenüber dem hervorgehobenen Wert in der jeweiligen Spalte), so wird deutlich, dass durch die *INS/GPS*-Varianten jeweils eine Verbesserung von ca. 66 % gegenüber dem Gierwinkel erreicht wird, der sich über  $\hat{\psi}_{GPS;k} = \arctan 2 \left( \frac{\hat{v}_{GPS;n,k}^n}{\hat{v}_{GPS;e,k}^n} \right)$  anhand der horizontalen *GPS*-Geschwindigkeitsinformationen berechnen lässt. Allerdings muss beachtet werden, dass die mittleren quadratischen Abweichungen (*RMSE*-Werte) deutlich höher ausfallen (ca. das Drei- bis Vierfache) als bei den Roll- und Nickwinkelschätzungen. Da der Gierwinkel eine der drei Komponenten ist, die neben den horizontalen Beschleunigungskomponenten für die Genauigkeit der Navigationslösung ausschlaggebend ist, stellt dieses Resultat ein generelles Problem dar. Dies tritt allerdings bei allen Verfahren gleichermaßen auf. Die Ursache liegt in der Stützung der entsprechenden Lagekomponente im *INS/GPS*-Navigationsfilter. Einerseits liefert das satellitengestützte Teilsystem durch die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $\hat{v}_{GPS;n}^n$  und  $\hat{v}_{GPS;e}^n$  einen vergleichsweise unzuverlässigen und auch nur indirekten Beitrag zur Schätzung des Gierwinkels, andererseits besteht durch den Vektor  $\mathbf{l}_{GPS}^b$  (Vektor, der den Abstand zwi-

schen der IME und dem GPS-Empfänger beschreibt) nur eine schwache Kopplung zwischen diesem und den Lagefehlerkomponenten im Systemzustandsvektor. Außerdem konnten bei der Generierung der Daten nicht sämtliche Effekte wie z. B. Fliehkräfte berücksichtigt werden (horizontale Beschleunigungen machen den Gierwinkel beobachtbar). Eine Stützung wird hier zwar ebenfalls durch die nachgebildeten Magnetfeldsensormessungen vorgenommen, die Messrauschvarianzen sind allerdings verhältnismäßig hoch. Trotz der geringen Unterschiede beim Gierwinkel sind die Verbesserungen bei den Roll- und Nickwinkelschätzungen durch den SEM hervorzuheben. Dieser führt zu einer prozentualen Verbesserung in der Winkelschätzgenauigkeit von 6,64 % bzw. 4,31 %, das MD hingegen zu Verbesserungen von 3,44 % bzw. 2,6 %. Hier liegt also eine Verdoppelung in der Genauigkeit gegenüber dem Ergebnis des MD vor.

Die Unterschiede machen sich deutlicher in den Geschwindigkeitsschätzungen bemerkbar, wie Tab. 9.8 zeigt. Bei den Geschwindigkeitskomponenten kommen nicht nur die geschätzten System-

Methode		Geschwindigkeitsschätzfehler (RMSE) (Prozentuale Verbesserung gegenüber GPS)			
		$RMSE_{\epsilon_{v,n}}$ [1 · 10 <sup>-1</sup> m/s]	$RMSE_{\epsilon_{v,e}}$ [1 · 10 <sup>-1</sup> m/s]	$RMSE_{\epsilon_{v,d}}$ [1 · 10 <sup>-1</sup> m/s]	$RMSE_{\epsilon_v}$ [1 · 10 <sup>-1</sup> m/s]
GPS		1,25	1,22	2,2	2,87
INS/GPS-Variante	Konst.	3,07 (−145,6 %)	1,54 (−26,23 %)	6,95 (−215,9 %)	7,75 (−170,3 %)
	KM	1,22 (2,4 %)	1,28 (−4,92 %)	1,83 (16,82 %)	2,54 (11,5 %)
	MD	1,2 (4 %)	1,25 (−2,46 %)	1,97 (10,45 %)	2,62 (8,71 %)
	SEM	1,14 (8,8 %)	1,21 (0,8 %)	1,74 (20,91 %)	2,41 (16,3 %)

Tabelle 9.8: Geschwindigkeitsschätzfehler und prozentuale Verbesserungen der Geschwindigkeitsschätzungen bei der Navigationsfilterung mit sequenzieller Parameterschätzung gegenüber den  $GPS$ -Schätzungen

rauschvarianzen in  $\hat{\mathbf{q}}_{FF;\omega,k}$  zum Tragen, die mit der Drehratensensortriade durch die berechnete Richtungskosinusmatrix (RKM)  $\hat{\mathbf{C}}_{SD;b}^n$  korrelieren, sondern auch die Varianzschätzungen, die durch das Aufintegrieren im Rahmen der *Strapdown*-Berechnung im Zusammenhang mit der Beschleunigungssensortriade stehen. Aus diesem Grund ist bei der Wahl konstanter Rauschvarianzen eine deutliche Verschlechterung der Geschwindigkeitsschätzung mit  $RMSE_{\epsilon_v} = 7,75 \cdot 10^{-1}$  m/s zu beobachten, wie die zweite Zeile in Tab. 9.8 verdeutlicht. Hauptverantwortlich für das schlechte Abschneiden gegenüber den  $GPS$ -Schätzungen sind die  $n$ - und die  $d$ -Komponente mit  $RMSE_{\epsilon_{v,n}} = 3,07 \cdot 10^{-1}$  m/s bzw.  $RMSE_{\epsilon_{v,d}} = 6,95 \cdot 10^{-1}$  m/s. Neben den  $RMSE$ -Werten sind auch hier die prozentualen Verbesserungen bzw. Verschlechterungen (markiert durch ein vorangestelltes „−“) gegenüber den  $GPS$ -Schätzungen in der ersten Zeile in rot eingetragen. Die Verschlechterung in der Geschwindigkeitsschätzung liegt somit bei 170 %. Hierbei spielen die gewählten Werte für die konstanten Parameter eine entscheidende Rolle. Im vorliegenden Fall wurden diese niedriger gewählt als die wahren Werte. Dies führt dazu, dass den Beobachtungen, die zur Stützung verwendet werden ( $GPS$ -Messungen, Höheninformationen durch das barometrische Teilsystem), weniger vertraut wird als den Inertialsensormessungen. Da die Inertialsensormessungen jedoch nicht langfristig stabil sind, kann auch das FF die Abweichungen nur noch unzureichend nachführen. Die daraus resultierende fehlerhafte Korrektur und damit ebenfalls fehlerhaften Größen im Vektor  $\mathbf{x}_K$  führen wiederum zu höheren Geschwindigkeitsfehlern. Ein fortwährender Abgleich zwischen einem a posteriori-Schätzwert, gegeben eine  $ML$ -Schätzung der zeitvarianten Systemrauschkovarianzmatrix einerseits,

und einem *ML*-Schätzwert, der auf der a posteriori-Schätzung des FF beruht andererseits (wie beim SEM), findet hier nicht statt. Man könnte hier zwar durchaus höhere konstante Rauschvarianzen annehmen, allerdings würden diese nicht mehr mit den entsprechenden Datenblättern übereinstimmen. Des Weiteren kann man durch die nicht vollständig unterdrückbare Trajektorien­dynamik sowie durch auftretende Vibrationen nicht zwingend erwarten, dass die wahren Werteverläufe unterhalb der hier als konstant gewählten Parameter liegen, wie auch schon in Kap. 7.2.3 herausgestellt werden konnte. Generell kann man jedoch zusammenfassen, dass eine Überschätzung der gesuchten Rauschvarianzen wesentlich vorteilhafter ist als eine Unterschätzung.

Im Gegensatz dazu führt hier eine abtastwertweise Schätzung der zeitvarianten Parameter zu einer Steigerung in der Schätzgenauigkeit der Geschwindigkeiten. Während diese beim modifizierten KM ca. 11,5 % ( $RMSE_{\epsilon_v} = 2,54 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$ ) beträgt, ist sie mit 8,71 % ( $RMSE_{\epsilon_v} = 2,62 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$ ) beim MD etwas geringer. Die Ursache liegt, bei Vergleich mit der ersten Zeile, hauptsächlich in der *d*-Komponente. Für das MD und den SEM sind auch in den horizontalen Komponenten Verbesserungen zu beobachten. Die Werte in der letzten Zeile (SEM) sind sogar 5 % – 10 % besser als die in der vorletzten Zeile (MD). Dieser Sprung spiegelt sich in einer besseren Reduktion des Gesamtfehlers wider, der mit  $2,41 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$  annähernd 69 % über dem liegt, der unter Verwendung konstanter Rauschvarianzen (Konst.) erreicht wird und ca. 8 % über dem Ergebnis des MD bzw. 5 % über dem des KM liegt.

Obwohl sich die barometrische Höhenstützung nicht direkt auf die Schätzung des Geschwindigkeitsfehlers im *INS/GPS*-Filter auswirkt und auch im Sekundärfilter (SF) keine Rolle für die Parameterschätzung spielt, wirkt sie sich durch die Stabilisierung des Höhenkanals dennoch positiv auf die absolute Geschwindigkeit am *Strapdown*-Ausgang aus. Sie ist trotzdem nicht allein für die verbesserten Schätzungen der vertikalen Geschwindigkeitskomponente verantwortlich, da sie bei sämtlichen Schätzvarianten eingesetzt wurde. Zusammenfassend zeigt sich jedoch, dass eine konsistente Genauigkeitssteigerung in den Geschwindigkeitsschätzungen durch den SEM zu erkennen ist.

Zum Abschluss dieses Abschnitts werden, zusammen mit den Summenhäufigkeitsfunktionen in Abb. 9.11, die Ergebnisse in Tab. 9.9 ( $RMSE$  der Positionskomponenten) betrachtet. In der Abb. 9.11

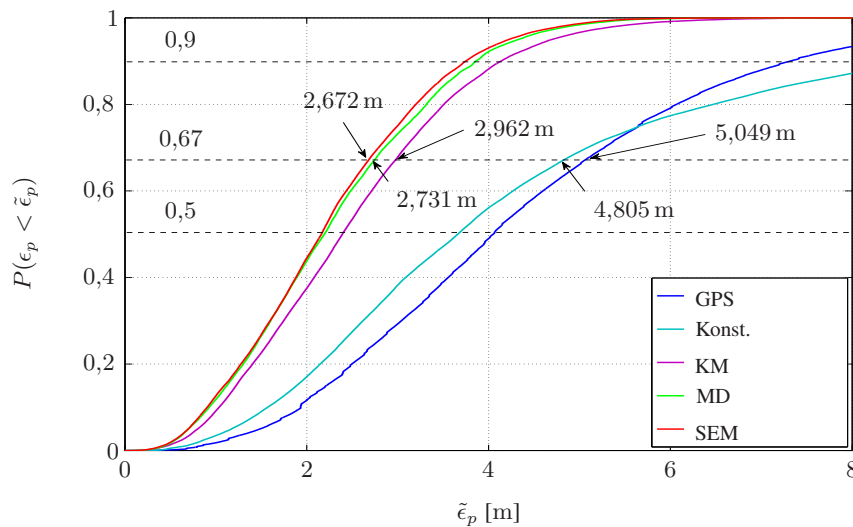


Abbildung 9.11: Kumulative Verteilung der betragsmäßigen Positionsschätzfehler bei künstlich generierten Daten

wurden zusätzliche Hilfslinien für die charakteristischen Werte  $P(\epsilon_p < \tilde{\epsilon}_p) = 0,5$ ,

$P(\epsilon_p < \tilde{\epsilon}_p) = 0,67$  sowie  $P(\epsilon_p < \tilde{\epsilon}_p) = 0,9$  eingefügt. Die Variable  $\tilde{\epsilon}_p$  ist hier eine vorgegebene Schranke für den mittleren betragsmäßigen Fehler in der Position (euklidische Vektornorm der drei Positionskomponenten). Es zeigt sich, dass auch hier die Wahl einer konstanten Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{FF}^\#$  zu einer geringeren Genauigkeit in der Navigationslösung führt als beim Einsatz eines Verfahrens, das eine als zeitvariant angenommene Systemrauschkovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{FF;k}^\#$  schätzt. Im Vergleich zu den

Methode	Positionsschätzfehler (RMSE)			
	(Prozentuale Verbesserung gegenüber GPS)			
	$RMSE_{\epsilon_{p,n}}$ [m]	$RMSE_{\epsilon_{p,e}}$ [m]	$RMSE_{\epsilon_h}$ [m]	$RMSE_{\epsilon_p}$ [m]
<i>GPS</i>	<b>1,99</b>	<b>2,03</b>	<b>4,01</b>	<b>4,91</b>
<i>INS/GPS-</i> Variante	Konst.	2,35 (−18,24 %)	1,88 (6,82 %)	4,63 (−15,6 %)
	KM	1,95 (1,8 %)	1,89 (6,66 %)	0,653 (83,68 %)
	MD	1,78 (10,4 %)	1,78 (12,2 %)	0,538 (86,56 %)
	SEM	1,76 (11,02 %)	1,7 (15,7 %)	0,532 (86,7 %)

Tabelle 9.9: Positionsschätzfehler und prozentuale Verbesserungen der Positionsschätzungen bei der Navigationsfilterung mit sequenzieller Parameterschätzung gegenüber den *GPS*-Schätzungen

*GPS*-Schätzungen tritt nach der Tabelle bei den Wurzeln der mittleren quadratischen Schätzfehler (*RMSE*) auch hier eine geringfügige Verschlechterung von 12,56 % auf. Dies ist vorrangig auf die Schätzung der *n*- und *d*-Komponente zurückzuführen. In der *e*-Komponente hingegen sind Verbesserungen um 7 % zu beobachten. Der Abb. 9.11 ist zu entnehmen, dass die kumulativen Verteilungsfunktionen der auf Basis der *GPS*-Daten bestimmten Positionsschätzfehler und denen, die bei der Wahl konstanter Rauschvarianzen resultiert, einen ähnlichen Verlauf haben und sich sogar bei  $\tilde{\epsilon}_p \approx 5,8\text{ m}$  schneiden. An der charakteristischen Stelle  $P(\epsilon_{\text{Konst};p} < 4,805\text{ m}) = P(\epsilon_{\text{GPS};p} < 5,049\text{ m}) = 0,67$  liegt nur eine geringe Verbesserung gegenüber den Positionsschätzungen vor, die allein durch das satellitengestützte Teilsystem gewonnen wurden.<sup>12</sup> Die Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt (Geschwindigkeitsfehler) spiegeln sich hier nicht vollständig wider, was auf den Einfluss der barometrischen Stützhöhen zurückzuführen ist. Diese wirken den ungünstigen Annahmen entgegen, die für die Rauschvarianzen getroffen wurde, und führen dazu, dass die Auswirkungen auf die vertikale Positionskomponente gering bleiben.

Die Ergebnisse zum KM zeigen dagegen erneut die Überlegenheit eines Verfahrens, das die Zeitvarianz – wenn auch nur indirekt – berücksichtigt. In 67 % aller Fälle liegt der betragsmäßige Fehler  $\epsilon_{\text{KM};p}$  unterhalb von 2,962 m, wobei der *RMSE* der Position 2,79 m beträgt und damit ca. 43 % über der Genauigkeit der *GPS*-Schätzungen liegt.<sup>13</sup> Die Höhenstützung durch das barometrische Teilsystem spielt hier ebenfalls eine wichtige Rolle. Durch diese wird eine Verbesserung in der Vertikalkomponente von ca. 83 % erreicht. Die Verbesserungen bei den Horizontalkomponenten liegen ebenfalls bei bis zu 6,66 % gegenüber den *GPS*-Positionsschätzfehlern.

Die Unterschiede in den Verbesserungen durch das MD und den SEM sind zwar gering, dennoch ist der SEM im Mittel besser. Beide weisen eine höhere Schätzgenauigkeit als das KM auf und liegen mit ca. 47,56 % und 48,75 % Verbesserung jeweils 5 % – 6 % über der, die durch das KM erreicht

<sup>12</sup>  $\epsilon_{\text{GPS};p}$  und  $\epsilon_{\text{Konst};p}$  bezeichnen hier die betragsmäßige Abweichung in der Position unter Verwendung der satellitenbasierten Teilsystems allein bzw. unter Verwendung des *INS/GPS*-Navigationssystems, wobei die Systemrauschkovarianzmatrix konstant gewählte Parameter enthält.

<sup>13</sup>  $\epsilon_{\text{KM};p}$  bezeichnet hier die betragsmäßige Abweichung in der Position unter Verwendung des KM.



wird. Die Summenhäufigkeitsfunktionen spiegeln dieses Resultat ebenfalls wider. Für den charakteristischen Wert von  $P(\epsilon_{\text{SEM};p} < \tilde{\epsilon}_p = 2,672 \text{ m}) = 0,67$  ist herauszustellen, dass 67 % aller Schätzungen einen um ca. 10 cm geringeren betragsmäßigen Fehler gegenüber  $P(\epsilon_{\text{MD};p} < \tilde{\epsilon}_p = 2,731 \text{ m})$  aufweisen.<sup>14</sup> Des Weiteren treten in der  $n$ - und  $e$ -Komponente deutlich geringere Positionsschätzfehler bei diesen beiden Ansätzen auf als es beim KM der Fall ist. Bei der  $e$ -Komponente sticht der SEM hervor, da er hier sogar eine Verbesserung um mehr als 4,5 % gegenüber dem MD aufweist, was hier einer relativen Genauigkeitssteigerung von ca. 8 cm entspricht.

Insgesamt bestätigen die Ergebnisse dieses Abschnitts, dass eine Schätzung der Rauschvarianzen sinnvoll ist. Für die Geschwindigkeits- und Positionsschätzungen konnten deutliche Verbesserungen gegenüber der Annahme konstanter Systemrauschvarianzen festgestellt werden. Obwohl die Verbesserungen im Vergleich zum KM und dem MD hier im Zentimeter-Bereich liegen, hat sich der SEM dabei als das Verfahren herausgestellt, das zu den größten Genauigkeiten in der Parameterschätzung und der Navigationslösung führt.

### 9.2.2 Tiefpassfilterung der Inertialsensordaten

Die bisherigen Erkenntnisse wurden gewonnen, indem auf eine Tiefpassfilterung der Inertialsensordaten verzichtet wurde. In diesem Teilkapitel werden Ergebnisse präsentiert, bei denen die Daten der IME im Vektor  $\mathbf{z}_{\text{IME}}$  einer zusätzlichen Tiefpassfilterung mit der Grenzfrequenz 5 Hz unterzogen wurden. Als Tiefpassfilter wurde hier auf ein *Finite Impulse Response (FIR)*-Filter zurückgegriffen, wobei eine BLACKMAN-Fensterfunktion

$$0,42 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2k\pi}{K}\right) + 0,08 \cdot \cos\left(\frac{4k\pi}{K}\right) \quad (9.14)$$

zum Einsatz kam, bei der  $0 \leq k \leq K$  der Signalindex des  $K$  langen Eingangssignals ist. Diese zeichnet sich durch eine sehr hohe Flankensteilheit beim Übergang in den Dämpfungsbereich aus [SS00]. Der Fokus liegt in diesem Abschnitt vorrangig auf dem MD und dem SEM.

In Tab. 9.10 (a) und (b) sind die *RMSE* der geschätzten Parameter des Inertialsensorrauschens der Beschleunigungs- und Drehratensensortriade sowie die Standardabweichungen der Schätzfehler eingetragen. Da die Inertialsensordaten tiefpassgefiltert wurden, wurde für das KM und MD im Vorfeld eine entsprechende Unterabtastung vorgenommen. Aus diesem Grund mussten deren Schätzungen vor der Übernahme in das KALMAN-Filter auch entsprechend der NYQUIST-Frequenz 10 Hz skaliert werden. Idealerweise sollten das MD und der SEM die gleichen Rauschvarianzen schätzen. Durch die verringerte Signalleistung und die geringe Korrelationszeit des GMP weisen die Schätzungen allerdings Abweichungen auf. Als Referenzwerte wurden in den Tabellen dennoch die Werte des GMP herangezogen, die zur Datengenerierung verwendet wurden.

Während das KM die entsprechenden Parameter weiterhin sehr hoch schätzt (selbst mit Berücksichtigung des entsprechenden Skalierungsfaktors), weisen die durch das MD geschätzten Parameter nur noch eine geringe Abweichung von den Referenzgrößen des ursprünglichen GMP auf, wie der Ausschnitt in Abb. 9.12 zeigt. Dennoch ist das MD nicht in der Lage vollständig zwischen der Trajektoriendynamik und den verbleibenden Rauschanteilen zu differenzieren. Bis auf die Werte für die  $z$ -Komponente  $\sigma_{\text{FF};\omega,z}$  weist die Tabelle daher deutlich geringere Unterschiede zwischen den Abweichungen beim MD und denen des SEM auf als es bei den nicht tiefpassgefilterten Sensordaten der Fall war.

<sup>14</sup>  $\epsilon_{\text{SEM};p}$  und  $\epsilon_{\text{MD};p}$  bezeichnen hier die betragsmäßige Abweichung in der Position unter Verwendung des SEM bzw. unter Verwendung des MD.



(a) Abweichungen der Parameterschätzungen (Beschleunigungssensortriade)

$\sigma_{FF;a}$		INS/GPS-Variante	
		MD	SEM
$RMSE_{\epsilon_{\sigma_{FF;a}}}$ [ $1 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$ ]	$x$ -Achse	1,59	0,616
	$y$ -Achse	1,532	0,695
	$z$ -Achse	1,598	0,809
	<b>Gesamt</b>	<b>2,726</b>	<b>1,232</b>
$\sigma_{\epsilon_{\sigma_{FF;a}}}$ [ $1 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$ ]	$x$ -Achse	1,091	0,581
	$y$ -Achse	0,999	0,655
	$z$ -Achse	1,016	0,787
	<b>Gesamt</b>	<b>1,795</b>	<b>1,177</b>

(b) Abweichungen der Parameterschätzungen (Drehratensensortriade)

$\sigma_{FF;\omega}$		INS/GPS-Variante	
		MD	SEM
$RMSE_{\epsilon_{\sigma_{FF;\omega}}}$ [ $1 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ/\text{s}$ ]	$x$ -Achse	4,727	2,027
	$y$ -Achse	4,928	2,013
	$z$ -Achse	4,795	4,797
	<b>Gesamt</b>	<b>8,344</b>	<b>5,583</b>
$\sigma_{\epsilon_{\sigma_{FF;\omega}}}$ [ $1 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ/\text{s}$ ]	$x$ -Achse	2,025	1,805
	$y$ -Achse	2,162	1,697
	$z$ -Achse	2,165	2,88
	<b>Gesamt</b>	<b>3,669</b>	<b>3,799</b>

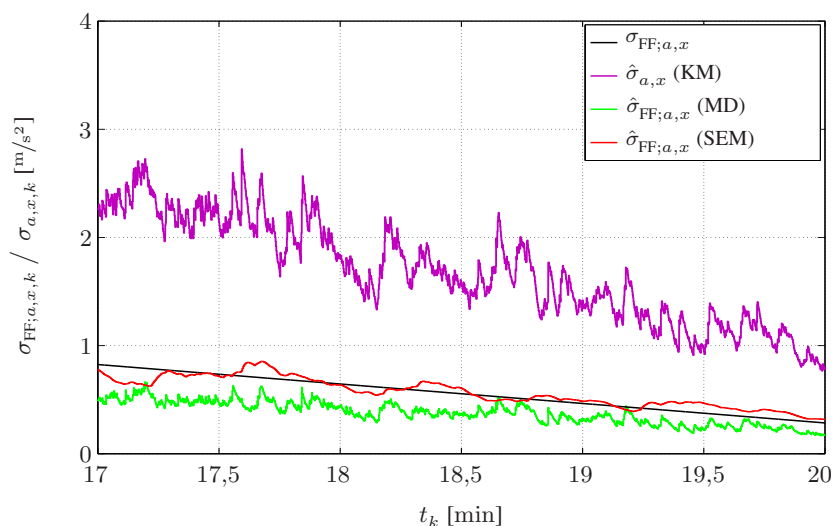
Tabelle 9.10:  $RMSE$  der Parameterschätzungen und Standardabweichungen der Parameterschätzfehler bezüglich der Rauschparameter des zur Datengenerierung angenommenen GAUSS-MARKOV-Prozesses bei tiefpassgefilterten Inertialsensordaten

Abbildung 9.12: Geschätzte Rauschparameter eines zeitlich korrelierten Beschleunigungssensorrauschens unter Verwendung künstlich generierter Daten (mit Tiefpassfilterung)

Eine zuverlässigere Aussage über die Qualität der Schätzungen der einzelnen Verfahren bei vorab tiefpassgefilterten Sensordaten soll im Folgenden mit Betrachtung der Navigationslösung erfolgen. Die Tab. 9.11 weist deutliche Unterschiede zu Tab. 9.8 auf. Im Mittel ist eine Verbesserung in den Geschwindigkeitsschätzungen von 22 % zu beobachten, was im Wesentlichen auf die Tiefpassfilterung zurückzuführen ist. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Verfahren sind ebenfalls deutlich reduziert. Die Gesamtverbesserung, die durch den SEM gegenüber dem MD erreicht wird, liegt nur noch bei knapp 1 %, allerdings über 23 % gegenüber den *GPS*-Geschwindigkeiten.

Während die Unterschiede bei den Geschwindigkeitsschätzungen gering sind, zeigt sich eine signifikante Differenz bei den Positionsschätzungen (siehe Tab. 9.11). Das KM und das MD weisen ähnliche Werte bei den  $RMSE$  der Positionsschätzungen auf. Das MD führt sogar bei allen Kompo-

Methode		Geschwindigkeitsschätzfehler ( <i>RMSE</i> ) (Prozentuale Verbesserung gegenüber <i>GPS</i> )			
		$RMSE_{\epsilon_{v,n}}$ [1 · 10 <sup>-1</sup> m/s]	$RMSE_{\epsilon_{v,e}}$ [1 · 10 <sup>-1</sup> m/s]	$RMSE_{\epsilon_{v,d}}$ [1 · 10 <sup>-1</sup> m/s]	$RMSE_{\epsilon_v}$ [1 · 10 <sup>-1</sup> m/s]
<i>GPS</i>		<b>1,21</b>	<b>1,25</b>	<b>2,13</b>	<b>2,85</b>
<i>INS/GPS</i> - Variante	Konst.	2,55 ( <b>-110,4 %</b> )	1,35 ( <b>-8 %</b> )	5,19 ( <b>-143,2 %</b> )	5,94 ( <b>-108,42 %</b> )
	KM	1,08 ( <b>10,74 %</b> )	1,18 ( <b>5,6 %</b> )	1,54 ( <b>28 %</b> )	2,22 ( <b>22,11 %</b> )
	MD	1,09 ( <b>9,92 %</b> )	1,17 ( <b>6,4 %</b> )	1,52 ( <b>28,7 %</b> )	2,21 ( <b>22,46 %</b> )
	SEM	1,07 ( <b>11,57 %</b> )	1,15 ( <b>8 %</b> )	1,53 ( <b>28,3 %</b> )	2,19 ( <b>23,16 %</b> )

Tabelle 9.11: Geschwindigkeitsschätzfehler und prozentuale Verbesserungen der Geschwindigkeitsschätzungen bei der Navigationsfilterung mit sequenzieller Parameterschätzung gegenüber den *GPS*-Schätzungen

Methode		Positionsschätzfehler ( <i>RMSE</i> ) (Prozentuale Verbesserung gegenüber <i>GPS</i> )			
		$RMSE_{\epsilon_{p,n}}$ [m]	$RMSE_{\epsilon_{p,e}}$ [m]	$RMSE_{\epsilon_h}$ [m]	$RMSE_{\epsilon_p}$ [m]
<i>GPS</i>		<b>1,91</b>	<b>2,03</b>	<b>3,996</b>	<b>4,87</b>
<i>INS/GPS</i> - Variante	Konst.	1,98 ( <b>-3,6 %</b> )	1,87 ( <b>7,9 %</b> )	3,49 ( <b>12,67 %</b> )	4,42 ( <b>9,16 %</b> )
	KM	1,656 ( <b>13,18 %</b> )	1,802 ( <b>11,11 %</b> )	0,451 ( <b>88,7 %</b> )	2,49 ( <b>48,9 %</b> )
	MD	1,661 ( <b>12,92 %</b> )	1,808 ( <b>10,78 %</b> )	0,45 ( <b>88,6 %</b> )	2,49 ( <b>48,8 %</b> )
	SEM	1,584 ( <b>16,95 %</b> )	1,73 ( <b>14,39 %</b> )	0,45 ( <b>88,7 %</b> )	2,39 ( <b>50,85 %</b> )

Tabelle 9.12: Positionsschätzfehler und prozentuale Verbesserungen der Positionsschätzungen bei der Navigationsfilterung mit sequenzieller Parameterschätzung gegenüber den *GPS*-Schätzungen

nenten zu etwas schlechteren Ergebnissen als bei Verwendung des KM. Beim MD wird den Stützgrößen nun zuwenig vertraut, wodurch im Mittel die Werte der Schätzfehlervarianzen auch nicht mehr mit denen der wahren Schätzfehler übereinstimmen. Das SEM hingegen ist den anderen Verfahren aufgrund der Genauigkeiten in der *n*- und *e*-Komponente deutlich überlegen, denn es steht a priori-Wissen in Form des Systemmodells zur Verfügung. Im Mittel führt es zu einer Verbesserung in der Positionsgenauigkeit von ca. 12 cm gegenüber dem Fall, in dem keine Tiefpassfilterung durchgeführt wird. Mit Tiefpassfilterung liegt der Unterschied zwischen den Schätzungen durch das MD und denen des SEM ebenfalls bei ca. 10 cm.

### 9.2.3 Ergebnisse unter Verwendung von Felddaten

Die Verfügbarkeit annähernd fehlerfreier Referenzdaten stellt vor allem in einer KFZ-Umgebung ein Problem dar (z. B. durch eine von Vibrationen entkoppelte Sensorumgebung, ideale Positions- und Geschwindigkeitsinformationen sowie Kartendaten). Diese könnten bestenfalls mit einer kostenintensiven Ausrüstung bestimmt werden. Obwohl diese nicht zur Verfügung stand, sollen die Parameterschätzverfahren dennoch einmal in einem realen Umfeld betrachtet werden. Dazu wurde wieder auf die im Feld aufgenommenen Sensormessungen zurückgegriffen, aus denen die Trajektorie nach Abb. 9.3 resultierte. Wie zuvor kam die vollständige *INS/GPS*-Filterstruktur mit Tiefpassfilterung der

IME-Ausgangsgrößen zum Einsatz.

Aufgrund der bisherigen Ergebnisse ist zu erwarten, dass die realisierten Verfahren zu einer Verbesserung der *INS/GPS*-Navigationslösung führen. Wegen fehlender Referenzdaten kann bei den Felddaten nicht überprüft werden, ob die geschätzten Geschwindigkeiten den wahren Werten entsprechen. Die Position soll an dieser Stelle anhand des vorliegenden Kartenmaterials überprüft werden. Die eigentlichen Vorteile der *INS/GPS*-Integration liegen vor allem in der Robustheit gegenüber *GPS*-Signalstörungen und -ausfällen, wie sie bereits in Kap. 9.1 untersucht worden sind. Bisher wurde allerdings zur Stützung des SEM immer auf vorhandene *GPS*- und Magnetfeldsensormessungen zurückgegriffen. Die damit zusammenhängenden Probleme wurden bereits in Kap. 7.1.3 behandelt. Bei den Felddaten hat sich im vorliegenden Fall jedoch gezeigt, dass die Magnetfeldsensoren trotz der im Vorfeld vorgenommenen Kalibrierung unzuverlässige Sensordaten liefert. Durch starke Schwankungen des magnetischen Feldes aufgrund des Motors, der Karosserie und baulichen Einrichtungen am Fahrbahnrand, konnten keine zuverlässigen Stützinformationen für die Fehlerfilterung anhand dieser Daten gewonnen werden. Eine direkte Stützung der Lagekomponenten des Zustandsvektors war somit nicht möglich. Aus diesem Grund wurde in dem folgenden Abschnitt auch auf eine Schätzung des Vektors  $\mathbf{q}_{FF;\omega,k}$  durch den SEM verzichtet und stattdessen eine Kombination der zwei Verfahren (SEM und MD) eingesetzt.

**GPS-Fehler** Neben Signalausfällen treten häufig auch Probleme auf, welche auf die in Anhang A.1 beschriebenen *Common-Mode*- oder *Non-Common-Mode*-Fehler, wie z. B. eine fehlerhafte Synchronisation, zurückzuführen sind und im *GPS*-Empfänger selbst nicht ausreichend kompensiert werden. Für diesen Fall ist ein weiteres Beispiel aus der Trajektorie in Abb. 9.3 in dem Kartenaus-

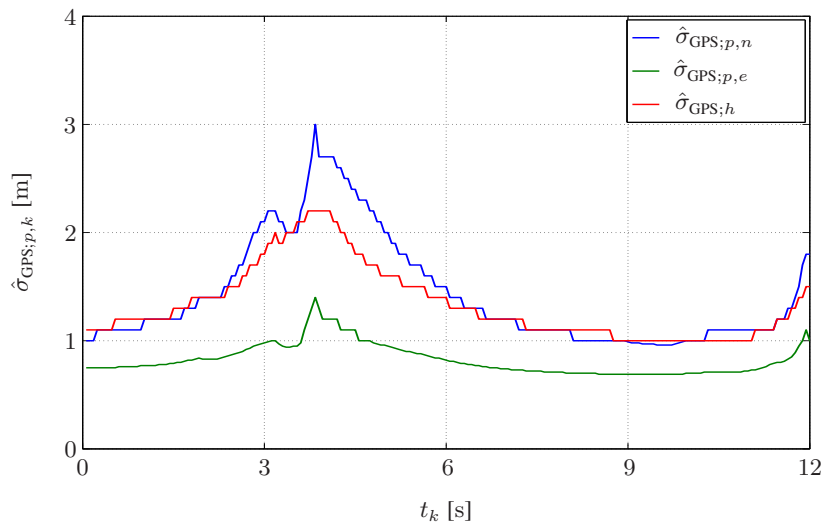


Abbildung 9.13: Positionsschätzgenauigkeit des *GPS*-Empfängers zum Zeitpunkt eines *Common-Mode*- oder *Non-Common-Mode*-Fehlers

schnitt 9.14 (a) dargestellt. Dieser zeigt einen Teil der auf den *GPS*-Positionen basierenden Trajektorie der Messfahrt. Obwohl hier aus darstellungstechnischen Gründen eine durchgängige Linie eingezeichnet ist, sei darauf hingewiesen, dass die *GPS*-Daten mit einer Rate von  $4 \frac{1}{s}$  vorlagen. Die Abb. 9.13 illustriert die vom *GPS*-Empfänger ausgegebenen prognostizierten Schätzfehler der einzelnen Positionskomponenten für den Kartenausschnitt. Diese Werte, die auch als Standardabweichungen des Messrauschens im Messmodell dienten, zeigen vor allem in der Nord- und Vertikalkomponente

eine deutlichen Anstieg. Besonders die Genauigkeit in der Nordkomponente nimmt hier zwischenzeitlich um den Faktor Drei ab.

Die Abb. 9.14 (b) zeigt den gleichen Trajektorienabschnitt, wobei die Filterung unter Zuhilfenahme des KM-Parameterschätzverfahren durchgeführt wurde. Die Aktualisierungsrate der Navigationslösung lag bei  $100\ 1/s$ . Gleiches galt beim MD, wobei die resultierenden Positionsschätzungen in Abb. 9.14 (c) dargestellt sind. In Teilbild (d) ist schließlich noch das Ergebnis abgebildet, das mit Hilfe des SEM in Kombination mit dem MD gewonnen wurde (der SEM wurde zur Schätzung von  $\mathbf{q}_{FF;a,k}$  und das MD zur Schätzung von  $\mathbf{q}_{FF;\omega,k}$  eingesetzt). Es ist deutlich zu erkennen, dass die Verfahren

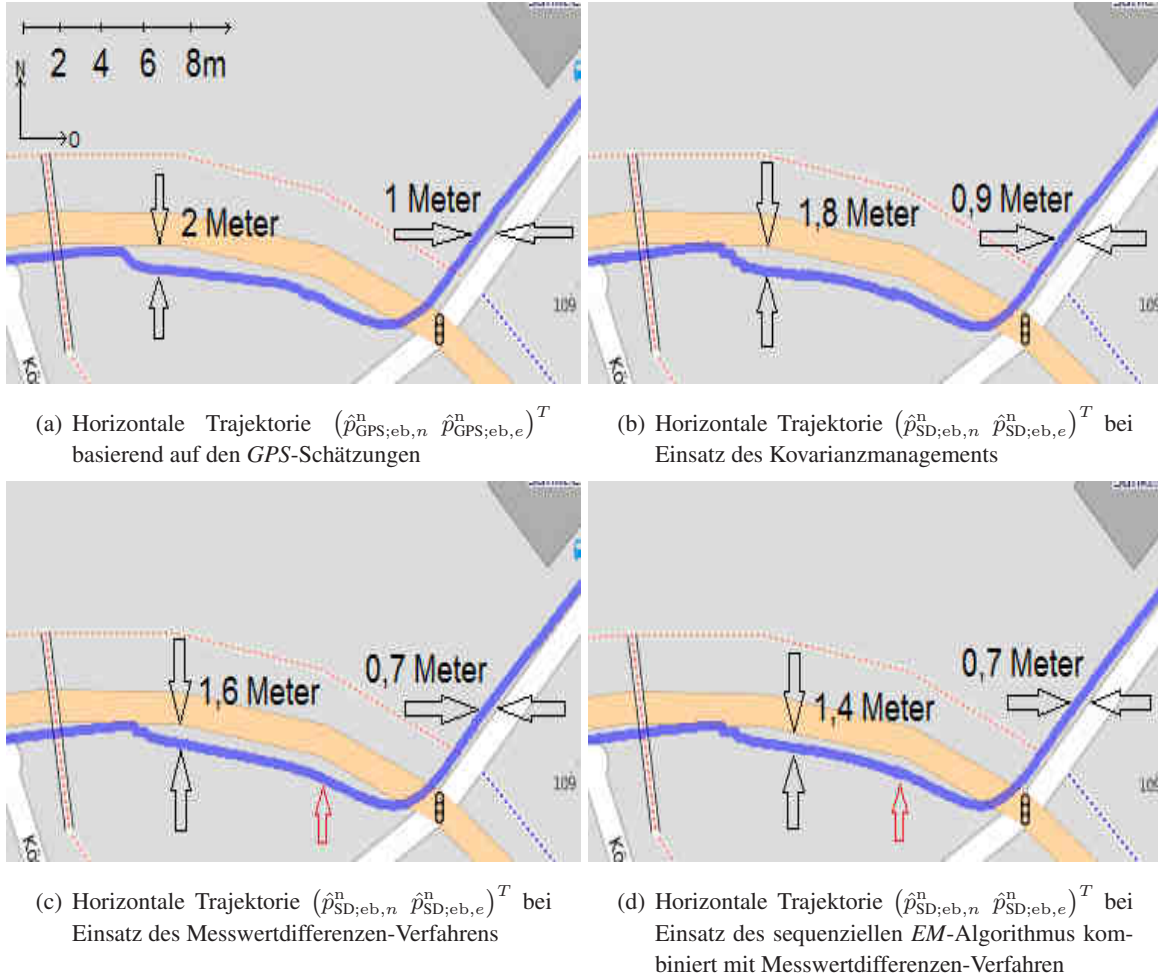


Abbildung 9.14: Auswirkungen eines GPS-Signalfehlers auf die Navigationslösung unter Verwendung von Felddaten (Bildaten von *OpenStreetMap*, veröffentlicht unter Lizenz CC-BY-SA 2.0)

zu einer unterschiedlichen Kompensation des Fehlers in den Stützdaten führen. Die sprunghafte Abweichung von ca. 2 m von der Referenzlinie wird bei der Kombination SEM+MD besser kompensiert als es beim KM der Fall ist. Die Abbildungen verdeutlichen, dass die Unterschiede in den Positionsschätzungen bis zu 60 cm betragen. Der rote Pfeil in den beiden unteren Abbildungen weist auf eine markante Stelle im Trajektorienverlauf hin, die in der rechten Abbildung deutlich näher an dem Referenzverlauf der Karte liegt als es in der linken Abbildung der Fall ist.

Bei der dargestellten Linkskurve im jeweils rechten Teil der Abb. 9.14 (a) – (d) fällt ebenfalls

auf, dass die Trajektorie mit Hilfe des kombinierten Verfahrens näher an der weißen Referenzlinie verläuft als es bei den anderen Trajektorien der Fall ist. Ein Vergleich mit entsprechenden Satellitenbildern (z. B. GoogleMaps) belegt, dass die Trajektorie bei Teilbild (d) direkt auf der rechten Fahrbahn liegt.<sup>15</sup> Die Zuverlässigkeit der Rauschvarianzschätzungen  $\hat{q}_{FF;a,k}$  durch den SEM einerseits und die des MD zur Bestimmung von  $\hat{q}_{FF;\omega,k}$  andererseits führen hier zu einem gegenüber Messfehlern robusten Verhalten und einer höheren Positionsschätzgenauigkeit als bei ausschließlicher Verwendung der GPS-Informationen des eingesetzten ublox-Empfängers.

**Vibrationseinflüsse** Die Abb. 9.15 (a) zeigt abschließend einen ausgewählten Trajektorienausschnitt, in dem aufgrund des Straßenbelags (Schlaglöcher und Rollsplit) stärkere Vibrationen in den IME-Sensorsignalen auftraten (eingekreiste Stelle) als es bei einem Fahrbahnbelag aus Teer der Fall ist.

Vergleicht man zunächst den Verlauf der Trajektorie oberhalb des eingekreisten Teilstücks, so sind kaum Unterschiede zwischen der linken und rechten Abbildung zu erkennen. Die Fehler in der Navigationslösung scheinen gleichermaßen kompensiert zu werden. Treten allerdings zusätzliche Stö-



(a) Horizontale Trajektorie  $(\hat{p}_{SD;eb,n}^n \ \hat{p}_{SD;eb,e}^n)^T$  unter der Annahme einer konstanten Systemrauschkovarianzmatrix

(b) Horizontale Trajektorie  $(\hat{p}_{SD;eb,n}^n \ \hat{p}_{SD;eb,e}^n)^T$  bei Einsatz des sequenziellen EM-Algorithmus kombiniert mit Messwertdifferenzen-Verfahren

Abbildung 9.15: Auswirkungen von Vibrationen auf die Navigationslösung unter Verwendung von Felddaten (Bildraten von *OpenStreetMap*, veröffentlicht unter Lizenz CC-BY-SA 2.0)

rungen auf, so zeigt Abb. 9.15 (a) deutlich, dass die Annahme einer konstanten Systemrauschkovarianzmatrix nachteilig für die Positionsschätzungen des *Strapdown*-Algorithmus sein kann. Die starken Schwankungen werden durch das kombinierte Verfahren besser kompensiert und die Trajektorie verläuft etwas näher an der weißen Referenzlinie der Karte. An der mit dem Pfeil markierten Stelle liegt zwischen dem Verlauf in der linken und der rechten Abbildung laut Kartenmaterial eine Differenz von ca. 20 cm (Ostpositionskomponente).

## 9.2.4 Gegenüberstellung der sequenziellen Schätzverfahren

### 9.2.4.1 Vor- und Nachteile

Die drei hier vorgestellten Verfahren zur sequenziellen Varianzschätzung von Zufallsprozessen haben individuelle Vor- und Nachteile aufgezeigt, die abschließend noch einmal erörtert und anhand der

<sup>15</sup>Aus lizenzrechtlichen Gründen kann dies hier nicht dargestellt werden.



vorliegenden Ergebnisse analysiert werden sollen.

**Kovarianzmanagement** Das KM ist ein rekursiver Mittelwert- und Varianzschätzer unter der Annahme stationärer (ergodischer) Prozesse, der unabhängig von Bewegungsmodellen oder Differenzgleichungen, abtastwertweise zuverlässige Schätzwerte liefert, sofern die in Kap. 7.2.3 erläuterten Modifikationen berücksichtigt werden. Dazu zählt vor allem das sporadische Zurücksetzen der heuristischen Parameter  $\zeta$  und  $\tilde{\zeta}$  in den Gl. (7.72) und (7.73). Die simple Struktur des Schätzers erlaubt eine mit sehr geringem Mehraufwand verbundene Integration in das vorhandene Navigationsfilter. Die Ergebnisse haben hier zwar deutlich gemacht, dass die zeitvarianten Größen zu hoch geschätzt werden, wenn unvorhergesehene Störungen auftreten, die Auswirkungen auf die Navigationslösung halten sich jedoch in Grenzen.

Ein bedeutender Nachteil des Verfahrens ist, dass das Modell eines zeitlich korrelierten Rauschprozesses (hier eines GMP) nicht explizit berücksichtigt werden kann. Bias und Skalierungsfehler wirken sich direkt auf das Schätzergebnis aus. Das Verfahren kann nicht vollständig zwischen Trajektorien-dynamik und Rauschprozessen unterscheiden. Eine Filterstruktur wie im vorliegenden Fall, bei der sämtliche Zufallsprozesse nicht parallel verarbeitet werden können, basiert i. d. R. auf modellabhängige Varianzen. Werden Varianzschätzungen, die den zugrunde liegenden Modellen oder Messungen nicht entsprechen, dennoch für das Zustandsmodell eines zeitvarianten Filters verwendet, können sie sich auch negativ auf die vom LKF geschätzte a posteriori-Verteilung und damit auf die gesamte Navigationslösung auswirken. Durch die Rückkopplung des Zustandsvektors des FF zur Korrektur der *Strapdown*-Berechnungen werden falsche Annahmen bzgl. der Verteilung der beteiligten Zufallsvariablen getroffen, was zur Folge haben kann, dass sich die dadurch entstehenden Fehler auf alle nachfolgenden Lösungen auswirken.

**Messwertdifferenzen-Verfahren** Das zustandsmodellbasierte MD kann hingegen die unbekannten Parameter eines zeitlich korrelierten Rauschprozesses bestimmen. Das Zustandsmodell, das auch für das FF verwendet wird, wird zwar explizit berücksichtigt, dennoch können sich in der Schätzung weitere Einflüsse bemerkbar machen. Wie die Ergebnisse in diesem Kapitel zeigen, werden die gesuchten Rauschvarianzen ebenfalls zu hoch geschätzt, wenn auf eine Tiefpassfilterung verzichtet wird. Die Trajektorien-dynamik, d. h. der reine Bewegungsanteil, kann nicht vollständig zur Berechnung der Korrelationen  $r_{\Delta n_i \Delta n_{i+k}}^{(i')}$ ,  $i \in \{0, 1\}$  in Gl. (7.76) eliminiert werden. Des Weiteren wird nicht berücksichtigt, dass am Eingang des LKF „unterabgetastete“ Differenzmesswerte anliegen und daher auch die Korrektur nur mit entsprechender Rate erfolgt. Andererseits zeigt sich, dass hier die Überschätzung der Varianzen im Gegensatz zu einer Unterschätzung (wie bei der Annahme einer konstanten Kovarianzmatrix) weniger problematisch ist.

Ein Vorteil ist die einfache Struktur des Verfahrens, die zu einem sehr geringen Mehraufwand in der *INS/GPS*-Navigationsfilterung führt.

**Sequenzieller Expectation-Maximization-Algorithmus** Der SEM ist ebenfalls zustandsmodellbasiert und hat als BAYES'scher Schätzer den Vorteil, dass er genau die Parameter schätzen kann, die für den Filterprozess benötigt werden. Der Algorithmus stellt sich auf das Navigationsfilter ein und liefert die optimalen Schätzwerte, da er auf dessen a posteriori-Schätzungen beruht.

Ein Problem des SEM hat sich bei den Felddaten gezeigt: Sind durch unzuverlässige Messwerte die Messrauschvarianzen im Vergleich zu den Systemrauschvarianzen sehr hoch, ist der SEM nicht mehr in der Lage, die Systemrauschvarianzen zu schätzen. Dies tritt im vorliegenden Fall bei Ver-



wendung der Magnetfeldsensordaten auf. Bei den *GPS*-Schätzungen stellt dies hingegen kein Problem dar, da die Messrauschvarianzen durch eine hohe Empfängerqualität relativ niedrig sind. Wie in [EMRH09] anhand der *RICCATI*-Differenzengleichung festgestellt wurde, nähern sich die Schätzungen der Rauschkovarianzmatrizen der Systemgleichung genau dann den wahren Werten an, wenn die Messrauschvarianzen zu vernachlässigen sind.

#### 9.2.4.2 Komplexität

Im Folgenden sollen die durchschnittlichen Prozesslaufzeiten der einzelnen Parameterschätzverfahren sowie der anderen Filterkomponenten gegenüber gestellt werden, wobei die vollständige Implementierung der Filterstruktur in Matlab erfolgte. Dies soll als Anhaltspunkt dienen, um die Echtzeitfähigkeit des Systems beurteilen zu können. Die Abb. 9.16 (a) zeigt ein Kreisdiagramm mit den prozentualen Anteilen der wichtigsten Filterkomponenten aus Abb. 5.1 gemessen an der Gesamtdauer eines Filterzyklus (Zyklus zur Verarbeitung eines vollständigen IME-Messvektors bestehend aus Beschleunigungs-, Drehraten- und Magnetfeldsensordaten). Das satellitengestützte Teilsystem wurde

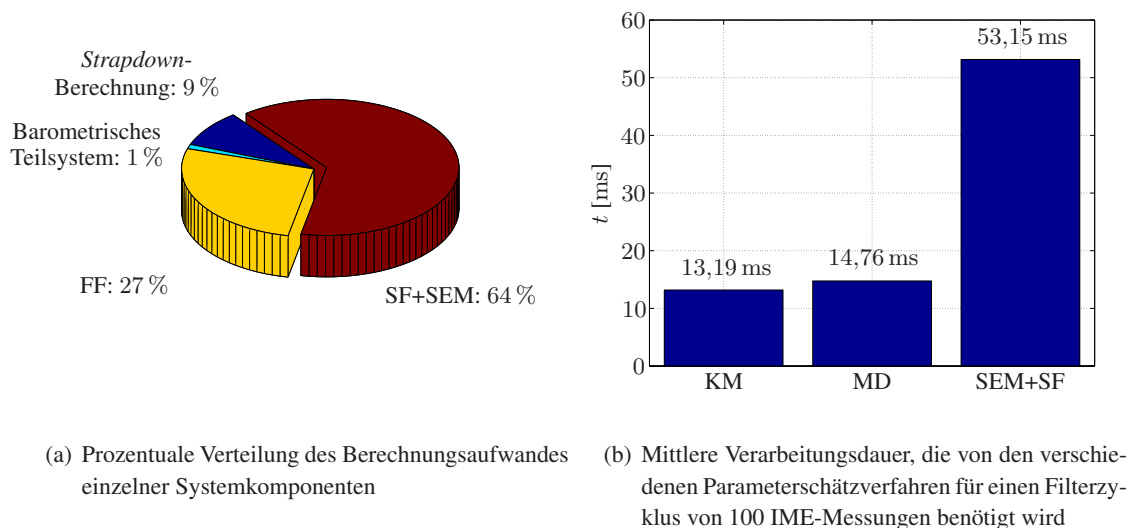


Abbildung 9.16: Prozentuale Verteilung des Verarbeitungsaufwandes einzelner Filterkomponenten und Verarbeitungsdauer der Parameterschätzverfahren für einen Filterzyklus

hier nicht berücksichtigt. Die Messwertaktualisierung erfolgte beim FF und beim SF mit 4/s. Es zeigt sich, dass das barometrische Teilsystem lediglich 1 % des gesamten Berechnungsaufwandes erfordert. Dies hängt allerdings von der Größe der topografischen Datenbank ab, die hier nur einige 100 Einträge umfasst. Man könnte den Aufwand für diese Komponente jedoch weiterhin gering halten, indem die Datenbank in Kategorien (z. B. nach Gemeinden) aufgeteilt wird und nur die Datensätze verwendet werden, die der aktuellen Position am wahrscheinlichsten zuzuordnen sind. Dieses Verfahren wird auch beim *MM* mit Straßenkarten angewendet.

Die *Strapdown*-Berechnungen liegen mit 9 % bei einem Drittel des Aufwandes, der für das FF nötig ist. Ausschlaggebend beim FF ist dabei die Berechnung der Inversen der Autokovarianzmatrix in Gl. (B.18).

Durch den SEM und das SF, das zwar gegenüber dem FF einen reduzierten Systemzustandsvektor aufweist, aber wie in Kap. 7.1.3 beschrieben zur Berechnung der *Lag-One*-Kovarianzmatrix

erweitert werden musste, fallen ca. 64 % des gesamten Verarbeitungsaufwandes auf diese Komponenten. Beim SEM spielt die Konvergenzgeschwindigkeit und damit der Aufwand zur Berechnung der ARMIJO-Schrittweite die entscheidende Rolle, da die optimale Schrittweite in jedem Iterationsschritt wiederum auf der wiederholten Berechnung der Zielfunktion beruht [Fro04]. Trotz der Modifikationen nach Kap. 7.1.2 führt auch die Berechnung der Inversen in (7.47) und die CHOLESKY-Zerlegung zur Eigenwertberechnung der HESSE-Matrix zu einer hohen Komplexität.

Die Abb. 9.16 (b) stellt die benötigte Verarbeitungsdauer der Parameterschätzverfahren gegenüber. Es sind die Zeiten angegeben, die benötigt wurden, um 100 IME-Messungen (entspricht einem Datenblock von 1 s Länge) zu verarbeiten. Während das KM und das MD vom Aufwand her vergleichbar sind, hebt sich die Sekundärfilterung mit dem SEM deutlich ab. Die Berechnungen benötigen mit 53,15 ms im Mittel mehr als dreimal so lange wie die beiden anderen Verfahren. Dennoch zeigt sich, dass unter Berücksichtigung der gesamten Filterstruktur selbst der SEM mit einer Verarbeitungszeit von weitaus weniger als 1 s selbst unter Matlab noch echtzeitfähig bleibt. Höhere IME-Datenraten oder auch eine Erweiterung des KALMAN-Filters, um beispielsweise *Non-Common-Mode*-Fehler des GPS-Empfängers besser kompensieren zu können, würden selbst in Kombination mit diesem Verfahren keine Einschränkung hinsichtlich der Echtzeitfähigkeit bedeuten.

### 9.2.4.3 Fazit

Mit Betrachtung der Komplexität und der Verbesserungen, die in der Navigationslösung mit dem SEM gegenüber den anderen Verfahren gewonnen wurden, kann man zusammenfassen, dass sich dessen Einsatz im Rahmen einer schwach gekoppelten Navigationsfilterstruktur unter bestimmten Voraussetzungen lohnt:

- Der Anwendungsfall erfordert relative Verbesserungen in der Positionsgenauigkeit, die im Zentimeter-Bereich liegen.
- Es ist a priori-Wissen auf Basis von Feldmessungen vorhanden.
- Die Zustandsübergangsparameter des Systemmodells, das zur Rauschprozessmodellierung eingesetzt wird, sind nur annähernd bekannt.
- Die Rechenkomplexität spielt eine untergeordnete Rolle, da ausreichende Kapazität vorhanden ist.

Soll dagegen ein einfach aufgebautes und wenig rechenintensives Verfahren eingesetzt werden, so weist der SEM trotz seiner konsistenten Verbesserungen bei der Parameterschätzung nur geringfügige Vorteile gegenüber dem MD oder dem modifizierten KM auf.

An dieser Stelle kann dennoch hervorgehoben werden, dass es unabhängig von der Komplexität und der Qualität der Parameterschätzung im Rahmen dieser Arbeit gelungen ist, den ursprünglich blockweise arbeitenden EM-Algorithmus so zu modifizieren, dass auch eine sequenzielle Schätzung von Systemrauschvarianzen möglich ist. Zudem stellt das schwach gekoppelte Navigationsfilter im Vergleich zu einem geschlossenen Filteransatz eine komplexe Struktur dar, da nicht absolute Navigationsgrößen, sondern deren Fehler gefiltert werden und geeignete Stützgrößen nicht zu jedem Zeitpunkt zur Verfügung stehen. Damit basieren ebenso die Parameterschätzungen des SEM nicht auf absolute Filtergrößen, sondern auf deren Fehlern. Eine zusätzliche Herausforderung stellt für den SEM zudem das sporadische Zurücksetzen des Systemzustandsvektors auf einen Nullvektor dar.

## Zusammenfassung

Die Ergebnisse, die in diesem Kapitel präsentiert wurden, basieren auf künstlich erstellten Datensätzen sowie auf Messungen, die im Rahmen von Messfahrten in der Stadt Paderborn aufgenommen wurden. Im ersten Teil wurde das vollständige Navigationsfilter ohne eine explizite Schätzung der zeitvarianten Kovarianzmatrix des Inertialsensorrauschens untersucht. Dabei konnte herausgestellt werden, dass durch die Berücksichtigung barometrischer Sensordaten, mit denen anhand der barometrischen Höhenformel eine zuverlässige Geoidhöhe bestimmt werden kann, ebenfalls die Navigationslösung des *INS/GPS* verbessert wird. Außerdem konnte belegt werden, dass durch eine separate Filterung des temperaturabhängigen Skalierungsfehlers und luftdruckabhängigen Bias sowie die dadurch mögliche Korrektur der barometrischen Höhe, die Genauigkeit der Höhe über NN und die Zuverlässigkeit der Navigationslösung erhöht werden kann. Dies hat sich hier ebenfalls positiv auf Phasen ausgewirkt, in denen Ausfälle des *GPS*-Signals vorlagen.

Im zweiten Teil des Kapitels lag der Schwerpunkt der Untersuchungen auf der Schätzung der als zeitvariant angenommenen Kovarianzmatrix des Rauschprozesses, der das zeitlich korrelierte Inertialsensorrauschen treibt. Vor allem auf Basis der Simulationsdaten konnte verifiziert werden, dass der SEM sehr gute Schätzwerte für die gesuchten Varianzen liefert, da diese auf den getroffenen Modellannahmen beruhen. Es werden genau die Schätzwerte geliefert, die bei der Fehlerfilterung benötigt werden, während die Vergleichsverfahren einen systematischen Schätzfehler aufweisen können. Es konnte gezeigt werden, dass das NEWTON-Verfahren in der Lage ist, auch im Rahmen einer Fehlerfilterung die sich fortlaufend ändernden Parameter nachzuführen. Die Auswirkungen auf die eigentliche Navigationslösung war bei den hier eingesetzten Verfahren geringer als erwartet. Durch den Einsatz des SEM konnten jedoch unter realistischen Bedingungen konsistente Verbesserungen erreicht werden. Bei den Felddaten haben sich die Magnetfeldsensordaten als unzuverlässige Stützgrößen herausgestellt, weshalb der SEM allein nicht in der Lage war, die zeitlich korrelierten Rauschvarianzen des jeweiligen Drehratensensorrauschens zu schätzen. Trotzdem konnte gezeigt werden, dass fehlerhafte *GPS*-Messungen durch den SEM in Kombination mit dem MD besser kompensiert werden können als durch das MD allein.

## Kapitel 10

### Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Verfahren zur Lösung von zwei grundlegenden Problemen entwickelt, die die Lokalisation in einem mobilen Umfeld (z. B. eines KFZ) betreffen. Hierbei stand die Fusion von Daten einer inertialen Messeinheit (IME) mit weiteren Sensorinformationen in einer schwach gekoppelten Filterstruktur im Vordergrund. Dies schloss die Entwicklung eines Verfahrens ein, das mit Hilfe von Temperatur- und Luftdruckmessungen zuverlässige Höheninformationen liefert, wobei auftretende Bias- und Skalierungsfehler auf Basis topografischer Informationen korrigiert werden. Dadurch wird eine verbesserte Stützung eines inertialen Fehlerfilters (FF) erreicht, was wiederum zu einer zuverlässigeren Gesamtnavigationslösung führt. Das Verfahren wurde in ein Lokalisierungssystem integriert, das für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit entworfen wurde und die Verarbeitung sowohl künstlich generierter als auch realer Felddaten erlaubt. Das System umfasst neben der Berechnung der vollständigen Navigationslösung durch die *Strapdown*-Gleichungen ein linearisiertes KALMAN-Filter (LKF) zur Schätzung der Fehler der Navigationslösung, wobei *GPS*-, Magnetfeldsensor- und die durch den entwickelten Algorithmus gelieferten Höhendaten als Stützinformationen dienen. Des Weiteren wurde ein sequenzieller Algorithmus zur Schätzung unbekannter bzw. als zeitvariant angenommener Inertialsensorrauschparameter auf Basis des *EM*-Algorithmus hergeleitet. Es konnte gezeigt werden, dass sich dieser sequenzielle *EM*-Algorithmus (SEM) durch eine geringe Latenz auszeichnet, und die für den Filterprozess erforderlichen Systemrauschvarianzen zuverlässig geschätzt und nachgeführt werden können. Die Parameterschätzungen weisen zudem eine geringe Schätzfehlervarianz auf.

Nach einer kurzen Einführung in den hier behandelten Themenkomplex wurde zunächst auf den aktuellen Stand der Forschung und Technik im Bereich der inertialen Navigation eingegangen. Ausgehend davon wurden die wissenschaftlichen Ziele dieser Arbeit definiert. In diesem Zusammenhang wurde auf das zeitliche Verhalten von Sensorparametern eingegangen und gezeigt, dass eine vollständige, genaue Modellierung bestimmter Parameter nur eingeschränkt möglich ist. Durch die Annahme zeitvarianter Rauschvarianzen wurde eine flexiblere Modellierung begründet. Dabei konnte herausgestellt werden, dass sich u. a. aufgrund von Vibrationen, denen eine IME ausgesetzt ist, zeitliche Korrelationen ergeben, die im Rahmen des Filterprozesses entsprechend berücksichtigt werden müssen. Diese Korrelationen können durch ein Systemmodell (einem GAUSS-MARKOV-Prozess (GMP)) beschrieben werden, wobei die Rauschvarianzen des treibenden Rauschprozesses als zeitvariant angenommen werden. Die Annahme zeitvarianter Rauschparameter resultierte u. a. aus der Motivation heraus, Modellierungsungenauigkeiten des Inertialsensorrauschens oder Aliaseffekte ausgleichen zu können und eine verbesserte Positions- und Geschwindigkeitsschätzung im Rahmen der Navigationslösung durch den *Strapdown*-Algorithmus erreichen zu können.

Nach der Betrachtung der grundlegenden Komponenten einer schwach gekoppelten Navigationsfilterstruktur, wurde das LKF vorgestellt, das eine indirekte Filterung in der Weise vornimmt, dass

nicht eine absolute Position, Geschwindigkeit oder Lage einer IME geschätzt wird, sondern die aus der Navigationslösung resultierenden Fehler. Zeitlich korreliertes Sensorrauschen lässt sich bei der Filterung berücksichtigen, indem der LKF-Zustandsvektor entsprechend erweitert wird. Um dies jedoch zu vermeiden, wurde eine Modifizierung der gängigen Filtergleichungen vorgenommen. Auf diese Weise konnte weiterhin der Einfluss eines zeitkorrelierten Rauschprozesses auf den eigentlichen Systemzustand berücksichtigt werden, ohne eine explizite Berechnung der Rauschgrößen vornehmen zu müssen. Die Herleitung des Filters schloss auch die Berücksichtigung von Magnetfeldmessungen ein, die u. a. dem SEM als Stützinformationen dienen.

Im Anschluss wurde der Ansatz präsentiert, der es erlaubt, die auf Temperatur- und Luftdruckinformationen beruhende Höhenschätzung mit Hilfe von topografischen Kartendaten zu korrigieren. Die barometrische Höhenformel geht ursprünglich von konstanten Referenzparametern für Luftdruck und Temperatur aus. Es wurde jedoch erörtert, dass sich diese am jeweiligen Referenzort ebenfalls ändern können und daraus Skalierungs- und Biasfehler in der Schätzung resultieren. Ein Vergleich zwischen der direkt berechneten und der mit Hilfe der geschätzten Fehler korrigierten Höhe zeigte Unterschiede, die mehrere Meter betragen. Es wurde deutlich, dass bei Verfügbarkeit entsprechender topografischer Daten die optimierte Höhenschätzung trotz augenscheinlich geringer Auswirkungen auf die Schwerebeschleunigung zu einer stabileren Navigationslösung des Gesamtsystems führt, da eine zuverlässigere Stützung des *INS/GPS*-Navigationsfilters im Rahmen der Fehlerfilterung und der *Strapdown*-Berechnungen erfolgen kann. Der positive Einfluss der korrigierten barometrischen Messungen konnte bei der Verwendung realer Sensorsignale ebenfalls herausgestellt werden. Zudem wurde gezeigt, dass sich dies auch bei auftretenden *GPS*-Signalabschattungen bemerkbar macht. Weitere Untersuchungen bezogen sich in diesem Kontext auf die Auswirkungen fehlerhafter Modellannahmen in der Messgleichung des FF, wobei anhand künstlich erzeugter Messsignale belegt werden konnte, dass nicht berücksichtigte Korrelationen in den *GPS*-Positions- und Geschwindigkeitsschätzungen zu deutlichen Einbußen in der Genauigkeit der Gesamtlösung führen.

Ein weiterer zentraler Punkt dieser Arbeit lag in der Entwicklung eines Verfahrens zur Schätzung zeitvarianter Systemrauschvarianzen. Dieses beruht auf dem *EM*-Algorithmus, der in ein Verfahren überführt wurde, das die Beobachtungen nicht blockweise, sondern abtastwertweise verarbeitet. Dabei wurde die Zielfunktion, der bedingte Erwartungswert der *Log-Likelihood* der kompletten Daten, in eine rekursive Beschreibung überführt. Das Optimierungsproblem wurde gelöst, indem nach Berechnung der Zielfunktion diese mit Hilfe des *NEWTON*-Verfahrens in jedem Zeitschritt in mehreren Iterationsschritten maximiert wird. Um sicherzustellen, dass die *HESSE*-Matrix negativ definit bleibt, wurde ein zeitvarianter Parameter eingeführt, der von dem maximalen Eigenwert der Matrix abhängt. Des Weiteren wurde eine Transformation des gesuchten Parameters vorgenommen, um numerischen Instabilitäten entgegenzuwirken und zu gewährleisten, dass die geschätzten Varianzen positiv sind. Auf diese Weise liegt ein Algorithmus vor, der nur eine geringe Latenz aufweist und somit annähernd echtzeitfähig ist. Nach der ausführlichen Herleitung des SEM wurde die zusätzliche Verwendung eines Sekundärfilters (SF) erörtert, das mögliche Singularitäten bei den Berechnungen aufgrund des verwendeten Zustandsmodells vermeidet.

Als Vergleichsverfahren wurden zwei weitere Ansätze zur sequenziellen Parameterschätzung vorgestellt. Dies war zum einen ein Algorithmus, der die Korrelationen eines autoregressiven Prozesses auf Basis der Differenz aufeinanderfolgender Messwerte rekursiv berechnet. Mit diesem Messwertdifferenzen-Verfahren (MD) lassen sich zeitvariante Rauschprozessparameter zeitlich korrelierter Rauschprozesse schätzen, die Trajektorien dynamik kann dabei jedoch nicht vollständig unterdrückt werden. Zum anderen wurde mit dem Kovarianzmanagement (KM) ein Verfahren ange-

führt, das auf einer empirischen Mittelwert- und Varianzberechnung ergodischer Prozesse beruht. Dieses wurde so modifiziert, dass ein zeitvarianter Mittelwert und eine zeitvariante Varianz rekursiv berechnet werden können.

Bevor die Ergebnisse zum SEM präsentiert werden konnten, wurden Analysen der eingesetzten IME auf Basis der ALLAN-Varianz vorgenommen. Neben der detaillierten Untersuchung einer ruhenden *MTi*-Sensoreinheit wurde darauf eingegangen, welche Sensorausgangssignale und Sensorparameter bei einer sich bewegenden Sensoreinheit zu erwarten sind.

Als Datenbasis zur Untersuchung des SEM dienten anschließend sowohl künstlich generierte Daten als auch Messaufnahmen, die bei Fahrten mit einem KFZ aufgenommen wurden, welches mit einer IME, einem *GPS*-Empfänger sowie einem barometrischen Sensor ausgestattet war. Es wurde deutlich, dass bei den Schätzungen, die auf künstlich generierten Daten ohne explizite Tiefpassfilterung beruhten, der SEM sehr gute Schätzergebnisse liefert, sofern Stützinformationen durch einen satellitenbasierten Empfänger und Magnetfeldsensoren vorliegen. Während der SEM die a posteriori-Schätzungen des FF bzw. SF nutzt, wurden für die anderen Verfahren die Messvektoren direkt ausgewertet. Der *Root Mean Square Error (RMSE)* der geschätzten Rauschvarianzen der Beschleunigungssensortriade wies im Rahmen der Untersuchungsergebnisse (ohne Tiefpassfilterung der Inertialsensordaten) beim SEM mit  $2,021 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$  eine um ca. 87 % bessere Schätzung gegenüber dem KM auf als es beim MD mit einem Fehler von  $13,465 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$  der Fall war. Die Schätzgenauigkeit war dabei um ca. 10,3 % höher als beim KM, das einen *RMSE* von  $15,018 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$  aufwies. Diese Werte sind auf systematische Schätzfehler zurückzuführen, die daraus resultieren, dass die Trajektoriendynamik und das Rauschen nicht vollständig voneinander separiert werden können. Für den *RMSE* der Rauschvarianzen der Drehratensensortriade wurde durch den SEM im Mittel eine Verbesserung von 82 % gegenüber dem MD bzw. 83,8 % gegenüber dem KM bestimmt. Dieses Ergebnis führte auch zu zuverlässigeren Schätzungen der Navigationslösung (Position und Geschwindigkeit). Während diese gegenüber dem KM und dem MD wenige Zentimeter in der absoluten Position betrug, konnten vor allem signifikante Verbesserungen gegenüber einem Ansatz erzielt werden, der auf der Annahme konstanter Systemrauschvarianzen beruht. Bei Betrachtung der Geschwindigkeitsfehler hob sich der SEM etwas deutlicher von den anderen Verfahren ab, denn in der Gesamtlösung zeigte es gegenüber dem KM eine um 4,5 % höhere Genauigkeit.

Durch eine Tiefpassfilterung der Inertialsensordaten konnte im Rahmen ergänzender Untersuchungen ein Großteil des inhärenten und vibrationsinduzierten Rauschens eliminiert werden. Dennoch stellte sich auch in dem Fall der SEM als das Verfahren heraus, das zu den signifikantesten Verbesserungen in den Positionsschätzungen führte, da es sich indirekt auf Ungenauigkeiten in den Modellannahmen einstellen kann. Es berücksichtigt nicht nur die Messungen der Inertialsensoren, sondern ebenfalls die a posteriori-Schätzungen des FF.

Insgesamt hatte die verbesserte Parameterschätzung durch den SEM geringere Auswirkungen auf die Geschwindigkeits- und Positionsschätzung als zunächst angenommen. Dies kann damit begründet werden, dass im Rahmen der Filterung keine absoluten Navigationsgrößen, sondern deren Fehler geschätzt werden, wobei die Datenrate und die Qualität der Stützinformationen eine bedeutende Rolle spielen. Die Herleitung der Gleichungen, die im Rahmen der schwach gekoppelten Filterstruktur verwendet werden, beruht zudem auf einigen Approximationen. Dadurch fallen Abweichungen in den Schätzungen der Systemrauschvarianzen des FF weniger ins Gewicht. Ein deutlicher Unterschied macht sich jedoch dann bemerkbar, wenn die Rauschvarianzen konstant und außerdem zu niedrig gewählt und die zeitlichen Korrelationen nicht berücksichtigt werden. Bei der Analyse der Verfahren auf Basis von Felddaten konnte gezeigt werden, dass der SEM Vorteile gegenüber den beiden anderen



Verfahren (MD und KM) aufweist, da die Abweichungen bei aufgetretenen *GPS*-Signalfehlern hier objektiv geringer ausgefallen sind. Da sich die realen Magnetfeldsensordaten als unzuverlässiger als die anderen Sensormessungen herausstellten, wurde der SEM mit dem MD kombiniert, so dass auf diese Beobachtungen verzichtet werden konnte.

**Ausblick** Die Ergebnisse, die im Rahmen dieser Arbeit erzielt wurden, lassen darauf schließen, dass mit dem hier vorgestellten System eine robuste und zuverlässige Methode entwickelt wurde, um Inertialsensorfehler, aber auch Fehler und Signalausfälle, die durch die Stützung anhand von *Global Navigation System (GNS)*-Empfängerdaten auftreten können, in gewissem Umfang kompensieren zu können. Der SEM lieferte i. d. R. zuverlässige Resultate.

Folgende Punkte lassen in diesem Zusammenhang dennoch Raum für weiterführende Untersuchungen: Die Zustandsübergangsmatrix des FF ist zwar trotz der Linearisierung zeitvariant, dennoch basiert die gesamte Filterstruktur auf mehreren Approximationen. Eine Verbesserung kann in der Navigationslösung ggf. erzielt werden, indem auf eine *Strapdown*-Berechnung in Kombination mit einem LKF verzichtet und stattdessen ein nichtlinearer geschlossener Ansatz unter Verwendung eines *Unscented KALMAN Filter (UKF)* oder Partikelfilters (PF) gewählt wird. Dabei müssen allerdings weitere Modellannahmen getroffen werden wie z. B. für die zeitliche Beschreibung der Beschleunigung. Außerdem sind die genannten Filtervarianten i. d. R. mit einer sehr viel höheren Rechenkomplexität verbunden, was in der Praxis, vor allem in einem KFZ-Umfeld, häufig vermieden werden soll. Ein Vorteil würde allerdings darin liegen, dass eine Messwertaktualisierung nicht von der Datenrate des *GPS*-Empfängers abhängt, sondern von der Datenrate der IME. Die damit verbundene dauerhafte Beobachtbarkeit von Drehraten- und Beschleunigungssensormessungen am Filtereingang würde sich vorteilhaft auf die Berechnung der a posteriori-Verteilung und damit den SEM auswirken.

Da das hier eingesetzte Navigationsfilter auf Stützinformationen basiert, ist die Genauigkeit in der Navigationslösung auch von der Qualität der Stützinformationen abhängig. Die Fehler, die bei den satellitenbasierten Daten auftreten, bestimmen die Leistungsfähigkeit des nachgeschalteten Navigationsfilters. Hinzu kommt, dass die eingesetzte IME einer niedrigen Genauigkeitsklasse zuzuordnen ist und die Sensorinformationen nur kurzzeitig stabil sind, während die *GPS*-Informationen hingegen langzeitstabil sind. An Stelle einer schwach gekoppelten Filterstruktur könnte eine eng gekoppelte oder direkt gekoppelte Struktur verwendet werden. Ein dabei notwendiger Zugriff auf die satellitenempfängerinternen Rohsignale ist jedoch bei den meisten Geräten nicht möglich.

Die Zustandsübergangsmatrizen der zeitlich korrelierten Rauschprozesse erster Ordnung wurden hier durch die Korrelationszeiten festgelegt. Ein alternativer Ansatz mit zusätzlich zeitvarianten Zustandsübergangsmatrizen  $\mathbf{D}_{\text{FF};n,k}$ ,  $\mathbf{D}_{\text{FF};w,k}$  könnte möglicherweise dazu führen, dass die zeitlichen Korrelationen noch besser nachgeführt werden als es durch die Annahme einer ausschließlich zeitvarianten Rauschkovarianzmatrix der Fall ist. Dabei muss allerdings darauf geachtet werden, dass dies nicht zu einem instabilen Systemverhalten führt.

Inertiale Sensoren sind das klassische Werkzeug einer Innenraumnavigation, bei der oftmals keine satellitengestützten Informationen verfügbar sind. Auch hier besteht häufig das Problem, dass eine IME nicht in der Weise durch vibrationsdämpfende Maßnahmen von dem zu navigierenden Roboter oder der Person entkoppelt werden kann, dass die Sensordaten ausschließlich die reine Trajektorien-dynamik aufweisen. In Kombination mit weiteren Stützinformationen, z. B. durch einen *Laserscanner* oder einem Radarsensor, könnte der SEM eine Fusion der verfügbaren Daten im Rahmen der Nachfilterung unterstützen.

## Anhang A

### Ergänzungen zum *Global Positioning System*

#### A.1 Fehlerquellen

Bei der *GPS*-Übertragung spielen die unterschiedlichen Fehlerquellen eine wichtige Rolle, da sie sowohl die Positionsbestimmung als auch die Geschwindigkeitsschätzung beeinträchtigen. Die Fehler lassen sich in *Common-Mode*-Fehler und *Non-Common-Mode*-Fehler einteilen. *Common-Mode*-Fehler bezeichnen Systemfehler, die sich auf die Empfänger auswirken (z. B. durch Satellitenuhrenfehler), während bei *Non-Common-Mode*-Fehlern die Empfangsgeräte oder die spezifische Empfangssituation die Fehlerquelle darstellen.

***Non-Common-Mode-Fehler*** Zu den typischen *Non-Common-Mode*-Fehlern zählen:

- **Empfängerseitiger Zeit- oder Uhrenfehler:** Der empfängerseitige Zeitfehler, der auch als „Zeitbias“ bezeichnet wird, ist eine zeitvariante Fehlerquelle. Da die Positionsbestimmung aufgrund von Signallaufzeitdifferenzen berechnet wird, ist es für die Genauigkeit der Messung wichtig, dass die Uhren von Empfängern und Satelliten synchronisiert sind. Ansonsten resultiert ein Bias, das für alle *Pseudorange*-Messungen gleich ist. Im Falle eines Bias von  $1 \cdot 10^{-6}$  s würde sich ein Entfernungsfehler von ca. 100 m ergeben. Durch eine Fehlermodellierung und Filterung nach [Wen07] kann das zeitliche Bias nachträglich kompensiert werden, wodurch dann auch der Einfluss auf die Positionsschätzung verringert wird. Durch die statistischen Messgrößen bleibt jedoch eine geringe Restunsicherheit in der Schätzung vorhanden. Dieses Problem macht sich allerdings häufig nur bei drei Satelliten bemerkbar, da schon bei vier sichtbaren Satelliten das empfängerseitige Bias errechnet werden kann [TW04].
- **Empfängerrauschen:** Das Empfängerrauschen resultiert aus Faktoren, die sich ausschließlich aus dem Aufbau des *GPS*-Empfängers ergeben. Dazu zählen die verwendeten Bauelemente und die verwendeten Antennen. Diese Komponenten führen aufgrund von thermischem Rauschen zu Messfehlern. Außerdem können Nichtlinearitäten auftreten, die zusammen mit dem thermischen Rauschen zum Empfängerrauschen zusammengefasst werden. Die Fehlerordnung ist von der verwendeten Technologie (z. B. *MEMS*) abhängig. Bei aktuellen Empfängern führen solche Fehler bei *Pseudorange*-Messungen zu Abweichungen von wenigen Zentimetern. Im Falle von Trägerphasenmessungen betragen sie sogar nur einige Millimeter. Der Fehler wird häufig durch ein unkorreliertes AWGR mit Mittelwert Null modelliert.
- **Mehrwegeausbreitung:** Wie bei jeder Übertragung per Funk können durch Reflexionen an Gebäuden oder anderen größeren Objekten, die sich in unmittelbarer Umgebung des Empfängers befinden, Mehrwegeausbreitungen entstehen. Die Mehrwegekomponenten führen bei der

Signalauswertung zu Fehlern, die von verschiedenen Faktoren abhängen. Im Falle von *Pseudorange*-Messungen kann dieses bei zu hohen Leistungen der Mehrwegekomponenten zu Positionsschätzfehlern von bis zu 70 m führen. Zur Kompensation wird im Empfänger eine Korrelation mit einem Referenzsignal durchgeführt, um die Verschiebung des Maximums zu erhalten. Ist die Leistung der Mehrwegekomponenten jedoch gering, so resultiert daraus lediglich ein Positionsfehler von maximal 3 m. Dieser ist allerdings für heutige Anwendungen immer noch sehr hoch, weshalb z. T. bessere Korrelatoren und Chipsätze eingesetzt werden. Weitere Aspekte sind in [FB99] und [DH04] zu finden.

**Common-Mode-Fehler** Zu den typischen *Common-Mode*-Fehlern zählen:

- **Satellitenuhrenfehler:** Jeder Satellit besitzt eine interne Uhr, die unabhängig von den anderen Satelliten läuft. Die Satellitenzeiten driften nach und nach von der eigentlichen *GPS*-Zeit ab. Der Fehler ist durch die Basisstationen beobachtbar und durch die Kenntnis der Atomuhrzeit kompensierbar. Die Korrekturen werden an die Satelliten mittels der Navigationsdaten gesendet. Da die Korrektur nicht fortlaufend vorgenommen wird, bleibt ein zeitliches Bias bzw. Satellitenuhrenfehler. Der Fehler ist unabhängig von dem Aufenthaltsort eines *GPS*-Nutzers.
- **Atmosphärenfehler:** Die atmosphärischen Fehler sind bedingt durch zwei atmosphärische Schichten: Troposphäre und Ionosphäre. Die troposphärische Schicht reicht von der Erdoberfläche bis zu einer Höhe von ca. 10 km. In der Troposphäre ändern sich wetterbedingt sowohl die Temperatur als auch Luftdruck und Luftfeuchte. Diese Änderungen haben Auswirkungen auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Signale und führen zu Laufzeitverzögerungen. Die Frequenz des Signals ist davon unabhängig. Des Weiteren ist der Elevationswinkel (der Winkel des Satelliten über dem Horizont) von Bedeutung, denn dieser beeinflusst direkt die Entfernung zwischen Empfänger und Satellit. Die Ionosphäre dagegen erstreckt sich ab einer Höhe von ca. 45 km und besteht aus ionisierter Luft. Änderungen der Ionisierungsrate bewirken ebenfalls unterschiedliche Laufzeiten des *GPS*-Signals. Dies hängt allerdings von der Frequenz des Satellitensignals ab. Die ionosphärischen Störungen sind zudem tagesabhängig, weil sie nach [Wen07] von der Sonneneinstrahlung abhängen. Günstige Empfänger, die lediglich auf Basis einer Trägerfrequenz arbeiten, sind nicht im Stande, die Ionosphärenfehler zu kompensieren. Dies ist jedoch mit kostspieligen, hochqualitativen Empfängern möglich, die beide Trägerfrequenzen  $L_1$  und  $L_2$  auswerten können. Diese wurden im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht verwendet. Weitere Verbesserungen sind durch das in Kap. 2.1.1 beschriebene *DGPS* möglich.
- **Fehler aufgrund von Ephemeridendaten:** Die Ephemeridendaten enthalten Informationen über die Satellitenlaufbahnen, die von den Kontrollstationen laufend vermessen werden. Die Daten werden ein- bis zweimal pro Tag an die Satelliten zurückgesendet, die diese dem Nutzer dann als Navigationsdaten zur Verfügung stellen. Anhand der Koordinaten von mehreren Satelliten und der errechneten Entfernung kann eine Positionsbestimmung durchgeführt werden. Zwischen den Aktualisierungszeitpunkten der Ephemeridendaten wird die Satellitenposition anhand eines Bahnmodells interpoliert. Dadurch entsteht ein zeitvarianter Fehler gegenüber der tatsächlichen Umlaufbahn, aus dem ein Positionsschätzfehler von bis zu 1 m resultiert.
- **Künstliche Fehler:** Die künstlichen Fehler treten heutzutage eigentlich nicht mehr auf. Unter *Selective Availability (SA)* wird ein künstlicher Störeinfluss verstanden, der vom amerikanischen Militär aus Sicherheitsgründen in Krisenzeiten eingesetzt wurde. Dieser Dienst wurde

jedoch im Mai 2000 abgeschaltet. Der Effekt, der durch SA erreicht wird, ist eine ungenaue Positionsbestimmung, wobei die Standardabweichung nicht selten bis zu zehnmal größer sein kann als ohne SA.

## A.2 Proprietäre PUBX-Datensätze

Bei den proprietären PUBX-Datensätzen handelt es sich um keine bekannten Formate. In Tab. A.1 (a) und Tab. A.1 (b) sind zwei Beispiele zu diesen Datensätzen aufgeführt, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurden. Weitere Details zu *PUBX*-Datensätzen können [u-b09] entnommen werden.

(a) *PUBX00*-Datensatz

\$PUBX	Protokollkopf
00	Identifizierungsfeld
101011.75	Messzeitpunkt als <i>Universal Time Coordinated (UTC)</i> -Zeit im Format [hhmmss.ss]
5142.88865,N	Geografische Breite (engl. <i>Latitude</i> ) in [Grad + Minuten] und Nord/Süd-Indikator
00845.89310,E	Geografische Länge (engl. <i>Longitude</i> ) in [Grad + Minuten] und Ost/West-Indikator
185.532	Höhe über dem <i>WGS84</i> -Erdellipsoid in m
G3	Navigationsmodus (hier dreidimensionale Lösung)
3.5	Horizontale Genauigkeit in [m]
3.2	Vertikale Genauigkeit in [m]
42.628	Geschwindigkeit über Grund in [ $\text{km/h}$ ]
123.54	Kurs über Grund in [ $^{\circ}$ ]
-0.265	Vertikale Geschwindigkeit in [ $\text{m/s}$ ] in Richtung Erdmittelpunkt
	Alter der <i>DGPS</i> -Korrekturen in [s] (leeres Feld, wenn nicht verfügbar)
0.78	Horizontaler Genauigkeitsindex (engl. <i>Horizontal Dilution of Precision (HDOP)</i> )
1.22	Vertikaler Genauigkeitsindex (engl. <i>Vertical Dilution of Precision (VDOP)</i> )
0.65	Zeitlicher Genauigkeitsindex (engl. <i>Time Dilution of Precision (TDOP)</i> )
10	Anzahl der <i>GPS</i> -Satelliten, die für die Auswertung verwendet wurden
0	Anzahl der <i>GLONASS</i> -Satelliten, die für die Auswertung verwendet wurden
0	Angabe, ob <i>DR</i> verwendet wurde (0/1)
*45	Prüfsumme

(b) *PUBX04*-Datensatz

\$PUBX	Protokollkopf
04	Identifizierungsfeld
101011.75	Messzeitpunkt als <i>UTC</i> -Zeit im Format [hhmmss.ss] (Stunde, Minute, Sekunde)
250210	<i>UTC</i> -Zeit im Format [ddmmyy] (Tag, Monat, Jahr)
382211.75	<i>UTC</i> -Wochenzeit in [s]
1572	<i>UTC</i> -Wochennummer
382211.75	Reserviert für spätere Erweiterung, momentan <i>UTC</i> -Wochenzeit
201107	Empfängeruhrenfehler (Bias) in [ns]
-338.294	Empfängeruhrenfehler (Drift) in [ $\text{ns/s}$ ]
10	Quantisierungsfehler des zeitlichen Pulses (externer Anschluss) in [ns]
*1E	Prüfsumme

Tabelle A.1: Beispiele und Erläuterungen zu den *PUBX*-Datensätzen



## Anhang B

### Ergänzungen zum Navigationsfilter

#### B.1 Mathematische Zusammenhänge

Gegeben sei der Vektor  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$ . Die kreuzproduktbildende Matrix  $\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega} \times]$  ist dann definiert als

$$\boldsymbol{\Omega} = [\boldsymbol{\omega} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Für kreuzproduktbildende Matrizen von Drehraten gelten nach [Wen07] die folgenden Rechenregeln am Beispiel von  $\boldsymbol{\omega}_{\text{eb}}^{\text{n}}$ :

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{eb}}^{\text{n}} = [\boldsymbol{\omega}_{\text{eb}}^{\text{n}} \times] \quad (\text{B.2})$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{eb}}^{\text{n}} = -\boldsymbol{\omega}_{\text{be}}^{\text{n}} \quad (\text{B.3})$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{eb}}^{\text{n}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ei}}^{\text{n}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ib}}^{\text{n}}. \quad (\text{B.4})$$

Eine Richtungskosinusmatrix (RKM) ist eine orthonormale Matrix. Folglich ist ihre Inverse gleich der Transponierten. Beispielsweise gilt für  $\mathbf{C}_{\text{b}}^{\text{n}}$ :

$$\mathbf{C}_{\text{b}}^{\text{n}} = \left( \mathbf{C}_{\text{n}}^{\text{b}} \right)^{-1} = \left( \mathbf{C}_{\text{n}}^{\text{b}} \right)^T. \quad (\text{B.5})$$

#### B.2 Herleitung der Navigationsfiltergleichungen

Im Folgenden sollen die verwendeten Navigationsfiltergleichungen auf Basis der Gl. (5.12), (5.27) und (5.28) hergeleitet werden. Der Index FF entfällt hier der Übersichtlichkeit wegen. Anstelle von (5.13) wird hier eine verallgemeinerte Gleichung betrachtet. Für die Systemgl. (B.6) bis (B.8) und Messgl. (B.9) folgt damit:

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\Phi}_k \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}_k \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{n}_k = \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{n}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_n \cdot \boldsymbol{\eta}_k \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{D}_w \cdot \mathbf{w}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_w \cdot \boldsymbol{\nu}_k \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{w}_k, \quad (\text{B.9})$$

wobei  $\boldsymbol{\eta}_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_k; \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}, \mathbf{Q}_k)$  mit  $\mathbf{Q}_k := E[\boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T]$  und  $\boldsymbol{\nu}_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_k; \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}, \mathbf{R})$  mit  $\mathbf{R} := E[\boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T]$  gilt.  $\boldsymbol{\Gamma}_n$  und  $\boldsymbol{\Gamma}_w$  sollen hier konstante Matrizen sein, die den Einfluss des treibenden Rauschens beschreiben. Mit der Beobachtungssequenz  $\mathbf{z}_{1:k-1} := \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{k-1}$  gilt für die Filtergleichungen:



**Prädiktion** Im Folgenden ist zu beachten, dass  $\mathbf{n}_k$  und  $\mathbf{w}_k$  keine Schätzgrößen sind. Außerdem sind  $\mathbf{P}_{nn,k} := E[\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T]$  und  $\mathbf{P}_{ww,k} := E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T]$  unabhängig von einer Beobachtung und können deshalb vollständig vor der Filterung berechnet werden.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &:= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right] \\ &= E \left[ \left( \Phi_k \left( \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \right) + \mathbf{G}_k \mathbf{n}_k \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left( \Phi_k \left( \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \right) + \mathbf{G}_k \mathbf{n}_k \right)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right] \\ &= E \left[ \left( \Phi_k \left( \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \right) + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{n}_{k-1} + \mathbf{G}_k \Gamma_n \boldsymbol{\eta}_k \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left( \Phi_k \left( \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \right) + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{n}_{k-1} + \mathbf{G}_k \Gamma_n \boldsymbol{\eta}_k \right)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right] \\ &= \Phi_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_k^T + \Phi_k \mathbf{P}_{xn,k-1|k-1} \mathbf{D}_n^T \mathbf{G}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{P}_{xn,k-1|k-1}^T \Phi_k^T \\ &\quad + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{P}_{nn,k-1} \mathbf{D}_n^T \mathbf{G}_k^T + \mathbf{G}_k \Gamma_n \mathbf{Q}_k \Gamma_n^T \mathbf{G}_k^T \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xn,k|k-1} &:= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \mathbf{n}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right] \\ &= E \left[ \left( \Phi_k \left( \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \right) + \mathbf{G}_k \mathbf{n}_k \right) \mathbf{n}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right] \\ &= E \left[ \left( \Phi_k \left( \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \right) + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{n}_{k-1} + \mathbf{G}_k \Gamma_n \boldsymbol{\eta}_k \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left( \mathbf{D}_n \mathbf{n}_{k-1} + \Gamma_n \boldsymbol{\eta}_k \right)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right] \\ &= \Phi_k \mathbf{P}_{xn,k-1|k-1} \mathbf{D}_n^T + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{P}_{nn,k-1} \mathbf{D}_n^T + \mathbf{G}_k \Gamma_n \mathbf{Q}_k \Gamma_n^T \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xw,k|k-1} &:= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \mathbf{w}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right] \\ &= E \left[ \left( \Phi_k \left( \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \right) + \mathbf{G}_k \mathbf{n}_k \right) \mathbf{w}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right] \\ &= E \left[ \left( \Phi_k \left( \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \right) + \mathbf{G}_k \mathbf{n}_k \right) \left( \mathbf{D}_w \mathbf{w}_{k-1} + \Gamma_w \boldsymbol{\nu}_k \right)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right] \\ &= \Phi_k \mathbf{P}_{xw,k-1|k-1} \mathbf{D}_w^T. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Einsetzen von (B.12) in (B.11) liefert:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{D}_n \mathbf{P}_{xn,k-1|k-1}^T \Phi_k^T + \mathbf{P}_{xn,k|k-1} \mathbf{G}_k^T. \quad (\text{B.14})$$

Für die Kovarianzmatrizen der zeitlich korrelierten Rauschprozesse gilt jeweils:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{nn,k} &:= E[\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T] \\ &= E \left[ \left( \mathbf{D}_n \mathbf{n}_{k-1} + \Gamma_n \boldsymbol{\eta}_k \right) \left( \mathbf{D}_n \mathbf{n}_{k-1} + \Gamma_n \boldsymbol{\eta}_k \right)^T \right] \\ &= \mathbf{D}_n \mathbf{P}_{nn,k-1} \mathbf{D}_n^T + \Gamma_n \mathbf{Q}_k \Gamma_n^T \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ww,k} &:= E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] \\ &= E \left[ \left( \mathbf{D}_w \mathbf{w}_{k-1} + \Gamma_w \boldsymbol{\nu}_k \right) \left( \mathbf{D}_w \mathbf{w}_{k-1} + \Gamma_w \boldsymbol{\nu}_k \right)^T \right] \\ &= \mathbf{D}_w \mathbf{P}_{ww,k-1} \mathbf{D}_w^T + \Gamma_w \mathbf{R} \Gamma_w^T. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

**Aktualisierung**

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{xz,k} &:= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left( \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k \right)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\
&= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left( \mathbf{H}_k \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) + \mathbf{M}_k \mathbf{w}_k \right)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\
&= \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{zz,k} &:= E \left[ \left( \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k \right) \left( \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k \right)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\
&= E \left[ \left( \mathbf{H}_k \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) + \mathbf{M}_k \mathbf{w}_k \right) \left( \mathbf{H}_k \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) + \mathbf{M}_k \mathbf{w}_k \right)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\
&= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1}^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{ww,k} \mathbf{M}_k^T
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &:= \mathbf{P}_{xz,k} \mathbf{P}_{zz,k}^{-1} \\
&= \left( \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T \right) \\
&\quad \cdot \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1}^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{ww,k} \mathbf{M}_k^T \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right). \tag{B.20}$$

Da  $\mathbf{n}_k$  hier keine Schätzgröße des Systemzustandsvektors ist, wirkt sich dies auch auf (B.20) aus. Mit  $\mathbf{n}_k$  als Element des Zustandsvektors würde

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{G}_k \hat{\mathbf{n}}_{k|k} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \left( \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{G}_k \hat{\mathbf{n}}_{k|k} \right) \right) \tag{B.21}$$

gelten. Hier ist jedoch  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \right)$ , woraus schließlich die a posteriori-Zustandsschätzung (B.20) resultiert. Mit dieser erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k|k} &:= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right) \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\
&= E \left[ \left( \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) - \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{w}_k \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left( \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) - \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{w}_k \right)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\
&= E \left[ \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)^T \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right)^T \right. \\
&\quad - \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{w}_k \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)^T \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right)^T \\
&\quad - \left. \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \mathbf{w}_k^T \mathbf{M}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{M}_k^T \mathbf{K}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\
&= \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{ww,k} \mathbf{M}_k^T \right) \mathbf{K}_k^T \\
&\quad + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1}^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T \right) \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1}^T \\
&\quad - \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T \mathbf{K}_k^T \\
&= \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T \\
&\quad + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1}^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{ww,k} \mathbf{M}_k^T \right) \mathbf{K}_k^T \\
&\quad - \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1}^T - \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T \mathbf{K}_k^T.
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Die letzte Gleichung ist auch als so genannte JOSEPH-Form bekannt. Nach Einsetzen von (B.19) in (B.22) folgt noch:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &= \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T + \left( \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T \right) \mathbf{K}_k^T \\ &\quad - \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1}^T - \mathbf{P}_{xw,k|k-1} \mathbf{M}_k^T \mathbf{K}_k^T \\ &= \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{xw,k|k-1}^T \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xn,k|k} &:= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right) \mathbf{n}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\ &= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \right) \mathbf{n}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\ &= E \left[ \left( \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) - \mathbf{K}_k \left( \mathbf{H}_k \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) + \mathbf{M}_k \mathbf{w}_k \right) \right) \mathbf{n}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\ &= \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \mathbf{P}_{xn,k|k-1} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xw,k|k} &:= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right) \mathbf{w}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\ &= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \right) \mathbf{w}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\ &= E \left[ \left( \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) - \mathbf{K}_k \left( \mathbf{H}_k \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) + \mathbf{M}_k \mathbf{w}_k \right) \right) \mathbf{w}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right] \\ &= \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \mathbf{P}_{xw,k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{wv,k}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

### B.3 Herleitung der Systemgleichung des Fehlerfilters

Im Folgenden werden die für das Systemmodell des Fehlerfilters (FF) aus Kap. 5 benötigten Matrizen hergeleitet. Der Zeitindex  $t$  wird der Übersichtlichkeit wegen dabei weggelassen. Für den Zustandsvektor des FF mit  $\mathbf{x}_{\text{FF}} \in \mathbb{R}^{15}$  gilt:

$$\mathbf{x}_{\text{FF}} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta p_{\text{eb},n}^n \\ \Delta p_{\text{eb},e}^n \\ \Delta p_{\text{eb},d}^n \end{pmatrix}^T}_{\text{Positionsfehler } (\Delta \mathbf{p}_{\text{eb}}^n)^T} & \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta v_{\text{eb},n}^n \\ \Delta v_{\text{eb},e}^n \\ \Delta v_{\text{eb},d}^n \end{pmatrix}^T}_{\text{Geschwindigkeitsfehler } (\Delta \mathbf{v}_{\text{eb}}^n)^T} & \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix}^T}_{\text{Lagefehler } (\Delta \boldsymbol{\Upsilon})^T} & \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta b_{a,x} \\ \Delta b_{a,y} \\ \Delta b_{a,z} \end{pmatrix}^T}_{\text{Biasfehler } (\Delta \mathbf{b}_a)^T \text{ der Beschleunigungssensoren}} & \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta b_{\omega,x} \\ \Delta b_{\omega,y} \\ \Delta b_{\omega,z} \end{pmatrix}^T}_{\text{Biasfehler } (\Delta \mathbf{b}_\omega)^T \text{ der Drehratensensoren}} \end{pmatrix}^T. \quad (\text{B.26})$$

**Lagefehlerdifferenzialgleichung** Können z. B. Biasfehler nicht vollständig kompensiert werden, wirken sie sich auch auf eine fehlerhafte Orientierungsberechnung aus. Ebenso führen Ungenauigkeiten hinsichtlich der Transport- oder Erddrehrate zu Problemen in der Orientierungsbestimmung. Unter der Voraussetzung, dass die ideale RKM  $\mathbf{C}_{\text{b}}^n$  nicht bekannt ist, aber zwischen dieser und der geschätzten Matrix  $\hat{\mathbf{C}}_{\text{b}}^n$  ein Zusammenhang durch die Orientierungsfehlermatrix  $\boldsymbol{\Psi}$  besteht, kann angenommen werden, dass

$$\hat{\mathbf{C}}_{\text{b}}^n = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \boldsymbol{\Psi}) \mathbf{C}_{\text{b}}^n \quad (\text{B.27})$$

gilt, wobei  $\mathbf{I}_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  eine Einheitsmatrix und

$$\Psi := [\Upsilon \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\psi' & \Delta\theta' \\ \Delta\psi' & 0 & -\Delta\phi' \\ -\Delta\theta' & \Delta\phi' & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

nach (B.1) ist. D. h.  $\Psi$  ist die kreuzproduktbildende Matrix des Vektors  $\Upsilon := (\Delta\phi' \ \Delta\theta' \ \Delta\psi')^T$ , der die Fehler der Eulerwinkel enthält. Nach dieser Notation würde der Vektor  $\Delta\Upsilon$  in Gl. (B.26) eigentlich den Fehler einer Lagefehlerschätzung bezeichnen. Allerdings wird nach jedem Aktualisierungsschritt der Filterzustand des FF auf einen Nullvektor gesetzt, da vorher eine Korrektur mit den Fehlergrößen durchgeführt werden konnte [Wen07]. Aus diesem Grund gilt vor einem Propagationsschritt  $\Upsilon = \Delta\Upsilon$ , d. h. der Fehler in der Schätzung des Orientierungsfehlers entspricht dem absoluten Fehler und damit  $\Delta\phi' = \Delta\phi$ ,  $\Delta\theta' = \Delta\theta$ ,  $\Delta\psi' = \Delta\psi$ . Berücksichtigt man, dass  $\mathbf{C}_b^n (\mathbf{C}_b^n)^T = \mathbf{I}_{3 \times 3}$  gilt, so lässt sich nun Gl. (B.27) umstellen:

$$\Psi = -\hat{\mathbf{C}}_b^n (\mathbf{C}_b^n)^T + \mathbf{I}_{3 \times 3}. \quad (\text{B.29})$$

Dies führt zu der zeitlichen Ableitung

$$\dot{\Psi} = -\dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n (\mathbf{C}_b^n)^T - \hat{\mathbf{C}}_b^n (\dot{\mathbf{C}}_b^n)^T, \quad (\text{B.30})$$

wobei

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n [\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times] = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b = \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\Omega}_{ni}^b + \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b) \quad (\text{B.31})$$

gilt. Hier kennzeichnet  $\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b$  die Matrix, die durch  $[\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times]$  gebildet wurde. Mit der Erweiterung des rechten Terms in (B.31) um  $(\mathbf{C}_b^n)^T \mathbf{C}_b^n$  und der Beziehung  $\boldsymbol{\Omega}_{ni}^n = -\boldsymbol{\Omega}_{in}^n$  nach (B.3) erhält man für die Ableitung und analog für die zugehörige Schätzung der RKM

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \mathbf{C}_b^n \quad \text{und} \quad \dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n = \hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n \hat{\mathbf{C}}_b^n. \quad (\text{B.32})$$

Setzt man nun Gl. (B.32) in (B.30) ein und berücksichtigt noch den Zusammenhang in (B.27), so erhält man nach einigen Umrechnungen

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \Psi) - (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \Psi) \boldsymbol{\Omega}_{in}^n + (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \Psi) \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b) (\mathbf{C}_b^n)^T \\ &= \mathbf{C}_b^n \Delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b (\mathbf{C}_b^n)^T - \Psi \mathbf{C}_b^n \Delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b (\mathbf{C}_b^n)^T - \Delta \boldsymbol{\Omega}_{in}^n - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n \Psi + \Psi \boldsymbol{\Omega}_{in}^n, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

wobei  $\Delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b := \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b$  und  $\Delta \boldsymbol{\Omega}_{in}^n := \boldsymbol{\Omega}_{in}^n - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n$  gilt. Für die vektorielle Form von Gl. (B.33) folgt mit (B.27) und dem Zusammenhang  $-\boldsymbol{\Omega}_{in}^n \Upsilon \times = \Psi \boldsymbol{\Omega}_{in}^n - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n \Psi$  für  $\boldsymbol{\Omega}_{in}^n \approx \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n$  (siehe auch Gl. (B.28)) somit

$$\begin{aligned} \dot{\Upsilon} &= -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \Upsilon - \Delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \mathbf{C}_b^n \Delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \Psi \mathbf{C}_b^n \Delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\ &= -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \Upsilon - \Delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n + (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \Psi) \mathbf{C}_b^n \Delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Wie beschrieben, wird nach jedem Aktualisierungsschritt der Filterzustand auf einen Nullvektor gesetzt [Wen07]. Da aus dem späteren Korrekturschritt  $\Upsilon = \Delta\Upsilon$  folgt, erhält man durch Taylorreihenentwicklung bezüglich der gesuchten Größen und Gleichsetzen mit (B.34)

$$\Delta \dot{\Upsilon} = \frac{\partial \dot{\Upsilon}}{\partial \mathbf{p}_{eb}^n} \Delta \mathbf{p}_{eb}^n + \frac{\partial \dot{\Upsilon}}{\partial \mathbf{v}_{eb}^n} \Delta \mathbf{v}_{eb}^n + \frac{\partial \dot{\Upsilon}}{\partial \Upsilon} \Delta \Upsilon + \frac{\partial \dot{\Upsilon}}{\partial \mathbf{b}_\omega} \Delta \mathbf{b}_\omega \quad (\text{B.35})$$

$$\stackrel{!}{=} -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \Delta \Upsilon - \Delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \hat{\mathbf{C}}_b^n \Delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b, \quad (\text{B.36})$$

wobei auch  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{b}_a} \Delta \mathbf{b}_a = 0$  ist. Des Weiteren ist  $\Delta \mathbf{p}_{\text{eb}}^n := \mathbf{p}_{\text{eb}}^n - \hat{\mathbf{p}}_{\text{eb}}^n$ ,  $\Delta \mathbf{v}_{\text{eb}}^n := \mathbf{v}_{\text{eb}}^n - \hat{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^n$ ,  $\Delta \mathbf{r} := \mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}$  und  $\Delta \mathbf{b}_\omega := \mathbf{b}_\omega - \hat{\mathbf{b}}_\omega$ . Anhand von Gl. (4.36) und (4.37) wird deutlich, dass in (B.36) lediglich  $\omega_{\text{in}}^n$  bzw.  $\Delta \omega_{\text{in}}^n$  von der Position und der Geschwindigkeit abhängt:

$$\omega_{\text{in}}^n = \omega_{\text{ie}}^n + \omega_{\text{en}}^n = \begin{pmatrix} \frac{v_{\text{eb},e}^n}{R_e+h} + \Omega \cdot \cos(\varphi) \\ -\frac{v_{\text{eb},n}^n}{R_n+h} \\ -\frac{v_{\text{eb},e}^n \cdot \tan(\varphi)}{R_e+h} - \Omega \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.37})$$

Um nun in Gl. (B.35) die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite zu erhalten, muss unter der Annahme konstanter Erdkrümmungsradien die Gl. (B.38) gelöst werden:

$$\begin{aligned} \Delta \omega_{\text{in}}^n &= \frac{\partial \omega_{\text{in}}^n}{\partial(\varphi, \lambda, h)} \begin{pmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \lambda \\ \Delta h \end{pmatrix} + \frac{\partial \omega_{\text{in}}^n}{\partial \mathbf{v}_{\text{eb}}^n} \Delta \mathbf{v}_{\text{eb}}^n \\ &= \frac{\partial \omega_{\text{in}}^n}{\partial(\varphi, \lambda, h)} \begin{pmatrix} \frac{\Delta x_{\text{eb},n}^n}{R_n+h} \\ \frac{\Delta x_{\text{eb},e}^n}{(R_e+h) \cos(\varphi)} \\ -\Delta x_{\text{eb},d}^n \end{pmatrix} + \frac{\partial \omega_{\text{in}}^n}{\partial \mathbf{v}_{\text{eb}}^n} \Delta \mathbf{v}_{\text{eb}}^n \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\Omega \sin(\varphi)}{R_n+h} & 0 & \frac{v_{\text{eb},e}^n}{(R_e+h)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_{\text{eb},n}^n}{(R_n+h)^2} \\ -\frac{\Omega \cos(\varphi)}{R_n+h} - \frac{v_{\text{eb},e}^n}{(R_e+h)(R_n+h) \cos^2(\varphi)} & 0 & -\frac{v_{\text{eb},e}^n \tan(\varphi)}{(R_e+h)^2} \end{pmatrix}}_{-\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,1)}} \Delta \mathbf{p}_{\text{eb}}^n + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R_e+h} & 0 \\ -\frac{1}{R_n+h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan(\varphi)}{R_e+h} & 0 \end{pmatrix}}_{-\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,2)}} \Delta \mathbf{v}_{\text{eb}}^n, \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

wobei  $\Delta \mathbf{p}_{\text{eb}}^n$  und  $\Delta \mathbf{v}_{\text{eb}}^n$  wie in (B.26) definiert sind. In der letzten Gleichung muss berücksichtigt werden, dass die Matrizen  $\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,1)}$  und  $\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,2)}$  an den zuvor geschätzten Positionen  $\hat{\mathbf{p}}_{\text{eb}}^n$  und Geschwindigkeiten  $\hat{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^n$  ausgewertet werden müssen, die sich durch die *Strapdown*-Berechnungen ergeben.<sup>16</sup> Den dritten Summanden in Gl. (B.35) erhält man durch Vergleich mit (B.36):

$$\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,3)} := \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} = -[\omega_{\text{in}}^n \times] \bigg|_{\substack{\mathbf{p}_{\text{eb}}^e = \hat{\mathbf{p}}_{\text{eb}}^e \\ \mathbf{v}_{\text{eb}}^n = \hat{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^n}}. \quad (\text{B.39})$$

Schließlich betrachtet man noch Gl. (4.57), um  $\Delta \omega_{\text{ib}}^b$  zu bestimmen. Wegen  $\Delta \Omega_{\text{ib}}^b = \Omega_{\text{ib}}^b - \hat{\Omega}_{\text{ib}}^b$  folgt äquivalent:

$$\Delta \omega_{\text{ib}}^b = \omega_{\text{ib}}^b - \tilde{\omega}_{\text{ib}}^b = -\mathbf{b}_\omega - \mathbf{n}_\omega. \quad (\text{B.40})$$

Durch Ableitung von (B.40) nach  $\mathbf{b}_\omega$  folgt  $\Delta \omega_{\text{ib}}^b = -\Delta \mathbf{b}_\omega - \mathbf{n}_\omega$ , woraus letztendlich

$$\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(3,5)} := \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{b}_\omega} = -\hat{\mathbf{C}}_{\text{b}}^n \quad (\text{B.41})$$

resultiert. Somit stehen sämtliche Größen für das Aufstellen der Lagefehlerdifferenzialgleichung (B.35) zur Verfügung.

<sup>16</sup>Auf den Bezeichner SD sei bei den Schätzgrößen in diesem Teil des Anhangs der Übersichtlichkeit wegen verzichtet.

**Geschwindigkeitsfehlerdifferenzialgleichung** Die bisherige Vorgehensweise lässt sich auch für die Geschwindigkeitsfehlerdifferenzialgleichung (4.40) übernehmen. Betrachtet man die Gleichung im Detail, so fällt auf, dass eine Änderung des Geschwindigkeitsfehlers im Wesentlichen von den Orientierungsfehlern, Fehlern in den Beschleunigungsberechnungen und den Geschwindigkeitsfehlern selbst abhängt. Setzt man Gl. (4.58) und Gl. (B.27) in (4.40), so erhält man unter Verwendung von  $(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \Psi)^{-1} = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \Psi$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^{\text{n}} &= (\mathbf{I}_{3 \times 3} + \Psi) \hat{\mathbf{C}}_{\text{b}}^{\text{n}} (\hat{\mathbf{a}}_{\text{ib}}^{\text{b}} - \mathbf{b}_a) - (2\boldsymbol{\omega}_{\text{ie}}^{\text{n}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{en}}^{\text{n}}) \times \mathbf{v}_{\text{eb}}^{\text{n}} + \mathbf{g}^{\text{n}} - (\mathbf{I}_{3 \times 3} + \Psi) \hat{\mathbf{C}}_{\text{b}}^{\text{n}} \mathbf{n}_a \\ &\approx (\mathbf{I}_{3 \times 3} + \Psi) \hat{\mathbf{C}}_{\text{b}}^{\text{n}} (\hat{\mathbf{a}}_{\text{ib}}^{\text{b}} - \mathbf{b}_a) - (2\boldsymbol{\omega}_{\text{ie}}^{\text{n}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{en}}^{\text{n}}) \times \mathbf{v}_{\text{eb}}^{\text{n}} + \mathbf{g}^{\text{n}} - \hat{\mathbf{C}}_{\text{b}}^{\text{n}} \mathbf{n}_a. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Um die nötigen Terme der Zustandsübergangsmatrix des FF zu erhalten, muss die Geschwindigkeitsdifferenzialgleichung durch eine Taylorreihe approximiert werden:

$$\Delta \dot{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^{\text{n}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^{\text{n}}}{\partial \mathbf{v}_{\text{eb}}^{\text{n}}} \Delta \mathbf{v}_{\text{eb}}^{\text{n}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^{\text{n}}}{\partial \Upsilon} \Delta \Upsilon + \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^{\text{n}}}{\partial \mathbf{b}_a} \Delta \mathbf{b}_a. \quad (\text{B.43})$$

Durch Vergleich von (B.42) mit (B.43) fällt auf, dass lediglich das Kreuzprodukt von der Geschwindigkeit abhängt. Nach Auswerten dieses Terms und Ableiten nach der Geschwindigkeit erhält man

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^{\text{n}}}{\partial \mathbf{v}_{\text{eb}}^{\text{n}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{v_{\text{eb},d}^{\text{n}}}{R_n+h} & -2\Omega \sin \varphi - 2\frac{v_{\text{eb},e}^{\text{n}} \tan \varphi}{R_e+h} & \frac{v_{\text{eb},n}^{\text{n}}}{R_n+h} \\ 2\Omega \sin \varphi + \frac{v_{\text{eb},e}^{\text{n}} \tan \varphi}{R_e+h} & \frac{v_{\text{eb},n}^{\text{n}} \tan \varphi}{R_e+h} + \frac{v_{\text{eb},d}^{\text{n}}}{R_e+h} & 2\Omega \cos \varphi + \frac{v_{\text{eb},e}^{\text{n}}}{R_e+h} \\ -2\frac{v_{\text{eb},n}^{\text{n}}}{R_n+h} & -2\Omega \cos \varphi - 2\frac{v_{\text{eb},e}^{\text{n}}}{R_e+h} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,2)}}. \quad (\text{B.44})$$

Auch  $\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,2)}$  muss später an den zuvor geschätzten Positionen  $\hat{\mathbf{p}}_{\text{eb}}^{\text{e}}$  und Geschwindigkeiten  $\hat{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^{\text{n}}$  ausgewertet werden. Entsprechend resultiert für die Ableitungen nach den Orientierungs- und Biasfehlern:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^{\text{n}}}{\partial \Upsilon} = -\frac{\partial}{\partial \Upsilon} \left( \left[ \hat{\mathbf{C}}_{\text{b}}^{\text{n}} (\hat{\mathbf{a}}_{\text{ib}}^{\text{b}} - \mathbf{b}_a) \times \right] \Upsilon \right) = -[\hat{\mathbf{a}}_{\text{ib}}^{\text{n}} \times] =: \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,3)} \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^{\text{n}}}{\partial \mathbf{b}_a} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}_a} \left( (\mathbf{I}_{3 \times 3} + \Psi) \hat{\mathbf{C}}_{\text{b}}^{\text{n}} (-\mathbf{b}_a) \right) \approx -\hat{\mathbf{C}}_{\text{b}}^{\text{n}} =: \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(2,4)}, \quad (\text{B.46})$$

wobei  $\hat{\mathbf{a}}_{\text{ib}}^{\text{n}} = \hat{\mathbf{C}}_{\text{b}}^{\text{n}} (\hat{\mathbf{a}}_{\text{ib}}^{\text{b}} - \mathbf{b}_a) \Big|_{\mathbf{b}_a = \hat{\mathbf{b}}_a}$  die gemessene Beschleunigung des Körpers bezüglich des i-Rahmens in Koordinaten des n-Rahmens ist, verringert um das geschätzte Bias der jeweiligen Beschleunigungssensoren. Bei Gl. (B.46) wurde zur Vereinfachung angenommen, dass das Produkt aus Bias und kreuzproduktbildender Matrix sehr klein ist.

**Positionsfehlerdifferenzialgleichung** Im Folgenden sollen nun noch die entsprechenden Terme der Zustandsübergangsmatrix hergeleitet werden, die für die Berechnung der Positionskomponenten des Folgezustandes verantwortlich sind. Dazu müssen die Differenzialgleichungen

$$\Delta \dot{\varphi} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial v_{\text{eb},n}^{\text{n}}} \Delta v_{\text{eb},n}^{\text{n}} \quad (\text{B.47})$$

$$\Delta \dot{\lambda} = \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_{\text{eb},e}^{\text{n}}} \Delta v_{\text{eb},e}^{\text{n}} \quad (\text{B.48})$$

$$\Delta \dot{h} = \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_{\text{eb},d}^{\text{n}}} \Delta v_{\text{eb},d}^{\text{n}} \quad (\text{B.49})$$



unter Berücksichtigung der Gl. (4.46) bis (4.48) gelöst werden. Durch Einsetzen der Differenzen, die sich in Anlehnung an die Gl. (4.43) bis (4.45) ergeben, kann der Zusammenhang

$$\Delta \dot{\mathbf{p}}_{\text{eb}}^{\text{n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{v_{\text{eb},n}^{\text{n}}}{R_n+h} \\ \frac{v_{\text{eb},e}^{\text{n}} \cdot \tan(\varphi)}{R_n+h} & 0 & \frac{v_{\text{eb},e}^{\text{n}}}{R_e+h} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(1,1)}} \Delta \mathbf{p}_{\text{eb}}^{\text{n}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}_{3 \times 3} = \mathbf{F}_{\text{FF}}^{(1,2)}} \Delta \mathbf{v}_{\text{eb}}^{\text{n}} \quad (\text{B.50})$$

gewonnen werden, wobei  $\mathbf{F}_{\text{FF}}^{(1,1)}$  für die Vektoren  $\mathbf{p}_{\text{eb}}^{\text{e}} = \hat{\mathbf{p}}_{\text{eb}}^{\text{e}}$  und  $\mathbf{v}_{\text{eb}}^{\text{n}} = \hat{\mathbf{v}}_{\text{eb}}^{\text{n}}$  ausgewertet wird, die sich aus den *Strapdown*-Berechnungen ergeben.

## Anhang C

### Herleitung der Filtergleichungen zur Berücksichtigung zeitverzögerter Messungen

In diesem Abschnitt sollen die in Kap. 5.3.2 verwendeten Gleichungen hergeleitet werden, die eine Berücksichtigung von Messwerten ermöglichen, welche bereits vor ihrer Beobachtung gültig waren und nur verzögert bereitgestellt werden können. Wir gehen im Folgenden von einem zum Zeitpunkt  $k - i'$  gültigen, jedoch erst zum Zeitpunkt  $k$  verfügbaren Messvektor  $\mathbf{z}_k^{k-i'}$  aus, so dass

$$\mathbf{z}_k^{k-i'} = \mathbf{H}_{k-i'} \mathbf{x}_{k-i'} + \mathbf{M}_{k-i'} \mathbf{w}_{k-i'} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{w}_{k-i'} = \mathbf{D}_w \mathbf{w}_{k-i'-1} + \mathbf{\Gamma}_w \boldsymbol{\nu}_{k-i'} \quad (\text{C.2})$$

gilt, wobei  $\boldsymbol{\nu}_{k-i'} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_{k-i'}; \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}, \mathbf{R}_{k-i'})$  weiß und GAUSS-verteilt mit Mittelwertvektor  $\mathbf{0}_{\mathcal{D} \times 1}$  und Kovarianzmatrix  $\mathbf{R}_{k-i'}$  ist. Anders als in [LARP98] wird hier der Fall betrachtet, dass das Messrauschen zeitlich mit dem Systemzustandsvektor korreliert ist. Das Residuum lautet dann

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k-i'} := \mathbf{z}_k^{k-i'} - \mathbf{H}_{k-i'} \hat{\mathbf{x}}_{k-i'|k-i'-1}. \quad (\text{C.3})$$

Dabei ist  $\hat{\mathbf{x}}_{k-i'|k-i'-1}$  die propagierte Schätzung des Systemzustandes zum Zeitpunkt  $k - i'$ , gegeben die Messungen bis einschließlich  $k - i' - 1$ , und  $\mathbf{H}_{k-i'}$  die entsprechende Messmatrix. Im nächsten Schritt wird ein Residuum auf Basis eines extrapolierten Messwertes  $\mathbf{z}_k^{k*}$  berechnet, welches aufgetreten wäre, wenn es keine Verzögerung zwischen Messzeitpunkt und Verfügbarkeitszeitpunkt gegeben hätte. Dieses Residuum ist

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^* := \mathbf{z}_k^{k*} - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}. \quad (\text{C.4})$$

Setzt man beide Residuen (C.3) und (C.4) nun gleich, so erhält man

$$\mathbf{z}_k^{k*} = \mathbf{z}_k^{k-i'} + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{H}_{k-i'} \hat{\mathbf{x}}_{k-i'|k-i'-1}. \quad (\text{C.5})$$

Durch Einsetzen von (C.1) folgt mit den Abkürzungen  $\Delta \mathbf{x}_{k|k-1} := \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  und  $\Delta \mathbf{x}_{k-i'|k-i'-1} := \mathbf{x}_{k-i'} - \hat{\mathbf{x}}_{k-i'|k-i'-1}$ :

$$\mathbf{z}_k^{k*} = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \underbrace{\mathbf{H}_k \Delta \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{H}_{k-i'} \Delta \mathbf{x}_{k-i'|k-i'-1}}_{\mathbf{w}_k^*} + \mathbf{M}_{k-i'} \mathbf{w}_{k-i'}, \quad (\text{C.6})$$

wobei  $\mathbf{w}_k^*$  das zum Messvektor  $\mathbf{z}_k^{k*}$  zugehörige extrapolierte Messrauschen darstellt, das mit dem Systemzustand korreliert ist. Es müssen daher neue KALMAN-Filtergleichungen gefunden werden, welche die Korrelation mit dem Messrauschen und dem Systemzustand  $\mathbf{x}_k$  sowie  $\mathbf{x}_{k-i'}$  berücksichtigen. Bei den Gleichungen in Kap. 4.6.1 mussten nur die Korrelationen zum aktuellen Zeitpunkt  $k$

einbezogen werden, die sich durch Rauschprozesse höherer Ordnung ergeben haben. An dieser Stelle werden jedoch Korrelationen aufgrund von zeitlichen Verzögerungen berücksichtigt, die vom Zeitpunkt  $k - i'$  abhängen, wobei  $i' > r''$  und  $r''$  die Ordnung des Rauschprozesses ist. Dieses motiviert eine neue Herleitung zur Berechnung der Schätzfehlerkovarianzmatrix.

Zunächst wird eine Innovationssequenz zur Bestimmung der a posteriori-Schätzung des Systemzustandes festgelegt. In Anlehnung an (4.97) wird daher

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k^* \left( \mathbf{z}_k^{k*} - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \quad (\text{C.7})$$

aufgestellt, die sich durch Einsetzen von (C.6) zu

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k^* \left( \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k^* - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \quad (\text{C.8})$$

$$= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k^* \left( \mathbf{z}_k^{k-i'} - \mathbf{H}_{k-i'} \hat{\mathbf{x}}_{k-i'|k-i'-1} \right) \quad (\text{C.9})$$

vereinfacht. Durch Subtraktion beider Seiten von dem Vektor  $\mathbf{x}_k$  und der Abkürzung  $\Delta \mathbf{x}_{k|k} := \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  erhält man

$$\Delta \mathbf{x}_{k|k} = \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k \right) \Delta \mathbf{x}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{w}_k^*. \quad (\text{C.10})$$

Durch Bildung von  $\mathbf{P}_{k|k} := E \left[ \Delta \mathbf{x}_{k|k} \Delta \mathbf{x}_{k|k}^T \middle| \mathbf{z}_{1:k} \right]$  folgt für die Fehlerkovarianzmatrix des a posteriori-Schätzwertes

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &= \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k \right) \mathbf{P}_{k|k-1} \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k \right)^T - \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k \right) \mathbf{P}_{xw^*,k|k-1} (\mathbf{K}_k^*)^T \\ &\quad - \mathbf{K}_k^* \mathbf{P}_{xw^*,k|k-1}^T \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k \right)^T + \mathbf{K}_k^* \mathbf{P}_{w^*w^*,k|k-1} (\mathbf{K}_k^*)^T. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Für die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{xw^*,k|k-1}$  gilt dabei unter Berücksichtigung des extrapolierten Messrauschens  $w_k^*$  aus Gl. (C.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xw^*,k|k-1} &:= E \left[ \Delta \mathbf{x}_{k|k-1} (\mathbf{w}_k^*)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right] \\ &= -\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{k,k-i'|k-1} \mathbf{H}_{k-i'}^T + \mathbf{M}_{k-i'} \mathbf{P}_{xw,k,k-i'|k-1}, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

wobei

$$\mathbf{P}_{k,k-i'|k-1} := E \left[ \Delta \mathbf{x}_{k|k-1} \Delta \mathbf{x}_{k-i'|k-i'-1}^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right], \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{P}_{xw,k,k-i'|k-1} := E \left[ \Delta \mathbf{x}_{k|k-1} \mathbf{w}_{k-i'}^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right]. \quad (\text{C.14})$$

Da wir annehmen, dass der Fehler zum Zeitpunkt  $k$  nicht mit dem Messrauschen zum Zeitpunkt  $k - i'$  korreliert ist, gilt  $\mathbf{P}_{xw,k,k-i'|k-1} = \mathbf{0}_{\mathcal{D} \times \mathcal{H}}$ , wobei  $\mathbf{w}_{k-i'} \in \mathbb{R}^{\mathcal{H}}$  sei. Es müssen demnach nur noch zwei Kovarianzmatrizen bestimmt werden, um die Lösung für  $\mathbf{P}_{k|k}$  zu erhalten, da  $\mathbf{P}_{w^*x,k|k-1} = \mathbf{P}_{xw^*,k|k-1}^T$  gilt. Durch Einsetzen von (C.6) in  $\mathbf{P}_{w^*w^*,k|k-1} := E \left[ \mathbf{w}_k^* (\mathbf{w}_k^*)^T \middle| \mathbf{z}_{1:k-1} \right]$  erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{w^*w^*,k|k-1} &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T - \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-i'|k-1} \mathbf{H}_{k-i'}^T - \mathbf{H}_{k-i'} \mathbf{P}_{k,k-i'|k-1}^T \mathbf{H}_k^T \\ &\quad + \mathbf{H}_{k-i'} \mathbf{P}_{k-i'|k-i'-1} \mathbf{H}_{k-i'}^T + \mathbf{H}_{k-i'} \mathbf{P}_{xw,k-i'|k-i'-1} \mathbf{M}_{k-i'}^T \\ &\quad + \mathbf{M}_{k-i'} \mathbf{P}_{xw,k-i'|k-i'-1}^T \mathbf{H}_{k-i'}^T + \mathbf{M}_{k-i'} \mathbf{P}_{w^*w^*,k-i'} \mathbf{M}_{k-i'}^T. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Setzt man (C.12) und (C.15) in (C.11) ein, so erhält man nach einigen Umrechnungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k,k-i'|k-1} \mathbf{H}_{k-i'}^T (\mathbf{K}_k^*)^T - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_{k-i'} \mathbf{P}_{k,k-i'|k-1}^T \\ &\quad + \mathbf{K}_k^* \left( \mathbf{H}_{k-i'} \mathbf{P}_{k-i'|k-i'-1} \mathbf{H}_{k-i'}^T + \mathbf{H}_{k-i'} \mathbf{P}_{xw,k-i'|k-i'-1} \mathbf{M}_{k-i'}^T \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{M}_{k-i'} \mathbf{P}_{xw,k-i'|k-i'-1}^T \mathbf{H}_{k-i'}^T + \mathbf{M}_{k-i'} \mathbf{P}_{ww,k-i'} \mathbf{M}_{k-i'}^T \right) (\mathbf{K}_k^*)^T. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Für die Berechnung der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{k,k-i'|k-1}$  muss zunächst eine Formulierung für die Änderung des Schätzfehlers  $\Delta \mathbf{x}_{k|k-1}$  gefunden werden. Diese erhält man durch Subtraktion der Gleichung für den prädierten Systemzustand (4.90) von der Systemmodellgl. (4.76), woraus

$$\Delta \mathbf{x}_{k|k-1} = \Phi_k \Delta \mathbf{x}_{k-1|k-1} + \mathbf{G}_k \mathbf{n}_k \quad (\text{C.17})$$

resultiert. Um nun den noch unbekannten Vektor  $\Delta \mathbf{x}_{k-1|k-1}$  ersetzen zu können, müssen auch die Messungen berücksichtigt werden, die zwischen dem Gültigkeits- und Verfügbarkeitszeitpunkt der verzögerten Messungen liegen, denn diese können in der üblichen Weise verarbeitet werden. Analog zu (C.17) kann für diese

$$\Delta \mathbf{x}_{k|k} = \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \Delta \mathbf{x}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{w}_k \quad (\text{C.18})$$

aufgestellt werden, wobei  $\mathbf{K}_k$  wie in Gl. (4.96) berechnet wird und  $\mathbf{w}_k$  wieder das zeitkorrelierte Rauschen darstellt. Ersetzt man nun in (C.17)  $\Delta \mathbf{x}_{k-1|k-1}$  mit Hilfe von (C.18), so führt dies zu

$$\Delta \mathbf{x}_{k|k-1} = \Phi_k \left( \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1} \right) \Delta \mathbf{x}_{k-1|k-2} - \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{M}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \right) + \mathbf{G}_k \mathbf{n}_k. \quad (\text{C.19})$$

Durch mehrmaliges sukzessives Einsetzen von (C.17), (C.18) in (C.19) bis zu dem Zeitpunkt  $k - i'$ , an dem der verzögerte Messvektor gültig war, erhält man nach einigen Umrechnungen

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_{k|k-1} &= \left( \prod_{m'=1}^{i'} \Phi_{k-m'+1} \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_{k-m'} \mathbf{H}_{k-m'} \right) \right) \Delta \mathbf{x}_{k-i'|k-i'-1} \\ &\quad - \left( \prod_{m'=1}^{i'-1} \Phi_{k-m'+1} \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_{k-m'} \mathbf{H}_{k-m'} \right) \right) \Phi_{k-i'+1} \mathbf{K}_{k-i'} \mathbf{M}_{k-i'} \mathbf{w}_{k-i'} \\ &\quad + f(\mathbf{n}_k, \dots, \mathbf{n}_{k-i'+1}) - f(\mathbf{w}_{k-1}, \dots, \mathbf{w}_{k-i'+1}), \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

wobei mit  $f(\dots)$  Funktionen bezeichnet werden, welche von den System- bzw. Messrauschvektoren abhängen, die wiederum nicht korreliert sind. Diese sind ebenfalls nicht mit dem Vektor  $\Delta \mathbf{x}_{k-i'|k-i'-1}$  korreliert. Die Berechnung von  $\mathbf{P}_{k,k-i'|k-1}$  führt daher zu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k,k-i'|k-1} &= \left( \prod_{m'=1}^{i'} \Phi_{k-m'+1} \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_{k-m'} \mathbf{H}_{k-m'} \right) \right) \mathbf{P}_{k-i'|k-i'-1} \\ &\quad - \left( \prod_{m'=1}^{i'-1} \Phi_{k-m'+1} \left( \mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} - \mathbf{K}_{k-m'} \mathbf{H}_{k-m'} \right) \right) \Phi_{k-i'+1} \mathbf{K}_{k-i'} \mathbf{M}_{k-i'} \mathbf{P}_{xw,k-i'|k-i'-1}^T. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Die letzte Unbekannte ist die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{K}_k^*$  in Gl. (C.11). Diese kann durch Nullsetzen der Ableitung der Spur der aktualisierten Schätzfehlerkovarianzmatrix in (C.16) nach der Gewichtungsmatrix berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{spur}(\mathbf{P}_{k|k})}{\partial \mathbf{K}_k^*} &= -2\mathbf{P}_{k,k-i'|k-1}\mathbf{H}_{k-i'}^T \\ &\quad + 2\mathbf{K}_k^* \left( \mathbf{H}_{k-i'}\mathbf{P}_{k-i'|k-i'-1}\mathbf{H}_{k-i'}^T + \mathbf{H}_{k-i'}\mathbf{P}_{xw,k-i'|k-i'-1}\mathbf{M}_{k-i'}^T \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{M}_{k-i'}\mathbf{P}_{xw,k-i'|k-i'-1}^T\mathbf{H}_{k-i'}^T + \mathbf{M}_{k-i'}\mathbf{P}_{ww,k-i'}\mathbf{M}_{k-i'}^T \right) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\stackrel{!}{=} \mathbf{0}_{D \times D}, \quad (\text{C.23})$$

woraus

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k^* &= \mathbf{P}_{k,k-i'|k-1}\mathbf{H}_{k-i'}^T \left( \mathbf{H}_{k-i'}\mathbf{P}_{k-i'|k-i'-1}\mathbf{H}_{k-i'}^T + \mathbf{H}_{k-i'}\mathbf{P}_{xw,k-i'|k-i'-1}\mathbf{M}_{k-i'}^T \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{M}_{k-i'}\mathbf{P}_{xw,k-i'|k-i'-1}^T\mathbf{H}_{k-i'}^T + \mathbf{M}_{k-i'}\mathbf{P}_{ww,k-i'}\mathbf{M}_{k-i'}^T \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

resultiert. Setzt man dieses Ergebnis wiederum in (C.16) ein, so vereinfacht sich die Aktualisierung der Schätzfehlerkovarianzmatrix zu

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k^*\mathbf{H}_{k-i'}\mathbf{P}_{k,k-i'|k-1}^T. \quad (\text{C.25})$$

Mit (C.8), (C.21), (C.24) und (C.25) stehen sämtliche Gleichungen zur Verfügung, um zwar sub-optimal, aber effizient die verzögert verfügbaren Messungen berücksichtigen zu können. Die Aktualisierung des Systemzustandes kann dabei durch Gl. (C.9) erfolgen. Für die Berechnung der Kreuzkovarianzmatrizen  $\mathbf{P}_{xn,k|k}$  und  $\mathbf{P}_{xw,k|k}$  spielt ebenso (C.9) eine wichtige Rolle, sofern verzögerte Messungen vorliegen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xn,k|k} &:= E \left[ \Delta \mathbf{x}_{k|k} \mathbf{n}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k}^{k-i'} \right] \\ &= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k^* \left( \mathbf{z}_k^{k-i'} - \mathbf{H}_{k-i'}\hat{\mathbf{x}}_{k-i'|k-i'-1} \right) \right) \mathbf{n}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k}^{k-i'} \right] \\ &= E \left[ \left( \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) - \mathbf{K}_k^* \left( \mathbf{H}_{k-i'} \left( \mathbf{x}_{k-i'} - \hat{\mathbf{x}}_{k-i'|k-i'-1} \right) + \mathbf{M}_{k-i'}\mathbf{w}_{k-i'} \right) \right) \mathbf{n}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k}^{k-i'} \right] \\ &= \mathbf{P}_{xn,k|k-1} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xw,k|k} &:= E \left[ \Delta \mathbf{x}_{k|k} \mathbf{w}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k}^{k-i'} \right] \\ &= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k^* \left( \mathbf{z}_k^{k-i'} - \mathbf{H}_{k-i'}\hat{\mathbf{x}}_{k-i'|k-i'-1} \right) \right) \mathbf{w}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k}^{k-i'} \right] \\ &= E \left[ \left( \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) - \mathbf{K}_k^* \left( \mathbf{H}_{k-i'} \left( \mathbf{x}_{k-i'} - \hat{\mathbf{x}}_{k-i'|k-i'-1} \right) + \mathbf{M}_{k-i'}\mathbf{w}_{k-i'} \right) \right) \mathbf{w}_k^T \middle| \mathbf{z}_{1:k}^{k-i'} \right] \\ &= \mathbf{P}_{xw,k|k-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

## Anhang D

### Herleitung der barometrischen Höhenformel

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie aus einem gemessenen Luftdruck und Temperaturinformationen eine Höhe bestimmt werden kann. Dabei spielt die hydrostatische Grundgleichung nach [Us176] die entscheidende Rolle. Diese beschreibt die Änderung von Druck und Dichte in Abhängigkeit von der Höhe. Zur Herleitung der hydrostatischen Grundgleichung betrachtet man ein quaderförmiges Volumenelement  $dV$  mit der infinitesimalen Höhe  $dh$  und der Grundfläche  $dA$ . Von unten wirkt auf die Fläche  $dA$  nur eine durch den von der Höhe abhängigen Atmosphärendruck  $P(h)$  verursachte Kraft

$$F_u := P(h) \cdot dA. \quad (\text{D.1})$$

Von oben wirkt auf die Fläche ein um den Betrag  $dP$  verschiedener Druck und damit die Kraft

$$F_o := (P(h) + dP) \cdot dA. \quad (\text{D.2})$$

Zusätzlich hierzu wirkt von oben die Gewichtskraft  $F_g$  der in dem Volumen  $dV = dA \cdot dh$  enthaltenen Luftmasse  $dm$  mit der Dichte  $\rho$ :

$$\begin{aligned} F_g &= dm \cdot g(h) \\ &= \rho(h) \cdot dV \cdot g(h) \\ &= \rho(h) \cdot dh \cdot dA \cdot g(h). \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Hier bezeichnet  $g(h)$  die von der Höhe abhängige Schwerkraftbeschleunigung. Die Summe aller Kräfte muss im Gleichgewicht Null ergeben, d. h.  $F_u - F_o - F_g = 0$ . Einsetzen von (D.1), (D.2) und (D.3) liefert dann

$$\begin{aligned} P(h) \cdot dA - (P(h) + dP) \cdot dA - \rho(h) \cdot dh \cdot dA \cdot g(h) &= 0 \\ -\rho(h) \cdot dh \cdot g(h) - dP &= 0 \\ \frac{dP}{dh} &= -\rho(h)g(h). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Aus der idealen Gasgleichung in [Tip99] ergibt sich außerdem für die Dichte  $\rho(h)$  der Luft unter Berücksichtigung der Konstanten in Tab. 6.1:

$$\rho(h) = \frac{P(h) \cdot M}{\ell \cdot T(h)}. \quad (\text{D.5})$$

Auch wenn die ideale Gasgleichung nicht die Luftfeuchtigkeit berücksichtigt, kann sie hier als ausreichende Näherung verwendet werden. Einsetzen von Gl. (D.5) in Gl. (D.4) liefert die Ausgangsgleichung zur Herleitung der barometrischen Höhenformel:

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{P(h) \cdot g(h) \cdot M}{\ell \cdot T(h)}. \quad (\text{D.6})$$



Für die weitere Berechnung ist es nötig, einige Annahmen zur Vereinfachung zu treffen. In der Regel sind die molare Masse  $M$  der Luft und die universelle Gaskonstante  $\ell$  unabhängig von der Höhe. Zusätzlich wird nun die Schwerebeschleunigung unabhängig von der Höhe auf den Wert  $g_0$  (auf NN) gesetzt. Diese Vereinfachung erlaubt es später, einfacher über die Höhe zu integrieren.

Die hiermit bestimmte Höhe wird als geopotentielle Höhe  $h_{\text{geop}}$  bezeichnet. Die Umrechnung in eine geometrische Höhe  $h_{\text{geom}}$  ist durch Umstellen von Gl. (4.3) möglich [Us176]:

$$h_{\text{geom}} = \left( \frac{R_0 \cdot h_{\text{geop}}}{R_0 - h_{\text{geop}}} \right). \quad (\text{D.7})$$

Bis zu einer Höhe von 3 km liegt der Unterschied zwischen  $h_{\text{geom}}$  und  $h_{\text{geop}}$  für die in dieser Arbeit eingesetzten Sensoren im Bereich einer Messgenauigkeit von 1 m. Zudem ist die Änderung dieser Abweichung in Abhängigkeit von der Höhe so gering, dass diese, im Vergleich zu anderen Fehlern, kaum einen Einfluss hat und durch die Fehlerfilterung korrigiert werden kann. Aus diesem Grund wird auf die Umrechnung verzichtet und  $h := h_{\text{geop}} = h_{\text{geom}}$  gesetzt.

Schließlich ist es noch nötig, für die Temperatur  $T$  passende Annahmen zu treffen, so dass sich diese in Abhängigkeit von der Höhe beschreiben lässt. Eine gute Näherung für den Temperaturverlauf ist dabei eine lineare Abhängigkeit von der Höhe. Dieser wird auch in vielen Modellen für eine Standardatmosphäre angenommen. In [Us176] wird dabei folgender Zusammenhang angegeben:

$$T(h) = T(h_0) + \gamma_0 \cdot (h - h_0), \quad (\text{D.8})$$

wobei der (negative) Temperaturgradient  $\gamma_0$  eine mit der Höhe abnehmende Temperatur in  $[\text{K}/\text{m}]$  beschreibt. Diese Annahme gilt für den Bereich von 0 km bis 11 km Höhe über NN.  $T(h_0)$  ist dabei die Temperatur auf Referenzhöhe  $h_0$ , welche für den hier betrachteten Bereich von 0 km bis 11 km auf 0 m gesetzt wird. Oberhalb von 11 km (bis zu einer Höhe von 85 km) existieren Bereiche für die andere Temperaturgradienten und Referenzhöhen definiert sind. Diese sollen jedoch nicht weiter betrachtet werden.

Setzt man nun die o. g. Annahmen in Gl. (D.6) ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dh} &= - \frac{P(h) \cdot g_0 \cdot M}{\ell \cdot (T(h_0) + \gamma_0 \cdot (h - h_0))} \\ \Rightarrow \int_{P(h_0)}^{P(h_1)} \frac{dP}{P(h)} &= - \int_{h_0}^{h_1} \frac{g_0 \cdot M}{\ell \cdot (T(h_0) + \gamma_0 \cdot (h - h_0))} dh. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Mit dem allgemeinen Zusammenhang

$$\int \frac{1}{(ax + b)(cx + d)} dx = \frac{1}{bc - ad} \ln \left| \frac{cx + d}{ax + b} \right|, \quad (\text{D.10})$$

wobei  $c \neq 0$  [BSMM00], folgt nach Verwendung von  $h = h_1$  und  $P(h) = P(h_1)$ :

$$\ln \left( \frac{P(h)}{P(h_0)} \right) = - \frac{M \cdot g_0}{\ell} \cdot \frac{1}{\gamma_0} \ln \left( \frac{T(h_0) + \gamma_0 \cdot (h - h_0)}{T(h_0)} \right). \quad (\text{D.11})$$

Das Anwenden der Exponentialfunktion auf beiden Seiten der Gl. (D.11) und das Umstellen nach  $P(h)$  führt nun zur barometrischen Höhenformel, die den Luftdruck  $P$  in Abhängigkeit von der Höhe

$h$  beschreibt:

$$P := P(h) = P_0 \left( \frac{T_0}{T_0 + \gamma_0 \cdot (h - h_0)} \right)^{\frac{M \cdot g_0}{\ell \cdot \gamma_0}} = P_0 \left( \frac{T_0 + \gamma_0 \cdot (h - h_0)}{T_0} \right)^{-\frac{M \cdot g_0}{\ell \cdot \gamma_0}} \quad (\text{D.12})$$

mit  $P_0 = P(h_0)$  und  $T_0 = T(h_0)$ . Gl. (D.12) lässt sich leicht nach  $h$  auflösen und man erhält einen Ausdruck, der die Höhe  $h$  in Abhängigkeit vom Luftdruck  $P$  beschreibt. Es folgt:

$$h(P, P_0, T_0) = h_0 + \left( \left( \frac{P_0}{P} \right)^{\frac{\ell \cdot \gamma_0}{M \cdot g_0}} - 1 \right) \cdot \frac{T_0}{\gamma_0}. \quad (\text{D.13})$$

Mit den Gl. (D.8), (D.12) und (D.13) hat man nun zwei Möglichkeiten:

- **Berechnung von  $T(h)$  und  $P(h)$ :** Sind Werte für  $T_0$ ,  $h_0$ ,  $P_0$  und  $h$  gegeben, ist es mit den Gl. (D.8) und (D.12) möglich, ein Temperaturprofil  $T(h)$  und das dazugehörige Druckprofil  $P(h)$  für die gegebenen Höhen  $h$  zu erzeugen.
- **Berechnung von  $h(P, P_0, T_0)$ :** Sind Werte für  $h_0$ ,  $T_0$ ,  $P_0$  und  $P$  bekannt, ist es mit der Gl. (D.13) möglich, aus dem Druck die Höhe  $h$  zu berechnen.



## Anhang E

### Ergänzungen zu den Parameterschätzverfahren

#### E.1 Sequenzieller EM-Algorithmus

Im Folgenden werden einige Herleitungen und Ergänzungen zu Kap. 7 gegeben.

**Mathematische Zusammenhänge** Es sei im Folgenden  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$  eine quadratische Matrix, die aus den Komponenten  $C^{(m', f')}$  besteht, und  $\mathbf{S}$  eine symmetrische Matrix. Des Weiteren seien zwei Vektoren  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{b}$  gegeben. Der Vektor  $\mathbf{a}_{m'} := (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)^T$  ist ein Nullvektor mit einer Eins an der  $m'$ -ten Position. Des Weiteren sei

$$\delta_{m' f'} := \begin{cases} 1 & \text{für } m' = f' \\ 0 & \text{für } m' \neq f' \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

das KRONECKER-Delta. Nach [Fuk90] gilt:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{b} = \text{spur} \{ \mathbf{e}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{b} \} = \text{spur} \{ \mathbf{C}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{e}^T \}. \quad (\text{E.2})$$

Sei nun weiterhin  $\mathbf{P} := \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{C}^{-1}$ , wobei  $P^{(m', f')}$  die Komponenten der Matrix  $\mathbf{P}$  bezeichnen, so gilt nach [Fuk90]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{spur} \{ \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \}}{\partial C^{(m', f')}} &= - \left( P^{(m', f')} + P^{(f', m')} - \delta_{m' f'} P^{(m', f')} \right) \\ &= -\mathbf{a}_{m'}^T \mathbf{P} \mathbf{a}_{f'} - \mathbf{a}_{f'}^T \mathbf{P} \mathbf{a}_{m'} + \delta_{m' f'} \mathbf{a}_{m'}^T \mathbf{P} \mathbf{a}_{f'}. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Ist die Matrix  $\mathbf{C}$  jetzt außerdem symmetrisch, so folgt mit  $\mathbf{A}_{m' f'}^*$  als Nullmatrix, die aber an den Positionen  $(m', f')$  und  $(f', m')$  eine Eins aufweist:

$$\mathbf{a}_{f'}^T \mathbf{P} \mathbf{a}_{m'} = \mathbf{a}_{m'}^T \mathbf{P} \mathbf{a}_{f'} \Rightarrow \frac{\partial \text{spur} \{ \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \}}{\partial C^{(m', f')}} = -(2 - \delta_{m' f'}) \mathbf{a}_{m'}^T \mathbf{P} \mathbf{a}_{f'} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(\det \{ \mathbf{C} \})}{\partial \mathbf{C}} &= (2\mathbf{C}^{-1} - \text{diag}^{-1}(\mathbf{C}^{-1})) \\ \Rightarrow \frac{\partial \log(\det \{ \mathbf{C} \})}{\partial C^{(m', f')}} &= (2 - \delta_{m' f'}) \mathbf{a}_{m'}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_{f'} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial C^{(m', f')}} &= -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}_{m' f'}^* \mathbf{C}^{-1} \\ &= -\mathbf{C}^{-1} (\mathbf{a}_{m'} \mathbf{a}_{f'}^T + \mathbf{a}_{f'} \mathbf{a}_{m'}^T - \delta_{m' f'} \mathbf{a}_{m'} \mathbf{a}_{f'}^T) \mathbf{C}^{-1} \\ &= -(2 - \delta_{m' f'}) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_{m'} \mathbf{a}_{f'}^T \mathbf{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

**Zielfunktion** Der Logarithmus einer Verbundverteilung aus einer Sequenz von Zufallsvektoren  $\mathbf{x}_{1:k}$  (als Realisierungen der gleichnamigen Zufallsvariablen  $\mathbf{x}_{1:k}$ ), einer Sequenz  $\mathbf{z}_{1:k}$  von Beobachtungsvektoren (als Realisierungen der gleichnamigen Zufallsvariablen  $\mathbf{z}_{1:k}$ ) vom Zeitpunkt  $k = 1$  bis zum aktuellen Zeitpunkt  $k$  sowie der unbekannten, diagonalen Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_\eta = \text{diag}(\mathbf{q}_\eta)$ , kann mit Hilfe der BAYES'schen Regel für bedingte Wahrscheinlichkeiten wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \log(p(\mathbf{x}_{1:k}, \mathbf{z}_{1:k}; \mathbf{q}_\eta)) &= \log(p(\mathbf{z}_{1:k} | \mathbf{x}_{1:k}) \cdot p(\mathbf{x}_{1:k}; \mathbf{q}_\eta)) \\ &= \log(p(\mathbf{z}_{1:k} | \mathbf{x}_{1:k})) + \log(p(\mathbf{x}_{1:k}; \mathbf{q}_\eta)). \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Da für ein autoregressives Modell erster Ordnung (wenn  $\mathbf{x}_k$  unabhängig von  $\mathbf{x}_{k-2}$ , etc.)

$$\begin{aligned} \log(p(\mathbf{x}_{1:k}; \mathbf{q}_\eta)) &= \log\left(p(\mathbf{x}_1) \prod_{\kappa=2}^k p(\mathbf{x}_\kappa | \mathbf{x}_{\kappa-1}; \mathbf{q}_\eta)\right) \\ &= \log(p(\mathbf{x}_1)) + \sum_{\kappa=2}^k \log(p(\mathbf{x}_\kappa | \mathbf{x}_{\kappa-1}; \mathbf{q}_\eta)) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

gilt, folgt:

$$\log(p(\mathbf{x}_{1:k}, \mathbf{z}_{1:k}; \mathbf{q}_\eta)) = \log(p(\mathbf{x}_1)) + \log(p(\mathbf{z}_{1:k} | \mathbf{x}_{1:k})) + \sum_{\kappa=2}^k \log(p(\mathbf{x}_\kappa | \mathbf{x}_{\kappa-1}; \mathbf{q}_\eta)), \quad (\text{E.9})$$

wobei  $p(\mathbf{x}_1) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_1; \mathbf{0}_{\mathcal{H} \times 1}, \mathbf{P}_1)$  und  $\mathbf{P}_1$  die Kovarianzmatrix der Zufallsvariablen  $\mathbf{x}_1$  ist.

**Erwartungswertberechnung** Im Folgenden soll gezeigt werden, wie die Matrix  $\mathbf{E}_k$  in Gl. (7.40) geschätzt werden kann. Für die Matrix gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k &:= E[(\mathbf{x}_k - \Phi_k \mathbf{x}_{k-1})(\mathbf{x}_k - \Phi_k \mathbf{x}_{k-1})^T | \dots] \\ &= E[(\mathbf{x}_k - \Phi_k \mathbf{x}_{k-1})(\mathbf{x}_k - \Phi_k \mathbf{x}_{k-1})^T | \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta, k-1}]. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Durch Ausmultiplizieren folgt:

$$\mathbf{E}_k = E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T | \dots] - \Phi_k E[\mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_k^T | \dots] - E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}^T | \dots] \Phi_k^T + \Phi_k E[\mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T | \dots] \Phi_k^T. \quad (\text{E.11})$$

Zunächst werde die Schätzfehlerkovarianzmatrix betrachtet. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &:= E\left[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T | \dots\right] \\ &= E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T | \dots] - E[\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \mathbf{x}_k^T | \dots] - E[\mathbf{x}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T | \dots] + E[\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T | \dots]. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Da  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} := E[\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta, k-1}]$  folgt für (E.12) und damit für den ersten Summanden in (E.11):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &= E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T | \dots] - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} E[\mathbf{x}_k^T | \dots] - E[\mathbf{x}_k | \dots] \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T + \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T \\ &= E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T | \dots] - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T + \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T \\ &= E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T | \dots] - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T \\ \Rightarrow E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T | \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta, k-1}] &= \mathbf{P}_{k|k} + \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Analog erhält man für den letzten Summanden in (E.11) mit  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k} := E \left[ \mathbf{x}_{k-1} \mid \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right]$ :

$$E \left[ \mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T \mid \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right] = \mathbf{P}_{k-1|k} + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^T \quad (\text{E.14})$$

Die beiden mittleren Summanden in (E.11) müssen gesondert betrachtet werden. Es sei  $\mathbf{P}_{k,k-1|k}$  die so genannte *Lag-One*-Schätzfehlerkovarianzmatrix [RAG04]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k,k-1|k} &:= E \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right) \left( \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k} \right)^T \mid \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right] \\ &= E \left[ \mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}^T \mid \dots \right] - E \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \mathbf{x}_{k-1}^T \mid \dots \right] - E \left[ \mathbf{x}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^T \mid \dots \right] + E \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^T \mid \dots \right] \\ &= E \left[ \mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}^T \mid \dots \right] - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} E \left[ \mathbf{x}_{k-1}^T \mid \dots \right] - E \left[ \mathbf{x}_k \mid \dots \right] \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^T \\ &\quad + E \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \mid \dots \right] E \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^T \mid \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Da außerdem  $E \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \mid \dots \right] = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  und  $E \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^T \mid \dots \right] = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^T$  gilt, folgt:

$$\mathbf{P}_{k,k-1|k} = E \left[ \mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}^T \mid \dots \right] - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} E \left[ \mathbf{x}_{k-1}^T \mid \dots \right]. \quad (\text{E.16})$$

Bei genauer Betrachtung von (E.14) und (E.16) fällt auf, dass  $E \left[ \mathbf{x}_{k-1}^T \mid \mathbf{z}_{1:k}; \hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1} \right] = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^T \neq \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^T$  ist, denn dieser Erwartungswert muss in Abhängigkeit von der aktuellen Beobachtung  $\mathbf{z}_k$  und der Schätzung  $\hat{\mathbf{q}}_{\eta,k-1}$  bestimmt werden. Aus diesem Grund muss eine Erweiterung des Systemzustandsvektors entsprechend  $\mathbf{x}_k^T \rightarrow (\mathbf{x}_k^T \ \mathbf{x}_{k-1}^T)$  vorgenommen werden.

## E.2 Empirische Parameterschätzung

Im Folgenden sei  $\mathbf{Z}_{\dagger}$  ein Vektor, bestehend aus reellen Zufallsvariablen, und  $\mathbf{z}_{\dagger,f'} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$  mit  $1 < f' < k$  und  $f' \in \mathbb{N}$  dessen Realisierungen. Nach [Bal09] und [OS99] sei  $\mathbf{Z}_{\dagger}$  ergodisch und die Realisierungen seien konstant in dem begrenzten Intervall  $1 < f' < k$ . Der Mittelwert  $\boldsymbol{\mu}_{\dagger}$  und die korrespondierende  $[\mathcal{D} \times \mathcal{D}]$ -Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\dagger} = \text{diag} \left( \mathbf{q}_{\dagger} \right)$  sind zum Zeitpunkt  $k$  gegeben durch

$$\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k} := E \left[ \mathbf{Z}_{\dagger} \right] \approx \frac{1}{k} \sum_{f'=1}^k \mathbf{z}_{\dagger,f'} \quad (\text{E.17})$$

$$\mathbf{m}_{\dagger,k}^2 := E \left[ \mathbf{Z}_{\dagger}^2 \right] \approx \frac{1}{k} \sum_{f'=1}^k \mathbf{z}_{\dagger,f'}^2 \quad (\text{E.18})$$

$$\mathbf{q}_{\dagger,k} := E \left[ \left( \mathbf{Z}_{\dagger} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k} \right)^2 \right], \quad (\text{E.19})$$

wobei  $\mathbf{m}_{\dagger,k}^2$  der Erwartungswert des quadrierten Vektors  $\mathbf{Z}_{\dagger}$  ist, der durch den empirischen Mittelwert der quadrierten Realisierungen  $\mathbf{z}_{\dagger,f'}$  zum Zeitpunkt  $k$  angenähert wird. Für eine rekursive Beschreibung des empirischen Mittelwertes setzen wir zuerst (E.18) in (E.19) ein. Damit gilt:

$$\mathbf{q}_{\dagger,k} = \mathbf{m}_{\dagger,k}^2 - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}^2. \quad (\text{E.20})$$

Andererseits kann für den empirischen Mittelwert der quadrierten Realisierungen auch

$$\mathbf{m}_{\dagger,k}^2 \approx \frac{1}{k} \left( \mathbf{z}_{\dagger,k}^2 + \sum_{f'=1}^{k-1} \mathbf{z}_{\dagger,f'}^2 \right) \quad (\text{E.21})$$



geschrieben werden. Mit  $\mathbf{m}_{\dagger,k-1}^2 \approx \frac{1}{k-1} \sum_{f'=1}^{k-1} \mathbf{z}_{\dagger,f'}^2$  erhalten wir eine rekursive Beschreibung:

$$\mathbf{m}_{\dagger,k}^2 \approx \frac{1}{k} ((k-1) \mathbf{m}_{\dagger,k-1}^2 + \mathbf{z}_{\dagger,k}^2). \quad (\text{E.22})$$

Ersetzen wir nun  $\mathbf{m}_{\dagger,k}^2$  in Gl. (E.20) durch (E.22), so folgt:

$$\mathbf{q}_{\dagger,k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \mathbf{m}_{\dagger,k-1}^2 + \frac{1}{k} \mathbf{z}_{\dagger,k}^2 - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}^2. \quad (\text{E.23})$$

Analog zu Gl. (E.21) erhalten wir damit ebenso eine rekursive Formel für den Mittelwertvektor in (E.17) mit

$$\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} + \frac{1}{k} \mathbf{z}_{\dagger,k}. \quad (\text{E.24})$$

In (E.24) werden bereits sämtliche Beobachtungen  $\mathbf{z}_{\dagger,1}, \dots, \mathbf{z}_{\dagger,k-1}$  berücksichtigt. Falls bereits eine a priori-Information über den Mittelwert vorliegt, so sollte  $k > 1$  gewählt werden, um dieses Wissen zu berücksichtigen. Um nun eine rekursive Form für die Berechnung der Kovarianzmatrix zu erhalten, kann (E.24) in Gl. (E.23) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\dagger,k} &= \left(1 - \frac{1}{k}\right) \mathbf{m}_{\dagger,k-1}^2 + \frac{1}{k} \mathbf{z}_{\dagger,k}^2 - \left( \left(1 - \frac{1}{k}\right) \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} + \frac{1}{k} \mathbf{z}_{\dagger,k} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left( \mathbf{m}_{\dagger,k-1}^2 - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1}^2 + \frac{1}{k} (\mathbf{z}_{\dagger,k} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1})^2 \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{k}\right) \mathbf{q}_{\dagger,k-1} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{k} (\mathbf{z}_{\dagger,k} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1})^2, \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

wobei  $\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} = \frac{1}{k-1} \sum_{f'=1}^{k-1} \mathbf{z}_{\dagger,f'}$  gilt. Mit diesen Gleichungen wird somit ein exponentiell gewichtetes Fenster über das jeweilige Datenintervall gelegt.

**Alternative 1** Da sich die Definition für die Stichprobenvarianz von der in Gl. (E.19) unterscheidet, hat dies auch Auswirkungen auf die nachfolgenden Herleitungen. Geht man nach [Oth03] von einem erwartungstreuen *ML*-Schätzwert

$$\mathbf{q}_{\dagger,k} = \frac{1}{k-1} \sum_{f'=1}^k (\mathbf{z}_{\dagger,f'} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k})^2 \quad (\text{E.26})$$

aus und wird auch hier der letzte Summand von der Summe getrennt, so können nach Einsetzen von Gl. (E.26), wobei  $k-1$  an Stelle von  $k$  verwendet wird, die Diagonalelemente der aktuellen Kovarianzmatrix durch die rekursive Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{q}_{\dagger,k} = \underbrace{\frac{k-2}{k-1}}_{1-\zeta} \mathbf{q}_{\dagger,k-1} + \underbrace{\frac{1}{k-1}}_{\zeta} (\mathbf{z}_{\dagger,k} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k})^2 \quad (\text{E.27})$$

gewonnen werden. Wie oben muss auch hier auf eine entsprechende Initialisierung geachtet werden. Soll a priori-Wissen einfließen, so muss der Startindex im Gegensatz zu Gl. (E.25) um Eins inkrementiert werden. Für  $k = 3$  werden beide Summanden gleich gewichtet. Bis auf eine leicht veränderte Gewichtung der Einzelsummanden und der Verwendung des aktuell gültigen Mittelwertvektors  $\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}$ , ist prinzipiell kein Unterschied zu (E.25) vorhanden. Mit dieser Variante wird jedoch erreicht, dass die aktuelle Kovarianzschätzung auch vom aktuellen Mittelwertvektor abhängt. In der Literatur wird diese Art Rekursion häufig für ein konstantes  $\zeta$  mit  $0 < \zeta < 1$  gewählt: ein heuristischer Faktor, der dafür sorgt, dass die zurückliegenden Messungen stärker oder schwächer berücksichtigt werden.

**Alternative 2** Wäre es möglich, vor der Berechnung der Varianzen bereits eine vollständige Aussage über die Mittelwerte zum Zeitpunkt  $k = K$  zu treffen und die Berechnung nicht parallel zur Varianzberechnung durchführen zu müssen, könnten nach [Tys92] bessere Ergebnisse für (E.27) erreicht werden. Wir betrachten daher die modifizierte Gl. (E.26), wobei bereits der  $k$ -te Summand extrahiert wurde:

$$\mathbf{q}_{\dagger,k} = \frac{1}{k-1} \sum_{f'=1}^{k-1} (\mathbf{z}_{\dagger,f'} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k})^2 + \frac{1}{k-1} (\mathbf{z}_{\dagger,k} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k})^2. \quad (\text{E.28})$$

Wird nun der erste Term mit  $\pm 2\mathbf{z}_{\dagger,f'}\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1}$  sowie  $\pm \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1}^2$  erweitert, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k-1} \sum_{f'=1}^{k-1} (\mathbf{z}_{\dagger,f'} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k})^2 &= \\ &= \frac{1}{k-1} \sum_{f'=1}^{k-1} \mathbf{z}_{\dagger,f'}^2 + \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}^2 - 2\mathbf{z}_{\dagger,f'}\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k} + 2\mathbf{z}_{\dagger,f'}\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} - 2\mathbf{z}_{\dagger,f'}\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} + \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1}^2 - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1}^2 \\ &= \frac{1}{k-1} \sum_{f'=1}^{k-1} (\mathbf{z}_{\dagger,f'} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1})^2 + 2(\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}) \frac{1}{k-1} \sum_{f'=1}^{k-1} \mathbf{z}_{\dagger,f'} + \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}^2 - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1}^2 \\ &= \frac{1}{k-1} \sum_{f'=1}^{k-1} (\mathbf{z}_{\dagger,f'} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1})^2 + 2(\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}) \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} + \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}^2 - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1}^2 \\ &= \frac{1}{k-1} \sum_{f'=1}^{k-1} (\mathbf{z}_{\dagger,f'} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1})^2 + \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1}^2 - 2\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1} + \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k}^2 \\ &= \frac{1}{k-1} \sum_{f'=1}^{k-1} (\mathbf{z}_{\dagger,f'} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1})^2 + (\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1})^2. \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

Durch Einsetzen von (E.29) und Verwendung von  $\mathbf{q}_{\dagger,k-1} = \frac{1}{k-2} \sum_{f'=1}^{k-1} (\mathbf{z}_{\dagger,f'} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1})^2$  in (E.28) erhält man schließlich:

$$\mathbf{q}_{\dagger,k} = \underbrace{\frac{k-2}{k-1} \mathbf{q}_{\dagger,k-1}}_{1-\zeta} + \underbrace{\frac{1}{k-1} (\mathbf{z}_{\dagger,k} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k})^2 + (\boldsymbol{\mu}_{\dagger,k} - \boldsymbol{\mu}_{\dagger,k-1})^2}_{\zeta}. \quad (\text{E.30})$$

Der Unterschied zu Gl. (E.27) ist der letzte Summand in (E.30). Dieser berücksichtigt die Aktualisierung des Mittelwertvektors, wodurch der Varianzvektor größer als in (E.27) geschätzt wird.

### E.3 Auswertung von Messwertdifferenzen

**Autoregressiver Rauschprozess zweiter Ordnung** Im Folgenden soll das in [Wen07] aufgeführte Verfahren beschrieben werden, welches die Bestimmung der reellen Parameter eines zeitlich korrelierten (autoregressiven) Rauschprozesses zweiter Ordnung erlaubt. Dieser Prozess sei in skalarer Form mit  $\dagger \in \{\omega, a\}$  durch

$$n_{\dagger,k} = d_n^{(1)} n_{\dagger,k-1} + d_n^{(2)} n_{\dagger,k-2} + \eta_{\dagger,k} \quad (\text{E.31})$$

beschrieben, wobei  $\eta_{\dagger,k} \sim \mathcal{N}(\eta_{\dagger,k}; 0, \sigma_{\eta_{\dagger}}^2)$  mit  $\sigma_{\eta_{\dagger}}^2 = E[\eta_{\dagger,k}^2]$  ist. Des Weiteren sei mit

$$z_{\dagger,k} = x_{\dagger,k} + b_{\dagger,k} + n_{\dagger,k} \quad (\text{E.32})$$

eine Messgleichung gegeben, die durch das zeitlich korrelierte Rauschen  $n_{\dagger,k}$  beeinflusst wird.  $x_{\dagger,k}$  ist hier die ideale Zustandsgröße und  $b_{\dagger,k}$  das zeitvariante Bias. Geht man von einer geringen Trajektorienndynamik (ideale Bewegung) und einem sich langsam ändernden Bias aus, d. h.  $x_{\dagger,k} \approx x_{\dagger,k-1}$  und  $b_{\dagger,k} \approx b_{\dagger,k-1}$ , so folgt

$$z_{\dagger,k} - z_{\dagger,k-1} = n_{\dagger,k} - n_{\dagger,k-1} =: \Delta n_{\dagger,k} \quad (\text{E.33})$$

$$\Rightarrow E[\Delta n_{\dagger,k} \Delta n_{\dagger,k-i'} | z_{\dagger,1:k}] =: r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(i')} \quad (\text{E.34})$$

für  $i' \in \{0, 1, 2\}$ . Durch eine rekursive Berechnung mit Hilfe des heuristischen Parameters  $0 < \zeta'$  erhält man für die Korrelation zum Zeitpunkt  $k$ :

$$r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(i')} = (1 - \zeta') r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(i'), k-1} + \zeta' \Delta n_{\dagger,k} \Delta n_{\dagger,k-i'}. \quad (\text{E.35})$$

Je kleiner  $\zeta'$  hier gewählt wird, desto rauschärmer ist die Schätzung von  $r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(i')}$ . Setzt man nun Gl. (E.31) sowie die entsprechende Gleichung für  $n_{\dagger,k-1}$  in (E.33) ein, so erhält man:

$$\Delta n_{\dagger,k} = d_n^{(1)} \Delta n_{\dagger,k-1} + d_n^{(2)} \Delta n_{\dagger,k-2} + \eta_{\dagger,k} - \eta_{\dagger,k-1}. \quad (\text{E.36})$$

Berechnet man den Erwartungswert  $E[\Delta n_{\dagger,k} \eta_{\dagger,k} | z_{\dagger,1:k}]$ , so erhält man nach Einsetzen von (E.36):

$$E\left[\left(d_n^{(1)} \Delta n_{\dagger,k-1} + d_n^{(2)} \Delta n_{\dagger,k-2} + \eta_{\dagger,k} - \eta_{\dagger,k-1}\right) \eta_{\dagger,k} \middle| z_{\dagger,1:k}\right] = \sigma_{\eta_{\dagger}}^2. \quad (\text{E.37})$$

Entsprechend folgt  $E[\Delta n_{\dagger,k} \eta_{\dagger,k-1} | z_{\dagger,1:k}] = (d_n^{(1)} - 1) \sigma_{\eta_{\dagger}}^2$ . Des Weiteren findet man durch Einsetzen von (E.36):

$$E[\Delta n_{\dagger,k} \Delta n_{\dagger,k} | z_{\dagger,1:k}] = r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)} = d_n^{(1)} r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(1)} + d_n^{(2)} r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(2)} + (2 - d_n^{(1)}) \sigma_{\eta_{\dagger}}^2 \quad (\text{E.38})$$

$$E[\Delta n_{\dagger,k} \Delta n_{\dagger,k-1} | z_{\dagger,1:k}] = r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(1)} = d_n^{(1)} r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)} + d_n^{(2)} r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(1)} - \sigma_{\eta_{\dagger}}^2 \quad (\text{E.39})$$

$$E[\Delta n_{\dagger,k} \Delta n_{\dagger,k-2} | z_{\dagger,1:k}] = r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(2)} = d_n^{(1)} r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(1)} + d_n^{(2)} r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)}. \quad (\text{E.40})$$

Setzt man (E.38) bis (E.40) nun ineinander ein, so erhält man für die drei unbekannten Parameter jeweils zwei Lösungen, wobei jedoch nur die Zusammenhänge

$$d_n^{(1)} = \frac{r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)} + 2 r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(1)} + r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(2)}}{r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)} + r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(1)}} \quad (\text{E.41})$$

$$d_n^{(2)} = \frac{r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)} r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(2)} - r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)} r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(1)} - 2 \left(r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(1)}\right)^2}{r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)} \left(r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)} + r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(1)}\right)} \quad (\text{E.42})$$

$$\sigma_{\eta_{\dagger}}^2 = \frac{\left(r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)}\right)^2 + r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)} r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(2)} - 2 \left(r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(1)}\right)^2}{r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger}}^{(0)}} \quad (\text{E.43})$$

zu einem sinnvollen Ergebnis führen. Um eine Divergenz der Varianz des zeitlich korrelierten Rauschens  $n_{\dagger,k}$  zu vermeiden, muss darauf geachtet werden, dass die Ungleichungen  $d_n^{(2)} \neq -1$  sowie  $d_n^{(2)} \neq \pm \left(d_n^{(1)} + 1\right)$  erfüllt bleiben [Wen07]. Mit den Übergängen  $d_n^{(1)} \rightarrow d_{n,k}^{(1)}$ ,  $d_n^{(2)} \rightarrow d_{n,k}^{(2)}$  und  $\sigma_{\eta_{\dagger}}^2 \rightarrow \sigma_{\eta_{\dagger,k}}^2$  wird in den Gl. (E.41) bis (E.43) angenommen, dass die Parameter zeitvariant sind.

**Autoregressiver Rauschprozess erster Ordnung** Mit Vernachlässigung des Parameters  $d_n^{(2)}$  in Gl. (E.31) folgt für einen Prozess erster Ordnung entsprechend:

$$\Delta n_{\dagger,k} = d_n \Delta n_{\dagger,k-1} + \eta_{\dagger,k} - \eta_{\dagger,k-1}. \quad (\text{E.44})$$

Daraus resultiert

$$E [\Delta n_{\dagger,k} \Delta n_{\dagger,k} | z_{\dagger,1:k}] = r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(0)} = d_n r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(1)} + (2 - d_n) \sigma_{\eta_{\dagger}}^2 \quad (\text{E.45})$$

$$E [\Delta n_{\dagger,k} \Delta n_{\dagger,k-1} | z_{\dagger,1:k}] = r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(1)} = d_n r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(0)} - \sigma_{\eta_{\dagger}}^2 \quad (\text{E.46})$$

und schließlich

$$d_n = \frac{r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(0)} + 2 r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(1)}}{r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(0)}} \quad (\text{E.47})$$

$$\sigma_{\eta}^2 = r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(0)} + r_{\Delta n_{\dagger} \Delta n_{\dagger,k}}^{(1)}. \quad (\text{E.48})$$



## Anhang F

### Erzeugung künstlicher Daten

Um eine vereinfachte Untersuchung der hier vorgestellten Algorithmen zu ermöglichen, sind entsprechend ideale Referenzdaten notwendig. Da eine ausreichende Anzahl an Felddaten nur mit großem Aufwand aufzunehmen ist und diese meist fehlerbehaftet sind, war es notwendig, auch auf künstlich generierte Sensor- und Referenzdaten zurückzugreifen. Ein Vorteil der Generierung künstlicher Daten ist, dass sowohl Daten zur Verfügung stehen, die den realen Felddaten annähernd entsprechen als auch die zugehörigen (erforderlichen) ungestörten Daten vorhanden sind, um eine vereinfachte Auswertung der Algorithmen durchführen zu können. Für reale Daten sind entsprechende Informationen lediglich mit sehr teuren und aufwendigen Referenzmessungen möglich. Die Schwierigkeit bei der Generierung künstlicher Daten ist die Einhaltung physikalischer Gegebenheiten wie z. B. die Berücksichtigung der Erdrotation bei der Simulation von Drehratensensordaten. Im Folgenden soll die Generierung künstlicher Daten mit Hilfe der Matlab-Zusatzsoftware der Fa. GPSofT LLC. (*INS-Toolbox 3.0* und *SatNav-Toolbox 3.0*) im Detail erläutert werden. Die Abb. F.1 zeigt das Blockschaltbild mit den verwendeten Komponenten zur Generierung der verschiedenen Referenz- und Sensordaten.

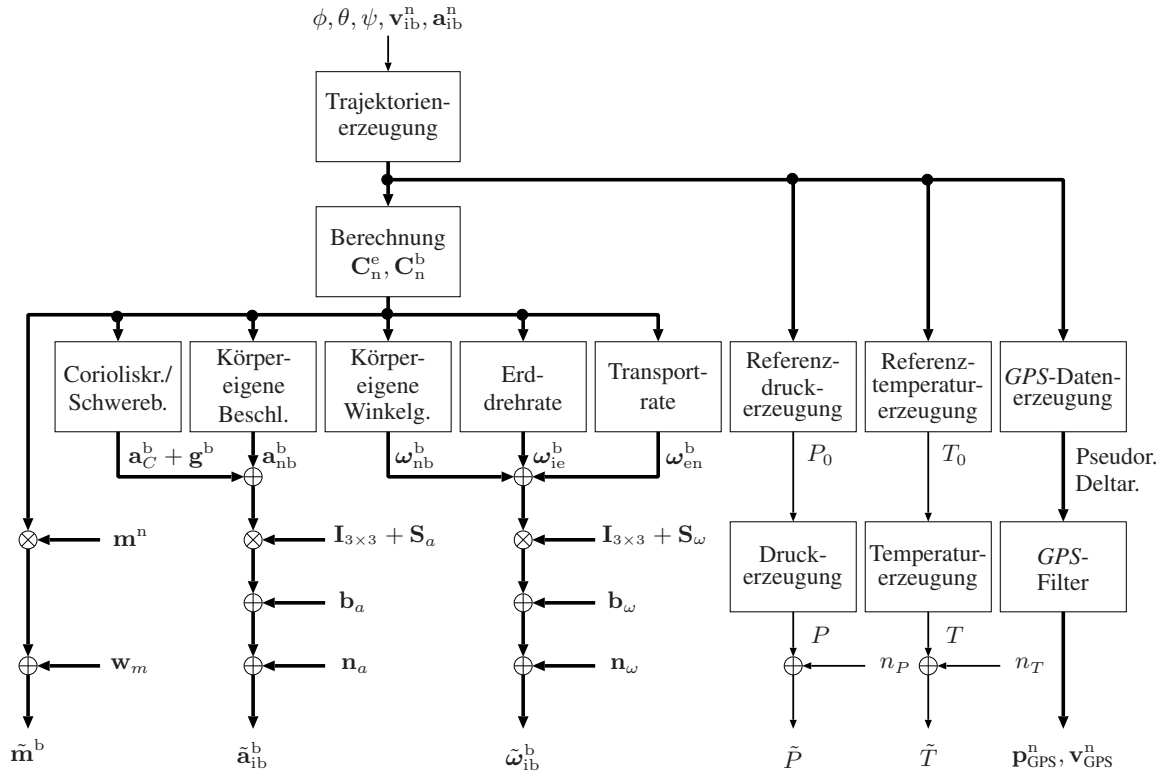


Abbildung F.1: Übersicht des Systems zur Generierung künstlicher Sensordaten



**Positions-, Geschwindigkeits- und Orientierungsdaten** Die zwei genannten Softwarepakete bilden die Grundlage für die Simulationsumgebung sowohl zur Generierung der Daten als auch zur Unterstützung der Filteralgorithmen. Die dreidimensionalen Positionsdaten werden zunächst auf Basis von drei verschiedenen Bewegungsmodellen generiert. Die Koordinaten werden dabei im  $n$ -Rahmen sowie im  $e$ -Rahmen erzeugt. Startwerte für die Position, Geschwindigkeit und Orientierung des Fahrzeugs müssen dabei festgelegt werden. Das fahrdynamische Profil kann dabei aus folgenden Segmenten variabler Dauer bestehen:

- Geradlinige Bewegung mit stückweise konstanter Geschwindigkeit, wobei die Höhe ebenfalls konstant sein kann, aber auch gleichmäßig absteigen oder zunehmen kann.
- Geradlinige Bewegung mit stückweise konstanter Beschleunigung, wobei die Höhe konstant sein kann, gleichmäßig absteigen oder auch zunehmen kann.
- Drehbewegung, d. h. Kurvenfahrt mit konstantem Radius und konstanter Höhe.
- Standphasen, die einem Halt an einer Ampel oder an einer Kreuzung entsprechen.
- Zwischensegmente, so dass ein möglichst sanfter Übergang zwischen den o. g. Segmenten vorhanden ist. Dazu zählen Roll- und Neigungsbewegungen.

Parallel zur Erzeugung der Positionsdaten werden ebenfalls zugehörige Geschwindigkeitsdaten sowie die RKM  $C_b^n$  und  $C_e^n$  bestimmt, die zur späteren Berechnung der Erddrehrate etc. benötigt werden. Bei der Generierung der Daten im Rahmen dieser Arbeit wurde ein konstantes Datenintervall von  $\Delta t_{IME} = 0,01 \text{ s}$  verwendet. Die Abb. F.2 (a) und (b) zeigen eine typische Trajektorie (horizontal) sowie ein typisches Geschwindigkeitsprofil, die mit dem System nach Abb. F.1 erstellt wurden.

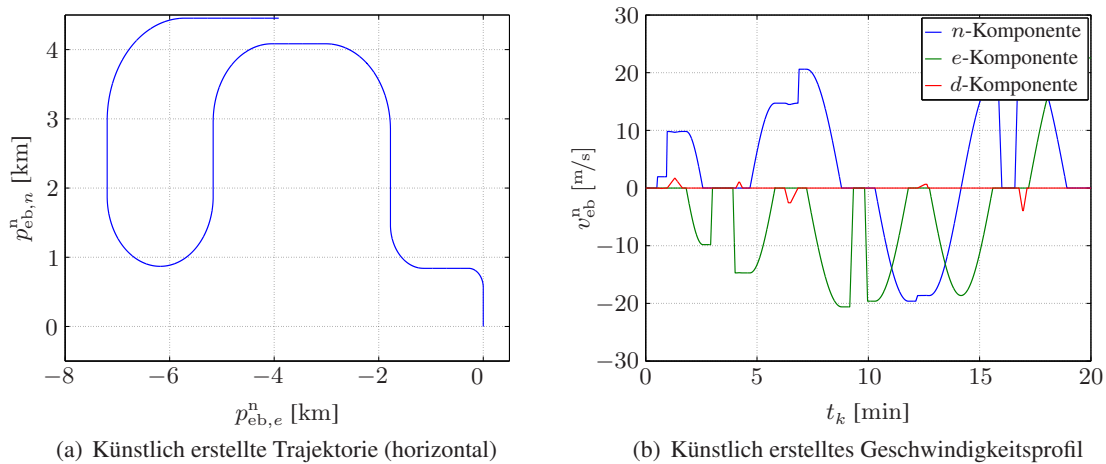


Abbildung F.2: Künstlich erstellte Trajektorie und Geschwindigkeitsprofil

**Inertiale Daten** Für die *Strapdown*-Berechnung im Vorfeld der Navigationsfilterung werden Messwerte für die Beschleunigungen sowie Winkelgeschwindigkeiten im  $b$ -Rahmen benötigt. Da i. d. R. von einer IME auch andere als die körpereigenen Bewegungen erfasst werden (z. B. Erddrehung),

müssen diese Effekte dementsprechend nachgebildet werden. Dazu werden, ausgehend von den festgelegten Radien bei Kurvenfahrten und den Bewegungsmodellen, die jeweiligen Geschwindigkeitsänderungen  $\Delta \mathbf{v}_{nb,k}^b$  und Winkelinkremente  $\Delta \Sigma_{nb,k}^b$  pro Zeitschritt generiert, wobei

$$\mathbf{a}_{nb,k}^b = \frac{\Delta \mathbf{v}_{nb,k}^b}{\Delta t_{IME}} \quad \text{und} \quad \omega_{nb,k}^b = \frac{\Delta \Sigma_{nb,k}^b}{\Delta t_{IME}} \quad (\text{F.1})$$

gilt. Die Drehraten und Beschleunigungen in (F.1) setzen sich dabei aus einer Summe weiterer Komponenten zusammen, die in Koordinaten des b-Rahmens vorhanden sein müssen. Für die Drehrate sind dieses:

- Die tatsächliche Drehrate  $\omega_{nb}^b$ : Bezüglich des n-Rahmens gibt diese die relevante Drehung der IME bzw. des Fahrzeugs an.
- Die Transportrate  $\omega_{en}^b$ : Diese gibt die Drehung des n-Rahmens bezüglich des e-Rahmens an. Sie beschreibt die Drehrate, die durch die Krümmung der Erde auftritt, so dass der n-Rahmen bei der Bewegung über die gekrümmte Erdoberfläche immer tangential zu dieser ausgerichtet bleibt.
- Die Erddrehrate  $\omega_{ie}^b$ : Sie gibt die Drehung des e-Rahmens bezüglich des i-Rahmens an. Die Erddrehrate beschreibt damit die gemessene Erdrotation.

Diese drei Komponenten werden einzeln mit Hilfe der genannten Matlab-Softwarepakete generiert und anschließend mit

$$\omega_{ib,k}^b = \omega_{nb,k}^b + \omega_{en,k}^b + \omega_{ie,k}^b \quad (\text{F.2})$$

zusammengefasst. Da in (F.2) noch keine Rauschkomponenten berücksichtigt sind, wird in einem zusätzlichen Schritt das inhärente Sensorrauschen generiert und hinzuaddiert, so dass

$$\tilde{\omega}_{ib,k}^b = \left( \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{S}_\omega \right) \cdot \omega_{ib,k}^b + \mathbf{b}_{\omega,k} + \mathbf{n}_{\omega,k}, \quad (\text{F.3})$$

$$\mathbf{n}_{\omega,k} = \mathbf{D}_{n_\omega} \cdot \mathbf{n}_{\omega,k-1} + \mathbf{\Gamma}_{n_\omega} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\omega,k} \quad (\text{F.4})$$

gilt, wobei  $\boldsymbol{\eta}_{\omega,k} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_{\omega,k}; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\eta}_{\omega,k}})$  mittelwertfreie, weiße GAUSS-verteilte und Rauschkomponenten umfasst und die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\eta}_{\omega,k}}$  zeitvariant ist. Auf der Hauptdiagonalen der Matrix  $\mathbf{S}_\omega$  befinden sich dabei die Skalierungsfehler für die einzelnen Koordinaten sowie im Vektor  $\mathbf{b}_\omega$  die Bias. Auf der Hauptdiagonalen von  $\mathbf{D}_{n_\omega}$  sind dagegen die Terme  $e^{-\frac{\Delta t_{IME}}{t_{IME;c}}}$  zu finden, wobei  $t_{IME;c} = 2,8 \cdot 10^{-2}$  s.

Analog zu Gl. (F.2) setzt sich auch die als ideal angenommene Beschleunigung bei der Datengenerierung aus drei Hauptkomponenten zusammen, so dass

$$\mathbf{a}_{ib,k}^b = \mathbf{a}_{nb,k}^b + \mathbf{a}_{C,k}^b + \mathbf{g}_k^b \quad (\text{F.5})$$

gilt. Die Komponenten auf der rechten Seite von (F.5) sind:

- Die tatsächliche Beschleunigung  $\mathbf{a}_{nb,k}^b$  im b-Rahmen bezüglich des n-Rahmens, angegeben in Koordinaten des b-Rahmens. Diese Beschleunigung gibt die relevante Beschleunigung des Fahrzeugs an. Für die Simulationen wird  $\Delta \mathbf{v}_{nb,k}^b = \mathbf{a}_{nb,k}^b \cdot \Delta t_{IME}$  erzeugt.

- Die Corioliskraft, die einen zusätzlichen Anteil erzeugt, der hier mit dem Vektor  $\mathbf{a}_C^b$  bezeichnet werden soll. Sie setzt sich aus zwei Komponenten zusammen: dem Teil, der durch die Rotation der Erde verursacht wird und einem Anteil aufgrund der Bewegung im n-Rahmen.
- Die Schwerebeschleunigung, die von einem inertialen Sensor ebenfalls erfasst wird und eigentlich orts- und zeitabhängig ist. Diese ist mit  $\mathbf{g}_k^b$  Teil von Gl. (F.5).

Wie bei einem Drehratensensor würden die Fehler in Gl. (F.3) auch bei Beschleunigungsmessern auftreten. Daher werden für eine annähernd vollständige Beschreibung diese Fehler in

$$\tilde{\mathbf{a}}_{ib,k}^b = (\mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{S}_a) \cdot \mathbf{a}_{ib,k}^b + \mathbf{b}_{a,k} + \mathbf{n}_{a,k}, \quad (\text{F.6})$$

$$\mathbf{n}_{a,k} = \mathbf{D}_{n_a} \cdot \mathbf{n}_{a,k-1} + \mathbf{\Gamma}_{n_a} \cdot \boldsymbol{\eta}_{a,k} \quad (\text{F.7})$$

berücksichtigt mit  $\boldsymbol{\eta}_{a,k} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_{a,k}; \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\eta}_{a,k}})$ , dem Biasvektor  $\mathbf{b}_{a,k}$  und der diagonalen Skalierungsmatrix  $\mathbf{S}_a$ . Der Einfachheit halber wurden die Skalierungsfaktoren in den Matrizen  $\mathbf{S}_a$  und  $\mathbf{S}_\omega$  hier zu Null gewählt. Auch die Nebendiagonalelemente, die auf eine Missweisung der Sensoren schließen lassen, wurden hier nicht berücksichtigt. Bei der realen IME werden dieses Skalierungsfaktoren ebenfalls durch eine interne Signalvorverarbeitung annähernd kompensiert. Auf der Hauptdiagonalen von  $\mathbf{D}_{n_a}$  sind wieder die Terme  $e^{-\frac{\Delta t_{\text{IME}}}{t_{\text{IME};c}}}$  zu finden.

Für die Biasvektoren  $\mathbf{b}_{a,k}$  und  $\mathbf{b}_{\omega,k}$  in den Gl. (F.3) und (F.6) wird angenommen, dass sie durch einen Zufallsprozess getrieben werden. Dies bedeutet, dass sie mittels

$$\mathbf{b}_{a,k} = \mathbf{b}_{a,k-1} + \Delta t_{\text{IME}} \cdot \mathbf{n}_{b_a,k}, \quad (\text{F.8})$$

$$\mathbf{b}_{\omega,k} = \mathbf{b}_{\omega,k-1} + \Delta t_{\text{IME}} \cdot \mathbf{n}_{b_\omega,k} \quad (\text{F.9})$$

erzeugt wurden. Die Vektoren  $\mathbf{n}_{b_a,k}$ ,  $\mathbf{n}_{b_\omega,k}$  sind mittelwertfreie, weiße GAUSS-verteilte Rauschvektoren mit den zeitinvarianten Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}_{b_a}$  und  $\mathbf{Q}_{b_\omega}$ . Ihre Werte sind in Tab. F.1 zu finden.

**Magnetfeldsensordaten** Für die Erzeugung von Magnetfeldsensordaten wird hier davon ausgegangen, dass das magnetische Feld für die gesamte Dauer einer künstlich generierten Trajektorie mit  $\mathbf{m}^n := (m_n^n \ m_e^n \ m_d^n)^T = (19\,148,7 \text{ nT}, 418,0 \text{ nT}, 45\,077,9 \text{ nT})^T$  konstant ist. Dies sind übliche Werte für die Umgebung von Paderborn. Da die von einem Magnetometer aufgenommenen Daten von der Lage des Fahrzeugs gegenüber dem Erdmagnetfeld und von weiteren inhärenten Effekten abhängen, werden diese durch

$$\tilde{\mathbf{m}}_k^b = \mathbf{C}_{n,k}^b \cdot \mathbf{m}^n + \mathbf{w}_{m,k} \quad (\text{F.10})$$

berücksichtigt. Hierbei ist der Rauschvektor  $\mathbf{w}_{m,k}$  mittelwertfreies, weißes GAUSS-verteiltes Rauschen mit der zeitinvarianten Rauschkovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_m = \text{diag}((100 \text{ nT})^2, (100 \text{ nT})^2, (100 \text{ nT})^2)$ .

**GPS-Daten** Da die Erzeugung von GPS-Messdaten möglichst realistisch sein soll, wurde das *SatNav*-Softwarepaket verwendet, um aus den generierten Positionsdaten mit Hilfe von vordefinierten Satellitenkonstellationen sowohl *Deltarange*- als auch *Pseudorange*-Messwerte zu generieren. Auf eine ausführlichere Beschreibung sei aufgrund der Komplexität an dieser Stelle verzichtet. Die Messwerte werden im Rahmen einer Fehlerfilterung verwendet, um Schätzwerte für Positionen in *LLH*-Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen im Navigationsrahmen n mit den dazugehörigen Schätzfehlerkovarianzmatrizen ermitteln zu können. Bei der Erzeugung der *Deltarange*- und

*Pseudorange*-Messwerte werden folgende Fehlerquellen berücksichtigt, welche auch bei realen Messungen vorkommen und diese verfälschen können:

- Korrelationszeit, die hier für die Geschwindigkeitskomponenten zu 1 s und für die Positionsdaten zu 10 s gesetzt wurde.
- Skalierungsfehler durch thermische Rauscheffekte, die hier zu 0,05 gewählt wurden.
- Skalierungsfehler aufgrund troposphärischer Einflüsse. Diese haben jeweils den Wert 0,1.
- Skalierungsfehler durch die Mehrwegeausbreitung der Satellitensignale, die hier zu 0,05 gesetzt wurden.
- Skalierungsfehler, die die ionosphärischen Fehler berücksichtigen und zu 0,02 gewählt wurden.

Neben den genannten Effekten wird zusätzlich eine Empfängeruhrendrift von  $100 \text{ ns/s}$  bei einem initialen Nullpunktfehler von 10 ms berücksichtigt. Mit einer angenommenen Abtastfrequenz von 4 Hz stehen schließlich die Vektoren  $\mathbf{p}_{\text{GPS}}^n$  bzw.  $\mathbf{p}_{\text{GPS}}^e$ ,  $\mathbf{v}_{\text{GPS}}^n$  sowie die Schätzfehlerkovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{\text{GPS}}$  zur Verfügung.

**Barometrische Sensordaten** Die Erzeugung von Sensordaten, die von einem möglichen barometrischen Sensor aufgenommen werden, ist aufgrund der bereits in Kap. 6 erläuterten Zusammenhänge zwischen der zu bestimmenden Höhe und den eigentlichen Messdaten wie Temperatur und Luftdruck, etwas komplizierter. Es muss zum einen der nichtlineare Zusammenhang zwischen der Höhe und den Messdaten berücksichtigt werden, zum anderen müssen auch die typischen Sensormessfehler mit einbezogen werden. Dabei muss außerdem beachtet werden, dass die barometrische Höhenformel (6.1) selbst nur eine Approximation darstellt [Us176], [Klo08].

In einer ersten Instanz werden Parameter für die Temperatur und den Luftdruck auf der Referenzhöhe, die hier zu  $h_0 = 0 \text{ m}$  gewählt wurde, erzeugt:

$$T_{0,k} = T_{0,k-1} + \Delta t_{\text{BM}} \cdot n_{T_{0,k}} \quad (\text{F.11})$$

$$P_{0,k} = P_{0,k-1} + \Delta t_{\text{BM}} \cdot n_{P_{0,k}} \quad (\text{F.12})$$

mit  $n_{P_{0,k}} \sim \mathcal{N}(n_{P_{0,k}}; 0, \sigma_{P_0}^2)$  und  $n_{T_{0,k}} \sim \mathcal{N}(n_{T_{0,k}}; 0, \sigma_{T_0}^2)$ , wobei  $\sigma_{P_0}^2$  und  $\sigma_{T_0}^2$  die Varianzen der normalverteilten, mittelwertfreien, weißen Rauschterme  $n_{P_{0,k}}$  und  $n_{T_{0,k}}$  sind und  $\Delta t_{\text{BM}} = 0,1 \text{ s}$  ist. Dies entspricht den Gl. (6.2) und (6.3). Es sei darauf hingewiesen, dass in der genannten Literatur in diesem Zusammenhang häufig von konstanten Werten für die Referenzvariablen ausgegangen wird. Diese Annahmen sind in der Realität jedoch nur Näherungen und werden hier daher durch Zufallsprozesse beschrieben.

Durch die Gl. (F.11) und (F.12) sind bisher lediglich die Variationen von Temperatur bzw. Luftdruck auf der Referenzhöhe modelliert. Ein Modell für die Temperatur an dem Ort, an dem sich das Fahrzeug befindet, ist damit noch nicht vorhanden. Nach [Tip99] kann die höhenabhängige Temperatur durch die lineare Beschreibung

$$T_k = T_{0,k} + \gamma_0 (h_k - h_0) \quad (\text{F.13})$$

angegeben werden, wobei  $\gamma_0 = -0,0065 \text{ K/m}$  der atmosphärische Temperaturgradient ist, der angibt, um wieviel Kelvin die Lufttemperatur pro Meter Höhenunterschied abnimmt. Die Variable  $h_k$  ist dabei die ideale Höhe, die zuvor bereits generiert wurde. Bevor nun Messwerte für den Luftdruck auf

Basis weiterer *RWP* erzeugt werden können, muss zunächst ein Profil für den Luftdruck erstellt werden. Dazu wird die barometrische Höhenformel nach [Us176] verwendet. Umgestellt nach dem Luftdruck folgt für diese:  $P_k = P_{0,k} \left( 1 - \frac{\gamma_0 \cdot \Delta h_k}{T_{0,k}} \right)^{\frac{M \cdot g_0}{\ell \cdot \gamma_0}}$ , wobei  $\Delta h_k := h_k - h_0$  und  $M = 0,02896 \text{ kg/mol}$  die molare Masse,  $g_0$  die Gravitationsvariable und  $\ell = 8,314 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$  die universelle Gaskonstante sind. Die Messwerte für Luftdruck und Temperatur können nun wie in (6.4) und (6.5) durch

$$\tilde{T}_k = T_k + n_{T,k} \quad (\text{F.14})$$

$$\tilde{P}_k = P_k + n_{P,k} \quad (\text{F.15})$$

erzeugt werden. Der Zusammenhang zwischen den Messungen und der daraus resultierenden barometrischen Höhe ist nun über

$$\tilde{P}_k = P_{0,k=0} \left( 1 - \frac{\gamma_0 \cdot \tilde{h}_{\text{BM},k}}{T_{0,k=0}} \right)^{\frac{M \cdot g_0}{\ell \cdot \gamma_0}} \quad (\text{F.16})$$

gegeben.

## F.1 Datensatz 1

Erläuterung/Parameter	Wert
Streckenlänge [km]	18,459
<b>GPS-Empfänger</b>	
$f_{\text{GPS}}$ [Hz]	4
Verzögerung der Verfügbarkeit [ms]	150
$l_{\text{GPS}}^b$ [cm]	20 / 20 / 20
$\sigma_{\text{GPS};p}$ [m]	10 / 10 / 20
$t_{\text{GPS};c_p}$ [s]	10
$\sigma_{\text{GPS};v}$ [m/s]	$5 \cdot 10^{-1} / 5 \cdot 10^{-1} / 1$
$t_{\text{GPS};c_v}$ [s]	1
<b>Inertiale Sensoreinheit</b>	
$f_{\text{IME}}$ [Hz]	100
$\mathbf{b}_{a,0}$ [m/s <sup>2</sup> ]	0 / 0 / 0
$\mathbf{b}_{\omega,0}$ [°/s]	0 / 0 / 0
$\sigma_{\eta_a}$ [m/s <sup>2</sup> ]	$9 \cdot 10^{-3} / 9 \cdot 10^{-3} / 9 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{b_a}$ [m/s <sup>3</sup> ]	$4,5 \cdot 10^{-4} / 4,5 \cdot 10^{-4} / 4,5 \cdot 10^{-4}$
$t_{\text{IME};c}$ [s]	$2,8 \cdot 10^{-2}$
$\sigma_{\eta_\omega}$ [°/s]	$4 \cdot 10^{-1} / 4 \cdot 10^{-1} / 4 \cdot 10^{-1}$
$\sigma_{b_\omega}$ [°/s <sup>2</sup> ]	$3,9 \cdot 10^{-3} / 3,9 \cdot 10^{-3} / 3,9 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_m$ [nT]	100 / 100 / 100
<b>Barometrischer Sensor</b>	
$f_{\text{BM}}$ [Hz]	10
$\sigma_P$ [Pa]	10
$\sigma_{P_0}$ [Pa/s]	1,265
$\sigma_T$ [K]	$1 \cdot 10^{-1}$
$\sigma_{T_0}$ [K/s]	$1,265 \cdot 10^{-2}$

Tabelle F.1: Parameter zur Erzeugung künstlicher Daten (Datensatz 1)

Hier gilt:  $\sigma_{\eta_a}^2 := \sigma_{\eta_a,x}^2 = \sigma_{\eta_a,y}^2 = \sigma_{\eta_a,z}^2$  und  $\sigma_{\eta_\omega}^2 := \sigma_{\eta_\omega,x}^2 = \sigma_{\eta_\omega,y}^2 = \sigma_{\eta_\omega,z}^2$ , wobei

$$\mathbf{q}_{\eta_a} = \begin{pmatrix} \sigma_{\eta_a,x}^2 \\ \sigma_{\eta_a,y}^2 \\ \sigma_{\eta_a,z}^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{q}_{\eta_\omega} = \begin{pmatrix} \sigma_{\eta_\omega,x}^2 \\ \sigma_{\eta_\omega,y}^2 \\ \sigma_{\eta_\omega,z}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.17})$$

und

$$\mathbf{Q}_\eta = \begin{pmatrix} \text{diag}(\mathbf{q}_{\eta_a}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \text{diag}(\mathbf{q}_{\eta_\omega}) \end{pmatrix}. \quad (\text{F.18})$$

## F.2 Datensatz 2

Erläuterung/Parameter	Wert
Streckenlänge [km]	18,459
<b>GPS-Empfänger</b>	
$f_{\text{GPS}}$ [Hz]	4
Verzögerung der Verfügbarkeit [ms]	150
$l_{\text{GPS}}^b$ [cm]	20 / 20 / 20
$\sigma_{\text{GPS};p}$ [m]	2 / 2 / 4
$t_{\text{GPS};c_p}$ [s]	10
$\sigma_{\text{GPS};v}$ [m/s]	$1,2 \cdot 10^{-1} / 1,2 \cdot 10^{-1} / 2,2 \cdot 10^{-1}$
$t_{\text{GPS};c_v}$ [s]	1
<b>Inertiale Sensoreinheit</b>	
$f_{\text{IME}}$ [Hz]	100
$\mathbf{b}_{a,0}$ [m/s <sup>2</sup> ]	0 / 0 / 0
$\mathbf{b}_{\omega,0}$ [°/s]	0 / 0 / 0
$\sigma_{\eta_{a,k}}$ [m/s <sup>2</sup> ]	Zeitvariant im Bereich $9 \cdot 10^{-3} \dots 9 \cdot 10^{-1}$
$\sigma_{b_a}$ [m/s <sup>3</sup> ]	$4,5 \cdot 10^{-4} / 4,5 \cdot 10^{-4} / 4,5 \cdot 10^{-4}$
$t_{\text{IME};c}$ [s]	$2,8 \cdot 10^{-2}$
$\sigma_{\eta_{\omega,k}}$ [°/s]	Zeitvariant im Bereich $4 \cdot 10^{-1} \dots 2,0$
$\sigma_{b_{\omega}}$ [°/s <sup>2</sup> ]	$3,9 \cdot 10^{-3} / 3,9 \cdot 10^{-3} / 3,9 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_m$ [nT]	100 / 100 / 100
<b>Barometrischer Sensor</b>	
$f_{\text{BM}}$ [Hz]	10
$\sigma_P$ [Pa]	10
$\sigma_{P_0}$ [Pa/s]	1,265
$\sigma_T$ [K]	$1 \cdot 10^{-1}$
$\sigma_{T_0}$ [K/s]	$1,265 \cdot 10^{-2}$

Tabelle F.2: Parameter zur Erzeugung künstlicher Daten (Datensatz 2)



## Anhang G

### Ergänzung zur Analyse einer inertialen Sensoreinheit

Neben der Berechnung der ALLAN-Varianz gibt es eine weitere Möglichkeit, die einzelnen Signal-komponenten in einem Messsignal näher charakterisieren zu können. Diese führt über eine Stichprobenanalyse nach [Chi10]. Ausgehend von Gl. (7.63) wird angenommen, dass sich der Sensor in Ruhe befindet und somit kein äußerer Einfluss (z. B. durch Vibrationen) vorhanden ist. Unter der Voraussetzung, dass die skalare Biasdrift  $b_k$  bekannt ist und sich durch einen *Random Walk Process* (RWP) modellieren lässt, kann man anhand der Betrachtungen in [Neu05] auf die Standardabweichung des inhärenten Rauschens schließen.

Mit Hilfe eines RWP wird die Biasdrift durch einen nichtstationären Prozess dargestellt. Mit (4.62) kann das Bias einer beliebigen Signalkomponente durch

$$b_k = b_{k-1} + \Delta t \cdot n_{b,k} = b_0 + \Delta t \cdot n_{b,1} + \dots + \Delta t \cdot n_{b,k} = b_0 + \Delta t \cdot \sum_{i'=1}^k n_{b,i'} \quad (\text{G.1})$$

ausgedrückt werden, wobei  $\Delta t$  das Abtastintervall darstellt und  $p(n_b) = \mathcal{N}(n_b; 0, \sigma_b^2)$  gilt. Für den Erwartungswert des korrespondierenden Zufallsprozesses mit  $i' \in [1, k]$ ,  $i' \in \mathbb{N}$  gilt damit

$$E[b_k] = E\left[b_0 + \Delta t \cdot \sum_{i'=1}^k n_{b,i'}\right] = b_0, \quad (\text{G.2})$$

da  $E[n_{b,i'}] = 0$ . Entscheidend ist folglich der Startwert  $b_0$  des Bias. Somit lässt sich die Varianz  $\bar{\sigma}_b^2$  des Bias durch die Varianz der Differenz von  $b_k$  und  $b_0$  bestimmen:

$$\mathbb{V}[b_k - b_0] = \mathbb{V}\left[\sum_{i'=1}^k \Delta t \cdot n_{b,i'}\right] = \sum_{i'=1}^k \mathbb{V}[\Delta t \cdot n_{b,i'}] = k \cdot \bar{\sigma}_b^2. \quad (\text{G.3})$$

Hier wurde ausgenutzt, dass  $n_b$  weiß ist. Andererseits kann für ein endliches Intervall mit  $k = \Delta K$  die Varianz bei  $J'$  vorhandenen Realisierungen  $b_{\Delta K}^{(j')}$  mit  $j' \in [1, J']$  über die Stichprobenvarianz (mit BESSEL-Korrektur zur Gewährleistung der Erwartungstreue) abgeschätzt werden:

$$\hat{\sigma}_{b,\Delta K}^2 \approx \frac{1}{J' - 1} \sum_{j'=1}^{J'} \left(b_{\Delta K}^{(j')} - b_0^{(j')}\right)^2. \quad (\text{G.4})$$

Dabei stellt  $b_{\Delta K}^{(j')}$  die  $j'$ -te Realisierung der Biasdrift und  $\hat{\sigma}_{b,\Delta K}^2$  die Schätzung der Varianz unter Berücksichtigung einer Sequenz aus  $\Delta K$  Werten dar. Für eine zuverlässige Aussage werden i. d. R.  $J' = 10$  Realisierungen benötigt [HU07]. Mit Gl. (G.3) kann die Varianz schließlich wie folgt bestimmt werden:

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{\hat{\sigma}_{b,\Delta K}^2}{\Delta K}. \quad (\text{G.5})$$

Um aus Gl. (G.5) die Varianz  $\sigma_b^2$  des biastreibenden Rauschens nach dem Modell in (4.62) bestimmen zu können, muss noch eine Skalierung vorgenommen werden:

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{\hat{\sigma}_b^2}{(\Delta t)^2} = \frac{\hat{\sigma}_{b,\Delta K}^2}{\Delta K \cdot (\Delta t)^2} = \frac{\hat{\sigma}_{b,\Delta K}^2}{\Delta T_l \cdot \Delta t}, \quad (\text{G.6})$$

wobei  $\Delta T_l$  der Länge des Beobachtungsintervalls (in Sekunden) einer Realisierung entspricht.

**Miniature Tracking inertial-Sensoreinheit** Die nach den Gl. (7.64) bis (7.66) ermittelten Parameter sind in Tab. G.1 angegeben. Die zugrunde liegenden Daten wurden während einer Aufnahme gewonnen, die 60 h dauerte.

Achse		$\widehat{ARW} \text{ [}^\circ/(\text{s} \cdot \sqrt{\text{Hz}})\text{]}$	$\hat{\sigma}_\omega \text{ [}^\circ/\text{s}\text{]}$
$x$ -Achse	$y$ -Achse	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$3,15 \cdot 10^{-1}$
$z$ -Achse		$3,6 \cdot 10^{-2}$	$3,61 \cdot 10^{-1}$
		$2,7 \cdot 10^{-2}$	$2,67 \cdot 10^{-1}$
		$\widehat{VRW} \text{ [m}/(\text{s}^2 \cdot \sqrt{\text{Hz}})\text{]}$	$\hat{\sigma}_a \text{ [m/s}^2\text{]}$
$x$ -Achse	$y$ -Achse	$7,6 \cdot 10^{-4}$	$7,6 \cdot 10^{-3}$
$z$ -Achse		$7,9 \cdot 10^{-4}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$
		$7,7 \cdot 10^{-4}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$

Tabelle G.1: Messtechnisch ermittelte Parameter des sensorinhärenten Rauschens der MTi-Sensoreinheit für  $\Delta T_l = 60 \text{ s}$

## Abkürzungsverzeichnis

Abb.	Abbildung
ABS	Antiblockiersystem
ADAS	<i>Advanced Driver Assistance System</i>
ADU	Analog-Digital Umwandlung
AGPS	<i>Assisted Global Positioning System</i>
AKF	Autokorrelationsfunktion
Alg.	Algorithmus
ARW	<i>Angle Random Walk</i>
ASCII	<i>American Standard Code for Information Interchange</i>
AWGR	Additives weißes GAUSS'sches Rauschen
BF	Barometrisches Fehlerfilter
C2C	<i>Car-2-Car</i>
C2I	<i>Car-2-Infrastructure</i>
C/A	<i>Coarse/Aquisition</i>
CCD	<i>Charge-Coupled Device</i>
CDMA	<i>Code Division Multiple Access</i>
CNC	<i>Computerized Numerical Control</i>
CVIS	<i>Cooperative Vehicle-Infrastructure Systems</i>
DGK	Deutsche Grundkarte
DGPS	<i>Differential Global Positioning System</i>
DLL	<i>Delay-Locked Loop</i>
DOP	<i>Dilution of Precision</i>
DR	<i>Dead Reckoning</i>
DSP	Digitaler Signalprozessor
ECEF	<i>Earth-Centered Earth-Fixed</i>
EGNOS	<i>European Geostationary Navigation Overlay Service</i>
EKF	Erweitertes KALMAN-Filter
EM	<i>Expectation-Maximization</i>
ENU	<i>East-North-Up</i>
ESA	<i>European Space Agency</i>
ESG	Elektrostatisches Gyroskop
FDMA	<i>Frequency Division Multiple Access</i>
FF	Fehlerfilter
FFT	Schnelle FOURIER-Transformation
FIR	<i>Finite Impulse Response</i>
FOG	Fiberoptisches Gyroskop
FT	FOURIER-Transformierte
GAGAN	<i>Global Positioning System Aided Geo Augmented Navigation</i>
GBAS	<i>Ground Based Augmentation System</i>
Gl.	Gleichung
GLONASS	<i>Globalnaja Nawigazionnaja Sputnikowaja Sistema</i>

GMP	GAUSS-MARKOV-Prozess
GNS	<i>Global Navigation System</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
HDOP	<i>Horizontal Dilution of Precision</i>
IME	Inertiale Messeinheit
IMM	<i>Interacting-Multiple-Model</i>
IMU	<i>Inertial Measurement Unit</i>
INS	Inertiales Navigationssystem
INS/GPS	<i>Inertial Navigation System/Global Positioning System</i>
IRNSS	<i>Indian Regional Navigation Satellite System</i>
Kap.	Kapitel
KF	KALMAN-Filter
KFZ	Kraftfahrzeug
KM	Kovarianzmanagement
LDS	Leistungsdichtespektrum
LKF	Linearisiertes KALMAN-Filter
LLF	<i>Log-Likelihood Function</i>
LLH	<i>Longitude-Latitude-Height</i>
MAP	<i>Maximum a posteriori</i>
MCS	<i>Master Control Station</i>
MD	Messwertdifferenzen-Verfahren
MEMS	<i>Microelectromechanical System</i>
ML	<i>Maximum Likelihood</i>
MM	<i>Map Matching</i>
MMSE	<i>Minimum Mean Square Error</i>
MN	<i>MotionNode</i>
MSAS	<i>Multifunctional Satellite Augmentation System</i>
MTi	<i>Miniature Tracker inertial</i>
NED	<i>North-East-Down</i>
NMEA	<i>National Marine Electronics Association</i>
NN	Normalnull
PDOP	<i>Position Dilution of Precision</i>
PF	Partikelfilter
PKW	Personenkraftwagen
POI	<i>Point of Interest</i>
PPS	<i>Precise Positioning Service</i>
PReVENT	<i>PReVENTive and Active Safety Applications</i>
PSD	<i>Position Sensitive Device</i>
RAIM	<i>Receiver Autonomous Integrity Monitoring</i>
RKM	Richtungskosinusmatrix
RLG	Ringlasergyroskop
RLS	<i>Recursive Least Squares</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>
RWP	<i>Random Walk Process</i>

SA	<i>Selective Availability</i>
SAFESPOT	<i>Smart Vehicles on Smart Roads</i>
SBAS	<i>Satellite Based Augmentation System</i>
SEM	<i>Sequenzieller Expectation-Maximization-Algorithmus</i>
SF	<i>Sekundärfilter</i>
SPS	<i>Standard Positioning Service</i>
Tab.	<i>Tabelle</i>
TDOP	<i>Time Dilution of Precision</i>
TRANSIT-NNSS	<i>TRANSIT-Navy Navigation Satellite System</i>
UKF	<i>Unscented KALMAN Filter</i>
US	<i>United States</i>
USA	<i>United States of America</i>
USB	<i>Universal Serial Bus</i>
UTC	<i>Universal Time Coordinated</i>
VDOP	<i>Vertical Dilution of Precision</i>
VRW	<i>Velocity Random Walk</i>
WAAS	<i>Wide Area Augmentation System</i>
WGS84	<i>World Geodetic System 1984</i>



# Symbolverzeichnis

## Allgemeines

$\mathbf{x}$	Vektoren werden durch (kleine) fettgedruckte Buchstaben dargestellt (z. B. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ )
$\mathbf{X}$	Matrizen werden durch (große) fettgedruckte Buchstaben dargestellt (z. B. $\mathbf{X}$ oder $\Phi$ )
$\otimes$	Elementweise Multiplikation
$\partial(\dots)$	Partielle Ableitung einer Größe
$\tau$	Zeitdifferenz
$\Delta(\dots)$	Differenz oder Inkrement einer Größe
$\text{diag}(\dots)$	Konvertierung eines Zeilenvektors in eine Diagonalmatrix
$\text{diag}^{-1}(\dots)$	Konvertierung der Diagonalelemente einer Matrix in einen Spaltenvektor
$\text{diag}^{-T}(\dots)$	Konvertierung der Diagonalelemente einer Matrix in einen Zeilenvektor
$k$	Zeitdiskreter Index (tiefgestellt)
$p(\dots)$	Verteilungsdichte/Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen
$t$	Zeit (kontinuierlich)
$E[\dots]$	Erwartungswert einer Zufallsvariablen
$\mathcal{N}(\dots)$	Normalverteilung einer Zufallsvariablen
$P(\dots)$	Wahrscheinlichkeit einer Zufallsvariablen
$\mathbb{V}[\dots]$	Varianz einer Zufallsvariablen
$(\dots)_k^{k-i'}$	Zeitdiskrete Größe, die zum Zeitpunkt $k$ verfügbar, aber bereits zum Zeitpunkt $k - i'$ gültig war
$(\hat{\dots})$	Schätzung einer Größe
$(\tilde{\dots})$	Messung einer Größe
$(\dot{\dots})$	Zeitliche Ableitung einer Größe
$[(\dots) \times]$	Schiefssymmetrische Matrix, gebildet aus dem von den eckigen Klammern eingeschlossenen Vektor
$(\dots)^{(i',j')}$	Element in der $i'$ -ten Zeile und $j'$ -ten Spalte einer Matrix
$(\dots)_{\text{eb}}^{\text{n}}$	Ein hochgestellter Index b, e, i oder n in Kombination mit entsprechend tiefgestellten Doppelindizes kennzeichnet hier beispielhaft einen Vektor oder eine Matrix im Koordinatensystem b bezogen auf das Koordinatensystem e, angegeben in Koordinaten des Systems n
$(\dots)_{\text{BEZ.;var}}$	Groß geschriebene Bezeichner und Variablen werden durch ein Semikolon getrennt (z. B. $\mathbf{x}_{\text{FF};k}$ )
$(\dots)^T$	Transponiert (hochgestellt)
$(\dots)^{\{\mathcal{I}\}}$	Iterationsindex (hochgestellt und in geschweiften Klammern)



**Kapitel 2**

GRIECHISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$\kappa_0$	Isotropenkoeffizient
$\psi$	Gierwinkel (Eulerwinkel)
$\pi^{i'}$	Auftrittswahrscheinlichkeit
$\pi^{i'i''}$	Übergangswahrscheinlichkeit
$\Delta\psi$	Winkelinkrement
$\Delta l$	Streckeninkrement
RÖMISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$a$	Beschleunigung eines Körpers
$ch$	Kanalnummer eines Satellitensignals
$e$	Position (Osten); tritt ansonsten nur als tiefgestellter Index auf (z. B. $v_{eb,e}^n$ )
$g_0$	Schwerebeschleunigung
$h$	Höhe
$m$	Masse eines beschleunigten Körpers
$n$	Position (Norden); tritt ansonsten nur als tiefgestellter Index auf (z. B. $v_{eb,n}^n$ )
$r$	Regimevariable
$F$	Kraft
$L_1, L_2$	Trägerfrequenzen eines Satellitensignals
$P(h)$	Luftdruck in der Höhe $h$
GRIECHISCH	(VEKTORIELLE GRÖSSEN)
$\Pi$	Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix

**Kapitel 3**

GRIECHISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$\sigma_{\eta_a}^2$	Diagonalelement der Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}_{\eta}$ , das mit einer Beschleunigung korrespondiert
$\sigma_{\eta_{\omega}}^2$	Diagonalelement der Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}_{\eta}$ , das mit einer Drehrate korrespondiert
$\omega_{ib}^b$	Winkelgeschwindigkeit, Drehrate (gemessen im Koordinatensystem b, bezogen auf System i, angegeben in Koordinaten des Systems b)
$\Delta t_{IME}$	Abtastintervall einer inertialen Messeinheit
RÖMISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$a_{ib}^b$	Beschleunigung (gemessen im Koordinatensystem b, bezogen auf System i, angegeben in Koordinaten des Systems b)
$d_{n_{\omega}}$	Diagonalelement der Zustandübergangsmatrix $\mathbf{D}_n$ , das mit einer Drehrate korrespondiert
$d_{n_a}$	Diagonalelement der Zustandübergangsmatrix $\mathbf{D}_n$ , das mit einer Beschleunigung korrespondiert
$\check{P}_B$	Bewegungsphase
$\check{P}_M$	Stillstandphase mit laufendem Motor
$\check{P}_O$	Stillstandphase ohne laufenden Motor

GRIECHISCH	(VEKTORIELLE GRÖSSEN)
$\eta$	Mittelwertfreier, weißer GAUSS-verteilter Rauschvektor, der den zeitkorrelierten Rauschprozess treibt
RÖMISCH	(VEKTORIELLE GRÖSSEN)
$\mathbf{n}$	Zeitlich korrelierter Rauschvektor
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor (z. B. $\mathbf{v}_{ib}^e$ : Geschwindigkeit im körperbezogenen System b bezogen auf das inertielle Koordinatensystem i, angegeben in Koordinaten des erdfesten Koordinatensystems e)
$\mathbf{D}_n$	Zustandsübergangsmatrix des zeitlich korrelierten Rauschprozesses mit Vektor $\mathbf{n}$
$\mathbf{Q}_\eta$	Rauschkovarianzmatrix des Vektors $\eta$

## Kapitel 4

GRIECHISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$\delta$	Dirac-Impuls
$\theta$	Nickwinkel (Eulerwinkel)
$\lambda$	Längengrad
$\varphi$	Breitengrad
$\sigma_a, \sigma_\omega$	Standardabweichungen des zeitlich korrelierten Messrauschens $n_a, n_\omega$
$\sigma_{\text{GPS}}$	Standardabweichung einer GPS-Signalmessung
$\phi$	Rollwinkel (Eulerwinkel)
$\Delta t$	Abtastintervall
RÖMISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$\Omega$	Erddrehrate
$a$	Halbachse des Erdellipsoids (groß)
$b$	Halbachse des Erdellipsoids (klein)
$e_0$	Exzentrizität des Erdellipsoids
$f_0$	Abflachung des Erdellipsoids
$g_1, g_2$	Gravitationsfaktoren
$h_{\text{ellip}}$	Höhe über dem Erdellipsoid
$h_{\text{geoid}}$	Höhe über dem Geoid
$h_{\text{geom}}$	Geometrische Höhe
$h_{\text{geop}}$	Geopotentielle Höhe
$q^{(i')}$	Varianz ( $i'$ -te Komponente des Vektors $\mathbf{q}$ )
$q'^{(i')}$	Spektrale Leistungsdichte ( $i'$ -te Komponente des Vektors $\mathbf{q}'$ )
$r_{n^{(i')}n^{(i')}}(t)$	Autokorrelationsfunktion von $n^{(i')}(t)$
$s_{x,y,z}$	Skalierungsfaktoren
$\bar{s}_{xy,xz,\dots}$	Fehlausrichtungsfaktoren
$t_c$	Korrelationszeit
$x^b, y^b, z^b$	Achsen des körperbezogenen Koordinatensystems b
$x^e, y^e, z^e$	Achsen des erdfesten Koordinatensystems e
$x^i, y^i, z^i$	Achsen des inertialen Koordinatensystems i
$x^n, y^n, z^n$	Achsen des Navigationskoordinatensystems n
$R_0$	Durchschnittlicher Krümmungsradius der Erde
$R_n, R_e$	Krümmungsradius der Erde (Nord-Süd, Ost-West)

$R_{n^{(i')}n^{(i')}}(t)$	Leistungsdichtespektrum (Diskrete FOURIER-Transformierte) von $n^{(i')}(t)$
GRIECHISCH	(VEKTORIELLE GRÖSSEN)
$\eta_\omega, \eta_a$	Mittelwertfreier, weißer GAUSS-verteilter Rauschvektor, der den zeitkorrelierten Rauschprozess bei einer Drehratensensortriade, Beschleunigungssensortriade treibt
$\mu_n$	Mittelwertvektor des Vektors $\mathbf{n}(t)$
$\nu$	Mittelwertfreier, weißer GAUSS-verteilter Rauschvektor, der den zeitlich korrelierten Messrauschvektor treibt
$\sigma$	Orientierungsvektor
$\omega$	Winkelgeschwindigkeits- bzw. Drehratenvektor (z. B. $\omega_{nb}^b$ : Winkelgeschwindigkeit im körperbezogenen System b bezogen auf das Navigationskoordinatensystem n angegeben in Koordinaten des Koordinatensystems b)
$\omega_{en}^n$	Transportratenvektor (in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems)
$\omega_{ei}^n$	Erddrehratenvektor (in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems)
$\Gamma_n$	Matrix, welche die Abhängigkeit des zeitlich korrelierten Systemrauschvektors vom treibenden Rauschvektor beschreibt
$\Gamma_{n_\omega}, \Gamma_{n_a}$	Matrix, welche die Abhängigkeit des zeitlich korrelierten Systemrauschvektors vom treibenden Rauschvektor bei einer Drehratensensortriade, Beschleunigungssensortriade beschreibt
$\Gamma_w$	Matrix, welche die Abhängigkeit des zeitlich korrelierten Messrauschvektors vom treibenden Rauschvektor beschreibt
$\Phi, \tilde{\Phi}$	Transitionsmatrix
RÖMISCH	(VEKTORIELLE GRÖSSEN)
$\mathbf{a}$	Beschleunigungsvektor (z. B. $\mathbf{a}_{ib}^e$ : Beschleunigung im körperbezogenen System b bezogen auf das inertielle Koordinatensystem i, angegeben in Koordinaten des erdfesten Koordinatensystems e)
$\mathbf{b}$	Biasvektor
$\mathbf{b}_\omega, \mathbf{b}_a$	Biasvektor der Drehratensensortriade, Beschleunigungssensortriade
$\mathbf{g}^n$	Schwerebeschleunigungsvektor
$\mathbf{n}_b$	Mittelwertfreier, weißer GAUSS-verteilter Rauschvektor, der die Bias treibt
$\mathbf{n}_{b_\omega}, \mathbf{n}_{b_a}$	Mittelwertfreier, weißer GAUSS-verteilter Rauschvektor, der die Bias der Drehratensensortriade, Beschleunigungssensortriade treibt
$\mathbf{n}_\omega, \mathbf{n}_a$	Mittelwertfreier, weißer GAUSS-verteilter Rauschvektor der Drehratensensortriade, Beschleunigungssensortriade
$\mathbf{p}$	Positionsvektor (z. B. $\mathbf{p}_{eb}^n$ : Position im körperbezogenen System b bezogen auf das erdfeste Koordinatensystem e, angegeben in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems n)
$\mathbf{q}'_{\eta_{\dagger}}$	Vektor, gebildet aus den Diagonalelementen der Matrix $\mathbf{Q}'_{\eta_{\dagger}}$
$\check{\mathbf{q}}, \check{\mathbf{p}}$	Quaternionenvektoren (z. B. $\check{\mathbf{q}}_b^n$ : Quaternionenvektor zur Transformation vom körperbezogenen Koordinatensystem b in das Navigationskoordinatensystem n)
$\check{\mathbf{r}}$	Quaternionenvektor zur Korrektur
$\mathbf{s}^{\Phi_1}$	Richtungsvektor im Koordinatensystem $\Phi_1$
$\mathbf{u}$	Steuereingangsvektor
$\mathbf{u}'$	Linearisierungspunkt eines Steuereingangsvektors
$\mathbf{w}$	Messrauschvektor

$\mathbf{x}, \check{\mathbf{x}}$	Systemzustandsvektor
$\mathbf{x}'$	Linearisierungspunkt eines Systemzustandsvektors
$\mathbf{z}$	Messvektor
$\mathbf{0}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$	Nullmatrix der Dimension $[\mathcal{D} \times \mathcal{D}]$
$\mathbf{C}_{\Phi_2}^{\Phi_1}$	Richtungskosinusmatrix zur Transformation zwischen Koordinatensystem $\Phi_1$ und $\Phi_2$ (z. B. $\mathbf{C}_e^n$ : Transformation vom erdfesten Koordinatensystem $e$ zum Navigationskoordinatensystem $n$ )
$\mathbf{C}_x(y)$	Grundrotationsmatrix (Drehung um Achse $x$ um Winkel $y$ , z. B. $\mathbf{C}_z(\lambda)$ )
$\mathbf{D}_{n_\omega}, \mathbf{D}_{n_a}$	Zustandsübergangsmatrix des zeitlich korrelierten Rauschprozesses mit Vektor $\mathbf{n}_\omega$ der Drehratensensortriade bzw. $\mathbf{n}_a$ der Beschleunigungssensortriade
$\mathbf{D}_w$	Zustandsübergangsmatrix des zeitlich korrelierten Messrauschvektors
$\mathbf{F}$	Zustandsmatrix, Jacobimatrix
$\mathbf{G}, \check{\mathbf{G}}$	Matrix, welche die Abhängigkeit des Systemzustandsvektors vom Systemrauschvektor beschreibt
$\mathbf{H}, \check{\mathbf{H}}$	Messmatrix, Jacobimatrix
$\mathbf{I}_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$	Einheitsmatrix der Dimension $[\mathcal{D} \times \mathcal{D}]$
$\mathbf{K}$	Gewichtungsmatrix eines KALMAN-Filters
$\mathbf{M}$	Matrix, welche die Abhängigkeit des Messvektors vom Messrauschvektor beschreibt
$\mathbf{P}, \check{\mathbf{P}}$	Schätzfehlerkovarianzmatrix eines KALMAN-Filters
$\mathbf{P}_{nn}$	Autokovarianzmatrix des zeitlich korrelierten Systemrauschvektors $\mathbf{n}_k$
$\mathbf{P}_{ww}$	Autokovarianzmatrix des zeitlich korrelierten Messrauschvektors $\mathbf{w}_k$
$\mathbf{P}_{xn}$	Kovarianzmatrix zwischen Fehler des Systemzustandsvektors $\Delta \mathbf{x}_k$ und zeitlich korreliertem Systemrauschvektor $\mathbf{n}_k$
$\mathbf{P}_{xw}$	Kovarianzmatrix zwischen Fehler des Systemzustandsvektors $\Delta \mathbf{x}_k$ und zeitlich korreliertem Messrauschvektor $\mathbf{w}_k$
$\check{\mathbf{Q}}$	Systemrauschkovarianzmatrix
$\mathbf{Q}_{\eta_\omega}, \mathbf{Q}_{\eta_a}$	Zeitinvariante Rauschkovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{\eta}_{\omega,k}, \boldsymbol{\eta}_{a,k}$
$\mathbf{Q}_{\eta_{\omega,k}}, \mathbf{Q}_{\eta_{a,k}}$	Zeitvariante Rauschkovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{\eta}_{\omega,k}, \boldsymbol{\eta}_{a,k}$
$\mathbf{Q}_\omega, \mathbf{Q}_a$	Zeitinvariante Rauschkovarianzmatrix des Vektors $\mathbf{n}_{\omega,k}, \mathbf{n}_{a,k}$
$\mathbf{Q}_b$	Zeitinvariante Rauschkovarianzmatrix des biastreibenden Rauschvektors $\mathbf{n}_{b,k}$
$\mathbf{Q}_{b_\omega}, \mathbf{Q}_{b_a}$	Zeitinvariante Rauschkovarianzmatrix des Vektors $\mathbf{n}_{b_\omega,k}, \mathbf{n}_{b_a,k}$
$\mathbf{Q}'$	Kovarianzmatrix des Vektors $\mathbf{n}(t)$
$\mathbf{Q}'_{\eta_\omega}, \mathbf{Q}'_{\eta_a}$	Rauschkovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{\eta}_\omega(t), \boldsymbol{\eta}_a(t)$
$\mathbf{Q}'_\omega, \mathbf{Q}'_a$	Zeitinvariante Rauschkovarianzmatrix des Vektors $\mathbf{n}_\omega(t), \mathbf{n}_a(t)$
$\mathbf{Q}'_b$	Zeitinvariante Rauschkovarianzmatrix des biastreibenden Rauschvektors $\mathbf{n}_b(t)$
$\mathbf{Q}'_{b_\omega}, \mathbf{Q}'_{b_a}$	Zeitinvariante Rauschkovarianzmatrix des Vektors $\mathbf{n}_{b_\omega}(t), \mathbf{n}_{b_a}(t)$
$\mathbf{R}$	Zeitinvariante Kovarianzmatrix des Messrauschvektors $\mathbf{w}_k$
$\mathbf{R}_\nu$	Zeitinvariante Kovarianzmatrix des Rauschvektors $\boldsymbol{\nu}_k$ , der den zeitlich korrelierten Messrauschprozess treibt
$\mathbf{R}'$	Zeitinvariante Kovarianzmatrix des Messrauschvektors $\mathbf{w}(t)$
$\mathbf{S}$	Skalierungsmatrix
$\mathbf{S}_\omega, \mathbf{S}_a$	Skalierungsmatrix der Drehratensensortriade, Beschleunigungssensortriade

**Kapitel 5****GRIECHISCH (SKALARE GRÖSSEN)**

$\lambda_K$	Korrigierter <i>Strapdown</i> -Längengrad
$\lambda_{SD}$	Längengrad am Ausgang des <i>Strapdown</i> -Blocks
$\varphi_K$	Korrigierter <i>Strapdown</i> -Breitengrad
$\varphi_{SD}$	Breitengrad am Ausgang des <i>Strapdown</i> -Blocks
$\Delta\theta$	Nickwinkelfehler (inkrementell)
$\Delta\varphi$	Fehler des Breitengrads
$\Delta\phi$	Rollwinkelfehler (inkrementell)
$\Delta\psi$	Gierwinkelfehler (inkrementell)
$\Delta\theta'$	Nickwinkelfehler (absolut)
$\Delta\phi'$	Rollwinkelfehler (absolut)
$\Delta\psi'$	Gierwinkelfehler (absolut)
$\Delta h$	Höhenfehler
$\Delta v_{eb,d}^n$	Fehler der zum Erdmittelpunkt gerichteten Komponente (Lot) des Vektors $\mathbf{v}_{eb}^n$
$\Delta v_{eb,e}^n$	Fehler der Ostkomponente des Vektors $\mathbf{v}_{eb}^n$
$\Delta v_{eb,n}^n$	Fehler der Nordkomponente des Vektors $\mathbf{v}_{eb}^n$

**RÖMISCH (SKALARE GRÖSSEN)**

$f_{BM}$	Abtastfrequenz des barometrischen Sensors
$f_{GPS}$	Abtastfrequenz des <i>GPS</i> -Empfängers
$f_{IME}$	Abtastfrequenz der inertialen Messeinheit
$\hat{h}_{BM}$	Ausgangssignal (Höhe) des barometrischen Messsystems
$h_K$	Korrigierte <i>Strapdown</i> -Höhe
$h_{SD}$	Höhe am Ausgang des <i>Strapdown</i> -Blocks
$t_{IME;c}$	Korrelationszeit des zeitlich korrelierten Rauschens einer inertialen Messeinheit

**GRIECHISCH (VEKTORIELLE GRÖSSEN)**

$\varepsilon, \varepsilon^*$	Residuenvektoren des Fehlerfilters
$\boldsymbol{\eta}_{FF}$	Treibender Rauschvektor des Systemrauschprozesses des Fehlerfilters
$\boldsymbol{\nu}_{FF}$	Treibender Rauschvektor des Messrauschprozesses des Fehlerfilters
$\boldsymbol{\Gamma}_{FF;n}$	Matrix des Fehlerfilters, welche die Abhängigkeit des zeitlich korrelierten Systemrauschvektors vom treibenden Rauschvektor beschreibt
$\boldsymbol{\Gamma}_{FF;w}$	Matrix des Fehlerfilters, welche die Abhängigkeit des zeitlich korrelierten Messrauschvektors vom treibenden Rauschvektor beschreibt
$\Delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$	Fehler zwischen wahrem und geschätztem Vektor $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$
$\Delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n$	Fehler zwischen wahrem und geschätztem Vektor $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$
$\Delta\boldsymbol{\Upsilon}$	Fehlervektor der Lageschätzung
$\Delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^n$	Fehler zwischen wahrer und geschätzter Matrix $\boldsymbol{\Omega}_{in}^n$
$\Delta\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b$	Fehler zwischen wahrer und geschätzter Matrix $\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b$
$\Delta\mathbf{b}_\omega$	Biasvektor der Drehratensensortriade
$\Delta\mathbf{b}_a$	Biasvektor der Beschleunigungssensortriade
$\Delta\mathbf{p}_{eb}^n$	Fehlervektor der Positionsschätzung $\hat{\mathbf{p}}_{eb}^n$
$\Delta\mathbf{v}_{eb}^n$	Fehlervektor der Geschwindigkeitsschätzung $\hat{\mathbf{v}}_{eb}^n$
$\boldsymbol{\Phi}_{FF}$	Transitionsmatrix des Fehlerfilters

$\Psi$	Orientierungsfehlermatrix
$\Omega_{ib}^b$	Schiefssymmetrische Drehratenmatrix (gebildet aus $\omega_{ib}^b$ )
$\Omega_{in}^n$	Schiefssymmetrische Drehratenmatrix (gebildet aus $\omega_{in}^n$ )
$\Omega_{nb}^b$	Schiefssymmetrische Drehratenmatrix (gebildet aus $\omega_{nb}^b$ )
$\Omega_{ni}^n$	Schiefssymmetrische Drehratenmatrix (gebildet aus $\omega_{ni}^n$ )
RÖMISCH	(VEKTORIELLE GRÖSSEN)
$b_{K;\omega}$	Vektor der korrigierten Drehratensensorbias
$b_{K;a}$	Vektor der korrigierten Beschleunigungssensorbias
$l_{GPS}^b$	Vektor zwischen inertialer Messeinheit und <i>GPS</i> -Antenne im körperbezogenen Koordinatensystem der inertialen Messeinheit
$l_{GPS}^n$	Vektor zwischen inertialer Messeinheit und <i>GPS</i> -Antenne im Navigationskoordinatensystem der inertialen Messeinheit
$m$	Magnetometerdatenvektor
$n_{FF}$	Systemrauschvektor des Fehlerfilters
$p_{GPS}^n$	Positionsvektor des <i>GPS</i> -Empfängers im Navigationskoordinatensystem
$p_{K;eb}^n$	Korrigierter <i>Strapdown</i> -Positionsvektor
$p_{SD;eb}^n$	Positionsvektor am Ausgang des <i>Strapdown</i> -Blocks
$q_{K;b}^n$	Korrigierter Quaternionenvektor
$q_{SD;b}^n$	Quaternionenvektor am Ausgang des <i>Strapdown</i> -Blocks
$v_{GPS}^n$	Geschwindigkeitsvektor des <i>GPS</i> -Empfängers im Navigationskoordinatensystem
$v_{K;eb}^n$	Korrigierter <i>Strapdown</i> -Geschwindigkeitsvektor
$v_{SD;eb}^n$	Geschwindigkeitsvektor am Ausgang des <i>Strapdown</i> -Blocks
$w_{FF}$	Messrauschvektor des Fehlerfilters
$w_{FF}^*$	Messrauschen des extrapolierten Messvektors des Fehlerfilters
$x_K$	Korrigierter <i>Strapdown</i> -Vektor
$\hat{x}_{SD}$	Ausgangsvektor des <i>Strapdown</i> -Algorithmus
$\hat{x}_{FF}$	Systemzustandsvektor des Fehlerfilters
$\hat{x}_{GPS}$	Ausgangsvektor des satellitengestützten Teilsystems
$\hat{x}_{SF}$	Ausgangsvektor des Sekundärfilters
$z_{FF}$	Messvektor des Fehlerfilters
$z_{IME}$	Ausgangssignalvektor der inertialen Messeinheit
$z_{FF}^*$	Extrapolierter Messvektor des Fehlerfilters
$D_{FF;n}$	Zustandsübergangsmatrix des zeitlich korrelierten Systemrauschprozesses des Fehlerfilters
$D_{FF;w}$	Zustandsübergangsmatrix des zeitlich korrelierten Messrauschprozesses des Fehlerfilters
$F_{FF}$	Zustandsübergangsmatrix des Fehlerfilters
$G_{FF}$	Matrix des Fehlerfilters, welche die Abhängigkeit des Systemzustandsvektors vom Systemrauschvektor beschreibt
$H_{FF}$	Messmatrix des Fehlerfilters
$K^*$	KALMAN-Gewichtungsmatrix bei einem extrapolierten Messvektor
$M_{FF}$	Matrix des Fehlerfilters, welche die Abhängigkeit des Messvektors vom zeitkorrelierten Messrauschvektor beschreibt
$P_{FF}$	Schätzfehlerkovarianzmatrix des Fehlerfilters

$\hat{\mathbf{Q}}_{\text{FF}}$	Schätzung der Rauschkovarianzmatrix des Vektors des Fehlerfilters, der den zeitlich korrelierten Systemrauschprozess treibt
$\mathbf{R}_{\text{FF}}$	Zeitinvariante Kovarianzmatrix des Rauschvektors $\nu_{\text{FF}}$ , der den zeitlich korrelierten Messrauschprozess treibt
$\mathbf{R}_{\text{GPS}}$	Schätzfehlerkovarianzmatrix der <i>GPS</i> -Messungen

## Kapitel 6

GRIECHISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$\epsilon_{\text{BM}}$	Betrag einer Höhenfehlerschätzung
$\gamma_0$	Temperaturgradient
$\lambda_{\text{Topo}}^{(i')}$	Zu $h_{\text{Topo}}^{(i')}$ gehörender Längengrad aus einer topografischen Datenbank
$\sigma_{b_h}$	Standardabweichung von $n_{b_h}$
$\sigma_h$	Standardabweichung von $n_h$
$\sigma_{s_h}$	Standardabweichung von $n_{s_h}$
$\sigma_{z_{\Delta h}}$	Standardabweichung von $n_{z_{\Delta h}}$
$\sigma_{z_s}$	Standardabweichung von $n_{z_s}$
$\sigma_P$	Standardabweichung von $n_P$
$\sigma_{P_0}$	Standardabweichung von $n_{P_0}$
$\sigma_T$	Standardabweichung von $n_T$
$\sigma_{T_0}$	Standardabweichung von $n_{T_0}$
$\sigma_{\text{TD}}$	Standardabweichung der Höhe aus einer topografischen Datenbank
$\varphi_{\text{Topo}}^{(i')}$	Zu $h_{\text{Topo}}^{(i')}$ gehörender Breitengrad aus einer topografischen Datenbank
$\Delta b_h$	Schätzfehler des Bias (barometrisch)
$\Delta p_{\text{eb},e}^n$	Abweichung zwischen aktueller Positionsschätzung und topografischem Datenbankeintrag (Ost)
$\Delta p_{\text{eb},n}^n$	Abweichung zwischen aktueller Positionsschätzung und topografischem Datenbankeintrag (Nord)
$\Delta s_h$	Schätzfehler des Skalierungsfaktors (barometrisch)
$\Delta t_{\text{BM}}$	Abtastintervall des barometrischen Sensors
$\Delta P_0$	Differenz zwischen aktueller Schätzung von $P_0$ und dessen Schätzung zum Zeitpunkt $k = 0$
$\Delta T_0$	Differenz zwischen aktueller Schätzung von $T_0$ und dessen Schätzung zum Zeitpunkt $k = 0$
RÖMISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$b_h$	Bias (barometrisch)
$d_{\text{max}}$	Schwellenwert für Positionsabweichung zwischen Einträgen in einer topografischen Datenbank und aktueller Schätzung
$d_{\text{min}}$	Minimale Positionsdifferenz zwischen Einträgen in einer topografischen Datenbank und aktueller Schätzung
$h_0$	Referenzhöhe
$h_{\text{Topo}}^{(i')}$	Höhe aus einer topografischen Datenbank (Eintrag $i'$ )
$\tilde{h}_{\text{BM}}$	Anhand der barometrischen Höhenformel bestimmte Höhe
$\hat{h}_{\text{BM}}$	Korrigierte Höhenschätzung am Ausgang des barometrischen Teilsystems



$\tilde{h}_{TD}$	Höhe aus einer topografischen Datenbank
$\ell$	Universelle Gaskonstante
$n_{b_h}$	Systemrauschen des Bias (barometrisch)
$n_h$	Messrauschen der barometrischen Höhe
$n_{s_h}$	Systemrauschen des Skalierungsfaktors (barometrisch)
$n_{z_{\Delta h}}$	Mittelwertfreies, weißes GAUSS-verteiltes Rauschen zu $z_{\Delta h}$
$n_{z_s}$	Mittelwertfreies, weißes GAUSS-verteiltes Rauschen zu $z_{s_h}$
$n_P$	Mittelwertfreies, weißes GAUSS-verteiltes Messrauschen einer Luftdruckmessung
$n_{P_0}$	Mittelwertfreies, weißes GAUSS-verteiltes Systemrauschen des Luftdrucks auf Referenzhöhe
$n_T$	Mittelwertfreies, weißes GAUSS-verteiltes Messrauschen einer Temperaturmessung
$n_{T_0}$	Mittelwertfreies, weißes GAUSS-verteiltes Systemrauschen der Temperatur auf Referenzhöhe)
$n_{TD}$	Mittelwertfreies, weißes GAUSS-verteiltes Rauschen eines Eintrages aus einer topografischen Datenbank
$s_h$	Skalierungsfaktor (barometrisch)
$z_{\Delta h}$	Differenzmesseingang (Höhe) des barometrischen Filters
$z_{s_h}$	Messeingang (Skalierungsfaktor) des barometrischen Filters
$M$	Molare Masse (Luft)
$P$	Luftdruck
$P_0$	Druck auf Referenzhöhe
$T$	Temperatur
$T_0$	Temperatur auf Referenzhöhe
$T_{0,0}$	Initialer Temperaturwert auf Referenzhöhe $h_0$

## Kapitel 7

### GRIECHISCH (SKALARE GRÖSSEN)

$\alpha$	Gewichtungsfaktor
$\beta$	Heuristischer Faktor zur Verhinderung von starken Schwankungen bei der Varianzschätzung
$\beta_A$	Gewichtungsfaktor
$\gamma$	Heuristischer Faktor
$\delta_{m'f'}$	KRONECKER-Delta
$\zeta, \tilde{\zeta}, \zeta'$	Heuristische Faktoren
$\zeta_E$	Heuristischer Faktor
$\iota$	Schranke im Rahmen des sequenziellen <i>EM</i> -Algorithmus
$\sigma_A$	Gewichtungsfaktor
$\varpi$	ARMJO-Schrittweite
$\Delta K$	Anzahl der Abtastwerte in einem Signalausschnitt
$\Delta T_K$	Signallänge
$\Delta T_l$	Signalausschnittslänge

### RÖMISCH (SKALARE GRÖSSEN)

$f_{E_1}, f_{E_2}, \bar{f}_E$	Funktionen des Sekundärfilters
-------------------------------	--------------------------------

$\mathcal{I}$	Iterationsindex
$\mathcal{I}_{\max}$	Maximale Iterationsanzahl
$p'_0, \tilde{p}'_0$	Heuristische Faktoren
$r_{\Delta n_{\dagger}, \Delta n_{\dagger}, k}^{(i')}$	Geglättete Autokorrelationsfunktion des Vektors $\Delta n_{\dagger}$ an der Stelle $k - i'$
$ARW$	<i>Angle Random Walk</i> -Parameter
$\tilde{L}_k$	Zielfunktion (Erwartungswert der <i>Log-Likelihood Function</i> )
$VRW$	<i>Velocity Random Walk</i> -Parameter
$\tilde{W}_k$	Aktueller Anteil an der Zielfunktion $\tilde{L}_k$
GRIECHISCH	(VEKTORIELLE GRÖSSEN)
$\varepsilon_{\text{SF}}$	Residuenvektor des Sekundärfilters
$\mu_{\dagger}$	Mittelwert eines Messvektors
$\Gamma_{\text{SF};n}$	Matrix, welche die Abhängigkeit des zeitlich korrelierten Systemrauschens vom treibenden Rauschen beschreibt
$\Delta \mathbf{x}_k$	Differenz von $\mathbf{x}_k$ und $\Phi_k \mathbf{x}_{k-1}$
$\Theta$	Hilfsmatrix
$\Xi$	Schätzfehlerkovarianzmatrix eines Filters mit erweitertem Zustandsvektor
$\Phi_{\text{SF}}$	Zustandsübergangsmatrix des Sekundärfilters
RÖMISCH	(VEKTORIELLE GRÖSSEN)
$\mathbf{a}_{m'}$	Nullvektor, der an der $m'$ -ten Stelle eine Eins aufweist
$\mathbf{n}_{1:k}$	Sequenz aus zeitlich korrelierten Rauschvektoren bis zum Zeitpunkt $k$
$\mathbf{n}_{\text{SF}}$	Zeitlich korrelierter Rauschvektor des Sekundärfilters
$\mathbf{q}_{\dagger}$	Vektor aus den Hauptdiagonalelementen der Matrix $\mathbf{Q}_{\dagger}$
$\mathbf{q}_{\eta}$	Vektor aus den Hauptdiagonalelementen der Matrix $\mathbf{Q}_{\eta}$
$\mathbf{q}_{\eta, 1:k}$	Sequenz der Vektoren $\mathbf{q}_{\eta, 1}$ bis $\mathbf{q}_{\eta, k}$
$\tilde{\mathbf{q}}_{\eta}$	Logarithmus von $\mathbf{q}_{\eta}$
$\mathbf{q}_{\text{FF}}^{\#}$	Teilvektor von $\mathbf{q}_{\text{FF}}$
$\mathbf{q}_{\text{FF};a}$	Teilvektor von $\mathbf{q}_{\text{FF}}$ , der mit dem Sensorrauschen der Beschleunigungssensortriade zusammenhängt
$\mathbf{q}_{\text{FF};\omega}$	Teilvektor von $\mathbf{q}_{\text{FF}}$ , der mit dem Sensorrauschen der Drehratensensortriade zusammenhängt
$\mathbf{s}$	Gradientenvektor
$\mathbf{u}_{\text{SF}}$	Steuereingangsvektor des Sekundärfilters
$\mathbf{w}_{\text{SF}}$	Zeitlich korrelierter Messrauschvektor des Sekundärfilters
$\mathbf{x}_{1:k}$	Sequenz aus Zustandsvektoren bis zum Zeitpunkt $k$
$\mathbf{z}_{\dagger}$	Beobachtungsvektor
$\mathbf{z}_{1:k}$	Sequenz aus Beobachtungsvektoren bis zum Zeitpunkt $k$
$\mathbf{z}_{\text{SF}}$	Messvektor des Sekundärfilters
$\mathbf{B}_{\text{SF}}$	Steuereingangsmatrix des Sekundärfilters (Systemmodell)
$\Sigma_{\text{SF}}$	Steuereingangsmatrix des Sekundärfilters (Messmodell)
$\mathbf{D}_{\text{SF};n}$	Zustandsübergangsmatrix des zeitkorrelierten Systemrauschens des Sekundärfilters
$\mathbf{E}$	Erwartungswert $E \left[ \Delta \mathbf{x}_k \Delta \mathbf{x}_k^T \mid \mathbf{z}_{1:k}, \hat{\mathbf{q}}_{\eta, k-1} \right]$
$\mathbf{M}_{\text{SF}}$	Messrauschmatrix des Sekundärfilters
$\mathbf{F}_{\text{SF}}$	Zustandsmatrix des Sekundärfilters

$\mathbf{G}_{\text{SF}}$	Systemrauschmatrix des Sekundärfilters
$\tilde{\mathbf{G}}$	Matrixprodukt aus $\mathbf{G}$ und $\mathbf{\Gamma}_n$
$\mathbf{H}_{\text{SF}}$	Messmatrix des Sekundärfilters
$\mathbf{J}$	Aktueller Anteil an der HESSE-Matrix
$\mathbf{U}$	Kovarianzmatrix der Normalverteilung $\mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \Phi_k \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{U}_k(\mathbf{Q}))$
$\mathbf{V}$	HESSE-Matrix

## Kapitel 8

GRIECHISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$\mu_{l,\Delta K}$	Mittelung von Sensordaten eines Signalausschnittes $l$ der Länge $\Delta K$
$\sigma_{\text{AD};\Delta K}$	ALLAN-Standardabweichung eines Signalausschnittes der Länge $\Delta K$
$\sigma$	Standardabweichung des inhärenten <i>AWGR</i> einer Signalkomponente <i>MTi</i> -Sensoreinheit
$\sigma_b$	Standardabweichung des biastreibenden <i>AWGR</i> einer Signalkomponente <i>MTi</i> -Sensoreinheit
$\bar{\sigma}_b^2$	Varianz des Bias
$\bar{\sigma}_{b,\Delta K}^2$	Stichprobenvarianz des Bias
$\Delta T_{l,\min}$	Minimum der Signalausschnittlänge bei der ALLAN-Standardabweichung
RÖMISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$b$	Skalare Biasdrift
$b_{\Delta K}^{(j')}$	$j'$ -te Realisierung einer Biasdrift
$n_b$	Rauschanteil eines skalaren Bias
$ARW$	<i>Angle Random Walk</i> -Parameter der <i>MTi</i> -Sensoreinheit
$R(e^{j\omega\Delta t})$	Leistungsdichtespektrum einer Signalkomponente der <i>MTi</i> -Sensoreinheit
$R_\omega(f_{k'})$	Periodogramm eines Drehratensensorsignals
$RW$	Allgemeiner <i>Random Walk</i> -Parameter
$VRW$	<i>Velocity Random Walk</i> -Parameter der <i>MTi</i> -Sensoreinheit

## Kapitel 9

GRIECHISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$\epsilon_h, \epsilon_{\text{Konfig};h}$	Betrag des Fehlers in der Höhe (für eine bestimmte Konfiguration: GPS, BM-K, BM+K, SD-BM, SD+BM)
$\tilde{\epsilon}_h$	Schranke für einen Höhenfehler
$\epsilon_p, \epsilon_{\text{Verf};p}$	Betrag des Fehlers in der Position (für ein bestimmtes Schätzverfahren: GPS, Konst, KM, MD, SEM)
$\tilde{\epsilon}_p$	Schranke für einen Positionsfehler
$\epsilon_v, \epsilon_{\text{Verf};v}$	Betrag des Fehlers in der Geschwindigkeit (für ein bestimmtes Schätzverfahren: GPS, Konst, KM, MD, SEM)
$\tilde{\epsilon}_v$	Schranke für einen Geschwindigkeitsfehler
$\epsilon_{\sigma_{\text{FF};a}}$	Betragsmäßiger Fehler der Schätzung der Elemente von $\mathbf{q}_{\text{FF};a}$
$\epsilon_{\sigma_{\text{FF};\omega}}$	Betragsmäßiger Fehler der Schätzung der Elemente von $\mathbf{q}_{\text{FF};\omega}$
$\mu_{\epsilon_h}$	Mittlerer betragsmäßiger Höhenfehler
$\mu_{\epsilon_p}$	Mittlerer betragsmäßiger Positionsfehler

$\mu_{\epsilon_{p,e}}$	Mittlerer betragsmäßiger Positionsfehler (Ostkomponente)
$\mu_{\epsilon_{p,n}}$	Mittlerer betragsmäßiger Positionsfehler (Nordkomponente)
$\mu_{\epsilon_v}$	Mittlerer betragsmäßiger Geschwindigkeitsfehler
$\mu_{\epsilon_{v,d}}$	Mittlerer betragsmäßiger Geschwindigkeitsfehler (zum Erdmittelpunkt gerichteten Komponente)
$\mu_{\epsilon_{v,e}}$	Mittlerer betragsmäßiger Geschwindigkeitsfehler (Ostkomponente)
$\mu_{\epsilon_{v,n}}$	Mittlerer betragsmäßiger Geschwindigkeitsfehler (Nordkomponente)
$\xi_{\epsilon_h}$	Median des betragsmäßigen Höhenfehlers
$\xi_{\epsilon_p}$	Median des betragsmäßigen Positionsfehlers
$\xi_{\epsilon_v}$	Median des betragsmäßigen Geschwindigkeitsfehlers
$\sigma_{\epsilon_{\sigma_{FF;\omega}}}$	Standardabweichung des Schätzfehlers der Größe $\sigma_{FF;\omega}$
$\sigma_{\epsilon_{\sigma_{FF;a}}}$	Standardabweichung des Schätzfehlers der Größe $\sigma_{FF;a}$
$\sigma_{\epsilon_h}$	Standardabweichung des Höhenfehlers
$\sigma_{\epsilon_p}$	Standardabweichung des Positionsfehlers
$\sigma_{\epsilon_{p,e}}$	Standardabweichung des Positionsfehlers (Ostkomponente)
$\sigma_{\epsilon_{p,n}}$	Standardabweichung des Positionsfehlers (Nordkomponente)
$\sigma_{\epsilon_v}$	Standardabweichung des Geschwindigkeitsfehlers
$\sigma_{\epsilon_{v,d}}$	Standardabweichung des Geschwindigkeitsfehlers (zum Erdmittelpunkt gerichtete Komponente)
$\sigma_{\epsilon_{v,e}}$	Standardabweichung des Geschwindigkeitsfehlers (Ostkomponente)
$\sigma_{\epsilon_{v,n}}$	Standardabweichung des Geschwindigkeitsfehlers (Nordkomponente)
$\sigma_m$	Standardabweichung eines Magnetsensormessrauschens
$\sigma_{m,x}$	Standardabweichung des Magnetsensormessrauschvektors ( $x$ -Komponente)
$\sigma_{m,y}$	Standardabweichung des Magnetsensormessrauschvektors ( $y$ -Komponente)
$\sigma_{m,z}$	Standardabweichung des Magnetsensormessrauschvektors ( $z$ -Komponente)
$\sigma_{FF;a}$	Standardabweichung einer beliebigen Komponente des Vektors $\mathbf{q}_{FF;a}$
$\sigma_{FF;a,x}$	Standardabweichung der $x$ -Komponente des Vektors $\mathbf{q}_{FF;a}$
$\sigma_{FF;a,y}$	Standardabweichung der $y$ -Komponente des Vektors $\mathbf{q}_{FF;a}$
$\sigma_{FF;a,z}$	Standardabweichung der $z$ -Komponente des Vektors $\mathbf{q}_{FF;a}$
$\sigma_{FF;\omega}$	Standardabweichung einer beliebigen Komponente des Vektors $\mathbf{q}_{FF;\omega}$
$\sigma_{FF;\omega,x}$	Standardabweichung der $x$ -Komponente des Vektors $\mathbf{q}_{FF;\omega}$
$\sigma_{FF;\omega,y}$	Standardabweichung der $y$ -Komponente des Vektors $\mathbf{q}_{FF;\omega}$
$\sigma_{FF;\omega,z}$	Standardabweichung der $z$ -Komponente des Vektors $\mathbf{q}_{FF;\omega}$
$\psi_{GPS}$	GPS-Gierwinkel
RÖMISCH	(SKALARE GRÖSSEN)
$v_{GPS,e}^n$	GPS-Geschwindigkeitskomponente (Ost)
$v_{GPS,n}^n$	GPS-Geschwindigkeitskomponente (Nord)
$RMSE_{\epsilon_{\sigma_{FF;\omega}}}$	RMSE der Schätzung von $\sigma_{FF;\omega}$
$RMSE_{\epsilon_{\sigma_{FF;a}}}$	RMSE der Schätzung von $\sigma_{FF;a}$
RÖMISCH	(VEKTORIELLE GRÖSSEN)
$\mathbf{Q}_{FF}^{\#}$	Diagonale Kovarianzmatrix, die aus dem Vektor $\mathbf{q}_{FF}$ gebildet wird

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Informationsquellen eines Fahrzeugnavigationssystems . . . . .	5
2.2	Typische Sensorfehler . . . . .	17
2.3	Koppelnavigation . . . . .	19
3.1	Ausgangssignale der <i>MTi</i> -Sensoreinheit . . . . .	30
4.1	Koordinatensysteme . . . . .	35
4.2	Höhendefinitionen . . . . .	37
4.3	Koordinatentransformation anhand von Eulerwinkeln . . . . .	40
4.4	<i>Strapdown</i> -Algorithmus . . . . .	44
4.5	<i>Closed-loop</i> -Fehlerfilter . . . . .	57
5.1	Gesamtsystem mit Fehlerfilterung und Parameterschätzung . . . . .	62
5.2	Ablauf der Navigationsfilterung . . . . .	71
5.3	Verzögerte <i>GPS</i> -Messungen . . . . .	72
6.1	Barometrisches Teilsystem . . . . .	77
6.2	Langzeitmessungen von Temperatur und Luftdruck . . . . .	78
6.3	Topografische Karte . . . . .	81
6.4	Höhenprofil nach barometrischer Höhenformel . . . . .	85
6.5	Skalierungsfaktor sowie Bias . . . . .	86
7.1	Sekundärfilterung mit sequenziellem <i>EM</i> -Algorithmus . . . . .	98
7.2	Parameterschätzung durch modifiziertes Kovarianzmanagement . . . . .	104
7.3	Mittelwertschätzung und Parameterschätzung mit Kovarianzmanagement . . . . .	105
8.1	Leistungsdichtespektren und Spektrogramm der Signale ruhender Sensoreinheiten . . . . .	112
8.2	ALLAN-Standardabweichungen der <i>MTi</i> -Sensoreinheit . . . . .	113
8.3	Ausgangssignale und Spektrogramm der <i>MTi</i> -Sensoreinheit . . . . .	114
8.4	Periodogramme der Beschleunigungssensortriade der <i>MTi</i> -Sensoreinheit . . . . .	115
9.1	Untersuchungskonfiguration ohne sequenzielle Parameterschätzung . . . . .	117
9.2	Mittlere betragsmäßige Höhenfehler . . . . .	119
9.3	Messfahrt in der Innenstadt von Paderborn . . . . .	123
9.4	Höhenschätzung des kombinierten Navigationssystems . . . . .	124
9.5	Auswirkungen eines <i>GPS</i> -Signalausfalls . . . . .	126
9.6	Geschätzte Rauschparameter bei unterschiedlichen heuristischen Faktoren . . . . .	130
9.7	Geschätzte Rauschparameter bei künstlich generierten Daten . . . . .	133
9.8	Abhängigkeit der a posteriori-Verteilung von den Korrelationen beim MD . . . . .	136

9.9	Abhängigkeit der a posteriori-Verteilung von der <i>LLF</i> beim SEM . . . . .	136
9.10	<i>Strapdown</i> -Ausgangssignal und Messeingangssignal des Fehlerfilters . . . . .	137
9.11	Kumulative Verteilung von Positionsschätzfehlern . . . . .	141
9.12	Geschätzte Rauschparameter bei künstlich generierten Daten (mit Tiefpass) . . . . .	144
9.13	Positionsgenauigkeit einer <i>GPS</i> -Schätzung . . . . .	146
9.14	Auswirkungen eines <i>GPS</i> -Signalfehlers . . . . .	147
9.15	Auswirkungen von Vibrationen . . . . .	148
9.16	Verarbeitungsaufwand einzelner Filterkomponenten . . . . .	150
F.1	Übersicht des Systems zur Generierung künstlicher Sensordaten . . . . .	185
F.2	Künstlich erstellte Trajektorie und Geschwindigkeitsprofil . . . . .	186

## Tabellenverzeichnis

2.1	Fahrzeugsensorarten . . . . .	11
2.2	Weitere Fahrzeugsensorarten . . . . .	12
4.1	Genauigkeitsklassen inertialer Navigationssysteme . . . . .	34
4.2	Parameter des WGS84-Referenzsystems . . . . .	36
4.3	Empfängereigenschaften des Navilock NL-402U . . . . .	49
5.1	Genauigkeit eines typischen GPS-Empfängers . . . . .	68
6.1	Variablen für die barometrische Höhenberechnung . . . . .	77
6.2	Standardabweichungen für Referenztemperatur und -luftdruck . . . . .	78
7.1	Wertebereiche der mittels KM geschätzten Rauschprozessparameter . . . . .	106
8.1	Sensorparameter der MTi-Sensoreinheit . . . . .	113
8.2	Parameter des biastreibenden Rauschens der MTi-Sensoreinheit . . . . .	113
9.1	Testkonfigurationen . . . . .	118
9.2	Abweichungsparameter von Höhenschätzungen . . . . .	121
9.3	Abweichungsparameter von Positions-/Geschwindigkeitsschätzungen . . . . .	122
9.4	RMSE der Parameterschätzungen für verschiedene heuristische Faktoren . . . . .	128
9.5	Abweichungen von Parameterschätzungen unter idealisierten Bedingungen . . . . .	132
9.6	Abweichungen von Parameterschätzungen unter realistischen Bedingungen . . . . .	134
9.7	Winkelschätzfehler bei der Navigationsfilterung mit sequenzieller Parameterschätzung	139
9.8	Geschwindigkeitsschätzfehler bei sequenzieller Parameterschätzung . . . . .	140
9.9	Positionsschätzfehler bei sequenzieller Parameterschätzung . . . . .	142
9.10	Abweichungen von Parameterschätzungen bei tiefpassgefilterten Inertialsensordaten	144
9.11	Geschwindigkeitsschätzfehler bei sequenzieller Parameterschätzung . . . . .	145
9.12	Positionsschätzfehler bei sequenzieller Parameterschätzung . . . . .	145
A.1	Beispiele und Erläuterungen zu den PUBX-Datensätzen . . . . .	159
F.1	Parameter zur Erzeugung künstlicher Daten (Datensatz 1) . . . . .	191
F.2	Parameter zur Erzeugung künstlicher Daten (Datensatz 2) . . . . .	192
G.1	Parameter des sensorinhärenten Rauschens der MTi-Sensoreinheit . . . . .	194





## Literaturverzeichnis

- [ANLC03] I. Abuhadrous, F. Nashashibi, C. Laugeau und M. Chinchole: „Multi-Sensor Data Fusion for Land Vehicle Localization Using RTMAPS“, *Proc. of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium 2003*, S. 339–344, 9.–11. Juni 2003, doi:10.1109/IVS.2003.1212933.
- [AP99] E. Abbott und D. Powell: „Land-Vehicle Navigation Using GPS“, *Proceedings of the IEEE*, Band 87(1), S. 145–162, Jan. 1999, doi:10.1109/5.736347.
- [Aro99] F. Aronowitz: *Fundamentals of the Ring Laser Gyro*, Kapitel Optical Gyros and their Applications, S. 3–1 – 3–24, RTO AGARDograph, 1999.
- [Bal09] T. Balkenhol: *Adaptive Digitalfilter für die aktive Schalldämpfung in Röhrensystemen*, Dissertation, Universität Paderborn, Warburger Str. 100, 33098 Paderborn, Nov. 2009.
- [BB10] P. D. M. Burger und D. C. Brune: „Variationsmethoden in der biomedizinischen Bildgebung“, Skript zur Vorlesung, 2010.
- [BCD02] H. Bauer, J. Crepin und K.-H. Dietzsche: *Autoelektrik/ Autoelektronik: Systeme und Komponenten*, Kraftfahrzeugtechnik, Vieweg Verlag, Braunschweig, 4. Auflage, Okt. 2002.
- [Bil98] J. A. Bilmes: „A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models“, Tech. Rep., International Computer Science Institute, Berkeley CA, 94704, Apr. 1998.
- [BLN07] C. Boucher, A. Lahrech und J.-C. Noyer: „Multisensor Unscented Filtering for GPS-Based Navigation Systems“, *Proc. of the IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, S. 1–6, 1.–3. Mai 2007, doi:10.1109/IMTC.2007.379130.
- [BO07] U. Bhatti und W. Ochieng: „Failure Modes and Models for Integrated GPS/INS Systems“, *Journal of The Institute of Navigation*, Band 60(2), S. 327–348, 2007.
- [BOF07] U. Bhatti, W. Ochieng und S. Feng: „Integrity of an Integrated GPS/INS System in the Presence of Slowly Growing Errors - Part I: A Critical Review“, *GPS Solutions*, Band 11(3), S. 173–181, Juli 2007.
- [Bor71] J. E. Bortz: „A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation“, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Band 7(1), S. 61–66, 1971.
- [Bro92] R. G. Brown: „A Baseline RAIM Scheme and a Note on the Equivalence of Three RAIM Methods“, *Journal of The Institute of Navigation*, Band 39(3), S. 301–316, 1992.
- [BSLK01] Y. Bar-Shalom, X. R. Li und T. Kirubarajan: *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*, 2001.
- [BSMM00] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch, 5. Auflage, Aug. 2000.

- [B.V09a] X. T. B.V.: *Datenblatt MTi-Sensoreinheit*, Xsens Technologies B.V., Enschede, Niederlande, Nov. 2009.
- [B.V09b] X. T. B.V.: *MTi and MTx User Manual and Technical Documentation*, Xsens Technologies B.V., Enschede, Niederlande, Mai 2009.
- [Car] [URL] <http://www.car-to-car.org/>.
- [CGP04] C. R. Carlson, J. C. Gerdes und J. D. Powell: „Error Sources when Land Vehicle Dead Reckoning with Differential Wheelspeeds“, *The Journal of Navigation*, Band 51(1), S. 13–27, 2004.
- [Chi10] A. Chinaev: *Sequentielle Parameterschätzung in einem schwach gekoppelten Navigationssystem*, Diplomarbeit, Universität Paderborn, Juni 2010.
- [CL04] R. Chen und X. Li: „Virtual Differential GPS Based on SBAS Signal“, *GPS Solutions*, Band 8(4), S. 238–244, Sept. 2004.
- [CLYC05] W. Chen, Z. Li, M. Yu und Y. Chen: „Effects of Sensor Errors on the Performance of Map Matching“, *The Journal of Navigation*, Band 58(2), S. 273–282, 2005.
- [Cra01] M. Cramer: *Genauigkeitsuntersuchungen zur GPS/INS-Integration in der Aerophotogrammetrie*, Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.
- [Cvi] [URL] <http://www.cvisproject.org>.
- [Dam99] J. H. Dambeck: *Diagnose und Therapie geodätischer Trägheitsnavigationssysteme - Modellierung, Systemtheorie, Simulation, Realdatenverarbeitung*, Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [DDA01] L. Deng, J. Droppo und A. Acero: „Recursive Noise Estimation Using Iterative Stochastic Approximation for Stereo-Based Robust Speech Recognition“, *Proc. of the IEEE Workshop on Automatic Speech Recognition and Understanding ASRU*, S. 81–84, 9.–13. Dez. 2001.
- [DDA03] L. Deng, J. Droppo und A. Acero: „Recursive Estimation of Nonstationary Noise Using Iterative Stochastic Approximation for Robust Speech Recognition“, *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, Band 11(6), S. 568–580, Nov. 2003, doi: 10.1109/TSA.2003.818076.
- [Deu04] P. Deuffhard: *Newton Methods for Nonlinear Problems, Springer Series in Computational Mathematics*, Band 35, Springer, 1. Auflage, 2004.
- [DH04] H. Dodel und D. Häupler: *Satellitenavigation. GALILEO, GPS, GLONASS, integrierte Verfahren*, Hüthig Telekommunikation, 2004.
- [Dix05] K. Dixon: „Satellite Positioning Systems: Efficiencies, Performance and Trends“, *The Journal of Navigation*, Band 3(1), S. 58–63, 2005.
- [DJ03] K.-H. Dietsche und T. Jäger: *Kraftfahrtechnisches Taschenbuch*, Vieweg Verlag, 2003.

- [DSNDW01] G. Dissanayake, S. Sukkarieh, E. Nebot und H. Durrant-Whyte: „The Aiding of a Low-Cost Strapdown Inertial Measurement Unit Using Vehicle Model Constraints for Land Vehicle Applications“, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Band 17(5), S. 731–747, Okt. 2001, doi:10.1109/70.964672.
- [EFM10] G. A. Einicke, G. Falco und J. T. Malos: „EM Algorithm State Matrix Estimation for Navigation“, *IEEE Signal Processing Letters*, Band 17(5), S. 437–440, 2010.
- [EM99] P. Enge und P. Misra: „Special Issue on Global Positioning System“, *Proceedings of the IEEE*, Band 87(1), S. 3–15, Jan. 1999, doi:10.1109/JPROC.1999.736338.
- [EMR05] J. W. Erickson, P. S. Maybeck und J. F. Raquet: „Multipath-Adaptive GPS/INS Receiver“, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Band 41(2), S. 645–657, Apr. 2005, doi:10.1109/TAES.2005.1468754.
- [EMRH09] G. A. Einicke, J. T. Malos, D. C. Reid und D. W. Hainsworth: „Riccati Equation and EM Algorithm Convergence for Inertial Navigation Alignment“, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Band 57(1), S. 370–375, 2009, doi:10.1109/TSP.2008.2007090.
- [ESA07] ESA: Online, 2007, [URL] <http://www.esa.int/esana/index.html>.
- [FB99] J. Farrell und M. Barth: *The Global Positioning System and Inertial Navigation*, McGraw-Hill, 1999.
- [Flü09] H. Flühr: *Avionik und Flugsicherungstechnik*, Springer Berlin Heidelberg, 2009, doi: 10.1007/978-3-642-01612-7.
- [Frä05] D. Fränken: „Dynamische Zustandsschätzung“, Skript zur Vorlesung, März 2005.
- [Fri06] A. Fritsch: „Die letzten Rätsel der Navigation“, Online, 2006, [URL] <http://kuestenkanuwandern/ausbild>.
- [Fro04] P. D. A. Frommer: „Numerische Methoden der nichtlinearen Optimierung“, Skript zur Vorlesung an der Bergischen Universität Wuppertal, Fachbereich Mathematik, 2004.
- [Fuk90] K. Fukunaga: *Statistical Pattern Recognition*, Academic Press Inc., 1990.
- [FWB05] W. Flenniken, J. Wall und D. Bevely: „Characterization of Various IMU Error Sources and the Effect on Navigation Performance“, *Proc. of The Institute of Navigation GNSS 2005*, 2005.
- [GGB<sup>+</sup>02] F. Gustafsson, F. Gunnarsson, N. Bergman, U. Forssell, J. Jansson, R. Karlsson und P.-J. Nordlund: „Particle Filters for Positioning, Navigation, and Tracking“, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Band 50(2), S. 425–437, Feb. 2002, doi: 10.1109/78.978396.
- [GNK10] J. Georgy, A. Noureldin und M. J. Korenberg: „Low-Cost Three-Dimensional Navigation Solution for RISS/GPS Integration Using Mixture Particle Filter“, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Band 59(2), S. 599–615, Feb. 2010.

- [GTC07] A. Giremus, J.-Y. Tournet und V. Calmettes: „A Particle Filtering Approach for Joint Detection/Estimation of Multipath Effects on GPS Measurements“, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Band 55(4), S. 1275–1285, Apr. 2007, doi:10.1109/TSP.2006.888895.
- [Gus09] F. Gustafsson: „Automotive Safety Systems“, *IEEE Signal Processing Magazine*, Band 26(4), S. 32–47, Juli 2009, doi:10.1109/MSP.2009.932618.
- [GWA07] M. Grewal, L. Weill und A. Andrews: *Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration*, John Wiley & Sons Ltd., Hoboken, NJ, 2. Auflage, 2007.
- [HBH95] R. E. Helmick, W. D. Blair und S. A. Hoffman: „Fixed-Interval Smoothing for Markovian Switching Systems“, *IEEE Transactions on Information Theory*, Band 41(6), S. 1845–1855, Nov. 1995, doi:10.1109/18.476310.
- [Hei00] G. Hein: „From GPS and GLONASS via EGNOS to Galileo - Positioning and Navigation in the Third Millenium“, *GPS Solutions*, Band 3(4), S. 39–47, Apr. 2000.
- [HL04] D. Huang und H. Leung: „EM-IMM Based Land-Vehicle Navigation with GPS/INS“, *Proc. of the 7th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, S. 624–629, 3.–6. Okt. 2004, doi:10.1109/ITSC.2004.1398973.
- [HL05] D. Huang und H. Leung: „An Expectation-Maximization-Based Interacting Multiple Model Approach for Cooperative Driving Systems“, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Band 6(2), S. 206–228, Juni 2005, doi:10.1109/TITS.2005.848366.
- [HU05] R. Häb-Umbach: „Optimale und adaptive Filterung“, Skript zur Vorlesung, 2005.
- [HU07] R. Häb-Umbach: „Statistische Lernverfahren und Mustererkennung“, Skript zur Vorlesung, 2007.
- [HWLW07] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger und E. Wasle: *GNSS Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo & More*, Springer, Wien, 2007.
- [IEE03] „IEEE Std. 962-1997 (R2003), Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros, Annex C“, 2003.
- [JDW03] S. J. Julier und H. F. Durrant-Whyte: „On the Role of Process Models in Autonomous Land Vehicle Navigation Systems“, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Band 19(1), S. 1–14, Feb. 2003, doi:10.1109/TRA.2002.805661.
- [Jek01] C. Jekeli: *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*, de Gryter, 2001.
- [JU04] S. J. Julier und J. K. Uhlmann: „Unscented Filtering and Nonlinear Estimation“, *Proceedings of the IEEE*, Band 92(3), S. 401–422, 2004, doi:10.1109/JPROC.2003.823141.
- [Kal60] R. E. Kalman: „A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems“, *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, Band 82, S. 35–45, 1960.

- [KH05] E. D. Kaplan und C. Hegarty, Hrsg.: *Understanding GPS Principles*, Artech House, 2. Auflage, 2005.
- [Klo08] B. Klose: *Meteorologie*, Springer, Berlin, 2008, doi:10.1007/978-3-540-71309-8.
- [KM93] V. Krishnamurthy und J. B. Moore: „On-Line Estimation of Hidden Markov Model Parameters Based on the Kullback-Leibler Information Measure“, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Band 41(8), S. 2557–2573, Aug. 1993, doi:10.1109/78.229888.
- [KSDA10] O. Kalinli, M. L. Seltzer, J. Droppo und A. Acero: „Noise Adaptive Training for Robust Automatic Speech Recognition“, *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, Band 18(8), S. 1889–1901, 2010, doi:10.1109/TASL.2010.2040522.
- [KSH01] T. Kailath, A. Sayed und B. Hassibi: *Linear Estimation*, Prentice Hall, 2001.
- [LARP98] T. D. Larsen, N. A. Andersen, O. Ravn und N. K. Poulsen: „Incorporation of Time Delayed Measurements in a Discrete-Time Kalman Filter“, *Proc. of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, S. 3972–3977, Tampa, Florida USA, Dez. 1998.
- [LJ00] X. R. Li und V. P. Jilkov: „A Survey of Maneuvring Target Tracking Dynamic Models“, *Proc. of the SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets*, S. 1–24, Orlando, FL, USA, Apr. 2000.
- [LK99] A. Logothetis und V. Krishnamurthy: „Expectation Maximization Algorithms for MAP Estimation of Jump Markov Linear Systems“, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Band 47(8), S. 2139–2156, Aug. 1999.
- [LK07] K. Li und T. Kanade: „Cell population Tracking and Lineage Construction Using Multiple-Model Dynamics Filters and Spatiotemporal Optimization“, *Proc. of the MI-AAB (in conjunction with MICCAI)*, 2007.
- [LL07] Z. Li und H. Leung: „GPS/INS Integration Based Navigation with Multipath Mitigation for Intelligent Vehicles“, *Proc. of the ICM2007 4th IEEE International Conference on Mechatronics*, S. 1–5, 8.–10. Mai 2007, doi:10.1109/ICMECH.2007.4280015.
- [LLC08] G. I. LLC: *MotionNode Specification*, GLI Interactive LLC, 89 Yesler Way, Suite 2, Seattle, WA 98104, 2008, [URL] <http://www.motionnode.com>, r00.
- [LW06] D. Li und J. Wang: „Kalman Filter Design Strategies for Code Tracking Loop in Ultra-Tight GPS/INS/PL Integration“, *Proc. of The Institute of Navigation National Technical Meeting 2006*, Monterey, California, Jan. 2006.
- [May82] P. S. Maybeck: *Stochastic Models, Estimation and Control*, Band 2, Academic Press, New York, 1982.
- [MBH05] J. Marais, M. Berbineau und M. Heddebaut: „Land Mobile GNSS Availability and Multipath Evaluation Tool“, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Band 54(5), S. 1697–1704, Sept. 2005, doi:10.1109/TVT.2005.853461.
- [Meh70] N. K. Mehra: „On the Identification of Variance and Adaptive Kalman Filtering“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Band 15, S. 175–184, 1970.

- [Moo96] T. K. Moon: „The Expectation-Maximization Algorithm“, *IEEE Signal Processing Magazine*, S. 47–60, Nov. 1996.
- [MS99] A. H. Mohammed und K. P. Schwarz: „Adaptive Kalman-Filtering for INS/GPS“, *Proc. of the Journal of Geodesy*, Band 73, S. 193–203, 1999.
- [MT06] J. C. McCall und M. M. Trivedi: „Video-Based Lane Estimation and Tracking for Driver Assistance: Survey, System, and Evaluation“, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Band 7(1), S. 20–37, März 2006, doi:10.1109/TITS.2006.869595.
- [NAS96] N. NASA: „EGM96 - The NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model“, Online, 1996, [URL] <http://cddis.gsfc.nasa.gov/926/egm96/egm96.html>.
- [NB07] M. E. B. E. Najjar und P. Bonnifait: „Road Selection Using Multicriteria Fusion for the Road-Matching Problem“, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Band 8(2), S. 279–291, Juni 2007, doi:10.1109/TITS.2007.895312.
- [Neu05] T. Neuhierl: *Eine neue Methode zur Richtungsübertragung durch Koppelung von Inertialmesstechnik und Autokollimation*, Dissertation, Universitäten München/Zürich, 2005.
- [NGG07] A. N. Ndjeng, S. Glaser und D. Gruyer: „A Multiple Model Localization System for Outdoor Vehicles“, *Proc. of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium 2007*, S. 1050–1055, 13.–15. Juni 2007, doi:10.1109/IVS.2007.4290255.
- [NME] [URL] <http://www.nmea.de/nmea0183datensaetze.html>.
- [OLS07] D. Obradovic, H. Lenz und M. Schupfner: „Fusion of Sensor Data in Siemens Car Navigation System“, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Band 56(1), S. 43–50, Jan. 2007, doi:10.1109/TVT.2006.883731.
- [OS99] A. V. Oppenheim und R. W. Schaffer: *Discrete-Time Signal Processing*, Nov., Prentice Hall, 3. Auflage, 1999.
- [OSW<sup>+</sup>03] W. Ochieng, K. Sauer, D. Walsh, G. Brodin und S. Griffin: „GPS Integrity and Potential Impact On Aviation Safety“, *The Journal of Navigation*, Band 56(1), S. 51–65, 2003.
- [Oth03] M. Othmar: „Einführung in die Fehlerrechnung für Physiker, Wirtschaftsphysiker und Lehramtskandidaten“, Skript zur Vorlesung, Juli 2003.
- [PH08] O. Pink und B. Hummel: „A Statistical Approach to Map Matching Using Road Network Geometry, Topology and Vehicular Motion Constraints“, *Proc. of the 11th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems ITSC 2008*, S. 862–867, 12.–15. Okt. 2008, doi:10.1109/ITSC.2008.4732697.
- [PKB05] M. Precht, R. Kraft und M. Bachmaier: *Angewandte Statistik 1*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 7. Auflage, Mai 2005.
- [PP08] K. B. Petersen und M. S. Pedersen: *The Matrix Cookbook*, Technical University of Denmark, Nov. 2008, [URL] <http://matrixcookbook.com>.



- [Pre] [URL] <http://www.prevent-ip.org>.
- [QNO09] M. A. Quddus, R. B. Noland und W. Y. Ochieng: „The Effects of Navigation Sensors and Spatial Road Network Data Quality on the Performance of Map Matching Algorithms“, *Geoinformatica*, Band 13(1), S. 85–108, 2009, ISSN 1384-6175, doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10707-007-0044-x>.
- [QON07] M. A. Quddus, W. Y. Ochieng und R. B. Noland: „Current Map-Matching Algorithms for Transport Applications: State-of-the-Art and Future Research Directions“, *Elsevier Transportation Research Part C*, Band 15, S. 312–828, 2007.
- [RAG04] B. Ristic, S. Arulampalam und N. Gordon: *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*, Artech House Inc., Feb. 2004.
- [RLJ03] X. Rong Li und V. P. Jilkov: „Survey of Maneuvering Target Tracking. Part I. Dynamic Models“, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Band 39(4), S. 1333–1364, Okt. 2003, doi:10.1109/TAES.2003.1261132.
- [Roe00] W. Roedel: *Physik unserer Umwelt: Die Atmosphäre*, Springer, Berlin, 3. Auflage, Juli 2000.
- [RTS65] H. E. Rauch, F. Tung und C. T. Striebel: „Maximum Likelihood Estimates of Linear Dynamic Systems“, *AIAA Journal*, Band 3(8), S. 1445–1450, 1965.
- [Saf] [URL] <http://www.safespot-eu.org>.
- [Sav98a] P. G. Savage: „Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design - Part 1: Attitude Algorithms“, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Band 21(1), S. 19–28, Feb. 1998.
- [Sav98b] P. G. Savage: „Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design - Part 2: Velocity and Position Algorithms“, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Band 21(2), S. 208–221, März 1998.
- [SBBD08] M. Schlingelhof, D. Betaille, P. Bonnifait und K. Demasure: „Advanced Positioning Technologies for Co-operative Systems“, *IET Intelligent Transport Systems*, Band 2(2), S. 81–91, Juni 2008, doi:10.1049/iet-its:20070046.
- [SBLCP09] A. Selloum, D. Betaille, E. Le Carpentier und F. Peyret: „Lane Level Positioning Using Particle Filtering“, *Proc. of the 12th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems ITSC '09*, S. 1–6, 4.–7. Okt. 2009, doi:10.1109/ITSC.2009.5309850.
- [SBS99] J. Skaloud, A. M. Bruton und K. P. Schwarz: „Detection and Filtering of Short-Term ( $1/f^\gamma$ ) Noise in Inertial Sensors“, *Journal of The Institute of Navigation*, Band 46(2), S. 97–107, 1999.
- [Sch04] G. W. Schanz: *Sensoren - Sensortechnik für Praktiker*, Hüthig Verlag Heidelberg, 3. Auflage, 2004.

- [Sei04] C. Seidel: *Optimierungsstrategien für faseroptische Rotationssensoren: Einfluss der spektralen Eigenschaften der Lichtquelle*, Dissertation, Universität Fridericiana Karlsruhe, Juli 2004.
- [SES07] E. Shin und N. El-Sheimy: „Unscented Kalman Filter and Attitude Errors of Low-Cost Inertial Navigation Systems“, *Journal of Navigation*, Band 54(1), S. 1–9, 2007.
- [SGVG08] A. Soloviev, S. Gunawardena und F. Van Grass: „Deeply Integrated GPS/Low-Cost IMU for Low CNR Signal Processing: Concept Description of an In-Flight Demonstration“, *Journal on Navigation*, Band 55(1), S. 1–13, 2008.
- [SH09] I. Skog und P. Händel: „In-Car Positioning and Navigation Technologies: A Survey“, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Band 10(1), S. 4–21, 2009, ISSN 1524-9050, doi:<http://dx.doi.org/10.1109/TITS.2008.2011712>.
- [SS00] J. Skaloud und K.-P. Schwarz: „Accurate Orientation for Airborne Mapping Systems“, *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, Band 66(4), S. 393–401, Apr. 2000.
- [Syn37] J. L. Synge: *Geometrical Optics: An Introduction to Hamilton's Method*, Cambridge University Press, 1. Auflage, Jan. 1937.
- [Tab08] N. M. Tabatabaei: *Zur inertialen Bahnvermessung für die Kalibrierung von Werkzeugmaschinen und Robotern*, Dissertation, Universität Kassel, 2008.
- [Tim] [URL] <http://www.tim-online.nrw.de>.
- [Tip99] P. A. Tipler: *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag, 1999.
- [TMZI09] R. Toledo-Moreo und M. A. Zamora-Izquierdo: „IMM-Based Lane-Change Prediction in Highways With Low-Cost GPS/INS“, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Band 10(1), S. 180–185, März 2009, doi:10.1109/TITS.2008.2011691.
- [Tog04] J. Toghill: *Navigation. Methoden - Ausrüstung - Praxis*, Delius Klasing, 2004.
- [Tom07] „Elektronische Karten - Die Vision von TomTom“, Tech. Rep., TomTom, Amsterdam, Aug. 2007.
- [TSM85] D. M. Titterton, A. F. Smith und U. E. Makov: *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons Ltd., 1985.
- [TW04] D. Titterton und J. Weston: *Strapdown Inertial Navigation Technology*, The Institution of Electrical Engineers and the American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004.
- [Tys92] W. Tysiak: „Folgen: Explizit und Rekursiv“, *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, Band 45(1), S. 15–17, Jan. 1992.
- [u-b09] u-blox AG: *u-blox 5 Receiver Description, Including Protocol Specification*, Nov. 2009, gPS.G5-X-07036-G, Rev. für FW 6.02.
- [ubl] [URL] <http://www.ublox.com>.

- [Upt08] G. Upton: *A Dictionary of Statistics*, Oxford University Press, Oxford Oxfordshire, 2008, ISBN 9780199541454.
- [Us176] *U.S. Standard Atmosphere*, U.S. Government Press, 1976.
- [Wen07] J. Wendel: *Integrierte Navigationssysteme*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2007.
- [Whi88] L. Whitcomb: „Using Low Cost Magnetic Sensors on Magnetically Hostile Land Vehicles“, *Proc. of the IEEE Position Location and Navigation Symposium, 1988. Record. Navigation into the 21st Century, IEEE PLANS '88*, S. 34–38, Orlando, FL, Nov. 1988, doi:10.1109/PLANS.1988.195463.
- [Whi93] M. White: „Digital Maps - A Fundamental Element of IVHS“, *Journal of Intelligent Transportation Systems*, Band 1(2), S. 135–150, 1993.
- [WHU08] C. Wang, Z. Hu und K. Uchimura: „Precise Curvature Estimation by Cooperating with Digital Road Map“, *Proc. of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, S. 859–864, 4.–6. Juni 2008, doi:10.1109/IVS.2008.4621300.
- [WHU09] S. Windmann und R. Haeb-Umbach: „Parameter Estimation of a State-Space Model of Noise for Robust Speech Recognition“, *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, Band 17(8), S. 1577–1590, Nov. 2009, doi:10.1109/TASL.2009.2023172.
- [Wie09] J. Wiesinger: „Anti-Blockier-System (ABS)“, Nov. 2009, [URL] <http://www.kfztech.de/kfztechnik/fahrwerk/bremsen/abs.htm>.
- [WN08] X.-M. Wang und W.-B. Ni: „Research on Dynamic Errors Compensation for Measurement System of Tilting Train Based on Kalman Filter“, *Proc. of the International Intelligent Computation Technology and Automation (ICICTA) Conference*, Band 2, S. 175–180, 2008, doi:10.1109/ICICTA.2008.258.
- [Woo07] O. J. Woodman: „An Introduction to Inertial Navigation“, Technical Report 696, University of Cambridge, Computer Laboratory, 15 JJ Thomson Avenue, Cambridge CB3 0FD, United Kingdom, Aug. 2007.
- [WR07] I.-H. Whang und W.-S. Ra: „Barometer Error Identification Filter Design Using Sigma Point Hypotheses“, *Proc. of the International Conference on Control, Automation and Systems ICCAS '07*, S. 1410–1415, 17.–20. Okt. 2007, doi:10.1109/ICCAS.2007.4406559.
- [WS90] M. Wei und K. Schwarz: „Testing a Decentralized Filter for GPS/INS Integration“, *Proc. of the IEEE Position Location and Navigation Symposium, 1990. Record. The 1990's - A Decade of Excellence in the Navigation Sciences*, S. 429–435, Las Vegas, NV, 1990, doi:10.1109/PLANS.1990.66210.
- [WVDM00] E. A. Wan und R. Van Der Merwe: „The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation“, *Proc. of the Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC*, S. 153–158, 2000, doi:10.1109/ASSPCC.2000.882463.

- [XGE08] Z. Xing und D. Gebre-Egziabher: „Modeling and Bounding Low Cost Inertial Sensor Errors“, *Proc. of the IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, S. 1122–1132, 5.–8. Mai 2008, doi:10.1109/PLANS.2008.4569999.
- [YF03] Y. Yang und J. A. Farrell: „Magnetometer and Differential Carrier Phase GPS-Aided INS for Advanced Vehicle Control“, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Band 19(2), S. 269–282, Apr. 2003, doi:10.1109/TRA.2003.809591.
- [Zha97] Y. Zhao: *Vehicle Location and Navigation Systems*, Artech House, 1997.
- [ZPW90] W.-b. Zhang, R. E. Parsons und T. West: „An Intelligent Roadway Reference System for Vehicle Lateral Guidance/Control“, *Proc. of the American Control Conference*, S. 281–286, 23.–25. Mai 1990.

## Eigene Publikationen

- [BBF<sup>+</sup>09] M. Bevermeier, D. Brukakis, D. Fischer, S. Flake, R. Häb-Umbach, T. Labuhn, S. Peschke und J. Stehr: „Drahtlose Fahrzeug- und Laderaumüberwachung für LKW mit Hilfe einer Maut-On-Board Unit“, D. G. für Ortung und Navigation e. V., Hrsg., *Proc. of the DGON-Navigationskonvent 2009*, Deutsche Gesellschaft für Ortung und Navigation e. V., Vertretung des Landes Sachsen-Anhalt beim Bund, Berlin, Deutschland, 9.–10. Juli 2009, [URL] <http://www.dgon.de>.
- [BEHU07] M. Bevermeier, T. Ebel und R. Häb-Umbach: „Channel Estimation by Exploiting Sub-layer Information in OFDM Systems“, S. K. Simon Plass, Armin Dammann und K. Fazel, Hrsg., *Multi-Carrier Spread Spectrum 2007, Lecture Notes in Electrical Engineering*, Band 1, S. 387–396, Springer Niederlande, Herrsching, Deutschland, Mai 2007.
- [BFHUS11] M. Bevermeier, S. Flake, R. Häb-Umbach und J. Stehr: „A Platform for Efficient Supply Chain Management Support in Logistics“, *Proc. of the 8th International Workshop on Intelligent Transportation WIT 2011*, Institute of Telecommunications, Hamburg University of Technology, Deutschland, 22.–23. März 2011, [URL] <http://wit.tu-harburg.de>.
- [BHU07] M. Bevermeier und R. Häb-Umbach: „Combined Time and Frequency Domain OFDM Channel Estimation“, S. K. Simon Plass, Armin Dammann und K. Fazel, Hrsg., *Multi-Carrier Spread Spectrum 2007, Lecture Notes in Electrical Engineering*, Band 1, S. 317–326, Springer Niederlande, Herrsching, Deutschland, Mai 2007.
- [BPHU09a] M. Bevermeier, S. Peschke und R. Häb-Umbach: „Joint Parameter Estimation and Tracking in a Multi-Stage Kalman Filter for Vehicle Positioning“, *Proc. of the IEEE 69th Vehicular Technology Conference VTC Spring 2009*, S. 1–5, Barcelona, Spanien, 26.–29. Apr. 2009, doi:10.1109/VETECS.2009.5073634, [URL] <http://www.ieeevtc.org/vtc2009spring>.
- [BPHU09b] M. Bevermeier, S. Peschke und R. Häb-Umbach: „Robust Vehicle Localization Based on Multi-Level Sensor Fusion and Online Parameter Estimation“, *Proc. of the 6th Workshop on Positioning, Navigation and Communication WPNC 2009*, S. 235–242, Hannover, Deutschland, 19. März 2009, doi:10.1109/WPNC.2009.4907833, [URL] <http://www.wpnc.net>.
- [BWPHU10] M. Bevermeier, O. Walter, S. Peschke und R. Häb-Umbach: „Barometric Height Estimation Combined with Map-Matching in a Loosely-Coupled Kalman-Filter“, *Proc. of the 7th Workshop on Positioning, Navigation and Communication WPNC 2010*, Dresden, Deutschland, 11.–12. März 2010, [URL] <http://www.wpnc.net>.
- [HUB07] R. Häb-Umbach und M. Bevermeier: „OFDM Channel Estimation Based on Combined Estimation in Time and Frequency Domain“, *Proc. of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP 2007*, Band 3, S. III–277–III–280, Honolulu, Hawaii, USA, 15.–20. Apr. 2007, doi:10.1109/ICASSP.2007.366526, [URL] <http://www.icassp2007.org>.

- [PBHU09a] S. Peschke, M. Bevermeier und R. Häb-Umbach: „A GPS Positioning Approach Exploiting GSM Velocity Estimates“, *Proc. of the 6th Workshop on Positioning, Navigation and Communication WPNC 2009*, S. 195–202, Hannover, Deutschland, 19. März 2009, doi:10.1109/WPNC.2009.4907827, [URL] <http://www.wpnc.net>.
- [PBHU09b] S. Peschke, M. Bevermeier und R. Häb-Umbach: „Verbesserung von GPS-basierter Ortung durch GSM-Geschwindigkeitsschätzungen“, D. G. für Ortung und Navigation e. V., Hrsg., *Proc. of the DGON-Navigationskonvent 2009*, Deutsche Gesellschaft für Ortung und Navigation e. V., Vertretung des Landes Sachsen-Anhalt beim Bund, Berlin, Deutschland, 9.–10. Juli 2009, [URL] <http://www.dgon.de>.