Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahres, Teil 2

Von *Peter Bender* in Neuss

3.3. Aufgabenspezifische Aspekte

Im folgenden möchte ich nun die Aspekte diskutieren, die sich mehr auf einzelne Aufgaben oder Aufgabengruppen des Tests beziehen. Dabei gehe ich Aufgabe für Aufgabe durch, und zwar nach zunehmendem Schwierigkeitsgrad (der durch die Zahl der Fehllösungen definiert ist). Zuvor noch einige Erläuterungen: An zahlreichen Fehllösungen treten mehrere Fehlertechniken zugleich auf; je mehr Techniken beteiligt sind, desto seltener ist die Fehllösung und gehört dann nicht mehr zu den sogenannten ‚häufigsten'. Entsprechend können Fehlertechniken mehrere Ursachen beim selben Schüler und erst recht bei verschiedenen Schülern haben. Über diese Ursachen lassen sich nur Vermutungen von mehr oder weniger hohem Gewißheitsgrad äußern. Entsprechend sind meine Ausführungen zu verstehen. Oft nenne ich die mir am wahrscheinlichsten vorkommende Ursache oder schlage eine Alternative zu einer scheinbar auf der Hand liegenden (vor allem zu solchen aus (Ra)) vor, ohne diese zu explizieren. Insbesondere sind keine genaueren quantitativen Angaben über Fehlerursachen möglich. Tritt eine Fehlertechnik nur bei Schülern einer einzigen Klasse auf, so erwähne ich das. Die Prozentzahlen beziehen sich auf die Gesamtzahl aller Schüler (%S), auf die Zahl aller Lösungsversuche einer Aufgabe (einschließlich + und –, ohne o; %L), auf die Zahl der richtigen (%R) oder der falschen Lösungen (%F) einer Aufgabe (nicht auf die Zahl der Fehler, die i. a. wesentlich höher ist), oder der Bezug ist angegeben (%).

B5 Ein Autohaus kauft bei einer Autofabrik 9 Wagen, die alle gleichviel kosten. Der Autohändler überweist für die 9 Wagen 108000 DM an die Autofabrik. Wieviel DM kostet ein Wagen?

904 (= 81%S) +, 195 (= 17 %S) —, 21 (= 2%S) o

Verteilungsprozeß; Typ: Preis pro Stück bei gegebenem Gesamtpreis gesucht (Division). Zu verstehen, zu wissen, zu überlegen, zu rechnen ist:

(a) Bei einem Autohaus gibt es Autos (Wagen) zu kaufen. Das Autohaus seinerseits bezieht die Autos von der Autofabrik und muß sie dort bezahlen. (Sachwissen)
(b) Überweisen bedeutet bezahlen. (Kompetenz in der Umgangssprache und Sachwissen)
(c) 108000 DM ist der Gesamtpreis für die 9 Wagen. (Kompetenz in der Umgangssprache)
(d) Gesucht ist der Stückpreis (Preis für einen Wagen). (Zielerfassung)
(e) Dabei ist zu beachten, daß die Wagen „alle gleichviel kosten".
(f) Die 108000 DM sind gleichmäßig auf die 9 Wagen zu verteilen. (Übersetzung in mathematisches Wissen)
(g) Rechnen: 108000:9 (zwar einstelliger Divisor, aber Nullen beim Dividend am Ende und zwischen anderen Ziffern)

Tab. 2: Häufigste Fehllösungen bei B5

[illegible]	1200	972000	13500	120	102(0)(0)(0)	112(0)(0)(0)	108000	13000
[illegible]	38	8	7	7	7	5	3	3
[illegible]	19	4	4	4	4	3	2	2

Die meisten Fehler sind übliche numerische Fehlertechniken, vor allem Schwierigkeiten beim Abzählen der Nullen, sowie

108000:9 = 112... (Stellen)

108000:9 = 13...
9
—
18... (Einmaleins)

und zahlreiche weitere typische Fehler beim schriftlichen Dividieren. ‚13500' entsteht aus der Division durch 8 (Perseveration der 8 aus 108000?); die Ziffernfolge 102 aus den verschiedensten Fehlertechniken.

Insgesamt 12 (= 6%F) Schüler führen eine Multiplikation (9 · 108000 = 972000) durch. Sie interpretieren offenbar die Wendung ‚für die 9 Wagen 108000 DM' als ‚für die 9 Wagen je 108000 DM'. Ob sie die Frage gar nicht mehr richtig aufnehmen oder sie bewußt oder unbewußt umdeuten — ihr Verständnis der Aufgabenstellung ist jedenfalls für sie ein Signal für eine Multiplika-

tion (irgendwie muß ja die 9 berücksichtigt werden). Die meisten von diesen antworten mit: „Ein Wagen kostet 972000 DM" und übernehmen damit formelhaft den Fragesatz. Hier liegt einer der typischen Fehler im Sachrechnen in seiner einfachsten Form vor. Zwei Zahlen nach einem scheinbar passenden Rechenschema verknüpft, das der Sachsituation nicht entspricht. Die Schüler mit der Lösung ‚108000' sind wohl demselben Mißverständnis über den Preis eines Wagens unterlegen, sind aber mit mehr Sinn vorgegangen und haben dabei die Zahlenangabe 9 als unbeachtlich betrachtet. Besonders die Schüler, deren Lösung um Zehnerpotenzen zu klein ist (1200, 120, 1020 usw.), erweisen sich als unkritisch gegenüber ihrem absurden Ergebnis (für 1200 DM erhält man kaum noch einen ordentlichen Gebrauchtwagen). Dies ist eine Folge der Lebensferne des Mathematikunterrichts.
3 Schüler haben mit 99 statt mit 9 gerechnet. Hierfür ist wohl das doppelte Vorkommen der 9 im Text ursächlich.

B1 Wie oft schlägt ein Herz in einer Stunde, wenn es in einer Minute 72 Schläge macht? 903 (= 81%S) +, 216 (= 19%S) —, 1 (= 0%S) o
Vervielfältigungsprozeß; Typ: Gesamtwert gesucht bei gegebenen Wert pro Einheit und Anzahl der Einheiten. Zu verstehen, zu wissen, zu überlegen, zu rechnen ist:
(a) Das Phänomen des Herzschlags. (elementares Sachwissen)
(b) Für eine Zeitspanne (Minute; Einheit) ist die Zahl der Schläge angegeben. (ansatzweise Sachwissen: Herzschlag = Anzahl / Zeit)
(c) Für eine andere Zeitspanne (Stunde) ist die Zahl der Schläge gesucht. (Zielerfassung)
(d) Dabei ist vorausgesetzt, daß der Herzschlag konstant ist. (unproblematisch für die Schüler)
(e) 1 Stunde ist ein Vielfaches von 1 Minute, nämlich das 60-Fache. (Sachwissen)
(f) In der Stunde sind es 60mal so viel Schläge wie in der Minute. (Umdeutung der Minutenzahl in einen Vervielfacher für die Schlägezahl)
(g) Rechnen: 60·72

Lösung	540	432	1728	4220	4320/min	7320	4500	4320/min	1520
Vork.	31	30	24	14	13	9	8	6	6
%F	14	14	11	6	6	4	4	3	3

Lösung	5400	4392	5320	4380	5020	4520	4200	4752	42120
Vork.	5	5	4	4	4	3	3	3	3
%F	2	2	2	2	2	1	1	1	1

Tab. 3:
Häufigste Fehllösungen bei B1

Die meisten Fehler sind übliche numerische Fehlertechniken, z. B.

60·72	60·72	72·60	72·60	72·60	60·72	60·72	60·72	60·72	72·60
42120	120(0)	7320	4320	4320	4200	4900	4200	4200	120
	420(0)		72	432	180	120	120	120	1400
	540(0)		4392	4752	4380	5020	4520	5320	1520
Stellen	Stellen	Persev.	Null falsch beh.	Null falsch beh.	Einmaleins	Einmaleins	Addition	Addition	2·7

9 (= 4%F) Schüler ändern 72 in 75 (75·60 = 4500) ab (graphische Verwandtschaft der Ziffern 2 und 5?); 33 (= 15%F) Schüler nehmen nicht den Faktor 60, sondern vor allem 24 (24·72 = 1728) und 12. Mögliche Gründe: Das Tag-Stunden-Verhältnis 24 ist weniger einfach und eindrucksvoller; häufig sind Ziffernblätter in 12 Teile à 5 Minuten eingeteilt. Die Antworten: „Das Herz schlägt 4320mal in der Minute." und „Es schlägt 4320 Minuten." sind wohl Perseverationen, die wegen des ansonsten geringen Anspruchs der Aufgabe vergleichsweise häufig auftreten.
Daß die Schüler hier geringfügig schlechter (statt deutlich besser) abschneiden als bei B5, obwohl die Operation hier (Multiplikation) ‚leichter' ist als die Operation dort (Division), liegt wohl an der abstrakteren Begrifflichkeit (Schläge pro Stunde, und zwar nicht in einer einzigen, sondern andauernd, gegenüber: Kosten eines Autos), an der erforderlichen Umdeutung von 60 min in 60 als Faktor, an der nur impliziten Vorgabe dieses Faktors und daran, daß der Divisor in B5 einstellig ist.

A4 Eine Klasse hat 29 Kinder. Es sind 3 Mädchen mehr, als es Jungen sind. Wie viele Jungen, wie viele Mädchen sind in der Klasse? 773 (= 69%S) +, 294 (= 26%S) —, 53 (= 5%S) o
Aufteilungsprozeß (in Teile von *unterschiedlicher* Mächtigkeit); Typ: Gesucht sind zwei Zahlen, für die Summe und Differenz gegeben sind. Zu verstehen usw. ist:

J J J J J J J J J J J J J
| | | | | | | | | | | | |
M M M M M M M M M M M M M M M M

Abb. 2: Strukturbild von A4

(a) In einer Klasse sind Jungen und Mädchen, insgesamt 29 Kinder. (Verständnis der umgangssprachlichen Wendung ‚hat')
(b) Gesucht ist die Zahl der Jungen und die de[r] Mädchen. (Zielerfassung)
(c) Es ist eine zusätzliche Bedingung gegeben, die das Problem erst eindeutig lösbar mach[t]. (Überblick über Text und Aufgabenstellung)
(d) „3 Mädchen mehr" steht für eine Differen[z]; die Differenzenbildung ist jedoch nicht We[g]nehmen einer Teilmenge, sondern ‚Neutralisi[e]rung' durch Paarbildung und Abzählen d[es] Rests. (mathematische Deutung der Wendu[ng] ‚mehr')
(e) Ohne den Überschuß von 3 Mädchen hä[tte] die Klasse 26 Kinder, und zwar gleichviel Ju[n]gen und Mädchen. Oder: Es sind etwas wenig[er]

als die Hälfte Jungen und etwas mehr als die Hälfte Mädchen. (Mathematisierung)
Rechnen:

29—3 = 26 26:2 = 13 13 + 3 = 16
Oder:
29:2 = 14 R 1 14 + 15 = 29 13 + 16 = 29

Lösung	12J 17M	29:3 usw.	14J 17M	12J 15M	11J 18M	26J 3M
Vork.	38	28	18	16	15	14
%F	13	10	6	5	5	5

Lösung	16M	26J 29M	14J 15M	15J 18M	15J 14M	23J 26M	13J 19M
Vork.	10	10	8	5	5	4	4
%F	3	3	3	2	2	1	1

Tab. 4: Häufigste Fehllösungen bei A4

Bis auf ca. 50 (= 17%F) ist bei allen Fehllösungen eine der beiden Bedingungen j + m = 29 und m—j = 3 gewahrt und die andere nicht. Dies ist jedoch nicht allein ein bewußtes oder unbewußtes Nichtberücksichtigen der jeweiligen anderen Bedingung (Rdv), sondern wohl auch Ergebnis einer Versuch-Irrtum-Strategie (Rdvii) bzw. einer jedenfalls nicht schriftlich fixierten (und schlecht fixierbaren) halb-sinnvollen Ad-hoc-Strategie in Ermangelung eines passenden Rechenschemas (auch (Rc)). Auch zahlreiche der richtigen Lösungen dürften so zustandegekommen sein, und oft ist ihnen wohl nachträglich noch eine wenig stringente und häufig falsche Rechnung untergeschoben worden.

Einige bemerkenswerte korrekte Lösungen (etwas anders als im Original aufgeschrieben):

j	3	6	9	10	11	12	13
m	6	9	12	13	14	15	16
k	9	15	21	23	25	27	29

oder

j	10	11	12	13	13
m	10	11	12	13	16
ü	9	7	5	3	0

oder 2mal

j	10	3	0	13
m	10	3	3	16
k	20	6	3	29

oder

2mal $29{:}2 \pm 3{:}2 = 14\frac{1}{2} \pm 1\frac{1}{2} = 13$ bzw. 16
1mal $(29 \pm 3){:}2 = 13$ bzw. 16
7mal $14 + 15 = 29 \Rightarrow 13 + 16 = 29$

Die richtigen Lösungen verteilen sich wie folgt auf die einzelnen ‚Wege':

(a)	(29—3):2 usw.	436	56%R
(b)	29:2 (meist ad hoc vom Ergebnis aus)	50	6%R
(c)	13 + 16 = 29 bzw. nur Ergebnis genannt	245	31%R
(d)	sonstige richtige Rechnungen	28	4%R
(e)	falsche Rechnungen	14	2%R

Der Ansatz ‚29:2' ist wohl Ausfluß der Häufigkeit von Gleichverteilungsaufgaben im Mathematikunterricht (besonders bei Behandlung der Division), zumal die beiden Gruppen, in die aufzuteilen ist, fast gleichgroß sind. Er ist besonders fehlerträchtig, weil die Schüler dabei i. a. zu eng an der Division kleben und das Zwischenergebnis, besonders den Divisionsrest, häufig nicht sinnvoll weiter verarbeiten. Einige Beispiele:

29:2 = 14R1 14—2 = 12 14 + 2 + 1 = 17
29:2 = 14 14—3 = 11 29—11 = 18
29:2 = 14R1 15—3 = 12 14 + 3 = 17

29:2 = 15 15—3 = 12 15
29:2 = 14 14 + 3 = 17 14

Die Schüler, deren Lösung mit 29:3 beginnt, haben wohl erkannt, daß die Gesamtzahl irgendwie aufzuteilen ist, und geschlossen, daß zu dividieren ist. Dazu haben sie dann die im Text vorkommenden Zahlen verwendet und nicht die implizit gegebene Zweizahl der Geschlechter. Als Ergebnis wird hier oft ‚9 Jungen und n Mädchen' genannt, wobei fast immer n≠20 ist. Es kommen auch in drei Fällen 9,2 bzw. 6,3 bzw. 14,1 Jungen vor (Divisionsreste hinter dem Komma).

Wenn nur die Zahl der Mädchen (der Jungen) genannt ist, ist die Aufgabe unvollständig gelöst. Daß allein die Zahl der Jungen genannt ist, kommt nur 2 mal vor, da diese Zahl beim Lösungsweg der meisten Schüler auch ein noch weiter zu verarbeitendes Zwischenergebnis ist. Die Zahl der Mädchen allein wird in 13 Fällen angegeben, davon 10 mal richtig mit 16. In all diesen Fällen ist mit dem Ansatz (29—3):2 gearbeitet worden. Eine Mitursache ist wohl auch die Formulierung des Fragesatzes in der Aufgabenstellung: Die Frage nach der Zahl der Mädchen kann unabhängig vom ersten Teil des Satzes (Frage nach der Zahl der Jungen) gelesen werden.

A4-typische Fehler(-ursachen)
— ungeeignete (beginnend mit 29:3) bzw. nicht genügend beherrschte Lösungsstrategie (beginnend mit 29:2) (Rc)
— Ad-hoc-Lösungsstrategie (Rdvii)

B2 Der km-Zähler im Auto steht gerade auf 301090. Welche Zahl zeigte der km-Zähler direkt davor? 743 (= 66%S) +, 331 (= 30%S) —, 46 (= 4%S) o

Umgang mit Stellenwertsystem; Typ: Suche den Vorgänger einer gegebenen Zahl (im Zehnersystem). Zu verstehen usw. ist:

(a) Der km-Zähler zeigt in jedem Augenblick eine natürliche Zahl an, die die Zahl der (vollen) Kilometer darstellt, die das Auto in seinem ganzen Dasein zurückgelegt hat. (Sachwissen)

(b) Nach jedem gefahrenen Kilometer erhöht sich die angezeigte Zahl um 1. (Sachwissen)

(c) Mit ‚direkt davor' ist der (zeitliche) Vorgänger der genannten Zahl auf dem km-Zähler gemeint. (Sachwissen und umgangssprachliche Kompetenz)

(d) In der Zählreihe der natürlichen Zahlen ist also der Vorgänger von 301090 gesucht (die Zahl ist so gewählt, daß zwar ein Zehner, aber kein Hunderter überschritten wird, insbesondere die Eins und die beiden vorderen Nullen nicht zu verändern sind, obwohl sie in Analogie zu üblichen Zählaufgaben zum Verändern verleiten).

(e) Rechnen: Vorgänger notieren (der Vorgänger der 0 ist 9, dann wird aber auch die Ziffer der vorletzten Stelle um 1 vermindert) oder 1 subtrahieren

Lösung	300090	300089	301080	300000	300080	301091	301090	301000
Vork.	42	33	23	17	15	14	11	9
%F	13	10	7	5	5	4	3	3

Lösung	301089,9	290989	0	301089,999	201090	30189	301099	201090
Vork.	7	6	6	4	4	4	4	[illegible]
%F	2	2	2	1	1	1	1	[illegible]

Lösung	300999	301081	000000
Vork.	3	3	3
%F	1	1	1

Tab. 5: Häufigste Fehllösungen bei B2

Bei vielen Schülern mit fehlerhafter Lösung kann man davon ausgehen, daß sie sich nicht einer echten Sachsituation gegenübersehen, sondern die Aufgabe im wesentlichen als eingekleidete Rechenaufgabe auffassen. Dann ist das ‚direkt davor' nicht mehr durch die Funktion des Zählers bestimmt, sondern kann allerlei arithmetische Operationen bedeuten, die den Schülern schon einmal begegnet sind: Welche Zahl muß subtrahiert werden, damit es eine möglichst glatte Zahl gibt? (1090). Oder: ‚eine weniger' wird zu ‚ohne die Eins'. Oder: An jeder von 0 verschiedenen Ziffer muß 1 subtrahiert werden, mit Ausnahme vielleicht der führenden (ein Ergebnis: „200089 oder 301089". Oder: An jeder Stelle, auch an denen mit der Ziffer 0, wird 1 subtrahiert (und dann falsch gerechnet: 290989). Tatsächlich haben 76 (= 23%F) Schüler eine schriftliche Subtraktion mit anderen Zahlen als 1 ausgeführt. Oder: Der Kalkül mit Metern wird herangezogen (19 (= 6%F) Schüler). In der Tat gibt es Entfernungsmesser, die volle Meter oder wenigstens volle 100 Meter anzeigen. Diese Schüler benutzen die arithmetische Identität 301090 = 301090,0 = 301090,000 (und zwar meist Schüler mit höherer Punktzahl) und unterstellen, daß im Text nicht die ganze Ziffernfolge, sondern nur die km-Zahl angegeben ist. Möglicherweise ist ihnen, und auch denen, die etwas anderes als 1 subtrahiert haben, sonst in der Aufgabe zu wenig zu tun. Für diese Vermutung spricht auch, daß bei 302 (= 41%R) der richtigen Lösungen die Subtraktion schriftlich durchgeführt ist (wobei hier nicht Schreibweisen wie ‚301090—1 = 301089' mitgezählt sind); möglicherweise werden die Schüler dazu aber auch ‚von Amts wegen' verpflichtet.

Eine ähnliche Interpretation bietet sich auch für die Lösung ‚300090' an. Die Schüler haben die Ziffernfolge 301090 als 301,090 km aufgefaßt und 1 km zurückgerechnet (in einigen Fällen explizit so); zwei Schüler haben einfach ein Komma in die Ziffernfolge gesetzt.

‚Davor' ist in 6 Fällen auch als Ziffer vor den 6 Ziffern verstanden worden, also die 0 in 0301090; in 3 Fällen als der Anfangszustand des km-Zählers, also 000000 (alles Ursachen im Sprachverständnis (Rdi)). Von den Lösungen 301091 sind drei ausdrücklich als ‚danach' deklariert. Hier wirken sich möglicherweise Erfahrungen mit Aufgaben aus, bei denen entgegengesetzte Bedeutungen durch einander ähnelnde Formulierungen ausgedrückt werden, etwa: „Wovor steht...?" vs. „Was steht vor...?" Solche Schwierigkeiten können bei einer sinnvollen Behandlung von Relationen in der Primarstufe bewußt gemacht und geklärt werden.

Selbstredend sind auch rein numerische Fehlertechniken in den Lösungen enthalten (ca. 30 (= 9%F)). Zwei Schüler interpretieren die 1 in 301090 als l und rechnen mit Litern (wohl in Erinnerung an die vorher dagewesene Aufgabe A2). Es ist bemerkenswert, mit welcher Findigkeit in diese Interpretation noch ein Sinn gelegt wird: 30 l : 0,90 = 2,70 l (zeigt der km-Zähler direkt davor).

B2-typische Fehler(-ursachen)

— unpassendes Verständnis von ‚davor' (Rdi) ca. 90%F

— Einbezug kleinerer Einheiten als km (Rdiv) ca. 6%F

A1 Herr Adler hatte im Jahr 1977 ein Monatsgehalt von 2000 DM. Im Dezember erhielt er zusätzlich ein halbes Monatsgehalt als Weihnachtsgeld. Wieviel DM verdiente Herr Adler im Jahre 1977? 607 (= 54%S) +, 492 (= 44%S) —, 21 (= 2%S) o

Typ der Aufgabe: Vervielfachen einer Größe und anschließende Addition einer Größe derselben Art. Zu verstehen usw. ist: (s. Abb. 3).

(a) Monatsgehalt ist ein Betrag, der jeden Monat gezahlt wird. (Sachwissen)

(b) Das Jahr 1977 ist ein Zeitraum, der (wie jedes Jahr) 12 Monate umfaßt. (Sachwissen)

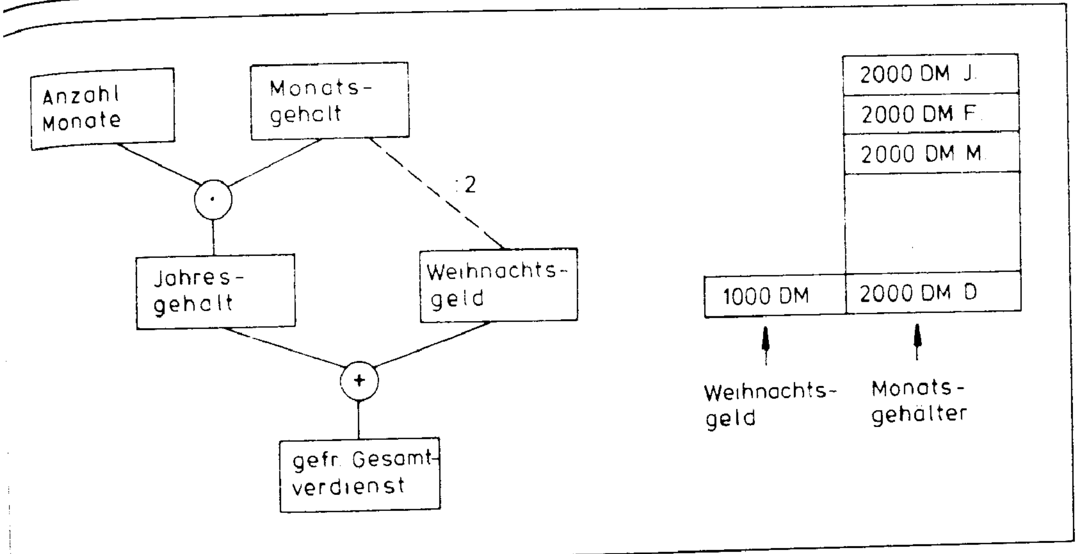

Abb. 3: Strukturbild von A1

(c) „Halbes Monatsgehalt" ist die Hälfte von einem ganzen Monatsgehalt, ein Monatsgehalt durch 2. (math. Wissen)
(d) „Zusätzlich" heißt: darüberhinaus, außerdem, plus. (umgangssprachliche Wendung in math. Verknüpfung umdeuten)
(e) „Verdiente ... im Jahr 1977" ist die Frage nach dem gesamten Verdienst eines bestimmten Jahres. (Sprachkompetenz)
(f) Der Jahresverdienst setzt sich additiv aus 2 Teilen zusammen: 1. Verdienst (Gehalt) in jedem der 12 Monate und 2. Weihnachtsgeld. (Sachwissen und math. Wissen)

(g) Der normale Verdienst besteht aus 12 Stücken von je 2000 DM. (Umdeutung der Zeitspanne 12 Monate in den reinen Multiplikator ·12 bzw. 12·; Mathematisierung)

(h) Rechnen (aus (f) und (g)):
2000 DM · 12 = 24000 DM bzw. 12 · 2000 DM = 24000 DM
2000 DM:2 = 1000 DM bzw. die Hälfte von 2000 DM ist 1000 DM
24000 DM + 1000 DM = 25000 DM

Lösung	3000	24000	1000	36000	23000	2500	15000(0)	26000
Vork.	184	48	24	24	17	10	9	8
%F	37	10	5	5	3	2	2	2

Lösung	6000(0)	27000	166	3400	2400	3954000	2083	4000	3977
Vork.	8	6	4	4	3	3	3	3	3
%F	2	1	1	1	1	1	1	1	1

Tab. 6: Häufigste Fehllösungen bei A1

Die Hauptursache für den Fehler ‚3000' ist ein falsches Verständnis vom Begriff ‚Monatsgehalt' ((Rb) bzw. im Zusammenhang mit der Wendung ‚im Jahre 1977 ein Monatsgehalt von' auch (Rdi)). Diese Wendung wird interpretiert als ‚im Jahre 1977 ein Gehalt von 2000 DM (das monatlich in gleichen Teilen ausbezahlt wird)'. Auch die 9 Lösungen, in denen 2000:12 berechnet ist, z. B. ‚166' und speziell ‚2083' (2083 = 2000 + 1/2 · 1/12 · 2000), beruhen wohl auf dieser Interpretation.
Eine weitere mögliche Ursache des Fehlers ‚3000' und weiterer ist das Außerachtlassen einer relevanten Bedingung (Rdv) (oder auch das Nichtabschließen der Informationsverarbeitung (Rdviii)), z. B.: die erforderliche Multiplikation mit 12 (die ja nur einer impliziten Angabe zu entnehmen ist), oder im Fall ‚24000' das Hinzufügen des Weihnachtsgeldes, im Fall ‚36000' die nur einmalige Gewährung des Weihnachtsgeldes, im Fall ‚1000', bei dem in 11 von 24 Nennungen vom Jahresgehalt gesprochen wird, die Addition des eigentlichen Gehalts.
Der Fehler ‚24000' läßt sich vielleicht auch darauf zurückführen, daß das Weihnachtsgeld nicht zum Verdienst gezählt wird (Rb); ein Schüler schreibt: „Er verdient 14000 DM" (Rechenfehler) „und kriegt 1000 DM geschenkt." Auch erscheint 7 mal die Antwort: „1000 DM Weihnachtsgeld".
Bei den Lösungen ‚26000' und ‚4000' ist ein volles Monatsgehalt als Weihnachtsgeld addiert. ‚27000' entsteht durch eine zweimalige Addition des Dezembergehalts, bei ‚23000' fehlt es ganz. Die Fälle ‚3954000' und ‚3977' sind Ergebnisse von Verknüpfungen mit der Jahreszahl. Insgesamt 15 (= 1%S) Schüler beziehen die Jahreszahl in die Rechnung mit ein. Die sonstigen der häufigsten und viele der ein-, oder zweimal vorkommenden Fehllösungen beruhen meist auf numerischen Fehlertechniken.

A1-typische Fehler(-ursachen)
— falsches Verständnis von ‚Monatsgehalt' (= Jahresgehalt) ((Rb) bzw. (Rdi)) über 80%F

A3 Ein Fernsehmonteur reparierte von 14.10 Uhr bis 17.40 Uhr ein Gerät. Er berechnete pro Arbeitsstunde 40 DM. Wie hoch war der Arbeitslohn für diese Reparatur? 558 (= 50%S) +, 537 (= 48%S) —, 25 (= 2%S) o
Vervielfältigungsprozeß; Typ: Gesamtwert gesucht, wobei der Wert pro Einheit gegeben ist, die (nicht ganze) Zahl der Einheiten (Stunden) noch als Spanne zwischen zwei Zeitpunkten zu errechnen ist. Zu verstehen usw. ist: (s. Abb. 4).
(a) Die Dauer der Reparatur ist durch Anfangs- und Endzeit gegeben. (math. Wissen)

14.10	15.10	16.10	17.10	17.40	
1h	1h	1h	½h		3½h
40 DM	40 DM	40 DM	20 DM		140 DM

Abb. 4: Strukturbild von A3

(b) Der Arbeitslohn bemißt sich an der Dauer. (Sachwissen)
(c) „Pro Arbeitsstunde" ist zu lesen als:
1. Für jede volle Arbeitsstunde ist der Stundenlohn zu zahlen.
2. Für jede angebrochene Arbeitsstunde ist der entsprechende Bruchteil des Stundenlohns zu zahlen (andernfalls würde es heißen: „pro volle..." oder „pro angefangene..."). (Sachwissen, fachsprachliche Kompetenz)
(d) Gefragt ist nach dem gesamten Arbeitslohn für die Reparatur. (Zielerfassung)
(e) Die Gesamtzeit 3½ h setzt sich aus 3 vollen und einer halben Stunde additiv zusammen. (math. Wissen)
(f) Der Arbeitslohn setzt sich zusammen aus 3 Stücken zu je 40 DM und noch einmal der Hälfte von 40 DM (bzw. 40 DM:2). (Umdeutung der Zeitspannen 3 h und ½ h in die reinen Operatoren ·3 (bzw. 3·) und ‚die Hälfte von' (bzw. ‚durch 2'): Mathematisierung)
(g) Rechnen (beginnt bereits bei (e)): Von 14.10 Uhr bis 17.10 Uhr sind es 3 Stunden; von 17.10 bis 17.40 Uhr 30 Minuten (= ½ Stunde). (Die Zahlen sind bewußt so gewählt, daß ohne Stundenüberschreitung gerechnet werden kann.) (math. Wissen über Größen; hier Stunden und Minuten) Schließlich:
40 DM · 3 = 120 DM bzw. 3 · 40 DM = 120 DM
40 DM:2 = 20 DM bzw. die Hälfte von 40 DM ist 20 DM
120 DM + 20 DM = 140 DM

Lösung	120	132	150	100	180	13200	1328	13,200	330	160	[illegible]
Vork.	94	61	29	18	18	15	12	11	11	8	[illegible]
%F	18	11	5	3	3	3	2	2	2	1	[illegible]

Lösung	3.30 h Dauer	84	220	1200
Vork.	5	4	4	4
%F	1	1	1	1

Tab. 7: Häufigste Fehllösungen bei A3

Viele Schüler verstehen den Text so, daß der
Monteur nur volle Arbeitsstunden berechnet
((Rb) bzw. (Rdi)). Dies führt dann in der Regel da-
zu, daß die angebrochene Stunde nicht berech-
net wird (11 Schüler rechnen sogar mit 14.10 —
17.10 Uhr bzw. 14.40 — 17.40 Uhr), bei 3 Schü-
lern, daß die angebrochene Stunde voll berech-
net wird (3·40 + 40), was sachkundlich durchaus zu rechtfertigen wäre. Die meisten Schüler addieren zu dem Betrag, der sich aus den vollen Stunden ergibt, noch einen Betrag, der meist kleiner ist als 40 (auch zu 80 oder 160, wenn eine andere Zahl voller Stunden angenommen ist):

Betrag	150	140	120	60	50	45	40	35	34	30	25	23	20	[illegible]
Vork.	1	2	1	5	1	1	5	3	1	30	1	1	566	[illegible]

Betrag	15	10	6	5	4	3,60	3,30	2	1	0,90	0,60	[illegible]
Vork.	3	6	4	2	1	1	1	2	1	1	1	[illegible]

Betrag	0,40	0,33	0,30	0,20	0,15	0,10	0,05 [illegible]
Vork.	2	1	10	3	2	1	[illegible]

Tab. 8: Beträge, die zum Lohn der vollen Stunden addiert werden (in 4 Fällen wird das Ergebnis als ungefähr bezeichnet)

Der von dem Stundenbruchteil stammende DM-
Betrag wird oft in Pfennige konvertiert oder
sonstwie klein gehalten. Dies ist die ‚Regel', mit
der diese Schüler Größenordnungen berück-
sichtigen (Rc), jedenfalls, wenn sie nicht auf
das Halbieren kommen. Der häufig vorkommen-
de Betrag 30 stellt eine direkte Gleichsetzung
von Minuten- und DM-Anzahl dar. Fast alle Ant-
worten ‚100' und ‚180' beruhen auf Fehlern bei
der Zeitdauerberechnung (2½ bzw. 4½ h). 84
stammt aus 210·40, wobei zwar die Zeitdauer
richtig mit 210 Minuten ermittelt ist, dann aber
in Analogie zum Rechnen mit Größen mit Dezi-
malsystem ohne Rücksicht auf die Bündelung
der Minuten im 60er-System ohne Berücksichti-
gung der Stellen gerechnet wird und am Schluß
das Komma zwei Stellen von rechts aus bzw.
willkürlich gesetzt wird. Noch deutlicher wird
diese Fehlertechnik bei den Ergebnissen mit
der Ziffernfolge 132 (aus 3,30·40) und ansatz-
weise auch 1200 (= 30(min)·40). Hierfür ist eine
Ursache wohl in der Schreibweise 14.10 Uhr und
17.40 Uhr zu sehen (eine Art (Rdii)). Wenn die de-
zimale Subtraktion der beiden Uhrzeiten nicht
das auch im 60er-System richtige Ergebnis lie-
fern würde, läge der Fehleranteil bestimmt hö-
her. Am einfachsten sind die Schüler vorgegan-
gen, die ihre ermittelte Zeitspanne 3.30 h zu-
nächst direkt in 330 min und dann in 330 DM
umgewandelt haben. Offenbar ist der Unter-
schied zwischen Zeitspannen und Zeitpunkten
nicht deutlich genug, was sich in der Schreib-
weise 3.30 (ca. 40%S) (davon ein Viertel sogar
3.30 Uhr) zeigt. Ein Hinweis auf schematisches
Vorgehen: 89 (= 8%L) Schüler nehmen nicht
den Rechenvorteil bei der Ermittlung der Zeit-
dauer (Stunden für sich und Minuten für sich),
sondern gehen nach dem Schema vor, jeweils
immer bis zur nächsten Stunde zu ergänzen,
und müssen dann umständlicher rechnen:
50 min + 2 h + 40 min = 3 h 30 min.

A3-typische Fehler(-ursachen)
— Unterschied zwischen Zeitpunkt und -rau
noch nicht genügend ausgebildet (Rb)
— übliche Schreibweise von Zeitpunkten
17.40 Uhr führt zur selben Schreibweise bei Z

...spannen und zum Rechnen wie mit Dezimalzahlen (Rdii) und (Rb)) ca. 50% F
– Fehlinterpretation von ‚pro Arbeitsstunde' als ‚pro volle Arbeitsstunde' (Rb) ca. 10% S

...: *10 l Kakao werden in kleine Flaschen von je ¼ l Inhalt gefüllt. Wie viele Flaschen werden ...?* 552 (= 49% S) +, 429 (= 38% S) —, 139 (= 13% S) o

...Aufteilungsprozeß; Typ: Zerlegen einer gegebenen ‚Menge' in (gleiche) gegebene Teil‚mengen', oder: Aufteilen einer gegebenen Größe durch gegebene Teilgrößen, oder: Messen einer Größe (10 l) mit einer ‚Meßgröße' (¼ l). Zu verstehen usw. ist:

(a) „10 l Kakao" ist eine ‚Menge' (ein Quantum) Kakao von der Größe 10 l; Vorstellung: ein großer Eimer gefüllt mit Kakao. (Wissen über Größen (Volumen))

(b) „¼ l" ist der vierte Teil von einem (ganzen) Liter, 1 l:4 (Vorstellung: Abb. 5a) (math. Wissen über Bruchgrößen einfachster Art)

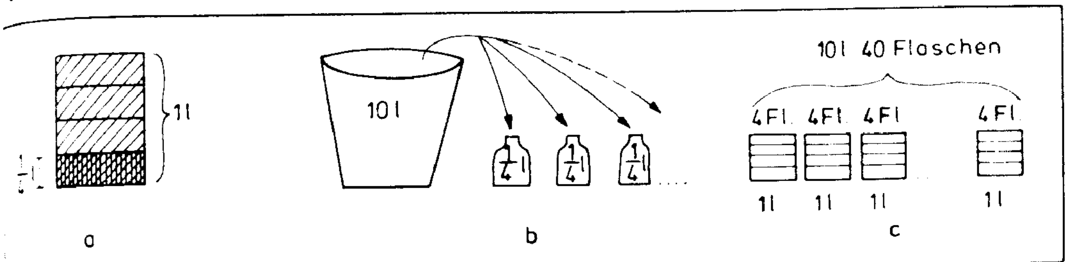

Abb. 5: Sachsituation in A2

(c) „Kleine Flaschen (von je ¼ l Inhalt) gefüllt" steht für einen Umfüll- (Abfüll-) vorgang (Vorstellung: Abb. 5b). (Sachwissen über Um-, Abfüllen)

(d) Es ist nach der Anzahl der vollen kleinen Flaschen gefragt, d. h. wie viele volle Flaschen sind am Ende des Vorgangs zu sehen, wenn also der Behälter leer ist? (Zielverständnis bzgl. Sachwissen)

(e) So viele Flaschen werden voll, wievielmal man ¼ l Kakao herausschöpfen kann (in wie viele ¼-l-Portionen die 10-l-Menge zerlegt werden kann, wie oft ¼ l in 10 l enthalten ist). (Mathematisieren des Umfüllvorgangs; Identifizieren als ‚Aufteilen')

(f) Rechnen: $\underbrace{\tfrac{1}{4}\,l + \tfrac{1}{4}\,l + \ldots \tfrac{1}{4}\,l}_{\text{wieviel mal?}} = 10\,l$

Oder: $\underbrace{10\,l - \tfrac{1}{4}\,l - \tfrac{1}{4}\,l - \ldots \tfrac{1}{4}\,l}_{\text{wieviel mal?}} = 0\,l$

Oder: Aus 1 l gäbe es 4 Flaschen, denn 1 l besteht aus 4 Viertellitern,
aus 2 l gäbe es 8 Flaschen....
aus 10 l gibt es 40 Flaschen.
Oder direkt: Aus 1 l gäbe es 4 Flaschen, also aus 10 l 10 mal so viel.
Oder mit einer zeichnerischen Lösung (Abb. 5c).

Lösung	4	2	25	8	10	5	2½	20	7	250	14	22	140	400
[illegible]	60	39	29	18	15	13	13	12	8	8	7	7	5	4
[illegible]	14	9	7	4	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1

[illegible]	50	9	240
[illegible]	4	4	3
[illegible]	1	1	1

Tab. 9: Häufigste Fehllösungen bei A2

Bei dieser Aufgabe bemühen sich viele Schüler, gleich zu einem einfachen Rechenschema zu gelangen und die Lösung mit einer einzigen Operation zu erzielen. Dabei scheinen sie im Kopf gewisse Vor-Rechnungen durchzuführen und sich danach um eine schriftliche Notierung zu bemühen, die aber sogar bei vielem mit richtiger Lösung mißlingt. Oft werden drei Werte zu einer korrekten oder inkorrekten Gleichung kombiniert und einer als Lösung deklariert, unter Mißachtung des Operationszeichens, des Stellenwerts oder auch der korrekten Größenbezeichnung. Dabei wird ¼ häufig wie 4 behandelt. 4 Schüler sprechen von 40 l Kakao, die gefüllt werden. Insgesamt ca. 20 Schüler interpretieren ¼ bzw. ¼ l als 14. Dies führt zu den Ergebnissen 7 (mit Rest), 14, 140 u. ä. (Division oder Multiplikation). Die Größenangabe 10 l ist von ca. 20 Schülern als 101 gelesen und entsprechend weiter verarbeitet worden (eine Art (Rdii), ein Schüler dividiert sogar 101:¼ l = 25, wobei er die Schreibfigur ¼ l wie 4 behandelt).

Auffällig ist auch die vergleichsweise hohe Zahl der Schüler, die die Aufgabe nicht bearbeitet haben.

7 Schüler haben korrekt durch Zeichnungen oder 40-faches Aufschreiben von ¼ gelöst. Wie sehr aber i. a. die schriftliche Darstellung zu wünschen übrig läßt, zeigt folgende Übersicht über die Notationen, die bei den *richtigen* Lösungen vorkommen:

Korrekte Schreibweisen:

ohne Rechn.	4 · 10	10 l : ¼ l	10 : ¼	10 l = ¼ l · 40	10 = ¼ · 40	10 l : 40 = ¼ l
67	177	43	19	18	1	1
40/¼ l = 10	**40/4 = 10 l**	**10000 ml:250 ml**	**10000:250**	**10000 l:250 l**	**1000:25**	
3	1	1	6	1	2	
10,000 l:0,25 l	**40 · 0,25 l = 10,0 l**	**10 l = 40 Fl.**	**sonst.**	**korrekt**		
1	2	48	4	395 –		

Unkorrekte oder nicht aufgabenzugehörige Schreibweisen:

10 l · 4	10 l · 4 = 40 l	10 l · 4l	10 l · 4 l = 40 l	10 · 4 = 40 l	10 · 4 l	10 · 4 l = 40 l	
36	15	7	5	8	3	1	
10 l:4	10:4	10 l:¼	10:¼ l	10 l:¼ l = 40 l	10 · ¼ l	10 · ¼ l = 40 l	10 · ¼
1	1	8	3	4	8	2	23
10 l · ¼ l = 40 l	10 l · ¼ l	10 l · ¼	10 l · ¼ = 40 l	10 l = ¼ · 40	10 = ¼ l · 40	10 · 4/4	
4	5	3	1	6	1	1	
10 l · 4/4 l = 40	10 l:4/4	10 · 4/4 l	10 · 4/4 l = 40/4	10 l · 0,25	10000 ml:250 ml = 40 ml		
1	1	1	2	1	1		
10,000 l:0,250	10 l:2,50 l	inkorrekt					
3	1	157					

Tab. 10: Notation der Rechnungen bei richtigen Ergebnissen (wo nur Terme stehen, ist noch ‚= 40' einzufügen; die Vielfalt war noch größer; jedoch wird bei dieser Tabelle Kommutativität der Multiplikation ausgenutzt und die Anzahlbezeichnung ‚Flaschen' nicht geschrieben)

Eine besonders schöne Lösung: „Mit 10 l würden 20 ½-l-Flaschen voll, also werden 40 ¼-l-Flaschen voll."

A2-typische Fehler(-ursachen)

— keine Klarheit über die beteiligten Größen und deren Zusammenhänge (noch kein bewegliches Rechnen in Größenbereichen) (Rb)

— unangemessene Lösungsstrategien (möglichst rascher Einsatz einer Grundrechenart) (Rc)

— Fehlinterpretation der Schreibfigur ¼ l (meist als 4) (von vornherein oder beim Rechnen) (Rb)

— Fehlinterpretation von 10 l als 101

(Fortsetzung folgt)

Medien im naturwissenschaftlich-technischen Sachunterricht

Von *Heribert Kaiser* in Paderborn

I. Medien und Medienverbund im Sachunterricht

Zur Vermittlung der grundlegenden naturwissenschaftlich-technischen Ziele des kognitiven, psychomotorischen und affektiven Bereichs müssen dem Lehrer des Sachunterrichts geeignete Hilfsmittel oder Medien bzw. Arbeitsmittel zur Verfügung stehen.

Als weitgefaßter Begriff können Medien wie folgt definiert werden:

„Medien für den Raum der Schule sind alle Mittel, die in den Lernprozessen für die Schüler zur Vermittlung von Wissen dienen" (1).

Diese umfassende Definition beinhaltet, daß Unterricht immer an Medien gebunden ist, sagt aber nicht aus, nach welchen Kriterien Medien beurteilt und ausgewählt werden sollen. Folgende Kriterien dienen der Beurteilung von Unterrichtsmedien: (2)

1. *Adäquate Repräsentation der Sachverhalte*
2. *Berücksichtigung der individuellen Situation der Schüler, für die die Medien eingesetzt werden*
3. *Steigerung der Effektivität von Lehren und Lernen*

Die o. g. Kriterien zur Auswahl von Medien gelten generell, es folgen Kriterien, die nur partielle Gültigkeit haben. Sie sollen

4. *dem didaktischen Prinzip einer mehrfachen Exposition der zu lehrenden Sachverhalte gerecht werden*
5. *die Schüler für das Lernen motivieren und*
6. *den Schülern Freiraum für eigene Aktivitäten lassen.*

Besonders in der Primarstufe müssen Medien dem Prinzip der Anschauung (3) dienen, dabei soll nicht nur der visuelle Aspekt der Medien angesprochen sein, sondern auch der handelnde Umgang mit ihnen. Es gilt durch geeignete Medien, durch Arbeitsblätter, Schulbücher, Dias, Filme, Experimentiermaterial, die Umwelt in den Unterricht hereinzuholen. Diese Medien sind in den Wirkungen auf die Schüler unterschiedlich und müssen deshalb gezielt im Medienverbund eingesetzt werden (4), wobei eine sachgerechte Auswahl die Vielfalt der Medien beschränkt (5).

In der folgenden Übersicht werden die gebräuchlichen Lehr- und Arbeitsmittel zusammengestellt (6):

— Der Gegenstand als solcher, das Original, sowie Bearbeitung bzw. Herstellung, Zwischen- und Endprodukt.