Jedes Produkt natürlicher Zahlen läßt sich als

$$a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \qquad \text{(Regel 1)}$$

darstellen: lediglich bei verschiedener Parität von a und b sind $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$ nichtganz und beider Quadrate um $\frac{1}{4}$ größer als deren ganzzahlige Approximation, die Differenz hebt diese Ungenauigkeiten wieder auf.

Die Milchmädchenrechnung wird beschrieben durch

$$a \cdot b = ((a-5) + (b-5)) \cdot 10 + (10-a) \cdot (10-b);$$

zum einen haben (a-5) + (b-5) und 10 denselben MW wie a und b, und zum anderen läßt sich (10-a)·(10-b) gemäß Regel 1 über

$$\left(10 - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

berechnen. Regel 2 (großes Einmaleins) besagt, wenn x, y Ziffern sind und 1y die Bedeutung 10 + y hat:

$$\begin{aligned} x \cdot 1y &= (x+y) \cdot 10 + \left(10 - \frac{1y+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{1y-x}{2}\right)^2 \\ &= (x+y) \cdot 10 + \left(10 - \frac{1y+x}{2} + \frac{1y-x}{2}\right) \\ &\quad \cdot \left(10 - \frac{1y+x}{2} - \frac{1y-x}{2}\right) \\ &= (x+y) \cdot 10 + (10-x) \cdot (-y) \end{aligned}$$

Schließlich ist, wenn x, y Ziffern sind, Regel 3 (übergroßes Einmaleins) die oft beim Kopfrechnen verwendete Regel (wieder habe 1x und 1y die Bedeutung wie oben):

$$1x \cdot 1y = (1x + y) \cdot 10 + x \cdot y.$$

Literatur

[1] Denkschrift „Zum Mathematikunterricht an Gymnasien“, Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Frühjahr 1976.

[2] *Engel, A.*: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt, Stuttgart 1977.

[3] *Schönwald, H. G.*: Beweise zur Milchmädchenrechnung. SMP 6 (1978), S. 134.

Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahres*), Teil 1

Von *Peter Bender* in Neuss

1. Zur Problematik des Sachrechnens

„Nun ist die Klage allgemein, daß unser gegenwärtiger Rechenunterricht (seine) Ziele in der Hauptsache nicht erreiche, vielleicht gar nicht erreichen könne. Als Beweis für diese Behauptung dient zunächst die von den verschiedensten Seiten bestätigte Erfahrung, daß junge Leute, die nur kurze Zeit dem Rechenunterricht der Volksschule entwachsen waren, in erschreckendem Maße versagten, wenn ihnen einfache Rechenaufgaben des praktischen Lebens vorgelegt wurden. Dazu kommt die andere Erfahrung, daß viele Schüler höherer Lehranstalten nicht imstande sind, die Aufgaben der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten zu lösen, obwohl sie in der Algebra Befriedigendes leisten. Endlich muß noch auf die weitere Tatsache hingewiesen werden, daß ein großer Teil unseres Volkes durch seine gesamte Wirtschaftsgebarung zeigt, daß er nicht rechnen kann.“

Diese Übersicht *J. Kühnels* (1916/1959, S. 13) über den Erfolg des Rechenunterrichts in Deutschland kurz nach der Jahrhundertwende hat heute, jedenfalls nach Auffassung einiger ‚Berufener‘, nichts von ihrer Aktualität eingebüßt. Allerdings relativiert dieses Zitat auch die zeitgenössische Kritik, insbesondere wenn diese mit der Feststellung verbunden ist, früher sei alles besser gewesen.

Ein Kulminationspunkt des Mathematik-(Rechen-)unterrichts und der Mathematik-(Rechen-)didaktik seit eh und je ist das Sachrechnen, die „Anwendung von Mathematik auf vorgegebene Sachprobleme und Mathematisierung konkreter Erfahrungen und Sachzusammenhänge vorwiegend unter numerischem Aspekt“ (ein Definitionsvorschlag von *Strehl* (1979, S. 24)):

(Si) Die Fähigkeit (knapp formuliert) zum Sachrechnen ist ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts, das bis in den sechziger Jahren vor alle für die Volksschule galt (vgl. *Fettweis / Schlechtweg* (1929/1965), S. 11ff, S. 163ff), zeitweilig durch die Betonung strukturmathematischer Gesichtspunkte etwas ins Hintertreffen zu geraten schien, aber derzeitig im Zuge der Forderung nach Umwelterschließung im Mathematikunterricht (siehe *Winter* 1976) wieder einen deutlichen Aufschwung erlebt: *Wittmann* (1974/1978, S. 41) nennt, in Fortentwicklung des *Winter*schen Lernzielkatalogs (*Winter* 1972), „Situationen (mathematischer und besonders auch real-umweltlicher Art) mathematisieren“ als erstes Lernziel des Mathematikunterrichts.

(Sii) Zugleich scheinen die Erfolge des Mathematikunterrichts gerade im Sachrechnen besonders unbefriedigend zu sein, schon zu *Kühnels* Zeiten (s. o.) und in jüngerer Zeit nicht weniger.

Sachrechnen und Umwelterschließung sind nun keineswegs dasselbe; das Sachrechnen beschränkt sich auf solche Aufgaben, in denen etwas zu rechnen ist, wobei ‚Rechnen‘ die kalkülhafte Anwendung der vier Grundrechenarten bedeutet. Jedoch macht eine Erweiterung des Sachrechnens um Sachaufgaben, in denen a[illegible] Fertigkeiten auch andere als arithmetische verlangt werden, noch immer nicht Umwelterschließung aus. Die aus didaktisch-fachsystematischen Gründen vorgenommene Zerlegung der Umwelt in kleine Aufgabenportionen läuft dem Ziel der Umwelterschließung z. T. sogar zuwider, indem sie suggeriert, die Umwelt zerfalle in solche isolierte kleine Einzelbereiche. Bei *Damerow* u. a. (1974, S. 133ff) ist dies einer der entscheidenden Kritikpunkte am Sachrechnen überhaupt.

Für die „mageren Erfolge" des traditionellen Sachrechnens macht *Winter* (1976, S. 338f) folgende Mängel verantwortlich:

(Ti) Beschränkung auf solche Regelfälle des Lebens, die direkt mit den vier Grundrechenarten zu lösen sind,

(Tii) Organisation des Stoffs nach innerarithmetischen (und nicht sachbezogenen) Gesichtspunkten,

(Tiii) Überbetonung von Fragen des richtigen Anschriebs und der richtigen Sprechweise,

(Tiv) Vernachlässigung von Hilfsmitteln außerhalb des Textes, wie Skizzen, Tabellen usw.,

(Tv) Ablehnung mathematischer Methoden und Begriffsbildungen.

Dem stellt *Winter* (1977) das Konzept der „produktiven" (vs. „reproduktiven") Sachaufgabe gegenüber, das sich durch folgende Merkmale auszeichnet:

(Wi) Die Sachsituation wird nur angedeutet, der Blick auf ihre Totalität gelenkt; sie enthält einen Bezug zum Schüler.

(Wii) Ein Zusammenhang von Daten muß erst erarbeitet werden, die Daten u. U. noch beschafft werden.

(Wiii) Die mathematischen Aktivitäten stehen für die Schüler zunächst noch nicht fest.

Es gibt zahlreiche weitere Kriterien zur Klassifizierung und Beurteilung von Sachaufgaben, etwa „eingekleidet" vs. „angewandt" *(Kühnel* (1916/1959), S. 192ff), „realistisch" vs. „unrealistisch", „eingliedrig" vs. „mehrgliedrig" (Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen), „verbal" vs. „nichtverbal gegeben" (etwa durch eine Bildergeschichte), usw. (vgl. die Übersicht von *Weber* (1974)).

2. Der Test

Der Arbeitskreis „Mathematik in der Grundschule", ein lockerer Zusammenschluß interessierter Lehrer aus dem Regierungsbezirk Arnsberg in Nordrhein-Westfalen mit den Promotoren *Hendricks*, Schulbezirk Arnsberg, und *Winter*, PH Aachen, hat sich Anfang 1978 die schlichte Frage gestellt: *Was können unsere Kinder am Ende der Grundschulzeit im Sachrechnen?* Die stürmische Zeit der Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule war schon seit einigen Jahren in eine Phase der Konsolidierung übergegangen, und der revidierte Lehrplan des Landes Nordrhein-Westfalen (Richtlinien 1969/1973) war nun lange genug in Kraft. Mit der Absicht der Bestandsaufnahme war natürlich auch die Hoffnung verbunden, Anhaltspunkte für erforderliche (und mögliche) Verbesserungen des Mathematikunterrichts zu erhalten.

In dem erwähnten Lehrplan ist an verschiedenen Stellen auf das Sachrechnen Bezug genommen. Neben didaktischen Grundsätzen und allgemeinen methodischen Handreichungen sind folgende Ziele und Inhalte formuliert:

(Li) „Der Schüler soll lernen, sich kreativ zu verhalten" (damit „er sich in Situationen nicht völlig hilflos (fühlt), in denen ein Routineverfahren nicht ohne weiteres hilft") (S. M/3).

(Lii) „Der Schüler soll lernen, Situationen zu mathematisieren: mathematische Information aus einer entsprechend einfachen Sachsituation ziehen...; Daten... übersichtlich darstellen...; sachbezogene Fragen verstehen oder selbst finden; die... Informationen... darstellen; Daten... weiter verarbeiten... die neu gewonnenen Daten auf die Sachsituation zurückbeziehen (z. B. die Lösung einer Sachaufgabe interpretieren)"; usw. (S. M/3).

(Liii) Es sollen die Größenbereiche ‚Währung', ‚Länge', ‚Zeit', ‚Gewicht' behandelt, sowie „Vorerfahrungen zu Flächeninhalten und Volumina" ermöglicht werden (S. M/7).

(Liv) „Von der 3. Klasse an sollen auch gebrochene Maßzahlen ... behutsam in Gebrauch genommen werden" (S. M/7).

Mit diesen Forderungen des Lehrplans ergab sich zugleich eine Strukturierung der Ausgangsfrage und eine Anleitung zur Testkonstruktion. Es wurde folgender Test entwickelt:

A1. Herr Adler hatte im Jahre 1977 ein Monatsgehalt von 2000 DM. Im Dezember erhielt er zusätzlich ein halbes Monatsgehalt als Weihnachtsgeld. Wieviel DM verdiente Herr Adler im Jahre 1977?

A2. 10 l Kakao werden in kleine Flaschen von je ¼ l Inhalt gefüllt. Wie viele Flaschen werden voll?

A3. Ein Fernsehmonteur reparierte von 14.10 Uhr bis 17.40 Uhr ein Gerät. Er berechnete pro Arbeitsstunde 40 DM. Wie hoch war der Arbeitslohn für diese Reparatur?

A4. Eine Klasse hat 29 Kinder. Es sind 3 Mädchen mehr als es Jungen sind. Wie viele Jungen, wie viele Mädchen sind in der Klasse?

A5. Auf einem Bahnhof fahren zur gleichen Zeit zwei Züge ab. Sie fahren in entgegengesetzte Richtungen. Der eine fährt pro Stunde 80 km, der andere fährt pro Stunde 60 km. Wie weit sind die beiden Züge nach 1½ Stunden Fahrzeit voneinander entfernt?

B1. Wie oft schlägt ein Herz in einer Stunde, wenn es in einer Minute 72 Schläge macht?

B2. Der km-Zähler in einem Auto steht gerade auf 301090. Welche Zahl zeigte der km-Zähler direkt davor?

B3. Die Weihnachtsferien begannen am 23. 12. 1977. Das war der erste Ferientag. Sie endeten am 8. 1. 1978. Das war der letzte Ferientag. Wie lange dauerten die Weihnachtsferien?

B4. Ein rechteckiger Tisch ist 1 m lang und 0,70 m breit. Darauf liegt eine rechteckige Tischdecke. Die Tischdecke hängt an allen Seiten des Tisches 20 cm über. Wie lang ist der ganze Rand der Tischdecke?

B5. Ein Autohaus kauft bei einer Autofabrik 9 Wagen, die alle gleichviel kosten. Der Autohändler überweist für die 9 Wagen 108000 DM an die Autofabrik. Wieviel DM kostet ein Wagen?

Auch dieser Test, also die Bearbeitung der Fragen durch die Schüler, stellt Unterricht dar, in dem Lernziele verfolgt und Inhalte vermittelt werden, hier besonders die unter (Lii)—(Liv) notierten. Die Stunden für den Test sind zusammen mit dem ganzen Unterricht vorher und mit einer Nachbereitung zu sehen; der Test ist dabei eine Phase der Stillarbeit — eine Unterrichtssituation, die für die Schüler so ungewohnt nicht ist. Naturgemäß können bei dieser Unterrichtsform die im 1. Abschnitt angerissenen Aspekte nur ansatzweise verwirklicht werden. So kommt besonders das Lernziel ‚Kreativität' zu kurz. Aber die Allgemeinheit der Fragestellung, die Größe der Teilnehmerzahl (eine Folgerung aus der Fragestellung), die Kürze der Zeit für den Test (immerhin mußten zahlreiche Lehrer je zwei Stunden ihrer Unterrichtszeit zur Verfügung stellen) und die Erfordernis der ökonomischen Auswertbarkeit verboten es, den Schülern offene Probleme aus ihrer Umwelt zu stellen, für die sie Fragen selbst entwickeln, Daten beschaffen oder annehmen müssen, in Gruppen zusammenarbeiten können und Wochen Zeit haben. Außerdem muß ein solcher Test ja etwas mit dem Unterricht zu tun haben, dessen Erfolg er testen soll. So würde man mit nonverbalen oder fragelosen Darstellungen diejenigen Schüler benachteiligen, die solche Formen nicht gewohnt sind; und das sind bestimmt nicht wenige.

Oder: Zwar ist im Mathematikunterricht der Grundschule durchaus die Bearbeitung komplexerer Sachverhalte möglich, wie zahlreiche erprobte und unerprobte Vorschläge aus der Literatur bezeugen, aber im Schulalltag treten sie selten auf. Die Ursachen dieser Abstinenz liegen auf den verschiedensten Ebenen: Schulorganisation, Lerninhalte (immerhin wird das Rechnen je erst gelernt), Lehrer.

Die Fragen des Tests spiegeln auch die Auffassung des Arbeitskreises, bestehend aus erfahrenen Schulmännern, wieder, welche Eigenschaften eine Sachaufgabe überhaupt, und speziell für einen Test mit Kindern des 4. Schuljahres mit den unterschiedlichsten Lerngeschichten haben soll:

(Ai) Die vorgestellten Sachsituationen (und damit auch die jeweiligen Ergebnisse) sind realistisch (auch daß ein km-Zähler über 300000 km anzeigt!), insbesondere nicht antiquiert, sie entstammen der unmittelbaren Lebenswelt der Schüler und haben eine Bedeutung für die Schüler.

(Aii) Die Aufgaben sind möglichst eindeutig, vollständig und verständlich formuliert. Für den Schüler soll zweifelsfrei erkennbar sein, was von ihm verlangt wird und was gegeben ist (z. B. ist in einer Aufgabe klargestellt, mit welchem Tag genau die Weihnachtsferien beginnen). Trotz aller didaktischen Vorbehalte wird deshalb die Frage jedesmal mitgeliefert. Es sind immer genau so viele Daten vorgegeben, daß das jeweilige Problem eindeutig (und widerspruchsfrei) gelöst werden kann. Die Daten liegen fast immer explizit vor; die Schüler müssen lediglich wissen, daß die Stunde 60 Minuten, der Dezember 31 Tage und das Jahr 12 Monate hat. Der Text jeder Aufgabe besteht aus einfach gebauten Sätzen; Formulierungen und Wortwahl liegen auf umgangssprachlichem Niveau und sind zugleich sachangemessen. Es kommen keine überflüssigen (Zahlen-) Angaben vor (außer einmal die Jahreszahl 1977).

(Aiii) Der arithmetische Gehalt der Aufgaben ist bewußt niedrig gehalten. Bei keiner Aufgabe sind Operationen kompliziert zu verknüpfen. Die vorgegebenen Zahlen sind möglichst ‚einfach', d. h. vor allem: glatt, damit die Gefahr des Verrechnens möglichst gering bleibt. Schließlich sollen ja nicht in erster Linie die Arithmetikleistungen der Schüler getestet werden.

(Aiv) Gewisse, manchen Situationen eigentlich innewohnenden Komplikationen werden nicht thematisiert, um die Schüler nicht zu verwirren: in A2 der Unterschied zwischen Flaschenvolumen und Füllmenge; in A5 die Nichtkonstanz der Geschwindigkeiten; in B4 die Tatsache, daß die Tischdecke an den Ecken $20 \cdot \sqrt{2}$ cm überhängt. Diese (für das 4. Schuljahr als solche aufzufassenden) Spitzfindigkeiten werden mit Recht außer acht gelassen; ein einziger Schüler (von 1120) hat erkennbar auf die Vernachlässigung in B4 reagiert.

Im Hinblick auf eine Kontrolle der Lernziele (Li) und (Lii) (wie gut finden sich die Schüler in den Sachsituationen zurecht, und wie gut mathematisieren sie sie?) sind nicht alle möglichen Erleichterungen eingebaut: Etwa kommen keinerlei bildliche Darstellungen vor; die Reihenfolge der Daten im Text ist nicht die, in der sie bei der Rechnung abzuarbeiten sind; die Zahlenwerte sind so, daß die Ergebnisse kaum geraten oder durch unzulässige (Kurz-) Schlüsse gewonnen werden können; auch fehlen allzu suggestive Hinweise, etwa in A1: Herr Adler verdiente also im Januar 2000 DM, im Februar 2000 DM, ...; oder in B3: Der 23. 12. war also der 1. Ferientag, der 24. 12. der 2., ... Solche methodischen Hilfsmittel sind zwar nützlich auf dem Weg zur Sachrechenkompetenz, jedoch mit dem Ziel überflüssig zu werden. Im Test wird sozusagen festgestellt, wie weit dieses Ziel erreicht ist.

Die Inhalte der Sachaufgaben sind an dem Stoff aus (Liii) und (Liv) und an den Grundrechenarten ausgerichtet. (Dies ist ein Ansatzpunkt für die Kritik am mathematik- und nicht sachorientierten Sachrechnen — jedoch unvermeidbar von der Schulwirklichkeit und den Intentionen des Tests her.) Reine (auch mehrgliedrige) Additions- und Subtraktionsaufgaben mit sachrechenspezifisch allzu geringem Anspruch fehlen; es kommen je eine einfache Multiplikation und Division in den natürlichen Zahlen vor; außer bei der Ferientage-Zählaufgabe und dem Gleichungssystem mit zwei Unbekannten handelt es sich beim Rest der Aufgaben um Kombinationen von höchstens zwei der vier Grundrechenarten, wobei Anforderungen an die Schüler vor allem durch kräftige Verwendung von (harmlosen) gebrochenen Zahlen und von Größen, besonders von Zeitpunkten und -spannen, entstehen. Insgesamt ist der formale Rechenanspruch nicht sehr hoch, bei Aufgabe B3 (Weihnachtsferien) tritt er sogar ganz zurück.

Neben dieser ist es die Aufgabe A2 (Kakaoflaschen) und vor allem B4 (Tischdecke), die nicht so leicht auf ein bekanntes Rechensch

ma zurückgeführt werden können. Die wichtigen Bereiche Geometrie und Stochastik bleiben ausgeschlossen (lediglich B4 bringt einen Hauch Geometrie in den Test), weil man auch hier der Schulwirklichkeit Rechnung tragen muß und nicht davon ausgehen kann, daß alle Schüler in diesen Gebieten in genügendem Umfang Erfahrungen gemacht haben.
Im Sachrechentest von *Mitschka* (1971, S. 36ff) liegen die Schwerpunkte anders: Der arithmetischen Seite wird mehr, der Sachsituation weniger Bedeutung beigemessen; gebrochene Zahlen kommen nur als Kommazahlen bei DM-Beträgen vor, Zeiten nur als Anzahlen (volle Stunden, Tage, Monate); dafür ist aber die durchschnittliche Zahl der erforderlichen Operationen pro Aufgabe höher; einige Aufgaben sind pure Zahlenrätsel. Weitere Unterschiede sind: die äußeren Testbedingungen genügten bei *Mitschka* formalen Anforderungen besser; die Probanden waren Hauptschüler der 5. Klasse; als Arbeitszeit stand ihnen 60 Minuten zur Verfügung.
Dagegen richtet sich der vorliegende Test an Grundschüler im 4. Schuljahr. An Zeit wurde ihnen an zwei Tagen für je 5 Aufgaben (A1 - A5 bzw. B1 - B5) je 45 Minuten zur Verfügung gestellt. In einem Vortest, der noch zur Verbesserung einiger Formulierungen beitrug, ergab sich zwar, daß die Zeit sehr reichlich bemessen war; damit sich aber kein Schüler unter Zeitdruck fühlen brauchte, blieb es bei zweimal 45 Minuten. Im Test wurden bei einer Schulklasse, deren Ergebnis mit 52 % der erreichbaren Punkte durchschnittlich war, Zeitverbräuche festgestellt: 24 (= 77 %) von 31 Schülern hatten in beiden Tests zusammen weniger als 50 Minuten gebraucht.
Die Mitglieder des Arbeitskreises haben nun an ihren Schulen Kollegen mit 4. Schuljahren für die Durchführung des Tests geworben. In einem Anschreiben wurden diesen Kollegen die Ziele und die gedachte Durchführung des Tests dargestellt: Sie sollten keine erläuternden Kommentare zu den Aufgaben geben, sie sollten die Kinder auffordern, nicht nur die Antwort, sondern auch den Lösungsweg aufzuschreiben, und sie sollten das ‚Abgucken' unterbinden. Es wurde ihnen anheimgestellt, den Test als Klassenarbeit zu werten. Damit sollten sie auch einen ‚materiellen' Vorteil von dem Test haben; vor allem ging es aber darum, den Kollegen ein Mittel in die Hand zu geben, den Schüler nötigenfalls zu einer gewissen Ernsthaftigkeit bei der Bearbeitung zu verhelfen (auch hier zeigt sich Schulwirklichkeit!). Auf diese Weise ergab sich eine halb-zufällige Auswahl von 1120 Schülern aus 43 vierten Klassen von ländlichen, mittel- und großstädtischen Schulen des Regierungsbezirks Arnsberg (eine Klasse aus Neuss) mit unterschiedlichsten sozialen Schichtungen.
Noch ein Wort zur Stichhaltigkeit des Tests in statistischer Hinsicht: Für einen formal einwandfreien Test sind die Ziele des Tests zu allgemein (formuliert) und waren die Bedingungen der Probanden nicht homogen genug. In einigen Klassen wurde der Test als Klassenarbeit gewertet, in anderen nicht; in einigen wurde das Abgucken nicht genügend unterbunden, in anderen wohl; der Test war den Lehrern vorher bekannt, und einige Lehrer haben augenscheinlich ihre Schüler gezielt auf gewisse Aufgaben vorbereitet (pädagogisch sinnvoll, aber dem Test abträglich). Ungeachtet seines informellen Status kann der Test aber dennoch wertvoll für den Unterricht und die Didaktik des Sachrechnens sein, gibt er doch einen Überblick über die Leistung im Sachrechnen, jedenfalls soweit es durch die Aufgaben abgedeckt ist, und macht typische Fehler sichtbar — dies auch dadurch, daß infolge der großen Teilnehmerzahl manche Fehler sich überhaupt erst als typisch erweisen.

3. Analyse der Ergebnisse

3.1. Überblick

Im Juni 1978 wurde dieser Test in 43 Klassen an je zwei Tagen geschrieben. Es nahmen 1120 Schüler des 4. Schuljahres teil; dazu kommen 36 Schüler, die jeweils nur eine der beiden Hälften bearbeitet haben, die nicht in der Statistik, wohl aber bei der Ergebnisanalyse berücksichtigt sind. Die Klassenstärke, d. h. die Zahl derjenigen Schüler einer Klasse, die beide Testteile bearbeitet haben, schwankt zwischen 19 und 38, im Mittel beträgt sie 26 mit einer Standardabweichung von 4,3.
Die Lehrer bewerteten die Lösungen mit + (richtig), — (falsch) und o (nicht bearbeitet). Während der weiteren Auswertung habe ich von den insgesamt 11200 Bewertungen 131 von + in — und 51 von — in + geändert. Manchmal hatten einfach Übertragungsfehler vorgelegen; manchmal hatten Schülerantworten Teile enthalten, die der Lehrer übersehen hatte (z. B. der Teil ‚und eine halbe' bei: „40 Flaschen und eine halbe werden voll."); in einigen Fällen habe ich die Bewertung vereinheitlicht (z. B. haben einige Lehrer die Antwort ‚12.000 DM' in B5 (Preis eines Wagens) als falsch gewertet, besonders, wenn der Punkt zu sehr nach einem Strich aussah, andere haben sie als richtig gewertet, diesen habe ich mich angeschlossen); und schließlich gab es auch echte Auffassungsunterschiede: Bei B3 (Länge der Ferien) war in 2 Klasse auch ‚16' als richtig bewertet worden. Die inhaltlichen Anforderungen an eine Lösung, damit sie als richtig anerkannt wurde, habe ich recht hoch gesetzt, z. B. wurde in B5 die Antwort ‚1200 DM' als falsch gewertet, auch wenn bei der schriftlichen Ausrechnung sich der richtige Betrag ergeben hatte. Dagegen wurden keine besonderen formalen Ansprüche gestellt, z. B. führte es nicht zur Abwertung, wenn die Rechnung nicht in einwandfreier Notation aufgeschrieben war oder der Antwortsatz fehlte; es mußte lediglich irgendwie das Ergebniss kenntlich gemacht sein. In diesen Grundsätzen stimmten alle an der Bewertung Beteiligten überein. Natürlich wird man der individuellen Schülerleistung mit dem Richtig-Falsch-Raster und der weniger großzügigen Bewertung nicht gerecht. Aber um die individuelle Beurteilung geht es im Test nicht, und einige der Lehrer, die ihn für sich als Klassenarbeit gewertet haben, haben dieses Raster auch wesentlich verfeinert.
Gewisse Schwierigkeiten bereitete ab und zu die Frage, ob eine Aufgabe als bearbeitet anzusehen sei. Dies wurde von den Lehrern nach un-

terschiedlichen Prinzipien entschieden. Hat ein Schüler seinen Lösungsversuch ausradiert oder durchgestrichen, so müßte man seinen Willen berücksichtigen und die Aufgabe als nicht bearbeitet auffassen. Andererseits weiß man jedoch, daß die Aufgabe bearbeitet worden ist. Allerdings auch da, wo auf der zum Arbeiten vorgesehenen Fläche nichts steht, kann durchaus eine (möglicherweise schon sehr weitgehende) Bearbeitung im Kopf stattgefunden haben. Umgekehrt: So mancher Schüler läßt so manches auch ihm selbst falsch erscheinende Ergebnis stehen; ein anderer streicht im entsprechenden Fall seine ganze Rechnung. Hat letzterer die Aufgabe deswegen nicht bearbeitet? Schließlich habe ich genau die Aufgaben als nicht bearbeitet gewertet, bei denen keinerlei Ansatz von Bearbeitung (auch kein ausradierter oder gestrichener) zu erkennen ist. Allerdings kann man aus den entsprechenden Zahlen keinerlei Rückschlüsse auf die absolute Zahl der Kinder ziehen, die mit gewissen Aufgaben nichts anfangen konnten; es ergibt sich bestenfalls ein Bild, wie dabei die einzelnen Aufgaben im Verhältnis zueinander liegen.

Der Test hatte folgendes Ergebnis:

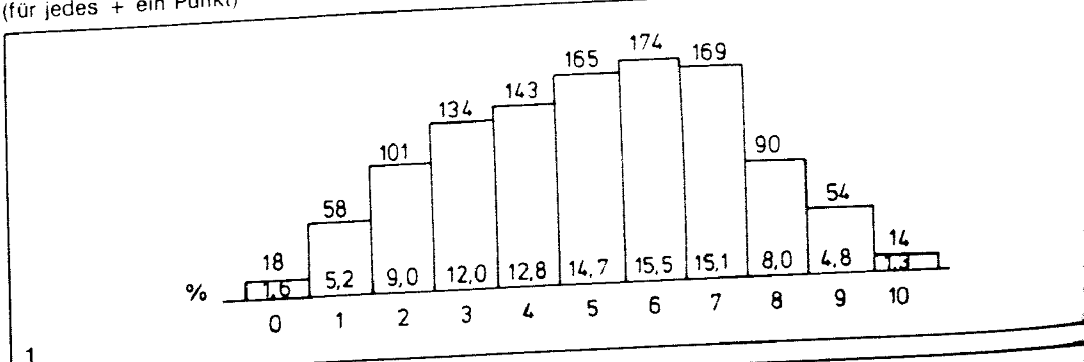
1120 Schüler	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	Ges.
+	607	552	558	773	357	903	743	179	56	904	5632
%	54	49	50	69	32	81	66	16	5	81	50
—	492	429	537	294	659	216	331	892	1008	195	5053
%	44	38	48	26	59	19	30	80	90	17	45
○	21	139	25	53	104	1	46	49	56	21	515
%	2	13	2	5	9	0	4	4	5	2	5
528 Mädchen											
+	261	221	225	372	126	426	340	76	11	415	2473
%	50	42	43	71	24	81	64	15	2	79	47
—	255	223	287	129	357	102	161	435	493	103	2545
%	48	42	54	24	68	19	31	82	93	19	48
○	12	84	16	27	45	0	27	17	24	10	262
%	2	16	3	5	8	0	5	3	5	2	5
534 Jungen											
+	301	302	299	361	199	427	365	86	29	443	2812
%	56	57	56	68	37	80	68	16	5	83	53
—	224	183	228	151	279	106	150	418	473	81	2293
%	42	34	43	28	52	20	28	78	89	15	43
○	9	49	7	22	56	1	19	30	32	10	235
%	2	9	1	4	11	0	4	6	6	2	4

Tab. 1: Gesamtergebnis des Tests
(Da auf den Bögen zweier Klassen nicht die (Vor-) Namen der Schüler angegeben waren, ist die Zahl der nach Geschlecht differenzierten Schüler kleiner als die Gesamtzahl.)

3.2. Zur Strukturierung der Analyse

In der Testauswertung sind naturgemäß vor allem die fehlerhaften Lösungen Gegenstand der Betrachtung, in einigen Fällen auch auffällige richtige Lösungen. Über Fehler beim Mathematiktreiben gibt es zwar ein umfangreiches Schrifttum, besonders aus Amerika; dies befaßt sich jedoch vor allem mit der Analyse von Fehlern numerischer Art, die wiederum bei dem vorliegenden Sachrechentest von sekundärem Interesse sind. Aus Deutschland sind aus neuerer Zeit vor allem *Schlaak* (1968) und *Mitschka* (1971) zu nennen. Für die didaktische Mit- Absicht eines Tests, nämlich Material für die Verbesserung des Unterrichts zu liefern, aber

Abb. 1: Verteilung der Punktzahlen auf die Schüler (für jedes + ein Punkt)



auch zum Zwecke der Bestandsaufnahme, reicht die Bekanntschaft mit den vorkommenden Fehler*techniken* und ihren Häufigkeiten allein nicht, vielmehr sind auch die Fehler*ursachen* aufzuspüren.

Bei der Suche nach solchen hat sich das Abarbeiten der einzelnen Phasen des Problemlöseprozesses nach allgemeinen Mustern als nicht sehr ergiebig erwiesen: Die Aufgaben des vorliegenden Tests sind fast alle so einfach strukturiert, daß z. B. Zielerfassung, Bedingungsanalyse, Handlungsplanerstellung und -verwirklichung (Zerlegung in Anlehnung an *Pippig* (1977)) oft fast simultan ablaufen und starke Wechselwirkungen aufeinander ausüben (das gehört ja gerade zu den oben angeschnittenen – hier unvermeidlichen — Schwächen vieler Sachaufgaben). *Radatz* schlägt ein Raster für mögliche Fehlerursachen vor (1977) und verfeinert einen Teil der Punkte wesentlich (1979):

(Ra) „Affektiv-situationsspezifische Fehlerursachen",
(Rb) „Mängel und Lücken im Beherrschen der vorauszusetzenden Fertigkeiten, Kenntnisse und Begriffe",
(Rc) „Fehler aufgrund der Anwendung unangemessener oder falscher Strategien und Regeln",
(Rd) in der „Informationaufnahme und Informationsverarbeitung" liegende Fehlerursachen,
(Rdi) „Fehlerursachen im Sprach- und Textverständnis der Schüler",
(Rdii) „Fehlerursachen in der Analyse von Veranschaulichungen oder Darstellungen im Mathematikcurriculum",
(Rdiii) „falsche Assoziationen und Einstellungen während des Informationsverarbeitungsprozesses als Fehlerursache",
(Rdiv) „Fehler aufgrund des Gebundenseins einer Begrifflichkeit an sehr einseitige Repräsentationen und Vorstellungen",
(Rdv) „relevante Bedingungen eines mathematischen Problems werden bewußt oder unbewußt nicht berücksichtigt",
(Rdvi) „Störungen des Kurzzeitgedächtnisses während des Problemlösungsprozesses",
(Rdvii) „nicht ausreichendes Reflektieren der Lösungshypothesen bzw. auch Versuch-Irrtum-Lösungsstrategie",
(Rdviii) „Nicht-Abschließen der Informationsverarbeitung bzw. unvollständiges Anwenden einer ‚Regel'".

Die einzelnen Fehlerursachen (-felder) lassen sich nicht immer klar voneinander trennen. Etwa ist (Ra) (Motivationsmangel, Konzentrationsschwäche, Beeinflussung durch Mitschüler) bei vielen Fehlern beteiligt, kann aber bei schriftlichen Leistungen nur in Ausnahmefällen nachträglich diagnostiziert werden (z. B. unpassende Korrekturen am Text, offenbar absichtliche Absurditäten oder Nichtbearbeiten geben Anlaß zum Suchen in (Ra)). (Rc) ist jedenfalls in den Fällen ein Unterpunkt von (Rb), in denen das Anwenden von richtigen Strategien oder Regeln zu den vorauszusetzenden Fertigkeiten, Kenntnissen und Begriffen (bei einer entsprechend weiten Fassung des jeweiligen Begriffs) gehört. Die Analyse von Ursachen aus (Rb) führt zu inhaltlichen Aspekten. Eine geringe Ausprägung von (Rb) dürfte sich auch günstig bezüglich (Rd) auswirken.

Jedoch läßt sich die Auswertung des Tests auch nicht an diesem Raster ausrichten. Von der Fragestellung und der Art des Tests her erscheint vielmehr eine Strukturierung entlang der Aufgaben und der Lösungen sinnvoller: Die jeweils relevanten Aspekte werden herausgestellt, je nach dem ein bemerkenswerter Weg zu einer Lösung, eine auffällige Fehlertechnik oder eine besondere Fehlerursache. Dafür wird dann das Raster herangezogen; und keinesfalls soll eine Einordnung in eine Taxonomie erfolgen.

Anmerkungen

(*) Herrn *Winter* gilt mein Dank für wertvolle Verbesserungsvorschläge.

Literatur

Damerow, P./Elwitz, U./Keitel, C./Zimmer, J.: Elementarmathematik: Lernen für die Praxis? Stuttgart 1974.
Fettweis, E./Schlechtweg, H.: Didaktik und Methodik des Rechenunterrichts. 1929, 4. neubearb. Aufl. Paderborn 1965.
Kühnel, J.: Neubau des Rechenunterrichts. 1916, 10. Aufl. hrsgg. von *E. Koller,* Bad Heilbrunn (Obb.) 1959.
Mitschka, A.: Schülerleistungen im Rechnen zu Beginn der Hauptschule. Hannover 1971.
Pippig, G.: Psychologische Überlegungen zur Überwindung von Denkfehlern. In: Mathematik in der Schule 15, S. 26—28, 37—41 (1977).
Radatz, H.: Schülerfehler und ihre möglichen Ursachen im Mathematikunterricht. In: Westermanns Pädagogische Beiträge 29, S. 366—369 (1977).
Radatz, H.: Untersuchungen zu Fehlleistungen im Mathematikunterricht. Erscheint in: Journal für Mathematik-Didaktik (1979).
Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Kastellaun / Düsseldorf / Ratingen 1969, 2. Aufl. 1973.
Schlaak, G.: Fehler im Rechenunterricht. Hannover 1968.
Strehl, R.: Grundprobleme des Sachrechnens. Freiburg / Basel / Wien 1979.
Weber, H.: Problemlösen und Kreativität im Mathematikunterricht: Der Stand der mathematikdidaktischen Reflexion. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1973, S. 274—282. Hannover 1974.
Winter, H.: Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Beiträge zum Lernzielproblem. Ratingen 1972.
Winter, H.: Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule *7*, S. 337—353 (1976).
Winter, H.: Kreatives Denken im Sachrechnen. In: Die Grundschule *9*, S. 106—110 (1977).
Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1974, 5. Aufl. 1978.
Zitterbart, E.: Das Text- und Sachrechnen in der Grundschule. In: Lauter, J. (Hrsg.): Der Mathematikunterricht in der Grundschule, S. 149—188. Donauwörth 1976, 2. Aufl. 1977.

(Fortsetzung folgt)