JOURNAL OF ALGEBRA 65, 328–331 (1980)

Eine Präsentation der symplektischen Gruppe $Sp(4, \mathbb{Z})$ mit 2 Erzeugenden und 8 definierenden Relationen

PETER BENDER

RWTH Aachen, Aachen, Germany

Communicated by B. Huppert

Received October 16, 1978

In [3] wurde das Problem der expliziten endlichen Präsentation der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Z})$ auf den Fall $n = 2$ zurückgeführt, in [1] wurde die $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ mit 6 Erzeugenden und 18 definierenden Relationen präsentiert, in [2] mit Hilfe geometrischer Methoden eine Präsentation mit 4 Erzeugenden und 12 definierenden Relationen angegeben und außerdem festgestellt, daß im Behrschen System bereits 4 Erzeugende und 15 Relationen zur Präsentation reichen. Es gilt sogar der

SATZ. *Die symplektische Gruppe* $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ *wird erzeugt von den* 2 *Elementen*

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und durch folgende 8 *Relationen definiert*:

$$\text{(a)} \qquad K^2 = I,$$

$$\text{(b)} \qquad L^{12} = I,$$

$$\text{(c)} \qquad (KL^7KL^5K)L = L(KL^5KL^7K),$$

$$\text{(d)} \qquad (L^2KL^4)(KL^5KL^7K) = (KL^5KL^7K)(L^2KL^4),$$

$$\text{(e)} \qquad (L^3KL^3)(KL^5KL^7K) = (KL^5KL^7K)(L^3KL^3),$$

$$\text{(f)} \qquad (L^2(KL^5KL^7K))^2 = ((KL^5KL^7K)L^2)^2,$$

$$\text{(g)} \qquad L(L^6(KL^5KL^7K))^2 = (L^6(KL^5KL^7K))^2L,$$

$$\text{(h)} \qquad (KL^5)^5 = (L^6(KL^5KL^7K))^2.$$

Beweis. Es wird die Abkürzung $KL^5KL^7K =: H$ verwendet (es ist $H^2 = I$); für L^m ($m \in \mathbb{N}$) wird m geschrieben; Buchstaben über einem Gleichheitszeichen geben an, auf Grund welcher Relation die Gleichung richtig ist (die Relationen (a) und (b) werden nicht extra aufgeführt); häufig wird auf der linken Seite einer

0021-8693/80/080328–04\$02.00/0

Gleichung das Wort unterstrichen, das durch die Relation verändert wird, und auf der rechten Seite das neue Wort in Klammern gesetzt.

Das Behrsche Erzeugendensystem wird von K und L erzeugt (Bezeichnungen aus [1]):

$$x_\alpha = 5K1, \qquad x_\beta = 9H10H, \qquad x_{\alpha+\beta} = 8K10,$$
$$x_{2\alpha+\beta} = H9H10, \qquad w_\alpha = H6, \qquad w_\beta = 9H6H.$$

Die Relationen (a)–(h) erzeugen folgende Relationen:

(i) $(HK)^3 = K5K7K5K7K5K7 \stackrel{c}{=} H(6H6) \stackrel{g}{=} 6H6H \stackrel{c}{=} (KH)^3$;

$(H6)^2 = (6H)^2 = (HK)^3 = (KH)^3$ liegt im Zentrum, denn es kommutiert nach (g) mit L und außerdem mit K : $(HK)^3 K = (KH)^3 K = K(HK)^3$.

(j) $(3H)^2 = 3H(K12K)\,3H \stackrel{e}{=} (3K5K4)(H3K3) \stackrel{d}{=} 3K(3H2K7)\,K3$
$\stackrel{e}{=} (H3)^2$,

(k) $(9H10H)(8K10) \stackrel{d}{=} 9H(6K10H) \stackrel{c}{=} (8K7K5K7)\,K10H$
$= (8K10)(9H10H)$,

(l) $(9H10H)K \stackrel{f}{=} (7H10H2)K \stackrel{d}{=} 7H10(2K4H8) = 7(K5K11)\,H8$
$\stackrel{c}{=} (K1H10)\,H8 \stackrel{f}{=} K(9H10H)$,

(m) $(HKH)(H6H) = (K5K7)\,6H \stackrel{c}{=} K5K(K7K5K1) = 5K1$,

(n) $K(H9H10) = KH9H(8K12K2) \stackrel{d}{=} 5K7K(5K10H2)\,K2$
$\stackrel{c}{=} (6H9)H2\,K2 \stackrel{j}{=} (H9H3HH5)\,K2 = H9H3H(KH(HK)^3\,7)$
$\stackrel{hi}{=} H9H3HKH((K5)^5)7 = H9H3H(10(K5)^3)7$
$= H9H3H10(K5K5K) = H9H3H10(HK10)K$
$\stackrel{f}{=} (H9H(7H10H8)\,K10)K$.

Die Relationen (a)–(n) erzeugen die Relationen im Behrschen System:

(1) $x_\alpha x_\beta x_\alpha^{-1} x_\beta^{-1} = (5K1)(9H10H)(11K7)(H2H3)$
$\stackrel{m}{=} (HKHH6H)\,9H10H(H6HHKH)\,H2H3 \stackrel{if}{=} HKH(9H10)\,K2H3$
$\stackrel{n}{=} (9H7H10H8K10)\,2H3 \stackrel{dk}{=} (8K10)(9H7H10H)\,2H3$
$\stackrel{f}{=} (8K10)\,9H(9H1) \stackrel{j}{=} (8K10)(H9H10) = x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta}$.

(2) $$x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_\alpha^{-1} x_{\alpha+\beta}^{-1} = (5K1)(8K10)(11K7)(2K4)$$
$$\overset{m}{=} (HK6H)\, 8K10(H6KH)\, 2K4 \overset{d}{=} HK(2K4)\, KH2K4$$
$$= H(2H3HKH9H10)^2\, K2K4KH2K4$$
$$\overset{n}{=} H(2H3H(H9H7H10H8K10K))^2\, K2K4KH2K4$$
$$= H(9H10H8K10K9H10H)\, KH2K4 \overset{dkl}{=} (H9H10)^2 = x_{2\alpha+\beta}^2 .$$

(3) $$x_\alpha x_{2\alpha+\beta} x_\alpha^{-1} x_{2\alpha+\beta}^{-1} = (5K1)(H9H10)(11K7)(2H3H)$$
$$\overset{c}{=} 5K1H9H(H9K9)\, 3H = 5K1H(11K7K) \overset{c}{=} 5K(K7K5K)K7K = I.$$

(4) $$x_\beta x_{\alpha+\beta} x_\beta^{-1} x_{\alpha+\beta}^{-1} \overset{k}{=} I.$$

(5) $$x_\beta x_{2\alpha+\beta} x_\beta^{-1} x_{2\alpha+\beta}^{-1} = (9H10H)(H9H10)(H2H3)(2H3H)$$
$$\overset{f}{=} 9H(9H3)\, H3H \overset{j}{=} I.$$

(6) $$x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} x_{\alpha+\beta}^{-1} x_{2\alpha+\beta}^{-1} = (8K10)(H9H10)(2K4)(2H3H) \overset{dk}{=} I.$$

(7) $$w_\alpha w_\beta^{\,2} w_\alpha = (H6)(9H6H)(9H6H)(H6) \overset{i}{=} 6 \overset{i}{=} w_\beta^{\,2}.$$

(8) $$w_\beta w_\alpha^{\,2} w_\beta^{-1} \overset{i}{=} w_\alpha^{\,2}.$$

(9) $$(w_\alpha w_\beta)^2 = ((H6)(9H6H))^2 = H3H9H6H \overset{i}{=} (9H)^2 = (w_\beta w_\alpha)^2.$$

(10) $$w_\beta^{\,4} \overset{i}{=} I.$$

(11) $$w_\alpha x_\beta w_\alpha^{-1} = (H6)(9H10H)(6H) \overset{f}{=} H9H10 = x_{2\alpha+\beta} .$$

(12) $$w_\alpha x_{2\alpha+\beta} w_\alpha^{-1} = (H6)(H9H10)(6H) \overset{i}{=} 9H10H = x_\beta .$$

(13) $$w_\alpha x_{\alpha+\beta} w_\alpha^{-1} = (H6)(8K10)(6H) \overset{d}{=} 2K4 = x_{\alpha+\beta}^{-1} .$$

(14) $$w_\beta x_\alpha w_\beta^{-1} = (9H6H)(5K1)(H6H3) \overset{i}{=} 8K10 = x_{\alpha+\beta} .$$

(15) $$w_\beta x_{\alpha+\beta} w_\beta^{-1} = (9H6H)(8K10)(H6H3) \overset{i}{=} 11K7 = x_\alpha^{-1}.$$

(16) $$w_\beta x_{2\alpha+\beta} w_\beta^{-1} = (9H6H)(H9H10)(H6H3) \overset{fi}{=} H9H10 = x_{2\alpha+\beta} .$$

(17) $$w_\alpha x_\alpha w_\alpha^{-1} = (H6)(5K1)(6H) \overset{c}{=} (11K7K5K)\, K7K5K7K = 6K$$
$$= 11KK7K5KK7 \overset{c}{=} (11K7)(6H)(11K7) = x_\alpha^{-1} w_\alpha^{-1} x_\alpha^{-1}.$$

(18) $$w_\beta x_\beta w_\beta^{-1} = (9H6H)(9H10H)(H6H3) \overset{if}{=} (H10)\, H9$$
$$\overset{f}{=} H8H6H2H3 \overset{f}{=} (H2H3)(H6H3)(H2H3) = x_\beta^{-1} w_\beta^{-1} x_\beta^{-1}.$$

LITERATUR

1. H. BEHR, Eine endliche Präsentation der symplektischen Gruppe $Sp_4(\mathbb{Z})$. *Math. Z.* **141** (1975), 47–56.
2. P. BENDER, Eine endliche Präsentation der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades. Unveröffentlichte Dissertation, Mainz, 1976.
3. H. KLINGEN, Charakterisierung der Siegelschen Modulgruppe durch ein endliches System definierender Relationen. *Math. Ann.* **144** (1961), 64–72.