Peter BENDER, Kassel

Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I

Zu keinem Teilgegiet des Mathematikunterrichts haben die darin Engagierten ein so persönliches Verhältnis wie zum Geometrieunterricht (GU). Da kann man Aufsätze lesen über das "Stiefkind", das "Dilemma", "between the devil and the deep sea", die "Tragödie", den "Fall" (als "case" und als "fall"), den "Aufstieg und Fall" und schließlich den "Tod"; da wird die Geometrie in Euklid personifiziert, diesem "Fehler" und "Fesselung" vorgeworfen und Aufrufe erlassen wie "weg mit", "los von", "nieder mit". Da gibt es einen GDM-Arbeitskreis zur "Wiederbelebung der Geometrie in der Schule"und auch Beschreibungen wie "der Fall und der Aufstieg" oder "sie lebt und ist gesund", sie ist "lebendiger denn je". Auch aus den negativen Überschriften ist ein positives Verhältnis zur Geometrie herauszulesen: man sorgt sich eben.

Inhalte und Methoden des GU bei uns sind wesentlich durch Richtlinien und Schulbücher bestimmt. Aufgrund zahlreicher Berichte kann man davon ausgehen, daß Umfang (und wohl auch Qualität) des tatsächlich stattfindenden GU noch deutlich niedriger liegen. Dafür sprechen auch die dürftigen Erfolge dieses GU, wie sie von den späteren Abnehmern unserer SI-Schüler (Oberstufe, Hochschule, Berufsausbildung) beklagt werden. Hier kann man sich sogar auf eine umfangreiche Untersuchung über den Effekt (auch) des GU in England (Hart 1981) stützen, die Rückschlüsse auf westdeutsche Verhältnisse zuläßt. Über die curricularen Mängel unseres GU liegen einige Analysen vor (zur Hauptschule: Damerow 1980; zum gymnasialen Unterricht: z.B. der Gemener Kongreß (Andelfinger 1978), Führer 1982; im Hinblick auf das Berufsleben: Lörcher 1977; auf die Abbildungsgeometrie bezogen: Bender 1982, Schwartze 1983) mit folgenden Befunden:

Richtlinien und Schulbücher sind latent nach wie vor zu stark an einem mathematischen Theorie-Ideal ausgerichtet und verleiten zum

- Zuschütten der wesentlichen Kerne mit Formalismus,
- Problematisieren von trivialen und evidenten Sachverhalten,
- Ausblenden eines echten Bezugs zur Realität, zum restlichen Mathematikunterricht und zu anderen Fächern.

Das sind Nachwirkungen einer didaktisch nicht genügend reflektierten Übernahme mathematischer Theorie-Stücke in den Unterricht: Axiomatik angelehnt an Hilbert oder Geometrie mit Abbildungsgruppen im Sinne Kleins als Mathematiker. So bestechend diese Programme erscheinen, als so undurchführbar im Unterricht haben sie sich erwiesen; und ihre Hinterlassenschaft ist (in der oben beschriebenen bildhaften Sprache) eine mumienartige Gestalt, der der Lebenssaft fehlt.

Alternative Ansätze zur Wiederbelebung des GU wie

- Orientierung an Phänomenen (z.B. das IOWO (Schoemaker u.a. 1981)),

- betonter Einbezug von Anwendungen (z.B. Meyer 1980; auch Müller 1981; auch Zeitler 1980),
- Ausgehen von Problemen (z.B. Stowasser 1974ff)

sind - wie der ganze traditionelle Raumlehreunterricht speziell der Volksschule - jedoch jedenfalls Gefahren ausgesetzt: Daß entweder die theoretische Durchdringung des Stoffs vernachlässigt wird oder aber Theorie oder Praxis ausgesetzt erscheinen. (Wegen der hier zutagetretenden erkenntnistheoretischen Probleme verweise ich auf Schreiber (1978).)

Als ein Mittel zur Begegnung dieser Gefahren möchte ich das Konzept der zentralen Ideen einer Disziplin propagieren, das weder in der Allgemeinen, noch in der Mathematik-Didaktik (vgl. z.B. Vollrath 1978) prinzipiell neu, für die Geometrie jedoch noch nicht genügend konkretisiert ist. Mit diesem Konzept korrespondiert eine gewisse Auffassung vom Sinn des GU, die ich zunächst darstellen will.

I. Rechtfertigung und Ziele des Geometrieunterrichts

Warum und wozu sollen alle Menschen in der obligatorischen Schulzeit GU erhalten?

1. Geometrie zur Strukturierung der räumlichen Umwelt und zur Erforschung der praktischen Nutzbarkeit dieser Struktur (dabei: Zwecke und Zweckmäßigkeit von Formen, Her- und Darstellen in weitem Sinn, Lösen von Problemen aller Art, Aufbau eines Begriffssystems; vgl. Bender (1978)),
2. Geometrie als Kulturgut und Bildungsinhalt (Prototyp einer Wissenschaft, universale Rolle im Denken),
3. Geometrie zum Training geistiger Fähigkeiten (Raumanschauung, Argumentationsfähigkeit, Kreativität, Geometrisierung (Idealisierung)),
4. Geometrie zur Vermittlung von Freude und Entwicklung von Selbstvertrauen (Ästhetik von Formen und Ordnungen; eigenes Tun, Herstellung von "Produkten"; Erfahrung der Kraft des eigenen Verstands und der Autonomie des Denkens (Freudenthal 1974)).

Die alte Dichotomie "Schüler- vs. Stofforientierung", wie sie z.B. Kratz 1974 beschrieben hat, ist - vom fachdidaktischen Standpunkt aus gesehen - hier gegenstandslos. (Teile dieses Systems von Rechtfertigungsgründen gehen auf Vorstellungen des Gemener Kongresses (Andelfinger 1978) und von Kirsch 1980 zurück; jedoch ist die Akzentsetzung dort anders.)

II. Inhaltliche Wesenszüge der Geometrie

Bei jedem der genannten Rechtfertigungsgründe tritt die Geometrie inhaltlich in folgenden drei Wesenszügen in Erscheinung:

1. Geometrie als praktische Nutzung der Struktur des Anschauungsraums in Alltag, Technik (, Natur),
2. Geometrie als Veranschaulichungs- und heuristisches Medium für mehr oder weniger abstrakte Sachverhalte (von der übersichtlichen Darstellung einfachster Zusammenhänge bis hin zu komplizierten Molekülaufbauten in der Chemie oder tiefliegenden Begriffsbildungen in der Mathematik),

3. Geometrie als (anwendbare) Theorie des Anschauungsraums (i.w. die Lehre von den (partiell) starren Körpern und ihren Bewegungen im euklidischen Raum, die die Begriffe ausbildet und in ein Beziehungsgefüge bringt).

(Für die unterrichtliche Realisierung nicht relevant:
4. Geometrie als mathematische Disziplin im engeren Sinn (als axiomatische Theorie ohne ontologische Bindung der Begriffe),
5. Geometrie als Lehre vom physikalischen Raum.)

Bei diesem Verständnis von Geometrie ist die Trennung in Propädeutik und "eigentlichen" GU aufgehoben. (Andere Zusammenstellungen von "Sichtweisen" bzw. "Aspekten" stammen von Vollrath (1974) bzw. Holland (1979).)

III. Das Konzept der zentralen Ideen

Anders als für den Lehrenden die Rechtfertigungsfrage stellt sich für den Schüler die Sinnfrage im GU dar. (Auch bei dieser Problematik möchte ich lediglich die fachdidaktische Komponente beleuchten.) Gibt es außer extrinsischen Antworten wie dem Verweis auf Nützlichkeit oder spätere Verwendbarkeit, deren Schlagkraft zweifelhaft ist, nicht auch Sinnkonstituenten im Geometrietreiben selbst?

Alfred Schreiber (1983) behandelt diese Frage umfassender, nämlich für mathematische Betätigung überhaupt. Er sucht eine Lösung, anknüpfend an A.N. Whitehead (1913/1962), in dem Konzept universeller Ideen der Mathematik: Diese sind nicht scharfe mathematische Begriffe, sondern sie sind in einem vortheoretischen Kontex angesiedelt und erst in einem längeren Prozeß zu exaktifizieren. Sie besitzen eine gewisse logische Allgemeinheit und sind in vielen Bereichen relevant; Beispiel: die Idee der Abbildung. Sie zeichnen sich also aus durch

" - Weite (logische Allgemeinheit)
- Fülle (vielfältige Anwendbarkeit und Relevanz in mathematischen Einzelgebieten)
- Sinn (Verankerung im Alltagsdenken, lebensweltliche Bedeutung)."

Während Halmos (1981) bei seiner Aufzählung von "Elementen der Mathematik" pragmatisch vom Standpunkt eines Mathematikers aus vorgeht, beinhaltet Schreibers Ansatz - auch wenn der Halmossche Ideenkatalog sich von dem seinem gar nicht so stark unterscheidet - didaktisch relevante Kriterien und liegt eher auf einer Linie mit Bruners Vorstellungen über die Orientierung des Unterrichts an der Wissenschaft.

Dazu passend ist, bezogen auf mathematische Einzelbereiche wie Geometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung usw., das Konzept der zentralen Ideen, bei denen der Aspekt der Universalität zurücktritt und die Fülle sich innerhalb dieses Bereichs zeigt. Solche Ideen können in ihrem Wirkungskreis auf diesen beschränkt sein, wie vielleicht die Idee des Passens auf die Geometrie; sie können auch Konstituenten einer universellen Idee sein, wie die Idee der Abbildung.

Zentrale (bzw. universelle) Ideen sollen weder Grundlagen für die Mathematik als Wissenschaft noch Organisationsformen für den Unterricht liefern, sie sind vielmehr am jeweils betrachteten Gegenstand aufzuzeigen, können die Erschließung neuer Gebiete leiten, Beziehungen herstellen, das Wesentliche, das Wesen des Fachs sichtbar machen, insgesamt eben: Sinn stiften.

Mit Ihrer engen Verbindung zur Lebenswelt und ihrem universalen Charakter ist die Geometrie die Muster-Disziplin, die für fast alle universellen Ideen der Mathematik wesentliche Komponenten liefert. Der von mir bevorzugte Einbezug der Praxis in den Unterricht ist dabei förderlich, aber nicht unabdingbar.

IV. Beispiele zentraler Ideen der Geometrie für den Unterricht

Im folgenden möchte ich nun nicht eine Ideensystematik entwikkeln; eine gewisse Hierarchie der Ideen ergibt sich jedoch: Zunächst einmal ist ohne die Idee des Raums und des (starren) Körpers (unabhängig von der Dimension) keine Geometrie möglich. Sodann sind es die Idee des Passens und die der Abbildung, um die sich andere Ideen locker gruppieren.

1. Zum praktischen Wesenszug der Geometrie: Hier dominiert die Idee des Passens in Verbindung mit der des starren Körpers (siehe auch Freudenthal 1977) (das ist später (partielle) Inzidenz und Kongruenz).

Betrachten wir einmal eines jener Baumhäuser eines holländischen Architekten, die vom IOWO (siehe Schoemaker u.a. 1981) in die Literatur eingeführt und auch in dem insgesamt sehr anregenden Aufsatz von Brauner/Kickinger über "gebaute Geometrie" (1982) beschrieben wurden: Ein Würfel auf der Spitze, ruhend auf einem prismatischen Fuß. Zur geometrischen Betrachtung dieser Form gehört auch die Diskussion der Vor- und Nachteile beim Bauen und beim Wohnen und der Vergleich mit der konventionellen Bauweise. Man kann nicht einfach einen Würfel in üblicher Lage im Schwerkraftfeld mauern und betonieren und ihn auf die Spitze stellen; es gibt keine tragenden Wände, sondern ein Gerüst aus Stahlträgern entlang der Kanten. Wie viele Träger sitzen auf dem Fuß auf, und in welchen Richtungen verlaufen sie, damit die quadratischen Seitenflächen dazu passen? Wie ist der Fuß günstigerweise geformt, damit der Würfel auf ihn paßt? Inwiefern paßt auch diese Würfellage gut ins Schwerkraftfeld? Spätestens hier wird die Idee der Symmetrie bedeutungsvoll: Bestimmte Lagen des Würfels passen genau auf die gegebene, wenn man ihn in Gedanken um die lotrechte Achse dreht. Schließlich werden noch waagerechte Fußböden eingepaßt, und es entsteht in der Mitte das bekannte regelmäßige Sechseck. Weitere Aktivitäten: Bestimmung von Höhe, Wohnfläche und weiteren Maßen (Idee des Messens, der Abbildung (als funktionaler Zusammenhang)), ebene Darstellungen (Idee der Repräsentation, des Algorithmus).

Paradebeispiele für die Idee des Passens sind der quaderförmige Ziegelstein und die Bienenwabe als halbes Rautenzwölfflach, zwei der wenigen Formen, mit denen der Raum parkettiert werden kann, bei denen auch wesentlich die Idee der Optimierung und die der Symmetrie eingehen, die oft in einem engen Zusammenhang stehen.

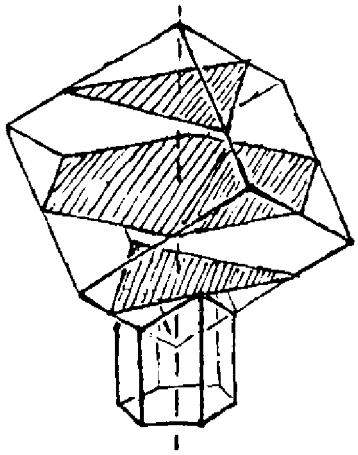

Abb.1

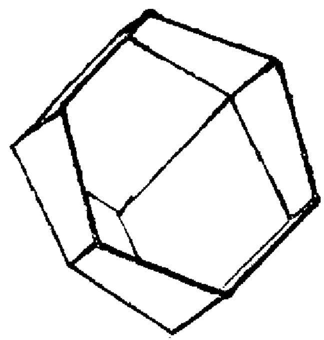

Abb.2

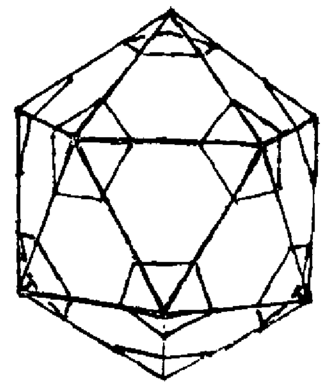

Abb.3

In einem vortheoretischen Kontext ist Optimierung komplexer als lediglich die Suche nach dem Minimum einer Zielfunktion. Z.B. die Polyederstruktur des Lederfußballs: Ein gutes Kriterium scheint das Volumenverhältnis von Polyeder und Umkugel zu sein. Aber vor dessen Anwendung steht das Problem, welche Formen überhaupt in Frage kommen. Haben die brauchbaren alle eine Umkugel? Kann man nicht theoretisch durch Hinzunahme von immer mehr Ecken das Verhältnis beliebig verbessern? Es kommen Kriterien der Haltbarkeit, der Ästhetik und der Herstellökonomie hinzu. Kürzlich hat jemand ausgerechnet, daß das Volumenverhältnis beim abgestumpften Ikosaeder günstiger ist, wenn die Fünfecke etwas größer gemacht werden. Diese Kenntnis wird kein Hersteller in der Praxis umsetzen, weil die Verbesserung minimal ist, aber das Ausschneiden der Sechsecke mehr Abfall ergäbe.

Eine wichtige Form des Passens ist das Messen als Einpassen von Exemplaren eines Einheitsobjekts in ein anderes Objekt.

Schließlich zum Passen als Beweglichkeit im Lager, ein wichtiges Funktionsprinzip bei geometrischen Sachverhalten aller Art, in dem die Idee der Homogenität (Ununterscheidbarkeit ihrer Stellen) von Flächen und Linien wirksam wird. Das Flughafengepäckband funktioniert, indem sich bei einer Krümmungsänderung der Laufrichtung die Glieder entlang dem kreisförmigen Rand ihrer Nachfolger abdrehen. Beim Schraubenmutternquerschnitt ist die Kreisform aufgelöst, und es gibt gerade Stücke, damit der Schlüssel aufgeschoben und angesetzt werden kann, und diese Stücke sind symmetrisch angeordnet. Das Fahrradkettenblatt wiederum hat günstigerweise die inhomogene Ellipsenform, weil auch die Trittkraft nicht gleichmäßig ist. Dagegen müssen die Gewinde bei Schraube und Mutter ausgesprochen gute (homogene) Schraubenlinien sein (zu dem ganzen Komplex vgl. Bender/Schreiber 1980).

Wie solche Beispiele unterrichtlich weiter auszuwerten sind, liegt auf der Hand: Quantitative Berechnungen, zeichnerische Darstellungen, Symmetriebetrachtungen, Vergleiche mit Alternativen, usw.

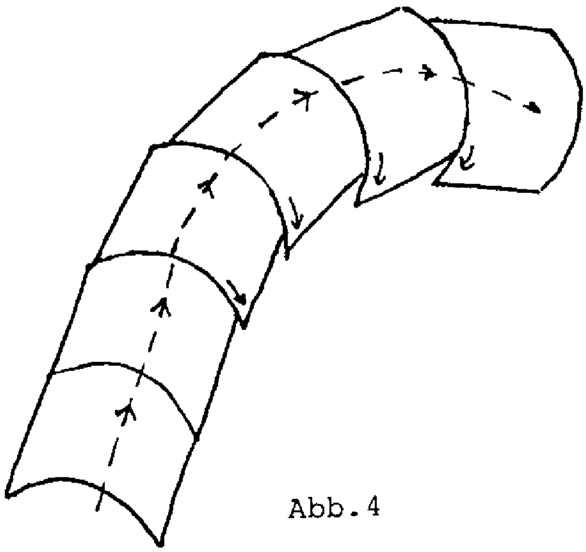

Abb.4

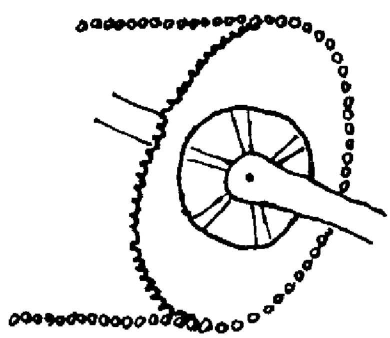

Abb.5

2. Zum Veranschaulichungs- und heuristischen Wesenszug der Geometrie: Hier ist die Idee der Repräsentation wichtig.

Zum Beispiel der Vergleich des Verfahrens von d'Hondt mit dem von Hare-Niemeyer (H-N) zur Verteilung der Sitze eines Parlaments o.ä. an die Parteien (H-N: Die Sitze werden proportional zu den Stimmen verteilt, die nichtganzen Sitze der Parteien der Größe nach sortiert und auf 1 bzw. 0 gerundet, so daß dann das Parlament komplett ist): Bei drei Parteien werden die möglichen Stimmenverteilungen als baryzentrische Koordinaten in einem gleichseitigen Dreieck abgetragen, die möglichen Sitzverteilungen markiert und für jede Stimmenverteilung ausgerechnet, zu welcher Sitzverteilung sie führt. Während bei d'Hondt offenbar die großen Parteien bevorzugt werden, ergibt H-N das symmetrische Wabenmuster, läßt jedoch das Paradoxon zu, daß eine Partei in einem größeren Ausschuß einen Sitz weniger erhalten kann als in einem kleineren (bei gleicher Stimmenverteilung!). Der Abbildungsbegriff ist hier problematisch, weil die Zuordnung der Stimmenverteilungen zu den Sitzverteilungen auf den Wabenrändern nicht eindeutig ist und in der Praxis etwa durch das Los bestimmt wird. Nimmt man eine vierte Partei hinzu, so ist das ganze Gebilde ein regelmäßiges Tetraeder, und bei H-N sind die Waben genau die bekannten Rautenzwölfflache, eine Form, die auch als Strukturelement bei Molekülaufbauten wichtig ist.

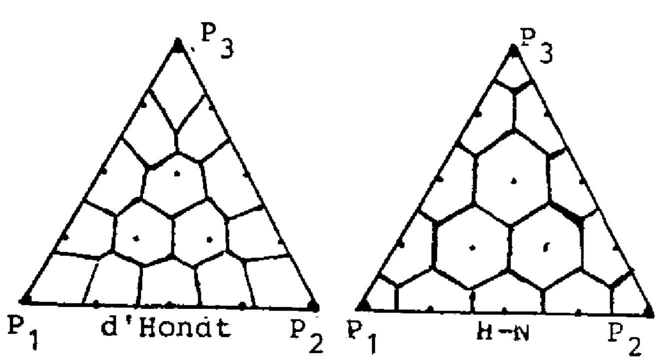

Abb.6

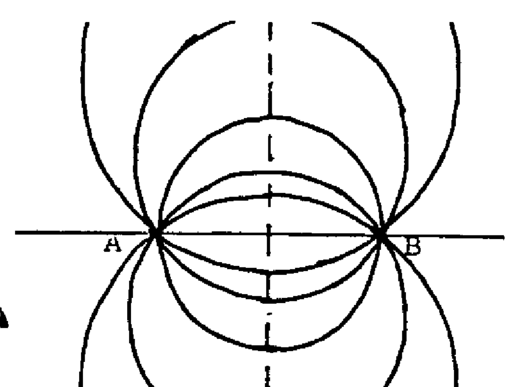

Abb.7

3. Zum theoretischen Wesenszug der Geometrie: Hier steht nun die Idee der Abbildung im Vordergrund, im Sinne der Meraner Reformvorschläge auf der Grundlage funktionalen Denkens (nicht: Abbildungsgeometrie): Welche Werte erhält man nacheinander im Wertebereich, wenn man den Definitionsbereich in bestimmter Weise durchläuft?

Umfangswinkelsatz: $A \neq B$ fest; jedem X ($A \neq X \neq B$) wird das Winkelmaß $\angle(AXB)$ zugeordnet. Veranschaulichung dieser Abbildung durch Linien gleichen Winkelmaßes: Kreisbögen; zwei eigentliche Unstetigkeitsstellen A,B; Sonderlage für $w=90^\circ$. Pythagorassatz: $A \neq B$ fest; jedem X wird $l^2(AB)-l^2(AX)-l^2(BX)$ zugeordnet. In X ergibt sich ein stumpfer, rechter, spitzer Winkel, je nach dem, ob die Abbildung in X positiv, nullwertig oder negativ ist (X nicht auf der Gerade durch A und B). Mittelsenkrechte: $A \neq B$ fest; jedem X wird $l(AX)-l(BX)$ zugeordnet. Die Mittelsenkrechte ist die Menge der Nullstellen. Den ganzen Sachverhalt braucht man zum Nachweis, daß sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.

Mögliche Leistungen solcher funktionaler Betrachtungen:
- Es werden Vermutungen bzw. Plausibilitätsüberlegungen nahegelegt (im Beispiel zuerst der Pythagoras- später der Kosinussatz);
- Ebene und Raum sind für funktionales Denken besser geeignet als $\mathbb{R}$: Wege der Invarianz, der raschesten Änderung usw.;
- man erhält Überblicke; die Sätze sind Sonderfälle bzw. -lagen;
- Umkehrungen werden gleich mitgeliefert.

Zur Idee der Abbildung gehört auch die Variation der Funktionsbeziehung: z.B. das Umfangswinkelmaß als Funktion des Kreisradius bei fester Sehne, oder als Funktion der Sehnenlänge bei festem Kreis.

Weitere Beispiele für funktionale Betrachtungen:
- Torricellipunkt als Punkt mit minimaler Abstandssumme zu einer endlichen Punktmenge. Jedem Punkt wird dabei die Abstandssumme bezüglich der gegebenen Punktmenge zugeordnet; jeder endlichen Punktmenge wird die Menge ihrer Torricellipunkte zugeordnet;
- Inhaltsfunktionen;
- Kurven, Bewegungen als Funktion der Zeit;
- Umkreismittelpunkt als Funktion von Punktetripeln.

Zur Idee der Kontinuität (hervorgehoben z.B. von Thom (1970/1974)): Sie zeigt sich ursprünglich nicht in der Betrachtung von Folgen endlicher Distanzen, sondern im kontinuierlichen Wandern im Definitionsbereich und der entsprechenden Wanderung im Wertebereich. In der Geometrie können nicht nur kontinuierliche Abfolgen von Punkten, sondern auch solche von Figuren betrachtet werden. Damit die Punktmengenvorstellung erhalten bleiben kann, dürfen sich dabei keine Punkte oder Figuren bewegen, sondern Bleistiftspitzen und sonstige starre Körper markieren solche in einer (kontinuierlichen) Abfolge. Dies ist genau die inhaltliche Grundlage für die Fassung von Bewegungen als Abbildungen.

Kontinuität ist auch nötig, um wiklich alle Sonderlagen zu finden; z.B. gibt es in der Abfolge regelmäßig abgestumpfter Würfel mit dem Würfel als Anfangs- und dem einbeschriebenen Oktaeder als Endglied (Kühl 1976) drei archimedische Zwischenkörper.

Zur Kontinuität gehören Störungen, nämlich Unstetigkeitsstellen, wesentlich dazu: Läuft man (beim Umfangswinkelsatz) ganz um den Kreis, so gibt es zwei Punkte, an denen das sonst konstante Winkelmaß springt. Oder: Bei einer kontinuierlichen Abfolge von Punktetripeln gibt es Lagen, bei denen die Bahn der Umkreismittelpunkte im Unendlichen verschwindet. Und: Zwischen unterschiedlich orientierten Figuren ist kein kontinuierlicher dimensionserhaltender Übergang möglich.

Hierbei bedeutet die Idee der Invarianz, etwas anders als der klassische mathematische Begriff, aber vereinbar mit diesem: Konstanz einer Funktion auf Teilen ihres Definitionsbereichs, etwa: die Flächeninhaltsfunktion, wenn man ihren Definitionsbereich (nicht notwendig kontinuierlich) mit Scherungen durchstreift. Ich erinnere an "die Wanderung einer Dreiecksecke" von Winzen (1972) und an zahlreiche ähnliche Betrachtungen aus der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts.

Schiebungen usw. bis Achsenaffinitäten sind kontinuierliche einparametrige Figuren-Abfolgen, bei denen die Bedeutung von "Anfangs-" und "Endlage" auch andere Konstruktionen nahelegen. Insbesondere beim Auftreten von Symmetrie (Invarianz von Punktmengen bei bestimmten Bewegungen) kommen dann auch gruppen und Permutationen ins Spiel, zunächst für überschaubare Objekte wie einen Würfel, später für den ganzen Raum.

Zum Schluß noch die Idee des Algorithmus: Von der Herstellvorschrift für die Tetraedermilchtüte (nach Müller/Wittmann 1977, S. 128), mit der man deren seltsame Form und den seltsamen Verlauf der Schweißnähte erklären kann, über die Konstruktionsvorschriften der Darstellenden oder der ebenen Geometrie bis hin zur Erstellung von Systematiken (alle Quadratfünflinge, alle Würfelvierlinge, das Haus der Vierecke, alle archimedischen Parkette, alle archimedischen Körper, alle Lagen dreier Ebenen, alle Sonderfälle beim 5. "Kongruenz"satz, alle Abbildungstypen in der Affinen Gruppe (oder gar ein Satzgefüge)). Mit dem Suchen, Finden und Ordnen von einigermaßen handfesten Objekten (anstelle von Aussagen) könnte manche Schwierigkeit aus der Didaktik des Beweisens gemildert werden (zur Problematik vgl. Winter 1983)

Fast alle der angesprochenen (und auch die wenigen nicht genannten) zentralen Ideen der Geometrie haben den Vorzug, daß sie über die Mittelstufengeometrie hinaus tragen und beim späteren Mathematiktreiben immer wieder auftauchen. Zunächst einmal sollen sie aber dazu dienen, den GU der SI wiederzubeleben bzw. wieder zu beleben.

Literatur

Andelfinger, B.: Schulmathematik - was ist das und wie macht man das? In: 30. Gemener Kongreß, Bottrop 1978, S.231-246

Bender, P.: Umwelterschließung im Geometrieunterricht durch operative Begriffsbildung. In: MU 24/5, 25-87 (1978)

Bender, P.: Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. In: ZDM 14, 9-24 (1982)

Bender, P. u. A. Schreiber: The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching. In: Ed.Stud.Math. 11, 59-90 (1980)

Brauner, H. u. W. Kickinger: Gebaute Geometrie. In: MU 28/2, 5-28 (1982)

Damerow, P.: Wieviel Mathematik braucht ein Hauptschüler? In: Neue Sammlung 20, 513-529 (1980)

Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 2. Stuttgart 1974.

Freudenthal, H.: Didaktische Phänomenologie mathematischer Grundbegriffe. In: MU 23/3, 46-73 (1977)

Führer, L.: Didaktik minus Methodik gleich Stoff? oder Das Gegenbeispiel Mittelstufengeometrie. In: Mathematiklehrer 1982/1, 27-29 (1982)

Halmos, P.R.: Does Mathematics have Elements? In: The Mathematical Intelligencer 3, 147-153 (1981)

Hart, K.M.(u.a.): Children's Understanding of Mathematics: 11-16. London 1981

Holland, G.: Das Beweisen geometrischer Sätze in der Sekundarstufe I unter verschiedenen Aspekten von Geometrie. In: DdM 7. 104-119 (1979)

Kirsch, A.: Zur Mathematik-Ausbildung der zukünftigen Lehrer - im Hinblick auf die spätere Praxis des Geometrieunterrichts In: JMD 1, 229-256 (1980)

Kratz, J.: Didaktische Überlegungen zum Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. In: DdM 2, 12-24 (1974)

Kühl, J.: Einfache geometrische Tätigkeiten entwickelt am Abbildungsbegriff. Lütjensee 1976

Lörcher, G.A.: Geometrie in der beruflichen Ausbildung. Unveröffentlichtes Manuskript (DIFF Freiburg) 1977

Meyer, K.: Algebra und Geometrie. Frankfurt 1980

Müller, G. u. E. Wittmann: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig 1977

Müller, K.P.: Raumgeometrie in der Schule und für die Schule. In: math.did. 4, 155-168 (1981)

Schoemaker, G. u.a.: Neuer Geometrie-Unterricht auf der Sekundarstufe. In: Steiner, H.G. u. B. Winkelmann (Hrsg.): Fragen des Geometrieunterrichts. Köln 1981, S. 99-155

Schreiber, A.: Die operative Genese der Geometrie nach Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht. In: MU 24/5, 7-24 (1978)

Schreiber, A.: Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. Erscheint in: math.did. 5 (1983)

Schwartze, H.: Zur Frage der Einsichtgewinnung bei der propädeutischen Behandlung von Kongruenzabbildungen. In: JMD 4, 39-58 (1983)

Stowasser, R.: Problemorientierte Zugänge zur Geometrie. In: Schriftenreihe des IDM 3/1974, 65-129 (1974)

Thom, R.: "Moderne" Mathematik: Ein erzieherischer und philosophischer Irrtum? 1970, dt. Übers. in: Otte, M. (Hrsg.): Mathematiker über die Mathematik. Berlin 1974, S.371-401

Vollrath, H.J.: Geometrie im Mathematikunterricht - eine Analyse neuerer Entwicklungen. In Schriftenreihe des IDM 3/1974, 1-22 (1974)

Vollrath, H. J.: Rettet die Ideen! In: MNU 31, 449-455 (1978)

Whitehead, A.N.: The Mathematical Curriculum. Vortrag London 1913. Dt. Übers.: Neue Sammlung 2, 257-266 (1962)

Winter, H.: Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. In: JMD 4, 59-95 (1983)

Winzen, W.: Die Wanderung einer Dreiecksecke. In: Archimedes 24, 39-41 (1972)

Zeitler, H.: Radlinien in Schule, Technik und Wissenschaft. In: MU 26/4, 81-104 (1980)