

# Warum sagen wir, der Spiegel vertausche „rechts“ und „links“, auch wenn wir wissen, daß er „vorne“ und „hinten“ vertauscht?

von Peter Bender

Wie ein ebener Spiegel „vorne“ und „hinten“ vertauscht, kann man sich mit einer kinetischen (nicht realisierbaren) Vorstellung verdeutlichen: Der zu spiegelnde Gegenstand (Halbraum; Raum) wird mit einer stetigen Stauchung auf die Spiegelebene projiziert. Das heißt, jeder Punkt wandert auf

seinem Lot zur Spiegelebene und hat dabei eine solche Geschwindigkeit, daß alle Punkte nach einer Zeiteinheit gleichzeitig in der Spiegelebene ankommen. Dort läßt man sie nicht anhalten, sondern sie mit konstanter (orientierter) Geschwindigkeit eine zweite Zeiteinheit lang weiter wandern, bis sie alle

wieder denselben Abstand von der Spiegelebene wie am Anfang haben, jedoch nun auf der (jeweils) anderen Seite.

Doch selbst, wer sich das Phänomen der Spiegelung so klarmacht, wird immer noch eine „Links-rechts“-Vertauschung erkennen und auch von einer solchen reden. Woran liegt das?

Ein Individuum, das über Orientierung im Raum o. ä. überhaupt nachdenkt, hat zunächst einmal eine klare Auffassung darüber, wo in seinem jeweiligen zweidimensionalen Gesichtsfeld oben und wo unten ist, nämlich ausgerichtet an der Landschaft, Gebäuden, Pflanzenwuchs oder sonstigen Phänomenen im Hintergrund, von denen der Schwerkraftvektor sichtbar wird, oder aber an der Anatomie des eigenen Kopfes. Sodann wird das Gesichtsfeld in eine linke und eine rechte Hälfte eingeteilt, die durch eine lotrechte Gerade getrennt sind.

Um in einem Spiegel sein eigenes Spiegelbild zu sehen, muß man senkrecht auf diesen schauen. Die Einteilung des Gesichtsfeldes überträgt sich dann von selbst auf die Spiegelfläche. Geht es gar nicht um einen selbst, sondern um einen (evtl. nur gezeichneten oder vorgestellten) Gegenstand vor einem (gezeichneten oder vorgestellten) Spiegel, so denkt man sich die eigene Person an die Stelle dieses Gegenstands, senkrecht auf den Spiegel blickend. Dann wendet einem das Spiegelbild die Vorderseite (zumindest des Gesichts) zu, und – das ist das Entscheidende – man unterstellt unwillkürlich, daß das Spiegelbild Ergebnis einer Translation, verbunden mit einer Rotation um insgesamt  $180^\circ$  um die nicht ortsfeste lotrechte Achse, bzw. bei Betrachtung des ganzen Halbraums vor dem Spiegel, daß es das Ergebnis einer Rotation um  $180^\circ$  um die lotrechte Mittellachse in der Spiegelfläche ist.

Nach aller physikalischen Erfahrung (die sich auch im mathematischen Modell des euklidischen Raums bestätigt) gehört zu der Bewegung eines starren orthogonalen Dreibeins, bei der in einer Richtung die Orientierung erhalten bleibt und in einer zweiten Richtung sie verkehrt wird, die Verkehrung der Orientierung in der dritten Richtung. Das heißt, da im Spiegelbild „oben“ erhalten geblieben und „vorne“ entgegengesetzt ist, muß auch die rechte Seite dort sein, wo beim Original die linke ist. Offenbar ist dies aber nicht der Fall, die Spiegelung verkehrt ja nur eine Orientierung. Da einem die o. a. Vorstellung einer Rotation nicht bewußt ist, erkennt man nicht das Fehlen der Vertauschung von „rechts“ und „links“, sondern meint, der Spiegel würde eine (zusätzliche) solche Vertauschung leisten.

Abbildungsgeometrisch läßt sich die Spiegelung o an der Ebene des Spiegels auch schreiben als  $(\tau\sigma)\sigma\sigma$ , wobei  $\tau$  die Spiegelung an derjenigen Ebene ist, die senkrecht durch die lotrechte Achse im Spiegel geht. Es ist also  $\sigma=(\tau\sigma)\sigma=(\tau\sigma\sigma)$ , und  $\tau$  ist gerade die o. a. Drehung um  $180^\circ$  und  $\tau$  die „Links-rechts“-Vertauschung.

Die (idealisiert zu schende) Symmetrie des menschlichen Körpers ist übrigens nicht wesentlich für die Unterstellung der „Links-rechts“-Vertauschung, sondern für die Unterstellung der Rotation um die lotrechte Achse. Gabe es auf der Erde eine

## Warum vertauscht der Spiegel (angeblich) rechts und links, aber nicht oben und unten?

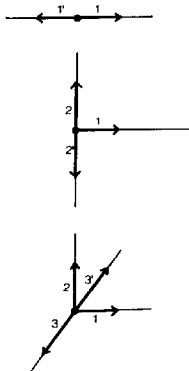
Das Spiegelbild eines Gegenstandes ist zwar ein maßtreues Abbild des Originals, aber es ist „spiegelverkehrt“. Dies gibt man oft in der Form wieder, der Spiegel vertausche „rechts“ und „links“. Offenbar vertauscht der Spiegel „oben“ und „unten“ nicht. Nun stellen aber für den vor dem Spiegel stehenden Betrachter „rechts-links“ und „oben-unten“ beide Male Achsen dar, die zum Spiegel parallel und daher überhaupt nicht voneinander ausgezeichnet sind. Warum sollte daher für „oben-unten“ nicht recht sein, was für „rechts-links“ billig ist?

Für eine Aufklärung dieser Paradoxie muß man als erstes in Betracht ziehen, daß es sich bei „oben-unten“, „rechts-links“, „vorne-hinten“ um Polaritäten handelt, die relativ zu sehr unterschiedlichen Bezugssystemen gebraucht werden (Freudenthal 1983, S. 284 ff.). In bezug zum aufrecht stehenden menschlichen Körper ist „oben“ durch unseren Kopf, „vorne“ durch unseren Bauch eindeutig festgelegt. Dagegen ist die Definition von „rechts“ und „links“ komplizierter. Eine Möglichkeit besteht darin, diejenige Hand „rechts“ zu nennen, die nach Süden weist, wenn das Gesicht nach Osten (Orient) blickt, oder äquivalent die Hand, die nach Norden weist, wenn das Gesicht nach Westen blickt. Die Himmelsrichtungen sind durch den Lauf der Sonne ja eindeutig bestimmt.

Stellen wir uns nun vor einen Spiegel, so daß das Gesicht nach Osten schaut, und strecken die rechte Hand nach Süden, die linke Hand nach vorne. Dann weist der Kopf unseres Spiegelbilds ebenfalls nach oben, das Spiegelbild unserer rechten Hand ebenfalls nach Süden, also nach rechts. Der Spiegel vertauscht somit weder „oben-unten“ noch „rechts-links“. („Süden-Norden“). Das Spiegelbild unserer nach vorne, nach Osten weisenden linken Hand weist jedoch nach Westen: Der Spiegel kehrt die Richtung eines senkrecht auf ihn zuweisenden Pfeils um. Vom Bezugssystem unseres Spiegelbildes aus gesehen, das nach Westen blickt, ist somit das Spiegelbild unserer linken Hand die rechte Hand.

Um das Phänomen noch tiefer zu analysieren, gehen wir zweitens auf die Orientierung des Raumes ein. Auf einer festen Geraden gibt es genau zwei verschiedene Orientierungen, die man durch entgegengesetzte gleichlange Pfeile 1,1' darstellen kann (Bild). Es ist nicht möglich, Pfeil 1, ohne die Gerade zu verlassen, so zu bewegen, daß er auf 1' zu liegen kommt (Spitze auf Spitze, Pfeilende auf Pfeilende). Dies wird erst möglich, wenn wir von der eindimensionalen Geraden in die zweidimensionale Ebene ausbrechen. Dann läßt sich der erste Pfeil durch

eine Drehung stetig in den zweiten überführen. Um in der Ebene eine Orientierung einzuführen, setzen wir an Pfeil 1 senkrecht dazu einen gleichlangen Pfeil an. Wir haben dafür genau zwei Möglichkeiten. Das Zweibein 1,2 ist als Ganzes nicht stetig in 1,2' überführbar. Die Zweibeine 1,2 und 1,2' kennzeichnen daher wieder zwei verschiedene Orientierungen („gegen den Uhrzeiger“, „mit dem Uhrzeiger“). Gehen wir in den dreidimensionalen Raum, dann wird es möglich, das Zweibein 1,2 durch eine räumliche Drehung um Pfeil 1 in das Paar 1,2' überzuführen. Die Pfeile 1,2 lassen sich analog zu der Situation in der Ebene auf genau zwei Weisen durch einen dritten Pfeil, der auf 1 und 2 senkrecht steht, zu einem Dreibein ergänzen. 1,2,3 bzw. 1,2,3' kann man sich durch die entsprechend abgespreizten Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten bzw. linken Hand veranschaulichen. Wiederum kann das erste Dreibein nicht durch eine stetige Bewegung in das zweite überführt werden, so daß auch im Raum zwei entgegengesetzte Orientierungen (rechtshändig, linkshändig) möglich sind.



Die Wirkung des Spiegels auf die Orientierung kann man nun einfach beschreiben: Bei einer Spiegelung an einer Ebene werden rechtshändige Dreibeine in linkshändige überführt, d. h. die Orientierung wird umgekehrt. Ebenso wird bei der Spiegelung an einer Achse die Orientierung in der Ebene umgekehrt. Bei einer doppelten Spiegelung ist das Spiegelbild genau so orientiert wie das Original, bei einer dreifachen Spiegelung wieder umgekehrt usw.

(Anschauung mit 3)

ähnlich funktionale Unterscheidung zwischen „rechts“ und „links“, wie es sie der Schwerkraft zwischen „oben“ und „unten“ und im Gefolge von Beweglichkeit und optischer Wahrnehmung zwischen „vorn“ und „hinten“ gibt, und würde sich diese ähnlich drastisch in einer völlig unsymmetrischen Formgebung in der belebten und unbelebten Natur und in der Technik auswirken, dann würden wir beim Anblick eines Spiegelbilds keine Drehung unterstellen und das Phänomen der Spiegelung würde vielleicht nicht irrig erklärt.

Prinzipiell könne man sich auch suggerieren, daß der Spiegel „oben“ und „unten“ vertauscht: (Das ist sowieso nur dann etwas anderes als die „Links-rechts“-Vertauschung, wenn die beiden Richtungen nicht gleichwertig sind, wie das allerdings in unserer Realität, auch noch in Zeichnungen von dieser, der Fall ist, wo die „Oben-unten“-Richtung dominiert und eine i. a. stabile Orientierung hat. Daran ändert sich auch nichts, wenn man sich auf den Kopf stellt: Man weiß, daß in der Umwelt orientierungsmäßig alles beim alten bleibt; und so-

gar in Raumschiffen gibt es eine stabile funktionale Unterscheidung zwischen „oben“ und „unten“ und zwar, unabhängig von der Wirkung der Schwerkraft beim Start, wegen der menschlichen Anatomie.)

Jedenfalls müßte man sich nur eine Drehung um 180° um eine waagerechte Achse in der Spiegelebene vorstellen. Das wären „links“ und „rechts“ gleich an den richtigen Stellen, während „oben“ und „unten“ im Spiegelbild gerade da zu finden wären, wo man ihr jeweiliges Gegenüber (nach der Drehung) erwarten würde. Also vertauscht der Spiegel „oben“ und „unten“. Mathematisch ist diese Auffassung genauso angemessen wie die übliche; in der Lebenswelt ist sie jedoch abwegig.

Sogar die Vorstellung von der „Vorne-hinten“-Vertauschung kann man erzwingen, indem man eine Translation eines Originals zu seinem Spiegelbild unterstellt: Von diesem müßte man die Rückseite sehen, sieht aber die Vorderseite, also vertauscht der Spiegel „vorne“ und „hinten“. Für die globale Betrachtungsweise bedarf es der anfänglichen Translation gar nicht: Da hat man direkt die „Vorne-hin-

ten“-Vertauschung, wie sie eingangs als kontinuierliche Änderung beschrieben wurde (wie man übrigens auch, mit geeigneten Fixpunktebenen, die bei den anderen Vertauschungen darstellen kann). Aber auch auf diese Vorstellung kommt man nicht ohne Anstrengung, sie ist der Lebenswelt ebenfalls sehr fremd: Der Anblick des Spiegelbilds (mit seiner Vorderseite) läßt praktisch nichts anderes zu als die oben erklärte Vorstellung von einer Rotation.

Die ausschließliche Rede von der „Links-rechts“-Vertauschung ist aber für eine mehr mathematische Behandlung des Spiegelungs- und der Orientierungsbegriffs durchaus brauchbar, besonders im Hinblick auf Dreieine ohne Auszeichnung von Richtungen in nicht-kanonischer Lage.

Mit der vorgelegten Analyse können alle möglichen Varianten einheitlich erklärt werden, z. B. wie so bei der Spiegelung einer Landschaft an einer stillen Wasseroberfläche doch „oben“ und „unten“ vertauscht werden.

Peter Bender  
Gesamthochschule Kassel

## Leitgedanken zu einem Grundkurs Informatik in der Realschule von Nordrhein-Westfalen

von Dieter Lohmann

Der nachfolgende Beitrag erläutert die Position einer Arbeitsgruppe von Realschullehrern aus allen Regierungsbezirken in Nordrhein-Westfalen, die ihre Überlegungen zu einem Grundkurs Informatik in der Sekundarstufe I am 30. November 1984 formuliert hat.

Die heutige Schülergeneration wird zukünftig sowohl im Beruf als auch im privaten Bereich in immer stärkerem Maße Informationssysteme und Computer als Werkzeuge einsetzen. Jedem Schüler der Sekundarstufe I sind daher – als Teil seiner Allgemeinbildung – grundlegendes Verständnis und wesentliche Kenntnisse im Umgang und der Anwendung solcher Medien zu vermitteln.

Ohne auf organisatorische Fragen wie Stundentafel und dergl. einzugehen, stellen wir uns vor, daß dies in einem zweistündigen Halbjahreskurs im Jahrgang 8 erfolgen soll.

Dadurch wird der weitere Einsatz des Rechners in verschiedenen Fächern vorbereitet. Schwerpunkte in der Differenzierung sind danach ebenso möglich wie Fortführungen in Arbeitsgemeinschaften, wo das erworbene Grundwissen vertieft und angewendet wird.

Die genannten Vorgaben bestimmen Ausgangspunkt, Ziel und methodisches Vorgehen im dargestellten Kurs.

Es ist wichtig, daß von Anfang an in Praktikumsform an den Rechnern gearbeitet wird. Der Unterricht sollte in Gruppen mit bis zu 3 Schülern erfolgen bei einer Gesamtstärke von maximal 18. Sinnvoll erscheint die Durchführung von Doppelstunden; die dafür vorgeschlagene Zahl ist bei jedem Abschnitt angegeben.

### I. Umgang mit dem System (3–4 Doppelstunden)

Das erste Kennenlernen der Hardware und ihrer grundlegenden Funktionen kann durch Schreiben, Editieren, Speichern und Drucken von Texten geschehen. Gerade in der angesprochenen Altersstufe erweist sich als Alternative die Verwendung von Grafik als sehr effektiv.

Die Arbeit der Schüler muß durch eine benutzerfreundliche Software unterstützt werden.

### II. Umgang mit Anwendungsprogrammen (4–5 Doppelstunden)

Im weiteren sollen die Rechner in exemplarischer Arbeit mit leistungsfähiger, und an Anwendungen orientierter Software benutzt werden. Die Schüler arbeiten sich selbstständig anhand von Anweisungen (Handbuch) oder Bildschirmmenues in die Benutzung eines fertigen Programms (z. B. Datenteilprogramm) ein. Dabei gewinnen sie ein Grundverständnis für den strukturellen Aufbau und die Merkmale von Programmsystemen.

### III. Benutzung und Erstellen von Programmteilen (5–6 Doppelstunden)

In dieser Phase werden zunächst fertige Bausteine erprobt und angewendet.

Die Erstellung von Programmmodulen aus einfachen Grundbefehlen unter Verwendung von Parametern und deren Zusammensetzung zu größeren Bausteinen ist in exemplarischer Form einzuüben. Einfache Kontrollstrukturen und Wiederholungen werden dabei einbezogen.

Hierfür ist ein interaktives Programmsystem zu

verwenden, das den Schülern keine Eingangs Voraussetzungen abverlangt, aber wesentliche Kenntnisse von höheren Programmiersprachen vermittelt kann.

### IV. Abschließende Betrachtungen (3–4 Doppelstunden)

Als Abrundung sollen den Schülern an den zu bearbeitenden Beispielen weitere Einblicke in Anwendungsbereiche der Datenverarbeitung vermittelt werden.

Es sind Möglichkeiten, Grenzen und Gefahren aufzuzeigen und allgemeine gesellschaftliche Auswirkungen anzusprechen. Diesem Abschnitt kommt auch das wichtige Moment der Berufswahlvorbereitung zu.

### Anmerkungen

Um dieses Konzept eines Grundkurses Informatik einem weiteren Anwenderkreis nutzbar zu machen, wird ein Musterlehrgang mit konkreten Beispielen und möglichen Alternativen erstellt. So könnten z. B. aus methodischen und didaktischen Gründen die Abschnitte II. und III. vertauscht werden, um sie den jeweiligen Gegebenheiten anzupassen.

Der gesamte Kurs ist als eine thematische Einheit zu konzipieren, die den Zusammenhang der einzelnen Abschnitte deutlich werden läßt.

Der Arbeitsgruppe gehören an:  
H. Barsuhn, D. Dick, P. Erven, W. Frase, H. Gude, H. Hagenberg, F. Lemaire, D. Lohmann, K. Port, Dr. H. Rudolf, J. Schlang, D. Schruff, H. Stamm, M. Wielen.