

PETER BENDER

## Zum mathematischen Alltagswissen unserer (deutschen und ausländischen) Kinder am Ende der Grundschulzeit

4

Die Leistungen unserer Kinder in der Sachmathematik (Sachrechnen) am Ende der Grundschulzeit sind im großen und ganzen durchaus ausreichend; es gibt jedoch einen bedeutenden Anteil von Ausfällen, der durch entsprechende Aufgabenstellungen beliebig erhöht werden kann (siehe Bender 1980). Eine wesentliche Ursache für diese Schwäche ist die Dominanz der Arithmetik in der Sachmathematik, die durch viele gut gemeinte methodische Vorschläge eher verstärkt wird. Gegen diese Dominanz müssen sich die Bemühungen richten, insbesondere durch die Aufnahme nicht-arithmetischer, nämlich z. B. geometrischer, stochastischer, kombinatorischer Inhalte und vor allem durch ein echtes Interesse an der Lösung der Sachprobleme, also durch den Primat der Sache im Sachmathematik-Unterricht (siehe Bender 1984). Dafür ist das Alltagswissen und -verständnis der Schüler eine bedeutende Konstituente, die es zu nutzen und zu pflegen gilt.

Wie weit ist diese Konstituente am Ende der Grundschulzeit, infolge schulischer und außerschulischer Einflüsse, ausgeprägt? Dieser Frage sind H. Winter, Aachen, und ich 1983 mit einem Test mit etwa 1000 Schülern in 45 Schulklassen am Ende der Grundschulzeit (aus Süd-Westfalen, dem Rheinland und Rheinhessen) nachgegangen (s. Anlage Seiten 29–31).

### 1. Der Test

Neben den Kästchen für die Kreuze stehen die relativen Häufigkeiten in %, mit denen die jeweiligen Möglichkeiten gewählt wurden (links oben für alle 988 Schüler, rechts oben für alle 77 identifizierten Ausländer, links unten für alle 407 identifizierten Mädchen, rechts unten für alle 465 identifizierten Jungen). Ein Stern bedeutet, daß der Unterschied zwischen Mädchen und Jungen bzw. zwischen den 911 „deutschen“ und den 77 ausländischen Kindern auf dem 5%-., zwei Sterne, daß er sogar auf dem 1%-Niveau signifikant ist.

Außerdem sind die Antworten nachträglich von a bis f durchnumeriert und die „richtigen“ angekreuzt worden. Obwohl keine entsprechende Anweisung existierte, entschieden sich die meisten Schüler bei jeder Aufgabe für genau eine Alternative. Lediglich bei Aufgabe 6 gab es häufiger Mehrfachantworten, allerdings konzentriert auf wenige Schulklassen, aber auch bei den anderen Aufgaben ergibt die Summe der relativen Häufigkeiten der eindeutigen Antworten nie genau 100 %.

Der Test wurde als Klassenarbeit tituliert, um den Lehrern die Möglichkeit zu einer entsprechenden Nutzung zu geben und die Schüler (wo nötig) zur Ernsthaftigkeit anzuhalten. Es sollten auch allgemeine Vorurteile und insbesondere der (in der Tat völlig abwegige) Verdacht vermieden werden, daß es darum ginge, einzelne Schüler zu testen. In diesem Sinne haben in einigen Klassen die Schüler nur die Anfangsbuchstaben ihrer Namen angegeben, was den Nachteil mit sich gebracht hat, daß bei ihnen nicht das Geschlecht identifiziert werden konnte und wir bei der Auswertung weniger Jungen und Mädchen als Kinder insgesamt haben.

Die beteiligten Schulen sind gleichmäßig verteilt auf Gemeinden aller Größenordnungen. Über die genaue soziale Struktur ihrer Einzugsbereiche liegen jedoch i. a. keine Erkenntnisse vor, so daß diese Stichprobe nur mit einer gewissen Zurückhaltung als repräsentativ

für die Gesamtheit aller Viertklässler in der BRD bezeichnet werden kann, zumal wegen der erforderlichen Bereitschaft von Lehrern bzw. Schulleitern, mit ihren Klassen am Test teilzunehmen, vermutlich eine positive Auslese vorliegt.

77 der Schüler wurden (vom Namen her) als Ausländer (in der überwiegenden Mehrheit als Türken) identifiziert. Die Ergebnisse dieser Gruppe wurden noch einmal gesondert ausgewertet, jedoch nicht weiter ausdifferenziert, etwa nach Geschlecht oder Land, da hierfür die Zahlen zu klein sind.

Mit 11 Schülern aus zwei mir leicht zugänglichen Schulen fanden Einzelinterviews von 10 bis 40 Minuten Länge statt, teils direkt im Anschluß an den Test, teils wenige Tage danach. Ich habe Schüler mit guten (Thomas, Michael, Carsten, Jens), mit schwächeren (Michael, Gökce, Torsten) und mit mittleren Ergebnissen (Sigrid, Ercan, Yvonne, Sabine) ausgewählt. Auch wenn nicht von einer repräsentativen Unterstichprobe die Rede sein kann, geben diese Interviews doch zahlreiche Anhaltspunkte für die Interpretation der Testergebnisse. Die Schüler sollten erläutern, wie sie auf ihre Ergebnisse gekommen waren. Häufig wurden ihnen folgende Fragen gestellt: „Woher weißt du das?“, „Was hast du dir dabei gedacht?“, „Wie bist du vorgegangen?“ usw. Jedoch waren die Interviews nicht standardisiert. Auch habe ich manchmal bei Formulierungsschwierigkeiten nachgeholfen, um denjenigen Schülern, denen das Reden auf der Metaebene im Laufe des Gesprächs zusehends anstrengend wurde, bei aller gebotenen Zurückhaltung doch etwas Erleichterung zu verschaffen. Hinzu kam, daß bei den später Interviewten der Test zwischenzeitlich in der Klasse besprochen worden war. Die Interviews liegen auf Kassette vor.

## 2. Zur inhaltlichen Gestaltung

Es wird nicht *das* getestet, was landläufig unter „Sachrechenkompetenz“ verstanden wird, nämlich Fähigkeit zu: Mathematisierung eines Sachproblems zu einem mathematischen Modell, Lösung des mathematischen Problems mit einem im Unterricht gelernten Algorithmus, d. h. meistens Ausrechnen der Ergebniszahl; Rücktransfer der Lösung in die Sachsituation und Interpretation. Einige Lehrer haben es deshalb auch abgelehnt, in ihrer Klasse den Test durchzuführen; er war ihnen „mathematisch zu unergiebig“. In der Tat: Wenn überhaupt Zahlen auszurechnen sind, dann sind es Näherungszahlen, bzw. sie sind durch Zählen o. ä. zu ermitteln.

Welche Vorstellungen haben die Schüler von Größen bzw. Größenordnungen in der Lebenspraxis (Aufgabe 1a, 1b, 1c, 1d), speziell wenn es um Zeitpunkte und -spannen geht (Aufg. 6)? – Inwieweit sind sie imstande, Näherungskalkulationen auszuführen (Aufgabe 2, 3)? – Verstehen sie in einem Term die Lösung einer Sachaufgabe (Aufgabe 4)? – Inwieweit werden sie mit einer kombinatorischen Aufgabe spontan fertig (Aufgabe 5)? – Wie reagieren sie auf probabilistische Fragestellungen (Aufgabe 7, 8)? – Wie gut ist das räumliche Vorstellungsvermögen ausgebildet (Aufgabe 9, 10)?

Die hier angesprochenen Themen sind weit davon entfernt, systematisch abgehandelt zu werden. Besonders zum Wahrscheinlichkeitsbegriff, aber auch zur Raumvorstellung sind die Fragen so gewählt, daß ihre Beantwortung keinerlei unterrichtliche Behandlung voraussetzt, weil diese für die Mehrzahl der Schüler eben nicht stattfindet. Zugleich stellen diese Themen auch ein Programm dar: Im Sachmathematikunterricht der Grundschule sollen die Schüler Kenntnisse usw. erwerben (bzw. ausbauen), die sie in den Stand versetzen, die Fragen dieses Tests gut zu beantworten.

Die Qualität der Testergebnisse hängt natürlich von weiteren Faktoren ab: (Unerwünschte) gezielte inhaltliche Vorbereitung auf den Test durch den Lehrer, (unerwünschte) Zusammenarbeit der Schüler während des Tests, Motivation, Atmosphäre im Klassenraum usw., über deren Einflüsse sich nur spekulieren läßt (in manchen Klassen wurden manche Fragen in ungewöhnlicher Einmütigkeit beantwortet).

Hinzu kommen sprachliche Probleme, die grundsätzlich bei Schülerbefragungen entstehen und mehr oder weniger eng an die inhaltlichen Probleme gebunden sind. Die Trennung in inhaltliche und sprachliche Schwierigkeiten ist nicht immer einfach und fällt den Grundschülern selbst i. a. erst recht schwer; dennoch konnten die Interviews gewisse Aufschlüsse geben.

Schließlich sei noch kurz auf die besondere Problematik von Multiple-Choice-Tests hingewiesen. Mindestens bei Aufgabe 6 sind auch wir der Gefahr erlegen, die Frage so zu formulieren, daß ein Gutteil der Lösung aus der sprachlichen Entwirrung besteht. Darüber hinaus verführen grundsätzlich bei allen Aufgaben die vorgegebenen Antworten zum Raten (spontan oder nach längerem Überlegen), und manches unsinnige Ergebnis kommt in Betracht, weil es durch den Abdruck an Seriosität gewinnt, aber auch das „korrekte“ Ergebnis gewinnt an Wahrscheinlichkeit.

### 3. Interpretation der Ergebnisse

**Aufg. 1a-c:** Überraschenderweise schneiden die Schüler nicht bei der Briefmarken-Frage, sondern bei der nach dem Gewicht eines erwachsenen Mannes am besten ab. (In den Interviews rekurrieren die Schüler dabei durchweg auf das Gewicht ihres Vaters (70 kg oder 1 dz): Ercan, Carsten, Yvonne, Sabine, Torsten, Michael; Jens schließt von dem ihm bekannten Gewicht der Mutter, Manfred und Sigrid von ihrem eigenen auf das des Vaters; Thomas kennt eine Tabelle für das Idealgewicht.)

Der Umgang mit Maßeinheiten (und das gilt für alle Fragen, in denen Größen vorkommen) bereitet (in den Interviews) keine Schwierigkeiten, jedenfalls so lange es um qualitative Einordnungen geht. Gegen diese Einschätzung spricht auch nicht, daß 9% der Schüler das Normalgewicht mit 75 Pfund ansetzen und 27% aller Schüler die Höhe eines normalen Zimmers mit 1,60 m bzw. 5 m annehmen. Das sind nämlich immer noch die besten der „falschen“ Werte. Diese Antworten weisen aber auf mögliche Versäumnisse im Unterricht hin: Das nach DIN zwar verpönte, im Alltag jedoch noch sehr gebräuchliche „Pfund“ wird vielerorts nicht behandelt, praktische Meßübungen im Klassensaal und Anregungen für Messungen zu Hause fehlen, die Größen werden nicht genügend in Bezug zueinander gesetzt (ein 10-jähriges Kind wiegt vielleicht 75 Pfund, ein erwachsener Mann das Doppelte; ein Kind ist ungefähr 1,40 m groß, ein Erwachsener 1,75 m; eine Tür ist 2 m hoch, ein Zimmer 2,50).

Obwohl sich die Größe „1,60 m“ kaum von „150 cm“ unterscheidet, wird sie wesentlich häufiger als Zimmerhöhe genannt, vermutlich kommt sie wegen der Maßeinheit „m“ eher als solche in Betracht.

Bei der Briefmarken-Aufgabe berufen sich auch die Fehllöser auf häusliche Erfahrungen. Fast alle wissen, daß es ein Vielfaches von 10 Pf unterhalb von 1 DM sein muß (Torsten), und viele verfallen auf den ihnen geläufigsten Betrag von 50 Pf (z. B. Yvonne und Michael, die dann feststellen, daß dies wenigstens früher das Porto für einen Brief war).

**Aufgabe 1d:** Da der Zahlenraum in der Grundschule, jedenfalls im Mathematikunterricht, offiziell nicht über 1 Million erweitert wird, sind bei der Frage nach der Einwohnerzahl der Bundesrepublik die Ergebnisse naturgemäß schwächer. Eine diffuse Vorstellung von der Größe des Landes führt zum Ankreuzen von „1 Milliarde“ (Gökce, Torsten, Michael) oder auch der nächsten Zahlen. Einige Schüler haben kurz vorher im Sachunterricht die Bundesländer behandelt und wissen etwa, daß die Antwort nicht „16 Millionen“ lauten kann, weil schon Nordrhein-Westfalen 17 Millionen Einwohner hat (Manfred, Ercan) oder einige Städte allein zusammen schon vergleichsweise groß sind (Thomas, Carsten). Bei dieser Frage wird die Wirkung einer (fehlenden) schulischen Bearbeitung besonders deutlich.

Diese Erläuterung bzw. Begründung von Sachverhalten durch fernerliegende oder kompliziertere ist eine Folge der Fragetechnik („Woher weißt du, daß es 60 Millionen sind?“, „Könnten es auch 16 Millionen sein?“ u. ä.). Sabine etwa meint, 60 Millionen seien zu wenig, weil dann der Anteil der Arbeitslosen zu hoch sei, da sie vom Fernsehen weiß, daß deren Zahl über 2 Millionen beträgt.

**Aufgabe 2:** Hier ist neben der Antwort „200 Tage“ auch „150 Tage“ noch akzeptabel. Die meisten Schüler wissen, wenigstens ungefähr, wie viele Tage und auch wie viele Sonntage (Wochen) ein Jahr hat. Viele haben samstags, jedenfalls mehrmals im Monat Unterricht, und so kommen sie zunächst auf etwa 300 Schultage. 35% der Schüler versäumen offenbar, dann noch die Ferientage abzuziehen (Yvonne, Jens, Torsten).

Michael hat 500 „geschätzt“, obwohl er eigentlich „weiß“, daß ein Jahr 365 Tage hat. Die Strategie „Schätzen“ wendet er offenbar oft an. Im Interview „schätzt“ er, wieder ohne nachzudenken, spontan 150.

**Aufgabe 3:** Eine souveräne Überlegung sieht so aus: Wenn ich täglich 10 DM spare, dann habe ich die 100 000 DM in 100 000/10 Tagen, und das sind  $100\,000/(10 \cdot 365)$ , also ungefähr 30 Jahre. Jedoch auch Erwachsene gehen i. a. nicht so vor, vielmehr rechnen sie vorwärts, nämlich: Im Jahr spare ich etwas mehr als 3000 DM, also brauche ich ungefähr 30 Jahre (nicht Division, sondern multiplikative Ergänzung).

Diese Art des Vorgehens wird, auch in späteren Schuljahren, unzureichend gepflegt, obwohl es bei vielen realen Problemen nur auf ein ungefähres Ergebnis ankommt, das man mit Hilfe einer (i. a. selbst, eventuell nur in Gedanken, erstellten) Wertetabelle grob bestimmt, wobei man komplizierte Rechenarten wie Division oder gar Radizieren oder Logarithmieren vermeidet (auch nachdem der Taschenrechner Allgemeingut ist!).

Da den Schülern diese Strategie weitgehend unbekannt ist und die o. a. souveräne Lösung ihnen auch unzugänglich ist, haben viele erhebliche Schwierigkeiten mit der Aufgabe, und die Kreuze sind recht gleichmäßig über alle Lösungsmöglichkeiten verteilt (bis auf die selbstverständlich seltener Antwort „1 Jahr“). 33% der Schüler kreuzen „10 Jahre“ an: Dieses Ergebnis entsteht irgendwie aus den gegebenen Zahlen 100 000 und 10; daß es mit der Stellenzahl nicht hinkommt, gehört zu dem nicht durchschauten Teil der Aufgabe, in den auch die „Jahre“ hineinspielen (Thomas). Diesen „unerklärten Rest“ verarbeiten viele Schüler, indem sie eine andere Antwort als „10 Jahre“ ankreuzen (Manfred), und so wird auch die „30“ berücksichtigt, zumal sie die größte angebotene Zahl ist (Sigrid, Ercan, Carsten, Torsten). Mit Hilfe vollständiger Überlegungen sind weit weniger als 19% der Schüler auf diese Lösung gekommen.

**Aufgabe 4:** Das algebraische Protokoll zum üblichen Vorgehen lautet entweder „ $0,20 \text{ DM} \cdot 6 + 1,90 \text{ DM} = 3,10 \text{ DM}$  und  $5 \text{ DM} - 3,10 \text{ DM} = 1,90 \text{ DM}$ “ oder „ $0,20 \text{ DM} \cdot 6 + 1,90 \text{ DM} + \dots \text{DM} = 5 \text{ DM}$ “. Beide Varianten beginnen mit der Berechnung der Kosten; sie unterscheiden sich lediglich dadurch, daß die Differenz einmal mit der Subtraktion und einmal mit additiver Ergänzung ermittelt wird. Jedenfalls steht da nicht ein geschlossener Zahlsatz mit einem „ergibt“-Zeichen und dem Ergebnis auf der rechten Seite. Um einen solchen zu erhalten, muß man, abweichend von der gebräuchlichen Reihenfolge, mit „5 DM“ beginnen und dann nacheinander die Kosten für die einzelnen Waren subtrahieren, als ob man diese in zwei getrennten Kaufvorgängen erworben hätte (Antwortmöglichkeit „b“, die Carsten mit Recht als „zu schwer für die Kassiererin“ bezeichnet), oder man müßte mit Klammern arbeiten.

Bei der Verwendung von negativen Zahlen kann man mit der Berechnung der Kosten anfangen und die ganze Rechnung trotzdem in einem „ergibt“-Satz aufschreiben (in der Realisierung am Taschenrechner):

Eingabe	0,20	·	6	+	1,90	=	+/-	+	5	=
Ausgabe					3,10	-3,10			1,90	

Dabei sind die Kosten zunächst eine (positive) Größe, und werden dann als (negative) Vermögensänderung aufgefaßt. Wenn man nun noch das Vorzeichen relativiert (und z. B. Erträge als negative Kosten darstellt oder aber das Ganze vom Bäcker aus steht), wird auch Rechensatz „a“ korrekt.

Diese Interpretationen können sich Grundschüler natürlich nicht zugutehalten lassen. Sie rechnen vielmehr zuerst die Kosten aus, bilden dann die Differenz zum hingegebenen Betrag (z. B. Jens erläutert seine Wahl so) und 30% akzeptieren die erste angebotene Lösungsmöglichkeit; ihnen erscheint die Reihenfolge von Subtrahend und Minuend unerheblich, besonders auch weil der Subtrahend nicht explizit dasteht. Ein Teil dieser Schüler hat diese Antwort ohne Prüfung der Alternativen direkt angekreuzt und hätte sich bei Kenntnisnahme der zweiten Möglichkeit wohl für diese entschieden (Ercan).

Hier kommt es aber nicht auf die Ermittlung des Ergebnisses, sondern auf die Feststellung der korrekten algebraischen Notation an (im Hinblick auf einen späteren elaborierten Umgang mit Gleichungen). Immerhin 53% der Schüler haben die Fragestellung richtig aufgenommen, obwohl viele zunächst auch „a“ als Mathematisierung akzeptieren (Thomas, Sigrid, Yvonne, Sabine, Michael).

**Aufgabe 5:** 25% der Schüler kreuzen direkt Antwortmöglichkeit „a“ an, weil sie den Begriff der Wahlmöglichkeit nicht so verstehen, wie er mit dem Aufgabentext suggeriert werden soll. Ähnlich läßt sich wohl die Entscheidung für Antwort „e“ erklären: zu den 5 Eissorten sind noch die beiden als Beispiele genannten Kombinationsmöglichkeiten gezählt worden. Allerdings haben bestimmt einige auch einfach die im Text explizit genannten Zahlen addiert.

Die restlichen falschen Ergebnisse sind zumeist daraus entstanden, daß die Schüler das Problem auf das Ausrechnen einer Aufgabe der Arithmetik (hier: Multiplikation) zurückführen, worauf sie zwar im Mathematikunterricht getrimmt werden, was aber bei so mancher Sachaufgabe keine geeignete Vorgehensweise ist. Lediglich Alternative „b“ entspringt bei manchen Schülern der richtigen Strategie, unvollständig angewendet: Zählt man die Kombinationen und denkt nur an die mit zwei Sorten, ergeben sich 10 (Manfred).

Auch das richtige Ergebnis beruht nicht immer auf richtigen Schlüssen: Bei Carsten entsteht „15“ aus „3 · 5“; denn jede Sorte kann man, jedenfalls nach seinen Überlegungen, mit 3 anderen kombinieren: und zwar entnimmt er die „5“ dem Text, und die „3“ kommt folgendermaßen zustande: Er kombiniert nacheinander „Erdbeer“ mit „Brombeer“, „Vanille“ und „Zitrone“, jedoch nicht mit „Erdbeer“ selbst, weil ihm diese Möglichkeit nicht in den Sinn kommt, und nicht mit „Schokolade“, weil diese Sorte im originalen Aufgabentext eine Zeile tiefer als die anderen steht und er sie schlicht übersieht. Schon während dieser seiner Erläuterung merkt er selbst, daß das Ergebnis dann eigentlich 25 (= 5 · 5) lauten muß. Zunächst hatte er übrigens die „5“ angekreuzt mit dem üblichen Verständnis von Wahlmöglichkeiten. Danach hat er dies revidiert; dabei sind ihm 7 und 10 als zu klein und 20 und 25 als zu groß erschienen. Seine Mutmaßung „15“ ist eigentlich gar nicht genau ausgerechnet (vielmehr hat der Zufall mitgespielt), sie wird eher nachträglich wie oben begründet. Die Möglichkeit „Vanille/Vanille“ (und die entsprechenden) ist ihm übrigens doch noch aufgefallen, aber da war die „15“ (sowieso als zweite Entscheidung) schon angekreuzt.

**Aufgabe 6:** Die Aufgabe zeigt, daß der Gebrauch der Begriffe „Zeitpunkt“ und „Zeitspanne“ seine Tücken hat, nebenbei bemerkt auch für Erwachsene. Üblicherweise sind Zeitpunkte als Tagesdaten (02. 05. 1984) oder Uhrzeiten (20.17 Uhr) (oder mit Sekunden, o. ä.) gegeben

und Zeitspannen durch zwei solche Zeitpunkte. Genau genommen sind die Intervallgrenzen ihrerseits Intervalle, und man muß festlegen, ob beide, eines von beiden, je ein halbes oder keines bei der Intervalllänge mitzählen. Die Intervall „grenzen“ nehmen in der Regel 1 Einheit ein (Tag, Minute, Sekunde usw.), in der die Intervalle gemessen werden, und diese sind groß dagegen. Die Intervalllänge ist dann die Differenz der Intervall „grenzen“ (eventuell mit +1 oder -1).

Diese Überlegungen bleiben natürlich richtig, wenn die Intervallgrenzen Jahre sind und die Intervalle lang genug sind: Der dreißigjährige Krieg dauerte von 1618 bis 1648; und er wird so genannt, auch wenn er knapp über 29 oder knapp unter 31 Jahre dauerte. Das gilt auch noch für wesentlich kürzere Intervalle, etwa den Zeitabstand zwischen zwei Olympischen Spielen u. ä.

Der Sachverhalt ändert sich wesentlich, wenn das Intervall sehr kurz ist oder die Intervall „grenzen“ gar aneinander stoßen und die Maßeinheit für das Intervall deutlich kleiner als die „Grenzen“ sind, so daß deren Intervallcharakter den Punktcharakter überlagert, wie in der vorliegenden Aufgabe. Über 85% der Schüler gehen hier immer noch nach dem oben erörterten Prinzip vor und unterstellen direkt, daß es von 1973 bis 1974 ein Jahr ist. Dieses rechnen sie dann in Monate oder Tage um und kommen zu Antwort „a“ oder „d“, bzw. (10%) kreuzen ausnahms-, aber konsequenterweise beide zugleich an.

Da ist dann kaum noch die sprachliche Komplizierung (auf jeden Fall muß richtig sein: Karin kann 20 Monate jünger sein als Petra) die Ursache, daß noch keine 10% der Schüler die richtige Antwort finden; und auch Antwort „c“ kommt für die meisten gar nicht erst in Betracht, obwohl die interviewten Schüler sie auf Nachfrage durchweg zunächst für wahr halten, ehe sie mit einem Gegenbeispiel konfrontiert werden.

**Aufgabe 7:** Wenn die Fragen sich wirklich auf keinerlei schulische Stochastik-Ausbildung beziehen dürfen, kann es sich nur um einen sehr rudimentären Wahrscheinlichkeitsbegriff handeln, den man abtesten kann; und erschwert wird das ganze Unternehmen noch durch sprachliche Probleme (diese Vorbemerkung gilt auch für Aufgabe 8).

Die Antwortmöglichkeiten unterscheiden sich auf zwei Ebenen, nämlich in der Sicherheit, mit der die Überzeugung, das Flugzeug werde nicht abstürzen, vorgebracht wird, und in den Begründungen für diese Überzeugung.

Diese werden von den Schülern sehr wohl in die Überlegungen einbezogen. So kommt die völlig irrationale Antwort „d“ so gut wie gar nicht in Betracht. Daß sich für „a“ und „c“ immer noch 14% der Schüler entscheiden (darunter Mehrfachnennungen), geht wohl vor allem auf die Berücksichtigung technischer (Qualität des Flugzeugs) bzw. naturgesetzlicher (Wetter) Einflüsse zurück. Vielleicht sind darunter auch einige, die diesen Äußerungen wegen der dabei betonten Sicherheit die größte Überzeugungskraft (eventuell sogar nur im Sinne eines Aufwands und nicht eines Erfolgs) zusprechen.

Den Ausschlag gibt jedoch für die überwältigende Mehrheit der Schüler die ausgewogene Einschätzung der Wahrscheinlichkeit in „b“. Ganz gewiß hat die Aussage über die Häufigkeit von Flugzeugabstürzen für die Schüler keine statistische Begründungskraft, die Entscheidung ist vielmehr ein Ergebnis von Erfahrungslernen, eventuell durchsetzt mit irrationalen Vermutungen über Kausalzusammenhänge, vor allem aber beruht sie auf der moderaten Formulierung, und sei es nur, daß diese einen Hinweis auf die von den Testkonstrukteuren favorisierte Alternative gibt.

Zusammenfassend läßt sich das Wahlverhalten der Schüler als vernünftig bezeichnen.

**Aufgabe 8:** Dies ist die für diesen Test aufbereitete Fassung eines bekannten Experiments von Piaget. Mit der Beurteilung dieses Zufallsphänomens haben die Schüler durchweg keine Schwierigkeiten. Carsten nennt die Muster außer „d“ „sehr unwahrscheinlich“.

Die meisten derjenigen Kreuze, die nicht auf „d“ entfallen, beruhen auf einem falschen Verständnis von der Aufgabe. Manche Schüler meinen, sie sollen Zeichen erkennen, und kreuzen das Muster an, das ihnen am ehesten eine Bedeutung zu haben scheint (Torsten, anfangs auch Thomas). Manche schreiben sogar bei jedem Muster auf, welche Zeichen sie darin sehen.

**Aufgabe 9:** Hier geht es um die Fähigkeit, Zeichnungen üblicher Art (Schrägbild, Riß) zu lesen, d. h. sich die abgebildete Figur räumlich, zumindest aus verschiedenen Perspektiven vorzustellen.

Viele Schüler – und zwar unabhängig davon, welche Ansicht sie ankreuzen – übersetzen die Ausgangszeichnungen zunächst in die Vorstellung von einem realen Zelt und überlegen an diesem, wie es von oben aussieht (Sigrid, Ercan, Carsten explizit).

Möglichkeiten „b“ und „c“ werden durchweg direkt abgelehnt. Bei der Abwägung der drei anderen Alternativen schlägt eine gewisse Unerfahrenheit im Umgang mit „Schulgeometrie“ durch, die jedoch Grundschülern durchaus zusteht. So wird die Zeichnung „a“ von vielen deshalb abgelehnt, weil dort kein Eingang vorhanden sei (Thomas, Manfred, Jens, Sabine, Torsten), und es wird kaum mit dem Seitenriß argumentiert. Zahlreiche Schüler merken nicht, daß der Grundriß „e“ kein Rechteck ist (Sigrid, Sabine; Ercan erst nach Messen).

Dies ist eine Ursache dafür, daß „e“ in Betracht kommt und auch gewählt wird (Sigrid: „d“ ist „zu dünn“). Jedenfalls lehnen die meisten Schüler „e“ unabhängig davon ab, ob es nach den Zeichnungen richtig sein kann, einfach weil ein Zelt in der Realität nicht so schief gebaut wird, es sei denn, „wenn Kinder eins bauen“ (Carsten).

Möglicherweise entnehmen auch einige Schüler doch dem Schrägbild den schiefen Grundriß „e“. Manfred und Sigrid bringen diesen dadurch mit der Vorderansicht in Einklang, daß sie diese zur breiteren erklären. Dann stimmen zwar die Bodenkantenlängen in den verschiedenen Darstellungen nicht ganz überein; der Unterschied ist aber sehr gering (je 1 cm beim Schrägbild, bei der Vorderansicht und bei der kürzeren Grundrißkante; dagegen 1,3 cm bei der längeren), und man kann sowieso nicht erwarten, daß die Schüler maßgenaue Zeichnungen unterstellen. Ercan hat sie unterstellt und „e“ nach Messen verworfen. Bei dieser Aufgabe zeigt sich an vielen Stellen eine Dominanz umweltverhafteten, „bodenständigen“ Argumentierens über ein ungebundenes, möglichkeitsbezogenes Räsonnieren, wie es Zeichnungen zulassen und die „Schulgeometrie“ braucht. Von der umwelterschließenden Funktion des Mathematikunterrichts aus ist diese Akzentuierung allemal gerechtfertigt, zumal sie durch die Aufgabenstellung ausdrücklich angeregt ist. Aber auch die „Schulgeometrie“ sollte nicht ein von der Realität losgelöstes geometrisches Denken anstreben, sondern die Welt der real verwendeten Formen als Basis für dieses Denken darstellen, konkret z. B. durch die Analyse von Zweck und Zweckmäßigkeit geometrischer Formen in unserer Umwelt, Diskussion alternativer Formen usw.

**Aufgabe 10:** Erneut ist aus einer Zeichnung ein dreidimensionales Gebilde zu rekonstruieren. Diesmal ist jedoch ein Herstellvorgang (Netz eines Quaders) nachzuvollziehen bzw. umzukehren. Dieses Grundmuster der Aufgabenlösung ist so gut wie allen Schülern klar. Allerdings fällt diese (und auch ihre Beschreibung) denen leichter, die schon einmal aus Quadern Netze (und umgekehrt) gefertigt haben, und zwar in der Schule (Thomas, Manfred, Sigrid, Ercan, Carsten), auch wenn die Antwort falsch ist.

Das dominierende Kriterium ist die Befestigung der (kleinen) Stirnrechtecke an den großen, die den Körper bilden und im Netz zusammen wie eine einzige Fläche wirken. Daß beim Netz „c“ die vier Teile, die den Körper bilden, nicht in der richtigen Reihenfolge sind, fällt vielen nicht auf, und die Parallelität der Stirnflächen gibt bei 35% der Schüler den Aus-

schlag. Aus demselben Grund kommt für 24% der Schüler das Netz „b“ in Frage. Gegen „a“ und „d“ spricht die unterschiedliche Richtung dieser Stirnflächen, gegen „d“ speziell, daß eine Flächenkante nur halb mit einer anderen identifiziert ist („es bleibt ein Loch beim Zusammenkleben“, so Thomas).

In den Interviews wurden mit fast jedem Schüler *alle* Netze analysiert. Mit geringer Hilfe, die eigentlich nur ein Bestehen auf dem genauen geistigen Vollzug des Zusammenfaltens war, konnten diese Schüler die Aufgabe durchweg komplett lösen – ein deutlicher Hinweis auf die Wichtigkeit unterrichtlicher Behandlung.

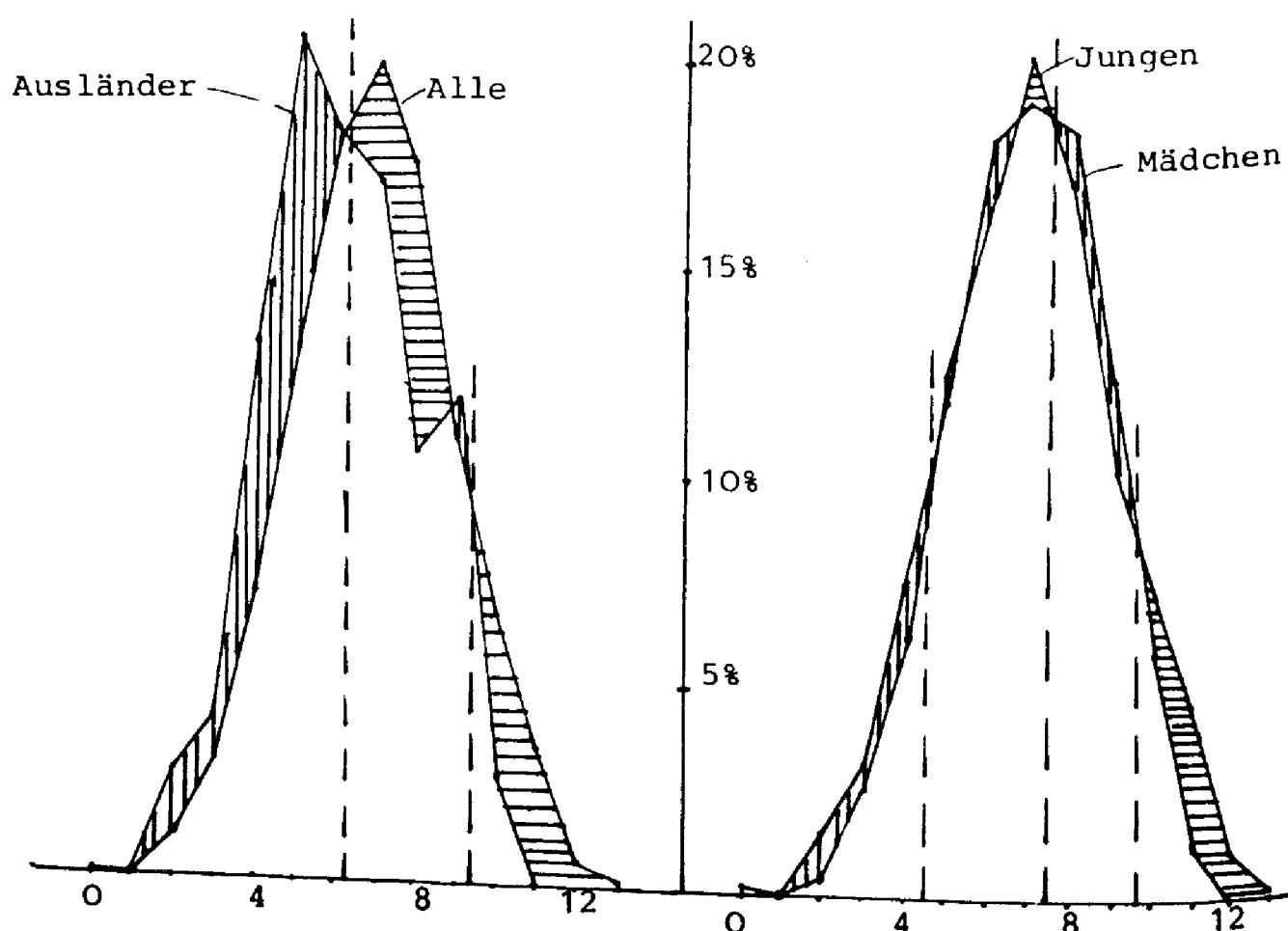
#### 4. Spezielle Fragen

##### Statistik

Für jede eindeutige Entscheidung für eine der als „akzeptabel“ bezeichneten Möglichkeiten (die angekreuzten vorne im Test-Abdruck) wurde ein Punkt vergeben. Dann erzielten im Durchschnitt

- alle 988 Schüler      6,94 Punkte (Standardabweichung 2,00)
- die 77 Ausländer      6,06 Punkte (Standardabweichung 1,89)
- die 407 Mädchen      6,79 Punkte (Standardabweichung 1,93)
- die 465 Jungen      7,12 Punkte (Standardabweichung 2,02).

Die relativen Verteilungen auf die Punktzahlen (von 0 bis 13) zeigt folgende Grafik:



Unterstellt man, daß die vorliegende Stichprobe (einigermaßen) repräsentativ für die BRD ist (eventuell bis auf eine leichte Korrektur der Punktzahlen nach unten), dann lassen sich folgende Rückschlüsse ziehen:

Die vier betrachteten Verteilungen lassen sich sehr gut durch Normalverteilungen approximieren. Die mittlere Punktzahl der Jungen ist auf dem 1%-Niveau signifikant höher als die der Mädchen, die der „deutschen“ Kinder auf dem 0,1%-Niveau signifikant höher als die der ausländischen. Die Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen bei den Anteilen „richtiger“ Lösungen sind signifikant auf dem 1%-Niveau bei Aufgabe 1b, 1c, 1d, 3, 9, auf dem 5%-Niveau bei Aufgabe 1a, 8, die zwischen „deutschen“ und ausländischen Kindern auf dem 1%-Niveau bei Aufgabe 1c, 4, 8 und auf dem 5%-Niveau bei Aufgabe 1d, 2 und 5.

Die Durchschnittspunktzahlen von 41 (über 90%) der Klassen sind gleichmäßig auf das Intervall zwischen 5,75 und 7,64 verteilt; 4 Klassen ragen heraus mit Werten von 8,12; 8,75; 8,92 und 9,23.

### Ausländer

Bei Aufgabe 9 (Zelt) liegen die Ausländer über dem Gesamtergebnis. Das läßt, besonders in Anbetracht ihres schlechteren Abschneidens bei Aufgabe 10 (Quadernetz), noch nicht auf ein größeres Raumanschauungsvermögen schließen. Haben sie die Zeichnungen besser gelesen? – Auch dagegen spricht das Ergebnis von Aufgabe 10. – Oder sind sie der realen Umwelt stärker verhaftet und haben sich mit Erfolg auf diese bezogen? (Bei beiden Aufgaben sind die angesprochenen Unterschiede jedoch auf dem 5%-Niveau nicht signifikant.) Im Gesamtrend befinden sich die Ausländer bei Aufgabe 1a (Briefmarke), 1b (Gewicht), 3 (Sparen), 6 (Altersunterschied) und 7 (Flugzeug). Bezuglich der Fragestellungen 1a, 1b (und 6 und 7!) haben sie offenbar Alltagserfahrungen, die mit denen der deutschen Schüler vergleichbar sind.

In Aufgabe 3 machen die meisten Schüler mehr oder weniger stark vom Rate-Prinzip Gebrauch und treffen dabei auch das richtige Ergebnis, nämlich das mit der größten Zahl. Je eher sie sich auf Rechnungen beziehen, desto eher kreuzen sie die Antwort „10 Jahre“ an. Die Ausländer raten schlechter: Sie kommen zwar genauso oft wie alle auf die beste Alternative, verfallen aber auf dem 0,1%-Niveau signifikant häufiger auf die besonders schlechten kleinen Werte.

Signifikant schwächer schneiden die Ausländer bei Aufgabe 1c (Zimmerhöhe), 1d (Einwohnerzahl), 2 (Schultage), 4 (Restgeld), 5 (Eisportion) und 8 (Pflastersteine) ab.

Anders als bei Aufgabe 1a und 1b reichen für 1c und 1d die direkten Alltags-Erfahrungen der Schüler nicht mehr ganz. Bei den Ausländern ist das in der Schule zu entwickelnde Gefühl für (die betreffenden) Größenordnungen etwas schwächer ausgebildet. Sie neigen einmal zur Überschätzung (bei Aufgabe 1c signifikant), zum anderen kommen bei ihnen „unsinnige“ Ergebnisse häufiger vor (signifikant bei Aufgabe 1c, 2, 3, 4).

Die in Abschnitt 3 herausgearbeiteten Fehlerursachen bei Aufgabe 4, 5, 8 und 10 treten bei Ausländern offenbar verstärkt auf, insbesondere wenn das Textverständnis eine Rolle spielt. In Aufgabe 5 zeigt sich aber, daß sie weniger der Gefahr erliegen, einfach drauf los zu rechnen: Bei ihnen kommen die „Rechen“ergebnisse „c“ und „d“ auf dem 0,1%-Niveau signifikant seltener vor. Bei Aufgabe 10 ist Antwort „d“ relativ seltener, was wieder auf eine stärkere Realitätsbezogenheit deuten könnte.

Zusammenfassend: Bei den Ausländern sind die niedrigen Punktzahlen (0–6) stärker und die hohen (10–13) fast nicht vertreten, der Anteil der nicht beantworteten Fragen ist höher. Bis zum Ende der Grundschulzeit zeigt die Schulbildung bei ihnen etwas weniger Wirkung, und zwar sowohl die Ausbildung als auch die Verbildung. Sie sind ihrer Lebenswelt verhaftet, setzen stärker ihr Alltagswissen ein, und wo dieses nicht hinreicht, neigen sie eher zum Raten.

### Jungen und Mädchen

Die Mädchen schneiden signifikant besser ab bei Aufgabe 1a (schreiben sie mehr Briefe?), 8 und 4 (hier nicht auf dem 5%-Niveau) (lesen sie den verbalen bzw. algebraischen Text sorgfältiger?).

In Aufgabe 2, 5, 6 und 7 sind die relativen Anteile richtiger Antworten bei beiden Geschlechtern ungefähr gleich. Bei Aufgabe 2 entscheiden sich allerdings deutlich mehr Mädchen als Jungen für „150“ (Schultage), und bei der Antwort „200“ ist das Verhältnis gerade umgekehrt (beides auf dem 0,1%-Niveau signifikant). Für diesen Sachverhalt weiß ich keine Erklärungsmöglichkeit.

Die Jungen erzielen signifikant bessere Ergebnisse bei Aufgabe 1b (weil es sich um das Gewicht eines *Mannes* handelt?), 1c (hier spielt schon etwas technisches Interesse hinein), 1d (encyklopädisches Wissen), 3 (geschickter geschätzt oder besser gerechnet?), 9 und 10 (hier nicht auf dem 5%-Niveau) (Raumanschauungsvermögen, und wiederum etwas technisches Interesse). Auffällig ist der bei den Mädchen auf dem 0,1%-Niveau signifikant höhere Anteil derjenigen, die in Aufgabe 9 den schießen Zeltgrundriß „e“ ankreuzen. Vielleicht haben sie sich enger an das einen schießen Eindruck hervorrufende Schrägbild gehalten. Zusammenfassend: Die Mädchen sind bei den schwachen (0–4) und bei den guten (8–9) Punktzahlen relativ stärker vertreten, dagegen die Jungen bei den sehr guten (10–13), während das Verhältnis bei den mittleren ausgeglichen ist. Die Jungen sind im Gesamtdurchschnitt und bei der Hälfte aller Aufgaben besser, die Mädchen bei einem Viertel der Aufgaben. Dort, wo die Jungen besser abschneiden, sind räumliche Sachverhalte, praktisch-technische Probleme und große Zahlen involviert. Hier zeigen sich auch heute noch vorhandene Unterschiede in der Erziehung der Geschlechter. Diese Ausführungen liegen im Trend der entsprechenden Aussagen zu dem Test von 1978 (siehe Bender 1980) und einem ähnlichen von 1980.

### Literatur

- Bender, P.: Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4.Schuljahres. In: SMP 8, 150–155, 191–198, 226–233 (1980)  
Bender, P.: Der Primat der Sache im Sachrechnen. Erscheint in: SMP 13 (1985)

### Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Peter Bender, Marie-Luisen-Straße 10A, D 6521 Bechtheim

**Klassenarbeit zum Thema Sachrechnen**

Schule \_\_\_\_\_ Ort \_\_\_\_\_ Klasse \_\_\_\_\_

Name \_\_\_\_\_ Vorname \_\_\_\_\_ Datum \_\_\_\_\_

Kreuze in jeder der folgenden Aufgaben das Kästchen an, bei dem deiner Meinung nach die beste Antwort steht. So:

**1a Was kostet jetzt bei uns die Briefmarke für einen normalen Brief?**

- |   |  |                                      |
|---|--|--------------------------------------|
| a) 10 Pf <input type="checkbox"/> 4 3   | c) 40 Pf <input type="checkbox"/> 7 5              | e) 1 DM <input type="checkbox"/> 1 4 |
|   | 4 4  | 0 2                                  |
| b) 50 Pf <input type="checkbox"/> 16 16 | d) 80 Pf <input checked="" type="checkbox"/> 71 66 | f) 2 DM <input type="checkbox"/> 0 0 |
| 14 17                                   | 75 69*   | 0 0                                  |

**1b Wie schwer ist ungefähr ein erwachsener Mann?**

- |  |   |   |
|--|---|---|
| a) 10 kg <input type="checkbox"/> 1 0              | c) 1 t <input type="checkbox"/> 1 1             | e) 1000 g <input type="checkbox"/> 2 3    |
| 0 1  | 2 1   | 3 1                                       |
| b) 70 kg <input checked="" type="checkbox"/> 82 82 | d) 1 dz <input checked="" type="checkbox"/> 3 1 | f) 75 Pfund <input type="checkbox"/> 9 12 |
| 78 84**  | 4 3   | 6 8                                       |

**1c Wie hoch ist ungefähr ein normales Zimmer?**

- |  |  |   |      |
|--|--|---|------|
| a) 25 cm <input type="checkbox"/> 1 1    | c) 150 cm <input type="checkbox"/> 4 6   | e) 250 cm <input checked="" type="checkbox"/> 66 63 | 52** |
| 1 0                                      | 3 4                                      | 63  | 70** |
| b) 1,20 m <input type="checkbox"/> 2 8** | d) 1,60 m <input type="checkbox"/> 16 12 | f) 5 m <input type="checkbox"/> 11 12               | 17*  |
| 3 1                                      | 16 16                                    | 12  | 8    |

**1d Wie viele Einwohner hat die Bundesrepublik Deutschland ungefähr?**

- |                                       |  |   |      |
|---------------------------------------|--|---|------|
| a) 10000 <input type="checkbox"/> 1 3 | c) 1600000 <input type="checkbox"/> 10 12  | e) 60000000 <input checked="" type="checkbox"/> 43 37 | 34*  |
| 3 0                                   | 12 9                                       | 37  | 49** |
| b) 60000 <input type="checkbox"/> 5 4 | d) 16000000 <input type="checkbox"/> 21 21 | f) 1 Milliarde <input type="checkbox"/> 20 20         | 25   |
| 7 4                                   | 21 19                                      | 20  | 19   |

**2. Wie viele Schultage hat ungefähr ein Jahr? An wie vielen Schultagen etwa mußt du also in einem Jahr in die Schule gehen?**

- |  |   |   |      |
|--|---|---|------|
| a) 50 Tage <input type="checkbox"/> 2 6**  | c) 820 Tage <input type="checkbox"/> 3 5              | e) 200 Tage <input checked="" type="checkbox"/> 39 33 | 32*  |
| 4 1  | 4 2   | 33  | 43** |
| b) 500 Tage <input type="checkbox"/> 4 8** | d) 150 Tage <input checked="" type="checkbox"/> 16 12 | f) 300 Tage <input type="checkbox"/> 34 32            | 34   |
| 5 4  | 21 13**   | 32  | 36   |

**3. Wenn du jeden Tag 10 DM sparen könntest, nach wie vielen Jahren ungefähr würdest du dann 100000 DM zusammen haben?**

- |   |  |   |      |
|---|--|---|------|
| a) 1 Jahr <input type="checkbox"/> 4 12**   | c) 5 Jahre <input type="checkbox"/> 17 9   | e) 20 Jahre <input type="checkbox"/> 19 13            | 12   |
| 5 4   | 19 15                                      | 13  | 14   |
| b) 2 Jahre <input type="checkbox"/> 11 17** | d) 10 Jahre <input type="checkbox"/> 33 29 | f) 30 Jahre <input checked="" type="checkbox"/> 19 14 | 19   |
| 12 11                                       | 35 32                                      | 14  | 24** |

4. Inge kauft im Bäckerladen 6 Brötchen, das Stück zu 20 Pf, und 1 Brot, das 1,90 DM kostet. Sie zahlt mit einem 5-DM-Stück. Wieviel Geld erhält sie zurück?  
Kreuze den richtigen Rechenweg an!



5. Du willst eine kleine Eisportion aus 2 Bällchen kaufen. Der Eismann hat 5 Sorten: Erdbeer, Brombeer, Vanille, Zitrone, Schokolade. Da hast du viele Wahlmöglichkeiten, z. B.:

  - \* beide Bällchen Vanille, oder
  - \* 1 Bällchen Erdbeer, 1 Bällchen Zitrone, oder ...

Wie viele Wahlmöglichkeiten hast du?

- a) 5       25 34      c) 20       13 3\*\*      e) 7       5 9  
 b) 10       25 22      d) 25       14 10      f) 15       5 5  
                20 29       19 12\*\*       18 9\*  
                18 22       18 20       18 20

6. Petra wurde im Jahre 1973 geboren, und Karin wurde im Jahre 1974 geboren. Kreuze an, was auf jeden Fall richtig sein muß.

- \* a) Karin ist genau 12 Monate jünger als Petra.  36 39  
\* b) Karin kann 20 Monate jünger sein als Petra.  37 33  
\* c) Karin ist mindestens 24 Stunden jünger als Petra.  9 6  
\* d) Der Altersunterschied beträgt höchstens 365 Tage.  9 9  
7 4  
5 6  
38 38  
38 36

7. Im Sommer reisen viele Leute mit dem Flugzeug in die Ferien. Gerade will wieder ein Ferienflugzeug starten, da werden 4 Gäste gefragt: „Warum reisen Sie mit dem Flugzeug, obwohl es doch abstürzen könnte?“

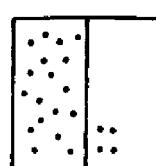
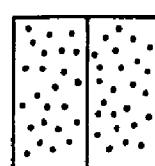
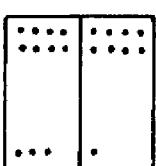
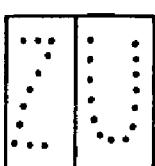
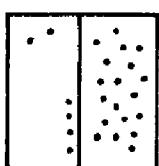
Hier sind die Antworten. Kreuze die an, die dich am meisten überraschen.

- ... die dich am meisten überzeugt!

  - a) „Ich kenne das Flugzeug, das ist hervorragend. Ich bin absolut sicher, daß alles gut gehen wird.“  7 6
  - b) „Natürlich kann das Flugzeug abstürzen, aber das ist sehr unwahrscheinlich. Es kommt sehr selten vor, daß ein Flugzeug abstürzt.“  84 87
  - c) „Heute ist schönes Wetter, da kann gar kein Unglück in der Luft passieren.“  85 84
  - d) „Ich bin ein Glückspilz. Alles wird gut gehen.“  5 1
  - 
  - 
  - 
  -

8. Es fängt an zu regnen. Es sind erst einige Tropfen gefallen. Du schaust auf 2 Pflastersteine und beobachtest das Muster, das die Tropfen auf ihnen bilden. Hier sind einige Muster.

Welches hältst du für das wahrscheinlichste? Kreuze es an!



a)  4 4  
     4 5

b)  6 13  
     4 8

c)  2 8  
     1 2

d)  84 65\*\*  
     86 82\*

e)  4 8  
     3 3

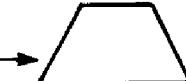
9. Dieses Zelt



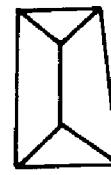
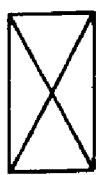
sieht von vorn so aus



und von der Seite so.



Wie sieht es von oben aus? Stell dir vor, du schaust von einem hohen Baum herunter auf das Zelt. Kreuze die richtige Zeichnung an!



a)  8 3  
     7 9

b)  1 0  
     0 1

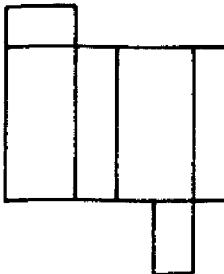
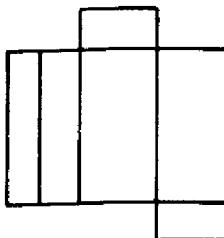
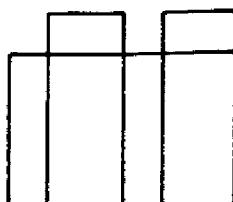
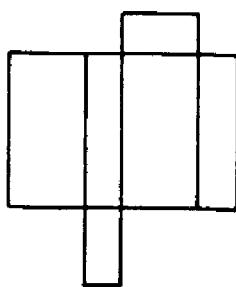
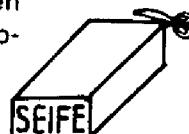
c)  3 3  
     2 1

d)  78 84  
     74 81\*\*

e)  10 6  
     15 7\*\*

10. Eine Schachtel wie diese wird so weit aufgeschnitten, daß man den Pappkarton platt auf den Tisch legen kann. Wie sieht dann der Pappkarton aus?

Kreuze die richtige Zeichnung an!



a)  29 23  
     27 31

b)  24 29  
     25 23

c)  35 32  
     37 35

d)  10 6  
     8 10