Peter Bender

Die Begrifflichkeit des Bezugsfachs in der angewandten Mathematik und ihrer Didaktik – diskutiert am Beispiel des internen Zinssatzes von Investitionen

(anläßlich des Aufsatzes „Überraschungen bei der Berechnung des ‚Effektiven Zinssatzes'" von Thomas Jahnke und der „Bemerkungen zur ‚Berechnung' des effektiven Zinssatzes" von Arnold Kirsch, beide in diesem Journal Nr. 8)

Summary: In school, applied mathematics teaching often suffers from a lack of real involvement in the applications. In this article there is presented a piece of applied mathematics discussed on the background of some relevant aspects from the applied discipline: the internal rate of return of an investment.

1. Der wissenschaftstheoretische Ort didaktischer Analysen mathematischer Anwendungen

Ich befürworte einen weiten Begriff von Mathematikdidaktik. Insbesondere umfaßt er die Inspektion mathematischer Anwendungen aller Art auf ihre Eignung als Unterrichtsstoff. Die Ergebnisse dieser Inspektion werden häufig in fachdidaktischen Zeitschriften in Form von Stoffanalysen veröffentlicht, und es lassen sich mehrere fachinhaltlich orientierte epistemologische Funktionen solcher Publikationen unterscheiden: (a) An die Pädagogen (i.w. S.) soll ein Inhalt herangetragen werden, der im Bezugsfach wohlbekannt ist (***Belehrungs***aspekt). (b) Es wird die (neuartige) Anwendung der Ergebnisse des Bezugsfachs auf ein konkretes Problem dieses Fachs vorgestellt (***Ingenieurs***aspekt). (c) Es werden tatsächlich die Erkenntnisse des Bezugsfachs unter Verwendung von Mathematik weiter entwickelt (***fachinhaltlich*** ausgerichteter ***Forschungs***aspekt). Besonders beim Überwiegen der Aspekte (b) und (c) fragt sich, warum die Arbeit nicht in einem Fachorgan untergebracht wird: Als Grund kommt wohl vor allem die fehlende Einbindung des Mathematikdidaktikers in den Wissenschaftsbetrieb des Bezugsfachs in Frage, und diese Rolle des Außenseiters ist nicht nur eine soziologische, sondern oft auch eine fachliche.

Eine weitere epistemologische Funktion solcher Stoffanalysen in fachdidaktischen Zeitschriften soll nicht unterschlagen werden: (d) Es geht um eine Verbesserung (i.w.S.) des Mathematikunterrichts (i.w.S.) (***didaktischer*** Aspekt). Wie weit dieses Anliegen im Einzelfall (aus der Sicht des Autors oder des Lesers) echt oder aufgesetzt ist, soll hier nicht diskutiert werden. Wie ein-

(JMD 9 (88) 2/3, S.205 – 224)

gangs erklärt, halte ich solche Stoffanalysen prinzipiell für eine legitime und sinnvolle fachdidaktische Betätigung. Beispiele finden sich in Hülle und Fülle etwa in Kaiser u.a. (1982), im International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, in Blum u.a. (1988), auch von mir (Bender 1988a).

Beachtet man, daß auch und vor allem die Mathematik selbst den Gegenstand vieler fachdidaktisch orientierter Stoffanalysen liefert, dann kommt man um die Feststellung einer gewissen Stofflastigkeit der deutschsprachigen Veröffentlichungen zur Mathematikdidaktik nicht herum. Diesen z.B. schon von Lenné (1969) konstatierten Zustand zu mildern, war nach meinem Eindruck eines der Anliegen bei der Gründung des Journals für Mathematikdidaktik (JMD) 1980. Diesem Anliegen wird die Diskussion über den effektiven Zinssatz bei Anspardarlehen m.E. nicht gerecht; sie hätte in andere mathematikdidaktische Organe besser gepaßt.

Meine Motivation, mich an dieser Diskussion (dann natürlich im JMD) zu beteiligen, berührt die drei o.a. Aspekte (a), (c) und (d). - Zum einen möchte ich das Bild der viel geschmähten Formel der Preisangabenverordnung (PAngV) für den effektiven Zinssatz etwas zurechtrücken, nicht nur weil sie die Macht des Faktischen für sich hat, sondern weil sie nach sinnvollen Prinzipien aufgebaut ist (s. Becker 1982, Bardy u.a. 1984, Hestermeyer 1985) und in ihrem vorgesehenen Anwendungsbereich problemlos funktioniert ((a)). - Zum anderen läßt sich der herkömmliche Begriff des effektiven Zinssatzes so erweitern, daß er auf beliebige Zahlungsströme angewendet werden kann (Bender 1988b; (c)), und damit kann auch das von Jahnke (1986, 1987) betrachtete Anspardarlehen auf m.E. befriedigende Weise mit ihm charakterisiert werden.

Vor allem aber geht es um die Belange des anwendungsorientierten Mathematikunterrichts ((d)): Obwohl in den didaktischen Analysen (s. z.B. Blum 1985:200ff) die Rückkehr aus dem jeweiligen mathematischen Modell in die Anwendungssituation als mit konstituierend für den ganzen Anwendungsprozeß hervorgehoben wird, neigen wir Mathematikdidaktiker und -lehrer dazu, uns auf die mathematischen Aspekte zu konzentrieren. Damit sind wir bei der Lösung von Anwendungsproblemen häufig sogar erfolgreicher als die Experten selbst, nämlich wenn diese die mathematische Seite vernachlässigen; aber oft genug sind unsere Lösungen für die Praxis unzureichend. Nimmt man die Anwendungsorientierung in der Schule ernst, so muß man sich auf die Begrifflichkeit der jeweiligen Bezugsdisziplin einlassen, und zwar sowohl im Unterricht selbst, als auch bei der weitergehenden Auseinandersetzung mit der Materie als Didaktiker bzw. Lehrer.

2. Zur didaktischen Legitimation des Themas 'Interner (effektiver) Zinssatz bei Nicht-Eindeutigkeit'

In der Finanzmathematik ist die Problematik der Nicht-Eindeutigkeit des internen Zinssatzes eher ein Randproblem, und ihre Relevanz für die allgemeinbildende Schule sei dahingestellt. Mit vielen anderen Vorschlägen kann sie da allerdings bequem mithalten. Sie hat den Vorzug, daß das algebraische und analytische Werkzeug zur Behandlung der vorkommenden Polynome auf recht anschauliche Weise eingesetzt werden kann. Und sie ist ein Musterexemplar für anwendungsorientierten Mathematikunterricht in mindestens zweierlei Hinsicht:

I. Der Prozeß von der Planung einer Finanzierung bzw. Investition bis hin zum ***Zahlungsstrom***

(1) $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ (die Zahlung a_k erfolgt zum Zeitpunkt k, $k=0,1,\dots,n$)

ist der Prototyp einer ***Modellbildung***, bei der das fundamentale ***Vergißprinzip*** leitend ist (s. Bender 1987a). Für die mathematische Behandlung spielt es keine Rolle, wer die Geschäftspartner sind, wie das Geschäft vertraglich ausgestaltet ist, ob da auf irgendwelchen Konten irgendwelche Buchungen vorgenommen werden, insbesondere ob Zahlungen als Miete, Rente, Tilgung, Gebühren, Provision, Zinsen usw. bezeichnet werden - entscheidend ist allein der Übergang von Beträgen aus dem oder in den Verfügungsbereich eines Geschäftspartners, eben der nackte Zahlungsstrom. Selbstredend charakterisiert der (zu erwartende) Zahlungsstrom ein Geldgeschäft nicht allein. Eine wichtige Rolle spielen z.B. die Inflation (s. Wille 1985), verfügbare Mittel der Geschäftspartner, Sicherheit der Zahlungen u.v.m., die in einem anwendungsorientierten Unterricht natürlich erörtert werden müssen.

II. Die Ausdehnung des Definitionsbereichs eines (angewandt) mathematischen Begriffs, hier: des effektiven Zinssatzes, ist ein Paradebeispiel für eine (angewandt) mathematische ***Begriffsbildung***. Ausgehend vom herkömmlichen Fall, in dem der Zahlungsstrom die Bedingung

(2) $a_0<0;\ a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$

erfüllt, werden weitere Fälle betrachtet:

(3) $a_0, a_1, \ldots, a_j \leq 0;\ a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n \geq 0$
$(0 \leq j<n;\ a_j<0;\ a_n>0)$,

(4) $a_0, a_1, \ldots, a_{j-1} \geq 0;\ a_j<0;\ a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n \geq 0$
$(0<j<n;\ a_0, a_n>0)$.

(Beispiel für (2): normaler Kredit; für (3): Prämiensparen oder Rentenversicherung; für (4): Bauspardarlehen). Auch wenn man, wie Jahnke, nur an diesen Fällen interessiert ist, legt die ganze Problematik das ***Deep-End-Prinzip*** nahe, d.h. die Aufhebung sämtlicher Vorzeichenrestriktionen. Da muß man sich über die relevanten Eigenschaften des herkömmlichen effektiven Zinssatzes Klarheit verschaffen, und man muß sich überlegen, welche davon aufzugeben oder wenigstens einzuschränken sind bei einer sukzessiven Ausdehnung des Anwendungsbereichs, bis man schließlich an die Grenzen der Begriffserweiterung stößt, wo dann der Begriff anfängt unbrauchbar zu werden.

Während der Modellbildungsaspekt mit der Betrachtung herkömmlicher Darlehensgeschäfte ausreichend repräsentiert ist und um seinetwillen keine mathematische Verallgemeinerung von (1) über (2) hinaus nötig wäre, liefert der Begriffsbildungsaspekt, und höchstens er, eine Rechtfertigung für diese Verallgemeinerung (im Unterricht). - Der Typ des Anspardarlehens liegt eigentlich doch allzu sehr am Rande. Bei den meisten Banken ist er gar nicht bekannt, und angeboten wird er m.W. allein von der Briefkastenbank BSV, einer Tochter der BfG. Relevant wird er erst, wenn man feststellt, daß Bauspardarlehen nichts anderes sind (die ich in Bender 1987b diskutiert habe).

3. Mathematische Probleme mit dem internen (effektiven) Zinssatz schon bei herkömmlichen Investitionen (Darlehen)

Im herkömmlichen Fall (2) (entsprechend (3)) entsteht durch die Auszahlung a_0 eine verzinsliche Forderung, auf die die Einzahlungen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ angerechnet werden, so daß diese in jeder Periode mit demselben Zinssatz zu verzinsen sind wie die Forderung. Nach der Periode n wird das Darlehen als zurückgezahlt erklärt, und bei positiver Verzinsung bedeutet das, daß die Summe der Netto-Rückzahlungen größer als die Auszahlung ist, daß also für die ***Gesamtsumme***

(5) $b_n := a_0+a_1+\ldots+a_n$

(6) $b_n > 0$

gilt. Man fragt nun, wie hoch ein Zinssatz sein müßte, der über die ganze Laufzeit konstant ist und gerade dazu führt, daß bei dem Zahlungsstrom (1) das Darlehen zum Zeitpunkt n erledigt ist. Es ist plausibel, daß unter den Bedingungen (2) und (6) ein eindeutig bestimmter positiver reeller Zinssatz existiert, und dieser wird ***effektiver Zinssatz*** des mit (1) charakterisierten Zahlungsstroms genannt. Er ist die Lösung der Polynomgleichung in x

(7) $a_0(1+x)^n+a_1(1+x)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(1+x)+a_n = 0$.

Vom Standpunkt der Algebra aus ist es vielleicht eine Überraschung, daß eine Gleichung vom Grade n genau eine reelle Nullstelle haben soll. Allerdings ist der Überraschungseffekt schnell beseitigt: Natürlich hat die Gleichung (7) n Lösungen, und natürlich gilt für jede Lösung, daß die Summe aller mit ihr bis zum Laufzeitende aufgezinsten Zahlungen verschwindet, auch wenn sie z.B. nicht reell ist. Unter diesen n Lösungen müssen solche ausgewählt werden, die als effektiver Zinssatz ***inhaltlich*** in Frage kommen. Da scheiden die nicht-reellen Lösungen direkt aus, ebenso die reellen Lösungen im Bereich $x \leq -1$, und es läßt sich durch eine Analyse des Polynoms p_a in y $(=1+x)$ mit

(8) $p_a(y) := a_0y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_{n-1}y+a_n$ (im Bereich $y>0$)

in Verbindung mit der dort streng monoton fallenden Funktion $p_a(y)/y^n$ (bzw. allgemeiner im Fall (3) $p_a(y)/y^{n-j}$) zeigen, daß p_a genau eine Nullstelle $y_0>0$, also $x_0>-1$, hat (wegen $a_n \neq 0$ ist $y_0 \neq 0$). Nur dieser Wert kommt als effektiver Zinssatz in Frage, und man benutzt ihn als Maß für die Wirtschaftlichkeit eines mit dem Zahlungsstrom (1) charakterisierten Geldgeschäfts aus der Sicht des Darlehensgebers (das auch der Darlehensnehmer, mit umgekehrter Rangskala, direkt für sich verwenden kann).

Dabei wird üblicherweise versäumt zu prüfen, ob der so definierte effektive Zinssatz überhaupt als Wirtschaftlichkeitsmaß geeignet ist, und zwar nicht erst auf wirtschaftlicher, sondern schon auf mathematischer Ebene; - ja, meistens wird die Möglichkeit der fehlenden Eignung gar nicht gemerkt. In der Tat müßte geprüft werden, ob der effektive Zinssatz x_0 als Funktion des n-Tupels $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ folgende Eigenschaften hat:

A. Er ist eindeutig definiert (***Eindeutigkeit***, ***Existenz***).

B. Er stimmt in dem einfachen Fall einer einzigen Rückzahlung $(a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=0$ bzw. sogar $n=1)$ mit dem dem Geldgeschäft zugrundeliegenden Zinssatz überein (***Permanenz***).

C. Er ist eine positive reelle Zahl (***Positivität***).

D. Ist ein Darlehen (aus der Sicht des Darlehensgebers) offensichtlich besser als ein anderes (i.w. mit höheren oder früheren Rückzahlungen oder absolut niedrigeren oder späteren Auszahlungen), so ist sein effektiver Zinssatz höher (***positive Ordinalität***).

E. Unterscheiden sich zwei Darlehen nur geringfügig, so unterscheiden sich auch ihre effektiven Zinssätze nur geringfügig (***Stetigkeit***).

Eigenschaft B. ergibt sich aus Ansatz (7); Eigenschaft D. zeigt man leicht mit einer Analyse von (8), wobei man die Koeffizienten als Parameter auffaßt; Eigenschaft E. folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, falls Eigenschaft A. gilt; der Nachweis von A. ist oben angedeutet. Eigenschaft C. schließlich (die unwichtigste!) ist nicht erfüllbar. Wenn nämlich (6) verletzt ist (z.B. wenn der Darlehensnehmer endgültig vorzeitig zahlungsunfähig wird), dann gilt $-1<x_0\leq 0$.

Man hat nun im wesentlichen drei Möglichkeiten, das Eigenschaftensystem A.-E. stimmig zu machen: Man läßt zu, daß der effektive Zinssatz nicht immer existiert (Abschwächung von A.). Oder man schwächt C. ab: Man läßt negative effektive Zinssätze zu. Oder aber: Man unterscheidet Darlehensgeber und -nehmer nicht mehr danach, wer früher zahlt, sondern danach, wer insgesamt netto mehr zahlt, und nimmt als effektiven Zinssatz gegebenenfalls ∞. Z.B. ist der Zahlungsstrom (-100,40,40) zu ersetzen durch (100,-40,-40), und der ursprüngliche Darlehensnehmer ist jetzt Darlehensgeber und hat ein so gutes Geschäft gemacht (am Anfang 100 erhalten und dann nur zweimal 40 gegeben), daß kein endlicher Zinssatz ausreicht, damit die aufgezinsten Auszahlungen die aufgezinste(n) Einzahlung(en) ausgleichen. Das Geschäft ist besser als jedes andere mit Gesamtsumme 20 und einem endlichen Zinssatz, so daß der effektive Zinssatz wohl oder übel ∞ zu setzen ist. - So ist dieser Wert ∞ zu interpretieren und nicht etwa, als ob unendlich hohe Zinsen zu zahlen wären.

Im Hinblick auf die vorgesehene Begriffserweiterung empfiehlt sich die dritte dieser Varianten: also negative Zinssätze ausschließen und dafür $x_0=\infty$ und, noch für den Fall $b_n=0$, auch $x_0=0$ zulassen. Dann sind die Eigenschaften A.-E. zu modifizieren:

A' = A.

B' = B.

C' = Der effektive Zinssatz liegt im 'Intervall' $[0,\infty]$.
D' = D., ergänzt um: ... falls er nicht beidesmal ∞ ist.
E' = E., ergänzt um: ... falls nicht einer von beiden ∞ ist.

Damit ist auch der Fall erfaßt, daß für sämtliche k gilt: $a_k \geq 0$ (oder für sämtliche k: $a_k \leq 0$). Daß solche Zahlungsströme nicht realistisch sind, spielt an dieser Stelle keine Rolle. Entscheidend ist allein, daß sie möglich und daher begrifflich mit abzudecken sind. Im Zusammenhang mit der Formel der PAngV etwa erweist sich dieser Fall als zwar wucherisch, aber nicht abwegig.

Diese Formel wurde zeitweise heftig diskutiert. Das Bankgewerbe bemängelte in erster Linie, daß gewisse Kosten in die Berechnung einzubeziehen sind, wodurch sich der dem Kunden zu nennende effektive Zinssatz bei unverändertem Zahlungsstrom erhöht, und daß überhaupt (bei Privatkrediten) ein effektiver Zinssatz angegeben werden muß. Die mathematische und didaktische Auseinandersetzung ging um den Berechnungsmodus: Zur Ermittlung des effektiven Zinssatzes ist so zu tun, als ob ab Laufzeitbeginn nach jedem vollen Jahr und am Ende der Laufzeit die Zinsen kapitalisiert werden; Zahlungen, die nicht an Zinszeitpunkten stattfinden, sind bis zum nächsten solchen Zeitpunkt ***einfach*** zu verzinsen. Die Basis für die Formel ist natürlich Ansatz (7), aber die genaue Vorschrift liefert zwei Quellen der Komplizierung:

(i) Die Möglichkeit nicht-ganzjähriger Laufzeiten führt zu einer eigenen Behandlung der Zahlungen der letzten Periode, wenn diese kürzer als 1 Jahr ist, und die dabei entstehende (auch noch aufwendigere) Rechenvorschrift verletzt Eigenschaft D. (s. Bender 1987a). Für die Praxis ist dieser Mangel allerdings läßlich. Will man ihn jedoch aus prinzipiellen Gründen abstellen und etwa die Laufzeiten (fiktiv) grundsätzlich gegebenenfalls auf volle Jahre verlängern (im Gegensatz zur sog. Sparkassenkonvention), dann bekommt man bei kurzen Laufzeiten (<< 1 Jahr, d.h. insbesondere mit einfacher Verzinsung) stärkere Abweichungen von den in der Praxis bei solchen Zahlungsströmen tatsächlich angenommenen Zinssätzen.

(ii) Wegen der Möglichkeit zwischenjähriger Zahlungen treten arithmetische Summen auf. Daß diese leicht zu beseitigen sind, scheint von allen Autoren übersehen worden zu sein. Findet nämlich eine Zahlung a um die Zeitspanne t (mit $0<t<1$) vor dem nächsten Zinszeitpunkt statt, dann wird sie bis dahin mit

(9) $a(1+tx_o) = a(1-t+t(1+x_o)) = ta(1+x_o) + (1-t)a$
aufgezinst, was einer Zerlegung von a in zwei Summanden entspricht, deren Verhältnis zueinander durch t bestimmt ist, wobei so getan wird, als ob ta am Jahresanfang gezahlt und bis zum Jahresende einmal verzinst wird und $(1-t)a$ am Jahresende gezahlt wird. Auf diese Art und Weise kann jeder Zahlungsstrom mit zwischenjährigen Zahlungen in einen gleichwertigen mit nur jährlichen Zahlungen verwandelt werden, und für die Formel der PAngV bedeutet dies:

Wird a monatlich nachschüssig gezahlt, so ist der Endwert nach einem Jahr $a(12+11\cdot 12\cdot x_o/(2\cdot 12)) = 12a(1+11\cdot x_o/24)$; d.h. gleichwertig dazu ist eine Zahlung $12\cdot a$ zum Zeitpunkt $t=11/24$ vor Jahresende; und gleichwertig dazu sind die beiden Zahlungen $5.5\cdot a$ am Jahresanfang und $6.5\cdot a$ am Jahresende. Wird z.B. 5 Jahre lang an jedem Monatsende 100 gezahlt, so lautet der zugehörige Zahlungsstrom nicht (0,1200,1200,1200, 1200,1200), sondern (550,1200,1200,1200,1200,650). Die monatliche Zahlungsweise bringt gegenüber der jährlichen lediglich eine Verlagerung eines Teils der letzten Zahlung ganz an den Anfang mit sich, und die Auswertung mittels der Formel für die geometrische Reihe wird im allgemeinen Fall dabei um keine einzige Operation umfangreicher.

Jahnkes Beispiel eines Darlehens von 1000, das in 12 Monatsraten zu je 182 zurückgezahlt wird, findet nun eine einfache Erklärung: Der Zahlungsstrom lautet $(-1000+5.5\cdot 182, 6.5\cdot 182)=(1,1183)$, und ein solches Darlehen hat keinen endlichen effektiven Zinssatz, sondern dieser ist nach den obigen Überlegungen ∞ zu setzen. Solche Darlehensbedingungen sind keineswegs unmöglich, sondern nur wucherisch. Innerhalb kurzer Zeit sind dermaßen hohe Rückzahlungen zu leisten, daß zu keiner Zeit überhaupt ein Darlehen gegeben ist, da als Zeit(raum) nur ganze Jahre in Frage kommen (vgl. a. Weidigs (1986:420f) Erklärung).

Ich meine, daß das von mir vorgeschlagene und an diesem Beispiel durchexerzierte Vorgehen durchaus sinnvoll und stimmig ist und das Auftreten eines unendlich hohen effektiven Zinssatzes in Kauf genommen werden kann. Der Vorzug der einfachen Verzinsung zwischenjähriger Zahlungen liegt darin, daß sie genau der Entwicklung eines realen Kontos (mit ganzjährigen Zinsperioden) nachgebildet ist und daß der Grad des Bestimmungspolynoms nicht allzu groß wird bei nach wie vor einfachen Formelausdrücken.

Kirsch (1982/1983) plädiert dagegen - letztlich - für eine permanente, d.h. tägliche, Zinskapitalisierung als Modus für die Berechnung des effektiven Zinssatzes, wie es übrigens in vielen Ländern üblich ist. Diese Variante wäre prinzipiell mit derselben Berechtigung für die PAngV in Betracht gekommen wie die tatsächlich verwendete (mit jährlicher Zinskapitalisierung). Sie hat den Vorteil, bei extremen Beispielen wie dem obigen von Jahnke noch einen endlichen Zinssatz zu liefern und wirklich erst beim Übergang zu Anspardarlehen u.ä. zu scheitern. Außerdem entfällt bei ihr die Komplikation mit der letzten Periode. Ihr Nachteil ist ihre schwierigere Zugänglichkeit: Sie entspricht nun mal nicht dem fundamentalen wirtschaftlichen Denken in Perioden (die länger als 1 Tag sind) und bringt - letztlich - unhandlich kleine (Tages-) Zinssätze mit unhandlich großen Exponenten oder gar gebrochene Exponenten mit sich, mit denen trotz aller mathematikdidaktischen Bemühungen kaum jemand umgehen kann und (ein überholter Gegengrund:) die in der Vor-Computer-Zeit auch bei kurzen Laufzeiten nicht numerisch zu bewältigen waren.

Nachdem nun in der PAngV ein bestimmter Modus festgeschrieben ist und das Kreditgewerbe sich daran hält, forderte Hestermeyer (1985, 1987), daß der Mathematikunterricht um der Authentizität willen ebenfalls von diesem auszugehen habe. Dieser Forderung schließe ich mich an, möchte jedoch banktechnische Feinheiten weniger und die kritische Komponente und übergreifende Prinzipien stärker betont sehen (s. Bender 1987a).

Ursprünglich wandte sich Jahnke wohl gegen Hestermeyers allzu starke Ausrichtung an detaillierten Verrechnungs-Usancen des Bankgewerbes, darunter eben der Formel der PAngV (s. Jahnke 1986). Das Beispiel des Anspardarlehens ist aber zur Substantiierung *dieses* Widerspruchs doppelt ungeeignet: Zum einen ergeben sich die Probleme mit der Wohldefiniertheit des effektiven Zinssatzes aus Ansatz (7) (s.u.) und nicht aus der Bauart der Formel der PAngV mit ihrer Verrechnung zwischenjähriger Zahlungen (s. o.). Zum anderen ist diese Formel nur für Darlehen ausgelegt, die Bedingung (2) erfüllen.

4. Der interne Zinssatz für beliebige Investitionen (Darlehen)

Wenn man sich nun aber für Anspardarlehen interessiert und ihre Wirtschaftlichkeit untereinander und mit herkömmlichen Darlehen

vergleichen will, so braucht man auch für sie eine Art effektiven Zinssatz. Es liegt auf der Hand, gleich noch allgemeiner vorzugehen und die Problematik für beliebige Zahlungsströme zu erörtern, welche auch nicht mehr notwendig (4) erfüllen.
Ein Versuch ist die Charakterisierung von solchen Zahlungsströmen durch ***Paare*** von Zinssätzen. Diesem Ansatz unterliegt folgender Gedanke: Bei einem herkömmlichen Darlehen (Bedingung (2) ist erfüllt) hat der Darlehensgeber vom ersten bis zum letzten Tag eine Forderung an den Darlehensnehmer, während er im allgemeinen Fall phasenweise auch eine Verbindlichkeit haben kann. Für die Forderungenphasen wird ein gemeinsamer Zinssatz angesetzt, und für die Verbindlichkeitenphasen ebenso. Dann kann man für den gegebenen Zahlungsstrom den funktionalen Zusammenhang zwischen den beiden Zinssätzen untersuchen, was Teichroew u.a. (1965) im allgemeinen und, unabhängig davon, Kirsch (1987) im speziellen Fall des Anspardarlehens (Bedingung (4)) unternommen haben.

Jahnkes Vorschlag, einen bestimmten Wert als Abstand zwischen diesen beiden Zinssätzen vorzugeben und damit ein (oder mehrere oder kein) Paar von Zinssätzen auszuwählen, ist allerdings doppelt willkürlich, und zwar in der Wahl des funktionalen Zusammenhangs zwischen den Zinssätzen sowie in der Wahl des Wertes, und ich sehe nicht, wie daraus ein konsistentes Wirtschaftlichkeitsmaß werden soll.

Stattdessen verfolge ich den Ansatz, auch allgemeine Zahlungsströme (1) durch einen einzigen Wert zu charakterisieren, nämlich die formale Fortsetzung des herkömmlichen effektiven Zinssatzes. Gesucht ist also die positive Zahl x_0, mit der sämtliche Zahlungen des Zahlungsstroms bis zum Laufzeitende aufzuzinsen sind, so daß die Summe der Endwerte gerade verschwindet, d.h. dasjenige positive reelle x_0, das die Gleichung (7) löst.

Genau dieser Ansatz wurde von Boulding (1936) in die Finanzmathematik eingeführt. Man faßt dort Darlehensgeschäfte als eine Form von Investitionen auf und behandelt dann diesen allgemeineren Begriff; insbesondere redet man von Investor und Investitionsobjekt und allgemein vom ***internen*** (statt effektiven) ***Zinssatz*** einer Investition, der im Fall eines Darlehens genau mit dem effektiven übereinstimmt. Dieser Begriffserweiterung und dem Sprachgebrauch will ich mich im folgenden anschließen. Bei Sachinvestitionen ist ein mehrfacher Vorzeichenwechsel im Zahlungsstrom übrigens durchaus plausibel.

Der betriebswirtschaftliche Wert des Begriffs des internen Zinssatzes (im allgemeinen Fall) wurde zwar immer wieder in Frage gestellt (s. die Übersicht von Kilger (1965) oder die Kontroverse zwischen Haberstock (1971, 1972) und Hosterbach (1972a, 1972b)). Ein Gegenargument war von Anfang an die Mehrdeutigkeit: Z.B. hat die zur Investition (Zahlungsstrom)

(10) (100,-230,132)

gehörige Gleichung (7) ***zwei*** positive reelle Lösungen $x_1=0.1$ und $x_2=0.2$. (Allerdings ist die etwa von Haberstock befürwortete Kapitalwertmethode natürlich genauso mehrdeutig.)

Im ***herkömmlichen*** Fall einer Investition, bei der also Bedingung (2) erfüllt ist, erzwingt man durch die Forderung von Eigenschaften A'-E' die eindeutige Existenz des internen Zinssatzes trotz n vorhandener Lösungen bei Ansatz (7). Für die Eindeutigkeit reicht da sogar schon die Forderung von C' (Positivität), und die anderen sind Folgerungen.

Bei Beispiel (10) geht man entsprechend vor: Man variiert die Zahlungen geringfügig und beobachtet stetige Veränderungen der beiden Lösungen. Es ist sonnenklar, daß die kleinere und nur sie in Frage kommt, weil sie wächst, wenn die Investition vorteilhafter wird, also Eigenschaft D' (positive Ordinalität) hat, während die größere Lösung bei vorteilhafteren Investitionen sinkt, also D' gerade nicht erfüllt. (Diese Feststellungen sind übrigens durch Betrachten der Funktionsgraphen auf elementarem Weg beweisbar; man braucht keine Analysis.) - Nun sind Eigenschaften B'-E' zu Forderungen geworden, und nur noch A' ist Folgerung. Auf die positive Ordinalität haben schon Hosterbach/Seifert (1971) abgehoben und waren insofern weiter als Jahnke. Wie er sind sie aber nicht recht vorangekommen, weil sie nicht die Bedeutung der Gesamtsumme b_n einer Investition, d.h. der Fallunterscheidung $b_n \gtreqless 0$, erkannt haben. - Eine genauere Analyse dieses Komplexes liefert (Bender 1988b), so daß ich hier nur die Ergebnisse zu referieren brauche:

Schreibt man das Polynom (8) $p_a(y)=p_a(1+x)$ (Entwicklung als endliche Potenzreihe um den Punkt -1) als Polynom

(11) $p_c(x) := c_0x^n+c_1x^{n-1}+...+c_{n-1}x+c_n$

(Entwicklung um 0), so ergeben sich die Koeffizienten c_k durch Ausmultiplizieren (oder durch das verallgemeinerte Horner-Schema) als

(12) $c_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-j}{k-j} a_j$.

Mit dem so definierten ***transformierten Zahlungsstrom*** $(c_k)_k$ wird die Investition $(a_k)_k$ 'geglättet'; und die Klasse der Investitionen, deren transformierter Zahlungsstrom (3) erfüllt und die damit allein infolge der Positivitätsforderung einen wohldefinierten internen Zinssatz haben (herkömmlicher Fall!), ist wesentlich größer als die Klasse der Investitionen, die selbst (3) oder gar (2) erfüllen.

Ein noch einfacheres, aber schwächeres Kriterium liefert der ***kumulierte Zahlungsstrom***

$$(13) \qquad (b_k)_k := (\sum_{j=0}^{k} a_j)_k \ .$$

Wenn er (3) erfüllt (d.h. genau einen Vorzeichenwechsel hat), dann liegt ebenfalls schon der herkömmliche Fall vor. Damit ist ein Ergebnis von Witten/Zimmermann (1977) verschärft und vereinfacht (mit wesentlich simplerem Beweis). (Beispiel (10) erfüllt allerdings keines dieser Kriterien: Der kumulierte Zahlungsstrom ist (100,-130,2), und der transformierte ist (100,-30,2).)

Das absolute Glied c_n des Polynoms p_c ist gerade gleich der Gesamtsumme b_n, und sein Vorzeichen spielt für das Weitere eine wichtige Rolle.

Sei zunächst $c_n>0$. Möge p_c insgesamt m positive Nullstellen $0<x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_m$ $(0 \leq m \leq n)$ haben. Setzt man dann

$$(14) \qquad x_0 := \begin{cases} \infty & \text{für } m=0 \\ x_1 & \text{für } m>0 \end{cases} ,$$

dann hat die 'Funktion' x_0 auf der Menge aller Investitionen mit $c_n>0$ (zwecks Vergleichbarkeit wird die Bedingung $a_n \neq 0$ fallen gelassen) die Eigenschaften A'-D'. Auf der Klasse aller Investitionen mit $m \leq 2$ (die insbesondere die Anspardarlehen mit $b_n>0$ enthält) erfüllt x_0 sogar Eigenschaft E' und wird ***interner Zinssatz*** genannt.

Im Bereich $m \geq 3$ hat die Funktion x_0 jedoch ***endliche*** Sprungstellen und erfüllt E' (eingeschränkte Stetigkeit) nicht. In (Bender 1988b) wird dem dadurch Rechnung getragen, daß in diesen Fällen den internen Zinssatz als ganzes Intervall definiert wird. Diesen Ansatz möchte ich hier nun nicht weiter ausführen.

Für die Behandlung des Falls $c_n<0$ gibt es zwei grundsätzliche ***Varianten***. Die ***erste*** lautet: Man multipliziert den ganzen Zahlungsstrom mit −1, führt damit den Fall $c_n>0$ herbei und geht dann wie beschrieben vor. Diese Multiplikation bedeutet eine Vertauschung der Rollen von Investor und Investitionsobjekt und ist wegen des Vergißprinzips völlig problemlos – sie muß lediglich vermerkt werden. Inhaltlich bedeutet dieses Vorgehen, daß die Rollen von Investor und Investitionsobjekt nicht mehr direkt durch die zeitliche Verteilung der Zahlungen bestimmt sind, sondern allein durch das Vorzeichen der Gesamtsumme b_n. – Bei der ***zweiten Variante*** wird die, wie gesagt: läßliche, Eigenschaft C' (Positivität) abgeschwächt (s. dazu Bender 1988b).

In beiden Varianten gibt es bei der Hinzunahme des Falls $c_n=0$ keinen stetigen Anschluß an den Fall $c_n>0$. Dies kann man jedoch in Kauf nehmen, da hier durch die wechselnden Vorzeichen der Gesamtsummen c_n die Unstetigkeitsstellen deutlich markiert sind, und bei $c_n=0$ einfach durchweg den internen Zinssatz 0 setzen.

Für die Zahl m der positiven reellen Nullstellen liefert die ***Kartesische Vorzeichenregel*** ein einfaches Kriterium: Ist v die Zahl der Vorzeichenwechsel im transformierten Zahlungsstrom $(c_k)_k$, dann gilt immer: $0 \le m \le v$; und: m unterscheidet sich von v um eine gerade Zahl. Insbesondere gilt für $v=1$ (herkömmlicher Fall) auch $m=1$. In der zweiten Variante gilt für die Zahl der negativen reellen Nullstellen >-1 eine analoge Regel (Satz von Fourier-Budan; s. Henrici 1974:443).

Die relevanten Eigenschaften des auf dem Raum aller Investitionen (1) mit $m \le 2$ definierten internen Zinssatzes lauten nun (in der ***ersten Variante*** bei Einschluß des Falls $c_n<0$):

A" Der interne Zinssatz ist eindeutig definiert (***Existenz***, ***Eindeutigkeit***).

B" Erfüllt der Zahlungsstrom $(a_k)_k$ Bedingung (3), d.h. hat er genau 1 Vorzeichenwechsel, dann stimmt der interne Zinssatz mit dem herkömmlichen überein (***Permanenz***).

C" Der interne Zinssatz ist eine nicht-negative Zahl oder ∞ (***Positivität***).

D" Ist eine Investition offensichtlich vorteilhafter als eine andere, dann hat sie einen höheren internen Zinssatz, es sei denn dieser ist bei beiden 0 oder bei beiden ∞ (***positive Ordinalität***).

E" Unterscheiden sich zwei Investitionen nur geringfügig voneinander, dann unterscheiden sich auch ihre internen Zinssätze nur geringfügig, es sei denn einer ist ∞ und der andere nicht oder die beiden Gesamtsummen haben verschiedene Vorzeichen (+,-,0) (***eingeschränkte Stetigkeit*** mit ***markierten*** Unstetigkeitsstellen).

Jahnkes (1987) Beispiele wären nun folgendermaßen zu behandeln: Das auf S.196 ergibt den Zahlungsstrom (55,120,120-598·7/12, 120-598·5/12,120,65) und den internen Zinssatz 0.0395. Entsprechend ergeben die beiden Beispiele auf S.198 die internen Zinssätze 0.0563 und 0.0587, und selbstverständlich werden diese kleiner, wenn die Bank früher auszahlt oder einen höheren Betrag auszahlt (wenn also die Investition offensichtlich schlechter wird); es ist nur darauf zu achten, daß die Bedingung $b_n>0$ erhalten bleibt, was z.B. nicht der Fall ist, wenn die Bank im 3. Beispiel mehr als 720 zahlt: Dann wird sie nämlich zum Investitionsobjekt, der ganze Zahlungsstrom muß mit -1 multipliziert werden, und dann bedeutet eine weitere Vergrößerung des Auszahlungsbetrags durch die Bank eine ***Verbesserung*** der Investition für den Bank***kunden***, die eine Erhöhung des internen Zinssatzes mit sich bringt: Von 0.0103 bei 726 auf 0.0203 bei 732 mit den Zahlungsströmen (-55,-120,-120,-120+121,-120+605,-120,-65) bzw. (-55,-120,-120,-120+122,-120+610,-120,-65).

Beim Beispiel auf S.199 ist der Zahlungsstrom ($\pm1,\pm1,\mp5,\pm1,\pm1,\pm1$), also $b_n=0$ und der interne Zinssatz 0. Beim Beispiel auf S.200f schließlich ist $b_n=0.05$, falls die Bank der Investor ist, und richtig ergibt sich bei der Auszahlung des Kredits 2 Jahre und M Monate vor Laufzeitende der interne Zinssatz x_0 zu:

M	10	9	8	7	6
x_0	0.0242	0.0329	0.0563	∞	∞

Diesen Effekt habe ich bereits in (Bender 1987a) beschrieben und oben nochmals erläutert.

Beispiel 3 von Kirsch (1987) ist gerade der Fall 8c in (Bender 1987a), da $b_n=0$ ist, und zwar die Situation, daß das Darlehen genau in der Mitte der Laufzeit ausgezahlt wird; es ist also ein besonders spezieller Randfall mit dem internen Zinssatz 0.

5. Diskussion einiger Einwände gegen den Begriff des internen Zinssatzes

Das Bestreben des Investors ist es, mit seiner Investition einen möglichst hohen internen Zinssatz zu erzielen. Bauspardarlehen unter heutigen Bedingungen haben einen internen Zinssatz von ∞ (man mache sich das plausibel, indem man verschiedene Zahlungsströme betrachtet, die alle dieselbe Rückzahlungsstruktur haben, während das Darlehen zunächst zum Zeitpunkt 0 und dann immer später ausgezahlt wird), und kein nach betriebswirtschaftlichen Gesichtspunkten geführter Betrieb würde sich auf eine Finanzierung über ein Bauspardarlehen einlassen. Bei Privatpersonen mag das anders sein; das kann aber nicht bedeuten, daß dann (abweichend von sonstigen Gepflogenheiten) eine andere Kennzeichnung anstelle des internen Zinssatzes zu verwenden sei; sondern mit dem ganz normal ausgerechneten internen Zinssatz kommt gerade zum Ausdruck, wie ungünstig, betriebswirtschaftlich gesehen, eine solche Finanzierung ist.

Weiter: selbstverständlich ist eine Investition (-100,110) mit einem internen Zinssatz von 0.1 einer Investition (1,1) mit einem internen Zinssatz von ∞ vorzuziehen (wenn man die 100 zum Auszahlen hat). In der überwältigenden Mehrheit der Fälle ergeben realistische Investitionen (einschließlich Bankdarlehen) einen endlichen internen Zinssatz, und dieser liefert ***eine*** brauchbare Grundlage für betriebswirtschaftliche Entscheidungen.

Auch der Fall, daß bei einer Investition die Gesamtsumme b_n verschwindet, ist unrealistisch. Daß das zufällig geschieht, ist unwahrscheinlich und kann z.B. durch Erhöhung von a_n um 1 vermieden werden. Und es ist unüblich, daß ein Investor seine Investition so plant, daß $b_n=0$ wird, auch wenn er durch eine Auszahlung, die später als die Laufzeitmitte liegt, den internen Zinssatz sehr wohl beliebig weit erhöhen kann. Insbesondere wird er keinen Zahlungsstrom der Form

(15) (1000,1000,1000-5000,1000,1000)

planen, da er diesen so interpretiert, daß er 1 Jahr lang 1000 und 1 Jahr lang 2000 zur Verfügung hat und dann in umgekehrter Reihenfolge 1 Jahr lang 2000 und 1 Jahr lang 1000 zur Verfügung stellen muß, für ihn die Rendite also 0 ist, so daß der interne Zinssatz von 0 diese Investition angemessen beschreibt.

Für beliebige Investitionen, speziell auch für den Fall eines herkömmlichen Darlehens, kann man für eine beliebige Teillaufzeit von 0 bis k ($0<k<n$), jedenfalls wenn gewisse Vorzeichenrestriktionen erfüllt sind, einen Zinssatz x_1 vorgeben, mit dem die Zahlungen in dieser Teillaufzeit aufgezinst werden, und in Abhängigkeit davon den Zinssatz x_2 ausrechnen, mit dem die

Zahlungen der Restlaufzeit aufzuzinsen sind, damit die Summe der Endwerte gerade verschwindet. Unter speziellen Bedingungen läßt sich dieses Vorgehen zu einer Art Heron-Verfahren zur Ermittlung des effektiven Zinssatzes bei herkömmlichen Darlehen ausbauen.

Die Einschätzung der Wirtschaftlichkeit des gegebenen Zahlungsstroms aufgrund der funktionalen Abhängigkeit zwischen x_1 und x_2 ist (anders als mit dem internen Zinssatz!) jedoch diffizil: Man muß da funktionale Zusammenhänge in eine Ordnung bringen, und zwar solche, die in der Regel nicht oder nur mit großer Mühe expliziert werden können. Wie schwierig dies ist, zeigt schon ein Vergleich der beiden Investitionen (100,-230,132) und (100, -240,144). Während bei einem Forderungenzinssatz von 0.09 die erste einen niedrigeren Verbindlichkeitenzinssatz hat, nämlich 0.0909 gegenüber 0.0992, ist es bei einem Forderungenzinssatz von 0.26 umgekehrt: 0.2692 gegenüber 0.2632.

Der begriffliche Nutzen dieses Splittings und der Analyse des funktionalen Zusammenhangs ist eher darin zu sehen, daß ein Investor (die Bank) damit bei gegebenem (geplantem) Zahlungsstrom einen Modus festlegen kann, wie die Verrechnung von Zinsen auf einem Konto vorzunehmen ist. Da hat der Fachmann allerhand Gestaltungsmöglichkeiten. Ja, er könnte seinen Forderungenzinssatz sogar so wählen, daß der Verbindlichkeitenzinssatz niedriger als dieser ausfällt (s. Kirsch 1987), z.B. bei (10): x_1=0.15 ergibt x_2=0.1478. Wer wollte es ihm verbieten? Er wird es in der Regel nicht tun, weil er dabei dem Investitionsobjekt einen recht hohen Zinssatz gewähren müßte (nämlich höher als der interne Zinssatz, den er als Betriebswirt in der Regel als solchen zur Kenntnis nimmt!) und er das Risiko hat, daß das Geldgeschäft nach der Forderungenphase nicht mehr ordentlich abgewickelt wird. So wird er stattdessen zwei moderate Zinssätze wählen mit einem moderaten Abstand mit dem 'richtigen' Vorzeichen.

Im Bankgewerbe ist die Zinssatzfindung ein recht komplexer Prozeß, der hier nur idealtypisch beschrieben ist: Ausgehend von einer Zielrendite, dem internen Zinssatz, der durch einen Zahlungsstrom gegeben sein kann, werden sämtliche Details der Zahlungs- und Verrechnungsmodalitäten festgelegt, die dann zu diesem internen Zinssatz bzw. Zahlungsstrom führen. Das ist genau der umgekehrte Prozeß, wie er durch das Vergißprinzip zur Ermittlung des internen Zinssatzes (wer will, mag dies auf herkömmliche Darlehen beschränkt sehen) vorgegeben ist.

Einer der Zwecke all dieser komplizierten Modalitäten war immer, die Höhe des internen (effektiven) Zinssatzes zu verschleiern. Ein besonders probates Mittel sind die üblichen Bedingungen bei An-, speziell Bauspardarlehen (s. Bender 1987b). Man muß einfach zur Kenntnis nehmen, daß diese - auf die ganze Vertragsdauer gesehen - für den Kunden wesentlich ungünstiger sind, als in einem effektiven Zinssatz von ca. 0.057 für die Darlehensphase allein zum Ausdruck kommt. Diese Verharmlosung für den Laien wird noch durch die zusätzliche Angabe des effektiven Zinssatzes von ca. 0.027 für die Ansparphase gesteigert, da damit eine Orientierung an der Differenz suggeriert wird.

Doch auch für den Fachmann, der dieser Suggestion nicht unterliegt, ist die Kenntnis der beiden Zinssätze ungenügend. Um 1980 haben viele Bausparer leidvoll erfahren müssen, daß ihre Zinssätze zwar nach wie vor 0.027 und 0.057 betrugen, daß sie für ihr Bauspardarlehen aber einen erheblich höheren Aufwand treiben mußten, als erwartet. Es kommt nämlich bei einem Anspardarlehen wesentlich auf die Verteilung der Zeitdauer und des Geldvolumens auf die beiden Phasen an. Man benötigt also noch weitere Angaben. Diese stecken natürlich alle in dem funktionalen Zusammenhang zwischen Verbindlichkeiten- und Forderungenzinssatz. Das heißt aber, daß man mehrere Paare betrachten muß, was die Interpretation erschwert und das Verfahren umständlich macht.

In Diskussionen wird hin und wieder die Auffassung vertreten, bei einem Anspardarlehen dürfe deswegen kein interner Zinssatz (mit gleichem Zinsfaktor für sämtliche Zahlungen) angesetzt werden, weil die Bank, platt ausgedrückt, etwas verdienen müsse und daher den nominalen Zinssatz für ihre Forderungen höher als den für ihre Verbindlichkeiten festsetze und dieses Splitting sich im internen Zinssatz nicht wiederspiegele. Dieses Argument wird dem Wesen des internen Zinssatzes als einem Wirtschaftlichkeitsmaß in mehrerlei Hinsicht nicht gerecht:

Wie schon ausgeführt, verdient ein Investor etwa mit der Investition (10) bei einem Ansparzinssatz $x_1=0.15$ und einem Darlehenszinssatz $x_2=0.1478$ (!) so viel wie z.B. bei $x_1=0.01$ und $x_2=0.0233$ (!). Auch ohne diese Zahlen'akrobatik' kann die Bank bei $x_2 \geq x_1$ 'verdienen': Bei sinkendem Marktzins, bei geeignetem Gesamt-Finanzgefüge der Bank, bei einem Verbindlichkeitensockel des Kunden usw.

Natürlich ist es üblich, daß in der Darlehensphase der nominale Zinssatz höher ist als in der Ansparphase. Aber das ist doch eine deskriptive und keine normative (ideale) Regel (wie z.B. jährliche Zinskapitalisierung)! Müßte man auch solche deskriptiven Regeln einbeziehen, dann könnte man schon für herkömmliche Darlehen gar keinen internen (effektiven) Zinssatz definieren, weil ja häufig der nominale Zinssatz über die Laufzeit nicht konstant ist, Zahlungen und/oder nominale Zinszeitpunkte nicht jährlich stattfinden oder sich einmal ein zu kleiner Zinssatz ergibt (von dem der Investor nicht 'leben' könnte) usw.

Die Aufgabe des internen Zinssatzes (als einer Art Mittelwert) ist doch gerade, alle Abweichungen (von sich) aufzufangen und ihr Zusammenwirken in einer einzigen Zahl zum Ausdruck zu bringen und dabei auch Investitionen (Darlehen) dingfest zu machen, die sich allzu sehr vom 'Normalen' unterscheiden. Bei herkömmlichen Darlehen hat mit dieser Auffassung niemand Schwierigkeiten, und es ist klar, daß unterschiedliche Zinssätze in unterschiedlichen Perioden schon bei Aufstellung des Zahlungsstroms dem Vergißprinzip anheimfallen. Dieselbe Aufgabe hat der interne Zinssatz auch bei allgemeinen Investitionen. Für den Investor unterscheidet sich etwa ein Anspardarlehen von einem herkömmlichen nicht prinzipiell, sondern nur durch den Vorteil, daß er das Darlehen später auszahlen kann und dadurch die Investition für ihn günstiger wird. (Diese Überlegung lag auch Jahnkes gesamtem Ansatz zugrunde und verschafft diesem prinzipielle Zulässigkeit). Für den Numeriker allerdings ist das Anspardarlehen anders gelagert als ein herkömmliches.

Man muß den Begriff des internen Zinssatzes ganz grundsätzlich sehen: Auf der Menge aller Investitionen (die durch ihren Zahlungsstrom charakterisiert sind) ist eine Funktion gesucht, die jeder Investition eine reelle Zahl zuordnet und sie damit in eine Rangfolge bringt, insbesondere auch bezüglich herkömmlicher Investitionen (Darlehen). Diese Funktion soll natürlich Eigenschaften A.-E. (eventuell modifiziert; s. z.B. A"-E", u.U. ohne C") erfüllen. Der wie oben definierte interne Zinssatz erfüllt A"-D" und auf einer (aus der Sicht der Praxis) sehr großen Teilklasse von Investitionen auch noch E". Vernünftigerweise fallen bei ihm frühere und höhere Zahlungen stärker ins Gewicht, und besonders Eigenschaft B" legt nahe, ihn im allgemeinen Fall genau wie im herkömmlichen mit Ansatz (7) zu definieren. Für mich ist diese Analogie mehr als formal: Sind die Netto-Einzahlungen insgesamt höher als die Netto-Auszahlungen, dann ist der interne Zinssatz ein Maß dafür, wie spät der Schwerpunkt der Einzahlungen nach dem der Auszahlungen liegt; je früher der Schwerpunkt der Einzahlungen, desto höher der interne Zinssatz. Wer diese Interpretation nicht für angemessen hält, mag den internen Zinssatz ganz formal als Funktion auffassen, die die o.a. Eigenschaften hat.

Literatur

Bardy, Peter (1984), Katharina Baulig, D. Lübbert, Gerhard Preiß und E. Wenzelburger-Solache Orozco: Sachrechnen für Lehrer an Berufsschulen. BS3: Zinsrechnen. Tübingen: DIFF

Becker, Gerhard (1982): Zu der Verordnung über die Berechnung der Effektiv-Verzinsung mit Wirkung vom 1.1.1981. In: mathematica didactica 5, 43-49

Bender, Peter (1987a): Effektiver Zinssatz, Preisangabenverordnung, Anspardarlehen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 87-90

Bender, Peter (1987b): Wie wirtschaftlich ist Bausparen? In: mathematiklehren 22, 36-40

Bender, Peter (1988a): The internal rate of return of an investment. Erscheint in: Blum u.a. (1988)

Bender, Peter (1988b): Zur Eindeutigkeit des internen Zinssatzes und zur Interpretation bei fehlender Eindeutigkeit. Gh Kassel: Manuskript (Preprint und Publikation in Vorbereitung)

Blum, Werner (1985): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In: Mathematische Semesterberichte 32, 195-232

Blum, Werner (1988), John Berry, Rolf Biehler, Ian Huntley, Gabriele Kaiser-Meßmer und Lothar Profke (Hrsg.): Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics. Chichester: Ellis Horwood

Boulding, K.E. (1936): Time and Investment. In: Economia 3, 196-220

Haberstock, Lothar (1971): Einige kritische Bemerkungen zur Kapitalwert-Methode. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 41, 285-288

Haberstock, Lothar (1972): Kapitalwert oder interner Zinsfuß? In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 42, 216-218

Henrici, Peter (1974): Applied and computational complex analysis. Band 1. New York: Wiley & Sons

Hestermeyer, Wilhelm (1985): Der effektive Zinssatz bei Kleinkrediten. In: Praxis der Mathematik 27, 129-145, 237-249

Hestermeyer, Wilhelm (1987): Wer mit Schulden leben will, muß rechnen können. In: mathematiklehren 20, 44-47

Hosterbach, E. (1972a): Kapitalwert oder interner Zinsfuß? In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 42, 201-216

Hosterbach, E. (1972b): Noch einmal: "Kapitalwert oder interner Zinsfuß?" In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 42, 376-377

Hosterbach, E. und O. Seifert (1971): Zur Mehrdeutigkeit des internen Zinsfußes. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 41, 867-880

Jahnke, Thomas (1986): Überraschungen bei der Berechnung des "Effektiven Zinssatz". In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1986. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 142-145

Jahnke, Thomas (1987): Überraschungen bei der Berechnung des "Effektiven Zinssatzes". In: Journal für Mathematikdidaktik 8, 191-204

Kaiser, Gabriele (1982), Werner Blum und Michael Schober: Dokumentation ausgewählter Literatur zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht. Karsruhe: Fachinformationszentrum

Kilger, Wolfgang (1965): Zur Kritik am internen Zinsfuß. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 35, 765-798

Kirsch, Arnold (1982/1983): Der effektive Zinssatz bei Kleinkrediten. In: Praxis der Mathematik 24, 65-71, 164-172; 25, 73-77

Kirsch, Arnold (1987): Bemerkungen zur "Berechnung" des Effektiven Zinssatzes - Eine Ergänzung zu der Arbeit von Thomas Jahnke. In: Journal für Mathematikdidaktik 8, 321-330

Lenné, Helge (1969): Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Stuttgart: Klett 1969

Teichroew, Daniel (1965), Alexander A. Robichek und Michael Montalbano: Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty. In: Management Science 11, 395-403

Weidig, Ingo (1986): Zur Berechnung des effektiven Jahreszinssatzes bei Ratenkrediten. In: Praxis der Mathematik 28, 419-422

Wille, Friedrich (1985): Über den Einfluß der Geldentwertung auf Hpotheken. In: Mathematische Semesterberichte 32, 233-254

Witten, Peer und Horst-Günther Zimmermann (1977): Zur Eindeutigkeit des internen Zinssatzes und seiner numerischen Bestimmung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 47, 99-114

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Peter Bender
Gh Kassel Fb 17
Heinrich-Plett-Str. 40
D-3500 Kassel

privat:
Marie-Luisen-Str. 10A
D-6521 Bechtheim