SCHRIFTENREIHE DIDAKTIK DER MATHEMATIK BAND 18
Anschauliches Beweisen
Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1989 - Verlag B. G. Teubner, Stuttgart

PETER BENDER, KASSEL

# ANSCHAULICHES BEWEISEN IM GEOMETRIEUNTERRICHT - UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG VON (STETIGEN) BEWEGUNGEN BZW. VERFORMUNGEN

## 1. Rechtfertigung und stoffliche Einordnung des Unterrichtsinhalts 'Beweisen'

In Forschung und Lehre tritt die Mathematik als eine Aneinanderreihung von Beweisen auf; auch Berechnungen, Konstruktionen, Definitionen (deren Widerspruchsfreiheit) usw. werden als Beweise dargeboten. Daß im Mathematikunterricht des klassischen Gymnasiums, und zwar schon auf der Mittelstufe, das Beweisen gelehrt wird, stand immer außer Frage; und im Zuge der Schaffung der Sekundarstufe um 1970 wurde das Beweisen auch als Unterrichtsinhalt für Real- und Hauptschule (im Schulsystem der BRD) diskutiert unter dem Schlagwort der Orientierung des Unterrichts an der Wissenschaft. Man versprach sich vom Mathematikunterricht, und speziell auch vom Beweisen, einen automatischen Transfer der erworbenen Fähigkeiten in die Lebenswelt der Schüler.

Diese Vorstellungen sind treffend von Menger (1971:2) in Worte gefaßt worden: "There is no better immunization against the pseudo-inferences and sham proofs that abound in extra-mathematical reasoning and in daily life than to be exposed in one's youth to a truly airtight deductive theory, however modest in scope." Nach meinen umfangreichen Erfahrungen in zahlreichen Gremien in zahlreichen Hochschulen sind allerdings die Menschen, die das mathematische Beweisen sogar berufsmäßig betreiben, nicht im mindesten dagegen gefeit, "Scheinbeweise" zu produzieren oder "Trugschlüssen" aufzusitzen. Der analytische Verstand wird offensichtlich von Interessen, Einstellungen, Eitelkeiten usw. dominiert. - Von dem Glauben an den automatischen Transfer ist man heute weitgehend abgekommen.

Aber auch wenn wir einmal im engeren Umfeld des Mathematikunterrichts bleiben, können wir nur magerste Erfolge auf dem Gebiet des Beweisens verzeichnen: Dazu verweise ich auf Untersuchungen von Schupp (1974) oder Leppig (1979) zu den Beweisfähigkeiten von Studienanfängern mit mehr oder weniger Affinität zur Mathematik; auf die jährlichen Berichte über die Ergebnisse der Abschlußprüfungen in der Oberschule der DDR (s. z.B. Lehmann &

Maske 1977 und Birth u.a. 1979); oder auf die jüngsten Erhebungen von Beckmann (1986) in ganz normalem Geometrieunterricht der Sekundarstufe I.

Trotzdem bzw. deswegen strengen sich Didaktiker und Lehrer fortwährend an, Schülern das Beweisen nahezubringen. Besonders in der DDR richtet sich alljährlich ein relativ großer Anteil der mathematikdidaktischen Bemühungen auf die Methodik des Beweisens, wobei man sich gern auf den Lehrplan beruft, in dem das Beweisen eine Leitlinie für den Mathematikunterricht ist (s. Lehmann 1977, Walsch 1979, Freytag 1984 u.v.a.). Unabhängig von solchen Vorgaben sind für die Mathematikdidaktik jedoch inhaltliche und weniger formale Rechtfertigungsgründe interessant. Da findet man in der Literatur, auch in der der DDR:

Stofflich:
- Beweise sind Lehrstoff wie Sätze,
- Beweise machen Sätze klarer,
- Beweise stellen Beziehungen zwischen Sätzen, Begriffen usw. her.

Erkenntnis- & bildungsphilosophisch:
- Beweise gehören zu einem ausgewogenen Bild von Mathematik,
- Beweise, und überhaupt deduktives Denken, sind eine besondere und relevante Form der Erkenntnisgewinnung.

Pädagogisch:
- Beweise stehen im Dienste von Lernzielen wie 'Argumentieren', 'Problemlösen', aber auch 'Ausdauer', 'Selbstdisziplin' usw.

Eine psycho-soziologisch orientierte Untersuchung der Motive von Didaktikern und Gymnasiallehrern (sagen wir: der letzten 100 Jahre), das Beweisen in den Mathematikunterricht aufzunehmen, würde wohl vor allem den Charakter des Schulfachs 'Mathematik' als Abbild des entsprechenden Universitätsfachs zutage fördern. Ich möchte mich jetzt aber gar nicht darauf einlassen, die Stichhaltigkeit dieser Rechtfertigungsgründe zu überprüfen, sondern als gegeben annehmen, daß das Beweisen mit den o.a. Begründungen ein Unterrichtsinhalt ist.

Was soll überhaupt unter Beweisen verstanden werden? Z.B. nach Pracht (1979:349) "... können wir Beweisen im Mathematikunterricht als eine auf Denken beruhende Tätigkeit definieren, bei



der den logischen Regeln gemäß durch Verweis auf passende, schon bekannte mathematische Einsichten neue Aussagen gewonnen werden." Ähnliche Begriffsbestimmungen finden sich explizit oder implizit häufig in der Literatur, und für die Belange vieler stoffdidaktischer Arbeiten sind sie durchaus geeignet. Sie greifen jedoch zu kurz, wenn es um Fragen der Rechtfertigung, des Lehr-Lern-Prozesses usw. geht:

Die Umwandlung der Voraussetzungen in die Behauptungen eines Satzes mit den Schlußregeln der Logik bringt ja kein neues Wissen, das nicht schon irgendwie in den Voraussetzungen steckt. Erst wenn man die Ebene der Syntax verläßt und den beteiligten Begriffen, Beziehungen, Schlüssen usw. vor dem Hintergrund intendierter Anwendungen Bedeutungen zuschreibt, können Beweise ihre erkenntniserweiternde Funktion erfüllen (so Jahnke 1978 unter Anlehnung an das Theorienkonzept Sneeds (1971) zum sog. Paradoxon des Beweisens).

Hier liegt m.E. auch genau der Grund, warum der Computer trotz aller Anstrengungen der KI-Forschung dem menschlichen Mathematiker noch lange nicht das Wasser reichen kann: Er kann zwar aus einem Axiomensystem in kurzer Zeit eine Unmenge wahrer Aussagen ableiten. Aber schon bei so etwas Primitivem wie dem Schachspiel sind die menschlichen Spitzenkönner dem Computer heute noch überlegen. Erst recht beim Beweisen bleibt die Tätigkeit des Computers sinn-los; es ist Zielvorgabe und Bedeutungsstiftung durch den Menschen notwendig.

Das populärste Beispiel für einen einschlägigen Computereinsatz ist wohl der Beweis des Vierfarbensatzes 1976. Obwohl die Inkorrektheit dieses Beweises immer wieder behauptet wird, wurde sie bis jetzt noch nicht verifiziert. Dieser zum Image der Mathematik nicht passende Makel der Unsicherheit weist auf den kommunikativen Aspekt des Beweisens: Ein Beweis ist, was die Gemeinschaft der Mathematiker als Beweis akzeptiert. Zur durchaus subjektiven Findung eines Beweises gehört untrennbar seine Darstellung für ein Publikum.

Insbesondere für den weniger Geübten wird dabei auch die Frage der Explizitheit ein Problem: Allzu ausführliche Darstellungen sind mindestens unökonomisch, ungenießbar und ein Zeichen fehlender Souveränität. Allzu knappe Ausführungen bergen die Gefahr von Beweislücken; aber auch wenn sie lediglich Komprimierungen vollständiger Beweise sind, ist ihre Wirkung zweischneidig: Der Zwang zur Eigentätigkeit kann für den Leser ärgerlich bis überfordernd, aber auch heilsam sein.

Der kommunikative Aspekt ist in dem dialogischen Beweisverfahren von Lorenzen (1962) quasi formalisiert. Dialogische Beweise sind von Vollrath (1967) für die Schule vorgeschlagen worden, jedoch ohne allzu großen Erfolg.

Explizitheit ist aber nicht nur eine Kategorie der Kommunikation, sondern auch des Theorie-Niveaus.

Eine wesentliche Funktion von Beweistexten ist die Objektivierung des Beweises, insbesondere ihn unabhängig vom Entstehungszusammenhang zu machen. Es gibt wenige Ausnahmen, wo dieser Zusammenhang einmal explizit gemacht wird: Van der Waerden 1954/1973 oder auch Fraedrich 1979, Müller 1985. Am berühmtesten ist wohl die konstruktible Genese eines Beweises des Eulerschen Polyedersatzes von Lakatos (1961/1979), ein Paradebeispiel, wie die Tätigkeit des Beweisens (und der Beweisanalyse) zur Präzisierung, Klärung oder gar Begriffsbildung und damit zur Findung von Sätzen beiträgt (s.a. Pickert 1984 und dessen Kritik an Lakatos).

Alle diese Aspekte hat Stein (1986:296) in folgendem Schema zum "Beweisablauf" (wie er das nennt) zusammengefaßt: (Satzfindungsprozeß) - (Satz) - (Suche nach Gründen, Zusammenhängen - deduktive Durcharbeitung) - (gedankliche Repräsentation - schriftliche Lösung).

Dem Unterricht im Beweisen stehen traditionell zwei große Teilgebiete der Mathematik zur Verfügung: Arithmetik & Algebra einerseits und Geometrie andererseits; zum ersteren Bereich gehört seit langem auch die Analysis (s. dazu Volkert 1986). Da wird im Unterricht zwar auch schon mal mit der Anschauung argumentiert, aber als Beweis werden im Prinzip nur Rechnungen mit Zahlen- (bzw. Mengen-)Variablen akzeptiert.

Solche Beweise haben den Vorzug, daß sie eben nicht an die Struktur des Anschauungsraums (ein extrem spezielles mathematisches Gebilde) gebunden sind und daß die Schlüsse sinn-los, nämlich ohne Bedeutungsaufwand (im Prinzip also auch vom Computer), geführt werden können, d.h. daß nur wiederholt Rechenregeln



anzuwenden sind. Z.B. im n-dimensionalen euklidischen Vektorraum: Ist $a+b+c=0$ und $ab=0$, dann ist $a^2+b^2-c^2=0$ (Pythagorassatz); denn $a^2+b^2-c^2=a^2+ab+ba+b^2-c^2=(a+b)^2-c^2=(-c)^2-c^2=0$.

Selbstredend kann es auch in Arithmetik & Algebra sinnvoll sein, besonders aus didaktischer Sicht, den Termen und Beziehungen, die im Laufe eines Beweises auftreten, eine Bedeutung zuzuweisen. Z.B. kann man den Ausdruck $n(n+1)/2$ für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen als Summe von $n/2$ Summanden vom Wert $n+1$ deuten, die ihrerseits durch Paarbildung aus passenden Folgengliedern entstanden sind. Aber wenn man das Niveau allereinfachster Beweise verläßt, sind solche Interpretationen meistens nicht mehr möglich und aus beweisökonomischer Sicht auch gar nicht erwünscht. Wie primitiv die verwendeten Regeln der Arithmetik großenteils sind, kann man sich buchstäblich veranschaulichen: es ergeben sich nämlich oft Zusammensetzungen von Rechtecken in kanonischer Lage, z.B. bei der binomische Formel oder bei der Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen:

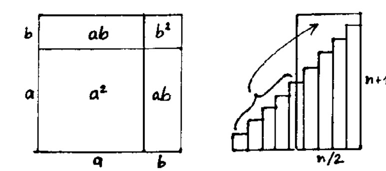



Abb. 1

In der Geometrie hat man da auf elementarem Niveau herausforderndere Beweisaufgaben, bzw. herausfordernde Beweisaufgaben befinden sich bei ihr auf elementarerem Niveau. Freudenthal nennt sie "Exerzierplatz für die Logik" (1973:570). Dies ist nicht nur auf Schüler gemünzt; traditionell bietet die Geometrie auch denen, die nicht hauptberuflich Mathematiker sind, z.B. Didaktikern und Lehrern, eine Gelegenheit zu forschender Betätigung (was ihrer Rolle als Schulfach durchaus förderlich war).

Die elementare Begrifflichkeit der Geometrie steht in einem engen Zusammenhang mit ihrer (möglichen) lebensweltlichen Bedeutung für die Schüler (auch wenn diese in Unterricht und Didaktik häufig recht oberflächlich gesehen wird). Viele mathematische Zusammenhänge erhalten ihren Sinn (erst, bzw. auch) in einer Verräumlichung. Z.B. sehe ich den Wert der berühmten Aufgabe über das Seil um den Erdäquator darin, daß sie eine Versinnlichung der mathematischen Linearität darstellt.

Daß die Geometrie in der Pflichtschule (der bis zu 16-Jährigen) als Lehre von dem als euklidisch angenommenen Anschauungsraum getrieben wird, steht für mich außer Zweifel (s.a. Kirsch 1980) und soll jetzt auch nicht problematisiert werden. Dabei kommt die Analytische Geometrie wohl nicht in Frage: Ihren ungenießbaren Formelapparat kann man zwar mit dem Vektorkalkül etwas verbergen, aber die meisten Schüler sind mit dieser Formalisierung überfordert. Entscheidend kommt noch hinzu, daß die Analytische Geometrie die zentralen Ideen der Geometrie (s. z.B. Bender 1983) auf Zahlenbeziehungen reduziert und ihnen damit einen Teil ihres Wesens nimmt (s. z.B. den o.a. Beweis des Pythagorassatzes).

Ähnliche Probleme bringt die Algebraisierung der Geometrie durch das Studium der Affinen Gruppe mit sich: Es ist ein viel zu langer Anlauf erforderlich, bis man zu interessanten Sätzen kommt, und bei diesem Anlauf hält die Mehrzahl der Schüler sowieso nicht mit (s.a. die Kritik von Schwartze (1987)). Entsprechende in den sechziger und siebziger Jahren propagierte Ansätze sind in der Pflichtschule rasch gescheitert, allerdings nicht ohne Spuren zu hinterlassen: Zum einen haben sie bei den Lehrern und Schülern die (m.E.) berechtigte Frage provoziert, ob man Arithmetik (bzw. Algebra) nicht gleich ganz entgeometrisiert treiben solle, und damit zu einem Niedergang der Geometrie im Unterricht beigetragen. Zum anderen haben sie mit ihrem Nachlaß der abbildungsgeometrischen Methode in der Figurenlehre eine grundlegende geometrische Denkweise zurückgedrängt, nämlich das Denken in (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen, will sagen: aus dem offiziellen Curriculum verdrängt und damit bei Lehrern und Schülern einen Dauerkonflikt verursacht zwischen 'offiziellen' statischen Zuordnungen und ihren persönlichen kontinuierlichen Bewegungsvorstellungen. (Dieser Aspekt wird in Abschnitt 3 noch einmal aufgenommen; eine umfassende Kritik findet sich in Bender 1982).

Ich gehe also davon aus, daß in der Pflichtschule synthetische Geometrie des euklidischen Raums (u.a.), den realen Raum zu strukturieren und die Nutzbarkeit dieser Struktur zu erforschen. Nach unserer Auffassung (s. Bender & Schreiber 1985) gehören zu einem geometrischen Begriff seine Realisate (u.a. Zeichnungen) wesentlich mit dazu, und diese, sowie der ganze reale Raum sind nicht bloß Modelle für eine ansonsten autonome mathematische Theorie. Es stellt sich



also gar nicht erst die Frage nach Rechtfertigung, Zulässigkeit (unbeschadet der Annahme der Nicht-Euklidizität für den Weltraum durch die Physiker) oder prinzipieller Eignung der Objekte des Anschauungsraums zur Modellierung geometrischer Begriffe; – es besteht da vielmehr eine recht weit gehende (partielle) Identität. Hanischs (1985) (absichtlich) mangelhafte Zeichnung etwa ist also nicht das Produkt einer falschen Modellbildung, sondern schlicht eine fehlerhafte Notation der Beziehung zweier Variablen (hier: der beiden strichpunktierten Mittelsenkrechten), wie sie auch in der Algebra vorkommen kann.

Schon der Mathematiker verwendet beim Beweisen laufend die räumliche Anschauung: Nicht nur, daß er bei der Fassung bzw. Verschriftlichung seiner Gedanken den (vorgestellten) realen Raum bzw. eigentlich den Anschauungsraum der idealen Gebilde benutzt, er verwendet häufig Zeichnungen (und andere Realisate), Bewegungen, Verformungen und andere Operationen (oder Vorstellungen davon) zu allerlei heuristischen Zwecken, aber auch u.U. für den Beweis selbst (s. z.B. van der Waerden 1954/1973). Dies gilt insbesondere in der Geometrie, wo die satz***findende*** Funktion von Veranschaulichungen wesentlich hinzutritt, und die beweisende Funktion ein noch höheres Gewicht hat; und zwar erst recht mit voller Legitimation für die Schüler. Man beachte jedoch, daß dieses denkpsychologische Argument für die Nützlichkeit (bei den Schülern sogar: Unerläßlichkeit) von Veranschaulichungen in der Geometrie (in der o.a. Auffassung) lediglich sekundär ist gegenüber der weitgehenden inhaltlichen Identität von Begriff und Realisat.

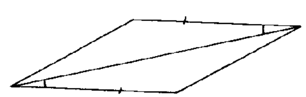
Diese Überlegungen münden nun in folgende These: ***Im Geometrieunterricht der Pflichtschule ist 'Beweisen' (im wesentlichen) nichts anderes als 'anschauliches Beweisen'.*** (Bis etwa Mitte des 19. Jhdts. galt dies auch in der Analysis der Mathematiker; s. Volkert 1986.) Natürlich wirkt der Beweis des Höhensatzes $h^2 = a^2-p^2=pc-p^2=pq$ nicht anschaulich, aber er ist es (im Sinne dieser These) doch, da zum einen Bezeichnungen und Beziehungen einer Zeichnung entnommen sind, die von den Schülern i.a. nicht als reine Relationentabelle aufgefaßt wird, und zum anderen Pythagoras- und Kathetensatz verwendet werden, die ihrerseits in aller Regel anschaulich bewiesen worden sind.

## 2. Beweisschwierigkeiten in der Geometrie und ihre Überwindung

Von den zahlreichen Gesichtspunkten optischer Veranschaulichung, wie sie in vielen ergiebigen Beiträgen auf den bisherigen Visualisierungs-Workshops in Klagenfurt (s. Kautschitsch & Metzler 1982, 1983, 1984, 1985, 1987) analysiert wurden, möchte ich für die weitere Diskussion die beiden folgenden herausstreichen: Einmal der ungleich vielfältigere Beziehungsreichtum 2- und 3-dimensionaler Darstellungen im Vergleich zu linear-sequentiellen Zeichenreihen, zum anderen die grundlegende Eigenschaft des Kontinuierlichen, die Thom (1970/1974), Arnheim (1969/1972) u.v.a. aus ihrer jeweiligen Sicht hervorgehoben haben. (Bei Zahlenmengen sind kontinuierliche Übergänge zwar auch möglich, wenn man sie z.B. in der Zahlengeraden geometrisiert, aber in der Zifferndarstellung eben nicht: die Änderung von Ziffern ist grundsätzlich diskret.) Diese beiden Aspekte (Beziehungsreichtum und Kontinuität) bringen zahlreiche potentielle kognitive Beweishemmnisse mit sich:

I. Man neigt dazu, von Beziehungen Gebrauch zu machen ohne zu prüfen, ob sie unter den gegebenen Bedingungen wirklich allgemeingültig sind. Dies gilt insbesondere für die Anordnungseigenschaften, für die man ja erst im späten 19. Jhdt. erkannte, daß sie in ein entsprechendes Axiomensystem aufzunehmen sind, und die in fast allen Beweisen unterschwellig benutzt werden. Z.B. beim Nachweis der Kongruenz gegenüberliegender Seiten eines Parallelogramms durch Zerlegung in zwei Dreiecke: Deren Kongruenz wird über den Wechselwinkelsatz bewiesen, aber nicht geprüft, daß gegenüberliegende Seiten wirklich in zwei verschiedenen Halbebenen bezüglich der Diagonale liegen (Stenius 1981).

Abb. 2



Im Zusammenhang mit dieser Problematik werden immer wieder einmal die Vorteile eines Verzichts auf die Anordnungseigenschaften geschildert, weil man dadurch vor gewissen Fehlschlüssen bewahrt wird und Fallunterscheidungen vermeiden kann (zuletzt H. Struve 1983, Schnabel 1984): Dann ist z.B. ein Winkel ein Geraden- (und kein Halbgeraden-)Paar, der Umfangswinkelsatz gilt auf dem ganzen Kreis (und nicht nur auf einem Kreisbogen über der Sehne), oder Stufen- und Wechselwinkel sind nicht unterscheidbar (und



der Steniussche Einwand löst sich in Nichts auf (s. R. Struve 1986)).

Will man sich veranschaulichen, was da beim Übergang zwischen den 4 durch die Sehne definierten Bögen passiert (s. Abb. 3b), dann spielen Anordnungseigenschaften zwar doch wieder eine Rolle; nur mathematisch dürfen sie nicht zur Kenntnis genommen werden; da sind die anschaulich verschiedenen Fälle komplett (und nicht nur in gewissen Eigenschaften!) zu identifizieren, bzw. es werden eben anschaulich verschiedene Fälle gar nicht mehr in Betracht gezogen. Das fördert zwar die mathematische Ökonomie und Eleganz, beseitigt aber nicht den Einfluß der Anordnungseigenschaften auf die Wahrnehmung des Lernenden, erfordert darüber hinaus eigentümliche, z.T. nicht naheliegende Begriffsbildungen und erweist sich so geradezu als anti-didaktisch. Auch das dabei verfolgte Ziel, Fallunterscheidungen abzuschaffen, ist dem Beweisenlernen eher abträglich, wie ich weiter unten noch ausführen werde.

Ich plädiere vielmehr für einen gar nicht (Parallelogrammsatz) oder völlig naiv (Umfangswinkelsatz u.v.a.) zur Kenntnis genommenen Gebrauch der Anordnungseigenschaften. Hier liegt eines der entscheidenden Charakteristika anschaulichen Beweisens vor. Daß dieses aus formalistischer Sicht ungenügend ist, ist für die Schulgeometrie m.E. kaum relevant, und das Anliegen von Stenius (1981), die epistemologische Rolle der Anschauung bei formalen Beweisen zu analysieren, wird von R. Struves (1986) Kritik nicht erkannt, geschweige denn berührt (s. Bender 1989).

II. Die Wahrnehmung wird vom Bild dominiert (und nicht vom geometrischen Sachverstand gezielt gelenkt), und Umstrukturierungen werden blockiert, insbesondere die Einführung von Hilfslinien u.ä. Beispiel: Bei der Planfigur für den Zentriwinkelsatz sieht man zunächst keinen Zusammenhang zwischen den beiden Winkeln. Mögliche Abhilfe: Bewegung des Punktes auf der Peripherie. - Was bleibt dabei erhalten? - Der Abstand zum Mittelpunkt. - Spielt es eine Rolle, daß die beiden anderen Punkte auch auf dem Kreis liegen? - Man zeichne den Radius ein, und es ergeben sich gleichschenklige Dreiecke. - Nun betrachtet man die Bewegung noch einmal: In einer ganz bestimmten Lage verschwindet eines dieser Dreiecke (es entartet zur Strecke). In dieser Lage ergibt der Außenwinkelsatz direkt die Behauptung. Dieser Sonderfall bereitet schließlich den allgemeinen Beweis vor.

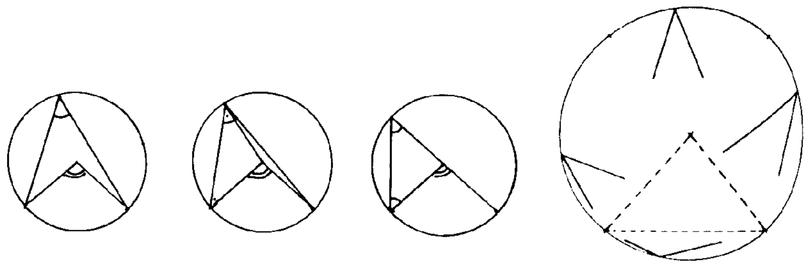


Abb. 3 a b

III. Unwillkürlich wird die Zeichenebene mit einem Schwerkraftfeld versehen, und es bilden sich, unterstützt durch die Rede von "oben" und "unten", aber auch Begriffe wie "Basis des gleichschenkligen Dreiecks", "ein Quadrat auf der Spitze", "Grundfläche einer Pyramide" usw., kanonische Lagen heraus (s. Wertheimer 1945/1959:13ff oder Strunz 1953/1971:102ff), in denen sich z.B. auch Figuren nicht gegenseitig durchdringen können, wohlgemerkt: auch bei den idealen Objekten. Die Vorstellung des Schwerkraftfelds mit entsprechenden Konsequenzen läßt sich schon gar nicht mehr vermeiden bei räumlichen Objekten. Unter der leitenden Absicht des Realitätsbezugs im Geometrieunterricht sind solche Vorstellungen sogar zu begrüßen. Für das Beweisen sind sie aber hinderlich, und eine wichtige Strategie zur Minderung ihres Einflusses sind stetige Bewegungen unabhängig von diesem Feld. Die dabei entscheidend beteiligte Idee des starren Körpers bringt jedoch wieder Komplikationen mit sich: Sie unterstützt die Vorstellungen vom Schwerkraftfeld, vor allem aber bringt sie Verwirrung in die Punktmengenauffassung von geometrischen Figuren: Was bewegt sich da eigentlich?

Man muß den starren Körper als einen (durchaus auch 3-dimensionalen) Stempel sehen, mit dem nacheinander die Mengen markiert werden, mit denen man sich gerade beschäftigt. Nicht die Punkte des Raums bewegen sich also, sondern die Eigenschaft gefärbt zu sein, d.h. betrachtet zu werden.

IV. Die globale Sicht (auf den ganzen Raum, die ganze Ebene) wird unterdrückt und auf Ausschnitte eingeschränkt. Dieser Umstand hat z.B. wesentlich zum Scheitern der Abbildungsgeometrie im Schulunterricht beigetragen. Aber auch wenn man gar nicht auf Abbildungen abzielt, braucht man eine globale Sichtweise: um überhaupt das Wesen des Raums, und dies noch in der Mengenauffassung, zu durchdringen, eine Vorstellung von (potentieller und nicht: aktualer) Unendlichkeit, von Parallelität zu gewinnen, um Satzumkehrungen zu verstehen und zu beweisen (die Umkehrung des



Umfangswinkelsatzes u.v.a.) oder um Sätze als Spezialfälle zu erkennen (Thalessatz als Umfangswinkelsatz, Pythagorassatz als Kosinussatz usw.).

Hier kann insbesondere Computergrafik Unterstützung leisten, dadurch daß sie wirklich jeden Punkt auf dem Monitor anspricht: da kann die Mengenauffassung gefördert werden, indem deutlich gemacht wird, daß die Punkte des Bildschirms sich nicht bewegen, sondern lediglich ihre Eigenschaft gefärbt zu sein sich verändert. Da kann sogar, wenn es denn sein muß, der geometrische Abbildungsbegriff (geradentreue Permutationen) angemessen dargestellt werden, indem beliebige Mengen durch geeignete Farbgebung und nicht durch Bewegung einander zugeordnet werden. Ich denke aber mehr an die Überdeckung der ganzen Ebene mit Faßkreisbögen und die Einbettung des Thales-Halbkreises oder an durchaus umfangreiche komplizierte ebene und vor allem räumliche Parkettierungen, wobei auch noch die Perspektive variiert werden kann.

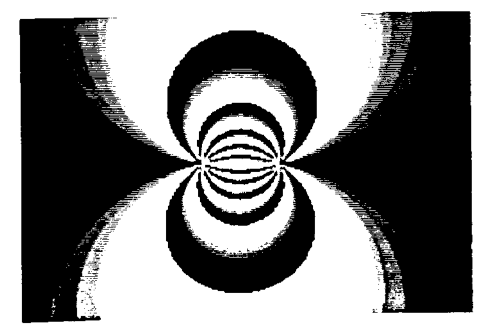


Abb. 4 (Programm und Foto: Walter Dröge, Kassel)

V. Die Dominanz der Wahrnehmung liefert aber auch so etwas wie das eigentlich leicht zu durchschauende fehlerhafte Argument, daß zwei Figuren denselben Flächeninhalt haben, weil sie durch eine stetige Veränderung ineinander übergeführt werden können (z.B. durch eine Scherung, ohne daß deren Flächeninhaltsinvarianz vorher thematisiert worden wäre). Solche Trugschlüsse, gerade weil sie häufig auf richtige Aussagen führen, entstehen natürlich bei statisch und kinematisch dargebotenen Sachverhalten gleichermaßen.

VI. Die Kontinuierlichkeit verführt zu ungenauen Zeichnungen, wie etwa in dem Beispiel von Hanisch (1985), wo zwei Geraden sich in einem Bereich schneiden, wo der Schnittpunkt nicht sein kann, und dies bei korrekter Argumentation zu Widersprüchen führt. In diesem Beispiel wäre eine kontinuierliche Veränderung mit einer stärkeren Abweichung von 90° eine Abhilfe, weil dies die Fehlerhaftigkeit entlarven würde. (Die Angabe "$90°+\varepsilon$" ist ja schon verdächtig, und die Veränderung des Winkels muß entweder auf einen Zustand führen, in dem die Behauptung nicht mehr gilt, oder eben nicht; bei beiden Alternativen fällt die Begründung leichter als vorher.)

VII. Grenzübergänge werden nicht sorgfältig genug behandelt. Hier denke ich nicht an die Vollständigkeit des euklidischen Raums, die m.E. ebenfalls in der Schulgeometrie nicht zu problematisieren ist, jedenfalls nicht, ehe der Vollständigkeitsbegriff in der Arithmetik gewonnen wurde, wo er aus verschiedenen Gründen leichter zugänglich ist, aber dennoch erst in der Oberstufe richtig angegangen werden kann. Es geht vielmehr um diskrete Figurenfolgen, deren 'Grenzwert' u.U. von anderem Typ als die Folgenglieder sind, z.B. der Kreis als Grenzwert von regelmäßigen $3 \cdot 2^n$-Ecken (für $n \to \infty$). Bei Einschachtelungen von Flächen und den zugehörigen Flächeninhalten entstehen da keine Probleme (wegen der als evident anzusehenden Existenz des Flächeninhalts bei den beschränkten Figuren der Elementargeometrie und der Monotonie; s. z.B. Kirsch 1977:95). Aber man hat die Annäherung der Quadratdiagonale mit der Länge $\sqrt{2}$ durch immer feinere Treppen vor Augen, deren Längen konstant 2 sind.

Abb. 5

Es ist nicht gerade einfach, den Unterschied zwischen diesem Sachverhalt, wo die anschauliche Überlegung "geht gegen" versagt, und den folgenden beiden Beispielen, wo die anschauliche Grenzwertbetrachtung erfolgreich ist, wirklich zu verstehen:

Der Schluß von der Inhaltsformel für den Kreis auf die Umfangsformel mittels der Zerlegung der Kreisscheibe in n 'Tortenstücke', deren Umgruppierung zu einer rechteck-ähnlichen Figur und dem Übergang von n gegen $\infty$, woraus sich $U=2F/r$ ergibt (s.a. die etwas anders gezielte Kritik von Mitschka 1982:169f):



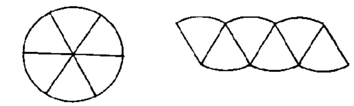


Abb. 6

Oder der hübsche Zerlegungsbeweis von Friedrich Wille, Kassel, für den Satz "ist 2s die längste Sehne im Kreisring, dann ist dessen Flächeninhalt $\pi s^2$", nämlich:

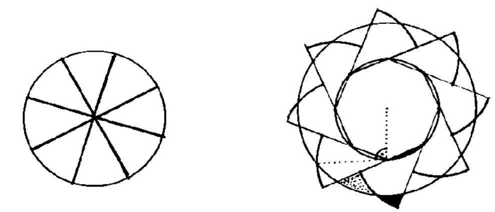


Abb. 7

Spätestens wenn man auf der Oberstufe einen ordentlichen Grenzwert-, insbesondere Integralbegriff motivieren und einführen will, erweist sich die Evidenz als relativ, auf Grund deren man solche Umordnungs- zusammen mit Grenzübergangsoperationen durchführt (s.a. Perko 1987).

VIII. Schließlich werden Beziehungen statisch und isoliert gesehen, funktionale Abhängigkeiten und Invarianten (als solche) werden nicht erkannt. (In der Arithmetik hat man es da mit Ausdrücken wie $y=f(x)$ viel leichter.) Eine direkte Abhilfe kann durch eine globale Sichtweise, Bewegungen entlang bzw. quer zu den Iso-Linien und Beobachtungen einschlägiger Funktionen geleistet werden, z.B. des Umfangswinkels bei den Faßkreisbögen (s. Abb. 4).

*

Was ist eigentlich der entscheidende Kern des Beweisens, der im Unterricht herauszuschälen ist, wobei die aufgezählten Aspekte sich dann störend auswirken können? - Nun, die Schüler sollen

1. einen Begriff von Allgemeingültigkeit (Wahrheit einer Aussage in allen denkmöglichen Fällen) ausbilden,
2. bei den in Rede stehenden Sachverhalten überhaupt nach Allgemeingültigkeit fragen (also ein Beweisbedürfnis entwickeln),
3. die Antwort ***deduktiv*** begründen.

In der vor allem im deutschen Sprachraum umfangreichen Literatur hat man sich großenteils mit Punkt 3 befaßt. U.a. Bürger (1979: 103ff) hat auf den Konflikt hingewiesen, in den die Schüler jedoch durch die Forderung nach deduktivem Schließen geraten, wo sie in allen sonstigen Wissensgebieten und im Alltag über andere Arten der Erkenntnisbegründung verfügen (plausibles Schließen im Sinne Pólyas 1954/1963): Berufung auf eine Autorität, Induktion (Schluß von wenigen Beispielen auf die Allgemeingültigkeit), Reduktion (die Wahrheit einer Aussage ergibt sich aus der Wahrheit von Folgerungen aus ihr).

Dieser Konflikt wird dadurch verschärft, daß in der Mathematik selbst plausibles Schließen gang und gäbe ist, und zwar durchaus im Zusammenhang mit dem Beweisen, nämlich zum Aufstellen von Vermutungen, Finden von Sätzen, Diskutieren von Auswirkungen von Sätzen. Da bleibt nur die Thematisierung dieser Problematik, und zwar wohl oder übel im Mathematikunterricht, weil sie sich dort verschärft stellt. Allerdings sollte man in den Erfolg einer solchen abgehobenen Diskussion, insbesondere bei jüngeren Schülern, nicht allzu große Hoffnungen setzen. Es ist vielmehr ein langer Lernprozeß anhand vieler Beispiele und Gegenbeispiele nötig.

Eine klassische Strategie zur Weckung des Beweisbedürfnisses (Punkt 2) ist die Erschütterung des Glaubens an die Zuverlässigkeit der (visuellen) Anschauung mit optischen Täuschungen oder dem Erlebnis der Ungenauigkeit von Zeichnungen und Messungen. In der Tat sind das Messen und sein exhaustiver Charakter und überhaupt die prinzipielle Ungenauigkeit realisierter Formen ein wichtiges Thema des Geometrieunterrichts. Dessen Behandlung darf aber auch wieder nicht zu einer Entwertung des Messens als Mittel der Erkenntnisgewinnung führen, wo ja die Schüler zugleich in den Naturwissenschaften die überragende Bedeutung genau dieses Mittels erfahren (worauf schon Walsch (1972/1975:131) u.v.a. hingewiesen haben), zumal z.B. auch optische Täuschungen üblicherweise gerade mit Hilfe von Messungen entlarvt werden.

Die mathematisch angemessene Durchführung des Verallgemeinerns geschieht durch Einführung von Variablen (s. z.B. Jahnke 1978, Dörfler 1987 u.v.a). In der Algebra geht man dazu einfach vom Zahlen- zum Buchstabenrechnen über (s. Freudenthal 1973:256ff). In der Geometrie kann man natürlich genauso verfahren, indem man etwa den formalistischen Standpunkt einnimmt und sich folgender Redeweise bedient: "Wir betrachten ein Dreieck ABC" (schreiben: ABC), "das können wir uns folgendermaßen veranschaulichen" (zeichnen).

Hier wirkt die Zeichnung als Visualisierung des schriftlichen Protokolls, was allerdings nicht ganz ihrem konstituierenden Anteil am Begriff gerecht wird. Dieser Einwand ist ja vielleicht läßlich; für den Unterricht bringt diese Protokollauffassung aber noch andere Probleme mit sich: Sie ist ausgesprochen mühsam, auch vom Lehrer kaum durchzuhalten und erzwingt geradezu eine (teil-)formalisierte Sprache. Eine solche mag im Dienste des Lernziels präziser Ausdrucksweise u.ä. stehen (und scheint sich in der DDR-Literatur zum Beweisenlernen ausgesprochener Beliebtheit zu erfreuen), sie bedeutet aber zugleich eine Erhöhung (unproduktiven) Lernaufwands (und ist im Geometrieunterricht der BRD zusammen mit den Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und deren Beschreibungen stark zurückgenommen worden). Der Mehraufwand mag durchaus als sinnvoll angesehen werden; schädlich wird er regelmäßig dadurch, daß er die Problemlöse-Energie der Schüler absorbiert. Dies geht ja so weit, daß Schüler die Beweisaufgabe darin sehen, daß sie einen Sachverhalt in eine formale (verdichtete) Sprache zu bringen haben (s. Abschnitt 5).

Außerdem erscheint in der Praxis gar nicht die Zeichnung als Visualisierung des Protokolls, sondern dieses als Verschriftlichung der Überlegungen und Operationen an der Zeichnung als heuristischem Medium. Damit ist, jedenfalls für den Schüler, die Variabilität zunächst völlig in den Hintergrund getreten; er hat beispielgebunden gearbeitet. Dies ist ein didaktisch sinnvolles Vorgehen überall da, wo der Variablenbegriff Schwierigkeiten macht, z.B. auch in der Arithmetik bei jüngeren Schülern. Es rechtfertigt sich aus der Bedarfsnamenauffassung von Variablen (s. dazu Griesel 1982), führt allerdings keineswegs automatisch auf diese. Zwar liegt der Variablencharakter eines Dreiecks im Prinzip näher als der einer Zahl, weil es dank der Kontinuitätseigenschaft des Raums leichter als stellvertretend für andere (in seiner Umgebung) aufgefaßt werden kann, aber man muß davon ausgehen, daß für den Schüler i.a. der Individuencharakter dominiert.

Ein Mittel der Verallgemeinerung ist dann, mehrere Individuen zu betrachten und überhaupt die Aufmerksamkeit auf verschiedene Fälle, Sonderfälle, Einbettung in den allgemeinen Fall, Entartungsfälle, zu lenken. Da ist dann zu prüfen, ob der behauptete Sachverhalt noch zutrifft, ab wann nicht mehr; und man stößt auf die Frage, woran es liegt, wenn er nicht mehr zutrifft, man wird also zu deduktivem Schließen motiviert. Bereits für diese Überlegungen (s. z.B. die Diskussion oben unter VI, oder die Identifizierung und Einbettung von Sonderfällen, die Annäherung an Entartungen) erweisen sich ***stetige*** Übergänge als sehr hilfreich. Ihr gar nicht zu überschätzender Wert liegt aber in der Unterstützung der Variablenauffassung: Auch wenn nur eine oder mehrere Figuren explizit betrachtet werden, so werden dabei doch (überabzählbar) unendlich viele durchlaufen, und man hat es, besonders wenn man alle wesentlich verschiedenen Fälle durchlaufen hat, nicht mehr weit bis zur Allgemeingültigkeit.

Dieser Effekt tritt umso leichter auf, je stärker die durchlaufenen Objekte voneinander abweichen, und er unterbleibt eher, wenn diese Objekte sich zu sehr ähneln, nämlich wenn sie als Figuren kongruent oder ähnlich sind. Z.B. kann man sich mit einem eindrucksvollen Experiment davon überzeugen, daß das Kantenmittensechseck beim Würfel eben ist (s. Abb. 12 und die Diskussion des Rotweinbeweises von Heidenreich (1987b) in Abschnitt 4): Man markiert die richtigen Verbindungsstrecken der Kantenmitten farbig und läßt den Würfel um die zugehörige Raumdiagonale rotieren; dann erscheint aus der passenden Blickrichtung das Sechseck als Strecke. An dieser Demonstration kann man nicht vorbeigehen, auch wenn sie dem Beweisbedürfnis abträglich ist. Dieses läßt sich ersichtlich weder durch den Hinweis auf die Zeichen- bzw. Wahrnehmungsungenauigkeit (was wäre das Experiment dann überhaupt wert gewesen?), noch durch die Frage weken, ob denn der Sachverhalt bei allen Würfeln gilt (wieso denn nicht?). Man muß hier aus der Ähnlichkeitsklasse heraustreten und (sinnvollerweise kontinuierlich) zu allgemeineren Quadern übergehen.

In diesem Zusammenhang zeigen sich zwei der Mängel der abbildungsgeometrischen Methode: Sie erfordert ein Abwürgen kontinuierlicher Bewegungsvorstellungen und der damit verbundenen Facette des Variablencharakters von Figuren. Und: Man kommt in der Mittelstufe üblicherweise über Ähnlichkeitsabbildungen nicht hinaus, mit denen jedoch Verallgemeinerungen trivial erscheinen und daher nicht bedeutungsvoll werden.



### 3. Die didaktischen Vorzüge (stetiger) Bewegungen bzw. Verformungen gegenüber Abbildungen (Permutationen)

Daß in einem realitätsbezogenen Geometrieunterricht Bewegungsvorstellungen essentiell sind, steht außer Frage: das Funktionieren zahlreicher geometrischer Sachverhalte läßt sich ohne diese gar nicht verstehen (s. Bender & Schreiber 1985). Im folgenden geht es mir aber um die Rolle von Bewegungen im systematisierenden, insbesondere beweisenden Unterricht.

Unter einer Bewegung (bzw. Verformung) verstehe ich nun: Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (i.a. $[0,1]$, $\mathbb{R}_0$ oder $\mathbb{R}$), $\mathbf{E}$ der euklidische Raum (die euklidische Ebene), $F \subseteq \mathbf{E}$ eine Figur. Eine ***stetige*** Abbildung $b: T \times F \to \mathbf{E}$ mit $F_0 = F$ (wobei $F_t := b(t,F)$ für $t \in T$) heißt dann **Verformung** (der Figur $F$). In der Elementargeometrie betrachtet man i.a. nur **geradentreue** Verformungen (sind $A,B,C \in F$ kollinear, dann auch $A_t, B_t, C_t \in F$ für jedes $t$). Dies sei ab jetzt mit Verformung gemeint (leichte Spezialisierung der Definition). Gilt darüber hinaus $l(A_t, B_t) = l(A,B)$ für alle $t \in T$, $A,B \in F$, d.h. sind alle $F_t$ kongruent zu $F$, dann heißt b ***Bewegung***. Z.B. ist eine (abbildungsgeometrische) Punktspiegelung das 'Ergebnis' einer Verformung, etwa als Abfolge von (abbildungsgeometrischen) zentrischen Streckungen am Spiegelpunkt, mit stetiger Veränderung des Streckfaktors von 1 bis -1 unter Durchlaufung des singulären Falls '0', oder als Abfolge von (abbildungsgeometrischen) Drehungen um den Spiegelpunkt mit stetiger Veränderung des Drehwinkelmaßes von 0° bis 180°.

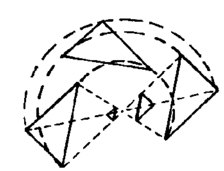


Abb. 8

Nun sind gewisse Funktionen in Abhängigkeit von $t \in T$ interessant. Z.B. ist der Flächeninhalt bei der (stetigen) zentrischen Streckung proportional zum Quadrat des Streckfaktors und konstant bei der (stetigen) Drehung. Oder: Sei $\mathbf{F}$ eine Gerade, die den Spiegelpunkt nicht enthält, und betrachtet wird die Schnittmenge $F_t \cap F$ bei der (stetigen) Drehung in Abhängigkeit von t: Bei 0° hat man $\mathbf{F}$, bei 180° die leere Menge und dazwischen eine (als Bewegung im obigen Sinn aufzufassende) Punktabfolge auf $\mathbf{F}$.

Die Mengen- bzw. Abbildungsschreibweise entwickelt ihre Kraft erst richtig in der Analytischen Geometrie und ist zunächst nicht für den Unterricht in synthetischer Geometrie gedacht, sondern dient hier nur der (im Gegensatz zur Abbildungsgeometrie adäquaten) mathematischen Beschreibung der Vorstellungen, die so gut wie jeder, vom Schüler bis zum Mathematiker, hat, der Geometrie treibt oder überhaupt visualisierte Sachverhalte strukturieren möchte. Diese Vorstellungen gehen auf Alltagserfahrungen mit (physischen) Körpern und Handlungen mit solchen zurück und stützen sich auf die Idee des starren Körpers mit seinen (isometrischen) Bewegungen bzw. des partiell starren Körpers mit Verformungen, bei denen gewisse Eigenschaften erhalten bleiben. Auch wenn diese Verformungsvorstellungen sich im Laufe des Curriculums zunehmend vom physikalisch Realisierbaren entfernen, so bleiben sie dennoch dort verwurzelt und behalten grundsätzlich den Charakter des Kontinuierlichen.

Diese Überlegungen stehen im Einklang mit neueren kognitionspsychologischen Auffassungen zur Verarbeitung von Wahrnehmungs- und Vorstellungsbildern (s. Klieme 1987:53ff) und werden auch wieder stärker in stoffdidaktischen Ansätzen berücksichtigt (s. Kiesow & Spallek 1983).

Die überragende Bedeutung, die die Mathematikdidaktik verinnerlichten (bzw. vorgestellten, was nicht dasselbe ist!) Handlungen für kognitive Prozesse zumißt, braucht wohl nicht erörtert zu werden (s. z.B. Wittmann 1971/1978, 1985, Dörfler 1984, 1987, Aebli 1985). Allerdings hat man m.E. die Möglichkeiten der Schüler zur Abstraktion i.a. überschätzt, als man ihnen z.B. die Strukturmathematik der 70-er Jahre inklusive Abbildungsgeometrie zugetraut bzw. -gemutet hat.

Nicht alle Operationen mit dem partiell starren Körper bedürfen der Vorstellung des Stetigen, z.B. nicht die Brech- und Heiletransformationen Freudenthals (1977). Diese sind in der Mengensprache als Bildung von Teilmengen und Vereinigung entsprechend einfach darzustellen (wenn man einmal die Besonderheit mit der Zuordnung des Randes außer acht läßt) und bereiten i.a. kaum begriffliche Schwierigkeiten. Das Problem besteht meist 'lediglich' darin, die geeigneten Schnittlinien, Bewegungen und Gesamtfiguren zu sehen!



Ein schönes Beispiel ist die Veranschaulichung des Pythagorassatzes von Schönwald (1987): Die Perforierung erzeugt zwar eine kontinuierliche Vorstellung des Abreißens, aber nicht diese ist wesentlich, sondern die Verdeutlichung der Identität der Abreißstellen im Anfangs- und Endzustand.

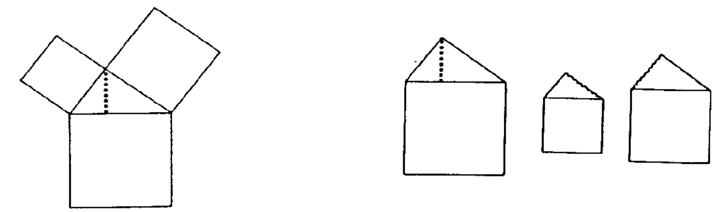


Abb. 9

Der starre Körper mit seinen Bewegungen ist eigentlich nichts anderes als die Verkörperung der Kongruenzrelation, und in jedem (Axiomen-)System, in dem diese Relation vorkommt, ist es zumindest aus heuristischer Sicht sinnvoll, sie sich entsprechend vorzustellen. Euklid hat diese Verkörperung explizit verwendet; im Hilbertschen oder einem vergleichbaren abbildungsgeometrisch ausgerichteten System ist sie zwar nicht enthalten; in der Schulgeometrie wird sie selbstredend doch wesentlich gebraucht. Während sie aber bei der sog. kongruenzgeometrischen Methode (mit 'Hilbert' als Hintergrundtheorie) einen angemessenen Zugang zur systematisierenden Geometrie liefert und auch mit deren weiteren Verlauf gut verträglich ist, muß mit ihr zwar wohl oder übel auch die Einführung bei der abbildungsgeometrischen Methode geleistet werden, erweist sie sich dort aber bald als ausgesprochen störend:

In der oben eingeführten Schreibweise ist $T=\{0,1\}$ und $F=E$ zu nehmen, es sind nur solche Abbildungen b zugelassen, für die $F_1=E$ gilt, und diese werden gleich als geradentreue Permutationen des Raums $b:E\to E$ aufgefaßt. Da sind die Stetigkeitsvorstellungen abzuwürgen, und als abzubildende Figur muß so etwas (psychologisch) Vages und Unanschauliches wie der ganze Raum genommen werden. Dieser sollte zwar sehr wohl auch ein Betrachtungsobjekt für die Schüler werden, aber da sind die unter IV oben angedeuteten Maßnahmen geeigneter als Permutationen, bei denen ja normalerweise außerhalb eines beschränkten Bereichs "nichts los" ist, und zwar noch nicht einmal bei Spiegelungen (die nach

Freudenthal (1973:467) noch am ehesten in Frage kommen). Außerdem müßte der Raum, auf dem die Permutationen operieren sollen, als geometrisches Objekt schon vorhanden sein.

In der Praxis des Geometrieunterrichts (mindestens in der BRD) ist die abbildungsgeometrische Methode wegen all der genannten Probleme durchweg schon längst zu einer Variante der kongruenzgeometrischen Figurenlehre degeneriert, ohne jeden Algebraisierungsanspruch, mit der Besonderheit, daß nur kanonische Bewegungen (bzw. Verformungen) zugelassen sind wie Schiebung, Streckung, (als Exot) Scherung u.ä. und daß Schüler und Lehrer zwar andauernd Kontinuitätsvorstellungen aktivieren, der Lehrer dabei aber ein schlechtes Gewissen hat.

Die Eigenschaften der kanonischen Bewegungen bzw. Verformungen können zwar in der Figurenlehre an vielen Stellen nützlich sein, ich plädiere aber dafür, sie nicht - wie üblich - in einem ausgedehnten Trockenkurs vorab bereitzustellen, sondern sie bei Bedarf, u.U. auf naive Weise, einzusetzen. Es ist zwar schön, über eine einheitliche heuristische Strategie zu verfügen, z.B. grundsätzlich nach Abbildungen (kanonischen Bewegungen bzw. Verformungen) zu suchen, etwa in der Form des berühmten heuristischen Prinzips von Hürten (1971): "Bildet man eine Originalfigur durch eine (oder mehrere) Abbildungen so auf eine Bildfigur ab, daß Original und Bild in irgendeinem Zusammenhang stehen, so ist zu erwarten, daß man aus der Gesamtfigur einen Lehrsatz ablesen kann." (S. jedoch die Kritik von Heidenreich 1987a.)

Auch wenn es Hürten mehr um das ***Finden*** von Sätzen geht, wird seine Strategie doch vielfach als Heuristik für das ***Beweisen*** verstanden. Spätestens dann allerdings könnte sie bequem auf die kongruenzgeometrische Methode übertragen werden ("zeichne Hilfslinien ein und ..." oder "zerlege, bewege bzw. verforme stetig, füge zusammen und ..."). Mit ihrer Allgemeinheit verliert sie damit an Prägnanz und Praktikabilität. Darüber hinaus ist sie - wie jede vergleichbare 'Regel' - in der Gefahr, andere Herangehensweisen zu verdrängen.

Das Grundmuster bei all diesen Beweisen ist doch, daß zwischen bestimmten Stücken (Variablen!) eine Relation herzustellen bzw. nachzuweisen ist, in aller Regel eine Maßgleichheit von Winkeln, Strecken (Kongruenz!) oder Flächen. Bei der Abbildungsmethode ist ***zusätzlich*** die Existenz einer Abbildung nachzuweisen, die



diese Stücke aufeinander abbildet (aus deren Existenz dann auf die fragliche Relation geschlossen wird). Es ist mir kein üblicher Inhalt der Schulgeometrie bekannt, wo man nicht bequem auf solche Abbildungs-Existenznachweise verzichten könnte (es sei denn, es geht um den Symmetriegedanken in einer bestimmten Ausprägung).

Bei den zugrundeliegenden realen Handlungen werden (außer in den Fällen, wo es auf Symmetrie ankommt) so gut wie nie ***kanonische*** Bewegungen durchgeführt. Solche liegen z.B. besonders fern bei Auslegeaktivitäten zur Präfigurierung der Flächeninhaltseigenschaft wie Tangram: Man braucht sich nur einmal konkret vorzustellen, wie die Teile von einer Figur entnommen und zu einer anderen zusammengesetzt werden (in abbildungsgeometrisch ausgerichteten Lehrgängen hat man jedoch auch hier Kongruenzabbildungen am Werke gesehen; eine Reminiszenz an diese Auffassungen ist m.E. Wittmanns (1987:306f) Hinweis auf die Flächeninhaltsinvarianz dieser Abbildungen anläßlich solcher Auslegeaktivitäten).

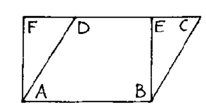



Abb. 10

Auch bei dem Zerlegungsbeweis für die Inhaltsgleichheit des (nicht-rechteckigen) Parallelogramms ABCD mit dem Rechteck ABEF (wie in Abb. 10) wird doch das abgeschnittene, in E rechtwinklige Dreieck BCE ***irgendwie*** nach links transportiert (u.U. aus der Zeichenebene heraus und nicht notwendig mit einer exakt gedachten kontinuierlichen Drehung oder Schiebung) und die Seite CB an D in Richtung A angelegt, so daß das Dreieck B'C'E' entsteht (man denke an die Vorstellung des starren Körpers als Stempel!). Zu zeigen ist dann, daß das (gemäß der Konstruktion zu BCE kongruente) Dreieck B'C'E' an ABCD paßt, d.h. daß die Winkel ADC und DCB zusammen 180° groß sind und BC und AD gleich lang sind (daß also B'C'E' mit ADF identisch ist). Die erste Aussage ergibt sich aus der Parallelität der Parallelogrammseiten, die zweite aus dem - vorher zu beweisenden - Parallelogrammsatz (im Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang).

Man kann auch das Dreieck BCE entlang AB verschieben und erhält so direkt die gewünschte Aussage zusammen mit dem Parallelogrammsatz allein aus den Eigenschaften der Schiebung. Dieser Schiebungsbeweis ist aus unterrichtssystematischer Sicht jedoch unredlich: Man hat ja vorher Schiebungen eingeführt als Kongruenzabbildungen, wo alle (orientierten) Strecken von den Urbild- zu den Bildpunken parallel, gleich lang und gleich orientiert sind (eigentlich als Bewegung des starren Körpers mit parallelen, gleich langen und gleich orientierten Bewegungsspuren), und als Eigenschaften direkt die Parallelität von Urbild- und Bildstrecken notiert, ohne zu problematisieren, ob alle diese Eigenschaften überhaupt nebeneinander existieren können und, wenn ja, ob und wie sie voneinander abhängen, nämlich: Man hat ja hier einfach in einem Viereck mit 2 parallelen, kongruenten Seiten die beiden anderen Seiten ebenfalls als kongruent angenommen und aus dieser Konstellation auch deren Parallelität gefolgert.

Ich will mich jetzt nicht für eine Problematisierung dieses evidenten Sachverhalts an dieser Stelle des Curriculums aussprechen, aber darauf hinweisen, daß die o.a. Zerlegungsgleichheitsaussage, die vom selben Kaliber ist, genauso viel bzw. wenig problematisiert, sprich: bewiesen, werden muß. Und wenn man später im Rahmen eines systematisierenden Unterrichts die Zusammenhänge doch genauer untersuchen möchte, dann kann man sich jedenfalls nicht einer in der o.a. Weise eingeführten Schiebung als Beweismittel bedienen.

Mit der Orientierung an einer geometrischen Abbildung hat sich der Beweis in Nichts aufgelöst. Er gibt dem Schüler keine Gelegenheit, eine besondere Einsicht zu gewinnen (wohlgemerkt: es geht nicht um die Aussage des Satzes, sondern um den Beweis), und ist daher für den Unterricht ungeeignet. Dies liegt an der unvermeidlichen, an Verfälschung grenzenden Art der Elementarisierung von geometrischen Abbildungen für den Unterricht. Es ist also genau umgekehrt als in dem viel zitierten Ausspruch von Breidenbach (1949/1967:54). Dies läßt sich mit vielen weiteren Beispielen belegen; mit den folgenden soll lediglich das Thema noch etwas variiert werden:

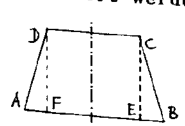



Abb. 11

"Zeige, daß im gleichschenkligen Trapez die Diagonalen kongruent sind." In einem kongruenzgeometrischen Beweis (bei dem allerdings in der Tat die Idee der Symmetrie etwas zu kurz käme) wäre etwa zu zeigen, daß die Winkel in C und D kongruent sind, und dann mit den Dreiecken ADC und BCD der Kongruenzsatz SWS anzuwenden. Dazu würde man (beim Sachverhalt wie in Abb. 11) die Lote von C und D auf AB fällen und mit dem Kongruenzsatz SSW (der hier anwendbar ist, weil W rechter Winkel ist) die Kongruenz der Dreiecke AFD und BEC begründen.

Beim abbildungsgeometrischen Beweis sieht man sofort die Spiegelachse und meint, im wesentlichen fertig zu sein. - Doch müßte gezeigt werden, daß überhaupt eine solche Achse existiert, daß etwa die Mittelsenkrechte von AB auch die von CD ist. Und schon sind ähnliche Überlegungen wie beim kongruenzgeometrischen Vorgehen erforderlich, die jedoch dauernd in der Gefahr sind, doch noch durch das Spiegelungsargument abgekürzt zu werden, obwohl man dessen Zulässigkeit ja gerade erst zeigen will.

Bei entsprechenden Sätzen über das gleichschenklige Dreieck fällt es den Schülern in der Regel noch schwerer, zwischen zu beweisenden und zum Beweis verwendbaren Tatsachen zu unterscheiden, wie zahlreiche Beispiele in Beckmann (1986) belegen (s.a. Abb. 24).

Wenn nun noch der Stufenwinkelsatz mit Schiebungen bewiesen wird, dann ist endlich auch der Lehrer in die Falle getappt: Die Parallelität der beiden Halbgeraden für die Stufenwinkel kann er ja nicht über die Elementfremdheit erzeugen, sondern er muß sie durch Winkelübertragung oder Parallelverschiebung konstruieren (oder mit Hilfe der hier abwegigen Abstandsgleichheit), und dann beweist die Schiebung gar nichts.

Ähnlich sieht es mit dem Beweis der Kongruenzsätze aus: Wenn der Schüler für zwei Dreiecke, bei denen z.B. SWS als kongruent vorausgesetzt sind, eine Drehung angibt, die das eine auf das andere abbildet, dann hat er die Vorstellung der Bewegung des starren Körpers benutzt. So hat er nämlich die Kongruenzabbildungen kennengelernt und ihre Eigenschaften eingesehen, insbesondere die Aussage "sind zwei Dreiecke kongruent (mit dem starren Körper überprüft!), dann gibt es eine Drehung (o.ä.), die das eine auf das andere abbildet". Natürlich erkennt er nicht, daß diese Aussage hier gar nicht angewendet werden kann, da sie ja bereits die Behauptung des Satzes benutzt. Aber es steht ihm auch keine Aussage zur Verfügung, die nur von der Kongruenz 'SWS' Gebrauch machen würde und die er hier anwenden könnte, weil ja immer der starre Körper verwendet wurde und damit die Kongruenzsätze praktisch schon vorhanden sind. Außerdem sind diese sowieso evident, und so löst er tatsächlich eine ganz andere Aufgabe als den Beweis, nämlich "finde die (oder: eine) ***kanonische*** Bewegung von einem Dreieck zum anderen".

Man braucht sich nicht zu wundern, wenn aufgrund solcher Unterrichtserlebnisse die Motivation und Fähigkeit zum Beweisen bei den Schülern auf Dauer verschüttet wird. Die ursächlichen Faktoren seien noch einmal hervorgehoben:

- Besonders am Anfang des systematischen Aufbaus (wo zugleich mit dem Beweisen begonnen wird) geht es um Aussagen, die anschaulich trivial sind und deswegen als Axiome verwendet werden oder jedenfalls die Auswahl von Axiomen so beeinflussen, daß sie leicht abgeleitet werden können.
- Wegen dieser Evidenz kommt kein Beweisbedürfnis auf.
- Es ist unklar, was alles als Prämissen in Frage kommt.
- Die Voraussetzungen wirken häufig nicht vorgängiger als die Behauptungen.
- Der Beweis liefert keine (zusätzliche) Einsicht.

Diese Faktoren sind keineswegs an die abbildungsgeometrische Methode gebunden, sie sind aber typisch für diese, wie die Beispiele zeigen. Verantwortlich dafür ist der unanschauliche, betont systematische Charakter der ursprünglichen Abbildungsgeometrie: Deren Begriffe müssen überhaupt erst einmal mit erheblichem Bedeutungswandel in die Figurenlehre der Schule transformiert werden, wodurch sie an Klarheit (auch in Beweisen) verlieren. Dazu kommt der Anspruch (unabhängig von der Schulgeometrie), die klassische euklidische Geometrie (die Figurenlehre der Schule) zu beinhalten, der am einfachsten dadurch einzulösen ist, daß man gleich deren grundlegende Tatsachen ableitet. Beim Hinabsteigen in den 'Sumpf' der anschaulichen Geometrie wird dann ein gewisses Strenge-Ideal aber nicht aufgegeben: Stetige Bewegungen (bzw. Verformungen) sind 'offiziell' nicht zugelassen.

So kommt es, daß die alten Didaktiker noch betont mit stetigen Bewegungen bzw. Verformungen arbeiten (s. z.B. Kusserow 1928/



1985 u.v.a.; Strunz 1953/1971 hat in seinen späteren Auflagen erhebliche Mühe, seine psychologischen Erkenntnisse über die kinematische Denkweise in der Geometrie mit seiner Begrüßung der abbildungsgeometrischen Methode in Einklang zu bringen), daß sie auch heute noch im Hochschulunterricht vorkommen (wie ich aus mündlichen Mitteilungen zahlreicher Kollegen weiß; s. z.B. auch Fraedrich 1979), während sie in Schulbüchern und im 'offiziellen' Unterricht in systematischer Geometrie (noch nicht in der sog. Propädeutik) verpönt sind. Mit Schülern war man in den letzten zwanzig Jahren in manchen Bereichen der Mathematik strenger als mit Studenten und Kollegen, und es stellte eben zeitweise einen Mangel an Strenge dar, die Anordnungseigenschaften und die Vollständigkeit des Anschauungsraums unhinterfragt zu benutzen.

## 4. Die Rolle von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen bei geometrischen Beweisen

Im folgenden betrachte ich einige Beweise, fast alle aus dem Kanon der Schulgeometrie, und untersuche die Rolle von Bewegungen bzw. Verformungen dabei. Es handelt sich nicht um 'Rosinen', und die Überlegungen sind auf viele andere Beispiele übertragbar. Erst in Abschnitt 6 erörtere ich, wie weit eine Verfilmung (o.ä.) erforderlich bzw. nützlich ist. Für das Folgende unterstelle ich durchweg technische Realisierbarkeit (in einer Zeichnung, im Film o.ä.), auch wenn man häufig mit Vorstellungen auskommt.

Die verschiedenen Rollen, die Bewegungen bzw. Verformungen bei den Beweisen spielen, sind am Ende dieses Abschnitts in einer Liste zusammengestellt. Die Zuordnung der Beispiele zu dieser Liste ist nicht eindeutig möglich; sie hängt u.a. auch davon ab, was überhaupt als Beweismittel zugelassen sein soll.

Ich plädiere für die (stillschweigende) Voraussetzung der Gültigkeit folgender Sachverhalte: Das Hilbertsche Axiomensystem ***unproblematisiert***, vieles davon noch ***nicht*** einmal ***thematisiert*** (z.B. Existenz-, Anordnungs- und Vollständigkeitsaxiome); die Axiome z.T. nicht in reiner, sondern in elaborierter Form, z.B. als evidente, nicht zu beweisende Sätze wie Stufenwinkelsatz, Kongruenzsätze, Existenz von Längen-, Winkel-, Flächen- und Raummaß; weitere Sätze wie die Strahlensätze qualitativ ("wenn dieses länger wird, dann auch jenes"), Jordanscher Kurvensatz für Polygone, Eigenschaften der Spiegelsymmetrie (nicht an den Abbildungsbegriff i.e.S. gebunden), das Kontinuitätsprinzip (unter Beachtung von Unstetigkeitsstellen, z.B. beim Schnittpunkt einer rotierenden mit einer festen Geraden, wenn die Neigung 0° beträgt) usw.

Ein typischer Schluß ist etwa: Eine Halbgerade, die bei einem Winkel von einem Schenkel um den Scheitel bis zum anderen Schenkel rotiert, erzeugt dauernd zwei Teilwinkel, von denen der eine vom Nullwinkel aus stetig größer, der andere vom gesamten Winkel aus stetig kleiner wird; insbesondere gibt es eine und nur eine Winkelhalbierende.

Bei vielen weiteren Sätzen (z.B. die Strahlensätze in quantitativer Ausformung) hängt die Behandlung als evident oder beweisbedürftig, und dann die Entscheidung, ob man sie beweist oder nicht, von allerlei Faktoren ab: Wie systematisch geht man insgesamt vor? Welchen Erkenntnis-, welchen Bildungsgehalt hat der Beweis? Welche langfristigen Ziele verfolgt man? Welches Niveau hat die Lerngruppe? Wie groß ist der Aufwand? Usw. Gewisse Schlußweisen haben für mich eher den Charakter von Plausibilitätsüberlegungen (jedenfalls in der Mittelstufe, wo sie m.E. nicht hinreichend streng zu begründen sind). Man kann sie aber auch als Beweismittel akzeptieren: Das Benutzen von Grenzwerten diskreter Figurenfolgen (Aspekt III in Abschnitt 2, Abb. 5, 6, 7) oder das Argumentieren mit Freiheitsgraden bei Eindeutigkeitsbeweisen (s. Beispiele (iii), (iv), (v), Abb. 14, 15, 16).

(i) Der Rotweinbeweis für den Satz "das Kantenmittensechseck des Würfels ist eben und regelmäßig" (Heidenreich 1987b): Man denkt sich einen Glaswürfel voll mit Rotwein auf eine Ecke gestellt (etwa auf einem dreibeinigen Gestell), so daß eine Raumdiagonale lotrecht ist, und läßt den Rotwein durch ein Loch ganz unten auslaufen. Die 3 Würfelkanten, die an die Spitze stoßen, haben alle dieselbe Neigung gegen die Lotrechte, d.h. alle Kanten des Würfels, die ja zu einer der 3 an der Spitze parallel sind, haben dieselbe Neigung. Beim Auslaufen erreicht der Rotweinspiegel zunächst gleichzeitig die 3 Ecken, die zur Würfelspitze benachbart liegen, und dann gleichzeitig die 6 Kantenmitten. Damit ist die Ebenheit nachgewiesen. Für den Beweis der Regelmäßigkeit muß man sich noch ein paar, allerdings nicht allzu fern liegende, Gedanken machen.



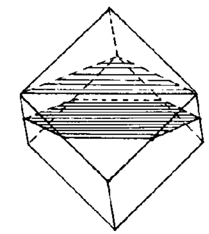


Abb. 12

Nicht ganz ernst weist Heidenreich darauf hin, daß für diesen Beweis zuallererst eine Realisierung mit wirklichem Rotwein angemessen ist und daß schon die Verwendung gefärbten Wassers in der Schulstube eine Stilwidrigkeit ist. Aber auch ein Film hätte da durchaus seine Vorteile: Man kann den ganzen Vorgang aus mehreren Perspektiven zugleich, auch gegen die Schwerkraft, zeigen, man kann anhalten, die besondere Lage farblich herausheben, zoomen usw.

(ii) "Konstruktion einiger archimedischer Körper" zur Oktaedergruppe (und damit Existenznachweis) durch Abstumpfen der Ecken (nach Kühl 1976). Mit Computergrafik kann hier verhindert werden, daß man einen Fall übersieht: Immer wenn die Kanten gleich lang sind, zeigt der Computer dies an.

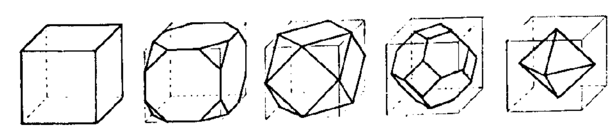


Abb. 13

(iii) "Dreiecksinkreis und Winkelhalbierende": Man klemmt in der Nähe einer Ecke einen kleinen Kreis zwischen die beiden Seiten und bläht diesen Kreis dann auf, wobei immer die Bedingung erhalten bleibt, daß er die beiden Seiten berühren soll. Der Kreis bewegt sich dann von der Ecke weg, bis er auch noch an die dritte Seite stößt, und damit ist er zum Inkreis geworden, dessen Existenz somit bewiesen ist.

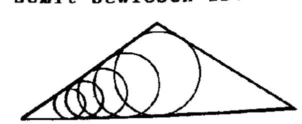


Abb. 14

Nun betrachtet man noch entsprechende Folgen von Kreisen aus den anderen Ecken, und es wird sichtbar, daß der so konstruierte Inkreis eindeutig ist. Bei einer Verfilmung kann man diesen Eindruck von Eindeutigkeit noch vestärken, indem man die drei Folgen im Wechsel blinken läßt, wobei der Inkreis der einzige Kreis in Ruhe ist (analog zu einer Idee von Ralf Schaper, Kassel). Für den ***Beweis*** der Eindeutigkeit, der ja mit dieser Visualisierung noch nicht gegeben ist, kann man nun eine Stufe tiefer steigen und sich überlegen, daß durch den Mittelpunkt eines Inkreises alle 3 Winkelhalbierenden gehen müssen und es folglich nur einen geben kann. Hier wird, anders als beim üblichen Beweis, der Satz über die Mitteneigenschaft der Winkelhalbierenden nur in einer Richtung gebraucht.

Alle diese Überlegungen kann man direkt übertragen auf den symmetrischen Drachen, das Tetraeder und allgemein regelmäßige Pyramiden, sowie auf das duale Problem des Umkreises beim Dreieck, beim gleichschenkligen Trapez bzw. der Umkugel beim Tetraeder und allgemein bei regelmäßigen Pyramiden(-stümpfen).

(iv) "Dreiecksumkreis und Freiheitsgrade" in der Verfilmung von Nicolet (1958/1971; s.a. Wittmann 1985): Gegeben sind 3 nichtkollineare (Fix-)Punkte und ein Kreis. Dieser Kreis wird kontinuierlich verändert, sein Mittelpunkt und Radius variieren beliebig, und zwar zunächst unabhängig von den Fixpunkten. Sobald jedoch der Kreis einen der Fixpunkte berührt, kommt er nicht mehr von diesem los, die Berührung bleibt bestehen, der Kreis kann sich nicht mehr ganz frei bewegen. Irgendwann stößt er an einen der beiden anderen Fixpunkte, der ihn dann auch nicht mehr los läßt, so daß seine Bewegungsfreiheit noch mehr eingeschränkt ist, und zwar läuft ab dann sein Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten seiner beiden Berührpunkte, und der Radius ist durch die Lage des Mittelpunkts gegeben. Schließlich wird der Kreis auch noch vom dritten Punkt eingefangen und kann sich überhaupt nicht mehr verändern. - Der ganze Vorgang wird mehrfach wiederholt, und immer ist die Endfigur dieselbe.

Nicolet stellt dabei praktisch auf die Idee der Freiheitsgrade ab und beweist damit mehr als bei dem oben (beim Inkreis) skizzierten Vorgehen, nämlich Existenz (sowieso) ***und*** Eindeutigkeit: Der Kreis hat zunächst 3 Freiheitsgrade, 2 für die Lage des Mittelpunkts und 1 für den Radius (oder: 3 Punkte, durch die er geht; dann wäre die Argumentation jedoch fast schon zirkulär),



und gibt nacheinander bei jedem der Fixpunkte 1 Freiheitsgrad ab, bis er schließlich keinen mehr hat, also eindeutig festliegt.

So wichtig diese Idee der Freiheitsgrade für die Physik oder für die Erkenntis fundamentaler Zusammenhänge in der Geometrie ist (bzw. sein sollte), so liegen die Umstände meistens doch komplizierter als in diesem Beispiel, und zwar in der Struktur des Parameterraums und der durch die Bedingungen definierten Unterräume, die außerdem von der Reihenfolge des Vorgehens abhängen (man denke etwa an den eingeschränkten Kongruenzsatz SSW). Die Idee der Freiheitsgrade ist ein starkes Mittel, mit dem man sich Sachverhalte plausibel machen kann, und hat bei Eindeutigkeitsaussagen fast Beweiskraft. Ihr Einsatz bedingt allerdings geometrische Erfahrung; und sie ist in gewissem Sinn zu grob, insbesondere wenn es um Fallunterscheidungen, Verträglichkeit von Bedingungen, Existenzbeweise u.ä. geht (z.B. wenn die 3 Fixpunkte kollinear sind). Da braucht man häufig doch genauere Überlegungen, etwa aus der klassischen synthetischen Geometrie, zumindest um zu rechtfertigen, falls man sie für entbehrlich hält.

Ich würde in dem Beweis das Schwergewicht auf die Phase legen, wo nur noch 1 Freiheitsgrad vorhanden ist (bzw. sogar direkt damit anfangen), um so die Mittelsenkrechten stärker ins Spiel zu bringen. Allerdings ist zu bedenken, daß es Nicolet auch um die ästhetischen Möglichkeiten des Films, z.B. um die Darstellung einer schwingenden Bewegung geht.

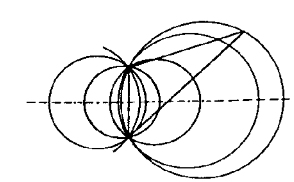


Abb. 15

(v) "Die 3 Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in 1 Punkt." Nehmen wir an, der Beweis dazu sei schon geführt, und nun gehe es darum, die Plausibiltät des Beweises tiefer zu legen. Mit Computergrafik kann man z.B. die 3 Ecken eines Dreiecks variieren und damit demonstrieren, daß die Mittelsenkrechten sich immer in 1 Punkt schneiden. Allerdings bringt ein solcher

Film wohl kaum Einsicht in den Sachverhalt über die Zeichnung hinaus: Man sieht eben, daß die 3 Geraden immer einen gemeinsamen Schnittpunkt haben; das muß auch so sein; denn das hat man ja bewiesen. Die Funktion eines solchen Filmes wäre eher, den Übergang zwischen verschiedenen Fällen (stumpf-, recht-, spitzwinklig, kollineare Ecken) zu zeigen.

Die Einsicht spürbar vertiefen könnte man vielleicht folgendermaßen: Man betrachtet 3 kongruente Kopien des Dreiecks zugleich, die man simultan verändert. Bei jeder der drei wird eine andere Seite mit ihrer Mittelsenkrechten farblich hervorgehoben, und die anderen Linien werden jeweils nur ganz schwach dargestellt. Nun sieht man es erst: Egal wie die 3 Seiten verändert werden, die 3 Mittelsenkrechten schneiden sich in 1 Punkt. Die 3 Seiten können nämlich gar nicht unabhängig voneinander variieren; die Bewegung der Endpunkte einer Seite beeinflußt auch die Lagen der beiden anderen. Anders herum ausgedrückt: Die 3 Ecken können zwar unabhängig voneinander bewegt werden, aber jede Bewegung einer Ecke (mit 2 Freiheitsgraden!) zieht die Änderung von ***zwei*** Mittelsenkrechten nach sich, und deren Schnittpunkt hat nur 1 Freiheitsgrad. Wenn man dafür nun wieder den tieferen Grund einsehen will, geht man noch einmal in den ursprünglichen Beweis.

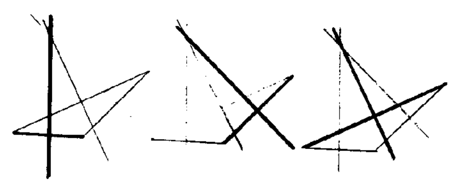


Abb. 16

Der Satz ist jetzt erst richtig aussagekräftig geworden. Zugleich ist durch die Variation des Dreiecks die Einsicht in die Allgemeingültigkeit vertieft worden.

(vi) Der "Winkelsummensatz für das Dreieck" ist m.E. gerade noch einer der ersten sinnvoll zu beweisenden Sätze. Die Schüler sollten ihn selbst finden, etwa durch Betrachten von Dreiecken, die unter Festhalten eines Winkels deformiert werden, Feststellen der gegenseitigen Abhängigkeit der beiden anderen und anschließendes Messen.



Man sollte aber nicht den Ehrgeiz haben, daß die Schüler auch den ***Beweis*** finden. Die populäre Methode, von einem Pappdreieck 2 Ecken abzureißen und an die dritte anzulegen, mit der man die Beweisfigur präfigurieren will, ist dem Beweisbedürfnis eher abträglich und fördert die Beweisfindung erfahrungsgemäß doch nicht: Tatsächlich wird ja hiermit nur noch einmal die Winkelsumme zu 180° gemessen. Aber diese Vergewisserung auf einem zweiten Weg, auch noch eigenhändig von den Schülern vollzogen, wirkt auf sie dermaßen überzeugend, daß sie nicht sehen, wieso da noch etwas zu beweisen ist (darauf weist u.a. Walsch 1972/1975:60 hin). Die direkte Mathematisierung der Abreiß-Idee ist übrigens (fußend auf ***irgendeiner*** Bewegung des starren Körpers) mit der zweimaligen Anwendung der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes und des Parallelenaxioms gegeben und nicht etwa mit den beiden Punktspiegelungen an den entsprechenden Seitenmitten.

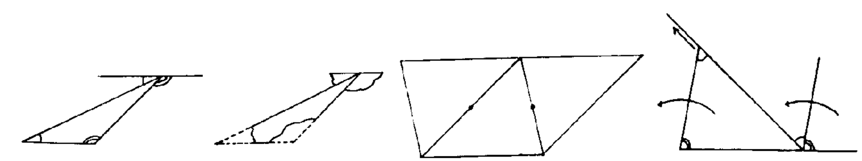


Abb. 17 a b c d

Arnheim (1969/1972:174) zeigt am Beispiel des Winkelsummensatzes, wie mit der Variabilität von Zeichnungen die Plausibilität und Allgemeingültigkeit einer Aussage noch einsichtiger gemacht werden: 2 Winkel werden wie in Abb. 17d an den dritten angetragen. Nachdem nun die Beweisüberlegung durchgeführt ist, läßt man den dritten Winkel fest und verändert die ihm gegenüberliegende Seite, so daß sich erster und zweiter Winkel verändern. Dadurch variiert auch der eine angetragene Schenkel, aber der gestreckte Winkel bleibt erhalten, weil die beiden angetragenen Winkel sich zwar dauernd ändern, ihre 'Summe' aber konstant bleibt. Diese Invarianz in der Veränderung ist zu sehen und zu begründen. Sie ist natürlich schon mit dem Beweis begründet, und nicht für diesen wird die Bewegung gebraucht, sondern für die Demonstration der Abhängigkeit der Hilfslinien und diverser Größen von der Figur und der Invarianz der behaupteten Eigenschaften dabei.

(vii) "Umfangswinkelsatz": Der Scheitel des Umfangswinkels durchläuft den ganzen Kreis, und es ist genau zu beobachten, wie sich die Schenkel zueinander und zu denen des Mittelpunktswinkels verhalten, insbesondere bei den Übergängen zwischen den i.a. 4 durch die Sehne definierten Bögen (s. Abb. 3b).

(viii) Bei der "Umkehrung des Umfangswinkelsatzes" (s. Abb. 4, 18) liefert eine gezielte Bewegung des Umfangswinkelscheitels X durch eine der beiden Halbebenen an A und B im wesentlichen den Beweis: Nach dem Umfangswinkelsatz ist das Winkelmaß von AXB auf jedem Bogen über A und B konstant. Für den Übergang von X von einem Bogen zu einem anderen sucht man sich immer eine günstige Stelle, und zwar die Mittelsenkrechte von A und B. Geht man nach außen, wird das Winkelmaß kleiner, geht man nach innen, wird es größer, nach dem Winkelsummensatz für AMX und BMX.

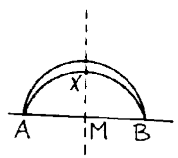



Abb. 18

(ix) In Wagenscheins (1968/1974) berühmtem Beweis dafür, daß "der Radius eines Kreises auf diesem genau 6-mal abgetragen werden kann", ist folgende Passage enthalten: Die Lücke zwischen 2 kongruenten gleichseitigen Dreiecken, für die je eine Seite mit einer gemeinsamen Stützgerade inzidiert, die in 1 Halbebene liegen und die genau eine Ecke gemeinsam haben, wird gerade durch ein drittes kongruentes Exemplar ausgefüllt. Das sieht man, wenn man sich eine Schiebung zwischen den beiden gegebenen Dreiecken vorstellt.

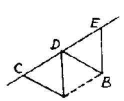



Abb. 19

Die Interpretation der Strecke AB als Dreiecksseite und ihrer Länge als Seitenlänge ist bereits eine Modifikation ihrer ursprünglichen Bedeutung als Bewegungsspur und deren Länge, unterstützt durch das Einzeichnen. Davor hat aber schon einmal ein, keinesfalls naheliegender, Bedeutungstransfer stattgefunden: Statt ein Dreieck von der Öffnung her in die Lücke einzupassen und dies mit dem Zeichnen der Seite AB anzudeuten (deren



Länge über den Parallelogrammsatz als gleich mit der von CD oder DE oder aber als gleich dem Abstand der beiden Höhenfußpunkte von A bzw. B auf CD bzw. DE erwiesen wird), muß man sich eine - auf der Handlungsstufe sinnlose - Bewegung quer zur Öffnung vorstellen.

Der Vorteil der Auffassung "nach dem Einpassen wird 'gemessen'" zeigt sich m.E. noch deutlicher beim 3-dimensionalen Pendant: "Zwischen 2 regelmäßige Oktaederhälften paßt genau ein regelmäßiges Tetraeder (eine Erkenntnis, die schließlich auf den Satz führt, daß der Raum mit diesen beiden Typen platonischer Körper gemeinsam, aber mit keinem allein parkettiert werden kann)."

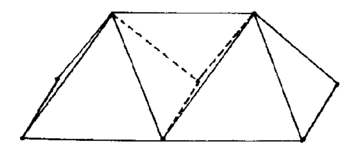


Abb. 20

(x) In dem bekannten "'Scherungsbeweis' für den Kathetensatz" ergibt sich die Inhaltsgleichheit von I und II, sowie die von III und IV aus der Formel für Parallelogramme, die ihrerseits ganz simpel über Zerlegungsgleichheit bewiesen worden ist. Die (kontinuierliche) Scherung liefert hier kein Argument, da sie heutzutage im Geometrieunterricht normalerweise sonst gar nicht vorkommt, und wenn doch, ihre wesentlichen Eigenschaften vernünftigerweise genau aus der Flächeninhaltsformel für Parallelogramme bzw. Dreiecke hergeleitet werden und nicht aus den Eigenschaften affiner Abbildungen.

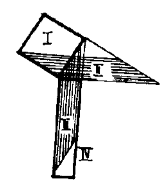



Abb. 21

Den Übergang zwischen II und III stellt man sich als Rotation vor. Daß eine solche existiert, die II in III überführt, ergibt sich aus der Kongruenz von SWS, und man kann hier natürlich wieder unmittelbar den entsprechenden Kongruenzsatz anwenden. Das bedeutet zwar zunächst nur, daß man den starren Körper auf irgendeinem Weg von II nach III bewegen kann, aber da hier direkt ein ausgezeichneter Punkt als Fixpunkt dient, bietet sich eben die Vorstellung einer Rotation um diesen Punkt an.

Die Bewegungen bzw. Verformungen haben in diesem Fall folgende Funktion: Sie dienen als Anregungen und Protokolle des Vorgehens und strukturieren es, indem sie isolierte Zustände miteinander verbinden bzw. zu deren Diskriminierung beitragen. Sie liefern einen mehr oder weniger wesentlichen Beitrag zum Finden oder Verknüpfen der Argumente, für die die Sprachform allerdings unerläßlich ist (vgl. Winter 1983).

(xi) "Satz von Wallace: Sei P ein Punkt auf dem Umkreis eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ und $B_1$, $B_2$, $B_3$ die Fußpunkte der Lote von P auf die 3 Seiten des Dreiecks. Dann liegen $B_1$, $B_2$, $B_3$ auf einer Geraden" (s. Wittmann 1987:143f). Der Beweis dieses Satzes soll hier die o.a. Funktion der Beweisstrukturierung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen illustrieren (auch wenn er für den Unterricht der Pflichtschule weniger in Frage kommt, weil er einerseits nicht gerade zentral ist, andererseits umfangreiche Fallunterscheidungen erfordert).

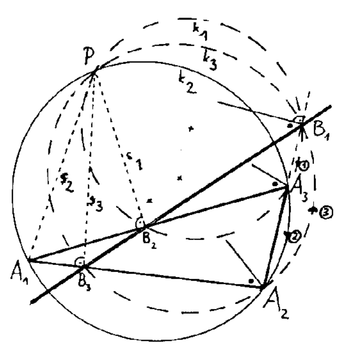



Abb. 22

Man überlegt sich zunächst, daß P, $A_i$, $B_j$, $B_k$ (für $i \neq j \neq k \neq i$) auf einem Kreis liegen (Umkehrung des Thalessatzes). Dann läßt man (in dem Fall, der in Abb. 22 dargestellt ist) $B_1$ über $k_1$ nach $A_3$, dieses über $k_2$ nach $A_2$ und dieses über $k_3$ zurück nach $B_1$ wandern. Dabei wird dreimal der Umfangswinkelsatz angewendet (im Kreis $k_i$ über der Sehne $s_i$), und es ergibt sich, daß die Winkel $PB_1B_2$ und $PB_1B_3$ kongruent sind, also $B_1$, $B_2$, $B_3$ auf einer Geraden liegen. #



Aufgrund dieser Beispiele und der Überlegungen in früheren Abschnitten lassen sich folgende Funktionen stetiger Bewegungen bzw. Verformungen bei elementargeometrischen Beweisen ausmachen:

A. Sie liefern den Beweis selbst (z.B. Existenznachweis mit Stetigkeitsargumenten).
B. Sie vertiefen den Glauben an den Beweis, indem sie ihn plausibel bzw. plausibler machen (z.B. mit der Idee der Freiheitsgrade).
C. Sie unterstützen die Einsicht in die Allgemeingültigkeit einer Behauptung, indem sie viele Fälle zeigen, Sonderfälle in allgemeine Fälle einbetten (und sie so hervorheben) und überhaupt Übergänge zwischen Fällen demonstrieren.
D. Sie erzeugen Vermutungen, Sätze, Beweisideen, indem sie Veränderungen und Invarianten zeigen (s. Rotweinbeweis).
E. Sie visualisieren den Ablauf eines Beweises und strukturieren ihn, indem sie einzelne Beweis'stationen' verbinden und die Umstrukturierungsoperationen leiten (z.B. 'Scherungsbeweis' des Kathetensatzes).
F. Sie stehen für Handlungen und machen die geometrischen Operationen dadurch zugänglicher, plausibler.
G. Sie regen eine allgemeine Sichtweise geometrischer Figuren als beweglich bzw. veränderlich an, die grundsätzlich geometrischen und außergeometrischen Denkweisen förderlich ist. #

Es sei aber betont, daß fast immer verbale Erläuterungen nötig sind bzw. daß der eigentliche Beweis verbal anhand statisch gesehener Zusammenhänge geführt wird (s. dazu die grundsätzliche Aussage von Boeckmann 1984:18). Bestimmt reicht es auch in vielen Fällen aus, die Bewegungen und Verformungen nur in der Vorstellung zu vollziehen.

## 5. Der Glaube an die Beweiskraft und implizite Beweisvorstellungen als kognitionspsychologische Probleme

Im deutschen Sprachraum hat man sich besonders viele Gedanken zum Beweisen im Unterricht gemacht. Allerdings scheint auch hier die Intensität in den 80-er Jahren nachgelassen zu haben: Es ist eine gewisse Ernüchterung eingetreten über das in der Unterrichtspraxis zu Erreichende und in Verbindung damit eine Abkehr von 'harten' mathematischen Aktivitäten und eine Renaissance der Anwendungsorientierung. Einen starken Schub erhielt diese Entwicklung durch das Vordringen des Computers auf vielen unterrichtlich relevanten Ebenen (von der Kognitionstheorie bis hin zur Verwendung von sog. Rechenblättern).

Die Überlegungen sind erkenntnistheoretisch bis stofflich-didaktisch-methodisch ausgerichtet (Bürger 1979, Freudenthal 1973 u.a., Jahnke 1978, Jahnke & Otte 1979, Mormann 1981, Stein 1986, Walsch 1972/1975 u.v.a.) und befassen sich häufig speziell mit Geometrie (Becker 1980, Holland 1979, 1980, Kratz 1983/1984, Kroll 1980, Lehmann 1977, Lorenz 1977, 1978 u.v.a.). Praktisch gewonnene Erfahrungen werden häufig in Form von Testauswertungen oder globalen Berichten über Unterricht veröffentlicht (z.B. Aner u.a. 1979, Becker 1982, Beeskow 1982, Leppig 1979, Schupp 1974, Sprang 1981, Witzel 1981). Aber auch da, wo man Einstellungen und Fähigkeiten der Schüler detaillierter erforscht (z.B. Bell 1976, Fischbein & Kedem 1979, Galbraith 1981, Hadar 1977/1978, Hennes & Schmidt 1981, 1982, Stein 1986, Williams 1978 mit durchaus interessanten Ergebnissen, u.v.a.) kommt man m.E. dem eigentlichen Lehr-Lern-Prozeß nicht genügend nahe. Dies liegt an der Anlage der Untersuchungen als Massentests (wenn auch häufig mit kleiner Population), wo (aus guten Gründen) unterrichtsferne Aufgaben ausgewählt werden (müssen) und die Leistungen (wohl oder übel) von den Ergebnissen her, durchaus in kleine Teilschritte zerlegt, analysiert werden.

Fast allen Arbeiten zum Thema unterliegt der Grundsatz der Didaktik des Beweisens, daß die Schüler das selbständige Führen von Beweisen lernen sollen. Würde man dieses Ziel im Prinzip aufgeben, dann könnte sich auch der Gegenstand (methodischer Bemühungen und) empirischer Untersuchungen verlagern vom - vereinfacht ausgedrückt - selbständigen Führen zum selbständigen Verstehen von Beweisen. Solche ge- oder mißglückte Akte des Verstehens treten viel häufiger auf, so daß sie eher in Fallstudien (in der Schulstube oder im Einzelgespräch) erfaßt werden können. Der Menon-Dialog ist ein Prototyp für solche Fallstudien, auch wenn er aus heutiger didaktischer Sicht kein besonders günstiges Beispiel darstellt (vgl. die Analyse von Struve & Voigt 1986), weil sich der Sklave zwar den Argumenten des Sokrates nicht entziehen kann, aber keine Gelegenheit zum selbständigen Strukturieren, Durchdringen, Verstehen des Beweises erhält.

Aus den bisherigen Erfahrungen haben sich natürlich auch wichtige Erkenntnisse herausgeschält über den grundsätzlichen Charakter, den das Beweisen bei Schülern hat. Überzeugend erscheinen mir vor allem der Ansatz Fischbeins (1982, der sich wiederum auf Bell beruft), daß ein Beweis zuvörderst die Aufgabe hat, den "Glauben" an den 'bewiesenen' Sachverhalt zu fördern, und der Ansatz Steins (1986:325) mit den "impliziten Beweisvorstellungen" der Schüler.

In ihren Untersuchungen haben Fischbein & Kedem (1979) festgestellt, daß zahlreiche Probanden einen Sachverhalt ordentlich beweisen, ihn aber dann in konkreten Anwendungen noch einmal nachrechnen, und zwar nicht etwa weil sie an der Korrektheit ihrer Schlüsse zweifeln (wie man eine Addition vieler Summanden in anderer Reihenfolge wiederholt, um Rechenfehler aufzuspüren), sondern weil sie nicht an die Beweiskraft des 'Beweises', an seine Allgemeingültigkeit, glauben. Der mathematische Beweis und der innere Glaube an die Wahrheit eines (mathematischen!) Sachverhalts sind zweierlei, und eine Aufgabe des Unterrichts im Beweisen ist es, sie zur Deckung zu bringen.

Dazu kann sehr wohl auf die eben inkriminierte Verhaltensweise zurückgegriffen werden: Es ist ja üblich, daß man die Bedeutung eines Satzes mit (u.U. extremen) Beispielen und Folgerungen illustriert. Die positiven Rückwirkungen dieses (dann so zu sehenden) induktiven und reduktiven Vorgehens auf die Glaubwürdigkeit des Beweises sind zu nutzen, ohne den Unterschied zwischen induktiver und reduktiver Erkenntnisgewinnung einerseits und deduktiver andererseits zu verwischen (dieser sollte vielmehr durch die Erarbeitung von immer mehr Beweisen zunehmend deutlicher werden). Die Glaubwürdigkeit kann aber vor allem durch zusätzliche (allgemeine) Plausibilitätsargumente gefördert werden: etwa die Idee der Freiheitsgrade oder überhaupt alle die in den letzten Abschnitten beschriebenen Bewegungs- bzw. Verformungsaktivitäten, die ja selten den Beweis selbst liefern, u.v.a.m.

Eine klassische didaktische Weisheit besagt, daß der Beweis eines Satzes nichts wert ist, wenn dieser Satz ***nach*** dem Beweis nicht ***mehr*** geglaubt wird ***als vorher***. Da ist Evidenz ein Nachteil, weil dann der Glaube vorher schon zu stark ist, so daß keine Steigerung möglich ist; und es gilt, entweder die Evidenz zu erschüttern oder auf den Beweis zu verzichten. So manches methodisches Mittel, mit denen den Schülern auf die Sprünge des Beweisens geholfen werden soll, hat aber den Effekt, die Evidenz zu steigern und damit dem eigentlichen Zweck im Wege zu stehen (z.B. das zusätzliche Abreißen und geeignete Anlegen zweier Ecken eines Pappdreiecks beim Winkelsummensatz oder die ganze Philosophie der Computer-Software 'Geometric Supposer' von Schwartz & Yerushalmy 1985).

Das Beweisbedürfnis leidet aber nicht nur bei einem Zuviel an Glauben, sondern ebenso, wenn der Sachverhalt für die Schüler unklar, bedeutungslos, irrelevant o.ä. ist; und es gilt, auch diese Hemmnisse zu beseitigen oder zu vermeiden.

Ein Beispiel, wo mehrere dieser Gesichtspunkte glücklich zusammenwirken, ist "die Proportionalität von Kreisradius und -umfang": Diese erscheint zunächst trivial, ebenso wie der 'Beweis' mit Hilfe von Ähnlichkeit o.ä. Der Umfang ist $2\pi$-mal, also etwa 6-mal so lang wie der Radius, und es ist völlig klar, daß eine Verlängerung des Radius um 1 m eine solche des Umfangs um etwa 6 m nach sich zieht, und zwar auch, wenn der Ausgangsradius 40.000.000 m lang ist. Dieser triviale Sachverhalt wird erst problematisch, wenn er für die Schüler eine Bedeutung etwa in Form der folgenden Einkleidung erhält: "Ein Seil ist entlang dem Äquator straff um die Erde gespannt. Wieviel länger wird es, wenn es überall 1 m angehoben wird?" Damit die richtige Antwort "etwa 6 m" glaubwürdig wird, braucht man ein Plausibilitätsargument: "Hebt man ein 1000 km langes Seil vom Erdboden in 1 m Höhe, dann 'überdeckt' es im wesentlichen dieselbe Linie wie vorher." Darin steckt der eigentliche Grund: Die riesige Länge des Äquators wird in ihrer Wirkung (auf die fragliche Operation) durch die flache Krümmung kompensiert. Diesen Zusammenhang kann man sich nun genauer klar machen, indem man Parallelfiguren von konvexen Polygonen betrachtet (s. Schreiber 1982). (Das Problem ist hier bewußt nicht als Denksportaufgabe behandelt.)

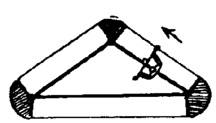


Abb. 23

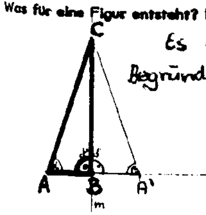
Stein (1986:325) unterscheidet vier Kategorien "impliziter Beweisvorstellungen" bei Schülern. Danach fassen die Schüler Beweise auf als



a) Erklärung (das kommt dem Lehrziel von Didaktikern und Lehrern am nächsten),
b) Beschreibung des Satzfindungsprozesses,
c) Berechnung (das möchte ich aus geometrischer Sicht noch um 'Konstruktion' erweitern) oder
d) Verdichtung (Texte auf prägnante Form bringen, umgangssprachlich orientierte Wendungen in Fachsprache übertragen).

Abgesehen von Kategorie a) werden hier gewisse Fehlvorstellungen beschrieben, die man folgendermaßen charakterisieren kann: Durch die Aufforderung zu einem Beweis sind die Schüler in eine Problemsituation versetzt, und sie versuchen oder liefern eine Lösung dessen, was sie als Problem erkennen bzw. erraten (gemäß der Aufgabenstellung ist ja offenbar ein Problem da). So werden beim abbildungsgeometrischen Beweis der Kongruenzsätze tatsächlich lediglich Abbildungen konstruiert (Kategorie c). Die Einführung einer eigenen formalen Sprache kann zu der Fehlvorstellung führen, daß ein Beweis aus deren Verwendung bestehe (Kategorie d). Ein Beispiel für b) (mit Elementen von c) und d) ist folgende Aufgabenlösung eines Schülers aus der Untersuchung von Beckmann (1986):

c) **Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.**
**Spiegele Dreieck ABC an BC.**
**Was für eine Figur entsteht? Begründe.**




Es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck.
Begründung: m ist Mittelsenkrechte und Symmetrieachse. Bei Spiegelung an m wird $A \xrightarrow{sm} A'$, $B \xrightarrow{sm} B$ (Fixpunkt), $C \xrightarrow{sm} C$ (Fixpunkt). $|\overline{AC}| = |\overline{A'C}|$, $|\overline{AB}| = |\overline{BA'}|$, wegen Längentreue.
wegen Winkelmaßtreue ist $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$.

Abb. 24

(Es fehlt beim Aufschrieb das entscheidende Argument, nämlich daß Geraden, die senkrecht auf der Spiegelachse stehen, mit ihrem Spiegelbild zusammenfallen.) Natürlich weiß man, wie man hier Abhilfe schaffen kann: Man muß verschiedene Dreiecke betrachten lassen, wo B auf der Lotrechten wandert, und fragen, welche Figuren bei der Spiegelung entstehen (mit Begründung). - Aber man möchte ja erreichen, daß die Schüler auch Beweisaufgaben lösen, die so gestellt sind wie die vorgelegte.

Die Ursachen für solche Fehlvorstellungen über das Beweisen liegen auch im Unterrichtsprozeß: Das fängt an mit den oben analysierten zirkulären Beweisen evidenter Sachverhalte, die das Beweisverständnis gleich zu Beginn auf Dauer verderben können; das geht damit weiter, daß im normalen Unterricht Beweisverständnis kaum überprüft werden kann und daß kleinste Ungenauigkeiten im Ausdruck von irgendeiner Seite zu Fehlvorstellungen führen können, die deswegen so schwierig vom Lehrer oder vom Schüler zu identifizieren sind, weil sie sich fast identisch mit richtigen Vorstellungen äußern; und das wird verstärkt durch fachliche, didaktische und methodische Unsicherheit beim Lehrer und einen verbreiteten Zweifel an der Lehrbarkeit des Beweisens. - Hier liegt noch ein weites Feld für detaillierte Forschung.

Die Neigung zu den o.a. impliziten Beweisvorstellungen könnte aber auch positiv gewendet werden, zumindest bei Kategorie b), eventuell zusammen mit c), indem gerade solche Beweise geführt werden, die im wesentlichen aus der Beschreibung des Satzfindungsprozesses bestehen (natürlich *mit* den Begründungen, deren Notwendigkeit sich dabei aber quasi von selbst ergibt), z.B.: "Welche archimedischen Körper gibt es?" (Ein Teil ist in Abb. 13 dargestellt.) Hier geht es nicht um den Nachweis von Existenz, sondern von Nicht-Existenz; der Beweis wird aber durch das Auffinden von einzelnen Objekten geleitet und durch Fallunterscheidungen (bei Winkelbetrachtungen) strukturiert; die Objekte (archimedische Körper) erscheinen auch handfester als die üblicherweise vorkommenden Beziehungen; und mit dem Beweis wird zugleich ein Produkt hergestellt, nämlich das System der Körper, also der Satz.

Dieser Satz kann, bei entsprechender Vorbereitung, bereits im 6. Schuljahr behandelt werden. Er ist selbstredend komplexer und sein Beweis erheblich umfangreicher als das Übliche, aber gerade deswegen leichter zugänglich und daher als Einstieg besser geeignet. Dem steht eigentlich nur die mathematische Systematik und, ausschlaggebend, die geringe Zeit für den Geometrieunterricht insgesamt entgegen. Andere zu 'beweisende' Systematiken: platonische Körper, archimedische Parkette, Haus der Vierecke nach verschiedenen Prinzipien (s. z.B. Neubrand 1981).

Zum Schluß dieses Abschnitts möchte ich noch einmal meiner Forderung nach bescheideneren Zielen für den Unterricht im Beweisen Nachdruck verleihen:



Wir sollten zufrieden sein, wenn möglichst viele Schüler einzelne Beweise verstehen, ein Verständnis für das Beweisen erwerben, unter Anleitung kleinere Beweise, z.B. inner-mathematische Anwendungen, Variationen, Einzelfälle usw., die als solche gekennzeichnet sind, behandeln können. Ein Beispiel in diesem Sinn sind etwa folgende 3 Aufgaben von Sievert (1976), wo jedesmal das Winkelmaß $\gamma$ gesucht ist und die Beherrschung fundamentaler Sätze über Winkel und Dreieck vorausgesetzt ist (ähnliche Beispiele hat auch Gerhard Holland, Gießen, entwickelt).

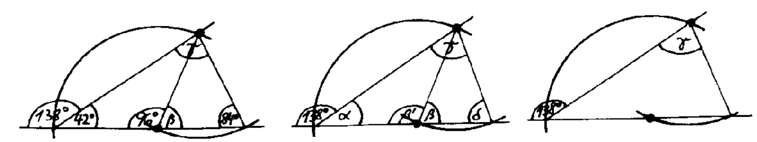


Abb. 25

(Allerdings ist zu bedenken, daß solche Aktivitäten ihren Bildungsgehalt nur in größerem Zusammenhang entfalten und man - wie immer - fragen muß, ob man genügend Zeit für sie hat.)

Wenn wir genau hinsehen, so ist festzustellen, daß wir von den meisten unserer Mathematikstudenten (auf entsprechendem inhaltlichen Niveau) nichts Anspruchvolleres erwarten; und wir, die wir uns mit dem Wesen und der Didaktik des Beweisens beschäftigen, sollten einmal überprüfen, ob wir überhaupt schon jemals einen (für uns) völlig neuartigen Schluß völlig selbständig gezogen haben (für eine Analyse eines Verständnisses von 'neuartig' möchte ich auf Freudenthal (1974) verweisen).

Mit den Beweisen in der Elementargeometrie sind wir bestens vertraut, und da sie außerdem anschaulich sind, halten wir sie für naheliegend. Für Mittelstufenschüler sind sie das aber nicht; diese benötigen vielmehr für das Führen eines neuartigen Beweises erhebliche gezielte Hilfen, die nach meiner Einschätzung außer in wenigen Ausnahmefällen so weit gehen müssen, daß sie den Beweis im wesentlichen schon präsentieren. Entsprechendes gilt, wenn bekannte Schlüsse in völlig neuem Zusammenhang zu ziehen sind. (Diese meine Einschätzung kann ich jedoch nicht mit dokumentierten Fallstudien o.ä. belegen; sie beruht vielmehr auf eigenen Beobachtungen, Erfahrungsberichten und der Literatur.)

Die Analysen von Beweisen, methodische Hinweise, Erarbeitung allgemeiner Strategien im Unterricht stehen für mich nicht im Dienste faktischer, sondern konstruktibler Genesen: Ziel ist, einzelne Beweise genetisch zu lehren, d.h. mit der unausgesprochenen leitenden Fragestellung: Wie könnte jemand mit hinreichend viel Zeit, Wissen und Erfahrung auf diese oder jene Überlegung kommen? Dabei ist noch genügend Raum für niveauvolle Eigentätigkeit der Schüler, und es kann auch Verständnis für ***das*** Beweisen erworben werden.

## 6. Die mögliche Rolle des Films bei geometrischen Beweisen

Die Überlegungen zur Verfilmung von Mathematik und zum Einsatz des Films im Mathematikunterricht sind fast so alt wie das Medium 'Film' selbst (s. die Motti in Bürmann 1987 oder Klußmann 1983). Aus 1950 gibt es eine (allerdings nicht allzu ergiebige) empirische Untersuchung über die Wirksamkeit von Filmen im Unterricht (Johnson 1950). 1956 hat Strunz eine sensible Analyse zu den Möglichkeiten und Grenzen eines solchen Einsatzes aus didaktischer Sicht geliefert (Strunz 1956); und auf den bisherigen Visualisierungs-Workshops in Klagenfurt (s. Kautschitsch & Metzler 1982, 1983, 1984, 1985, 1987) erfolgten gründliche Diskussionen mit stärkerer Betonung der medialen Seite.

Das Thema 'Beweisen in der Elementargeometrie' scheint nahezuliegen: Versuche dazu sind schon von Denk aus den Jahren um 1950 bekannt (s. Stein 1981:71); und Tahta (1981) berichtet, daß Jean Louis Nicolet schon seit den 30-er Jahren Filme zur Geometrie hergestellt hat, für die von Gattegno seit den 50-er Jahren geworben wurde (s.a. Gattegno 1958/1971). Damit die filmische Realisierung dieses Themas aber überhaupt Sinn haben kann, bedarf es des Vorliegens einiger Voraussetzungen didaktischer, psychologischer und methodischer Art:

- Beweise in der Schulgeometrie sind anschaulich zu führen: dies ist z.Z. vielleicht nicht die einmütige, aber doch die herrschende Meinung in der Mathematikdidaktik.
- Kinematisches Denken kann dabei eine tragende Rolle spielen: dies habe ich in den vorausgehenden Abschnitten nachzuweisen versucht.
- Der Einsatz total festgelegter, abgerundeter Sequenzen steht den Zielen des Unterrichts nicht entgegen und wird für sinnvoll erachtet: Mit dieser Maxime ist das Haupthindernis (neben den technisch-organisatorischen Problemen bei Herstellung, Verteilung und Einsatz) für die Verwendung von Filmen im Unterricht angesprochen, nämlich die Unterdrückung der Selbsttätigkeit der Schüler im Handeln (sowieso) und im Denken.



Natürlich kann ein Film auch so angelegt sein, daß er z.B. eine Fragestellung entwirft und die Schüler zum Agieren und Reflektieren auffordert. Aber an diesen Typ ist nicht gedacht, wenn es um Filme über Beweise geht; denn gerade bei diesem Thema hat der Film kaum mehr zu bieten als die sowieso gebräuchliche Zeichnung, so lange die entscheidende(n) Idee(n) nicht gerade als Fertigfabrikat vorgeführt werden sollen (bei Verwendung ***sehr*** komfortabler 'interaktiver' Computergrafik mag diese Einschätzung revidiert werden müssen; ein solches Grafiksystem ist seinem Wesen nach dann aber eher Zeichnung als Film).

Bei der Produktion eines Films kann man sich sowieso nicht hinreichend genau auf Lerngruppe und -situation einstellen und geeignete offene Situationen bereitstellen. Hinzu kommt der Werkscharakter eines Films, der, besonders auch im Hinblick auf die Veröffentlichung, die explizite, zum bloßen Konsum verleitende Herausarbeitung der entscheidenden Idee(n) unumgänglich macht. So kommt als Funktion für einen solchen Film die Zusammenfassung und der Rückblick auf einen Beweis in Frage, aber auch die Beweisarbeit selbst, wenn nicht mehr notwendig anzustreben ist, daß 'die' Schüler den Beweis selbst finden (und das rechtfertige ich mit der Zielrevision, wie ich sie am Ende von Abschnitt 5 formuliert habe). #

Die stoffdidaktischen Funktionen einer Beweisverfilmung sind genau die am Ende von Abschnitt 4 aufgelisteten Funktionen A.-G. von (stetigen) Bewegungen und Verformungen bei Beweisen. Einige Realisierungsvorschläge finden sich ebenfalls in jenem Abschnitt.

Zum Erfolg eines solchen Films im Unterricht könnte der Lehrer folgendermaßen beitragen (wie immer, eine 'aufnahme'bereite Lerngruppe vorausgesetzt):

Er hat vorher die Begleitschrift zum Film studiert, ihn sich mehrfach angesehen, sich dabei u.a. einen Überblick über die Länge der einzelnen Passagen verschafft und sich grob einen von ihm selbst vorzutragenden Begleittext überlegt. Sodann führt er den Film in einem gut durchlüfteten, kaum abgedunkelten Raum auf 1 sehr großen Monitor flimmerfrei, scharf eingestellt usw. vor, schaltet den Ton ab und spricht seinen Text.

Dabei hält er den Film immer wieder an, weil es ihm und den Schülern schwer fällt, beim Ansehen bewegter Bilder Gedanken zu fassen, die nicht gerade das Gesehene äußerlich beschreiben. Er tut dies aber auch, um mit einem Zeigestock auf Einzelheiten hinzuweisen, Sachverhalte von außerhalb des Films heranzuziehen, u.U. weitere Medien wie die Wandtafel zu benutzen und nicht zuletzt um Schüleraktivitäten aller Art zu ermöglichen. Abweichend von der Konzeption des Films läßt er diesen gegebenenfalls langsamer, schneller, rückwärts laufen usw. (es sollte also ein Videofilm sein mit komfortabler Technik).

Dennoch mangelt es dem Film (sofern keine Bildteilung vorgenommen wird, die allerdings auch nicht beliebig weit getrieben werden kann, und sofern er nicht als Standbild geboten wird) an einer gewissen Flexibilität gegenüber dem Cartoon (Geschichte in mehreren Standbildern (s. Meyer 1979 oder Abb. 9, 13 u.v.a.): Dort hat man den Ablauf ganz im Blick (Voraussetzung: alle Bilder auf einer 'Seite'), und man kann nach eigenem Gutdünken zwischen den Stationen hin- und herwandern. Diese müssen in optimaler Dichte über den ganzen Ablauf verstreut sein; die Lehrererläuterungen sind nach wie vor erforderlich; und die Schüler brauchen eine - etwas - größere Vorstellungskraft zum Sehen stetiger Bewegungen bzw. Verformungen als beim Film.

Die Herstellung von Trickfilmen wird infolge der Fortschritte bei der Computergrafik zunehmend vereinfacht. Von einem interaktiven Grafiksystem für den direkten Einsatz im Geometrieunterricht, das diesen deutlich verbessern würde, sind wir noch weit entfernt. Ein solches System müßte Bewegungen bzw. Verformungen ebener und räumlicher Figuren unter Erhaltung beliebiger, leicht vorgebbarer Eigenschaften ermöglichen, und dabei allerprimitivst handhabbar sein. Die z.Z. für die Schule in Frage kommenden Grafiksysteme (inklusive der Igel-Grafik; s. z.B. Schumann 1987) sind im wesentlichen Nachbildungen der zeichnerischen Geometrie und dienen vor allem dem schnelleren und präziseren Zeichnen und Messen, aber nicht dem Beweisen. Mit seinem Image des Exakten und Unfehlbaren ist der Computer da eher ein Hindernis für das Beweisbedürfnis.



Für einen ***verbindlichen***, auch nur sporadischen, Einsatz im Geometrieunterricht ist das Medium 'Film' in seiner heutigen Erscheinungsform infolge fehlender Flexibilität kaum geeignet. Dennoch halte ich die Herstellung solcher Filme aus didaktischer Sicht für unentbehrlich; denn die Re-Analyse elementargeometrischer Beweise unter kinematischen Aspekten ist längst überfällig. Ich kann mich Erich Wittmann (zitiert nach Klußmann 1983: 40) hier nur anschließen, wenn er sagt: "Produktion von Filmen ist Konstruktion von Unterricht." Da ist zunächst einmal das Drehbuch wichtig, aber dann doch auch die Realisierung im Medium, selbst wenn diese nicht zur konkreten Verwendung im Unterricht führt. Diese Realisierung hat nämlich wiederum Rückwirkungen auf die Analyse, sie erst ist das wirklich greifbare Ergebnis der Arbeit, und sie stellt einen ästhetischen Wert dar. Sie gereicht also dem Produzenten selbst, aber auch der Disziplin 'Geometrie', zum Nutzen.

**Anmerkung**: Ich möchte mich bei allen Kollegen bedanken, die mit mir über meine Ausführungen diskutiert haben, insbesondere bei Lothar Profke, Gießen, für seine detaillierten Bemerkungen zu einem Preprint dieser Arbeit. Zwar folge ich ihm nicht ganz in seiner wohlwollenden Einschätzung der möglichen didaktischen Leistungen der Abbildungsgeometrie, aber durch intensive Berücksichtigung seiner Anregungen insgesamt konnte ich den Text an verschiedenen Stellen deutlich verbessern.

**Literatur**

Aebli, Hans (1985): Das operative Prinzip. In: mathematiklehren 11, 4-7

Aner, Barbara, Michael Bendrien, Roland Brode & Elisabeth Kraft (1979): Beweisen im Mathematikunterricht - nur ein kognitives Problem? In: Dörfler & Fischer 1979, 19-27

Arnheim, Rudolf (1969/1972): Visual Thinking. Berkeley: University of California Press 1969. Dt.: Anschauliches Denken. Köln: DuMont 1972

Becker, Gerhard (1980): Geometrieunterricht. Bad Heilbrunn: Klinkhardt

Becker, Gerhard (1982): First Steps in Proving by Grade 7 Students. In: G. Noel (Hrsg.): Colloque international sur l'enseignement de la géometrie. Mons: Université de l'État, 23-31

Beckmann, Astrid (1986): Denkweisen und Argumentationsformen bei Schülern im Geometrieunterricht. Universität Gießen: Manuskript

Beeskow, Hans-Ulrich (1982): Einige Erfahrungen bei der Behandlung des Beweisens geometrischer Sachverhalte. In: Mathematik in der Schule 20, 447-458

Bell, Alan W. (1976): A Study of Pupils' Proof - Explanations in Mathematical Situations. In: Educational Studies in Mathematics 7, 23-40

Bender, Peter (1982): Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 14, 9-24

Bender, Peter (1983): Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1983. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 8-17

Bender, Peter (1989): Noch einmal: Zur Rolle der Anschauung in formalen Beweisen. Erscheint in: Studia Leibnitiana 21

Bender, Peter & Alfred Schreiber (1985): Operative Genese der Geometrie. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: Teubner

Birth, Inge, Günter Fanghänel, Rudi Lenertat, Klaus Maske, Herbert Vockenberg & Karlheinz Weber (1979): Zu Ergebnissen der schriftlichen Abschluß- und Reifeprüfungen im Fach Mathematik des Schuljahres 1977/78 und den sich daraus ergebenden Schlußfolgerungen für die Unterrichtsarbeit und die Vorbereitung der Prüfungen am Ende des Schuljahres 1978/79. In: Mathematik in der Schule 17, 16-27

Boeckmann, Klaus (1984): Funktionen des Films bei der Veranschaulichung von (insbesondere abstrakten) Lehrinhalten. In: Kautschitsch & Metzler 1984, 12-32

Breidenbach, Walter (1949/1967): Raumlehre in der Volksschule. 1949, 11. Aufl. Hannover: Schroedel 1967

Bürger, Heinrich (1979): Beweisen im Mathematikunterricht - Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II. In: Dörfler & Fischer 1979, 103-134

Bürmann, Monika (1987): Probleme des Einsatzes wissenschaftlicher Filme im Unterricht. In: Kautschitsch & Metzler 1987, 177-192

Dörfler, Willibald (1984): Qualität mathematischer Begriffe und Visualisierung. In: Kautschitsch & Metzler 1984, 44-64

Dörfler, Willibald (1987): Formen und Mittel des Verallgemeinerns in der Mathematik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 30-37

Dörfler, Willibald & Roland Fischer (Hrsg.) (1979): Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für "Didaktik der Mathematik" in Klagenfurt 1978. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: Teubner

Fischbein, Efraim (1982): Intuition and proof. In: For the Learning of Mathematics 3, Heft 2, 9-18, 24

Fischbein, Efraim & Irith Kedem (1982): Proof and Certitude in the Development of Mathematical Thinking. In: A. Vermandel (Hrsg.): Proceedings of the 6th international conference for the psycholgy of mathematical education. Antwerpen, 128-131



Fraedrich, Anna Maria (1979): Heuristisches Vorgehen bei geometrischen Beweisaufgaben am Beispiel der Höhenaufgabe von Duncker. In: Praxis der Mathematik 21, 225-233, 264-272, 297-309

Freudenthal, Hans (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. 2 Bände. Stuttgart: Klett

Freudenthal, Hans (1974): Lernzielfindung im Mathematikunterricht. In: Zeitschrift für Pädagogik 20, 719-738

Freudenthal, Hans (1977): Didaktische Phänomenologie mathematischer Grundbegriffe. In: Der Mathematikunterricht 23, Heft 3, 46-73

Freytag, Klaus (1984): Beispielgebundenes und anschauliches Begründen und seine Beziehung zum Beweisen. In: Mathematik in der Schule 22, 774-786

Galbraith, P.L. (1981): Aspects of Proving: A Clinical Investigation of Process. In: Educational Studies in Mathematics 12, 1-28

Gattegno, Caleb u.a. (Hrsg.) (1958/1971): L'enseignement des Mathématiques. Band 2. Neuchâtel: Delachaux & Niestlé 1958. Dt.: Zur Didaktik des Mathematikunterrichts. Band 2. Hannover: Schroedel 1971

Griesel, Heinz (1982): Leerstellenbezeichnung oder Bedarfsname - Anmerkungen zur Didaktik des Variablenbegriffs. In: Mathematische Semesterberichte 29, 68-81

Hadar, Nitsa (1977/1978): Children's Conditional Reasoning. In: Educational Studies in Mathematics 8 (1977), 413-439; 9 (1978), 97-114 (mit L. Henkin), 115-140

Hanisch, Günter (1985): Gefahren der Visualisierung. In: Kautschitsch & Metzler 1985, 99-109

Heidenreich, Karl (1987a): Kritische Anmerkungen und ergänzende Vorschläge zu Hürtens heuristischem Prinzip für die Abbildungsgeometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 166-170

Heidenreich, Karl (1987b): Der Rotwein-Beweis. In: Praxis der Mathematik 29, 136-138

Hennes, Clemens & Siegbert Schmidt (1981): Beweisstrategien und Denkmuster von Hauptschülern beim Begründen mathematischer Aussagen. In: Journal für Mathematikdidaktik 2, 321-350

Hennes, Clemens & Siegbert Schmidt (1982): Logisches Schließen von Hauptschülern gegen Ende ihrer Schulzeit. In: Journal für Mathematikdidaktik 3, 145-171

Holland, Gerhard (1979): Das Beweisen geometrischer Sätze in der Sekundarstufe I unter verschiedenen Aspekten von Geometrie. In: Didaktik der Mathematik 7, 104-119

Holland, Gerhard (1980): Unterrichtsstrategien zum Gewinnen und Beweisen geometrischer Sätze. In: Praxis der Mathematik 22, 97-113

Hürten, Karl Heinz (1971): Das heuristische Prinzip der Geometrie und seine Bedeutung für die Propädeutik des Mathematikunterrichts. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1970. Hannover: Schroedel, 63-72

Jahnke, Hans Niels (1978): Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem. Bielefeld: IDM Studien und Materialien 10

Jahnke, Hans Niels & Michael Otte (1979): Der Zusammenhang von Verallgemeinern und Gegenstandsbezug beim Beweisen - am Beispiel der Geometrie diskutiert. In: Dörfler & Fischer 1979, 225-242

Johnson, Donovan A. (1950): Are Films and Filmstrips Effective in Teaching Geometry? In: School Science and Mathematics 50, 570-574

Kautschitsch, Hermann & Wolfgang Metzler (Hrsg.) (1982, 1983, 1984, 1985, 1987): Workshop zur "Visualisierung in der Mathematik" in Klagenfurt 1981, "Mathematische Anschauung und Mathematikfilm" 1982, "Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun" 1983, "Anschauung und mathematische Modelle" 1984, "Medien zur Veranschaulichung von Mathematik" 1985, 1986. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: Teubner

Kiesow, Norbert & Karlheinz Spallek (1983): Zum funktionalen Ansatz in der Schulmathematik. Ein inhaltlich-operativer Zugang zum Funktionsbegriff. In: Journal für Mathematikdidaktik 4, 3-38

Kirsch, Arnold (1977): Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. In: Didaktik der Mathematik 5, 87-101

Kirsch, Arnold (1980): Zur Mathematik-Ausbildung der zukünftigen Lehrer - im Hinblick auf die spätere Praxis des Geometrieunterrichts. In: Journal für Mathematikdidaktik 1, 229-256

Klieme, Eckhard (1987): Bildliches Denken: Kognitionspsychologische Modelle und didaktische Strategien. In: Kautschitsch & Metzler 1987, 43-67

Klußmann, Wilhelm (1983): Der Film im Mathematikunterricht. Gh-Uni Kassel: Staatsexamensarbeit

Kratz, Johannes (1983/1984): Beweisen im Geometrieunterricht. In: Didaktik der Mathematik 11 (1983), 283-296; 12 (1984), 45-56

Kroll, Wolfgang (1980): Geometrie in der Sekundarstufe I. In: Praxis der Mathematik 22, 161-167, 193-209

Kühl, Jürgen (1976): Einfache geometrische Tätigkeiten entwickelt am Abbildungsbegriff. 2073 Lütjensee: Paul Albrechts

Kusserow, Wilhelm (1928/1985): Los von Euklid! Leipzig: Dürr 1928. Nachdruck Paderborn: Schöningh 1985

Lakatos, Imre (1961/1979): Proofs and Refutations. Cambridge: Dissertation 1961. Überarbeitung: John Worral und Elie Zahar (Hrsg.): Proofs and Refutations - The Logic of Mathematical Discovery. London: Cambridge University Press 1976. Dt.: Beweise und Widerlegungen - Die Logik mathematischer Entdeckungen. Braunschweig: Vieweg 1979





Lehmann, Karlheinz (1977): Ein Weg zur Befähigung der Schüler zum Beweisen in Klasse 6. In: Mathematik in der Schule 15, 366-379, 497-503, 599-604, 613-614

Lehmann, Karlheinz & Klaus Maske (1977): Dem Beweisen mehr Aufmerksamkeit widmen! In: Mathematik in der Schule 15, 141-146

Leppig, Manfred (1979): Anmerkungen zu Beweisfähigkeiten bei Abiturienten und Studienbewerbern. In: Dörfler & Fischer 1979, 297-305

Lorenz, Günter (1977): Der Satz über die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks, Klasse 6. In: Mathematik in der Schule 15, 541-544

Lorenz, Günter (1978): Zur Entwicklung von sicheren Fähigkeiten im Beweisen im Geometrieunterricht der Klassen 6 bis 8. 2 Teile. In: Mathematik in der Schule 16, 534-540, 549, 600-602, 615-620

Lorenzen, Paul (1962): Metamathematik. Mannheim: Bibliographisches Institut

Menger, Karl (1971): The Geometry Relevant to Modern Education. In: Educational Studies in Mathematics 4, 1-17

Meyer, Karlhorst (1979): Beweisen und Hefteintrag. In: Dörfler & Fischer 1979, 327-334

Mitschka, Arno (1982): Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I. Freiburg: Herder

Mormann, Thomas (1981): Argumentieren, Begründen, Verallgemeinern. Königstein: Scriptor

Müller, Manfred (1985): Der Satz von Morley und seine elementargeometrische Erarbeitung. In: Wilhelm S. Peters (Hrsg.): Mathematik und Didaktik der Mathematik. Bernhard Bierbaum zum 60. Geburtstag. Bonn: Universität - Seminar für Mathematik und ihre Didaktik, 123-140

Neubrand, Michael (1981): Das Haus der Vierecke. In: Journal für Mathematikdidaktik 2, 37-50

Nicolet, Jean Louis (1958/1971): Intuition mathématique et dessins animés. In: Gattegno 1958, 72ff. Dt.: Mathematische Anschauung und Zeichentrickfilm. In: Gattegno 1971, 55-71

Perko, R. (1987): Visualisierung und Flüchtigkeit. In: Kautschitsch & Metzler 1987, 69-73

Pickert, Günter (1984): Erzeugung mathematischer Begriffe durch Beweisanalyse. In: Journal für Mathematikdidaktik 5, 167-187

Pólya, Georg (1954/1963): Mathematics and Plausible Reasoning. 2 Bände. Princeton: University Press 1954. Dt.: Mathematik und plausibles Schließen. Basel: Birkhäuser 1963

Pracht, Egon (1979): Beweisverständnis und dessen Überprüfbarkeit. In: Dörfler & Fischer 1979, 349-356

Schnabel, Rudolf (1984): Der Peripheriewinkelsatz. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1984. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 309-312

Schönwald, Hans (1987): Methodische Ergänzung zu "Der Satz des Pythagoras". In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 40, 246

Schreiber, Alfred (1982): Parallelfiguren. In: mathematica didactica 5, 139-153

Schumann, Heinz (1987): Interaktives Konstruieren im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 295-298

Schupp, Hans (1974): Untersuchungen und Überlegungen zum Stand des Beweisvermögens der Studienanfänger. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1974. Hannover: Schroedel, 37-42

Schwartz, Judah L. & Michal Yerushalmy (1985): The Geometric Supposer: Triangles. Pleasantville: Sunburst

Schwartze, Heinz (1987): Geometrie und Schulbuch - Anspruch und Schulwirklichkeit. In: mathematiklehren 22, 46-47

Sievert, Heinz (1976): Vorschläge für eine kontinuierliche Schwierigkeitsstufung beim Beweisen. In: Mathematik in der Schule 14, 332-339

Sneed, Joseph D. (1971): The logical structure of mathematical physics. Dordrecht: Reidel

Sprang, Friedemann (1981): Erfahrungen zum Führen geometrischer Beweise in Klasse 8. In: Mathematik in der Schule 19, 289-296

Stein, Martin (1981): Kommentierte Bibliographie: Zum Beweisen im Mathematikunterricht. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 13, 63-75

Stein, Martin (1986): Beweisen. Bad Salzdetfurth: Franzbecker

Stenius, Erik (1981): Anschauung und formaler Beweis. In: Studia Leibnitiana 13, Heft 1, 133-146

Strunz, Kurt (1953/1971): Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht. Heidelberg: Quelle & Meyer 1953, 6. Aufl. 1971

Strunz, Kurt (1956): Über den Film im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht 2, Heft 3, 19-40

Struve, Horst (1983): Zur Geschichte der Abbildungsgeometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1983. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 326-329

Struve, Rolf (1986): Zur Rolle der Anschauung in formalen Beweisen. In: Studia Leibnitiana 18, Heft 1, 89-93

Struve, Rolf & Jörg Voigt (1986): Der Menon-Dialog - Analyse und Kritik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1986. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 293-296



Tahta, Dick (1981): Some Thoughts Arising from the New Nicolet Films. In: Mathematics Teaching 94, 25-29

Thom, René (1970/1974): Les mathématiques 'modernes': Une erreur pédagogique et philosophique? In: L'âge de la science 3 (1970), 225-242. Dt.: "Moderne" Mathematik: Ein erzieherischer und philosophischer Irrtum? In: Michael Otte (Hrsg.): Mathematiker über die Mathematik. Berlin: Springer 1974, 371-401

Volkert, Klaus Thomas (1986): Die Krise der Anschauung. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht

Vollrath, Hans Joachim (1967): Der Beweis als Gewinnstrategie im Unterrichtsdialog. In: Praxis der Mathematik 9, 297-300

Waerden, Bartel Leendert van der (1954/1973): Einfall und Überlegung. Basel: Birkhäuser 1954, 3. Aufl. 1973

Wagenschein, Martin (1968/1974): Der Sechs-Stern. In: Verstehen und Vertrauen. Festschrift zu O.F. Bollnows 65. Geburtstag. Stuttgart: Kohlhammer 1968, 229-244. Und als: Entdeckung der Axiomatik. In: Der Mathematikunterricht 20 (1974), Heft 1, 52-70

Walsch, Werner (1972/1975): Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Berlin: Volk und Wissen 1972, 2. Aufl. 1975

Walsch, Werner (1979): Zur Entwicklung von Fähigkeiten im Beweisen im Mathematikunterricht mittlerer Klassen. In: Dörfler & Fischer 1979, 379-395

Wertheimer, Max (1945/1959): Productive Thinking. New York: Harper & Row 1945, 2., erw. Aufl. (hrsgg. von Michael Wertheimer) 1959

Williams, Edgar (1978/1980): An Investigation of Senior High School Students' Understanding of the Nature of Mathematical Proof. Edmonton: Dissertation 1978. Kurzfassung in: Journal for Research in Mathematics Education 11 (1980), 163-164

Winter, Heinrich (1983): Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. In: Journal für Mathematikdidaktik 4, 59-95

Wittmann, Erich (1971/1978): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg 1971, 5. Aufl. 1978

Wittmann, Erich Christian (1985): Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: mathematiklehren 11, 7-11

Wittmann, Erich Christian (1987): Elementargeometrie und Wirklichkeit. Braunschweig: Vieweg

Witzel, Walter (1981): Lehren des Beweisens im Mathematikunterricht. Freiburg: Hochschulverlag