Ein Zugang zur Finanzmathematik für den Bürgergebrauch

von Peter Bender

0. Einleitung

Die Popularisierung des Taschenrechners hat ein Thema einer sinnvollen Behandlung im Mathematikunterricht zugänglich gemacht, das wegen seines rechentechnischen Ballasts für allgemein- (und berufs-!)bildende Schulen schlecht verdaulich schien: Die *Zinseszinsrechnung*. Intensiviert wurde der Aktualitätsschub durch eine völlige Neufassung der Berechnungsformel für den *effektiven Zinssatz* (Bund-Länder-Kommission »Preisauszeichnung« vom 25. Oktober 1979), den nach der *Preisangabenverordnung (PAngV)* ein gewerblicher Kreditgeber einem privaten Kunden seit dem 1. Januar 1981 für sogenannte Konsumentenkredite und seit dem 1. September 1985 auch für andere vorab nennen muß (s. [17], [2], [13], [8], [9]).

Mit der Zinseszinsrechnung kann die Forderung nach einer stärkeren *Ausrichtung* des Mathematikunterrichts *an Anwendungen* erfüllt werden. Schließlich bietet sich das Thema als Einsatzgebiet für den *Computer in der Schule* an (s. z. B. [19], [18], [22]).

Einordnung und Rechtfertigung des Themas

Ziel eines allgemeinbildenden Unterrichts in Zinseszinsrechnung kann es aber nicht lediglich sein, dem Schüler eine Methode zur Überprüfung eines effektiven Zinssatzes bei einem Kleinkredit mit gewissen Konditionen an die Hand zu geben. Vielmehr sollte der Mathematikunterricht hier einen gewissen Beitrag zur elementaren politischen und ökonomischen Bildung leisten. Dabei ist jedoch die Perspektive des Kredit*nehmers* eines Kleinkredits zu eng und einseitig; es müssen auch andere Arten von Geldgeschäften (Kontokorrentkredite, Wertpapiere, Hypothekendarlehen, Bausparen usw.) und die Sichtweise des Kredit*gebers* beachtet werden. Außerdem sind noch die Geldentwertung (vgl. dazu z. B. [21]) und wohl auch steuerliche Gesichtspunkte zu berücksichtigen.

Vor diesem Hintergrund erscheint das Ausrechnen eines effektiven Zinssatzes auf hundertstel Prozent genau und auch noch mit einer komplizierten, in einem Gremium willkürlich ausgehandelten Formel kleinkariert. Aber umgekehrt hat man wenig von der Erörterung allgemeiner Fragen auf abstraktem Niveau ohne konkrete Realisierung im Detail, und die Formel der PAngV mit nach ihr gerechneten Beispielen ist eine solche Konkretisierung. Über diese hat es eine ausgiebige betriebswirtschaftliche (z. B. in [16]) und auch eine mathematisch-begriffliche ([13], [8], [11], [14], [5], [10], [20], [12]) Diskussion gegeben. – Nach meinem Dafürhalten stellt diese Formel eine sinnvolle Verbindung zwischen vernünftigen mathematisch-wirtschaftlichen Prinzipien und wirtschaftlichen Konventionen dar. Dies, zusammen mit ihrer Verbindlichkeit für das Kreditgewerbe, legitimiert m. E. ihre Behandlung im Unterricht und verleiht ihr (allerdings nicht in der unübersichtlichen Form wie im Text der Verordnung) die Rolle eines inhaltlichen *Leit*ziels für die gesamte Zinseszinsrechnung, auch wenn der reale Unterricht vielleicht gar nicht bis zu ihr vorstößt.

Es gibt zwar eine umfangreiche finanzmathematische Literatur, aber diese ist z. T. von Begriffen und Methoden aus der Zeit geprägt, als es noch keine Taschenrechner und Kleincomputer gab. Außerdem richten sich diese Werke regelmäßig nicht an den Bürger, sondern an Betriebswirte, und häufig ist die einfache mathematisch-wirtschaftliche Begrifflichkeit von betriebswirtschaftlichen Besonderheiten verschleiert, z. B. schon in der Grobstruktur, wenn etwa die Tilgungs- von der Rentenrechnung abgetrennt oder die Kursrechnung separat behandelt wird (s. z. B. den Klassiker der Finanzmathematik [15]). Im folgenden geht es aber gerade darum, die mathematisch-wirtschaftliche Begrifflichkeit für den Bürger an potentiell relevanten Beispielen zu erschließen (ohne den Bezug zur Betriebswirtschaftslehre zu verlieren). Da ich auf den Vorlauf mit der einfachen Zinsrechnung verzichte, ist als Einstieg für den *Mathematiklehrer* der DIFF-Brief »Zinsrechnen« ([1]) geeignet.

Zur Frage des Computer-Einsatzes

Eine schwache Begründungskraft (für den Einsatz des Computers) hat das Argument der Vorbereitung auf das Berufsleben (o. ä.): Zur Berechnung von Zinssätzen, Laufzeiten usw. verwenden Bankkaufleute nach wie vor überwiegend Tabellen, und wenn der Computer benutzt wird, dann als absolute »Black Box«. Auch das will gelernt sein; aber dieser Lerninhalt, ebenso wie das Simulieren des Betriebs einer Bank mit Kontenverwaltung usw., ist offensichtlich etwas anderes als Zinseszinsrechnung.

Für diese ist zunächst einmal der Taschenrechner das wichtigste Instrument. Mit diesem sollen die Schüler vom Rechnen in den Grundrechenarten entlastet werden, aber er erläßt ihnen nicht den eigenhändigen Nachvollzug der Entwicklung eines Kapitals, m. E. ein wichtiger Bestandteil des Aneignungsprozesses der Schüler. So sollten sie u. a. einige Tilgungspläne mit Bleistift, Papier und Taschenrechner erstellen. Mit ihrer Redundanz haben solche Aktivitäten eine entlastende Funktion. Vor allem aber vermitteln sie einen intensiveren Eindruck von der Kapitalentwicklung im Zeitablauf als ein vom Computer komplett ausgeworfener Plan. Ähnliches gilt auch für die iterative Bestimmung des effektiven Zinssatzes (und für geschlossene Lösungen von Gleichungen sowieso). Mit dem Taschenrechner ist man da wesentlich flexibler. Stößt man jedoch in der Zinseszinsrechnung weit genug vor und häufen sich komplexere Beispiele, so liegt der Einsatz des Computers (programmierbaren Taschenrechners) zunehmend nahe, und dann kommt auch gleich wieder eine frühere Verwendung in Frage.

Er fungiert dabei nicht nur als Rechenknecht, sondern kann auch die Begriffsbildung beeinflussen, indem er den algorithmischen gegenüber dem algebraischen Aspekt akzentuiert (vgl. [22]). Dies darf jedoch nicht dazu führen, daß dem Aufstellen und Lösen von Gleichungen aus dem Weg gegangen wird. Im Gegenteil: Auch im Zeitalter des Computers bleibt die Frage nach algebraischen Vereinfachungen und Problemlösungen aus begrifflichen und praktischen Gründen wichtig; allerdings kann man heutzutage im Falle des Fehlens algebraischer Möglichkeiten häufig dennoch algorithmisch weiter arbeiten. Daher meine ich, *beide Aspekte* sollten berücksichtigt werden.

Zum Aufbau der Einheit

Die folgende stoffdidaktische Analyse stellt den Hintergrund für eine Unterrichtseinheit dar, die für das 10. bis 11., eventuell auch schon für das 9. Schuljahr, für schwächere Leistungsgruppen jedoch nur partiell geeignet ist. Vorausgesetzt werden: Umgang mit einfachen Gleichungen, Prozentrechnung, speziell die Gleichheit $4\,\% = \frac{4}{100} = 0{,}04$, Umgang mit einfachen Zinsen, mit der arithmetischen Reihe, Teile der Potenzrechnung, insbesondere die Summenformel für die endliche geometrische Reihe und Wurzelrechnen (z. T. können diese Voraussetzungen auch im Zuge dieser Einheit geschaffen werden). Es empfiehlt sich die Verwendung von Prospekten, Zeitungsanzeigen, Börsen- und sonstigen Wirtschaftsnachrichten, Kontoauszügen und Sparbüchern. Aus Platzgründen kann ich die zahlreichen Anzeigen, auf die ich mich in der Arbeit beziehe, nicht direkt abbilden, sondern muß mich vielmehr auf Textauszüge beschränken. Unbedingt erforderlich ist der Taschenrechner, eventuell der programmierbare (bzw. der Computer).

Der Stoff wird anhand von Beispielen entwickelt. Diese sind entweder authentisch oder quasi-authentisch, d. h. ihre Zahlenwerte sind zwar realistisch, aber erfunden, oder es wird (für den Aufbau der Begrifflichkeit unumgänglich) zunächst jährliche (statt unterjährige) Zahlungsweise angenommen. Die Beispiele stammen im großen und ganzen aus der Zeit von 1986 bis 1988 und sind daher mit relativ niedrigen Zinssätzen ausgestattet.

Grundlegend für die vorliegende Arbeit ist der Umgang mit Bestimmungsgleichungen bzw. Formeln (auch aus algorithmischer Perspektive!), aber nicht mittels Auswendiglernen, sondern mittels Herleiten aus einsichtigen Prinzipien, Interpretieren der Bestandteile und operativem Durcharbeiten. Daher muß auch nicht jedesmal die allgemeine Form mit Buchstaben für die Parameter hingeschrieben werden. Wichtig ist nur, daß bei der Verwendung konkreter Zahlen das Schema der Formel sichtbar bleibt.

1. Darlehen mit einer Rückzahlung

1.1 Das Wesen von Zinsen und Zinseszinsen

(1) Text einer Anzeige: *»Mit Bundesschatzbriefen kann man sich steigern. . . . Typ A läuft 6 Jahre, die Zinsen werden jährlich ausgezahlt. Typ B läuft 7 Jahre, Zins und Zinseszins werden angesammelt. . . . 1. Jahr: 4,00 %; 2. Jahr: 5,50 %; 3. Jahr: 6,00 %; 4. Jahr: 7,00 %; 5. Jahr: 7,50 %; 6. Jahr: 8,00 %; nur Typ B 7. Jahr: 8,00 %. . . .«* Welchen Betrag erhält man nach 7 Jahren, wenn man heute einen Schatzbrief Typ B für 1000 DM kauft?

Folgendes Schema ist (für den Anfang) zu entwickeln:

(2)
$$\begin{array}{lllllllll}
K_0 & = 1000 & & & & & & & \\
K_1 & = 1000 & + & 1000 & \cdot 0{,}04 & = 1000 & \cdot 1{,}04 & = 1040 \\
K_2 & = 1040 & + & 1040 & \cdot 0{,}055 & = 1040 & \cdot 1{,}055 & = 1097{,}20 \\
K_3 & = 1097{,}20 & + & 1097{,}20 & \cdot 0{,}06 & = 1097{,}20 & \cdot 1{,}06 & = 1163{,}03 \\
K_4 & = & & & \cdot & 1163{,}03 & \cdot 1{,}07 & = 1244{,}44 \\
K_5 & = & & & \cdot & 1244{,}44 & \cdot 1{,}075 & = 1337{,}78 \\
K_6 & = & & & \cdot & 1337{,}78 & \cdot 1{,}08 & = 1444{,}80 \\
K_7 & = & & & \cdot & 1444{,}80 & \cdot 1{,}08 & = 1560{,}38,
\end{array}$$

also: Auszahlung 1560 DM. Und (ab der zweiten Zeile daneben):

(3)
$$\begin{array}{lll}
K_1 & = K_0 \cdot (1 + 0{,}04) & \\
K_2 & = K_1 \cdot (1 + 0{,}055) & = K_0 \cdot (1 + 0{,}04) \cdot (1 + 0{,}055) \\
K_3 & = K_2 \cdot (1 + 0{,}06) & = K_0 \cdot (1 + 0{,}04) \cdot (1 + 0{,}055) \cdot (1 + 0{,}06) \\
K_4 & = \quad\quad\quad \cdot & \\
K_5 & = \quad\quad\quad \cdot & \\
K_6 & = \quad\quad\quad \cdot & \\
K_7 & = K_6 \cdot (1 + 0{,}08) & = K_0 \cdot (1 + 0{,}04) \cdot (1 + 0{,}055) \cdot \ldots \cdot (1 + 0{,}08),
\end{array}$$

(4) allgemein: $K_n = K_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$,

wo n die Laufzeit in Jahren und i_m der Zinssatz im m-ten Jahr ($1 \leq m \leq n$) ist.

(5) Für die »Rechengenauigkeit« besteht folgende Regel: Es ist immer mit Taschenrechnergenauigkeit zu rechnen, hingeschrieben werden aber genauestenfalls Pfennige; tatsächliche Zahlungen sind auf volle DM oder volle Pfennige genau, Zinssätze auf zehntel oder hundertstel Prozent genau anzugeben mit üblicher Rundung.

Wichtig ist es, die wirtschaftliche Natur von Kapital und Zins zu erarbeiten. Für unser Gesellschaftssystem gilt: Wie Wohnungen, Videokassetten usw. kann man auch Geld *mieten.* Der Mietpreis wird für eine »Objekt«einheit und eine Zeiteinheit festgelegt (9,50 DM pro Quadratmeter und Monat; 2 DM pro Stück und Tag; 7 DM pro 100 DM und Jahr). Die Miete ist (bis auf etwaige Sonderbeträge) proportional zur Größe der Mietsache und zur Zeitdauer und wird i. a. in regelmäßigen Abständen mit Teilbeträgen gezahlt (die Wohnung i. a. monatlich, Kassetten nach Rückgabe, Geld je nach Vereinbarung). Die Höhe des Mietpreises hängt noch vom Markt (Angebot und Nachfrage), vom Geschick der Geschäftspartner und sonstigen persönlichen Umständen, insbesondere von der Einschätzung der Bonität des Mieters, ab. Mit der Miete hilft der Mieter dem Vermieter, dessen Eigentum zu bezahlen, entschädigt ihn für die faktische Abnutzung (bei Geld z. B. die Inflation), leistet einen Deckungsbeitrag für seine sonstigen Kosten und ermöglicht ihm einen Gewinn.

Ist die Mietsache Geld, so spricht man von einem Darlehen (Kredit), von Darlehensgeber und -nehmer, von Forderung und Verbindlichkeit; und die Miete (genauer: ihr zeitabhängiger Anteil) heißt *Zins*. Da hier Mietsache und Miete (Darlehen und Zinsen) vom selben Größentyp sind, nämlich Geld, werden sie jeweils zu einem einzigen Betrag (dem *Kapital*) zusammengezogen.

(6) *Im Laufe eines Jahres ist das Kapital konstant. Nach Ablauf eines jeden Jahres (jeweils am letzten Tag) wird es um die Zinsen für dieses Jahr vermehrt. Diese werden dadurch »kapitalisiert«, d. h. sie werden ab dann mit vermietet bzw. verzinst und werfen also Zinseszinsen ab; die Zinsen werden »kumuliert«.* Am Laufzeitende hat das Kapital seinen Höchststand erreicht und wird dann durch Rückzahlung des ganzen Betrags auf 0 gebracht.

Eine andere Möglichkeit (z. B. auch bei Schatzbriefen Typ A (s. (1)) ist die Bezahlung der Zinsen sofort an jedem Jahresende. In diesem Fall ist das Kapital über die ganze Laufzeit konstant. Die jährlichen Zinszahlungen lassen sich dabei ganz simpel berechnen; sie würden, bei ebenfalls 7jähriger Laufzeit 40 DM, 55 DM, 60 DM usw. betragen, zusammen also 460 DM, d. h. 100 DM weniger als bei der anderen Variante. Aber dieses Geld stünde früher zur Verfügung, könnte also wieder anderweitig angelegt und verzinst werden und wäre daher als Kapital mehr wert, als wenn *am Ende* 460 DM ausgezahlt würden. Wäre es auch mehr wert als 560 DM? Diese Frage nach der Bewertung ist bei jährlicher Auszahlung der Zinsen mathematisch schwieriger anzugehen (s. Kap. 2). Wir beschränken uns daher jetzt auf den Fall der Zinskumulation.

Der Vorgang der Kumulation zeigt sich in Formel (4) in den Faktoren: Wenn das Kapital zu Beginn des m-ten Jahres K_{m-1} beträgt, dann wächst es bis zum Ende um die Zinsen $i_m \cdot K_{m-1}$ auf $K_m = K_{m-1} + i_m \cdot K_{m-1} = K_{m-1} \cdot (1 + i_m)$; die »1« in diesem Faktor, dem sogenannten *Zinsfaktor* (häufig mit $q_m = 1 + i_m$ abgekürzt) liefert den Beitrag des Anfangskapitals, der – gewöhnlich viel kleinere – zweite Summand, der *Zinssatz*, liefert den Beitrag der Zinsen zum Endkapital nach 1 Jahr. Das ist typisch für Wachstumsfunktionen (vgl. auch den Mehrwertsteuer-Operator · 1,14 bei 14 % Mehrwertsteuer).

(7) *Ein wichtiger Grundsatz bei solchen mehrjährigen Rechnungen lautet also: Zwar interessiert der »Zinssatz«, zu rechnen ist aber zunächst mit dem »Zinsfaktor«.*

Jedes Jahr der Laufzeit ist durch genau einen Zinsfaktor vertreten. Die Reihenfolge der Faktoren ist wegen der Kommutativität der Multiplikation offenbar beliebig. Dies kann man auch nachvollziehen, indem man jeden entstehenden Betrag separat weiterverzinst (was einer Ausmultiplizierung der Formel (4) entspricht und bei einer Laufzeit von n Jahren zu 2^n Summanden führt).

1.2 Aufgaben zur Zinseszinsrechnung

(8) Text einer Anzeige: *»Finanzierungs-Schätze des Bundes: kurze Laufzeit – gute Zinsen. 2 Jahre Laufzeit; 4,77 % Rendite. ... Sie zahlen z. B. ... DM ein und erhalten nach zwei Jahren 1000 DM zurück. ...«* Wie teuer muß der Bund seine Finanzierungsschätze anbieten? 911 DM.

(9) Oder: *»Ein Bundesschatzbrief soll mit Konditionen wie in (1) ausgestattet werden, lediglich den Zinssatz im 7. Jahr möchte der Bund so erhöhen, daß der Auszahlungsbetrag eines 1000-DM-Schatzbriefes sich auf 1580 DM beläuft.«* 9,36 %.

(10) Und: *»Wann erreicht ein 1000-DM-Schatzbrief wie in* (1) *einen Wert von 1400 DM?«* Im 6. Jahr: genauer nach 5 Jahren und 210 Tagen (= 7 Monaten). Das Jahr erhält man durch sukzessive Multiplikation in Formel (4) bzw. direkt aus dem Schema (2).

Beim Umgang mit Formel (4) wird die Proportionalität zwischen Rückzahlungs- und Auszahlungskapital (sowie jedes Zinsbetrags mit dem Kapital) offenbar: *Entscheidend für die Analyse ist eigentlich nur der Proportionalitätsfaktor, der Quotient aus Rückzahlungs- und Auszahlungskapital, das Produkt aus den Zinsfaktoren. Diesen Faktor nenne ich »Gesamtfaktor« (11).*

1.3 Der effektive Zinssatz als Mittelwert und als Zinssatz des »Normal«falls

(12) »Eine Bank bietet einen Sparbrief mit einer Laufzeit von 7 Jahren und einem jährlichen Zinssatz von 6 % an.« Hier beträgt der Gesamtfaktor $1{,}06^7 = 1{,}50363$; diese Geldanlage ist also schlechter als (1).

(13) »Wie hoch müßte denn ein jährlich gleichbleibender Zinssatz sein, damit die Geldanlage so gut wie (1) *ist?«* Der Ansatz lautet

(14) $K \cdot (1+x) \cdot (1+x) \cdot \ldots \cdot (1+x) = K \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}055 \cdot \ldots \cdot 1{,}08$, bzw. $(1+x)^7 = 1{,}560383744$.

Nun wird Grundsatz (7) aktuell: Man braucht kein Polynom in x, sondern eines in $1+x$, und erhält $1+x = \sqrt[7]{1{,}560383744}$ und $x = 0{,}065625215$. Also: Der Zinssatz müßte 6,56 % betragen.

Hier, wie an weiteren Stellen, ist das Herauspräparieren einer eigenen Formel ziemlich wertlos. Jegliche Berechnungen sollten von der Formel (4) (evtl. mit Ansatz (14)) ausgehen.

Der Wert von 6,56 % ist eine Art Mittelwert der Zinssätze in (1). Hier liegt folgende Vorstellung von Mittelwert zugrunde: Hat man n Werte, die auf geeignete Art zu einem Wert w verknüpft werden können, so ist ihr Mittelwert d derjenige, den man n-mal mit sich selbst verknüpfen muß, um w zu erhalten. Bei den Körpergrößen der Schüler einer Klasse, den Monatsumsätzen eines Jahres, den erreichten Punktzahlen einer Klausur ist die Verknüpfung die Addition, und es liegt das arithmetische Mittel vor; bei den Kantenlängen eines Quaders (wenn es um das Volumen geht), den Wachstumsfaktoren einer Zellkultur oder den Zinsfaktoren eines Geldgeschäfts ist die Verknüpfung die Multiplikation, und es liegt das geometrische Mittel vor.

Also	$d + d + \ldots + d = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$	und $d \cdot d \cdot \ldots \cdot d = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n$
bzw.	$n \cdot d = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$	$d^n = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n$
bzw.	$n \cdot d = w$	$d^n = w$
bzw.	$d = \frac{w}{n}$	$d = \sqrt[n]{w}$

Man muß also nicht die Einzelwerte selbst kennen, sondern nur ihre *Anzahl*, den Gesamtwert und den Typ der Verknüpfung.

Die Frage nach dem mittleren Zinssatz in (1) wird häufig mit dem arithmetischen Mittel beantwortet, nämlich $\frac{46\,\%}{7} = 6{,}57\,\%$, ein für die Berechnung einfacher Zinsen korrektes Vorgehen (bei der Verwendung der Zinsfaktoren ergäbe sich mit $\frac{7{,}46}{7} = 1{,}0657$ dasselbe). Das geometrische Mittel der Zinssätze wäre $\sqrt[7]{0{,}04 \cdot 0{,}055 \cdot \ldots \cdot 0{,}08} = 0{,}0641$ und das der Zinsfaktoren schließlich nach (14) 1,0656. Welche dieser vier Vorgehensweisen zu wählen ist, ergibt sich eindeutig aus der Fragestellung (13); d. h. der mittlere Zinssatz ist recht umständlich zu berechnen.

(15) Die Bedeutung der Mittelwerteigenschaft ergibt sich daraus, daß sie zum *»Normalfall (Idealfall)« eines Kreditgeschäfts gehört.* Darunter versteht man, *daß ein bestimmter Betrag K den Besitzer wechselt, der über die ganze Laufzeit n (in vollen Jahren) mit einem konstanten Zinssatz i verzinst wird, dessen Zinsen nach Ablauf jedes vollen Jahres kapitalisiert werden und der zusammen mit diesen am Ende der Laufzeit zurückgezahlt wird:* $K \cdot (1+i)^n$. Die

wenigsten Kreditgeschäfte stellen den Normalfall dar, aber zu jedem existiert ein Normalfall, der ihm insofern gleichwertig ist, als er dieselbe Laufzeit und denselben Gesamtfaktor hat.

(16) Den Zinssatz des zugehörigen Normalfalls nennt man »effektiven Zinssatz« des Kredits (für den Kreditgeber auch: »Rendite«).

Bei *gleichen* Laufzeiten ist ein Vergleich verschiedener Geldgeschäfte ohne den effektiven Zinssatz, allein mit dem Gesamtfaktor, möglich, bei unterschiedlichen Laufzeiten jedoch nicht. Dennoch kann der effektive Zinssatz nicht die alleinige Grundlage zur Bewertung verschiedener Angebote sein: Es kommt z. B. auch darauf an, wie lange man Geld braucht bzw. anlegen möchte und wie man die Entwicklung des Marktzinses in der Zeit einschätzt, um die sich die Laufzeiten der beiden zwei Angebote unterscheiden. Oder: Gegenüber dem Schatzbrief in Text (1) ist natürlich einer vorzuziehen, der 7 Jahre gleichmäßig mit 6,56 % verzinst wird, weil dieser bei einem vorzeitigen Verkauf wertvoller ist (genau deswegen werden ja Schatzbriefe mit Zinssätzen ausgestattet, die zunächst niedrig sind: Der Anleger soll sein Geld möglichst nicht vorzeitig abziehen).

(17) Der effektive Zinssatz kann negativ sein: *»Jemand kauft Aktien für 3600 DM (einschließlich Provision usw.) und verkauft sie nach 4 Jahren für 3060 DM.«* Hier ist der Gesamtfaktor 0,85 (<1) und der effektive Zinssatz $\sqrt[4]{0{,}85} - 1 = -0{,}0398$. Es liegt ein negativer Wachstumsprozeß mit einem jährlichen Verlust von etwa 4 %, einem jährlichen Zinsfaktor von 0,9602 vor. – Es ist klar: Der effektive Zinssatz ist positiv (0, negativ), wenn die Rückzahlung größer als (so groß wie, kleiner als) die Auszahlung ist.

1.4 Vergleich von einfachen und Zinseszinsen

(18) Ein Beispiel zur Berechnung einfacher Zinsen: *»Ein Postsparbuch hat am 1. Januar einen Bestand von 876,54 DM; im ganzen Jahr erfolgen keine Aus- oder Einzahlungen; der Zinssatz beträgt bis zum 15. Mai 3 %, ab dann bis zum 31. August 2,5 % und danach 2,75 %.«*

Man muß wissen, daß jeder Monat 30 (und damit das Jahr 360) Zinstage hat und daß der Zinssatz grundsätzlich auf das Jahr bezogen ist. $876{,}54 \cdot \frac{135}{360} \cdot 0{,}03 + 876{,}54 \cdot \frac{105}{360} \cdot 0{,}025 + 876{,}54 \cdot \frac{120}{360} \cdot 0{,}0275 = 876{,}54 \cdot 0{,}0277083 = 24{,}29$ (DM Zinsen); bzw. das Endkapital ist $876{,}54 \cdot (1 + 0{,}0277083) = 900{,}83$ (DM) und der effektive Zinssatz 2,77 %. Die Zinsperiode ist 1 Jahr; und auch wenn sich der Zinssatz zwischendurch ändert, werden die Zinsen erst nach einem Jahr kapitalisiert. Es ergibt sich ein einziger Zinsfaktor, nämlich $1 + \frac{135}{360} \cdot 0{,}03 + \frac{105}{360} \cdot 0{,}025 + \frac{120}{360} \cdot 00275$, und der Zinssatz in diesem Faktor ist das (mit den Zeitdauern gewogene) arithmetische Mittel der tatsächlich angewandten Zinssätze. Dieser Zinssatz ist zugleich der effektive Zinssatz. Passend zu den Zinssätzen sind auch die Zeitdauern grundsätzlich in Jahren angegeben. – Das Produkt $876{,}54 \cdot \frac{135}{360} \cdot 0{,}03$ (876,54 DM werden 135 Tage lang mit 3 % verzinst) läßt sich auch interpretieren als die Zinsen eines Kapitals von $\frac{876{,}54 \cdot 135}{360} = 328{,}70$ (DM) nach 1 Jahr bei 3 % oder eines Kapitals von 876,54 DM nach 1 Jahr bei einem Zinssatz von $\frac{135 \cdot 0{,}03}{360} = 0{,}01125$.

(19) Fortsetzung von (18): *»Im darauffolgenden Jahr wird wieder nichts aus- oder eingezahlt. Der Zinssatz beträgt bis zum 31. März 2,75 %, ab dann 2,25 %.«* Die Gesamtentwicklung des Kapitals sieht nun so aus: $876{,}54 \cdot (1 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}03 + \frac{7}{24} \cdot 0{,}025 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}0275) \cdot (1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}0275 + \frac{3}{4} \cdot 0{,}0275) = 876{,}54 \cdot 1{,}0521164 = 922{,}22$. Hier liegt Formel (4) vor (mit zwei Zinsfaktoren), allerdings in der Verallgemeinerung, daß die Zinssätze nicht direkt gegeben sind, sondern sich als gewogene arithmetische Mittel errechnen:

(20) $i_m = t_{m1} \cdot i_{m1} + t_{m2} \cdot i_{m2} + \ldots + t_{mk_m} \cdot i_{mk_m}$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$

In Beispiel (18) ist $n = 2$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $t_{11} = \frac{135}{360}$, $t_{12} = \frac{105}{360}$, …, $t_{22} = \frac{270}{360}$, $i_{11} = 0{,}03$, …, $i_{22} = 0{,}0225$, $i_1 = 0{,}0277083$, $i_2 = 0{,}02375$. Die Summe aller vorkommenden Zeitspannen muß gerade die Gesamtlaufzeit ergeben, im Beispiel etwa $\frac{3}{8} + \frac{7}{24} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9+7+8+6+18}{24} = 2$. Es ist klar, wie nach (15) der effektive Zinssatz auszurechnen ist: $876{,}54 \cdot (1+x) \cdot (1+x) = 922{,}22$, also $1 + x = \sqrt{\frac{922{,}22}{876{,}54}} = 1{,}0257261$, also $x = 2{,}57\ \%$. Man braucht wieder nur den Gesamtfaktor und muß nicht wissen, wie dieser im einzelnen entsteht.

(21) Die Auswirkungen von Zinseszinsen zeigt drastisch die folgende Aufgabe: *»Eine Sparkasse überreicht jedem Neugeborenen in ihrem Einzugsbereich ein Sparbuch über 10 DM. Dieser Betrag wird gleichmäßig mit 5 % verzinst. Wie hoch wäre das Guthaben nach einer Laufzeit von Christi Geburt bis heute?«* Eine Rechnung mit einfachen Zinsen ergibt $10 \cdot (1 + 1989 \cdot 0{,}05) = 1004{,}50$. Dies ist ein mickriger Betrag im Vergleich zur Zinseszinsrechnung: $10 \cdot 1{,}05^{1989} = 1{,}398 \cdot 10^{43}$. Um von dieser Zahl eine gewisse Vorstellung zu erhalten, muß man sie schrittweise aufbauen: Nach wieviel Jahren hat sich das Vermögen verdoppelt? 15 Jahre. Wie groß ist es nach 30, nach 60, nach 100 Jahren? Ungefähr das 4fache, 16fache, 131fache. Nach 500 Jahren? Das 40milliardenfache. Usw.

1.5 Graphische Darstellungen

Die physikalische Auffassung von der Zeit als reellem Kontinuum ist für wirtschaftliche Sachverhalte oft nicht geeignet. Dort besteht ein Definitionsbereich »Zeit« in der Regel nur aus abzählbar vielen Elementen, die ihrerseits zwar Zeitspannen sind, aber auf der Abszisse als Punkte abgetragen werden. Da der Größenbereich der Geldbeträge auch $\mathbb{N}$ isomorph ist, hat man insgesamt ein $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$-Gitter mit dem Funktionsgraphen als einer Menge von Gitterpunkten. Zur besseren Übersicht werden diese von links nach rechts durch einen Streckenzug miteinander verbunden.

Handelt es sich um *Umsatzgrößen* (Umsatz, Kosten, Gewinn usw.), so ist auch ein Säulendiagramm angemessen. Bei *Bestandsgrößen* (z. B. Kapital) dagegen ist man u. U. doch wieder geneigt, einen kontinuierlichen Zeitablauf zu unterlegen, indem man die markierten Punkte auf der Abszisse als Periodenenden und die Strecken dazwischen als Perioden interpretiert. Die Verbindungsstrecken des Funktionsgraphen sagen aber i. a. nichts über die tatsächliche Entwicklung des Bestands innerhalb der Perioden aus; lediglich bei der Zinsrechnung geben sie bei einer gewissen Interpretation (rechnerisches Kapital K_3 in (22)) den Funktionsverlauf einigermaßen genau wieder.

Beim ausgewiesenen Kapital (K_2 in (22)) hat man pro Jahr eine Stufe und einen Sprung am Jahresende. Geht es um die rein rechnerische laufende Entwicklung des Kapitals (einfache Verzinsung!), hat man 360 Stufen jedes Jahr. Der Tag ist i. a. die kleinste wirtschaftliche Zeiteinheit, insbesondere in der Zinsrechnung, und das Kapital ist eine Funktion der Zeit in ganzen Tagen und nicht einzelner Tageszeitpunkte. So bietet sich an, die Tage wieder als Punkte aufzufassen und benachbarte Punkte des Funktionsgraphen durch Strecken zu verbinden. Dies korrespondiert mit der Eindeutigkeitsforderung an Funktionen, ohne daß man mit halboffenen Strecken arbeiten müßte. Bei den üblichen Zeichenmaßstäben sitzen die Punkte so dicht, daß man keine Verbindungsstrecken zu zeichnen braucht, bzw. an »Sprungstellen« kann man getrost eine scheinbar lotrechte Strecke zeichnen; man weiß ja, daß hier eigentlich ein Übergang vom vorletzten zum letzten Tag (etwa eines Jahres) vorliegt. So sieht die Entwicklung eines Kapitals von 1000 DM mit einer Verzinsung von 60 % und einer Laufzeit von 5 Jahren folgendermaßen aus:

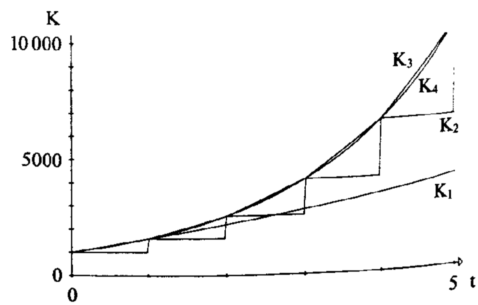

Abb. 1

Die Graphen haben folgende Gleichungen (wobei [t] die größte ganze Zahl $\leq t$ ist):

$$
(22) \qquad
\begin{array}{ll}
K_1 = 1000 \cdot (1 + 0{,}6 \cdot t) & \text{einfache Zinsen} \\
K_2 = 1000 \cdot 1{,}6^{[t]} & \text{ausgewiesenes Kapital} \\
K_3 = 1000 \cdot 1{,}6^{[t]} \cdot (1 + 0{,}6 \cdot (t - [t])) & \text{rechnerisches Kapital} \\
K_4 = 1000 \cdot 1{,}6^{t} & \text{»stetige« Verzinsung}
\end{array}
$$

Für einfache Zinsen ergibt sich selbstverständlich eine Gerade mit der Steigung 600; für Zinseszinsen ist innerhalb eines Jahres [t] konstant, es ergibt sich für das ausgewiesene Kapital die »Treppenfunktion« K_2 und für das rechnerische (K_3) jeweils eine Strecke mit der Steigung $600 \cdot 1{,}6^{[t]}$, die also von Jahr zu Jahr größer ist: Die Steigung hängt nämlich nicht nur vom Zinssatz, sondern auch vom Kapital am jeweiligen Jahresanfang ab.

Die Funktion K_4 schließlich ist eine Fortsetzung der Funktion, die denselben Funktionsterm, aber ganzzahligen Definitionsbereich hat. Für ganzzahlige Argumente stimmt sie mit der wahren Kapitalentwicklung überein. Ihre Fortsetzung auf $\mathbb{R}_0^+$ oder schon auf $\frac{1}{360} \cdot \mathbb{N}_0$ weicht jedoch von dieser ab, so daß man bei ihrer Auswertung außerhalb $\mathbb{N}_0$ einen systematischen Fehler macht: Zu jedem Zeitpunkt wird ein zu kleines Kapital ermittelt. Dies ist kein Widerspruch zu der einleuchtenden Tatsache, daß ein Kapital mit Zinseszinsen schneller wächst als mit einfachen. Am Beginn eines jeden Jahres haben K_2, K_3 und K_4 denselben Wert. Das exponentielle K_4 ist so definiert, daß es in einem Jahr denselben *Gesamt*Anstieg wie das lineare K_3 hat. Dann muß es innerhalb des Jahres kleinere Werte annehmen, denn sobald sein Graph an einer Stelle die zu K_3 in diesem Jahr gehörende Gerade erreicht, übertrifft es diese ab dann, da ja zu jedem Zeitpunkt sofort Zinseszinsen anfallen und (bei gleichem Zinssatz) das Wachstum schneller als bei dem linearen K_3 wäre.

Rechnerisch ist mit K_4 einfacher umzugehen als mit K_3, jedenfalls wenn es bei Laufzeiten über 1 Jahr um zwischenjährige Zeitpunkte geht. Für Kirsch [13] liefert K_4 den *»wirklichen* effektiven Zinssatz«. Die dieser Funktion zugrundeliegende tägliche Kapitalisierung der Zinsen widerspricht jedoch dem Denken »normaler« Teilnehmer am Wirtschaftsgeschehen: Zwar sind auch unterjährige Zinsen verbreitet, aber die Grundvorstellung ist, daß ein Kreditnehmer erst einmal eine Zeitlang das Geld zur Verfügung hat, ehe er Zinsen zahlt, im Prinzip für ein Jahr (als wirtschaftliche Zeiteinheit) oder z. B. für eine Lohnperiode (bei Lohnempfängern). Die Zinsen sind eine Art Miete (s. o.), die in sehr vielen Fällen wirklich gezahlt wird, so daß dann der Gesichtspunkt ihrer tatsächlichen oder fiktiven Kapitalisierung irrelevant ist. Diese Irrelevanz führt ja sogar dazu, *daß bei einer »zwischenjährigen« Rückzahlung eines Kredits die Schlußzinsen sofort und nicht erst nach Vollendung des laufenden Jahres fällig werden (sogenannte »Sparkassenkonvention« (23))*, obwohl diese Zinsen für den Rest dieses Jahres noch einmal angelegt werden können. Diese Konvention, die keineswegs bei allen Arten von Geldanlagen gilt (z. B. i. a. nicht bei Wertpapieren), verleiht der Funktion K_3 die handfeste Bedeutung, jederzeit den aktuellen Rückzahlungswert des Kapitals anzugeben. – Für viele Zwecke liefert die Funktion K_4 brauchbare Näherungen, auch wenn sie prinzipiell nicht den tatsächlichen Verlauf wiedergibt.

1.6 Unterjährige Verzinsung

Auch wenn der Zinssatz sogar über die ganze Laufzeit konstant bleibt, können die Konditionen doch so sein, daß der effektive Zinssatz von ihm abweicht: durch unterjährige Zinskapitalisierung, durch Gebühren (Provisionen, Kurssetzungen u. ä.) am Anfang der Laufzeit. Der in den Konditionen genannte Zinssatz heißt dann, im Unterschied zum effektiven, *nominaler Zinssatz*. Er ist offenbar regelmäßig kleiner als der effektive. Zunächst zur unterjährigen Verzinsung:

(24) »1000 DM werden bei einer Laufzeit von 1 Jahr mit 9 % verzinst. Die Zinskapitalisierung erfolgt vierteljährlich.« Das bedeutet, daß alle 3 Monate die Zinsen, die sich bis dahin

rechnerisch ergeben haben, kapitalisiert werden. Das Darlehen ist also mit $1000 \cdot (1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}09)^4 = 1093{,}08$ (DM) zurückzuzahlen. Hier liegt wieder Formel (4) vor.

Man erkennt jetzt, daß Zinsfaktoren nicht notwendig Jahren, sondern allgemeiner Zinsperioden (Zeitspannen zwischen zwei aufeinander folgenden Zinskapitalisierungszeitpunkten) zugeordnet sind. Die Zinssätze in diesen Faktoren sind grundsätzlich auf Jahre bezogen (hier 9 %) und müssen noch mit der Länge der Periode (ebenfalls in Jahren anzugeben), bzw. der Geltungsdauer des jeweiligen Zinssatzes, falls diese kürzer ist (hier $\frac{1}{4}$), multipliziert werden. Das Produkt $\frac{1}{4} \cdot 0{,}09 = 0{,}0225$ könnte auch als auf ein Quartal bezogener Zinssatz interpretiert werden; dann müßten die Zeitdauern eben in Quartalen angegeben werden, und das o. a. Produkt könnte entsprechend $1 \cdot 0{,}0225$ geschrieben werden.

Der effektive Zinssatz beträgt 9,31 %; denn so hoch muß der Zinssatz sein, damit ein Kapital in einem Jahr im Normalfall (Zinsperiode ist da 1 Jahr!) von 1000 DM auf 1093,08 DM wächst, wobei der genaue Verlauf der Entwicklung eigentlich wieder nicht interessiert. Es ist $1{,}09308 = (1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}09)^4$, und bei einer Laufzeit von n Jahren ($n \in \mathbb{N}$) ist der Gesamtfaktor $(1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}09)^{4n} = 1{,}09308^n$ und der effektive Zinssatz nach wie vor 9,31 %. Bei einem Zinssatz von 9 % ist eine vierteljährliche Zinskapitalisierung also gleichwertig mit einer jährlichen Zinskapitalisierung bei 9,31 %.

(25) »Sind nun die Bedingungen wie (24), *jedoch mit monatlicher oder gar täglicher Zinskapitalisierung«,* dann beträgt das Darlehen nach einem Jahr $1000 \cdot (1 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}09)^{12} = 1093{,}81$ (DM) bzw. $1000 \cdot (1 + \frac{1}{360} \cdot 0{,}09)^{360} = 1094{,}16$ (DM) mit entsprechend jeweils etwas höherem effektiven Zinssatz. Da $\lim\limits_{p \to \infty} 1000 \cdot (1 + \frac{0{,}09}{p})^p = 1000 \cdot e^{0{,}09} = 1094{,}17$ gilt, ist durch weitere Verkürzungen der Perioden so gut wie keine Steigerung der Zinsen mehr möglich. Der entscheidende Sprung ist eigentlich schon beim Übergang zu Quartalen gemacht.

1.7 Gebühren, Kurse

(26) Eine weitere Möglichkeit der Geldinstitute, den für ihre Kredite effektiven gegenüber dem nominalen Zinssatz zu erhöhen, ist, wie erwähnt, die Erhebung von Gebühren i. a. am Anfang der Laufzeit, z. B.: *»2 % vom Auszahlungsbetrag K_{aus}. Möge dieser 10 000 DM lauten«,* dann beträgt das Darlehen sofort K = 10 200 DM, und dieser Betrag wird über die Laufzeit (z. B. mit 8 % in 3 Jahren) verzinst, so daß am Ende $K_{rück} = 10\,000 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}08^3 = 12\,849{,}06$ (DM) zu zahlen ist und der effektive Zinssatz sich mittels der Gleichung $10\,000 \cdot (1 + x)^3 = K_{rück}$ auf $x = \sqrt[3]{1{,}02 \cdot 1{,}08^3} - 1 = 1{,}08 \cdot \sqrt[3]{1{,}02} - 1 = 8{,}72$ % beläuft. Das heißt 8 % von 10 200 DM entspricht (im Laufe von 3 Jahren) 8,72 % von 10 000 DM; und das ist die interessante Zahl. Es kommt nach wie vor nur auf den Quotienten aus Rück- und Auszahlungsbetrag (und die Laufzeit) an; der Gebührenfaktor ist in den Gesamtfaktor einzubeziehen.

(27) Die Behandlung der Gebühren ist für den Kreditnehmer häufig noch etwas ungünstiger, nämlich wenn der Gebührensatz sich nicht auf den Auszahlungsbetrag, sondern auf den *Darlehensbetrag* K bezieht: *»Bei einer Auszahlung von 10 000 DM und einem Gebührensatz von 2 %«* gilt mit dem noch unbekannten Darlehensbetrag K die Beziehung $K \cdot (1 - 0{,}02) = 10\,000$, also $K = \frac{10\,000}{0{,}98} = 10\,204{,}08$ (DM). Man muß sich also 10 204,08 DM leihen, um 10 000 DM zu erhalten. Hier spricht man von einem *Disagio* (Abgeld), die oben beschriebene Variante heißt *Agio* (Aufgeld). Ist der Auszahlungsbetrag K_{aus} und der Gebührensatz g, dann berechnet sich der zu verzinsende Darlehensbetrag so:

(28) $$\text{Agio: } K = K_{aus} \cdot (1 + g) \qquad \text{Disagio: } K = \frac{K_{aus}}{1 - g}.$$

Mit Laufzeit n und nominalem Zinssatz i ist der Ansatz für die Berechnung des effektiven Zinssatzes x dann

(29) $$K_{aus} \cdot (1 + x)^n = K \cdot (1 + i)^n \qquad \text{und} \qquad x = (1 + i) \cdot \sqrt[n]{\frac{K}{K_{aus}}} - 1.$$

Setzt man schließlich noch b für den Anteil des Auszahlungsbetrags am Darlehensbetrag, also $K_{aus} = b \cdot K$, also $b = 1 - g$ im Falle des Disagios und $b = \frac{1}{1+g}$ im Falle des Agios, dann ist

$$(30) \qquad x = (1 + i) \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{b}} - 1.$$

Bei positivem Gebührensatz g (das bedeutet $b < 1$) ist der Darlehensbetrag K natürlich größer als der Auszahlungsbetrag; und bei gegebenem Auszahlungsbetrag K_{aus} und Gebührensatz g ($0 < g < 1$) ist der Darlehensbetrag K im Falle des Disagios höher als im Falle des Agios, da $\frac{1}{1-g} > 1 + g$, da $1 > 1 - g^2$. Läge z. B. in (26) Disagio vor, dann würde sich der effektive Zinssatz auf 8,73 % belaufen.

(31) Text einer Anzeige: »*Aus dieser Mark läßt sich mehr machen: Mit Bundesobligationen. Nominalzins 6,00 %, Ausgabekurs 100,60 %, Rendite 5,86 %, Laufzeit 5 Jahre. . .*« Auch der Kurs von festverzinslichen Wertpapieren stellt eine Art (Dis-)Agio dar. Ein Kurs von 100,6 % heißt, für eine Obligation über 1000 DM muß man zwar 1006 DM bezahlen, aber verzinst wird nur der Nennwert von 1000 DM, so daß der Rückzahlungsbetrag $1000 \cdot 1{,}06^5 = 1338$ (DM) (im Moment sei das Faktum vernachlässigt, daß die Zinsen bei dieser Anlageart nicht kumuliert, sondern jährlich ausgezahlt werden) und der effektive Zinssatz $\sqrt[5]{1338/1006} - 1 = 5{,}87$ % ist. Bezeichnet man den Nennwert (der Betrag, der verzinst wird) mit K, den zu zahlenden Betrag mit K_{aus} und den Kurs mit b, so ergeben sich für die Kursrechnung inhaltlich und formal die Formeln (29) und (30); allerdings kann man nicht mehr einheitlich von Auf- oder Abgeld reden, da der Kurs auch unter 100 % liegen kann.

Obligationen und andere festverzinsliche Wertpapiere werden von ihren Ausgebern erst zum Laufzeitende zurückgekauft (anders als etwa Schatzbriefe); sie können aber im Handel ver- und gekauft werden. Da ihr Zinsertrag immer gleichbleibend ist, während der Zinssatz am Markt sich laufend ändert, käme jedoch i. a. kein Handel zustande, wenn der Kaufpreis immer der Nennwert wäre. In Zeiten niedrigen Marktzinses würde niemand seine (dann relativ hoch verzinslichen) Obligationen *verkaufen;* in Zeiten hohen Marktzinses würde sie niemand *kaufen.* Geregelt werden Angebot und Nachfrage wie bei jeder Ware über den Preis, der hier Kurs genannt und in Prozent vom Nennwert angegeben wird. Ist der Marktzinssatz niedrig, steigt der Kurs und der effektive Zinssatz des Wertpapiers sinkt; und umgekehrt. Über den Kurs wird also der effektive Zinssatz dem Marktzinssatz angepaßt. (Häufig setzt auch schon der Ausgeber einen Kurs abweichend von 100 % fest.) Dieser Mechanismus spiegelt sich direkt in den Kursübersichten der Zeitungen etwa für Anleihen wider: Papiere, die in Hochzinszeiten mit einem hohen nominalen Zinssatz ausgestattet wurden, haben einen hohen Kurs (und umgekehrt).

(32) Aufgabe: »*Wie hoch muß der Kurs sein, damit bei einer bestimmten Laufzeit und einem bestimmten nominalen Zinssatz ein bestimmter effektiver Zinssatz erreicht wird?*«

1.8 Nicht-ganzjährige Laufzeiten

Auf einem Giro- oder normalen Sparkonto werden die Zinsen für eine Ein- oder Auszahlung *nicht erst 1 Jahr* (allgemeiner: eine volle Periode) *danach, sondern schon mit Ablauf des jeweiligen Kalenderjahrs* (o. ä.) kapitalisiert; eine organisatorische Vereinfachung ähnlich der Sparkassenkonvention (23). So könnten sich bei Krediten mit exakt gleichen Bedingungen unterschiedliche Rückzahlungsbeträge ergeben, je nach dem, an welchem Tag im Jahr ihre Laufzeit beginnt, weil davon die Aufteilung der gesamten Laufzeit in Zinsperioden abhängt: die erste Periode würde verkürzt, und deren Differenz zu einem vollen Jahr würde als zusätzliche Periode am Laufzeitende entstehen.

(33) Grundsatz: *Für die Berechnung des effektiven Zinssatzes nach der PAngV werden die erörterten Schwankungsmöglichkeiten ausgeschlossen und die »Zinskapitalisierungszeitpunkte« immer nach vollen Jahren der »Laufzeit« angenommen.*

Das Auftreten einer kürzeren Periode kann aber nicht mehr vermieden werden, wenn die Laufzeit $n + t$, $n \in \mathbb{N}_0$, $0 < t < 1$, beträgt, d. h. *insgesamt* nicht ganzjährig ist. Im Anschluß an die Sparkassenkonvention (23) sind die Zinsen n-mal nach vollen Jahren und noch einmal nach der Zeitspanne t zu kapitalisieren:

(34) $$K_{aus} \cdot (1 + x)^n \cdot (1 + t \cdot x) = K_{rück}$$

Diese Formel läßt sich i. a. nicht nach x auflösen, vielmehr muß x durch Probieren (d. h. iterativ) ermittelt werden.

2. Darlehen mit mehreren Rückzahlungen

Bei sehr vielen Geldgeschäften ist der Sonderfall mit einer Auszahlung am Anfang und einer Rückzahlung am Ende nicht erfüllt, vielmehr verteilen sich die Rückzahlungen auf mehrere Raten während der Laufzeit. Da gibt es mehrere Grundtypen:

(35) Am Ende jeder Zinsperiode werden genau die in ihr angefallenen Zinsen und am Laufzeitende zusätzlich das Darlehen selbst zurückgezahlt (Typ A beim Bundesschatzbrief, s. (1); Zwischenfinanzierung eines Bauspardarlehens; klassisch: Rentenrechnung).

(36) Am Ende jeder Zinsperiode werden genau die in ihr angefallenen Zinsen und (bei Laufzeit n) $\frac{1}{n}$ des Darlehens zurückgezahlt (klassisch: Tilgungsrechnung).

(37) Am Ende jeder Zinsperiode wird ein und derselbe Betrag zurückgezahlt (Annuitätendarlehen; klassisch: Tilgungsrechnung).

(38) Am Laufzeitende werden das Darlehen und Zinsen mit Zinseszinsen zurückgezahlt (Sonderfall, der in Kap. 1 behandelt ist).

(39) Die Rückzahlungen werden in einer sonstigen Weise auf die Periodenenden der Laufzeit verteilt.

(40) Auch die Auszahlung wird auf mehrere Perioden verteilt, die aber alle *vor* allen Perioden mit Rückzahlungen liegen (Lebensversicherung, Prämiensparen usw.).

Vorläufig wird (40) nicht betrachtet. Außerdem sollen zunächst die Periodenlängen immer 1 Jahr betragen und die Zahlungen nur an Jahresenden stattfinden (so daß vorerst Kredite mit monatlichen Zahlungen nicht bzw. nur verfälscht behandelt werden können).

(41) Das Erreichen des »Laufzeitendes« ist gleichbedeutend damit, daß das Darlehen samt Zinsen für zurückgezahlt erklärt wird, und sei es dadurch, daß eine etwaige Restschuld durch ein neues Darlehen o. ä. abgedeckt wird. Bei dieser Auffassung löst sich der Begriff der Restschuld i. e. S. auf, da sie immer als Rückzahlung zum Laufzeitende zu verstehen ist. Beziehungsweise umgekehrt: Nach jedem vollen Jahr der Laufzeit kann man so tun, als ob jetzt das Geldgeschäft abgeschlossen werden soll, und fragen, wie hoch dann die Restschuld wäre. So kann man sich jederzeit einen Überblick über den Stand des Darlehens verschaffen und die Zahlungen in einen Tilgungs- und einen Zinsanteil trennen. Diese Trennung, und damit die Typisierung (35)–(40), wird sich finanzmathematisch als gegenstandslos herausstellen (infolge des *Vergißprinzips* (68)), sie kann aber betriebswirtschaftlich und steuerlich bedeutungsvoll sein.

2.1 Tilgungspläne

(42) Einfache Fragestellungen sind hier z. B.: *»Ein Darlehen über 8000 DM soll im Laufe von 5 Jahren gleichmäßig zurückgezahlt werden. Jedes Jahr sollen auch die Zinsen gezahlt werden. Zinssatz 7 %.«* Tilgungsplan:

Jahr	Anfangsbestand	Zinsen	Tilgung	Zahlung
1	8000	560	1600	2160
2	6400	448	1600	2048
3	4800	336	1600	1936
4	3200	224	1600	1824
5	1600	112	1600	1712
6	0			

(43) Möglich ist auch ein veränderlicher Zinssatz. Häufig werden die Bedingungen dann so abgefaßt, daß die Rückzahlungsraten (evtl. außer der ersten oder letzten) gleich hoch sind, z. B.: *»Ein Darlehen von 8000 DM soll in 5 Jahren mit jährlich 2160 DM (einschließlich Zinsen) zurückgezahlt werden.«* Hier interessiert, welcher Zinssatz dabei wohl zugrunde gelegt ist. Tilgungsplan:

Jahr	Anfangsb.	Zinsen	Tilgung	Zahlung	Zinssatz (in %)
1	8000	560	1600	2160	7
2	6400	560	1600	2160	8,75
3	4800	560	1600	2160	11,67
4	3200	560	1600	2160	17,5
5	1600	560	1600	2160	35

Die spontane Vermutung »7 %« erweist sich als falsch; der Zinssatz liegt deutlich höher, wie sich aus der letzten Spalte oder aus dem Vergleich mit dem Tilgungsplan von (42) ergibt. Im ersten Jahr stimmt der Wert noch, aber dann bezieht sich derselbe Zinsbetrag auf ein immer niedrigeres Kapital, und das bedeutet einen immer höheren Zinssatz. Als Faustregel: In den 5 Jahren hat man im Durchschnitt 4800 DM als Darlehen zur Verfügung, dann bedeutet ein Zinsbetrag von 560 DM jährlich einen Zinssatz von 11,67 %, und dieser ist fast doppelt so hoch wie der Anfangszinssatz.

Ehe die PAngV dem einen Riegel vorschob, war es üblich, bei Konsumentenkrediten, die durchweg (mit monatlichen, den Effekt noch steigernden Zahlungen) nach dem Muster von (43) gestaltet werden, den nur in der ersten Periode zutreffenden Zinssatz zu nennen (der noch nicht einmal den Namen »nomineller Zinssatz« verdient) und damit den tatsächlich angesetzten Zinssatz systematisch um die Hälfte zu niedrig anzugeben.

Der o. a. Tilgungsplan ist – jedenfalls unmittelbar – nicht geeignet, den vom Darlehensgeber angenommenen Zinssatz herauszufinden. Der Fehler in der oben durchgeführten Überlegung besteht darin, daß neben der jährlichen Gesamtzahlung auch die Aufteilung in Zinsen und Tilgung als konstant vorausgesetzt wird: Die Unterstellung eines konstanten Zinssatzes für die ganze Laufzeit impliziert aber *abnehmende Zinsbeträge*, da ja infolge laufender Tilgung das zu verzinsende Kapital dauernd kleiner wird, und damit *zunehmende Tilgungsbeträge*. Und: Diese Zunahme ist nicht linear, sondern wird immer schneller. Ein Versuch mit 12 % ergibt folgenden Tilgungsplan (Zinsspalte immer als vorletzte und Tilgungsspalte als letzte eintragen):

Jahr	Anfangsbestand	12 % Zinsen	Tilgung	Zahlung
1	8000	960	1200	2160
2	6800	816	1344	2160
3	5456	655	1505	2160
4	3951	474	1686	2160
5	2265	272	1888	2160
6	377			

Offenbar ist der Wert 12 % zu hoch, da sich bei ihm eine Restschuld nach 5 Jahren von 377 DM ergibt. Der »wahre« Wert läßt sich (so) nicht berechnen. *Man kann ihn aber auf iterativem Wege ermitteln, indem man den Tilgungsplan programmiert und, ausgehend etwa von den Werten 7 % und 12 %, den Zinssatz durch Intervallhalbierung einschachtelt. Der nächste Wert wäre 9,5 %; ist die Restschuld positiv, muß man im unteren, ist sie negativ, muß man im* *oberen Intervall fortsetzen. Man hört auf, wenn der Betrag der Restschuld z. B. < 1 ist (wenn man mit Pfennigen rechnet), und erhält (auf zwei Stellen hinter dem Komma genau) 10,92 % (44).*

(45) In geschlossener Form läßt sich aber folgende Frage beantworten: *»Ein Darlehen von 8000 DM wird mit 7 % verzinst und mit jährlichen Rückzahlungsraten (einschließlich Zinsen) von 1500 DM getilgt. Wie lange läuft es?«*

Jahr	Anfangsbestand	7 % Zinsen	Tilgung	Zahlung
1	8000	560	940	1500
2	7060	494,20	1005,80	1500
3	6054,20	423,79	1076,21	1500
4	4977,99	348,46	1151,54	1500
5	3826,45	267,85	1232,15	1500
6	2594,30	181,60	1318,40	1500
7	1275,90	89,31	1275,90	1365,21

Es läuft 7 Jahre; die letzte Rate ist jedoch etwas niedriger.

(46) Varianten: *»Wie lange dauert es bei Rückzahlungsraten von 600 DM, 561 DM, 560 DM, 500 DM unter sonst gleichen Bedingungen?«*

(47) Weitere Fragestellungen: *»Wie hoch muß ein Kapital sein, um bei einem Zinssatz von 7,5 % eine ewige Rente von jährlich 1500 DM (nachschüssig) abzuwerfen?«* 20 000 DM.

(48) *»Wie hoch, falls die Rente 20 Jahre lang laufen soll?«* Aus $K \cdot 1{,}075^{20} = R \cdot \frac{1{,}075^{20} - 1}{0{,}075}$ und $R = 1500$ ergibt sich 15 292 DM. Es ist bemerkenswert, daß dieser Betrag nach 20 Jahren völlig aufgebraucht ist, während der in (47) dann noch komplett erhalten ist.

(49) Oder: *»Wie hoch muß die jährliche Zahlung (»Annuität«) sein, wenn ein Darlehen von 8000 DM bei einem Zinssatz von 9 % in 6 Jahren getilgt ist?«* Aus $K \cdot 1{,}09^6 = R \cdot \frac{1{,}09^6 - 1}{0{,}07}$ und $K = 8000$ ergibt sich $R = 1783{,}36$ (DM). Die Annuität ist offenbar proportional zum Auszahlungsbetrag und wird günstigerweise gleich als Prozentsatz davon angegeben:

$$\frac{1{,}09^6 \cdot 009}{1{,}09^6 - 1} = 22{,}29\ \%.$$

(50) *»Wie hängt dieser von der Laufzeit bzw. vom Zinssatz ab?«* (Fragen, die sich der Darlehensgeber, die Bank zu stellen hat.)

2.2 Aufzinsung

(51) *»Ein Darlehen über 8000 DM läuft 5 Jahre. In dieser Zeit wird es nacheinander je ein Jahr lang mit 7 %, 6 %, 5 %, 7 % und 8 % verzinst. Die ersten vier Rückzahlungsbeträge belaufen sich auf 2000 DM, 2200 DM, 1500 DM und 2000 DM. Wie hoch ist der letzte?«* (Ähnlich (45))

Jahr	Anfangsbetr.	Zinsen	Tilgung	Zahlung	Zinssatz (%)
1	8000	560	1440	2000	7
2	6560	394	1806	2200	6
3	4754	238	1262	1500	5
4	3492	244	1756	2000	7
5	1736	139	1736	1875	8

Als Gleichung anstelle des Tilgungsplans ergibt sich

(52) $((((-8000 \cdot 1{,}07 + 2000) \cdot 1{,}06 + 2200) \cdot 1{,}05 + 1500) \cdot 1{,}07 + 2000) \cdot 1{,}08 + x = 0$
und durch Ausmultiplizieren die dazu äquivalente Gleichung

$$
(53)\quad
\begin{array}{llrl}
- & 8000 & \cdot\, 1{,}07 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}08 & \\
+ & 2000 & \cdot\, 1{,}06 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}08 & \\
+ & 2200 & \cdot\, 1{,}05 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}08 & \\
+ & 1500 & \cdot\, 1{,}07 \cdot 1{,}08 & \\
+ & 2000 & \cdot\, 1{,}08 & \\
+ & x & & = 0.
\end{array}
$$

(Es ist klar, daß Aus- und Rückzahlungen verschiedene Vorzeichen haben; man muß es nur für einen der beiden Typen festlegen, und zwar *beliebig*. In dieser Arbeit sind Gutschriften für den Darlehensnehmer positiv.)

(54) Man kann also jede einzelne Zahlung separat als ein Kapital betrachten, das vom Zeitpunkt der Leistung bis zum Laufzeitende mit den in dieser Zeit gültigen Zinssätzen verzinst wird (»aufzinsen«). Die inhaltliche Entsprechung dieser formalen Umwandlung lautet: Der zu einem bestimmten Zeitpunkt m erreichte Darlehensstand K_m wird um die an diesem Zeitpunkt stattfindende Rückzahlung R_m vermindert. Dieser Betrag fehlt am Darlehen bei dessen weiterer Entwicklung, d. h. an jedem späteren Zeitpunkt fehlt genau der entsprechend aufgezinste, von R_m herrührende Betrag. Erklärung (41) über das Laufzeitende bedeutet dann gerade, daß die Summe der aufgezinsten Rückzahlungen genau so groß wie die aufgezinste Auszahlung ist, daß also folgendes Gleichgewicht besteht:

$$(55)\quad K \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n = R_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n + R_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \ldots \cdot q_5 + \ldots + R_{n-1} \cdot q_n + R_n$$

(Dabei ist n die Laufzeit in Jahren, $K > 0$ die Auszahlung, und für $m = 1, \ldots, n$ ist $R_m \geq 0$ die Rückzahlung und $q_m = 1 + i_m$ der Zinsfaktor im Jahr m.) Ist K, ein R_m oder ein q_m unbekannt, dann ist (55) eine Bestimmungsgleichung dafür (z. B. Aufg. (51) für R_n). Häufig hat man einen konstanten Zinssatz, d. h. $q_1 = q_2 = \ldots = q_n =: q$ (und $i = q - 1$), oder einen konstanten Rückzahlungsbetrag (eventuell außer dem letzten (oder ersten)), d. h. $R_1 = R_2 = \ldots = R_{n-1} = R_n =: R$ (eventuell $R_n \neq R$ oder $R_1 \neq R$), d. h. es liegt Darlehenstyp (37) (Annuitätendarlehen) vor, und Gleichung (55) vereinfacht sich zu

$$(56)\quad K \cdot q^n = R \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1) \qquad \left(= R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ falls } q \neq 1; \; = n \cdot R, \text{ falls } q = 1\right).$$

(57) Der Faktor $\frac{q^n - 1}{q - 1}$ heißt *Rentenfaktor,* weil er durch die Aufzinsung und Aufsummierung der beständig wiederkehrenden Leistung R, einer Rente, entsteht. Indem er n Summanden durch einen einzigen ersetzt, vereinfacht er die Auswertung von Gleichung (56) erheblich, besonders wenn q oder n gesucht ist. Bei seiner Herleitung sollte auch der Fall betrachtet werden, daß Anfangsglieder fehlen:

$$q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^m = \frac{q^n - 1}{q - 1} - \frac{q^m - 1}{q - 1} = \frac{q^n - q^m}{q - 1} = q^m \cdot \frac{q^{n-m} - 1}{q - 1} \quad (0 \leq m < n,\ q \neq 1).$$

Steht der programmierbare Taschenrechner oder Computer zur Verfügung, ist der Rentenfaktor für das Rechnen nicht mehr unverzichtbar, da man die Reihe auch iterativ auswerten kann.

Bei Typ (35) ist $R = K \cdot i$ und $R_n = K \cdot q$ und damit

$$(58)\quad K \cdot q^n = K \cdot i \cdot (q^{n-1} + \ldots + q + 1) + K = K \cdot \left(i \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + 1\right).$$

Bei Typ (38) schließlich ist $R = 0$ und $R_n = K \cdot q^n$ (s. Kap. 1).

Man sieht (vor allem bei (55) und unter der Voraussetzung $q_m > 1$, d. h. $i_m > 0$ für alle m), daß eine Zahlung um so stärker ins Gewicht fällt, je früher sie liegt. Aufzinsen ist eine Bewertung der Zahlungen nach Höhe (sowieso) und Zeitpunkt: Je früher eine Zahlung liegt, desto höher wird sie bewertet. Zwischen den *Nettozahlungen* eines Geldgeschäfts besteht i. a. keine Gleichheit, sondern die Summe der Nettorückzahlungen ist i. a. größer als die

Nettoauszahlung, weil mit ihnen ja diese getilgt wird und zusätzlich Zinsen gezahlt werden. Da die Auszahlung früher liegt, wird sie durch die Aufzinsung in stärkerem Maße aufgewertet, besonders im Vergleich zu den *späteren* der Rückzahlungen, und so stellt sich dann das Gleichgewicht zwischen den *aufgezinsten Zahlungen* ein.

Sollen zwei Zahlungen äquivalent sein, so ist die früher liegende niedriger, weil sie durch die Aufzinsung noch aufgewertet wird. Das sieht man schön beim Vergleich von Typ A und Typ B von Bundesschatzbriefen (1): Bei Typ A werden jährlich Rückzahlungen geleistet (in Höhe der gerade angefallenen Zinsen), nämlich (bei 1000 DM) 40 DM, 55 DM, 60 DM usw., während bei Typ B diese aufgezinst und erst am Ende gezahlt werden: $40 \cdot 1{,}055 \cdot 1{,}06 \cdot \ldots = 60{,}01$ (DM), $55 \cdot 1{,}06 \cdot \ldots = 78{,}22$ (DM), usw. Die sonst nur rechnerisch vorgenommene Aufzinsung ist beim Typ B tatsächlich durchgeführt.

Sind 40 DM heute so viel wert wie 6 Jahre später 60,01 DM? Beim Bundesschatzbrief Typ B mit den Bedingungen (1) ist das so, jedenfalls wenn die Frage nach 1 Jahr gestellt wird. Beim Typ A könnte man die Frage nur bejahen, wenn man eine Möglichkeit zur Wiederanlage mit einer Laufzeit von 6 Jahren und einem Gesamtfaktor von $\frac{60{,}01}{40} = 1{,}500325$ hätte (sogenannte *Wiederanlageprämisse (59))*. Dies wiederum hängt von allerlei externen Gegebenheiten ab.

Die im Anschluß an (54) vorgenommene inhaltliche Begründung der Aufzinsung basiert schon auf der Wiederanlageprämisse: Es wird nämlich unterstellt, daß das durch eine Rückzahlung frei werdende Kapital des Darlehensgebers in dem Fall, daß es gebunden bliebe, die Rückzahlung also unterbliebe, genauso zu verzinsen wäre wie das gebundene Kapital, daß die Rückzahlungsbeiträge also zu den Bedingungen des betrachteten Darlehens wieder angelegt werden könnten. Das klingt zwar plausibel, und man kann den entsprechenden Verlauf des Geldgeschäfts leicht hinschreiben, aber das wäre eben ein anderes als das tatsächliche. In der Finanzwirtschaft ist die Berechtigung der Wiederanlageprämisse durchaus umstritten. Auf jeden Fall tut man gut daran, deutlich zwischen rechnerischen Werten und tatsächlich durchgeführten Zahlungen zu unterscheiden und die rechnerischen Werte *weniger als absolute* und *mehr als relative* Beurteilungsmaßstäbe heranzuziehen.

Durch Aufzinsen werden Zahlungen (Kapitalien) vergleichbar gemacht, die zu verschiedenen Zeitpunkten erfolgen (realisiert werden). *Den Wert eines aufgezinsten Kapitals zum Laufzeitende eines Geldgeschäfts nennt man »Endwert« (60).*

(61) Es kommen auch andere Bewertungszeitpunkte in Betracht, sogar solche, die *vor* der Realisierung liegen. Die Frage kann dann so gestellt werden: *»Welchen Wert hat eine Zahlung, die zum Zeitpunkt 7 in Höhe von 60,01 DM geleistet wird, zum Zeitpunkt 1 (beim Bundesschatzbrief Typ B, s. (1))? Oder: Welches zum Zeitpunkt 1 realisierte Kapital hat zum Zeitpunkt 7 den Wert 60,01 DM?«* Der Ansatz lautet: $x \cdot 1{,}055 \cdot \ldots \cdot 1{,}08 = 60{,}01$ bzw.

$$x = \frac{60{,}01}{1{,}055 \cdot \ldots \cdot 1{,}08} .$$

(62) Man muß abzinsen. Als Bewertungszeitpunkt bietet sich der Laufzeitanfang an, und mit Benennungen wie bei (55) *hat man als abgezinste Zahlungen* K,

$$\frac{R_1}{q_1}, \frac{R_2}{q_1 \cdot q_2}, \ldots, \frac{R_n}{q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n},$$

die »Barwert« genannt werden. Dividiert man Gleichung (55) durch den Gesamtfaktor $q_1 \cdot q_2 \ldots \cdot q_n$, so erhält man die Gleichung

(63)
$$K = \frac{R_1}{q_1} + \frac{R_2}{q_1 \cdot q_2} + \ldots + \frac{R_n}{q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n}$$

zwischen den Barwerten. Durch Multiplikation mit dem Anfangsstück $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ des Gesamtfaktors kann man alle Zahlungen bezogen auf einen beliebigen Bewertungszeitpunkt m ($0 \leq m \leq n$) auf- bzw. abzinsen, und das (55) bzw. (63) entsprechende Gleichgewicht gilt bei jedem m. (63) bedeutet speziell, daß die Summe der Barwerte der Rückzahlungen gerade gleich der Auszahlung ist.

In der Finanzwirtschaft arbeitet man lieber mit Barwerten: Da lassen sich leichter Alternativen mit unterschiedlichen Laufzeiten vergleichen, die Laufzeit kann sogar (für theoretische Überlegungen) unendlich sein, und der Laufzeitanfang steht der betrieblichen Entscheidungssituation näher. Diese Argumente spielen für die weiteren Ausführungen in dieser Arbeit aber keine Rolle. Hier wird *aufgezinst*, da diese Operation »natürlicher« erscheint und die Gleichungen (55)–(63) usw. nur dann polynomial sind, wenn sie die Endwerte enthalten.

(64) Der Ausdruck »Barwert« erklärt sich leicht anhand folgender Aufgabe: *»Mit einer bestimmten Lebensversicherung erwirbt man sich einen Anspruch auf eine Rente von 10 000 DM, 20 Jahre lang immer am Jahresanfang zu zahlen. Als Alternative bietet die Versicherung eine einmalige sofortige (Bar-)Auszahlung von 120 000 DM.«* Um sich für eine dieser beiden Alternativen entscheiden zu können, sollten neben allerlei externen objektiven und subjektiven Gesichtspunkten, die z. T. nicht quantifizierbar sind, auch die finanzmathematischen »Werte« verglichen werden, etwa indem man den Barwert der Rente (die Summe der Barwerte der 20 Zahlungen) ermittelt. Auch dabei spielt noch eine erhebliche Unsicherheit in der Annahme von Zinssätzen (für die nächsten 19 Jahre!) mit. Es ist üblich, daß man einen einheitlichen moderaten (quasi als mittleren) annimmt, der bei einer langfristigen Geldanlage zu erzielen wäre, z. B. 6 %. Dann ist der Barwert der Rente

$$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{1{,}06} + \frac{1}{1{,}06^2} + \dots + \frac{1}{1{,}06^{19}}\right) = 10\,000 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}06}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{1{,}06} - 1} = 121\,581 \text{ (DM)}$$

und damit etwas günstiger als die Einmalzahlung.

(65) Interessanter ist aber die Frage, *»bei welchem Zinssatz man genau auf 120 000 DM gekommen wäre, welchen Zinssatz also die Versicherung ihrer Kalkulation unterlegt hat«*, die man wieder mittels einer Iteration beantworten könnte. Die Entscheidung für die Renten- und gegen die Einmalzahlung bedeutet, daß der Versicherung ein Darlehen über 120 000 DM zur Verfügung gestellt wird, das in 20 gleichen Jahresraten zu je 10 000 DM zurückgezahlt wird (genauer: ein Darlehen über 110 000 DM mit 19 Rückzahlungen zu je 10 000 DM, wegen der Vorschüssigkeit der Rentenzahlungen).

2.3 Der Zahlungsstrom und der effektive Zinssatz

(66) Kennt man von einem Geldgeschäft die jährlich angewandten Zinssätze, so kann man dessen Wert dennoch nicht abschätzen, wenn man nicht weiß, wie sich die Rückzahlungen über die Laufzeit verteilen. *»Ein Darlehen über 1000 DM, einer Laufzeit von 5 Jahren und einem Zinssatz von 10 % in den ersten drei und von 1 % in den letzten beiden Jahren ist ungünstig, wenn nach 3 Jahren 1330 DM und am Ende 1,02 DM zurückgezahlt werden, und günstiger, wenn nur am Ende 1357,75 DM zurückgezahlt werden.«*

Umgekehrt reicht es für die Beurteilung sehr wohl zu wissen, wieviel in jeder Periode gezahlt wird, ohne die Zinssätze zu kennen. *Ein Geldgeschäft ist finanzmathematisch vollständig durch das (n + 1)-Tupel der in ihm stattfindenden Zahlungen, den »Zahlungsstrom« (cash flow)*

(67) $$(Z_0; Z_1; \dots; Z_n), \quad Z_0 \neq 0 \neq Z_n,$$

charakterisiert. Dabei sind Zahlungen mit unterschiedlichen Vorzeichen zu versehen, je nachdem ob sie vom Darlehensgeber (hier: negativ) oder -nehmer (hier: positiv) kommen. Am Anfang und Ende sollen tatsächlich Zahlungen stattfinden. Finden zu einem Zeitpunkt mehrere Zahlungen statt, so sind sie aufzuaddieren. In (55) ist also $K = -Z_0$ und $R_m = Z_m$ für $m = 1, \dots, n$.

(zu saldieren). Es spielt keine Rolle, als was die Zahlungen betriebswirtschaftlich oder steuerlich aufzufassen sind (Tilgung, Zinsen, Gebühren, Provision o. ä.), entscheidend ist allein die Höhe der Zahlung, die aus dem Verfügungsbereich des einen in den des anderen Geschäftspartners gelangt (»Vergißprinzip«) (68).

Insbesondere werden keine reinen Buchungen (z. B. Kontogebühren) berücksichtigt, wenn sie sich nicht als konkrete Zahlungen niederschlagen; einzige Ausnahme: eine Restschuld wird immer so behandelt, als ob sie gezahlt würde. Natürlich wirken sich auch reine Buchungen auf den Zahlungsstrom aus, indem sie z. B. die Laufzeit verändern und die Höhe der *letzten* Zahlung beeinflussen. Beispiele:

(69)	(1), Schatzbrief B:	(-1000; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1560) bzw.
		(-1000; 6mal 0; 1560)
(70)	(1), Schatzbrief A:	(-1000; 40; 55; 60; 70; 75; 1080)
(71)	Aufgabe (42):	(-8000; 2160; 2048; 1936; 1824; 1712)
(72)	Aufgabe (43):	(-8000; 5mal 2160)
(73)	Aufgabe (45):	(-8000; 6mal 1500; 1365,21)
(74)	Aufgabe (65):	(-110 000; 19mal 10 000)
(75)	Aufgabe (66):	(-1000; 0; 0; 1330; 0; 1,02)
(76)	und:	(-1000; 4mal 0; 1357,75)

Die Unterscheidung der Darlehenstypen (35)-(39) ist durch das Vergißprinzip hinfällig geworden. Sie alle sind charakterisiert durch *die Bedingungen (eines »normalen« Darlehens)*

(77) $$Z_0 < 0\ ;\ Z_m \geq 0 \text{ für } m = 1, \ldots, n-1;\ Z_n > 0.$$

Bei Einschluß von (40) hat man ein m' mit $0 < m' < n$ und

(78) $$\begin{array}{lll} Z_0 < 0; & Z_m \leq 0 \text{ für } m = 1, \ldots, m'-1; & \\ Z_{m'} < 0; & Z_m \geq 0 \text{ für } m = m'+1, \ldots, n-1; & Z_n > 0. \end{array}$$

Das Problem noch allgemeinerer Geldgeschäfte, wo Aus- und Einzahlungen mehrfach wechseln können, kann hier nicht behandelt werden (ich verweise dazu auf [3], [4], [5], [6]).

Offenbar ist der Zahlungsstrom, ein (n + 1)-Tupel, zu unhandlich für z. B. den Vergleich zweier Geldgeschäfte. Man müßte jedes Geldgeschäft durch eine einzige Zahl charakterisieren und könnte diese Zahlen dann in eine Rangfolge bringen. Zu diesem Zweck wird nun der in Kapitel 1 eingeführte Begriff des effektiven Zinssatzes auf Darlehen mit mehreren Rückzahlungen übertragen:

(79) »Definition«: *Für ein Darlehen, also einen Zahlungsstrom* (67) *mit den Vorzeichenbedingungen* (77) bzw. (78), *ist der »effektive Zinssatz« derjenige Zinssatz x, mit dem sämtliche Zahlungen aufzuzinsen sind, so daß die Summe der Endwerte* 0 *ist, d. h. die Endwerte der Aus- und die der Rückzahlungen gerade im Gleichgewicht sind, also »die« Lösung x der Polynomgleichung*

(80) $$Z_0 \cdot (1 + x)^n + Z_1 \cdot (1 + x)^{n-1} + \ldots + Z_{n-1} \cdot (1 + x) + Z_n = 0$$

(mit dem Spezialfall (56) bei konstanter Rückzahlungsrate R, wobei $Z_0 = -K$ und $Z_m = R$ für $m = 1, \ldots, n$ ist). Die inhaltliche Deutung ist die, daß ein für die gesamte Laufzeit konstanter Zinssatz gesucht ist, mit dem in jeder Periode das jeweils noch vorhandene Restdarlehen so verzinst wird, daß es, unter entsprechender Berücksichtigung der Rückzahlungen, am Laufzeitende gerade 0 beträgt. Im Falle einer einzigen Rückzahlung (Kap. 1) stimmt der Begriff (79) mit (16) überein.

2.4 Aufgaben zum effektiven Zinssatz

(81) »Berechne für die Zahlungsströme (69)-(76) *die effektiven Zinssätze.«* Bei (69) und (76) hat man eine einzige Rückzahlung, und die Lösung läßt sich durch Radizieren in ge-

schlossener Form angeben: 6,56 % bzw. 6,31 %. Bei (71) und (73) kennt man das Ergebnis bereits aus den Aufgaben (42) und (45), wo aufgrund des (inzwischen so bezeichneten) effektiven Zinssatzes die Zahlungsreihen erstellt worden waren: beidesmal 7 %.

Es ist zwar sinnvoll, diesen Wert durch Einsetzen in (80) zu überprüfen, aber bei dieser Aktivität darf das Curriculum nicht stehen bleiben: So gut wie nie wird man nämlich in (80) genau 0 erhalten, und dann lautet die entscheidende Frage: Wie ist die Abweichung zu interpretieren? – Ist sie negativ, dann hätten bei dem angenommenen Zinssatz die Rückzahlungen nicht gereicht, um das Darlehen auf 0 zu bringen. Da sie aber gereicht haben, muß der Zinssatz niedriger sein. – Ist sie positiv, dann muß er (mit der entsprechenden Argumentation) höher sein. – Sofort drängt sich nun die nächste Frage auf: Wie hoch ist er denn? Und schon ist man im Iterationsprozeß.

Ist die Abweichung klein, dann wird man den angenommenen Wert akzeptieren. Aber wie klein muß sie zu diesem Zweck sein? – Bei (73) erhält man z. B. mit $x = 7$ % in (80) den Wert - 0,01 DM. Das ist offensichtlich klein genug, aber um wirklich sicher zu gehen, müßte man mit dem »nächsten« Zinssatz probieren, bei $\frac{1}{100}$ % Genauigkeit also mit 6,99 %: Dafür erhält man 4,43 DM, und der tatsächliche Zinssatz liegt offensichtlich viel näher an 7,00 %, so daß dieser zu wählen ist. Der Hintergrund dieser Argumentation ist der fast lineare Verlauf der linken Seite von (80) als Polynomfunktion von x in dem kleinen hier betrachteten Intervall; wollte man dieses Argument vermeiden, so müßte man mit $x = 6{,}995$ % arbeiten: Man erhielte 2,21 DM und wüßte damit sicher, daß der effektive Zinssatz im Intervall [6,995 %; 7,005 %[liegt, etwas unterhalb von 7 %.

Bei (70), (72), (74), (75) muß man iterativ vorgehen. Dies führe ich für (70) (Schatzbrief A) vor: Die linke Seite von (80) habe ich mit einem 30-DM-Taschenrechner programmiert. Den Eingabewert x überlege ich mir nach jedem Schritt neu. – Der effektive Zinssatz wird etwas niedriger als beim Typ B (Aufgabe (69)) liegen; also fange ich mit 6,5 % an und erhalte -21,84 DM. Er muß niedriger sein, in Anbetracht der Zinssätze in den Bedingungen bestimmt nicht niedriger als 6 %: Bei diesem ergibt sich 14,06 DM, und das Ergebnis liegt tatsächlich zwischen 6 % und 6,5 %, und zwar etwas näher an 6 %; genauer: Beim Wachsen des Zinssatzes von 6 % auf 6,5 % nimmt die linke Seite von (80) (etwa gleichmäßig) von 14,06 DM auf -21,84 DM ab und ist 0 DM etwa bei 6,2 % (klassische Interpolation).

Schätzungsweise kommt einer der Werte 6,18 %, 6,19 %, 6,20 %, 6,21 %, 6,22 %, d. h. eines der Intervalle [6,175 %; 6,185 %[, [6,185 %; 6,195 %[usw., in Frage. Protokoll der Iteration, die eigentlich schon bei $x = 6{,}195$ % beendet ist:

x	6,5	6	6,185	6,195	6,205	6,20	(%)
linke Seite von (80)	-21,84	14,06	0,88	0,17	-0,55		DM

Will man die Intervallschachtelung automatisch steuern, etwa mit einem Computerprogramm, so braucht man zunächst zwei Anfangszinssätze, von denen man sicher weiß, daß das Ergebnis im Intervall zwischen ihnen liegt. Mit z. B. 0 % und 1000 % erhält man im Fall eines realistischen Darlehens einen positiven und einen negativen Wert der linken Seite von (80). Nun wertet man diese an der Intervallmitte (hier: 500 %) aus, usw. (s. (44)). – Der begriffliche und programmiertechnische Aufwand, schneller konvergierende Verfahren oder Algorithmen für günstigere Startwerte zu programmieren, rentiert sich angesichts der kurzen Rechenzeiten heutiger (Klein-!)Computer nicht: In 20 Schritten ($2^{20} \approx 1$ Mio) hat man die Intervallänge von 1000 % auf $\frac{1}{1000}$ % verkürzt.

(82) Es fällt auf, daß der Schatzbrief A mit jährlicher »Rück«zahlung der Zinsen schlechter ist als B mit Zinskumulation (s. (1)), auch wenn dessen Laufzeit auf 6 Jahre verkürzt würde: B hätte dann den effektiven Zinssatz 6,32 %, A nur 6,20 %. Dies wird folgendermaßen plausibel: Anders als bei B (s. Abschn. 1.1) ist bei A die Reihenfolge der tatsächlich anzuwendenden Zinssätze nicht mehr egal, weil diese den Zahlungsstrom beeinflußt. Da zur Ermittlung des effektiven Zinssatzes *alle* Zahlungen mit ein und demselben Faktor

aufgezinst werden, ergeben die bei A später liegenden höheren Rückzahlungen insgesamt einen niedrigeren Endwert als bei B. Dieser reicht aber nur dann schon zum Ausgleich der anfänglichen Auszahlung, wenn der effektive Zinssatz niedriger ist.

Die anderen Ergebnisse (72) 10,92 %; (74) 6,18 %; (75) 10,00 %. (Dabei können (72) und (74) unter Benutzung des Rentenfaktors (57) mit dem *einfachen* Taschenrechner ausgewertet werden.) Man beachte den deutlichen Unterschied zwischen (75) und (76) (Aufgabe (66)). Der Tilgungsplan für Aufgabe (43) (= (72)) sieht dann so aus (auf Pfennige genau):

Jahr	Anfangsbestand	10,92 % Zinsen	Tilgung	Zahlung
1	8000	873,60	1286,40	2160
2	6713,60	733,13	1426,87	2160
3	5286,73	577,31	1582,69	2160
4	3704,04	404,48	1755,52	2160
5	1948,52	212,78	1947,22	2160
6	1,30			

Die groß erscheinende Restschuld von 1,30 DM ergibt sich daraus, daß der Zinssatz von tatsächlich 10,9162... % durch die Rundung auf 10,92 % vergrößert wurde und bei *diesem* fiktiven Zinssatz die Rückzahlungen nicht ganz zum Ausgleich des Darlehens reichen. Diese (fiktive) Restschuld muß natürlich nicht nachgezahlt werden. – Auch wenn man noch so genaue Werte für den Zinssatz nimmt, kommt man, wegen der Rundung auf Pfennige bei jedem Schritt, höchstens zufällig auf einen rechnerischen Restwert von exakt 0.

Zu den in Abschnitt 2.1 behandelten Aufgabentypen seien noch folgende hinzugefügt:

(83) Zum Text (31): *»Hat bei einem Kurs von 100 % die Obligation überhaupt den effektiven Zinssatz 6 %?«* Dies ergibt sich aus (58) mit $n = 5$, $i = 0{,}06$ und $y := q$, wo $x := y - 1$ der effektive Zinssatz ist: Allgemein ist hier $K \cdot y^n = K \cdot i \cdot \frac{y^n - 1}{y - 1} + K$, und wegen $y^n - 1 = i \cdot \frac{y^n - 1}{y - 1}$ ist $i = y - 1$, d. h. $x = i$. Man hat also: Ist der nominale Zinssatz konstant, dann stimmt bei jährlicher Rückzahlung der Zinsen der effektive Zinssatz mit dem nominalen und daher mit demjenigen effektiven Zinssatz überein, den man bei Zinskumulation erhielte (nicht so bei variablem nominalen Zinssatz; s. (82)).

(84) *»Wie hoch muß der Kurs b sein, wenn die Obligation einen effektiven Zinssatz von 5,86 % haben soll?«* Aus $b \cdot K \cdot y^5 = i \cdot K \cdot \frac{y^5 - 1}{y - 1} + K$ ergibt sich

$$b = \frac{0{,}06 \cdot (1{,}0586^5 - 1) + 0{,}0586}{1{,}0586^5 \cdot 0{,}0586} = 100{,}59\ \%$$

(das Vergißprinzip (68) ist berücksichtigt: Der Zahlungsstrom lautet (– b · 1000; 60; 60; 60; 60; 1060)).

(85) *»Prämiensparen: 6 Jahre lang wird immer am Jahresanfang ein fester Betrag angelegt; dieser wird über die ganze Laufzeit von 7 Jahren mit 3 % verzinst. Am Ende wird das aufgelaufene Kapital mit einer Prämie von 16 % (auf die Nettoauszahlungen!) zurückgezahlt.«* Der Endwert der sechs Auszahlungen (in konstanter Höhe K) beträgt $K \cdot (1{,}03^7 + 1{,}03^6 + \ldots + 1{,}03^2) = K \cdot 1{,}03^2 \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03}$; es wird also zurückgezahlt $K \cdot (1{,}03^2 \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} + 6 \cdot 0{,}16) = 7{,}822336 \cdot K$; der Zahlungsstrom lautet daher K · (–1; –1; –1; –1; –1; –1; 0; 7,822336); und mit dem Ansatz $(1 + x)^2 \cdot \frac{(1 + x)^6 - 1}{x} = 7{,}822336$ ergibt sich der effektive Zinssatz 5,96 % (wodurch der hohe Prämiensatz etwas ins rechte Licht gerückt ist).

2.5 Eindeutigkeit und Existenz des effektiven Zinssatzes

(Im folgenden werden nur Zahlungsströme betrachtet, die Darlehen sind, also (77) bzw. (78) erfüllen.)

(86) Möchte man *»für den Zahlungsstrom* (–8000; 5mal 1500) *den effektiven Zinssatz ausrechnen«* und beginnt die Iteration bei $x = 0$, so hat die linke Seite von (80) den Wert –500,

und offenbar existiert kein (positiver) effektiver Zinssatz. Das sieht man dem Zahlungsstrom auch direkt an, denn die Summe der (Netto-)Rückzahlungen ist niedriger als die Auszahlung, d. h. das Darlehen ist noch nicht einmal ganz getilgt, geschweige dann verzinst, bzw. es ist negativ verzinst worden (ähnlich wie bei (17)).

Es liegt auf der Hand, die Begriffe »Aufzinsung«, »effektiver Zinssatz« usw. auf *negative Zinssätze* zu erweitern; jedenfalls so lange die Zins*faktoren positiv* bleiben ($1 + x > 0$, also $x > -1$); denn nicht-positive Zinsfaktoren sind ökonomisch unsinnig, da sie den Wert jeder Zahlung in jeder Periode auf 0 setzen oder sogar vorzeichenmäßig umkehren. Die Iteration für Aufgabe (86) beginnt man also mit einem Wert, der etwas größer als -100 % ist (für die Rechnung kann man sogar -100 % selbst nehmen, wenn man beachtet, daß der Zinsfaktor, der dann 0 beträgt, nirgends im Nenner auftaucht). Der Wert der linken Seite ist nun sicher positiv, weil er gleich der letzten Zahlung $Z_n > 0$ ist. – In Aufgabe (86) ergibt sich nun $x = -0{,}0211$.

Umgekehrt kann man leicht für jeden gegebenen, noch so großen Zinssatz Zahlungsströme konstruieren, deren effektive Zinssätze noch größer sind: Andererseits ist klar, daß es für jeden Zahlungsstrom einen (entsprechend großen) Zinssatz gibt, so daß die linke Seite von (80) negativ wird. Der effektive Zinssatz muß also zwischen -100 % und diesem oberen Zinssatz liegen, und man kann bei einer Iteration mit diesen beiden Zinssätzen beginnen.

Es drängt sich nun aber doch eine mathematische Absicherung dieser Plausibilitätsüberlegungen auf, insbesondere: Ist man tatsächlich sicher, daß bei gegebenem Zahlungsstrom ein höherer Zinssatz zu einem niedrigeren Wert der linken Seite von (80) führt? Dazu betrachtet man (was sich schon seit einiger Zeit anbietet) die linke Seite von (80) als eine Funktion von $1 + x$ (bzw. von $y = 1 + x$), und hat so ein Polynom n-ten Grades in y

(87) $$S(y) := Z_0 \cdot y^n + Z_1 \cdot y^{n-1} + \ldots + Z_{n-1} \cdot y + Z_n \qquad (y \in \mathbb{R}^+).$$

Dieses hat folgende inhaltliche Bedeutung: Es gibt, in Abhängigkeit vom Zinsfaktor y, die Restschuld S an, also den Betrag, der, bei jeweils gegebenem y, noch zur letzten Zahlung zu addieren wäre, damit das Geldgeschäft dann gerade erledigt wäre. (Dies ist eine Fragestellung desjenigen, der die Bedingungen des Geldgeschäfts festlegt.) Hier geht es nun um die Frage etwa des Bankkunden: Da der Zahlungsstrom festliegt, ist derjenige Zinsfaktor y gesucht, bei dem das Geldgeschäft genau mit diesem Zahlungsstrom erledigt ist, bei dem nichts mehr zu addieren ist, bei dem $S = 0$ gilt (s. (80)!); es ist also »die« positive Nullstelle von (87) gesucht.

Bekanntlich hat jede Polynomgleichung (80) n-ten Grades insgesamt n (komplexe) Lösungen. Aber die nicht-reellen sowieso und die reellen nicht-positiven nach den obigen Überlegungen kommen hier nicht in Betracht, d. h. die Grundmenge für die Lösungen ist $\mathbb{R}^+$, und diese Einschränkung beeinflußt die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit des effektiven Zinssatzes erheblich. In die weitere Argumentation geht wesentlich die Stetigkeit von Polynomen ein: Einmal in Form des Zwischenwertsatzes bei reellen Intervallen als Definitionsbereich. Wenn das Polynom an einer Stelle einen positiven und an einer anderen einen negativen Wert annimmt, so muß es dazwischen irgendwo eine Nullstelle haben. Aber auch: Hat das Polynom an einer Stelle einen positiven Wert, dann hat es in einer ganzen Umgebung dieser Stelle nur positive Werte.

Nun ist (mit einer geringen Erweiterung des Definitionsbereichs) $S(0) = Z_n > 0$ und damit $S(y) > 0$ für $y > 0$ in der Nähe von 0. Für sehr große y überwiegt der Einfluß von Z_0 gegenüber dem der anderen Koeffizienten; das Polynom S geht asymptotisch gegen das Polynom $Z_0 \cdot y^n$, das für $y > 0$ wegen $Z_0 < 0$ nur negative Werte annimmt; d. h. S wird für große y negativ. Für eine einfache rechnerische Klärung betrachtet man hier die Funktion $T(y) := \frac{S(y)}{y^n}$ im Bereich $y > 0$: $(y > 0)$

(88) $$T(y) = Z_0 + \frac{Z_1}{y} + \frac{Z_2}{y^2} + \ldots + \frac{Z_{n-1}}{y^{n-1}} + \frac{Z_n}{y^n}$$

(die den Barwert der Restschuld (bzw. des Zahlungsstroms) beim Zinsfaktor y angibt). Mit

(89)
$$y > \max_{1 \leq m \leq n} \sqrt[m]{n \cdot \frac{Z_m}{|Z_0|}}$$

ist $\frac{Z_m}{y^m} < \frac{|Z_0|}{n}$ für $m = 1, \ldots, n$, damit $T(y) < 0$ und wegen $y > 0$ auch $S(y) < 0$. Jeder Zinsfaktor y, der Bedingung (89) erfüllt, liefert eine obere Schranke für den effektiven Zinssatz des Zahlungsstroms.

Die *Existenz* ist also geklärt, und nun ist nur noch die *Eindeutigkeit* offen. Diese ergäbe sich direkt, wenn S eine streng monoton fallende Funktion wäre. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, wie man am folgenden Beispiel sieht:

(90) »Für den Zahlungsstrom (–10 000; 25 000; 2600) *ist etwa* $S(1) = 17\,600 < S(1{,}25) = 18\,225 > S(2{,}6) = 0$.« Also: Bei steigendem Zinssatz kann sich die rechnerische Restschuld durchaus auch zugunsten des Darlehensnehmers verändern. Dieser verblüffende Sachverhalt macht die vorher angestellten Plausibilitätsüberlegungen fragwürdig bzw. zeigt, daß diese ergänzungsbedürftig sind:

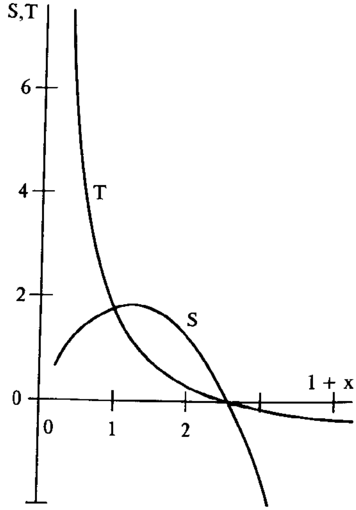

Abb. 2

Man stellt leicht fest, daß aber T(y), der Barwert des Zahlungsstroms, eine streng monoton fallende Funktion ist, die für kleine $y > 0$ positive und für große y negative Werte annimmt. Also hat T im Bereich $y > 0$ genau eine Nullstelle. Da $S(y) = T(y) \cdot y^n$ ist, gilt für jedes $y > 0$: Die Aussagen »$T(y) = 0$« und »$S(y) = 0$« sind gleichwertig. Die positive Nullstelle von S, und damit der effektive Zinssatz eines »normalen« Darlehens (77), ist folglich eindeutig bestimmt, auch wenn S nicht monoton ist.

Zwar sind S und T beide ökonomisch interpretierbar, aber hier kommt es nur auf die (geometrische) Beschaffenheit der Graphen an: Etwaige Buckel und Senken von S werden beim Übergang zu T eliminiert, während die Nullstellenmenge dabei invariant ist.

Der tiefere Grund für die Monotonie von T zeigt sich erst, wenn man sich dem allgemeineren Fall (78) zuwendet, wo die Auszahlung auf mehrere Perioden verteilt sein kann, d. h. wo es m' ($0 < m' < n$) gibt mit $Z_m \leq 0$ für $m \leq m'$ und $Z_m \geq 0$ für $m > m'$: Dann ist nämlich nicht mehr T notwendig monoton, sondern die Funktion $T_{m'}$ in (91), und nicht die Periode 0, sondern m' ist Bezugsperiode, und lediglich im »Normal«fall hat man $m' = 0$:

(91)
$$T_{m'}(y) := \frac{S(y)}{y^{n-m'}} = Z_0 \cdot y^{m'} + Z_1 \cdot y^{m'-1} + \ldots + Z_{m'} + \frac{Z_{m'+1}}{y} + \frac{Z_{m'+2}}{y^2} + \ldots + \frac{Z_n}{y^{n-m'}} \qquad (y > 0).$$

Letztlich ist der effektive Zinssatz ein Instrument zur Bewertung bzw. zum Vergleich von Zahlungsströmen. In ihm ist das Vergißprinzip (68), das schon von den Bedingungen des Geldgeschäfts zum Zahlungsstrom geführt hat, auf die Spitze getrieben. Man kann ihn als Funktion auf der Menge derjenigen Zahlungsströme auffassen, die (77) bzw. (78) erfüllen; denn von seiner Existenz und Eindeutigkeit hat man sich ja überzeugt. Nimmt man als Wertebereich (– 1, ∞), dann ist die Funktion offensichtlich surjektiv.

(92) Sie ist aber nicht injektiv, denn zwei Zahlungsströme $Z := (Z_0; Z_1; ..., Z_n)$ und $Z' := (Z_0'; Z_1'; ...; Z_n')$, *die sich nur um einen Faktor* $r > 0$ *unterscheiden* (also $Z = r \cdot Z'$, d. h. $Z_m = r \cdot Z_m'$ für $m = 0,1, ..., n$), *haben denselben effektiven Zinssatz.* Außerdem hat sie folgende beide Eigenschaften:

(93) Der effektive Zinssatz ist »isoton« in folgendem Sinn: Ist der Zahlungsstrom Z höher als der Zahlungsstrom Z' (geschrieben $Z > Z'$*), dann ist auch der effektive Zinssatz* x_0 *(von Z) höher als* x_0' *(von Z'), also* $x_0 > x_0'$. Dabei bedeutet $Z > Z'$ folgendes: Z und Z' haben dieselbe Länge n, es ist $Z_m \geq Z_m'$ für alle $m = 0, 1, ..., n$ und $Z_m > Z_m'$ für ein m. (Man beachte, daß z. B. $Z_0 > Z_0'$ bedeutet, daß $|Z_0| < |Z_0'|$, also die Auszahlung Z_0 niedriger ist als Z_0' !)

(94) Der effektive Zinssatz ist »stetig«, d. h.: Ändert man den Zahlungsstrom nur gering, dann ändert sich auch der effektive Zinssatz nur gering; bzw.: Ausgehend von einem bestimmten effektiven Zinssatz zu einem bestimmten Zahlungsstrom kann man jeden effektiven Zinssatz nahebei (im Wertebereich) durch einen Zahlungsstrom nahebei erzeugen.

Während die Notwendigkeit der Isotonie für den Begriff des effektiven Zinssatzes offensichtlich ist, erschließt sich die Bedeutung der Stetigkeit erst bei genauerer Analyse (ist in Arbeit). – Beide Eigenschaften lassen sich an Funktionsgraphen gut veranschaulichen (vgl. Abb. 3a): Der Übergang zu einem »höheren« Zahlungsstrom bedeutet ein Höherlegen des Graphen im ganzen Definitionsbereich $(-1, \infty)$, wobei die Nullstelle nach rechts wandert; (93). Und: Eine kontinuierliche Veränderung des Graphen führt zu einer ebensolchen Veränderung der Nullstelle; (94). Während (94) essentiell das Theorem über implizite Funktionen ist und damit nicht mehr zur Schulmathematik gehört, läßt sich (93) elementar beweisen, nämlich:

Sei x_0' der effektive Zinssatz des Zahlungsstroms Z', d. h. $S'(1+x) \geq 0$ für $-1 < x \leq x_0'$. Sei $Z > Z'$. Dann ist $S(1+x) > S'(1+x)$ für $-1 < x$, insbesondere ist $S(1+x) > 0$ für $-1 < x \leq x_0'$, der effektive Zinssatz x_0 von Z kann sich nicht im Intervall $]-1; x_0']$ befinden, also ist $x_0 > x_0'$.

(95) Nun gilt für das Vorzeichen des effektiven Zinssatzes: *Sei* $N := Z_0 + Z_1 + ... + Z_n$ *die »Nettosumme« des Zahlungsstroms. Dann hat* x_0 *dasselbe Vorzeichen wie* N. Beweis: Es ist $N = S(1)$ und $S(1 + x_0) = 0$. Ist $x_0 = 0$, dann ist $S(1) = 0$. Ist $x_0 > 0$, dann ist $S(1) > 0$; ist $x_0 < 0$, dann ist $S(1) < 0$ (s. Abb. 3b–d).

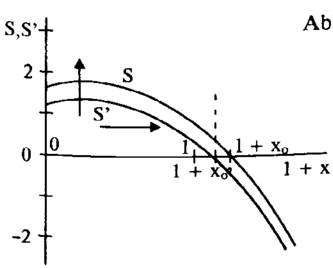

Abb. 3 a

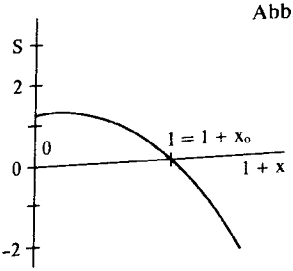

Abb. 3 b

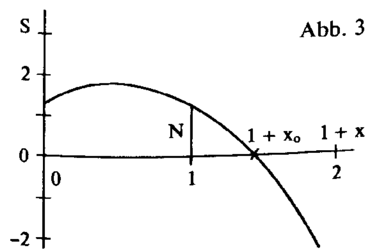

Abb. 3 c

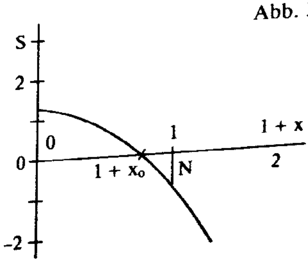

Abb. 3 d

2.6 Zahlungen, die nicht an Jahresenden stattfinden

Bei sehr vielen Geldgeschäften, denen der Bürger begegnet, werden kürzere Perioden als 1 Jahr zugrundegelegt, meistens Quartale oder Monate. Hat man z. B. kürzere Perioden für die *Zinskapitalisierungen* oder sonstige Buchungen, dann beeinflußt dies den Zahlungsstrom in Laufzeit oder Höhe der Raten (vgl. Abschn. 1.6), aber wenn dieser einmal ermittelt ist, spielen die angesetzten Zinsperioden bei der Berechnung des effektiven Zinssatzes keine Rolle mehr (Vergißprinzip (68)). — Meistens sind allerdings auch unterjährige *Zahlweisen* vorgegeben, und diese wirken sich *direkt* auf den effektiven Zinssatz aus.

Aus Platzgründen kann dieses Thema jetzt nicht in der gebotenen Gründlichkeit behandelt werden. Wer aber wirklich authentische (und eventuell sogar schüler-relevante) Beispiele zur Zinseszinsrechnung im Unterricht behandeln möchte, kommt an der Möglichkeit unterjähriger Zahlweise nicht vorbei. Zum Zwecke der eigenständigen Erarbeitung durch den Leser sind im folgenden die wesentlichen Grundsätze aufgeführt. Eine ausführliche stoffdidaktische Analyse mit zahlreichen interessanten beispielhaften Problemen (Zuschläge für unterjährige Zahlweise bei Versicherungen, Hypotheken-Darlehen, Kleinkredite, Auto-Finanzierungen, langfristige Geldanlagen mit den verschiedensten Bedingungen, Bausparen, Zwischenfinanzierungen dazu, BAföG-Darlehen) kann beim Autor direkt angefordert werden.

(96) Nach der PAngV ist für die Ermittlung des effektiven Zinssatzes jede Zahlung, die nicht an einem Laufzeitjahresende stattfindet, zunächst bis zum nächsten solchen Jahresende (d. h. mit einer kürzeren Zinsperiode) und ab dann normal (d. h. mit Perioden der Länge 1 Jahr) aufzuzinsen. Die Zahlungen innerhalb eines Laufzeitjahres werden mit ihren aufgezinsten Werten zum Jahresende saldiert, und dieser Saldo ist als eine einzige Zahlung zum Jahresende aufzufassen, die jenen tatsächlichen Zahlungen äquivalent ist und diese ersetzt. Die Folge aller dieser Salden über die Laufzeit liefert gerade den Zahlungsstrom (67) und danach den effektiven Zinssatz gemäß (79). Es werden also nach wie vor nur Zahlungsströme verwendet mit jährlichen Zahlungen. Informationen über die tatsächliche Verteilung der Zahlungen innerhalb jedes Jahres fallen dem Vergißprinzip (68) anheim.

Im Zahlungsstrom tritt dann i. a. der effektive Zinssatz als Variable auf. Dies kann folgendermaßen beseitigt werden: Eine Zahlung Y, die um die Zeitspanne t Jahre ($0 \leq t \leq 1$) vor dem Jahresende stattfindet, hat zum Jahresende den Wert

$$Y \cdot (1 + t \cdot x) = t \cdot Y \cdot (1 + x) + (1 - t) \cdot Y.$$

(97) »Aufspaltverfahren«: Die Gleichung zeigt, daß dieser Wert sich auch ergibt, wenn man Y *in die beiden Teile* $t \cdot Y$ *und* $(1 - t) \cdot Y$ *aufspaltet und so tut, als ob* $t \cdot Y$ *am Jahresanfang und* $(1 - t) \cdot Y$ *am Jahresende gezahlt würde, so daß* $t \cdot Y$ *einmal mehr mit dem Zinsfaktor* $1 + x$ *aufzuzinsen ist.*

In dem weit verbreiteten Fall, daß ein Darlehen Z_0 (< 0) n Jahre lang ($n > 0$) monatlich nachschüssig mit gleichen Raten Y (> 0) zurückgezahlt wird, ergibt sich als Zahlungsstrom:

(98) $$(Z_0 + 5{,}5 \cdot Y;\ (n - 1)\text{-mal } 12 \cdot Y;\ 6{,}5 \cdot Y)$$

(Man erkennt, daß der effektive Zinssatz ∞ wird, wenn im ersten Jahr die Rückzahlungen so hoch sind, daß der erste Eintrag im Zahlungsstrom nicht negativ ist, das Polynom (87) $S(y)$ lauter positive Koeffizienten und damit keine Nullstelle $y > 0$ hat.)

(99) Wenn nun auch noch die Gesamtlaufzeit nicht ganzjährig ist, so führt die Anlehnung an die Sparkassenkonvention (23) zu dem *»Prinzip vom nicht-ganzen Rest«: Die Laufzeit wird von ihrem Anfang an in ganzjährige Zinsperioden eingeteilt, und ein etwaiger nicht-ganzer Rest bildet eine weitere, kürzere Zinsperiode.*

(100) Darauf baut schließlich *die »Formel der PAngV« mit Auszahlung* $K > 0$, *monatlichen Raten* $R > 0$, *Restschuld* S ($S > -R$), *Laufzeit n Jahre und m Monate* ($n \geq 1; 0 \leq m < 12$) *auf: Der Zahlungsstrom ist*

$$\left(-K + 5{,}5 \cdot R;\ (n-1)\text{-mal } 12 \cdot R;\ (6{,}5 + \frac{m-1}{2}) \cdot R;\ \frac{m+1}{2} \cdot R + S\right)_{n + m/12}$$

mit der Bestimmungsgleichung

$$\left((-K + 5{,}5 \cdot R) \cdot y^n + 12 \cdot R \cdot \frac{y^n - 1}{y - 1} \cdot y + (6{,}5 + \frac{m-1}{2}) \cdot R\right) \cdot y' + \frac{m+1}{2} \cdot R + S = 0$$

$$\text{(wobei } y = 1 + x \text{ und } y' = 1 + \frac{m}{12} \cdot x \text{ ist)}$$

für den effektiven Zinssatz und der Endlichkeitsbedingung $K > 5{,}5 \cdot R$.

Ist diese verletzt, so existiert keine reelle Lösung $x > -1$, und der effektive Zinssatz x ist ∞ zu setzen. Für Laufzeiten, die *kürzer als 1 Jahr* sind ($n = 0$), hat man entsprechend den Zahlungsstrom $(-K + \frac{m-1}{2} \cdot R;\ \frac{m+1}{2} \cdot R + S)$, usw.

Literatur

[1] *Bardy, Peter* (1984) / *Katharina Baulig / D. Lübbert / Gerhard Preiß* und *E. Wenzelburger-Solache Orozco:* Sachrechnen für Lehrer an Berufsschulen. BS3: Zinsrechnen. Tübingen: DIFF

[2] *Becker, Gerhard* (1982): Zu der Verordnung über die Berechnung der Effektiv-Verzinsung mit Wirkung vom 1. 1. 1981, in: mathematica didactica 5, 43–49

[3] *Bender, Peter* (1987a): Effektiver Zinssatz, Preisangabenverordnung, Anspardarlehen, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1987, 87–90

[4] *Bender, Peter* (1987b): Wie wirtschaftlich ist Bausparen? In: mathematiklehren 22, 36–40

[5] *Bender, Peter* (1988): Die Begrifflichkeit des Bezugsfachs in der angewandten Mathematik und ihrer Didaktik – diskutiert am Beispiel des internen Zinssatzes von Investitionen, in: Journal für Mathematikdidaktik 9, 205–224

[6] *Bender, Peter* (in Arbeit): Zur Eindeutigkeit des internen Zinssatzes und zur Interpretation bei Mehrdeutigkeit. Manuskript

[7] *Dübbern, Klaus* (1985): Verbraucherschutz auf Kosten der Anbieter, in: Die Bank 1985, 352–354

[8] *Hestermeyer, Wilhelm* (1985): Der effektive Zinssatz bei Kleinkrediten, in: Praxis der Mathematik 27, 129–145, 237–249

[9] *Hestermeyer, Wilhelm* (1987): Wer mit Schulden leben will, muß rechnen können, in: mathematiklehren 20, 44–47

[10] *Hestermeyer, Wilhelm* (1988): Effektiver Zinssatz und anwendungsorientierter Unterricht, in: Journal für Mathematikdidaktik 9, 225–230

[11] *Jahnke, Thomas* (1987): Überraschungen bei der Berechnung des »Effektiven Zinssatzes«, in: Journal für Mathematikdidaktik 8, 191–204

[12] *Jahnke, Thomas* (1988): Noch einmal: Der effektive Zinssatz, in: Journal für Mathematikdidaktik 9, 239–246

[13] *Kirsch, Arnold* (1982/1983): Der effektive Zinssatz bei Kleinkrediten, in: Praxis der Mathematik 24, 65–71, 164–172 u. 25, 73–77

[14] *Kirsch, Arnold* (1987): Bemerkungen zur »Berechnung« des effektiven Zinssatzes – eine Ergänzung zu der Arbeit von Thomas Jahnke, in: Journal für Mathematikdidaktik 8, 321–330

[15] *Kosiol, Erich* (1950/1973): Finanzmathematik. Wiesbaden: Gabler 1950, 10. Aufl. 1973

[16] *Der langfristige Kredit* 36 (1985): Stellungnahmen und Anmerkungen zum »effektiven Jahreszins«. 734–737

[17] *Nick, Klaus* (1981): Ratentilgung und deren Kosten, ein Unterrichtsvorhaben, in: mathematica didactica 4, 59–63

[18] *Schröder, Max* (1987): Effektiver Jahreszins – Sachrechnen in der SI, in: Willibald Dörfler/Roland Fischer/Werner Peschek (Hrsg.): Wirtschaftsmathematik in Beruf und Ausbildung. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: Teubner 1987, 249–256

[19] *Weidig, Ingo* (1986): Zur Berechnung des effektiven Jahreszinssatzes bei Ratenkrediten, in: Praxis der Mathematik 28, 419–422

[20] *Weidig, Ingo* (1988): Effektivzins und Wirklichkeit, in: Journal für Mathematikdidaktik 9, 231–237

[21] *Wille, Friedrich* (1985): Über den Einfluß der Geldentwertung auf Hypotheken, in: Mathematische Semesterberichte 32, 233–254

[22] *Ziegenbalg, Jochen* (1988): Algorithmen als Hilfsmittel zur Elementarisierung mathematischer Lösungsverfahren und Begriffsbildungen, in: Klaus-Dieter Graf (Hrsg.): Computer in der Schule 2. Stuttgart: Teubner 1988, 149–174