Noch einmal: Zur Rolle der Anschauung in formalen Beweisen[1]

Von

PETER BENDER (PADERBORN)

In seinem Artikel *Anschauung und formaler Beweis* (1981) analysiert Erik Stenius u.a. folgenden Beweis des Satzes „In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleichlang“:

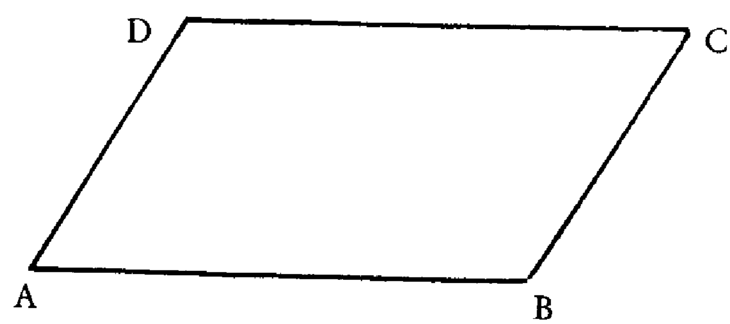

Abb. 1

Die Winkel BAC und DCA sind Wechselwinkel an parallelen Geraden und daher (nach einem vorher bewiesenen Satz) kongruent. Entsprechend sind die Winkel BCA und DAC kongruent. Nach dem ebenfalls vorher bewiesenen Kongruenzsatz WSW für Dreiecke folgt dann, daß die Strecken AB und DC, sowie die Strecken AD und BC kongruent sind.

Stenius bemerkt mit Recht, daß bei diesem Beweis stillschweigend die Tatsache benutzt wird, daß B und D in zwei verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden durch A und C liegen. Und zwar wird diese Tatsache der Figur entnommen, und sie müßte eigentlich noch bewiesen werden (was bei einem systematischen Aufbau der Geometrie etwa aus den Hilbertschen Axiomen unter besonderer Benutzung der Anordnungsaxiome problemlos möglich ist).

[1] Ich beziehe mich hier auf: Erik Stenius (1981): *Anschauung und formaler Beweis*. In: *Studia Leibnitiana* 13 (1), 133–146 und Rolf Struve (1986): *Zur Rolle der Anschauung in formalen Beweisen*. In: *Studia Leibnitiana* 18 (1), 89–93. Eine Auswahl weiterer Literatur zum Thema: Rudolf Arnheim (1969/1972): *Visual Thinking*. Berkeley. Dt.: *Anschauliches Denken*. Köln. Philip J. Davis & Reuben Hersh (1981/1983): *The Mathematical Experience*. Dt.: *Erfahrung Mathematik*. Boston, Basel, Stuttgart. Efraim Fischbein (1982): *Intuition and Proof*. In: *For the Learning of Mathematics* 3 (2), 9–18, 24, Hans Freudenthal (1979): *Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht*. In: Willibald Dörfler & Roland Fischer (Hrsg.): *Beweisen im Mathematikunterricht*. Wien, Stuttgart, 183–200. Hans Niels Jahnke (1978): *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik – Beweisen als didaktisches Problem*. *IDM Studien und Materialien* 10. Bielefeld. Hermann Kautschitsch & Wolfgang Metzler (Hrsg.) (1982, 1983, 1984, 1985, 1987, 1989): *Workshop zur Visualisierung in Klagenfurt 1981ff*. Wien, Stuttgart. Imre Lakatos (1976/1979): *Proofs and Refutations – The Logic of Mathematical Discovery*. London. Dt.: *Beweise und Widerlegungen – Die Logik mathematischer Entdeckungen*. Braunschweig, Wiesbaden. Bartel Leendert van der Waerden (1954): *Einfall und Überlegung*. Basel, 3. Auflage. Erich C. Wittmann & Gerhard Müller (1988): *Wann ist ein Beweis ein Beweis?* In: Peter Bender (Hrsg.): *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis, Festschrift für Heinrich Winter*. Berlin, 237–257.

Studia Leibnitiana, Band XXI/1 (1989)

Dagegen hält Rolf Struve in seiner Erwiderung *Zur Rolle der Anschauung in formalen Beweisen* (1986), daß der o. a. Beweis wörtlich gelte und die zusätzlich anschaulich gewonnene Tatsache nicht erforderlich sei. Dazu verwendet er einen Winkelbegriff, der nicht die Anordnung der Ebene benutzt, nämlich: ein Winkel ist ein Paar sich schneidender Geraden.

Damit geht Struve an Stenius' Überlegungen vorbei. Er stellt zwar indirekt fest, daß er sich mit seinem Winkelbegriff nicht gerade auf Euklid stützen kann, aber er meint, es „ließe sich der obige Beweis mutatis mutandis führen, wenn man Winkel auf andere Art definiert, etwa als Paare von Halbstrahlen . . ." (gemeint ist: Halbgeraden). – Dieses „mutandis" hat es jedoch in sich. In Hilberts (anordnungshaltiger) Begrifflichkeit mit Paaren von Halbgeraden als Winkel sind Stufen- und Wechselwinkel zwei verschiedene Begriffe: Beim ersten sind die beiden Schenkel auf der gemeinsamen Geraden gleich orientiert, und die beiden anderen Schenkel liegen in derselben Halbebene bezüglich jener Geraden; beim zweiten sind die beiden Schenkel auf der gemeinsamen Geraden entgegengesetzt orientiert, und die beiden anderen Schenkel liegen in verschiedenen Halbebenen (in Abb. 2 sind w_1 und w_2 Stufenwinkel und w_i und v Wechselwinkel für $i = 1,2$).

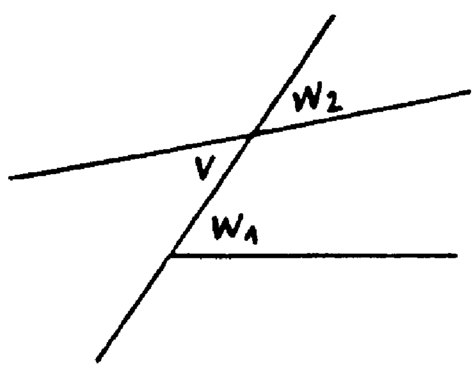

Abb. 2

Wenn man bei dieser Begrifflichkeit mit Wechselwinkeln argumentieren möchte, so muß man tatsächlich zunächst einmal nachweisen, daß solche vorliegen. Und genau dieses ist, wie Stenius feststellt, in dem von ihm analysierten Beweis nicht geschehen.

Es steht außer Frage, daß Stenius mit dieser anordnungshaltigen Begrifflichkeit arbeitet, und er kann davon ausgehen, daß der Leser das erkennt, auch und gerade wenn diesem Leser die Verwendung dieser Begrifflichkeit nicht selbstverständlich ist.

Es ist auch ein grobes Mißverständnis, Stenius zu unterstellen, daß „er keinen anderen Weg sieht", als „aus der Figur [zu] entnehmen, daß die Winkel BAC und ACD Wechselwinkel sind": Stenius konstatiert lediglich, daß (in seiner – anordnungshaltigen – Begrifflichkeit) bei dem von ihm betrachteten Beweis eine Tatsache der Anschauung entnommen wird und „somit . . . die Anschauung der Figur eine entscheidende Rolle in diesem Beweis" spielt. Er weiß sehr wohl, daß „dieser Umstand den Beweis unvollständig macht" (136), hebt auf das Axiom von Pasch ab, mit dem die Beweislücke zu füllen wäre (137), und erörtert den epistemologischen Status des Hilbertschen Axiomensystems (137). Daher ist auch Struves belehrender Hinweis auf den „in der Mathematik üblichen Weg", einen Begriff zu definieren, unangebracht.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei noch einmal Struves Anmerkung unterstrichen, daß (sinngemäß) die Wechselwinkel-Eigenschaft von BAC und CAD auch aus anordnungshaltigen Definitionen l o g i s c h gefolgert werden kann. Der

Beweis ist jedoch umständlicher und erfordert eine größere intellektuelle Anstrengung (die bei Struves Definition bereits in der Begrifflichkeit steckt), wobei man außerdem Gefahr läuft, Sachverhalte heranzuziehen, die man nicht aus den Axiomen gefolgert, sondern der Anschauung entnommen hat.

So etwas wie intellektuelle Anstrengung und der Akt des Erkennens überhaupt spielen bei Struve keine Rolle. Er läßt die epistemologische, kognitive, soziale, didaktische Dimension des (formalen!) Beweisens außer acht und beschränkt sich auf die formale Dimension (s. seine Einleitung). Diese Reduzierung wird jedoch dem von Stenius erörterten Problem nicht gerecht, was sich besonders deutlich am zweiten Beispiel der Analyse zeigt:

Dort geht es darum, aus einem bestimmten Axiomensystem über Punkte, Geraden und Inzidenz das Theorem „Es gibt wenigstens drei Punkte und drei Geraden" zu folgern. Struve hat Recht, wenn er kritisiert, daß bei Stenius der Beweis formal eigentlich nicht geführt ist. Tatsächlich hat Stenius dieses Theorem nur unter zusätzlichen Voraussetzungen (d. h. nur in bestimmten Modellen für das Axiomensystem) bewiesen, indem er z. B. annimmt, „daß wir unter ‚Punkten' Kreise und unter ‚Geraden' Quadrate verstehen und daß ‚liegt auf' als ‚mit einer Linie verbunden' gedeutet wird" (138; Hervorhebung von mir). Dieser Mangel läßt sich jedoch, wenigstens äußerlich, ganz leicht beheben, indem man die zitierte Formulierung z. B. ersetzt durch: „Als Symbole verwenden wir: für ‚Punkte' Kreise, für ‚Geraden' Quadrate und für ‚liegt auf' Verbindungslinien". (Entsprechend wäre bei den beiden anderen von Stenius diskutierten Varianten des „Beweisens" zu verfahren.) Damit ist dem formalen Standpunkt Genüge getan, und Stenius' erkenntnistheoretische Analyse wird in ihren wesentlichen Aussagen von dieser Modifikation nicht berührt.

Struves Darstellung des Beweises ist dann als vierte Variante eine vorzügliche Ergänzung und quasi ein vorläufiger Schlußpunkt dieser Analyse: Die zunehmende Abstraktheit der Symbolik in den drei von Stenius gelieferten Varianten wird mit ihr noch einmal gesteigert, und es wird zugleich deutlich, daß ein erkennendes Subjekt für das Verständnis des Beweises nicht ohne Anschauung auskommt, die einmal durch die Sprache (anschauliche Bedeutung von Begriffen wie ‚Element', ‚Paar', ‚und' usw.) und zum anderen durch die Zeichen und die Darstellung im Raum geliefert wird. Genau das ist Stenius' Aussage (s. sein Summary).

Daß man formale Beweise prinzipiell von Maschinen durchführen lassen kann (wie Struve zutreffend schreibt), zeigt gerade, wie wenig die Reduktion des Beweisbegriffs auf diese Facette geeignet ist, dem Kulturphänomen mathematischer Erkenntnis näherzukommen.