PETER BENDER

Einige didaktische Probleme bei der (halb-)schriftlichen Subtraktion und Division

3–4

1. Zur Rolle des (halb-) schriftlichen Rechnens im derzeitigen Mathematik-Unterricht

Seit bei uns Taschenrechner flächendeckend verbreitet sind, hat ein zentraler Stoff des Arithmetik-Unterrichts in der Primarstufe und in den unteren Klassen der Sekundarstufe I erheblich an Bedeutung verloren: Die *mechanische*, d. h. *automatisierte* (Manipulation mit Ziffern ohne Reflexion von Bedeutung), *schnelle, sichere* und *universelle* (mit beliebig kompliziert aufgebauten Zahlen, auch Dezimalzahlen) *Beherrschung standardisierter* Verfahren zu den vier Grundrechen-Arten. Manche Pädagogen, insbesondere in Nord-Amerika, waren von den Möglichkeiten elektronischer Rechner dermaßen überwältigt, daß sie den Rechen-Unterricht insgesamt in Frage stellten. Es bedarf allerdings keiner besonders tiefgründiger Überlegungen um zu erkennen, daß auch und gerade im Computer-Zeitalter jeder Mensch umfangreiche arithmetische Fähigkeiten – z. T. anderer Art als früher – benötigt, nicht zuletzt, um überhaupt die elektronischen Werkzeuge nutzen zu können.
Ein zentrales Ziel ist nach wie vor das *Durchschauen* des dekadischen Stellenwert-Systems und das *Vertrautwerden* mit großen Zahlen. Ein wesentlicher Bestandteil dieses Durchschauens und Vertrautseins ist das *Rechnen* mit großen Zahlen. Erst bei solchen Rechnungen erkennt man die Ökonomie und die kultur-historische Leistung unseres dekadischen Aufbaus des Zahlen-Raums. Für dieses Ziel muß das Rechnen nicht unbedingt in standardisierter Schreibweise stattfinden. Wenn in den Lehrplänen dennoch die Erarbeitung von Standard-Formen vorgeschrieben ist (z. B. Nordrhein-Westfalen 1985), so ist dies zum einen in der objektiven Tradition und in den subjektiven Gewohnheiten von Lehrpersonen, Eltern und Gesellschaft insgesamt begründet. Zum anderen handelt es sich um eine Ökonomisierung und, wie bei der Rechtschreibung, um eine Vereinheitlichung, verbunden mit der Hoffnung auf Unterstützung des Rechnens durch ein formales Korsett. Diese Argumente sind nicht ganz von der Hand zu weisen, und sie reichen m. E. im Rahmen einer formalen Bildung durchaus dazu hin, die Behandlung von Standard-Notationen für die Grundrechen-Arten zu rechtfertigen. Selbstverständlich gibt es Formen (besonders in anderen Ländern), die sich von den bei uns üblichen unterscheiden (s. Padberg 1986 & 1992) und eventuell besser geeignet sind. Aber angesichts der geringen praktischen Bedeutung des schriftlichen Rechnens ist es müßig, ihre Eignung empirisch zu überprüfen und ihre Verwendung durchzusetzen.
Viel wichtiger ist die Pflege des sog. *halbschriftlichen* Rechnens, für das das *schriftliche* Rechnen (= Standard-Notation) dann lediglich eine Abrundung darstellt (wie das sinngemäß Wittmann & Müller 1992 fordern). Das Wort „halbschriftlich" ist insofern irreführend, als es gerade für einen besonders umfangreichen Anschrieb steht. Die Vorsilbe „halb" besagt vielmehr, daß das Ergebnis nicht komplett („=" halb) automatisch („=" schriftlich) ermittelt wird bzw. Standard-Notation („=" schriftlich) nur andeutungsweise („=" halb) auftritt. Obwohl alle Mittel-Europäer, die z. Z. erwachsen sind, die schriftlichen Rechen-Verfahren gelernt und ausgiebig benutzt haben und viele sie noch heute ausführen können, sind die wenigsten in der Lage, die schriftliche Subtraktion und die schriftliche Division zu „erklären", etwa in folgendem Sinn:

- den Algorithmus mit Plättchen in der Stellenwert-Tafel oder mit System-Blöcken durchführen und damit „veranschaulichen";
- genau angeben, welche Plättchen- bzw. Blöcke-Manipulation welchem symbolischen Schritt entspricht;

$$
\begin{array}{l}
\underline{634-378 = } \\
634-300 = 334 \\
334-70 = 264 \\
\underline{264-8 = 256} \\
634-378 = 256
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\underline{2646 : 7 = } \\
2646 : 7 = 300 \\
\underline{-2100} \\
546 : 7 = 70 \\
\underline{-490} \\
56 : 7 = 8 \\
\underline{-56} \\
\underline{0 } \\
2646 : 7 = 378
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
2646 : 7 = 378 \\
\underline{-21} \\
54 \\
\underline{-49} \\
56 \\
\underline{-56} \\
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\underline{7 \cdot 378} \\
21 \\
49 \\
\underline{56} \\
2646
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
634 \\
-378 \\
\underline{{\scriptstyle 1\,1}} \\
256
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
634 \\
\underline{-378} \\
256
\end{array}
$$

a b c d e f

Abb. 1: Beispiele halbschriftlichen und schriftlichen Rechnens

- die Standard-Notation plausibel machen;
- und eventuell sogar die benutzten Rechen-Gesetze (Distributiv-Gesetz, Konstanz der Differenz usw.) explizieren und mit ihnen das Verfahren begründen.

(Im folgenden sollen die Wörter „erklären“ und „veranschaulichen“, in Anführungszeichen gesetzt, ungefähr diesen Sinn haben.)

Eine solche „Erklärung“ haben sie nämlich selbst nie richtig gelernt. Sei es, daß sie ihnen im Unterricht nie angeboten wurde; sei es, daß sie ihnen beim Erwerb des Verfahrens zwar angeboten wurde, sie aber mit diesem Erwerb so intensiv beschäftigt waren, daß die „Erklärung“ unterging, zumal sie kognitiv erheblich anspruchsvoller ist als die Durchführung des Algorithmus. Außerdem stand einer „Erklärung“ die (schon in der Grundschule ansatzweise erworbene!) Haltung entgegen, wie sie in folgendem Schüler-Kommentar zum Ausdruck kommt: „Ersparen Sie uns und sich die Erklärungen. Zeigen Sie uns, wie es geht; und wir machen es dann, wie Sie es wünschen.“ Auch eine nachträgliche Reflexion des Verfahrens fand gewöhnlich nicht statt. Diese ist dann nämlich immer noch sehr anspruchsvoll und kostet viel Zeit; „die“ Schüler fühlen sich erst recht „belästigt“; und darüber hinaus besteht die Gefahr, daß sie auf einmal im Algorithmus unsicher werden, und vor allem, daß die Oberflächlichkeit zutagetritt, mit der sie diesen nur beherrschen.
Heutzutage gelten diese Einwände alle immer noch; eine gewichtige Aktivität von früher steht aber für Lehrer und Schüler bis hinauf in die Sekundarstufe II eigentlich nicht mehr als Substitut für das Verstehen mathematischer Begriffe (Sätze, Verfahren, Regeln usw.) zur Verfügung: der Drill von Algorithmen. Diese inhaltliche und legitimatorische Lücke wird im faktischen Unterricht jedoch kaum wahrgenommen. Zwar ist Zeit gewonnen worden durch gänzliche Abschaffung (z. B. schriftliches Wurzel-Ziehen, Umgang mit Rechenstab und Logarithmen-Tafel, geschlossene Darstellung von Integralen raffinierter Terme) oder durch Verringerung des Drills (z. B. schriftliche Rechen-Verfahren, Bruchrechnen, sog. Kurven-Diskussionen).

Aber es sind wiederum umfangreiche Inhalte neu in den Kanon aufgenommen worden (z. B. Stochastik auf allen Stufen, Numerik, Elemente der Informatik u. a.), und äußerliches Lernen von Verfahren und Regeln bestimmt vielerorts bis heute den Mathematik-Unterricht vom 1. bis zum 13. Schuljahr, so daß für die Pflege adäquater Grundvorstellungen und Grundverständnisse (GVV; im Sinne von Bender 1991) nach wie vor keine Muße vorhanden ist. Aus (schul-)politischen Gründen ist wohl auch gar kein anderer Zustand möglich. Gegen die fortwährenden Versuche von „Bildungs“-Politikern, einzelnen Fächern Stunden zu streichen oder gar die Schulzeit um ein ganzes Jahr zu verkürzen, scheint, wenn überhaupt, nur die Betonung der Wichtigkeit des jeweiligen Fachs durch Vollpfropfen mit Stoff zu helfen.

Es wäre aber Muße nötig, um die (halb-) schriftlichen Rechen-Verfahren zu „erklären", wie die folgenden Überlegungen zur Subtraktion und zur Division zeigen.
Die Grund-Rechenarten werden in der Grundschule als Abstraktionen und Symbolisierungen gewisser Handlungen bzw. vorgestellter Handlungen an Mengen konkreter bzw. gezeichneter Objekte ausgebildet und „veranschaulicht". Für Rechenarten erster Stufe (Addition & Subtraktion): Zusammenfügen, Zerlegen, Wegnehmen, Ergänzen, Zählen beim Durchlaufen linear angeordneter Objekte, usw.; für Rechenarten zweiter Stufe (Multiplikation & Division): fortgesetztes Hinzufügen gleichmächtiger Mengen, entsprechend Wegnehmen zum Zwecke des *Auf-* oder *Verteilens*, Zählen in Sprüngen vorwärts und rückwärts, usw. In dieser handlungs-mäßigen Grundlegung mathematischer Operationen treffen sich die Piagetsche und die Brunersche Theorie; und wenn Schüler mit diesen Operationen Probleme haben, lautet die prinzipielle Empfehlung: Beseitige diese durch Rückgang auf die zugrundeliegenden Handlung(svorstellung)en, d. h. durch „Veranschaulichen".

Bei zunehmender Komplexität der Operationen, vor allem bedingt durch die zunehmende Stellen-Anzahl der beteiligten Zahlen, schlägt der Hilfe-Charakter dieser Empfehlung jedoch um in den Charakter einer zusätzlichen Anforderung. Der Vorteil des Umgangs mit Ziffern im Stellenwert-System liegt ja gerade im Verzicht auf Manipulationen mit einzelnen Objekten (Plättchen, Klötzen, Strichen); und je weiter das Arbeiten auf der symbolischen Ebene fortschreitet, desto größer ist der (kognitive) Aufwand, die Verbindung zu den handlungs-mäßigen Wurzeln dauernd aufrecht zu erhalten oder irgendwann einmal wieder herzustellen.

Im folgenden gehe ich um der Einfachheit der Diktion willen von den schriftlichen Endformen der betrachteten Verfahren aus. Ersichtlich ist dies für die Analyse aber nicht wesentlich; man könnte sich durchaus auch auf halbschriftliche Notationen beziehen. – Als Objekte für die (vorgestellten) Manipulationen wähle ich Plättchen, die in die Stellenwert-Tafel einsortiert sind, und siedle diese Aktivitäten damit i. w. auf der ikonischen Repräsentations-Ebene an, allerdings mit starken symbolischen (die Plättchen haben unterschiedliche Bedeutung, je nach dem, in welcher Spalte sie eingeordnet sind) und enaktiven Einflüssen. Den symbolischen Gehalt könnte man noch vermindern, indem man z. B. System-Blöcke (Einer-Klötze, Zehner-Stangen, Hunderter-Platten, Tausender-Blöcke) statt der Stellenwert-Tafel verwendet. In weiten Teilen der folgenden Analysen ist aber die genaue Identifizierung der Repräsentations-Ebene der Objekte irrelevant, da es ja nicht um eine direkte Umsetzung in den Unterricht geht. Z. B. werde ich Bezeichnungen wie „Minuend", „Divisor", „ergänzen" u. ä. auch auf Plättchen-Mengen u. ä. anwenden.
Für eine differenzierterte Betrachtung des Zusammenhangs zwischen Semantik und Syntax, sowie zwischen „Stufen des Verinnerlichungs-Prozesses" in Anlehnung an Piaget und den Repräsentations-Modi im Sinne Bruners verweise ich auf Sprockhoff (1993).

2. Verschiedene Formen der (halb-) schriftlichen Subtraktion

Die folgende Tabelle liefert einen Überblick über die Vielfalt von GVV („Realsituations"-Typen), die Erstkläßlern als inhaltliche Grundlagen für die Subtraktion dienen können. Dabei sind noch nicht einmal die mannigfachen sog. „Aspekte des Zahlbegriffs" (vgl. Müller & Wittmann 1977 & 1984, S. 172 ff) berücksichtigt, sondern es handelt sich i. w. nur um den kardinalen Aspekt. Die Tabelle stellt eine wesentliche Weiter-Entwicklung einer Adaption von *H. Spiegel* in Paderborn einer von Carpenter (1985 und früher) stammenden Systematik dar. (siehe Tabelle auf Seite 10)

Mengen-operation: Resultat	Anfangsmenge wird vergrößert: Endmenge			Anfangsmenge wird verkleinert: Endmenge			Anfangsmenge wird zerlegt: Teilmengen	
Beispiel (jeweils 2 Größen gegeben, eine gesucht)	Marc hat 5 Autos. Er bekommt noch 3 Autos geschenkt. Dann hat er 8 Autos.			Marc hat 8 Autos. Er verschenkt 3 Autos. Dann hat er noch 5 Autos.			Marc hat 8 Autos. Es sind 5 alte und 3 neue Autos.	
Typ der Handlung	Vereinigen, Hinzufügen, Ergänzen usw.			Wegnehmen, Abtrennen, Abziehen usw.			Zerlegen, Vereinigen, Trennen, Ergänzen usw.	
dyn./stat.	dynamisch			dynamisch			statisch	
Operator-Schreibw.?	$5 \xrightarrow{+3} 8$ (x für eine der 3 Zahlen setzen)			$8 \xrightarrow{-3} 5$ (x für eine der 3 Zahlen setzen)			nein	
passender Zahlensatz	$x+3=8$	$5+x=8$	$5+3=x$	$x-3=5$	$8-x=5$	$8-3=x$	$x=5+3$	$8=x+3$ $8=5+x$
auch naheliegend	$8-3=x$	$8-x=5$		$5+3=x$	$5+x=8$		$5+3=x$	$\underbrace{8-3=x \quad 8-5=x}_{\text{gleichwertig}}$
mathemat. Operation	Subtr.	Subtr.	Addit.	Addit.	Subtr.	Subtr.	Addit.	Subtraktion

Tab. 1: Real-Situationen und GVV für additive Verknüpfungen

Anmerkungen zur Tabelle: Es ist immer *eine* Menge vorhanden, die vergrößert, verkleinert oder zerlegt wird. Zu jedem der angegebenen 8 Fälle (s. letzte Zeile der Tabelle) gibt es außerdem die Möglichkeit, daß eine *zweite Menge* existiert, mit der die erste verglichen wird (wodurch sich die Zahl der in der Tabelle erfaßten Typen auf 16 verdoppelt). Beispiel: „Lara hat 8 Autos. Marc hat 5 Autos. Lara hat 3 Autos mehr als Marc." Da kann man wieder zwei der drei Größen vorgeben, nach der dritten fragen und die Aufgabe „dynamisch" stellen bzw. interpretieren: „Lara hat 8 Autos, Marc hat 5 Autos. Wie viele müssen ihm die Eltern noch schenken, damit er so viele hat wie Lara?" Oder „statisch": „Lara hat 8 Autos, Marc hat 5 Autos. Wie viele Autos hat sie mehr als er?". Hier findet ein *Vergleich* von Mengen *(ohne Veränderung* der Mengen) statt. „Vergleich" wäre also ein zusätzlicher Handlungs-Typ.

In der traditionellen Rechen-Didaktik wurden vielerlei Verfahren zur *schriftlichen* Subtraktion entwickelt (s. Gerster 1982, S. 38 ff, bzw. Padberg, S. 167 ff). Es fehlt aber eine vollständige Diskussion aller sinnvollen Möglichkeiten. Dies kann man schon daraus ersehen, daß in Tabelle 2 ein Eintrag offen ist.

	Borgen	Erweitern	Auffüllen
Abziehen	+	+	–
Ergänzen	+	+	+

Tab. 2: Geläufige Formen der schriftlichen Subtraktion (nach Gerster, S. 41, bzw. Padberg, S. 176)

Allen Verfahren gemeinsam ist natürlich die Nutzung des Stellenwert-Systems, d. h. ein stellenweises Vorgehen mit anschließender Zusammenfassung der Ergebnisse aller Stellen wieder zu einer Gesamt-Zahl. Die Reihenfolge, in der die Stellen abgearbeitet werden, kann dann nicht ins Belieben des Rechners gestellt werden, wenn dieser das Verfahren mechanisch (gedankenlos) verwenden soll. Aus inhaltlichen Gründen liegt es zwar nahe, zuerst die gewichtigen (hohen) Stellen zu bearbeiten (vgl. Abb. 1 a). Aber inhaltliche Gründe spielen beim schriftlichen Rechnen gerade *keine* Rolle, und die Ökonomie gebietet dort, von den nieder- zu den höherwertigen Stellen fortzuschreiten, damit ein etwaiger Zehner-Übertrag in die höhere Stelle dort immer gleich mit berücksichtigt werden kann. Heutzutage hat das gedankenlose Rechnen in der Schule jedoch kaum noch Bedeutung, im Gegenteil: die Schüler *sollen* sich beim Rechnen etwas denken; und dann kann man ihnen diese Reihenfolge getrost überlassen. Es sind gerade solche Freiheiten, und nicht nur geringere formelle Ansprüche, die das halbschriftliche Rechnen didaktisch wertvoll machen.

Für eine Charakterisierung der (halb-) schriftlichen Formen der Subtraktion ist die Reihenfolge, in der die Stellen abgearbeitet werden, irrelevant. Deshalb beachte ich diese im folgenden nicht weiter, sondern differenziere, ganz in der Tradition der klassischen Rechen-Didaktik, die Arten lediglich danach, wie eine einzelne Stelle und ein etwaiger Übertrag in die nächst-höhere Stelle behandelt werden. Insgesamt kann man bei *drei* Kriterien jeweils einige Alternativen unterscheiden. Um eine Art auszuwählen, durchläuft man also quasi einen dreistufigen Entscheidungs-Baum. Das nachher diskutierte dritte Kriterium ist aber vom ersten nicht unabhängig; und daher ergibt sich die Gesamtzahl *neun* aller Möglichkeiten nicht durch Multiplikationen der Anzahlen bei jedem Kriterium.

Selbstverständlich haben auch die auf diese Weise erhaltenen Verfahren, wie die geläufigen, ihre Vor- und Nachteile und sind aus didaktischer Sicht mehr oder weniger gut geeignet. Es geht aber nicht um das einzelne Verfahren, sondern um die Systematik, und zwar natürlich nicht für Schüler, sondern für Studenten, Lehrer und Didaktiker.

Erstes Kriterium (Verändern oder Vergleich von Mengen)

A Man verändert eine der beiden Mengen tatsächlich um eine bestimmte Anzahl von Plättchen, entweder, bis beide Mengen denselben Umfang haben, oder, bis aus der größeren Menge so viele Plättchen entfernt sind, wie die kleinere Menge *enthält.* Dann ist der Umfang der Veränderung bzw. der Umfang der Restmenge das Ergebnis. („dynamisch" in Tab. 1; *Verändern-Modus)*

B Beide Mengen bleiben erhalten, und bei einer stellt man fest, um wie viele Plättchen man sie verändern *müßte,* damit sie dann beide denselben Umfang hätten, bzw. wie viele Plättchen übrig blieben, wenn man von der größeren Menge so viele entfernen würde, wie die kleinere enthält. („statisch" in Tab. 1; *Vergleich-Modus)*

Die Alternativen A und B unterscheiden sich nicht darin, ob man die Aktivitäten an realen, gezeichneten oder vorgestellten Plättchen ausführt, sondern darin, daß bei A eine der beiden Mengen verändert wird (Stichwort: „dynamisch") und danach die ursprüngliche Aufgabe nicht mehr an den Mächtigkeiten der beiden vorhandenen Mengen abgelesen werden kann, während bei B beide Mengen erhalten bleiben (Stichwort: „statisch"). Die Unterteilung in A und B kommt einem nebensächlich vor; sie ist es aber nicht. Die Unterschiede werden deutlicher, wenn man über weitere Kriterien entschieden hat.

Zweites Kriterium (Form der Subtraktion)

I Der Subtrahend wird um so viele Plättchen vermehrt, bis er denselben Umfang wie der Minuend hat. *(additives Ergänzen;* von Gerster, S. 41, und Padberg, S. 167 ff, „Ergänzen" genannt; $5 + x = 8$)

II Der Minuend wird um so viele Plättchen vermindert, bis er denselben Umfang wie der Subtrahend hat. *(subtraktives „Ergänzen";* kommt bei Gerster und Padberg nicht vor; $8 - x = 5$)

III Der Minuend wird um so viele Plättchen vermindert, wie der Subtrahend enthält. (Subtrahieren als *Abziehen;* auch von Gerster, S. 41, und Padberg, S. 167 ff, so genannt; $8 - 5 = x$)

Jede dieser drei Formen der Subtraktion kann im Verändern- (A) oder im Vergleich-Modus (B) verwendet werden. Bei I und II liefert der Umfang der Veränderung, bei III der Umfang der Restmenge das Ergebnis. Bei B. I, B. II und A. III entspringt dieses Ergebnis direkt der Handlung; bei A. I, A. II und B. III dagegen muß man entweder Teilmengen auszeichnen oder ein Protokoll mit Zahlen (oder mit weiteren Plättchen-Mengen) führen, um das Ergebnis zu erhalten (siehe Tab. 3).

	A Verändern-Modus	B Vergleich-Modus
I additiv Ergänzen	mittels Protokoll	direkt
II subtraktiv „Ergänzen"	mittels Protokoll	direkt
III Abziehen	direkt	mittels Protokoll

Drittes Kriterium (Zehner-Übertrag)

Ein besonderes Problem tritt bekanntlich auf, wenn in einer Spalte die Subtrahenden-Menge größer ist als die Minuenden-Menge. Im *Verändern-Modus* (A) ist bei allen drei Formen der Subtraktion (I–III) nach demselben Prinzip zu verfahren: Verändern der Plättchen-Menge bis zur Zehner-Schwelle; Tausch-Transaktion mit einem Plättchen der nächsthöheren Stelle durchführen; Veränderung fortsetzen, bis der angezielte Umfang erreicht ist. Im einzelnen bedeutet dies, erläutert an der Aufgabe 634–378:

A. I Additives Ergänzen im Verändern-Modus („Auffüllen")

		H	Z	E
– Der Subtrahend ist zu verändern:		3	7	8;
– vermehre die 8 Einer um 2 Einer:	+ 2 E:	3	7	10;
– tausche die 10 Einer in 1 Zehner:	Tauschen	3	8	0;
– füge noch 4 Einer hinzu:	+ 4 E:	3	8	4;
– Protokoll: insgesamt vermehrt um:		*6 Einer;*		
– vermehre die 8 Zehner um 2 Zehner:	+ 2 Z:	3	10	4;
– tausche die 10 Zehner in 1 Hunderter:	Tauschen	4	0	4;
– füge noch 3 Zehner hinzu:	+ 3 Z	4	3	4;
– Protokoll: insgesamt vermehrt um:		*5 Zehner;*		
– vermehre die 4 Hunderter um 2 Hunderter:	+ 2 H:	6	3	4;
– Protokoll: insgesamt vermehrt um:		*2 Hunderter;*		
– Protokoll: alles in allem vermehrt um:		*256.*		

A. II Subtraktives „Ergänzen" im Verändern-Modus („Entleeren bis ....")

		H	Z	E
– Der Minuend ist zu verändern:		6	3	4;
– vermindere die 4 Einer um 4 Einer:	– 4 E:	6	3	0;
– tausche 1 Zehner in 10 Einer:	Tauschen	6	2	10;
– nimm noch 2 Einer weg:	– 2 E:	6	2	8;
– Protokoll: insgesamt vermindert um:		*6 Einer;*		
– vermindere die 2 Zehner um 2 Zehner:	– 2 Z;	6	0	8;
– tausche 1 Hunderter in 10 Zehner:	Tauschen	5	10	8;
– nimm noch 3 Zehner weg:	– 3 Z:	5	7	8;
– Protokoll: insgesamt vermindert um:		*5 Zehner;*		
– vermindere die 5 Hunderter um 2 Hunderter:	– 2 H:	3	7	8;
– Protokoll: insgesamt vermindert um:		*2 Hunderter;*		
– Protokoll: alles in allem vermindert um:		*256.*		

A. III Abziehen im Verändern-Modus („Entleeren um...")

		H	Z	E
– Der Minuend ist zu verändern:		*6*	*3*	*4;*
– Vermindere die 4 Einer um 4 Einer:	– 4 E:	6	3	0;
– tausche 1 Zehner in 10 Einer:	Tauschen	6	2	10;
– nimm noch 4 Einer weg; damit insgesamt 8:	– 4 E:	*6*	*2*	*6;*
– vermindere die 2 Zehner um 2 Zehner:	– 2 Z:	6	0	6;
– wandle 1 Hunderter in 10 Zehner um:	Tauschen	5	10	6;
– nimm noch 5 Zehner weg; damit insgesamt 7:	– 5 Z:	*5*	*5*	*6;*
– vermindere die 5 Hunderter um 3 Hunderter:	– 3 H:	*2*	*5*	*6.*

Die Protokollierung beim Ergänzen (I und II) ist bewußt anders gestaltet als der Minuend und der Subtrahend in ihren jeweiligen Zuständen. Auch wenn man wirklich mit Plättchen arbeitet, ist es angemessen, das Protokoll nicht mit Plättchen, sondern mit Ziffern zu führen.

Im *Vergleich-Modus* (B) dagegen gibt es zwei Varianten des Zehner-Übertrags, die in der Literatur ausführlich diskutiert sind: Gemeinsam ist ihnen, daß der Minuend *vor* der Ausführung der Subtraktion um zehn Plättchen vermehrt wird. Sie unterscheiden sich folgendermaßen:

a Beim Minuenden wird an der nächst-höheren Stelle die Menge um ein Plättchen vermindert. (gegensinniges Verändern innerhalb des Minuenden; *Tauschen;* „Entbündeln" bei Gerster, S. 41, „Borgen" bei Padberg, S. 170 ff)

b Beim Subtrahenden wird an der nächst-höheren Stelle die Menge um ein Plättchen vermehrt. (gleichsinniges Verändern beim Minuenden und beim Subtrahenden; *Erweitern;* s. a. Gerster, S. 41, und Padberg, S. 172 ff)

Im Vergleich-Modus (B) können alle drei Formen der Subtraktion (I–III: $8 + x = 14$; $14 - x = 8$; $14 - 8 = x$) in beiden Varianten durchgeführt werden. Im Verändern-Modus existiert diese Differenzierung der drei Subtraktions-Formen nicht. Man kann aber das Vorgehen dort

- beim Auffüllen (I) als verstecktes Erweitern (Variante b) auffassen; denn zur Bestimmung der Ziel-Menge im Subtrahenden hat man vorher fiktiv den Minuenden um zehn Plättchen vermehrt, und am Schluß ist der Subtrahend in der nächst-höheren Stelle um ein Plättchen vergrößert;
- bei beiden Formen des Entleerens (II und III) als Tauschen (Variante a) auffassen; denn bei beiden Formen tauscht man im Minuend ein Plättchen aus der nächst-höheren Stelle in zehn Plättchen der sich gerade in Arbeit befindenden Stelle.

	A	B. a	B. b
I	(= b) Auffüllen	Ergänzen/Borgen	Ergänzen/Erweitern
II	(= a)		
III	(= a)	Abziehen/Borgen	Abziehen/Erweitern

Tab. 4: Einordnung der geläufigen Verfahren in das Gesamt-System

In der traditionellen Rechen-Didaktik hat man das subtraktive „Ergänzen" (Form II) offenbar vernachlässigt. Für das halbschriftliche Rechnen ist es aber eine vollwertige Form, die sich bei bestimmten Aufgaben-Typen sogar als erste anbietet, nämlich wenn im Zeit-Ablauf eine Größe kleiner wird, die Abnahme aber im Vergleich zum Bestand gering ist, z. B.: „morgens betrug der Vorrat 634 Einheiten, abends 578 Einheiten". Weiterhin fehlt bei den traditionel-

len Verfahren das Abziehen im Verändern-Modus (A. III) (in Gersters und in Padbergs Schema jeweils der noch offene Eintrag). Als schriftliches Verfahren hätte es wie die anderen seine Stärken und Schwächen; und ich schätze sein Fehlen letztlich als historischen Zufall ein. Für das halbschriftliche Rechnen ist es sogar ausgesprochen naheliegend, wie die Muster-Rechnung in Abbildung 1a zeigt.
Ein grundsätzlicher Unterschied zwischen der hier entwickelten Systematik und Gersters bzw. Padbergs Schema ist die Einordnung des Verändern-Modus (A). Für Gerster und Padberg ist das Verändern eine dritte Variante für die Behandlung des Zehner-Übergangs neben dem Tauschen (a) und dem Erweitern (b), während ich meine, daß es eine vorgängige Kategorie ist, die bereits eine Rolle spielt, wenn es überhaupt noch nicht um den Zehner-Übergang geht. Die Entscheidung über den Modus (Verändern oder Vergleich) liefert sozusagen den physischen Rahmen für das weitere Verfahren.
Durch KMK-Beschlüsse (zuletzt Kultusministerkonferenz 1976) ist an deutschen Schulen Variante I.b vorgeschrieben, und diese kann im Verändern- (A) oder Vergleich-Modus (B) durchgeführt werden (Padberg, S. 176 ff). Nach Gerster (S. 41) war Verfahren A. I bis ca. 1970 in Westdeutschland weit verbreitet und wurde dann allmählich durch B. I. b ersetzt. In der Tat: Die von der KMK vorgeschriebene Sprech- und Schreibweise ($8 + \underline{6} = 14$; $8 + \underline{5} = 13$; $4 + \underline{2} = 6$; die zu betonenden Zahlen sind unterstrichen; und s. Abb. 1 b, 1 c) scheint den Algorithmus im Verändern-Modus A. I noch etwas besser wiederzugeben als den im Vergleich-Modus B. I. b. Jedoch ist der Verändern-Modus in der Sprache der einfachen algebraischen Strukturen, wie sie in der Zeit der „Neuen Mathematik" die stoff-didaktische Diskussion beherrschte, nicht leicht zu fassen; bzw. man kommt dann dazu, ihn im Vergleich-Modus zu beschreiben. Möglicherweise ist die Verdrängung des („dynamischen") Verändern-Modus durch den („statischen") Vergleich-Modus mit eine Folge der damaligen Mathematisierung des Rechen-Unterrichts; denn der Charakter jener Reform war, trotz einer vordergründigen Betonung „dynamischen" Denkens, im Kern dezidiert „statisch".
Der Vorzug von Variante I. b (ob in Modus A oder B) besteht darin, daß bei ihr ausschließlich *addiert* wird: Es wird vom Subtrahenden zum Minuenden additiv ergänzt, und ein etwaiger Übertrag wird im Subtrahenden addiert. Für eine mechanische, möglichst gedankenlose Durchführung des Verfahrens ist es wichtig, daß immer nur ein Operations-Typ auftritt, und es ist weiterhin wichtig, daß es der elementarste ist, also die Addition. Ob Variante I.b, besonders im Vergleich-Modus B, wirklich für die Praxis am günstigsten ist bzw. war (für welche Praxis? und was heißt überhaupt „günstig"? s. Padberg, S. 177 ff), sei dahingestellt.
Bei der heutigen veränderten Zielsetzung des Umgangs mit großen Zahlen können die Argumente, dir für I.b sprechen, nicht mehr den Ausschlag geben. Mit der stärkeren Betonung des halbschriftlichen Rechnens soll den Schülern ja mehr Selbständigkeit beim Rechenweg zugestanden und diese Selbständigkeit angeregt werden. Je nach Favorisierung durch die Lehrperson, Vorlieben der Schüler und Typ der Situation und der beteiligten Zahlen stellen sich dann auch andere Verfahren ein als gerade die fünf klassischen, und bestimmt nicht I. b. Naheliegend ist, wie gesagt, z. B. das Verfahren A. III. a (s. Abb. 1a).

3. Division

Die Modellierung einer Real-Situation mit einer Rechen-Operation zweiter Stufe (Multiplikation, Division) setzt voraus, daß es in irgendeiner Form um gleichmächtige Mengen geht. Unser Arithmetik-Unterricht macht anscheinend zu wenig bewußt, daß diese Gleichmächtigkeit eine Bedingung ist, deren Vorliegen immer zuerst geprüft werden muß, ehe es ans Multiplizieren oder Dividieren geht. Bei einem Test mit 1120 Viertkläßlern lautete eine (von zehn) Aufgaben: „Eine Klasse hat 29 Kinder. Es sind drei Mädchen mehr, als es Jungen sind. Wie viele Jungen, wie viele Mädchen sind in der Klasse?" Etwa ⅔ der Schüler setzten direkt eine Division an (meistens : 2, manchmal : 3), und die Mehrzahl von diesen kamen nicht zum Ergebnis (s. Bender 1980, S. 193).

Der Unterschied zwischen Multiplikator und Multiplikand sowie zwischen Aufteilen und Verteilen

Jedenfalls besteht bei Gleichmächtigkeit ein multiplikativer Zusammenhang zwischen dem (einheitlichen) Umfang der (disjunkten) Mengen, der Anzahl dieser Mengen und dem Umfang von deren Vereinigungs-Menge (alles als endlich vorausgesetzt). Dieser Zusammenhang ergibt sich als fortgesetzte Addition desselben Summanden. Befinden sich z. B. in 3 Netzen je 4 Apfelsinen, dann ist deren Gesamt-Zahl $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$ (Multiplikator vorne geschrieben). Ungeachtet vieler Nachteile paßt hier die Operator-Schreibweise besonders gut: $4 \xrightarrow{\cdot 3} 12$.
Gegen diese inhaltliche Unterscheidung von Umfang und Anzahl der Teilmengen (Haufen, Portionen usw.) und die Erklärung der Multiplikation als fortgesetzte Addition wurden Beispiele des folgenden Typs angeführt: „Auf wie viele Arten kann man 2 Pullover und 3 Hosen kombinieren?" – Selbstverständlich sind jedoch auch hier disjunkte gleichmächtige Mengen zu vereinigen und deren Umfang fortgesetzt zu addieren. Es steht lediglich noch nicht von vorneherein fest, welches die gleichmächtigen Mengen sind, sondern dies hat der Problem-Löser zu bestimmen: Sind $P_1, \ldots P_n$ die Pullover, $H_1, \ldots, H_m$ die Hosen und $P_1 H_1, \ldots, P_n H_m$ die Kombinationen, dann kann man zum Zwecke eines systematischen Vorgehens n Mengen $\{P_k H_i \mid i = 1, \ldots, m\}$, $k = 1, \ldots, n$, jede vom Umfang m (für jeden Pullover die Kombinationen mit allen Hosen), oder m Mengen $\{P_k H_i \mid k = 1, \ldots, n\}$, $i = 1, \ldots, m$, jede vom Umfang n (für jede Hose die Kombinationen mit allen Pullovern) betrachten. D. h. bei jedem Pullover tragen die Hosen einmal den Summanden m bei, insgesamt ist dieser also n-mal aufzuaddieren; bzw. bei jeder Hose tragen die Pullover einmal den Summanden n bei, insgesamt ist dieser also m-mal aufzuaddieren.

Letztlich handelt es sich hier um nichts anderes als eine Einkleidung der Aufgabe „Mit Plättchen ist ein rechteckiges Feld mit n Zeilen und m Spalten zu legen"; und solche Beispiele sind ausgesprochen wichtig für die GVV von der Multiplikation als fortgesetzte Addition. Natürlich können sie wegen der Abstraktheit ihrer Objekte im Curriculum der Multiplikation erst spät eingesetzt werden. In Verruf kamen sie dadurch, daß man, im Zuge einer einseitigen Auffassung von Mathematik als Lehre von den Strukturen, einen epistemologischen Gegensatz konstruierte zwischen der Gründung der Multiplikation auf das Kreuzprodukt zweier Mengen und auf die disjunkte Vereinigung gleichmächtiger Mengen und darüber hinaus den Zugang über das Kreuzprodukt zum primären erklärte.

Bei der hier vertretenen Auffassung geht die *Umkehr-Operation,* etwa 24 : 3, auf die Einteilung einer Menge in gleichmächtige Teilmengen zurück: Entweder ist deren Umfang gegeben und die Anzahl gesucht (*Aufteilen;* 24 Bonbons werden in Tüten zu je 3 Stück verpackt); oder ihre Anzahl ist gegeben und der Umfang gesucht (*Verteilen;* 24 Bonbons werden gleichmäßig in 3 Tüten verpackt).

Beide Fragestellungen lassen sich einheitlich behandeln: Mit den (hier: 24) Elementen der Ausgangs-Menge ist ein rechteckiges Feld aufzubauen. Die Anzahl der Spalten ist vorgegeben (hier: 3). Die Zeilen werden sukzessive geformt. Erst am Schluß steht fest, wie viele Zeilen voll werden (und ob ein Rest übrig bleibt). Die Anzahl der vollen Zeilen (zusammen mit der Größe des Rests) ist das numerische Ergebnis. Der Unterschied zwischen dem *Auf-* und *Verteilen* zeigt sich darin und nur darin, daß *beim Aufteilen die vollen Zeilen* und beim *Verteilen die vollen Spalten* die Ergebnis-Mengen darstellen.

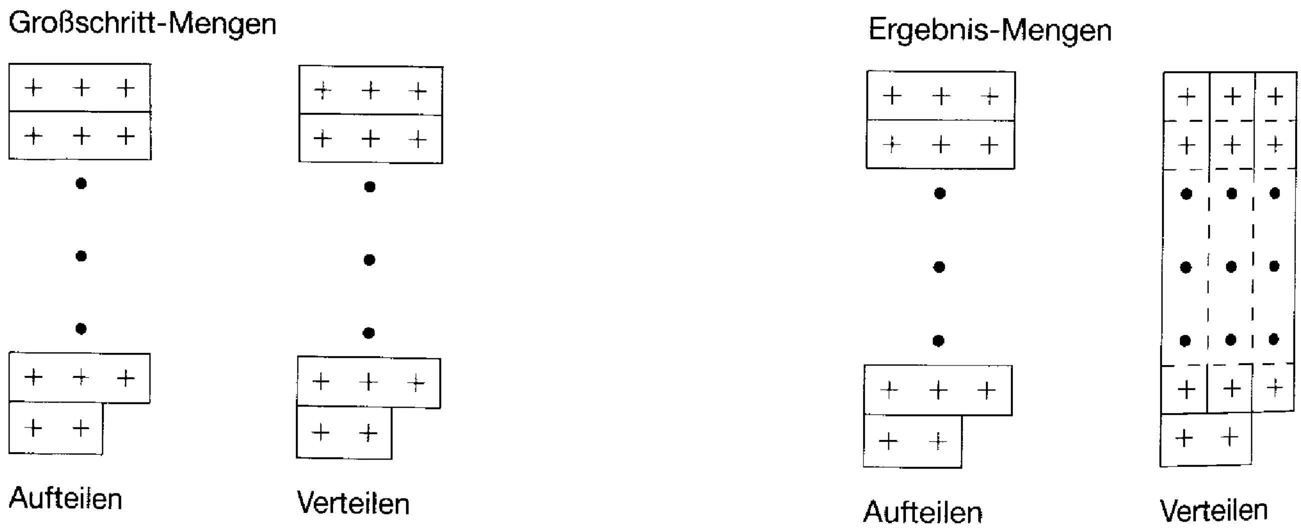

Abb. 2: Die Aufgabe 26:3 als Auf- und als Verteilen

Bei stärkerer inhaltlicher Interpretation der Objekte und der Handlungen prägt man die Mengen-Struktur der Situation nicht erst nachträglich auf, sondern hat sie von vorneherein im Sinn; und dann ist der Unterschied zwischen *Auf-* und *Verteilen* natürlich viel intensiver. Wenn man einmal das Bilden einer vollen Zeile als Großschritt (beim Abbau der Ausgangs-Menge und Aufbau des Felds) bezeichnet, dann hat man beim *Aufteilen* mit jedem Großschritt eine Ergebnis-Menge hergestellt, während beim *Verteilen* sämtliche Ergebnis-Mengen erst mit dem letzten Großschritt vollendet sind. Die numerischen Terme entwickeln sich dabei folgendermaßen: Beim *Aufteilen* 3; 3 + 3; 3 + 3 +3; . . . ; beim *Verteilen* 1 + 1 + 1; 2 + 2 + 2; 3 + 3 + 3; . . . ; und lauten schließlich 8 · 3 bzw. 3 · 8.

Der inhaltliche und kognitive Primat des Aufteilens

Jedoch auch ein dezidiertes Verteilen enthält einen Wesenszug des *Aufteilens*. Beim *Verteilen* besteht ein Großschritt darin, die zu bildenden Ergebnis-Mengen um je ein Element zu vermehren. Es liegt nahe, die in einem Großschritt zur *Verteilung* kommenden Objekte ihrerseits in einer temporären „Großschritt-Menge" zusammengefaßt zu sehen. Man versteht also die Ausgangs-Menge als in (temporäre) Großschritt-Mengen *aufgeteilt* und hat auf diese Weise den Verteil-Prozeß mit einem *Aufteil*-Prozeß versetzt.
Diese Sichtweise spielt besonders beim (halb-) schriftlichen Dividieren eine Rolle (z. B. 2646 : 7; s. Abb. 1 d). Jede Subtraktion des Divisors bzw. von Vielfachen von ihm steht für einen bzw. mehrere Großschritte und damit für eine *Aufteil*-Handlung. Im Beispiel werden jeweils *zunächst* (hier zuerst 300, dann 70 und schließlich 8) Großschritt-Mengen (hier vom Umfang 7) erzeugt, und zwar unabhängig davon, ob man die Division *global* als *Aufteilen* oder als *Verteilen* verstehen will. Erst wenn es um dieses Verständnis geht, muß man differenzieren: Beim *Aufteilen* sind die Großschritt-Mengen bereits die Ergebnis-Mengen, und das numerische Ergebnis ist ihre Anzahl; beim *Verteilen* sind die Großschritt-Mengen temporär, ihre Elemente müssen noch auf die (hier: 7) eigentlichen Ergebnis-Mengen *verteilt* werden, und das numerische Ergebnis ist deren Umfang.
Diese Vorgängigkeit der *Aufteil*-Struktur auch bei ausgesprochenen *Verteil*-Aufgaben gibt Anlaß, das Dividieren i. w. mit dem *Aufteilen* zu identifizieren und die Differenzierung zwischen *Auf-* und *Verteilen* als sekundär anzusehen (z. B. nimmt *E. C. Wittmann* in Dortmund diesen Standpunkt ein).
Den meisten von mir informell befragten Erwachsenen, vor allem hunderten von Grundschullehrer-Studenten, ist das *Verteilen* als GVV vom Dividieren nicht geläufig. Vermutlich haben sie es in ihrer eigenen Schulzeit nicht oder nur am Rande kennengelernt.

Selbst nach entsprechender Instruktion kommt ihnen das *Aufteilen* viel „natürlicher" vor. Nach wie vor ist es ihnen ja aufgrund ihrer Lern-Geschichte vertrauter; außerdem ist es, wie oben ausgeführt, objektiv dominant. Es liegt hier so etwas wie die „Verfügbarkeits-Heuristik" vor (eine von Tversky & Kahnemann 1973 im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeiten identifizierte, meist unbewußt verfolgte kognitive Strategie): Die Ergebnis-Mengen beim *Aufteilen* sind dem Individuum als Konkretisierung des Divisors und als fertige Produkte bei jedem Großschritt direkt verfügbar. Da man am Anfang des Divisions-Curriculums (und gemäß dem Lehrplan in der Grundschule überhaupt) mit kleinen Divisoren arbeitet, sind diese Mengen schön handlich und übersichtlich. – Beim *Verteilen* haben die Ergebnis-Mengen diese Vorzüge alle nicht.

Trotzdem sind, jedenfalls im Zuge einer „Erklärung" der (halb-) schriftlichen Division, *Verteil*-GVV m. E. weniger anfällig für methodische Fehler und damit einhergehende Fehlvorstellungen und -verständnisse bei den Schülern, wie ich weiter unten darlegen möchte.

Der entscheidende Gedanke beim (halb-) schriftlichen Dividieren liegt darin, daß man nicht eine große Ausgangs-Menge infolge einer fehlenden Strukturierung Großschritt für Großschritt langwierig abarbeiten muß, sondern daß die Ausgangs-Menge auf der Basis eines Stellenwert-Systems strukturiert ist und man diese Struktur nutzt. Zwar besteht die Aufgabe i. d. R. gerade darin, die vorhandenen dekadischen Bündel aufzulösen und die Ausgangs-Menge in Bündel vom Umfang des Divisors *aufzuteilen* oder, bei gegebener Anzahl, auf Bündel noch unbekannten Umfangs zu *verteilen.* (Daß die Anzahl bzw. der Umfang dieser Bündel natürlich wieder dekadisch dargestellt wird, ist hier nebensächlich.) Aber dies wird ökonomisch geleistet, indem immer möglichst viele Großschritte zu noch größeren (Rechen-) Schritten zusammengefaßt werden.

Selbstverständlich müßte man auch bei einer unstrukturierten Ausgangs-Menge nicht jeden Großschritt separat ausführen. Man hätte dann jedoch nur vage Anhaltspunkte, wie viele Großschritte man jeweils zusammenfassen soll; und letztlich käme man zu einem aufwendigen Probieren mit zahlreichen Fehl-Versuchen. Nicht so bei einer b-adisch gegebenen Ausgangs-Menge: Unter der Voraussetzung, daß man einige Erfahrung mit dem Einmaleins hat, verwendet man bei der standardisierten, schriftlichen Division Bündelstufe für Bündelstufe maximale und bei weniger formellem, halbschriftlichem Vorgehen wenigstens ungefähr maximale (Rechen-) Schritte. Ganz wesentlich wird hierbei das *Distributiv-Gesetz* genutzt.

Die Untersuchungen, die *C. Selter* in Dortmund im Rahmen seiner Dissertation mit Zweitkläßlern angestellt hat, deuten darauf hin, daß Schüler, bei denen die Division noch nicht „offiziell" im Unterricht behandelt wurde, divisions-haltige Aufgaben durch fortgesetztes Subtrahieren oder Addieren des Divisors lösen. Für sie besteht also der Umkehr-Charakter der Division gegenüber der Multiplikation noch auf einer ganz elementaren Ebene. Nach meinem Eindruck geht dieses Verständnis als fortgesetzte Subtraktion später weitgehend verloren, nämlich wenn die Division mit Hilfe des Einmaleins vollzogen wird. Man hat dann Mühe, es für die schriftliche Division wieder zu aktivieren. In der Tat ist vielen Erwachsenen nicht bewußt, daß der Algorithmus, den sie da ausführen, nichts anderes als eine fortgesetzte und partiell zusammengefaßte Subtraktion des Divisors vom Dividenden ist. Die völlige Entsprechung zur schriftlichen Multiplikation ist eigentlich offensichtlich (siehe Abb. 1 e, 1 f), wird aber anscheinend üblicherweise nicht deutlich genug herausgearbeitet. Das Wesen der Division als fortgesetzte Subtraktion wird besonders sinnfällig beim halbschriftlichen Rechnen (s. Abb. 1 d). Es ist allerdings keine dritte Sichtweise neben dem *Aufteilen* und dem *Verteilen*, wie das verschiedentlich vertreten wird, sondern stellt eine andere Kategorie dar. *Auf-* und *Verteilen* bedeuten nämlich beide: Vermindern der Ausgangs-Menge; also: Subtrahieren.

Der Vorzug von Verteil-GVV beim (halb-)schriftlichen Dividieren

Wenn man eine (halb-) schriftlich zu lösende Aufgabe wie 2646 : 7 in einen realen Kontext einbettet, etwa das Verpacken von 2646 Bonbons in Tüten zu je 7 Stück, sind *Aufteil*-GVV zunächst durchaus hilfreich, weil die – gesuchte – Anzahl der Ergebnis-Mengen ebenfalls für eine ganz konkrete Menge steht, nämlich die der zu füllenden Tüten. (In anderen Sach-Zusammenhängen handelt es sich häufig um ähnlich konkrete Objekte.)
Diese Konkretheit wirft aber doch ein Plausibilitäts-Problem auf: Es ist wohl naheliegend, daß die 2646 Bonbons gemäß der gegebenen dekadischen Struktur abgearbeitet werden, daß man also zunächst 2600 Bonbons betrachtet und sie in 7er-Portionen *aufteilt.* Es ist aber nicht einzusehen, warum mit dem *Aufteilen* nach 300 Tüten Schluß gemacht wird und 500 Bonbons übrig gelassen werden, obwohl diese noch bequem in weitere 71 Portionen *aufgeteilt* werden könnten. Zwar kann man sich den Vorrat an Tüten auch dekadisch geordnet denken; aber diese Ordnung der *leeren* Tüten spielt beim *Aufteilen* ersichtlich keine Rolle, sondern erst die dekadische Ordnung der *vollen* Tüten ist wieder wichtig. Hinzu kommt, daß man ja beim Dividenden auch immer mehrere Stellen zusammenfaßt (so viele wie oder eine mehr als der Divisor). Warum sollte man dies nicht auch beim Quotienten tun? Zum *Aufteilen* gehört also eher ein Vorgehen wie in Abb. 3a. Dort ist das Prinzip der Beachtung der dekadischen Struktur des Dividenden allerdings auf die Spitze getrieben. Wenn man 2000:7 auf einen Schlag ausrechnen kann, dann kann man auch direkt 2646 : 7 rechnen.

a

2646 : 7 =		
2000 : 7 =	285	Rest 5
651 : 7 =		
600 : 7 =	85	Rest 5
56 : 7 =		
50 : 7 =	7	Rest 1
7 : 7 =	1	
2646 : 7 =	378	

b

2646 : 7 =			
2646 : 700 = 3	(Hunderter-Tüten-Bündel)	=	300 (Tüten)
	(Rest 546 Bonbons)		
546 : 70 = 7	(Zehner-Tüten-Bündel)	=	70 (Tüten)
	(Rest 56 Bonbons)		
56 : 7 = 8	(Tüten)	=	8 (Tüten)
2646 : 7 =			378 (Tüten)

Abb. 3: Ungewöhnliche, aber konsequente Formen des (halb-)schriftlichen Aufteilens

Offenbar ist die Vorgehensweise in Abb. 3a unpraktisch, und das (halb-) schriftliche Dividieren mit konkreten *Aufteil*-GVV läßt sich nur retten, wenn man vorschreibt, daß bei jedem Rechen-Schritt doch immer nur volle dekadische Anzahlen (hier: 300, 70, 8) an Tüten (bzw. den diesen entsprechenden Objekten) gefüllt werden dürfen. Will man diese Vorschrift in irgendeiner Weise plastisch und plausibel machen, so braucht man Tüten-Bündel, die 10, 100, 1000 usw. „normale" Tüten umfassen und mit 70, 700, 7000 usw. Bonbons zu füllen sind. Die zugehörige Rechnung verläuft dann wie in Abb. 3b. Dort darf man sich von der unkonventionellen Schreibweise nicht abschrecken lassen, sondern man muß diese so

verstehen : 2646 Bonbons : 700 Bonbons/Hunderter-Tüten-Bündel = 3 + 546 : 700 Hunderter-Tüten-Bündel, usw. Dahinter steht folgender völlig konsistenter Algorithmus:
Will man (halb-) schriftlich mit *Aufteil*-GVV durch einen Divisor d dividieren, so dividiert man nacheinander den Dividenden bzw. den jeweiligen Rest durch $10^n \cdot d$, $10^{n-1} \cdot d, \ldots,$ $10 \cdot d$ und d (wo n so gewählt ist, daß das erste Ergebnis zwischen 1 und 9 liegt). Man erhält $n+1$ einstellige Teil-Ergebnisse q_k, $k = n, n-1, \ldots, 1, 0$, die angeben, wie oft $10^k \cdot d$ in den Dividenden bzw. den jeweiligen Rest paßt. Man will aber wissen, wie oft d jeweils paßt, und muß q_k noch mit 10^k multiplizieren (gegensinniges multiplikatives Verändern von Divisor und Quotient).
Diesen Algorithmus kann man vollständig in der Standard-Notation schreiben (Abb. 1e): Die 10^k-Faktoren beim Divisor werden nicht hingeschrieben, sondern nur gedacht oder gesprochen; und beim Quotienten ergeben sie sich automatisch dadurch, daß die einstelligen Ergebnisse q_k nebeneinander geschrieben stellengerecht die Ziffern des Gesamt-Ergebnisses liefern. – Allerdings kann diese Sichtweise von der (halb-) schriftlichen Division nicht für die Schule empfohlen werden, da sie zu raffiniert ist.
Es erscheint durchaus angemessen, wenn im Laufe des Curriculums die Einkleidungen für Divisions-Aufgaben weniger konkret als im obigen Beispiel vorgenommen werden, da sie dann enger mit der symbolischen Darstellung verbunden sind und man die Schüler ja dahin bringen will, bei der (halb-) schriftlichen Division möglichst nah an dieser zu arbeiten. Hier kommen vor allem System-Blöcke, Plättchen-Mengen in der Stellenwert-Tafel oder, kaum noch von der symbolischen Form unterschieden, die Einordnung der Ziffern in die Stellenwert-Tafel wie in Abb. 4 in Frage, die ich ab jetzt auch mit der Sprechweise „Veranschaulichungen" bezeichnen möchte. Diese haben auch, und vor allem, eine methodische Funktion. Sie sollen u. a. das stellengerechte Schreiben des Quotienten unterstützen, insbesondere beim Auftreten von Nullen.

T	H	Z	E		H	Z	E
2	6	4	6	: 7 =			

Abb. 4: Einordnung von Dividend und Ergebnis in die Stellenwert-Tafel

Die Einordnung in die Stellenwert-Tafel und andere „Veranschaulichungen" bieten sich besonders beim Dividenden an, weil dieser gemäß seiner dekadischen Struktur abgebaut, und beim Quotienten, weil dieser entsprechend aufgebaut werden soll. Dadurch wird jedoch suggeriert, daß die Objekte des Quotienten vom selben Typ seien wie die des Dividenden. Aber auch unabhängig von einer solchen „Veranschaulichung" fällt es grundsätzlich schwer, das Ergebnis nicht als „stabile" Menge von Objekten, sondern nur als „flüchtigen" Operator zu sehen, jedenfalls wenn eine Aufgabe kontext-frei gegeben ist und man sich den Kontext selbst zurechtlegen soll. Das bedeutet, daß *Verteil*-GVV angebracht sind. Eine naheliegende Sach-Situation ist das *Verteilen* von Geld, das noch den Vorzug einer geläufigen physischen dekadischen Strukturierung mit Scheinen hat.
Wenn man jedoch, sei es als Lehrperson, sei es als Schüler, in *Aufteil*-GVV abgleitet oder bewußt umsteigt, gerät man in epistemologische Konflikte, jedenfalls wenn man die Fiktion von der Gleichartigkeit der Objekte im Dividenden und im Quotienten aufrechterhält. Die Lösung von dieser Fiktion setzt die Erkenntnis ihrer Mangelhaftigkeit (im Zusammenhang mit dem *Aufteilen*) voraus und erfordert eine Souveränität, die bei Grundschülern nicht vorhanden ist. Von dieser Vermischung von *Aufteil*- mit *Verteil*-GVV rührt nach meiner Einschätzung wesentlich das Unvermögen vieler Menschen, die (halb-)schriftliche Division zu „erklären".

Der beschriebene Effekt ist besonders ausgeprägt, wenn der Divisor klein ist, vor allem wenn er einstellig ist; also bei solchen Aufgaben, wie sie anfangs, und laut Lehrplan (z. B. Nordrhein-Westfalen 1985) heute in der Grundschule überhaupt, üblich sind. Dann besteht nämlich gar kein Bedarf, diesen wie den Dividenden und den Quotienten zu „veranschaulichen", wodurch die Gleichartigkeit dieser beiden noch unterstrichen wird. Der Effekt tritt aber auch bei einem großen Divisor auf (etwa bei 2646 : 378). Ob man diesen „veranschaulicht" oder nicht: für den Quotienten besteht die Notwendigkeit der „Veranschaulichung" nach wie vor; denn man weiß vorher nicht, wie groß er wird; für seinen Aufbau wird dadurch die Struktur vorgegeben; und er ist es, der im Zentrum des Interesses steht.
Zusammenfassend läßt sich feststellen: Für (halb-) schriftlich zu lösende Divisions-Aufgaben mit großem Dividenden sind i. a. *Verteil*-GVV geeignet. Sie sind besser auf die dekadisch strukturierte Abarbeitung des Dividenden abgestimmt, und sie tragen dem Umstand Rechnung, daß beim Ergebnis eine Interpretation als Menge wie der Dividend näher liegt denn als Operator. Mit ähnlichen Argumenten sind auch schon die alten Rechen-Didaktiker sinngemäß zu dieser Feststellung gekommen (z. B. Oehl 1962, S. 182).
Auch der Umgang mit einem etwaigen Divisions-Rest erscheint bei *Verteil*-GVV konsistenter, z. B. bei 2650 : 7 :
Beim *Verteilen* bleiben 4 Objekte übrig, die noch auf die 7 Portionen zu *verteilen* wären. Würde man diese 4 Objekte in passende kleinere Einheiten zerlegen, so könnte man die Portionen gleichmäßig füllen. Diese Interpretation wird durch die Schreibweise 2650 : 7 = 378 + 4 : 7 genau wiedergegeben, die ich für die optimale halte, weil sie ohne weiteres algebraisch korrekt ist und die ursprüngliche Aufgaben-Struktur direkt wiederspiegelt.
Bei *Aufteil*-GVV dagegen muß man das Auftreten eines Rests so verstehen, daß die letzte Portion nicht so groß wird wie die anderen und daher nicht mehr voll mitgezählt wird. Der Rest quantifiziert dieses Defizit: Zu welchem Teil nur gelingt die *Aufteil*-Handlung im letzten Großschritt? Es erfordert jedoch einiges an mathematischer Souveränität, in *Bruchteilen von Handlungen* zu denken. Allerdings kann das *Aufteilen* mit Rest gerade ein Anlaß sein, dieses Denken anzuregen. Ein erhebliches mentales Hindernis liegt hier aber noch darin, daß die Mengen, in die *aufgeteilt* wird, nicht alle gleichmächtig sind und – anders als beim *Verteilen* – nicht zu sehen ist, wie sie wenigstens behelfsmäßig gleichmächtig gemacht werden könnten. Da geht der fundamentale Charakter des Dividierens verloren, und die Vorgehens- und Schreibweise (2650 – 4) : 7 = 378 stellt diesen zwar wieder her, ist aber einschränkend, indem sie die Division auf „aufgehende" Fälle reduziert, und umständlich, weil man die erforderliche Korrektur am Dividenden nachträglich vornehmen muß.
Natürlich paßt diese Vorgehens- und Schreibweise auch zum *Verteilen,* und in ihr ist die Unterscheidung bezüglich des Rests zwischen *Auf-* und *Verteilen* in ähnlicher Weise aufgehoben wie bei der multiplikativen Schreibweise 2650 = 7 · 378 + 4.
In der westdeutschen Rechen-Didaktik war bis in die sechziger Jahre die Auffassung verbreitet, daß die Division eigentlich *Verteilen* sei und daß *Aufteilen* (= Ausmessen des Dividenden mit dem Divisor) eine wesentlich andere Operation sei. Für diese führte man ein eigenes Operations-Zeichen ein und benutzte zu methodischen Zwecken eigenwillige Schreibweisen (s. z. B. Karaschewski 1970, S. 93). Wie *Auf-* und *Verteilen* unter Beachtung ihrer Unterschiede einheitlich als Dividieren behandelt werden können, wird besonders in Größenbereichen deutlich:
2646 m : 7 m = 378 steht für *Aufteilen* bzw. Ausmessen: Wenn eine Strecke der Länge 2646 m in Strecken der Länge 7 m *aufgeteilt* wird, so erhält man 378 Stück. 2646 m : 7 = 378 m steht für *Verteilen:* Wenn eine Strecke der Länge 2646 m in 7 gleichlange Stücke zerlegt wird (ihre Größe wird gleichmäßig auf 7 Objekte *verteilt*), werden diese 378 m lang. Mit Dimensions-Betrachtungen erhält man 2646 m : 7 m/Stück = 378 Stück und 2646 m : 7 Stück = 378 m/Stück, und ersetzt man noch „m" durch „Objekte" und „Stück" durch

„Ergebnis-Menge(n)" o. ä., dann sieht man die vollständige Übereinstimmung der Begrifflichkeit. Zu beachten ist aber, daß in geometrischen bzw. physikalischen Kontexten das *Verteilen* von Einheits-Größen auf Portionen (wie bei einem Kartenspiel) aus praktischen Gründen meistens nicht angebracht ist.
Andererseits kann man, wie oben dargelegt, das Dividieren einheitlich als *Aufteilen* und die geläufigen *Aufteil*- und *Verteil*-GVV als zwei Varianten verstehen, die dann und nur dann relevant werden, wenn man zu entscheiden hat, wie nach Abtrennung einer Menge im Umfang des Divisors von der Dividenden-Menge jeweils zu verfahren ist: Liegt dann bereits eine Ergebnis-Menge vor (*Aufteilen*), oder muß man die Objekte noch auf die Ergebnis-Mengen *verteilen*?
Es ist klar, daß diese ganze Analyse nicht für das Klassenzimmer gedacht ist. Selbstverständlich müssen den Schülern Kontexte angeboten werden, in denen *auf*-, und welche, in denen *verteilt* wird. Die Namen brauchen sie jedoch nicht auseinanderzuhalten; man selbst erwirbt ja auch erst nach längerer Beschäftigung eine gewisse Sicherheit darin. Aber die beiden Formen kennen und konkrete Beispiele dafür benennen können sollten sie schon.
Wenn dann (halb-) schriftlich gerechnet wird, halte ich ein Verständnis der Division auf recht abstrakter Ebene als fortgesetzte, partiell zusammengefaßte Subtraktion gleicher Subtrahenden für ausreichend. Eine „Erklärung" könnte dann eine Zusatz-Aufgabe für leistungs-starke Schüler sein.
Wenn man, was ja wohl nicht abwegig wäre, die (halb-) schriftliche Division doch „veranschaulichen" möchte und dabei die naheliegenden *Aufteil*-GVV verwendet, dann muß man darauf achten, daß das Ergebnis keine Menge wie der Dividend ist, sondern Operator-Charakter hat, indem es angibt, wie oft der Divisor zu subtrahieren ist. Während der Divisor als eine Menge wie der Dividend aufzufassen ist, sollte man den Quotienten quasi als Protokoll der ganzen *Aufteil*-Aktion in bewußter Absetzung abstrakter, nämlich als Zahl, darstellen.
Beim halbschriftlichen Rechnen kann man sich und den Schülern zwar informellere Schreibweisen erlauben und könnte z. B. das Wörtchen „mal" verwenden bis hin zu einer Form wie bei der Rechnung in Abb. 5.

2646 : 7 =		
7 in 2100	=	300mal
7 in 540	=	70mal
7 in 56	=	8mal
2646 : 7 = 378		

Abb. 5: Ungeeignete Schreibweise für das halbschriftliche Dividieren

Dies ist ein alter methodischer Vorschlag, der zwar später z. B. von Oehl (1962, S. 181 ff) für das schriftliche Rechnen abgelehnt, als informelle Schreibweise aber sehr wohl noch verwendet wurde (S. 60, 77). – Es springt der Bruch zwischen den Ein- und Ausgangs-Zeilen einerseits und den Rechen-Zeilen andererseits ins Auge, und ein solcher Bruch ist nicht empfehlenswert. Das halbschriftliche Rechnen hat ja einen „offizielleren" Charakter als eine Neben-Rechnung, und die verwendeten Notationen sollten leicht in formalere Mathematik transportierbar sein.
Aufgrund der ganzen Analyse favorisiere ich *Verteil*-GVV, wenn man die (halb-) schriftliche Division „veranschaulichen" will. Daß i. a. *Aufteil*-GVV näher liegen, ist kein Gegen-Argument, sondern eine didaktische Schwierigkeit, die durch gezielte Behandlung und Gewöhnung gemeistert werden müßte. Die Alternative besteht vielmehr darin, die (halb-) schriftliche Division so spät zu behandeln, daß die Schüler dann schon umfangreiche arithmetische Erfahrungen haben, so daß „Veranschaulichungen" nicht mehr so wesentlich sind und auf sie weitgehend verzichtet werden kann.

4. Abschließende Bemerkungen zur Pflege der mathematik-didaktischen Tradition und zur modernen Grundschullehrer-Ausbildung

In ihrem eigenen Stil hat die alte deutsche (später: westdeutsche) Rechen-Didaktik einige der o. a. Überlegungen schon ausgesprochen. Es ist bedauerlich, daß ihre Tradition mit der Reform des Mathematik-Unterrichts unter dem Schlagwort der „Neuen Mathematik" abgebrochen und danach kaum noch zur Kenntnis genommen, geschweige denn wieder aufgenommen wurde. Natürlich hatte sie ihre Schwächen, wie (u. a.)

- Distanz zu mathematischer Begriffsbildung,
- Hang zur direkten Umsetzung jeglicher didaktischer Erkenntnis in Handlungs-Anweisungen für die Lehrperson,
- übertriebene Methodisierung des gesamten Rechen-Unterrichts,
- Überbetonung des Rechnens und des schriftlichen Rechnens überhaupt,
- eigenwillige Schreibweisen,
- apodiktisches Auftreten einiger ihrer Vertreter.

Trotzdem sind ihre Analysen im Kern auch heute noch wertvoll und gehören, unter Berücksichtigung der Veränderungen in Gesellschaft, Pädagogik und Didaktik seitdem, wenigstens exemplarisch in die Ausbildung von Grundschul-Lehrpersonen, auch wenn Mathematik nicht deren Schwerpunkt ist.

Es ist ein Unding, daß heute noch Jahr für Jahr in den meisten Bundesländern die angehenden Grundschul-Lehrpersonen viel zu wenig Mathematik (-Didaktik), und dies mit zu wenig Tiefgang studieren. Während das Fachlehrer-Prinzip in den Grundschulen selbst schon lange als schädlich erkannt und, wenn es denn jemals irgendwo ernsthaft eingeführt wurde, wieder abgeschafft ist, sind die meisten Studienordnungen an deutschen Hochschulen noch an diesem Prinzip ausgerichtet. In der Praxis läuft das darauf hinaus, daß Mathematik als Studien-Fach abgewählt werden kann und von der großen Mehrheit der Studenten auch abgewählt wird, obwohl die meisten sinnvollerweise Klassen-Lehrperson sein wollen und müssen und Mathematik unterrichten werden. Die Entscheidung gegen das Studien-Fach „Mathematik" beruht durchweg nicht darauf, daß man sich dort für besonders souverän hält und weitere Studien nach dem Abitur nicht für nötig erachtet, sondern auf Unwissenheit, Abneigung, Angst. Aus dieser Konstellation wiederum erwächst die Meinung, daß der Mathematik-Unterricht in der Grundschule sich i. w. in den vier Grund-Rechenarten und in sog. Text-Aufgaben erschöpft. Mit dieser Meinung kann man das Studien-Verhalten bequem rationalisieren: mit Abitur wird man ja wohl noch Rechnen lehren können. – Wie schwierig allerdings auch dieses ist, zeigen m. E. alle drei Abschnitte dieser Arbeit.

Die Aufspaltung unserer Kultur in einen geistes- und einen naturwissenschaftlichen Bereich zieht sich bis in die Grundschule hinein: Zum ersteren gehören die Grundschul-Pädagogik insgesamt und die Didaktiken fast aller Fächer, gern (in der Grundschule noch) einschließlich des naturwissenschaftlichen und technischen Sach-Unterrichts, während die Mathematik zum zweiten Bereich gehört. Im Rahmen ihres Ersten Staatsexamens hat *S. Peis* in Paderborn zwanzig Grundschul-Lehrpersonen zu ihrer Einschätzung der Möglichkeiten einer „Denkerziehung im Mathematikunterricht der Grundschule" befragt und dabei auch Aussagen zu deren eigenen Unterricht erbeten. Die sieben Kollegen (ca. ⅓), die geantwortet haben, stehen „offenem" Unterricht positiv gegenüber und realisieren ihn selbst (sie nennen Wochen-Plan, Tages-Plan, Projekte) und favorisieren Ziele wie Selbständigkeit, Argumentations-Fähigkeit, Denk-Fähigkeit. Wenn es aber um Mathematik geht, orientieren sie sich sehr stark am Schulbuch, und das Erlernen der vier Grund-Rechenarten ist mit Abstand das wichtigste Ziel (gegenüber „Rechenstrategien", „Zusammenhänge erkennen", „Problemlösen", „Raumvorstellung", „Mengen strukturieren"). Bemerkenswert ist auch die starke Unterschätzung des Vorkommens von „Nicht-Standard-Aufgaben" („Knobel-Aufgaben") in den selbst verwendeten Schulbüchern. – Natürlich hat diese Befragung keine

statistische Aussagekraft; sie bringt aber vielfältige Erfahrungen, Beobachtungen und Berichte auf den Punkt.
Die Kluft zwischen dem nicht-mathematischen und dem mathematischen Bereich in der Grundschul-Pädagogik und eine deutliche Distanz zu letzterem ist – z. T. ausgeprägter als bei Lehrpersonen – auch unter Studenten und ihren Ausbildern an den Hochschulen zu finden. „Die" Mathematik (einschließlich ihrer Didaktik!) erscheint als imperialistisches Fach, das den Studenten hemmungslos Zeit und eine fremdartige geistige Anstrengung abfordert. Ihre Vertreter geben sich oft skeptisch gegenüber „schönen" pädagogischen Ideen, und wenn sie dann noch die armen Studenten mit Analysis oder Verbands-Theorie traktieren, geht auch der wohlgesonnenste Kollege (hier mit Recht) auf Abstand.
Wir müssen die Berührungs-Ängste überwinden, die viele mit der Grundschule befaßte Menschen gegenüber der Mathematik haben. Als Voraussetzung scheint mir die Institutionalisierung unabdingbar: Wie in Nordrhein-Westfalen sollte auch in den anderen Bundesländern jede angehende Grundschul-Lehrperson Mathematik mindestens als halbes Fach (ca. 20 Semesterwochen-Stunden) studieren. Das Angebot müßte dann aber auf diese Menschen mit ihren Vorbehalten zurechtgeschnitten sein: neben einem schwergewichtigen didaktischen und praktischen Anteil eigens konzipierte fach-inhaltliche Veranstaltungen, in denen die Studenten in einer Weise Mathematik treiben, die als Vorbild für die Aktivitäten ihrer späteren Schüler dienen können. Dagegen haben die fach-didaktischen Studien weniger Vorbild-Charakter für den Unterricht; denn Mathematik-Didaktik ist ja aus gutem Grund kein Schulfach. Analysen wie oben in den Abschnitten 1 bis 3, wenn man sie denn in einer Veranstaltung „Didaktik der Arithmetik" behandelt, dienen als Hintergrund-Wissen, auf dessen Basis die Lehrperson den Unterricht nach modernen pädagogischen und didaktischen Prinzipien gestalten kann, und nicht etwa als Unterrichts-Vorlagen.

Literatur

Bender, Peter (1980): Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahres. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 8, 150–155, 191–198 u. 226–233
Bender, Peter (1991): Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: Helmut Postel, Arnold Kirsch u. Werner Blum (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel, 48–60
Gerster, Hans-Dieter (1982): Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie. Freiburg: Herder
Karaschewski, Horst (1970): Wesen und Weg des ganzheitlichen Rechenunterrichts. Teil 2. Stuttgart: Klett
Kultusministerkonferenz (1976): Empfehlungen und Richtlinien zum Mathematikunterricht in der Grundschule vom 3. 12. 1976. In: Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. Band 1. Nr. 136. Neuwied: Luchterhand
Müller, Gerhard u. Erich C. Wittmann (1977 u. 1984): Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig u. Wiesbaden: Vieweg 1977, 3. Auflage 1984
Nordrhein-Westfalen, Der Kultusminister des Landes (1985): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Köln: Greven
Oehl, Wilhelm (1962): Der Rechenunterricht in der Grundschule. Hannover: Schroedel
Padberg, Friedhelm (1986 u. 1992): Didaktik der Arithmetik. Mannheim u. a.: B. I. Wissenschaftsverlag 1986, 2. Auflage 1992
Sprockhoff, Wolfgang (1993): Konkrete Operationen als Grundlage arithmetischer Beziehungen in der Primarstufe. In: Beiträge zur Didaktik der Mathematik. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik und Informatik. Heft 2. Essen: Universität, 1–15
Wittmann, Erich C. u. Gerhard N. Müller (1992): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2. Stuttgart: Klett

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Peter Bender, Universität, Postfach 1621, 33095 Paderborn