Injektive Tensorprodukte und Slice-Produkte gewichteter Räume stetiger Funktionen

Von *Klaus-Dieter Bierstedt* in Kaiserslautern

Dieser Artikel bringt eine Anwendung der Ergebnisse der beiden Arbeiten [1] und [2] des Verfassers auf *skalare* Funktionen, wobei man allgemeine Aussagen über die Approximierbarkeit stetiger oder holomorpher Funktionen in zwei Variablen durch endliche Summen von Produkten von Funktionen in je einer Veränderlichen erhält. Es werden z. T. neben den Resultaten über vektorwertige stetige Funktionen auch Methoden verwandt, die sich bei der Betrachtung von Räumen vektorwertiger Funktionen als nützlich erwiesen haben. Deswegen wird angenommen, daß der Leser mit den Artikeln [1] und (insbesondere) [2] vertraut ist, auf die wir auch für alle vorkommenden Begriffe und Bezeichnungen verweisen.

Am Anfang der hier entwickelten Theorie standen im wesentlichen zwei bekannte Theoreme: Der *Darstellungssatz von W. H. Summers* [16] für das injektive Tensorprodukt $CU_0(X_1) \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X_2)$ zweier gewichteter Räume $CU_0(X_1)$ und $CV_0(X_2)$, der als eine Fortführung des von L. Nachbin [11] bewiesenen gewichteten Dieudonnéschen Satzes über die Dichtheit des Tensorproduktes angesehen werden kann, und der auf A. Grothendieck zurückgehende *Slice-Produkt-Satz* bei L. Eifler [7] über Räume stetiger Funktionen auf kompakten Mengen (und mit der sup-Norm), der den Satz von J. Dieudonné [18], daß $C(K) \otimes C(K')$ für kompakte K und K' dicht in $C(K \times K')$ liegt, in einer anderen Richtung verallgemeinert und die Grothendiecksche Approximationseigenschaft *voraussetzt*. Es gelingt nun in dieser Arbeit, mit den Methoden von [1] und [2] *einen Satz* **(3. 3)** *zu beweisen, der beide angegebenen Theoreme enthält und sich auf viele weitere Spezialfälle*, wie etwa auf gewichtete Räume holomorpher Funktionen, *anwenden läßt*.

In den ersten beiden Paragraphen werden zunächst Tensorprodukte von Räumen des Typs $CV_0(X)$ bzw. $CV(X)$ behandelt; in diesen Fällen ist die Approximationseigenschaft der behandelten Räume bekannt ([1], 5. 5 und [2], 1. 1) und muß nicht, wie im dritten Teil, gesondert unter die Voraussetzungen aufgenommen werden.

Als eine Art Einleitung ist in § 1 ein einfacherer Beweis eines Teils des Summersschen Darstellungssatzes gegeben, der zudem den Vorteil hat, eine Reihe von Voraussetzungen für dieses Theorem zu eliminieren oder abzuschwächen **(1. 2)**. Der Satz liefert dann auch im einfachsten Spezialfall das bestmögliche Ergebnis **(1. 3)**. Eine Betrachtung der Räume vom Typ $CV(X)$ scheint stets schwieriger zu sein und wird hier in § 2 zum ersten Male im vorliegenden allgemeinen Rahmen vorgenommen. Wir greifen dabei auf die Ergebnisse von [2] zurück und stellen die Verbindung her, indem wir zeigen, daß unter sehr allgemeinen Voraussetzungen ein Isomorphismus zwischen einem gewichteten Raum stetiger Funktionen mit Werten in einem anderen gewichteten Raum und einem entsprechenden Raum von Funktionen in zwei Variablen existiert **(2. 3)**. Mit einem Resultat aus [2] folgt dann ein *Darstellungssatz für das Tensorprodukt* $CU(X_1)\check{\otimes}_\varepsilon CV(X_2)$ **(2. 4)**. Hier benötigen wir noch etwas stärkere Voraussetzungen als in § 1, die aber in den meisten Fällen erfüllt sind; insbesondere gelingt es für den Raum der stetigen beschränkten Funktionen mit der sup-Norm leicht, aus 2. 4 die eine Richtung des Satzes von Glicksberg und Tamano zu folgern **(2. 6)**. In § 3 werden der bereits erwähnte allgemeine Slice-Produkt-Satz **(3. 3)** und anschließend ein Korollar über *gewichtete Räume holomorpher Funktionen* **(3. 5)** bewiesen; zum Schluß geben wir noch ein interessantes Beispiel in dieser Richtung **(3. 7)**.

Ein Teil dieser Arbeit beruht auf der Dissertation des Verfassers an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz unter Leitung von Herrn Prof. Dr. B. Gramsch.

1. Ein allgemeiner Darstellungssatz für $CU_0(X_1)\otimes_\varepsilon CV_0(X_2)$

Im folgenden seien $U>0$ und $V>0$ Nachbin-Familien auf den vollständig regulären Räumen X_1 bzw. X_2. Bezeichnet $u\otimes v$ für $u\in U$ und $v\in V$ die Funktion $(x_1,x_2)\to u(x_1)v(x_2)$ auf dem topologischen Produkt $X_1\times X_2$ und

$$W=U\otimes V=\{u\otimes v;\,u\in U,\,v\in V\},$$

so stellt W eine Nachbin-Familie auf $X_1\times X_2$ dar mit $W>0$.

Der im folgenden bewiesene Darstellungssatz für das injektive (ε-)Tensorprodukt $CU_0(X_1)\check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X_2)$ der gewichteten Räume $CU_0(X_1)$ bzw. $CV_0(X_2)$ stetiger Funktionen auf X_1 bzw. X_2 ist eine Verschärfung von W. H. Summers ([16], Theorem 5. 1). Obwohl das Ergebnis auch aus den Resultaten von [1] über vektorwertige Funktionen hergeleitet werden kann, ziehen wir es vor, der *Beweismethode bei Summers* (vgl. [15], 4) zu folgen — diese Methode verwendet den gewichteten Dieudonné-Satz von L. Nachbin [11] — und dabei die Teile von Lemma 4. 2 in [15], die eine Charakterisierung der Extremalpunkte von gleichstetigen Mengen im Dual von $CU_0(X_1)$ bzw. $CV_0(X_2)$ benutzen, durch ein einfacheres Argument zu ersetzen.

1. Lemma. *Bei der kanonischen Einbettung T, definiert durch*

$$T:\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes g_i\to\left[(x_1,x_2)\to\sum_{i=1}^{n}f_i(x_1)g_i(x_2)\right]$$

$$(n\in N,\ f_i\in CU_0(X_1),\ g_i\in CV_0(X_2),\ i=1,\dots,n,\ x_1\in X_1,\ x_2\in X_2),$$

ist

$$CU_0(X_1)\otimes_\varepsilon CV_0(X_2)$$

topologisch isomorph einem dichten linearen Unterraum von $CW_0(X_1\times X_2)$.

Beweis. In [11], 23, Proposition 1 wurde bewiesen, daß T eine lineare Abbildung von $CU_0(X_1)\otimes CV_0(X_2)$ in $CW_0(X_1\times X_2)$ angibt, deren Bild nach dem *gewichteten Dieudonné-Satz von Nachbin* ([11], 23, Theorem 1) dicht in $CW_0(X_1\times X_2)$ liegt. Offenbar ist T auch eineindeutig. Wir identifizieren das Tensorprodukt mit dem algebraisch isomorphen Unterraum von $CW_0(X_1\times X_2)$.

Es bleibt zu zeigen, daß die von $CW_0(X_1\times X_2)$ auf $CU_0(X_1)\otimes CV_0(X_2)$ induzierte Topologie mit der injektiven Tensorprodukt-Topologie zusammenfällt. Diese sog. ε-Topologie ist nach Definition die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf

Mengen der Form $S_u^\circ \times T_v^\circ$ ($^\circ$ = Polare), wobei

$$S_u = \{f \in CU_0(X_1);\ bu(f) = \sup_{x_1 \in X_1} u(x_1)\,|\,f(x_1)\,| \leqq 1\},$$

$$T_v = \{g \in CV_0(X_2);\ bv(g) = \sup_{x_2 \in X_2} v(x_2)\,|\,g(x_2)\,| \leqq 1\}, \quad u \in U \text{ und } v \in V.$$

Jede Halbnorm $p_{u,v}$ ($u \in U$, $v \in V$) in $CU_0(X_1) \otimes_\varepsilon CV_0(X_2)$ hat also die Gestalt

$$p_{u,v}(h) = \sup\{|\langle \mu \otimes \nu, h\rangle|;\ (\mu,\nu) \in S_u^\circ \times T_v^\circ\}$$
$$= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n \mu(f_i)\nu(g_i)\right|;\ \mu \in S_u^\circ,\ \nu \in T_v^\circ\right\}$$

für $h = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i \in CU_0(X_1) \otimes CV_0(X_2)$, und man sieht, daß hier das Supremum statt über $S_u^\circ \times T_v^\circ$ zunächst über Produkte von schwach dichten Mengen in S_u° bzw. T_v° genommen werden darf. Dann kann man aber dieses Supremum auch durch das über $E_u \times F_v$ ersetzen, wenn nur die absolutkonvexe Hülle ΓE_u bzw. ΓF_v von E_u bzw. F_v

$$\sigma(CU_0'(X_1), CU_0(X_1))\text{- bzw. } \sigma(CV_0'(X_2), CV_0(X_2))\text{-dicht}$$

in S_u° bzw. T_v° liegt. Nach dem *Bipolarensatz* folgt (s. [1], 4. 2), daß

$$E_u = \{u(x_1)\,\delta_{x_1};\ x_1 \in X_1 \text{ mit } u(x_1) \neq 0\},$$
$$F_v = \{v(x_2)\,\delta_{x_2};\ x_2 \in X_2 \text{ mit } v(x_2) \neq 0\}$$

die geforderten Eigenschaften besitzen, also für $h \in CU_0(X_1) \otimes CV_0(X_2)$

$$p_{u,v}(h) = \sup\{u(x_1)\,v(x_2)\,|\,h(x_1,x_2)\,|;\ (x_1,x_2) \in X_1 \times X_2\} = bw(h)$$

mit $w = u \otimes v \in W$, w. z. b. w.

2. Theorem. *Sind* $U > 0$ *bzw.* $V > 0$ *Nachbin-Familien auf* X_1 *bzw.* X_2 *und ist* $W = U \otimes V$, *so gilt*

$$CW_0(X_1 \times X_2) = CU_0(X_1)\,\check{\otimes}_\varepsilon\,CV_0(X_2)$$

genau dann, wenn $CW_0(X_1 \times X_2)$ *vollständig ist.*

3. Beispiel. *Aus* 2 *folgt insbesondere für* τ = *Topologie der kompakten Konvergenz:*

$$(C(X_1 \times X_2), \tau) = (C(X_1), \tau)\,\check{\otimes}_\varepsilon\,(C(X_2), \tau)$$

dann und nur dann, wenn $X_1 \times X_2$ k_R*-Raum ist.*

Denn bekanntlich (Warner [17], Theorem 1) ist für vollständig reguläres X der Raum $(C(X), \tau)$ genau dann vollständig, wenn X k_R*-Raum*, d. h. wenn eine skalare Funktion auf X, deren Restriktion auf jede kompakte Teilmenge von X stetig ist, immer schon zu $C(X)$ gehört (jeder lokalkompakte oder metrisierbare Raum ist k_R-Raum). Beispiel 3 wurde zuerst bei H. Buchwalter ([5], (2. 1)) direkt bewiesen. In [5], (2. 2) ist gezeigt, daß für k_R-Räume X_1 und X_2 das *Produkt* $X_1 \times X_2$ in jedem der beiden folgenden Fälle k_R*-Raum* ist:

(1) X_1 *oder* X_2 lokalkompakt,

(2) X_1 *und* X_2 hemikompakt

(*hemikompakt* heißt: Es existiert eine abzählbare Basis kompakter Mengen).

4. Korollar. *Bezeichnet $Z(X)$ für vollständig reguläres X die Nachbin-Familie aller positiven Konstanten auf X und ist $W(X) = \{\lambda\chi_K;\ \lambda > 0,\ K$ kompakt$\}$ (χ_K = charakteristische Funktion von K), dann ist*

$$CW_0(X_1 \times X_2) = CU_0(X_1) \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X_2)$$

richtig für $Z(X_1 \times X_2) \leqq W$ oder für $W(X_1 \times X_2) \leqq W$ und $X_1 \times X_2$ k_R-Raum (vgl. etwa [1], 1. 6).

Theorem 5. 1 von Summers [16] ist gerade Korollar 4 unter den stärkeren Voraussetzungen X_1, X_2 lokalkompakt und $U \leqq C^+(X_1)$, $V \leqq C^+(X_2)$. Bei Summers [15] sind viele Beispiele angegeben. Wir erwähnen noch ein weiteres: Es ist nicht schwer zu sehen, daß bei lokalkompakten und im Unendlichen abzählbaren Räumen X_1 und X_2 für eine Funktion $g \in C^+(X_1 \times X_2)$ Funktionen $u \in C^+(X_1)$ und $v \in C^+(X_2)$ existieren mit $g \leqq u \otimes v$. Daher gilt $C^+(X_1) \otimes C^+(X_2) \approx C^+(X_1 \times X_2)$, und aus [1], 2. 8 folgt:

5. Beispiel. *Sind X_1 und X_2 lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar und ist i die Topologie des strikten induktiven Limes, dann erhält man:*

$$(C_c(X_1 \times X_2), i) = (C_c(X_1), i) \check{\otimes}_\varepsilon (C_c(X_2), i).$$

Bezeichnet für vollständige lokalkonvexe Räume E und F zunächst E'_c das Dual von E mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von E und ist außerdem $E \hat{\otimes}_\pi F$ das vervollständigte *projektive* Tensorprodukt von E und F, so beweist H. Buchwalter ([5], (2. 7)), daß für (F)-Räume E und F, von denen wenigstens einer die Grothendiecksche Approximationseigenschaft besitzt,

$$(E \check{\otimes}_\varepsilon F)'_c = E'_c \hat{\otimes}_\pi F'_c$$

gilt. Damit ergibt sich als eine weitere Folgerung aus Theorem 2 (und [1], 5. 5. (3)):

6. Korollar. *Sind $CU_0(X_1)$ und $CV_0(X_2)$ metrisierbar und ist z. B.* (1) *$Z(X_1) \leqq U$, $Z(X_2) \leqq V$ oder* (2) *$W(X_1) \leqq U$, $W(X_2) \leqq V$ und $X_1 \times X_2$ k_R-Raum, dann gilt*

$$(CW_0(X_1 \times X_2))'_c = (CU_0(X_1))'_c \hat{\otimes}_\pi (CV_0(X_2))'_c.$$

Später bewiesene Darstellungssätze für das injektive Tensorprodukt erlauben ähnliche Folgerungen wie 6, die wir dann aber nicht mehr gesondert notieren.

2. Das injektive Tensorprodukt von Räumen des Typs $CV(X)$

Die Voraussetzungen an X_1, X_2, U und V sind wie zu Beginn von § 1. Es soll nun das injektive Tensorprodukt $CU(X_1) \check{\otimes}_\varepsilon CV(X_2)$ ähnlich wie $CU_0(X_1) \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X_2)$ in 1. 2 als gewichteter Raum stetiger Funktionen auf $X_1 \times X_2$ dargestellt werden. Hierzu verwenden wir die Ergebnisse von [2] über Räume $CU(X, E)$ *vektorwertiger* Funktionen, die ebenso wie die in [1] und [2] eingeführten Bezeichnungen als bekannt vorausgesetzt werden, und identifizieren $CU^p(X_1, E)$ für $E = CV(X_2)$ mit einem Raum von Funktionen in zwei Veränderlichen.

1. Lemma. *Die Abbildung I: $f \to [(x_1, x_2) \to (f(x_1))(x_2)]$, $f \in C(X_1, (C(X_2), \tau))$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, definiert einen topologischen Isomorphismus von $(C(X_1, (C(X_2), \tau)), \tau)$ auf $(C(X_1 \times X_2), \tau)$, wenn $X_1 \times X_2$ k_R-Raum ist.*

Lemma 1 läßt sich direkt wie 5. 3 bei Chapter XII von Dugundji [6] zeigen; ein anderer Beweis (über das Tensorprodukt) ergibt sich aus 1. 3 und [1], 5. 4. (1). Wir benötigen eine analoge Aussage für gewisse stetige beschränkte Funktionen mit der Topologie σ

der gleichmäßigen Konvergenz, wenn X_1 und X_2 nur vollständig regulär sind. Bezeichne dazu, für eine Funktion g von zwei Variablen und festes $x_1 \in X_1$, $g(x_1, .)$ die Funktion $x_2 \to g(x_1, x_2)$ (und sei $g(\,.\,, x_2)$ analog definiert).

2. Lemma. *Für beliebige X_1 und X_2 liefert die Abbildung I aus 1 einen Normisomorphismus von*

$$\begin{aligned}&(CB^p(X_1, (CB(X_2), \sigma)), \sigma)\\ &\qquad = \{f \in CB(X_1, (CB(X_2), \sigma));\ f(X_1) \text{ relativkompakt in } (CB(X_2), \sigma)\}\end{aligned}$$

auf

$$\begin{aligned}&(CB^p(X_1 \times X_2), \sigma)\\ &\qquad = \{g \in CB(X_1 \times X_2);\ \{g(x_1, .);\ x_1 \in X_1\} \text{ relativkompakt in } (CB(X_2), \sigma)\}.\end{aligned}$$

Offenbar bleibt für Lemma 2 nur

$$I(CB^p(X_1, (CB(X_2), \sigma))) = CB^p(X_1 \times X_2)$$

zu zeigen, und dies kann man mit den üblichen elementaren Überlegungen direkt beweisen: Benutze z. B. für die Inklusion

$$CB^p(X_1 \times X_2) \subset I(CB^p(X_1, (CB(X_2), \sigma)))$$

zunächst Chapter XII, Theorem 3. 1. (1) von [6] und beachte dann, daß eine Funktion $f \in C(X_1, (C(X_2), \tau))$, für die $f(X_1)$ in $CB(X_2)$ liegt und dort (bzgl. σ) relativkompakt ist, auch zu $C(X_1, (CB(X_2), \sigma))$ gehört. A. Grothendieck ([9], p. 18) erwähnt bereits, daß für nicht kompakte X_1 und X_2 dagegen I i. a. *keine Normisomorphie von*

$$(CB(X_1, (CB(X_2), \sigma)), \sigma) \text{ auf } (CB(X_1 \times X_2), \sigma)$$

bildet.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den für das folgende fundamentalen Isomorphiesatz bei gewichteten Räumen beweisen, wobei wiederum $W = U \otimes V$ ist:

3. Satz. *Die Einschränkung der Abbildung I auf*

$$\begin{aligned}&CU^p(X_1, CV(X_2))\\ &\qquad = \{f \in CU(X_1, CV(X_2));\ (uf)(X_1) \text{ relativkompakt in } CV(X_2) \text{ für jedes } u \in U\}\end{aligned}$$

ist ein topologischer Isomorphismus dieses Raumes auf den Unterraum

$$\begin{aligned}&CW^p(X_1 \times X_2)\\ &= \{g \in CW(X_1 \times X_2);\ \{u(x_1)g(x_1, .);\ x_1 \in X_1\} \text{ relativkompakt in } CV(X_2) \text{ für jedes } u \in U\}\end{aligned}$$

von $CW(X_1 \times X_2)$, falls entweder (1) $Z(X_1) \leqq U$ *und* $Z(X_2) \leqq V$ *oder falls* (2) $X_1 \times X_2$ *k_R-Raum und $W(X_1) \leqq U$, $W(X_2) \leqq V$ ist.*

Hierzu langt es, den *Beweis* von

$$I(CU^p(X_1, CV(X_2))) = CW^p(X_1 \times X_2)$$

anzugeben — der Rest ist ebenso einfach —, und dabei zeigen wir nur

(i) $I(CU^p(X_1, CV(X_2))) \subset C(X_1 \times X_2)$,

und daß

(ii) jedes $g \in CW^p(X_1 \times X_2)$ in bekannter Weise ein $f \in C(X_1, CV(X_2))$ definiert.

Zu (i): Man kann sich mittels

$$CU^p(X_1, CV(X_2)) < C(X_1, (C(X_2), \tau)) \text{ bzw. } CU^p(X_1, CV(X_2)) < CB^p(X_1, (CB(X_2), \sigma))$$

— letzteres bei (1) — auf Lemma 1 bzw. 2 zurückziehen.

Zu (ii): Zunächst ordnet man, wiederum nach 1 bzw. 2, $g \in CW^p(X_1 \times X_2)$ — dieser Raum ist enthalten in $C(X_1 \times X_2)$ bzw. bei (1) sogar Teilmenge von $CB^p(X_1 \times X_2)$ — ein $f \in C(X_1, (C(X_2), \tau))$ bzw. $f \in C(X_1, (CB(X_2), \sigma))$ mit $I(f) = g$ zu. Wegen $\{u(x_1)g(x_1, .);\ x_1 \in X_1\}$ relativkompakt in $CV(X_2)$ für beliebiges $u \in U$ fällt auf dieser Menge bei $W(X_2) \leqq V$ bzw. $Z(X_2) \leqq V$ die Topologie mit der von $(C(X_2), \tau)$ bzw. $(CB(X_2), \sigma)$ induzierten zusammen. Für f bedeutet dies, daß f bei $Z(X_1) \leqq U$ in $C(X_1, CV(X_2))$ liegt, und für $W(X_1) \leqq U$ ist ebenso die Restriktion von f auf jede kompakte Menge in X_1 stetig als Abbildung nach $CV(X_2)$. Da die Bedingung $X_1 \times X_2$ k_R-Raum impliziert, daß auch X_1 k_R-Raum ist, folgt (ii), q. e. d.

Jetzt setzen wir Satz 3 und [2], 2. 6 zu dem gewünschten Darstellungssatz zusammen: Erfüllen X_1 und U oder X_2 und V Bedingung (A) aus [2] — diese verlangt im wesentlichen nur, daß alle Gewichtsfunktionen, eingeschränkt auf ihren Träger, stetig sein müssen —, dann hat $CU(X_1)$ oder $CV(X_2)$ die Grothendiecksche Approximationseigenschaft, und aus [2], 2. 6 folgt unter den Voraussetzungen von 3 die Isomorphie

$$CU^p(X_1, CV(X_2)) = CU(X_1) \mathbin{\breve{\otimes}_\varepsilon} CV(X_2).$$

Da im Tensorprodukt $CU(X_1)$ und $CV(X_2)$ vertauscht werden dürfen, ist dann

$$CU^p(X_1, CV(X_2)) \text{ isomorph zu } CV^p(X_2, CU(X_1)),$$

und man erhält symmetrischer:

$$\begin{aligned} &CW^p(X_1 \times X_2) \\ &\quad = \{g \in CW(X_1 \times X_2);\ \{u(x_1)g(x_1, .);\ x_1 \in X_1\} \text{ relativkompakt in } CV(X_2) \text{ und} \\ &\quad\quad \{v(x_2)g(\,.\,, x_2);\ x_2 \in X_2\} \text{ relativkompakt in } CU(X_1) \text{ für beliebige } u \in U \text{ und } v \in V\}. \end{aligned}$$

Somit haben wir bewiesen:

4. Theorem. *Es ist*

$$CU(X_1) \mathbin{\breve{\otimes}_\varepsilon} CV(X_2) = CW^p(X_1 \times X_2) < CW(X_1 \times X_2),$$

falls X_1 *und* U *oder* X_2 *und* V *Bedingung* (A) *aus* [2] *erfüllen und entweder* $Z(X_1) \leqq U$, $Z(X_2) \leqq V$ *oder* $X_1 \times X_2$ *k_R-Raum und* $W(X_1) \leqq U$, $W(X_2) \leqq V$ *gilt.*

Dabei hat der topologische Isomorphismus in 4 auf dem nicht vervollständigten Tensorprodukt $CU(X_1) \otimes CV(X_2)$ dieselbe Gestalt wie in 1. 1 für $CU_0(X_1) \otimes CV_0(X_2)$ und $CW_0(X_1 \times X_2)$ angegeben. Als Spezialfall ergibt sich (ohne Benutzung der Stone-Čech-Kompaktifizierung):

5. Korollar. *Es gilt* $(CB(X_1), \sigma) \mathbin{\breve{\otimes}_\varepsilon} (CB(X_2), \sigma) = (CB^p(X_1 \times X_2), \sigma)$ *für beliebige vollständig reguläre Räume* X_1 *und* X_2.

In diesem Sonderfall ist es nun trivial, Beispiele dafür anzugeben, daß

$$(CB(X_1), \sigma) \mathbin{\breve{\otimes}_\varepsilon} (CB(X_2), \sigma)$$

i. a. ein *echter* Unterraum von $CB(X_1 \times X_2)$ ist, falls X_1 und X_2 nicht kompakt sind. Dagegen besteht ja für *lokalkompakte* X_1 und X_2 stets die Isomorphie

$$(CB(X_1), \beta) \mathbin{\breve{\otimes}_\varepsilon} (CB(X_2), \beta) = (CB(X_1 \times X_2), \beta)$$

für die *schwächere* strikte Topologie β (s. Summers [15], Theorem 4. 7, ein Spezialfall von 1. 2). Während somit i. a. $CW^p(X_1 \times X_2)$ *echt* in $CW(X_1 \times X_2)$ enthalten ist, können doch in gewissen Fällen diese beiden Räume zusammenfallen, so daß dann das injektive Tensorprodukt $CU(X_1)\check{\otimes}_\varepsilon CV(X_2)$ mit ganz $CW(X_1\times X_2)$ übereinstimmt. Z. B. trifft dies natürlich zu, wenn U und V zu den Voraussetzungen von 4 noch Bedingung $(*)$ aus [1], 1. 3 genügen, also $CU(X_1)=CU_0(X_1)$ und $CV(X_2)=CV_0(X_2)$ gilt. Wie man sofort sieht, erfüllt nämlich in diesem Fall auch W die Bedingung $(*)$, d. h. nach 4 und 1. 2 gilt

$$\begin{aligned} CW(X_1\times X_2) &= CW_0(X_1\times X_2)=CU_0(X_1)\check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X_2)\\ &= CU(X_1)\check{\otimes}_\varepsilon CV(X_2)=CW^p(X_1\times X_2). \end{aligned}$$

I. a. muß die Gleichheit von $CW(X_1\times X_2)$ und $CW^p(X_1\times X_2)$ für jedes Tripel (X_1, X_2, W) gesondert untersucht werden, und dies kann auf schwierige topologische Probleme führen. Wir betrachten dazu noch den interessanten Spezialfall von 5 und folgern daraus einen Teil eines bekannten Satzes:

6. Korollar. *Die Gleichheit*

$$(CB(X_1),\sigma)\check{\otimes}_\varepsilon(CB(X_2),\sigma)=(CB(X_1\times X_2),\sigma)$$

gilt für $X_1\times X_2$ pseudokompakt.

$X_1\times X_2$ ist z. B. stets dann pseudokompakt, wenn dies für X_1 und X_2 gilt und X_1 oder X_2 k_R-Raum ist (s. Noble [19], Theorem 2. 1; dort wird auch eine allgemeinere Bedingung angegeben).

Der *Beweis von* 6 ist geführt, wenn wir zeigen, daß für jede Funktion $g\in CB(X_1\times X_2)$ die Menge $\{g(x_1,.);\ x_1\in X_1\}$ relativkompakt in $(CB(X_2),\sigma)$ ist. Diese Menge ist offenbar gleichmäßig beschränkt und nach Lemma 1 von Glicksberg [8] gleichstetig auf X_2. Damit sind wir fertig, weil für pseudokompakte Räume X der *Satz von Ascoli* in der Banachalgebra $(CB(X),\sigma)$ richtig bleibt (vgl. [8], p. 369).

Allgemeiner als Korollar 6 sagt der *Satz von Glicksberg und Tamano* (vgl. etwa Buchwalter [5], (5. 7)) — der Beweis dieses Satzes benutzt andere Methoden, wie z. B. die Stone-Čech-Kompaktifizierung —:

$$(CB(X_1\times X_2),\sigma)=(CB(X_1),\sigma)\check{\otimes}_\varepsilon(CB(X_2),\sigma)$$

gilt für pseudokompakte Räume X_1 und X_2 *genau dann*, wenn $X_1\times X_2$ pseudokompakt ist, und dies trifft dann und nur dann zu, wenn für die Stone-Čech-Kompaktifizierungen die Relation $\beta(X_1\times X_2)=\beta X_1\times\beta X_2$ besteht.

Der obige Beweis von 6 zeigt das Problem von einer anderen Seite: Lemma 1 in Glicksberg [8] beweist gerade, daß für pseudokompaktes $X_1\times X_2$ die einem $g\in CB(X_1\times X_2)$ zugeordnete Funktion f von X_1 in $CB(X_2)$ zu $C(X_1,(CB(X_2),\sigma))$ gehört. Bekanntlich gibt es aber pseudokompakte Räume X_1 und X_2, deren topologisches Produkt *nicht* wieder pseudokompakt ist, vgl. [8], p. 375. Für solche Räume X_1 und X_2 gilt nach [2], 2. 7 zwar (bei Identifizierung)

$$(CB(X_1),\sigma)\check{\otimes}_\varepsilon(CB(X_2),\sigma)=(CB(X_1,(CB(X_2),\sigma)),\sigma),$$

aber

$$CB(X_1,(CB(X_2),\sigma))\subsetneqq CB(X_1\times X_2).$$

Das Problem liegt also hier bei der *Gültigkeit eines Isomorphismus zwischen einem Raum vektorwertiger Funktionen und einem Raum von stetigen skalaren Funktionen in zwei Variablen.*

Ähnlich ist es bei der von Buchwalter [5] betrachteten allgemeineren Isomorphie

$$(C(X_1), b) \check{\otimes}_\varepsilon (C(X_2), b) = (C(X_1 \times X_2), b)$$

für die Topologie b der gleichmäßigen Konvergenz auf allen *beschränkten* Teilmengen. (Eine Menge M in einem topologischen Raum X heißt dabei beschränkt, wenn jede Funktion aus $C(X)$ auf M beschränkt ist.) Hierbei ergibt sich aus [2], 2. 7 nämlich:

7. Bemerkung. *Sind* $(C(X_1), b)$, $(C(X_2), b)$ *und* $(C(X_1, (C(X_2), b)), b)$ *vollständig, so besteht die Gleichung*

$$(1) \qquad (C(X_1), b) \check{\otimes}_\varepsilon (C(X_2), b) = (C(X_1 \times X_2), b)$$

dann und nur dann, wenn

$$(2) \qquad (C(X_1, (C(X_2), b)), b) = (C(X_1 \times X_2), b).$$

In [5], (5. 6) wird (1) bewiesen, wenn $(C(X_1), b)$ und $(C(X_2), b)$ vollständig sind, wenn in X_1 und X_2 *abzählbare Basen von beschränkten Mengen* existieren, die *pseudokompakt* sind, und wenn zusätzlich das *Produkt beschränkter Mengen in* X_1 *und* X_2 *stets beschränkt in* $X_1 \times X_2$ ist.

3. Slice-Produkte

Ein interessantes Problem im Hinblick auf Anwendungen ist die Frage, ob eine Tensorproduktzerlegung wie bei 1. 2 (und 2. 4) auch für geeignete *Unterräume* gewichteter Räume stetiger Funktionen gilt, z. B. für gewichtete Räume holomorpher Funktionen. Das Problem erweist sich als komplizierter als die bisher behandelten, weil die Approximationseigenschaft der betrachteten Räume eine Rolle spielt und nicht wie vorher für die Räume $CV_0(X)$ (und $CV(X)$) *bewiesen* werden kann. Eine Verallgemeinerung von 1. 2 und 2. 4 gelingt aber mit Hilfe des Begriffes des Slice-Produktes, der für kompakte Räume und sup-Normen z. B. bei Birtel [3] und Eifler [7] auftaucht.

1. Definition. Seien X_1, X_2, U, V und W wie bisher, seien Y_1 und Y_2 lineare Unterräume von $CU_0(X_1)$ (bzw. $CU(X_1)$) und $CV_0(X_2)$ (bzw. $CV(X_2)$). Das *Slice-Produkt* $Y_1 \mathbin{\#} Y_2$ von Y_1 und Y_2 ist der topologische lineare Unterraum

$$\{f \in CW_0(X_1 \times X_2) \text{ (bzw. } CW^p(X_1 \times X_2));$$
$$f(\,.\,, x_2) \in Y_1 \text{ und } f(x_1, .\,) \in Y_2 \text{ für alle } (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2\}$$

von $CW(X_1 \times X_2)$.

Dazu ist zu bemerken, daß bei $U > 0$ und $V > 0$ ja $f \in CW_0(X_1 \times X_2)$ (bzw. $CW(X_1 \times X_2)$) stets $f(\,.\,, x_2) \in CU_0(X_1)$ (bzw. $CU(X_1)$) und $f(x_1, .\,) \in CV_0(X_2)$ (bzw. $CV(X_2)$) für beliebige $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ beinhaltet, s. Nachbin [11], 23, Lemma 1.

Die Verbindung des in 1 eingeführten Begriffes zu dem Tensorprodukt geschieht mit Hilfe des *L. Schwartzschen ε-Produktes* (s. [14]). Für zwei lokalkonvexe Räume E und F sei hier das ε-Produkt $E \varepsilon F$ von E und F definiert als der lokalkonvexe Raum $\mathscr{L}_e(F'_c, E)$ aller vom dualen Raum F'_c von F (versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen präkompakten Mengen in F) in den Raum E stetigen linearen Abbildungen unter der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen gleichstetigen Mengen in F'. Unter Benutzung von Sätzen aus [1] und [2] folgt dann:

2. Satz. *Seien U bzw. V Nachbin-Familien auf den vollständig regulären Räumen X_1 bzw. X_2, sei $Z(X_1) \leqq U$ und $Z(X_2) \leqq V$ oder $X_1 \times X_2$ k_R-Raum und $W(X_1) \leqq U$, $W(X_2) \leqq V$. Ist Y_1 bzw. Y_2 abgeschlossener linearer Unterraum von* (1) $CU_0(X_1)$ *bzw.*

$CV_0(X_2)$ oder von (2) $CU(X_1)$ bzw. $CV(X_2)$, dann erhält man im Sinne eines topologischen Isomorphismus $Y_1 \# Y_2 = Y_1 \varepsilon Y_2$.

Beweis. Zieht man zum bisher Bewiesenen (vgl. 2. 3) noch [1], 5. 5 (bzw. [2], 2. 4) in Betracht, so ist $CW_0(X_1 \times X_2)$ (bzw. $CW^p(X_1 \times X_2)$) auch kanonisch topologisch isomorph zu $CU_0(X_1)\varepsilon CV_0(X_2)$ (bzw. $CU(X_1)\varepsilon CV(X_2)$). Die Isomorphie hat jeweils die Gestalt

$$f \to [\mu_2 \to (x_1 \to \mu_2 f(x_1, .))]$$

für $f \in CW_0(X_1 \times X_2)$ (bzw. $CW^p(X_1 \times X_2)$), $\mu_2 \in CV_0'(X_2)$ (bzw. $CV'(X_2)$) und $x_1 \in X_1$, wobei $\mu_2 f(x_1, .)$ bedeutet, daß μ_2 auf die Funktion $f(x_1, .) \in CV_0(X_2)$ (bzw. $CV(X_2)$) angewandt wird, vgl. [2], 2. 1. Wegen [1], 3. 4 kann man

$$Y_1 \varepsilon Y_2 < Y_1 \varepsilon CV_0(X_2) < CU_0(X_1)\varepsilon CV_0(X_2) \quad (\text{bzw. } Y_1 \varepsilon Y_2 < CU(X_1)\varepsilon CV(X_2))$$

als linearen und topologischen Unterraum von $CW_0(X_1 \times X_2)$ (bzw. $CW^p(X_1 \times X_2)$) betrachten. Dabei gilt offenbar:

$$\begin{aligned} Y_1 \varepsilon Y_2 = \{ & f \in CW_0(X_1 \times X_2) \ (\text{bzw. } CW^p(X_1 \times X_2)); \\ & x_1 \to \mu_2 f(x_1, .) \text{ gehört zu } Y_1 \text{ und } x_2 \to \mu_1 f(. , x_2) \text{ gehört zu } Y_2 \\ & \text{für alle } (\mu_1, \mu_2) \in CU_0'(X_1) \times CV_0'(X_2) \ (\text{bzw. } CU'(X_1) \times CV'(X_2))\}, \end{aligned}$$

womit $Y_1 \varepsilon Y_2 < Y_1 \# Y_2$ klar ist, weil für alle $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ die Deltafunktionale (Punktauswertungen) δ_{x_1} und δ_{x_2} zu $CU_0'(X_1)$ (bzw. $CU'(X_1)$) und $CV_0'(X_2)$ (bzw. $CV'(X_2)$) gehören. Andererseits folgt aus der Stetigkeit der Abbildung $\mu_2 \to (x_1 \to \mu_2 f(x_1, .))$ von $(CV_0(X_2))_c'$ in $CU_0(X_1)$ (bzw. von $(CV(X_2))_c'$ in $CU(X_1)$), der Abgeschlossenheit von Y_1 und aus der schwachen Dichtheit der Linearkombinationen von Punktfunktionalen in Polaren von Nullumgebungen aus $CV_0(X_2)$ bzw. $CV(X_2)$ ([1], 4. 2), daß für $f \in Y_1 \# Y_2$ die Abbildung $x_1 \to \mu_2 f(x_1, .)$, die nach Definition bei $\mu_2 = \delta_{x_2}$, $x_2 \in X_2$, eine Funktion aus Y_1 darstellt, auch für beliebige $\mu_2 \in CV_0'(X_2)$ bzw. $CV'(X_2)$ Element von Y_1 ist: Aus Symmetriegründen also $Y_1 \# Y_2 < Y_1 \varepsilon Y_2$, q. e. d.

Bekanntlich ([14], § 1, Proposition 11, Corollaire 1) fällt das ε-Produkt vollständiger Räume mit dem ε-Tensorprodukt zusammen, wenn einer der beiden Räume die *Approximationseigenschaft* besitzt. Damit ergibt sich der angekündigte *Slice-Produkt-Satz*:

3. Theorem. *Hat Y_1 oder Y_2 zu den Voraussetzungen von 2 die Approximationseigenschaft, so gilt $Y_1 \check{\otimes}_\varepsilon Y_2 = Y_1 \# Y_2$.*

Theorem 3, das für kompakte X_1 und X_2 und sup-Normen zuerst von L. Eifler [7], 2. 2 angegeben wurde (Eifler schreibt seinen Satz Grothendieck zu), verallgemeinert tatsächlich 1. 2 und 2. 4, weil die Räume $CV_0(X)$ und $CV(X)$ nach [1], 5. 5 und [2], 1. 1 die Approximationseigenschaft haben. Satz 2 zeigt zusätzlich, daß die Frage, ob eine Gleichung $Y_1 \# Y_2 = Y_1 \check{\otimes}_\varepsilon Y_2$ besteht, eng mit dem Problem der Approximationseigenschaft für die Räume Y_1 und Y_2 zusammenhängt: Gilt nämlich $Y_1 \varepsilon E = Y_1 \check{\otimes}_\varepsilon E$ *für jedes vollständige lokalkonvexe E*, so besitzt Y_1 bereits die Approximationseigenschaft (s. etwa [1], 3. 9).

Als erste Anwendung von 3 notieren wir:

4. Korollar. *Seien die Voraussetzungen wie in (1) bei Satz 2 und sei zusätzlich etwa Y_1 Modul über M, wobei $M < C(X_1)$ einen Modul über $CB(X_1)$ bildet, derart, daß für jedes $x_1 \in X_1$, für das $y_1(x_1) \neq 0$ für ein $y_1 \in Y_1$, auch ein $g \in M$ existiert mit $g(x_1) \neq 0$. Dann folgt $Y_1 \# Y_2 = Y_1 \check{\otimes}_\varepsilon Y_2$.*

Es ist dazu nur zu bemerken, daß Y_1 wegen [2], 3. 4 die Approximationseigenschaft besitzt. Korollar 4 steht in engem Zusammenhang mit einer skalaren Version von Theorem 3. 4 bei J. B. Prolla [12], wo Slice-Produkte von Moduln *vektorwertiger* Funktionen der in 4 angegebenen Art behandelt werden, ohne die oben entwickelte Methode mit der Approximationseigenschaft zu verwenden.

Besonders interessant erscheint es aber, 3 auf *gewichtete Räume holomorpher Funktionen* anzuwenden. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein: Ist X offene Menge im $\boldsymbol{C}^n (n \geqq 1)$, V Nachbin-Familie auf X, so werde für $H(X)$ = holomorphe Funktionen auf X definiert:

$$HV_0(X) = H(X) \cap CV_0(X),\ HV(X) = H(X) \cap CV(X),$$

jeweils mit der von $CV(X)$ induzierten Topologie. Bei $W \leq V$ sind $HV_0(X)$ und $HV(X)$ in $CV(X)$ abgeschlossen, also vollständig.

Weil nach dem *Satz von Hartogs* eine auf einer offenen Menge X im $\boldsymbol{C}^{n+m} (n, m \geqq 1)$ definierte komplexwertige Funktion f von $n+m$ Variablen genau dann holomorph auf X ist, wenn für jedes Paar $(z_1, z_2) \in \boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C}^m = \boldsymbol{C}^{n+m}$ die partiellen Funktionen $f(z_1, .)$ und $f(., z_2)$ holomorph sind als Funktionen von m bzw. n Variablen auf

$$\{z_2 \in \boldsymbol{C}^m;\ (z_1, z_2) \in X\} \text{ bzw. } \{z_1 \in \boldsymbol{C}^n;\ (z_1, z_2) \in X\}$$

(s. etwa Hervé [10], II. 2. 1, Theorem 2), folgt aus 3:

5. Satz. *Seien $X_1 < \boldsymbol{C}^n$ und $X_2 < \boldsymbol{C}^m$ offen $(n, m \geqq 1)$, U bzw. V Nachbin-Familien auf X_1 bzw. X_2 mit $W(X_1) \leq U$ und $W(X_2) \leq V$. Mit $W = U \otimes V$ gilt dann:*

(1) $HU_0(X_1) \check{\otimes}_\varepsilon HV_0(X_2) = HW_0(X_1 \times X_2)$,
falls $HU_0(X_1)$ oder $HV_0(X_2)$ die Approximationseigenschaft hat,

(2) $HU(X_1) \check{\otimes}_\varepsilon HV(X_2) = HW^p(X_1 \times X_2) = H(X_1 \times X_2) \cap CW^p(X_1 \times X_2)$,
falls $HU(X_1)$ oder $HV(X_2)$ die Approximationseigenschaft hat.

6. Bemerkung. *Theorem 3 kann in ähnlicher Weise wie bei* 5. (1) *für einen Satz über das Tensorprodukt gewichteter Räume (reellwertiger) harmonischer Funktionen auf $X_1 < \boldsymbol{R}^n$ und $X_2 < \boldsymbol{R}^m (n, m \geqq 2)$ benutzt werden.* Dort liegen jedoch etwas andere Verhältnisse vor; immerhin ist nach dem *Satz von Lelong* (vgl. etwa Hervé [10], II. 2. 4, Theorem) jede Funktion aus dem Slice-Produkt solcher Räume auch harmonisch auf $X_1 \times X_2$.

Daß es schwierig sein kann, die Approximationseigenschaft für einen Raum $HV_0(X)$ oder $HV(X)$ zu beweisen, zeigt bereits das einfache Beispiel $V = Z(D), HV(D) = H^\infty(D)$ = Raum aller beschränkten analytischen Funktionen auf dem Einheitskreis D der komplexen Ebene mit der sup-Norm. *Das Problem, ob dieser Raum die Approximationseigenschaft besitzt, scheint nämlich nach wie vor offen zu sein* (vgl. Birtel und Dubinsky [4]).

Versieht man H^∞ dagegen mit der (schwächeren) strikten Topologie β (für $X < \boldsymbol{C}^n$ also $H^\infty(X) = HV_0(X)$ bei $V = C_0^+(X)$ = Menge aller nichtnegativen stetigen Funktionen auf X, die außerhalb kompakter Teilmengen von X beliebig klein werden), so konnte in [2], 3. 9 die Approximationseigenschaft für den Raum $(H^\infty(X), \beta)$ bewiesen werden, falls X einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen Ebene ist. $(H^\infty(X), \beta)$ wurde in vielen Arbeiten untersucht, weil die strikte Topologie zu dem Begriff der punktweise beschränkten Konvergenz analytischer Funktionen führt und sich bei Approximationsfragen wesentlich besser als die sup-Norm verhält; wir verweisen dazu nur auf den Übersichtsartikel [13] von L. A. Rubel. Aus 5. (1) folgt nun (zusammen mit Summers [15], 4. 6):

7. Korollar. *Ist X_1 einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Ebene und X_2 eine beliebige offene Menge im $\mathbf{C}^n (n \geqq 1)$, so gilt*

$$(H^\infty(X_1), \beta) \check{\otimes}_\varepsilon (H^\infty(X_2), \beta) = (H^\infty(X_1 \times X_2), \beta).$$

Insbesondere erhält man $(H^\infty(D), \beta) \check{\otimes}_\varepsilon (H^\infty(D), \beta) = (H^\infty(D \times D), \beta)$, während Birtel und Dubinsky [4] an vielen Beispielen gezeigt haben, daß *für sup-Normen* das injektive Tensorprodukt $H^\infty(D) \check{\otimes}_\varepsilon H^\infty(D)$ ein *echter* Teilraum von $H^\infty(D \times D)$ ist (was nach dem Vorhergehenden nicht mehr überrascht, weil man auch ohne Kenntnis der Approximationseigenschaft von $H^\infty(D)$ nach 2 bereits sagen kann, daß

$$H^\infty(D) \check{\otimes}_\varepsilon H^\infty(D) < H^\infty(D) \# H^\infty(D) < H^\infty(D \times D) \cap CB^p(D \times D)).$$

Nach L. Schwartz ([14], § 1, Corollaire 2 von Proposition 11), hat das vervollständigte ε-Tensorprodukt zweier Räume, die beide die Approximationseigenschaft haben, selbst die Approximationseigenschaft. Deshalb ergibt sich aus 7:

8. Korollar. *Ist $X = G_1 \times \cdots \times G_n$ mit G_i einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen Ebene $(i = 1, \ldots, n)$, dann stellt auch $(H^\infty(X), \beta)$ einen Raum mit Approximationseigenschaft dar.*

Offenbar läßt sich 7 nun dahingehend verallgemeinern, daß dort für X_1 auch eine Menge wie in 8 angegeben genommen werden darf.

Literatur

[1] *K.-D. Bierstedt*, Gewichtete Räume stetiger vektorwertiger Funktionen und das injektive Tensorprodukt. I, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **259** (1973), 186—210.

[2] *K.-D. Bierstedt*, Gewichtete Räume stetiger verktorwertiger Funktionen und das injektive Tensorprodukt. II, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **260** (1973), 133—146.

[3] *F. T. Birtel*, Products of maximal function algebras, in „Function Algebras, Proc. Symp. Tulane 1965", Glenview Ill, 1966.

[4] *F. Birtel* and *E. Dubinsky*, Bounded analytic functions of two complex variables, Math. Z. **93** (1966), 299—310.

[5] *H. Buchwalter*, Produit topologique, produit tensoriel et c-replétion, Coll. Intern. Anal. Fonct., Bordeaux 1971.

[6] *J. Dugundji*, Topology, Boston 1966.

[7] *L. Eifler*, The slice product of function algebras, Proc. AMS **23** (1969), 559—564.

[8] *I. Glicksberg*, Stone-Čech compactifications of products, Trans. AMS **90** (1959), 369—382.

[9] *A. Grothendieck*, Espaces vectoriels topologiques, São Paulo 1954.

[10] *M. Hervé*, Analytic and plurisubharmonic functions in finite and infinite dimensional spaces, Lecture Notes Math. **198**, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

[11] *L. Nachbin*, Elements of approximation theory, Math. Studies **14** Princeton, 1967.

[12] *J. B. Prolla*, Weighted approximation and slice products of modules of continuous functions, to appear in Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.

[13] *L. A. Rubel*, Bounded convergence of analytic functions, Bull. AMS **77** (1971), 13—24.

[14] *L. Schwartz*, Théorie des distributions à valeurs vectorielles. I, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **7** (1957), 1—142.

[15] *W. H. Summers*, A representation theorem for biequicontinuous completed tensor products of weighted spaces, Trans. AMS **146** (1969), 121—132.

[16] *W. H. Summers*, Dual spaces of weighted spaces, Trans. AMS **151** (1970), 323—333.

[17] *S. Warner*, The topology of compact convergence on continuous function spaces, Duke Math. J. **25** (1958), 265—282.

[18] *J. Dieudonné*, Sur les fonctions continues numériques définies dans un produit de deux espaces compacts, C. R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 593—595.

[19] *N. Noble*, Countably compact and pseudocompact products, Czechoslovak Math. J. **19** (1969), 390—397.

Fachbereich Mathematik der Universität, 675 Kaiserslautern, Pfaffenbergstr. 95

Eingegangen 29. April 1972