Neuere Ergebnisse zum Approximationsproblem von Banach-Grothendieck

von Klaus-Dieter Bierstedt

In der Funktionalanalysis wurden in den letzten Jahren mehrere „klassische", seit langer Zeit offene Probleme gelöst, die sich im Rahmen der Banachraumtheorie sehr einfach formulieren lassen. So bewiesen Lindenstrauss und Tzafriri 1971 endlich, daß ein (reeller) Banachraum, für den jeder abgeschlossene lineare Unterraum (topologisch) komplementiert – d.h. also stetig projiziert – ist, bereits topologisch isomorph zu einem Hilbertraum sein muß. Während ein solches Resultat insbesondere für die Strukturtheorie der sog. klassischen Banachräume Konsequenzen hat, ist von seinen vielen Anwendungen her seit langem das *Approximationsproblem von Banach-Grothendieck* von besonderem Interesse gewesen. Dieses vielschichtige Problem steht auch in engem Zusammenhang mit dem *(Schauder-) Basis-Problem bei separablen Banachräumen*, das mindestens ebenso lange bekannt war und besondere Bedeutung gewonnen hatte. Beide Probleme sind nun seit 1972 durch ein recht kompliziertes *Gegenbeispiel von Per Enflo* negativ gelöst. Man muß die bisher genannten Ergebnisse so interpretieren, daß zwar, wie bekannt, für manche Anwendungen der Rahmen der Hilberträume zu eng gefaßt ist, daß aber andererseits beim Übergang zu Banachräumen sehr viel mehr verloren geht, als dies zunächst offensichtlich war.

Im vorliegenden Überblicksartikel soll nun zunächst *(im 1. Kapitel)* das Approximationsproblem mit einigen seiner Äquivalenzen vorgestellt werden. *Im 2. Kapitel* geben wir einen Abriß der Entwicklung, die zur Lösung des Problems geführt hat, und streifen neuere Entwicklungen. Aus den Ergebnissen, die Enflos Gegenbeispiel bereits benutzen, um weitere (negative) Konsequenzen herzuleiten, haben wir *im 3. Teil* die Sätze von Milne und von Hogbe-Nlend herausgegriffen, weil sich ihre Beweise recht einfach skizzieren lassen und weil ihre Aussagen von einiger Bedeutung für die Anwendungen sind.

Zur Abgrenzung soll betont werden, daß darauf verzichtet wird, eine vollständige Darstellung *aller* Äquivalenzen des Approximationsproblems zu geben, um nicht zu viele Definitionen und Begriffe einführen zu müssen. Beziehungen des Problems zu topologischen Tensorprodukten werden nur sehr knapp erwähnt; auch sind die angegebenen Äquivalenzen z.T. nicht bewiesen, weil in die Beweise zwar interessante, aber doch recht komplizierte

Schlüsse eingehen. Ebenso tauchen technische Varianten der Approximationseigenschaft (A.E.) in der isometrischen Theorie (wie beschränkte A.E., metrische A.E. etc.) hier nicht auf. Für ein (sehr viel) tieferes Verständnis des Approximationsproblems wären solide Grundkenntnisse über lokalkonvexe topologische Vektorräume erforderlich, die wir nicht allgemein voraussetzen wollen. Der größte Teil des Artikels hält sich daher an den *Rahmen der Banachräume* (aus deren Theorie sogar relativ wenig benutzt wird). Um allerdings einige neue Entwicklungen andeuten zu können, werden in gewissen Abschnitten auch *lokalkonvexe Räume* vorkommen. *Diese Abschnitte können überflogen werden, wenn der Leser nicht mit lokalkonvexen Räumen* (das heißt: Vektorräumen mit einer Topologie, die mittels eines Systems von Halbnormen gegeben wird) *vertraut ist.* – Die Stoffauswahl orientiert sich selbstverständlich etwas an den persönlichen Interessen des Autors, doch ist es unmöglich, im gegebenen Rahmen alle neueren Ergebnisse im Kreis um das Approximationsproblem auch nur zu erwähnen. Teile des Artikels beruhen auf einem Vortrag, den der Autor am 2. April 1974 anläßlich seines Habilitationskolloquiums am Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern gehalten hat.

1. Ein Überblick über das Approximationsproblem und einige seiner Äquivalenzen

Beginnen wir sofort mit der folgenden Definition:

1. Definition: Ein Banachraum E (über $[\mathbb{R}$ oder$]$ $\mathbb{C}$) hat die *Approximationseigenschaft (A.E.)* genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ und jede kompakte Teilmenge K von E eine stetige lineare Abbildung $T = T(K, \epsilon)$ von E in sich mit $\dim TE < \infty$ gibt, welche der Bedingung $\| x - Tx \|_E < \epsilon$ für alle $x \in K$ genügt.

Lineare Abbildungen mit endlichdimensionalem Bildraum nennt man üblicherweise auch *Operatoren von endlichem Rang*. Mit dieser Bezeichnung besagt Definition 1., daß ein Banachraum E die A.E. hat, wenn sich die Identität id_E von E gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von E durch stetige lineare Abbildungen von endlichem Rang approximieren läßt.

Die letzte Formulierung läßt sich sofort auf lokalkonvexe Räume übertragen, doch verwendet man dort *präkompakte* Mengen anstelle der (relativ-) kompakten. (Für *vollständige* Räume läuft beides auf dasselbe hinaus.) Wir gelangen so zu der allgemeinen Definition, wie sie A. Grothendieck in seiner ≪ thèse ≫ [11] 1950 - 55 gegeben hat:

2. Definition: Ein lokalkonvexer (Hausdorffscher topologischer Vektor-) Raum E (über [$\mathbb{R}$ oder] $\mathbb{C}$) *hat die A.E.* genau dann, wenn id_E gleichmäßig auf jeder präkompakten Teilmenge von E durch stetige lineare Operatoren von E in sich von endlichem Rang approximiert werden kann.

Die A.E. eines Raumes E bedeutet danach, daß E in einem gewissen, recht schwachen Sinn durch seine endlichdimensionalen Teilräume approximiert wird. Die A.E. von E impliziert (und ist also *äquivalent* dazu), daß für jeden Banachraum F [bzw. jeden lokalkonvexen Raum F] sich jede stetige lineare Abbildung $T : E \to F$ (oder $T : F \to E$) stets gleichmäßig auf präkompakten Teilmengen von E (oder F) durch stetige lineare Abbildungen endlichen Ranges zwischen diesen Räumen approximieren läßt. In der einen Richtung sieht man dies, indem man $T = T \circ \mathrm{id}_E$ (oder $T = \mathrm{id}_E \circ T$) schreibt und beachtet, daß das Bild präkompakter Mengen unter stetigen linearen Abbildungen wieder präkompakt ist und daß die Zusammensetzung einer beliebigen stetigen linearen Abbildung mit einer solchen endlichen Ranges wieder von endlichem Rang ist. In der anderen Richtung braucht man nur $T = \mathrm{id}_E$ bei $E = F$ zu setzen. – Die A.E. eines Raumes E besagt also auch gerade, daß beliebige stetige lineare Abbildungen von diesem Raum in andere oder von einem anderen Raum nach E in einem *schwachen* Sinne durch solche endlichen Ranges approximiert werden können.

Grothendieck gab viele Äquivalenzen für die A.E. an und stellte folgende *Frage*:

Approximationsproblem: *Hat jeder Banachraum – oder jeder lokalkonvexe Raum – die A.E.?*

Man kann leicht zeigen, daß *bereits alle lokalkonvexen Räume die A.E. besitzen, wenn nur jeder separable Banachraum sie hat.* (*Separabel* bedeutet, wie üblich: Es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge.) Dies folgt einmal aus gewissen *Vererbungseigenschaften der A.E.*, die das Problem auf *Banachräume* reduzieren – wir kommen darauf später noch zu sprechen. Die weitere Reduktion auf *separable* Banachräume liefert eine einfache Überlegung mit dem *Satz von Hahn-Banach*, wenn man bedenkt, daß die Abschließung der linearen Hülle einer kompakten Menge in einem Banachraum immer einen separablen Unterraum bildet. Also ist das Approximationsproblem von Grothendieck *äquivalent* zu:

Reduziertes Approximationsproblem: *Hat jeder separable Banachraum die A.E.?*

In separablen Banachräumen gab es schon viele Jahre vor Grothendieck ein offenes Problem, das aus der Zeit (Schauder 1927) stammte, als man die

Funktionalanalysis von Hilbert- auf Banachräume zu verallgemeinern versuchte.

3. Definition: Sei E (separabler) Banachraum. Man sagt, eine Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in E ist eine *Schauder-Basis* von E, wenn jedes $e \in E$ eine eindeutig bestimmte Darstellung $e = \sum_{i=1}^{\infty} e_i x_i$ als in E konvergente Reihe besitzt. („Eindeutig bestimmt" besagt dabei, daß die $e_i \in [\mathbb{R}$ oder$]\mathbb{C}$ durch e eindeutig festgelegt werden.)

In Zukunft werden wir statt „Schauder-Basis" nur Basis sagen, da wir es hier mit keinen anderen Basisbegriffen zu tun haben. Es zeigt sich, daß bei einer Basis $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von E die wohldefinierten Koeffizientenfunktionale $f_i : e \to e_i$ *stetige* Linearformen auf E, also Elemente des (topologischen) Dualraumes E' von E sind. (Tatsächlich folgt die Stetigkeit der f_i mit einer weiteren Überlegung aus dem *Open Mapping-Theorem*.) – Übrigens ist ein Banachraum mit Schauder-Basis sicher separabel, wie man sofort sieht.

Da separable Hilberträume stets besonders schöne Basen, nämlich Orthonormalbasen, besitzen, lag es zur einfacheren Übertragung (eines Teiles) der Theorie auf Banachräume natürlich nahe zu fragen:

Basisproblem: *Hat jeder separable Banachraum (mindestens) eine Basis?*

Dieses Basisproblem war bereits zur Zeit von Banach (1932) als ungelöst bekannt. Nun gibt es aber einen leicht zu zeigenden Zusammenhang mit dem Approximationsproblem. Man beweist nämlich:

4. Satz: *Ein separabler Banachraum E mit Basis* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *hat die A.E.*

Beweis: Tatsächlich sind die Abbildungen T_n, definiert durch

$T_n(e) = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$ für $e = \sum_{i=1}^{\infty} e_i x_i$, wohldefinierte stetige lineare Operatoren endlichen Ranges auf E. Nach Definition der Basis konvergiert $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise* gegen die Identität von E. Eine genügend scharfe Fassung des klassischen *Satzes von Banach-Steinhaus* garantiert dann, daß T_n *sogar gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von E* gegen id_E konvergiert. □

Nach 4. wird aber unmittelbar klar, daß *aus einer negativen Lösung des (reduzierten) Approximationsproblems auch eine negative Lösung des Basisproblems folgt.* Dagegen weiß man nach (Enflos Gegenbeispiel und) einer Überlegung von Figiel und Johnson [10] inzwischen, daß es separable Banachräume mit A.E. gibt, die keine Basis besitzen. *Die in 4. angegebene*

Implikation ist also nicht umkehrbar. Wir kommen aber jetzt zu einer wichtigen *Äquivalenz* für die A.E. eines beliebigen Banachraumes E, die mit dem Begriff der kompakten Operatoren zusammenhängt.

5. Definition: Ein linearer Operator $T: F \to E$, E und F Banachräume, heißt *kompakt*, wenn das Bild TF_1 der Einheitskugel F_1 von F relativkompakt in E ist.

Kompakte Operatoren tauchen in den Anwendungen an vielen (verschiedenen) Stellen auf: z.B. bei gewissen Multiplikationsoperatoren in geeigneten Folgenräumen, bei einigen Sobolevschen Einbettungsoperatoren und vor allem bei Integralgleichungen (und somit auch bei gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen), s. dazu etwa das Lehrbuch [22] von Wloka, § 23ff. Wir erwähnen nur: Bezeichne $C[a,b]$ den Raum der stetigen (komplexwertigen) Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, versehen mit der sup-Norm, und sei $K: [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ (gleichmäßig) stetig. Dann ist $A: C[a,b] \to C[a,b]$, $Ax(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds$ bei $x \in C[a,b]$ und $t \in [a,b]$, *kompakt, wie sich direkt aus dem Satz von Arzelà-Ascoli ergibt.* (Analog ist übrigens ein entsprechender Operator A auf $L^2[a,b]$ anstelle von $C[a,b]$ erst recht kompakt, wenn die Funktion K zwar nicht notwendigerweise stetig, aber etwa aus $L^2([a,b] \times [a,b])$ ist.) – Andererseits sollte bemerkt werden, daß natürlich *die Identität* id_E *eines Banachraumes E genau dann kompakt ist, wenn bereits* $\dim E < \infty$ *gilt.* (Denn für die Kompaktheit der Einheitskugel E_1 des Raumes E ist E endlichdimensional notwendig und hinreichend.)

Die Bedeutung der kompakten Operatoren wird auch dadurch unterstrichen, daß für solche Abbildungen eine gut ausgebaute Spektraltheorie vorliegt (Riesz-Schauder-Theorie, Fredholmsche Alternative, Spektralsatz usw.).

Sind E und F wieder Banachräume, so bildet der Raum $\mathscr{C}(F,E)$ der kompakten Operatoren von F nach E einen *abgeschlossenen* linearen Unterraum des Raumes $\mathscr{L}(F,E)$ aller stetigen linearen Abbildungen $T: F \to E$, versehen mit der Operatornorm (d.h. bei gleichmäßiger Konvergenz auf der Einheitskugel von F). $\mathscr{C}(F,E)$ enthält offenbar den Raum $\mathscr{F}(F,E)$ aller stetigen linearen Operatoren endlichen Ranges, so daß auch für die Abschließung $\overline{\mathscr{F}(F,E)}$ bzgl. der Operatornorm gilt:

$$\overline{\mathscr{F}(F,E)} \subset \mathscr{C}(F,E) \subset \mathscr{L}(F,E).$$

Banach stellte nun bereits die Frage, ob hier sogar stets $\overline{\mathscr{F}(F,E)} = \mathscr{C}(F,E)$ richtig ist, d.h. ob sich kompakte Operatoren immer in einem *starken* Sinne durch solche endlichen Ranges approximieren lassen, genauer gesagt:

Problem der kompakten Operatoren: *Läßt sich jede kompakte lineare Abbildung zwischen beliebigen Banachräumen in der Operatornorm durch stetige lineare Abbildungen endlichen Ranges approximieren?*

Für die Lösung dieses Problems hatte Banach als Preis eine lebende Gans ausgesetzt. Grothendieck [11] bewies nun sofort eine sehr interessante Äquivalenz:

> **6. Satz**: *Für einen Banachraum E sind folgende Aussagen äquivalent:*
> (1) *E hat die A.E.*
> (2) *Für beliebigen Banachraum F und beliebigen kompakten Operator $T: F \to E$ ist T in der Operatornorm Limes von stetigen linearen Abbildungen endlichen Ranges, d.h. es gilt $\overline{\mathscr{F}(F,E)} = \mathscr{C}(F,E)$.*

Beweisskizze. *Die Richtung von* (1) *nach* (2) *ist (fast) trivial:* Ist nämlich F ein Banachraum mit Einheitskugel F_1, $T: F \to E$ kompakt und $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so existiert nach (1) zu der kompakten Menge $\overline{TF_1}$ in E ein Operator $S: E \to E$ von endlichem Rang mit $\| x - Sx \|_E < \epsilon$ für alle $x \in \overline{TF_1}$. Die Zusammensetzung $S \circ T$ liefert einen stetigen linearen Operator von F in E von endlichem Rang, derart daß für alle $y \in F_1$ gilt: $\| Ty - (S \circ T)y \|_E = \| Ty - S(Ty) \|_E < \epsilon$. Das besagt $\| T - S \circ T \|_{\mathscr{L}(F,E)} \leqslant \epsilon$, also $T \in \overline{\mathscr{F}(F,E)}$.

Zum Beweis der anderen Richtung benötigt man mehr Theorie; wir skizzieren daher (für Interessenten) den Beweisgang nur ganz kurz: Um (1) zu zeigen, sei die kompakte Teilmenge K_0 von E fest vorgegeben. Ein entscheidendes *Lemma* (vgl. [20]), das zunächst herzuleiten ist, besagt nun, daß man eine andere, sogar absolutkonvexe, kompakte Menge K in E mit $K_0 \subset K$ finden kann, für die K_0 noch kompakt im Banachraum E_K ist. Dabei bezeichnet E_K den linearen Unterraum von E, der von K erzeugt wird (also wegen der Absolutkonvexität $E_K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nK$), versehen mit dem Minkowski- oder Distanzfunktional von K als Norm. K ist die Einheitskugel von E_K, und folglich ist die kanonische Einbettung i von E_K nach E kompakt. (Das Lemma beruht im wesentlichen auf dem wichtigen *Satz*, daß jede kompakte Menge in einem Banachraum in der abgeschlossenen absolutkonvexen Hülle einer geeigneten Nullfolge enthalten ist.) Wenden wir nun (2) (mit $F = E_K$) auf $i \in \mathscr{C}(E_K, E)$ an, um für vorgegebenes $\epsilon > 0$ einen Operator $T: E_K \to E$ von endlichem Rang zu finden, der

$\| i - T \|_{\mathscr{L}(E_K, E)} < \frac{\epsilon}{2}$ genügt. Um den Beweis zu beenden, nutzt man jetzt die Kompaktheit von K_0 in E_K dazu aus, *mit etwas Dualitätstheorie (und einem Dichtheitsargument)* zu T eine stetige lineare Abbildung $S : E \to E$ von endlichem Rang zu bestimmen, die $\| Sx - Tx \|_E < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in K_0$ erfüllt. Insgesamt folgt dann mit der Dreiecksungleichung sofort $\| x - Sx \|_E < \epsilon$ für alle $x \in K_0$. □

Satz 6. hat zur Folge, daß das Problem der kompakten Operatoren nur *eine operatortheoretische Version des Approximationsproblems* ist: Gibt es einen Banachraum E ohne A.E., so gibt es auch einen weiteren Banachraum F und einen kompakten Operator $T : F \to E$, der nicht durch Abbildungen endlichen Ranges approximiert werden kann. Umgekehrt folgt aus der Existenz von Banachräumen E und F und eines Operators $T \in \mathscr{C}(F, E) \setminus \overline{\mathscr{F}(F, E)}$, daß E die A.E. nicht besitzt. Für seine negative Lösung des Approximationsproblems stand Enflo also „die" lebende Gans (von Banach) zu, und er konnte „sie" dann auch 1973 in Polen in Empfang nehmen (und dort – wegen der Exportbestimmungen – gleich an Ort und Stelle verzehren).

Zum besseren Verständnis wollen wir an Satz 6. noch einige weitere Bemerkungen anschließen. Grothendieck [11] bewies auch folgendes:

> **7. Satz**: *Für einen Banachraum E sind äquivalent:*
> (1) *Der Dualraum E' von E hat die A.E.*
> (2) *Für beliebigen Banachraum F und beliebigen kompakten Operator $T : E \to F$ ist T in der Operatornorm Limes von stetigen linearen Abbildungen endlichen Ranges, d.h. es gilt $\overline{\mathscr{F}(E, F)} = \mathscr{C}(E, F)$.*
> *Und die A.E. von E' impliziert die A.E. von E.*

Die Umkehrung der letzten Aussage von 7. ist falsch, wie man nach (Enflos Gegenbeispiel und) einer Überlegung von Lindenstrauss (siehe [15]) weiß: *Es gibt sogar einen Banachraum E mit Basis, dessen starkes Dual (wieder separabel ist, aber) nicht die A.E. hat.*

Übrigens scheint es *ein offenes Problem* zu sein, ob aus $\mathscr{C}(E, E) = \overline{\mathscr{F}(E, E)}$ bereits die A.E. des Banachraumes E folgt. Doch zeigt man, daß für Banachräume E und F mit $\mathscr{C}(F, E) \neq \overline{\mathscr{F}(F, E)}$ (und solche existieren nach Enflo) der Raum $X = E \oplus F$ die Eigenschaft $\mathscr{C}(X, X) \neq \overline{\mathscr{F}(X, X)}$ hat. (Für weitere Information hierzu siehe Bachelis [1].)

Kommen wir nun zu einer anderen interessanten (doch möglicherweise etwas weniger bekannten) Äquivalenz des Approximationsproblems, die man als (recht konkreten) *Funktionenraum-Aspekt* dieses Problems bezeichnen könnte.

8. Definition: Seien K_1, K_2 kompakte Hausdorffräume mit (topologischem) Produkt $K_1 \times K_2$. Sei für kompaktes K $C(K)$ die sup-Norm-Banachalgebra der stetigen (sagen wir) *komplexwertigen* Funktionen auf K. Für abgeschlossene lineare Unterräume A_i von $C(K_i)$ $(i = 1, 2)$ definieren wir zwei (wie sich leicht zeigt, *abgeschlossene*) Unterräume von $C(K_1 \times K_2)$:
(1) das sog. *Slice-Produkt* $A_1 \# A_2 := \{f \in C(K_1 \times K_2)$; die partielle Funktion $f(\,.\,, t_2): s \to f(s, t_2)$ auf K_1 gehört zu A_1, und die partielle Funktion $f(t_1, .): t \to f(t_1, t)$ auf K_2 gehört zu A_2 für alle festen $(t_1, t_2) \in K_1 \times K_2\}$,
(2) das *vollständige Tensorprodukt* $A_1 \mathbin{\bar{\otimes}} A_2 :=$ Abschließung in $C(K_1 \times K_2)$ des Raumes $A_1 \otimes A_2$ aller Funktionen, die endliche Summen von Produkten von Funktionen aus A_1 und A_2 sind, also die Form haben:

$$(t_1, t_2) \to \sum_{i=1}^{n} f_i(t_1)\, g_i(t_2) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}, f_i \in A_1, g_i \in A_2 \ (i = 1, \ldots, n).$$

Zunächst bemerken wir zur besseren Eingewöhnung dieser Bezeichnungen:

9. Satz (Dieudonné 1937): $C(K_1 \times K_2) = C(K_1) \# C(K_2) = C(K_1) \mathbin{\bar{\otimes}} C(K_2)$.

Beweis. Hier ist die erste Gleichung nach Definition des Slice-Produktes trivial, während die Dichtheit von $C(K_1) \otimes C(K_2)$ in $C(K_1 \times K_2)$ direkt aus dem *Satz von Stone-Weierstraß* folgt (vgl. etwa [3]). □

Im allgemeinen Fall von A_1 und A_2 wie in Definition 8. hat man stets $A_1 \mathbin{\bar{\otimes}} A_2 \subset A_1 \# A_2$, weil die Inklusion für $A_1 \otimes A_2$ offensichtlich ist und $A_1 \# A_2$ in $C(K_1 \times K_2)$ abgeschlossen sein muß. Ein Problem, das sich sofort stellt (und angeblich bereits Banach und Gelfand bekannt gewesen sein soll), ist in der folgenden Frage angesprochen:

Slice-Produkt-Problem: *Gilt für alle* A_1, A_2 *wie in 8. immer* $A_1 \mathbin{\bar{\otimes}} A_2 = A_1 \# A_2$?

Dies ist also ein reines *Approximationsproblem für Funktionen in zwei (abstrakten) Variablen:* Kann man jede Funktion aus $A_1 \# A_2 \subset C(K_1 \times K_2)$ nicht nur, wie nach 9. stets möglich, durch Funktionen aus $C(K_1) \otimes C(K_2)$, sondern sogar durch endliche Summen von Produkten von Funktionen aus A_1 und A_2 gleichmäßig auf $K_1 \times K_2$ approximieren? Anders gesagt, ist eine Approximation so möglich, daß die in der Definition von $A_1 \# A_2$

enthaltene Information über die partiellen Funktionen $f(t_1, .)$ und $f(., t_2)$, $t_1 \in K_1$, $t_2 \in K_2$, dabei nicht verlorengeht? Implizit wurde bei Grothendieck [11] dazu dann folgendes gezeigt (für einen Beweis siehe auch [2]):

10. Satz: *Für einen abgeschlossenen linearen Unterraum A_1 von $C(K_1)$, K_1 kompakt, sind folgende Aussagen äquivalent:*
(1) *A_1 hat die A.E.*
(2) *Für beliebigen kompakten Raum K_2 und beliebigen abgeschlossenen linearen Unterraum A_2 von $C(K_2)$ gilt $A_1 \# A_2 = A_1 \hat{\otimes} A_2$, d.h. jede Funktion aus $A_1 \# A_2$ kann gleichmäßig auf $K_1 \times K_2$ durch Funktionen aus dem Tensorprodukt $A_1 \otimes A_2$ approximiert werden.*

Zu diesem Satz können wir hier nur kurz die **Beweisidee** skizzieren: Wie nach einiger Überlegung zu sehen ist, kann man *das Slice-Produkt $A_1 \# A_2$ mit einem Raum kompakter Operatoren von Dualraum A_2' von A_2 nach A_1 identifizieren*, wobei die sup-Norm auf $K_1 \times K_2$ der Operatornorm entspricht. Und zwar sind die entsprechenden Abbildungen gerade diejenigen kompakten, die *noch schwach stetig* sind, d.h. stetig von A_2' $[\sigma(A_2', A_2)]$ nach A_1 $[\sigma(A_1, A_1')]$. Das Tensorprodukt $A_1 \otimes A_2$ entspricht bei dieser Identifizierung genau dem Teilraum aller Abbildungen endlichen Ranges.

Aber ein 6. ähnlicher, etwas modifizierter Satz besagt nun, daß die A.E. von A_1 dazu *äquivalent* ist, daß für alle Banachräume F im Raum der schwach stetigen kompakten Operatoren von F' nach A_1 die Operatoren endlichen Ranges dicht liegen. Um Satz 10. einzusehen, braucht man also nur noch zu überlegen, wieso man sich bei der letzten Aussage auf die Banachräume F beschränken kann, welche die Form A_2 abgeschlossen in einem $C(K_2)$, K_2 kompakt geeignet, besitzen. Dies ist aber einfach: *Denn jeder Banachraum F ist isometrisch isomorph einem abgeschlossenen linearen Unterraum A_2 von $C(K_2)$*, wo K_2 gerade die abgeschlossene Einheitskugel F_1' von F', versehen mit der schwach*-Topologie $\sigma(F', F)$, ist. (Das ergibt sich aus dem *Satz von Hahn-Banach* leicht; K_2 ist nach dem *Satz von Banach-Alaoglu-Bourbaki* kompakt.) □

Als Folgerung aus Satz 10. bekommen wir jetzt, daß überraschenderweise *auch das Slice-Produkt-Problem* (das doch mit relativ konkreten Räumen arbeitet und a priori nichts mit irgendwelchen kompakten Teilmengen von A_1 oder A_2 oder mit kompakten Operatoren zu tun hatte) *zum Approximationsproblem äquivalent* ist! Dazu brauchen wir nämlich nur das letzte Argument aus der Beweisskizze von Satz 10. erneut zu überdenken: Gibt es einen Banachraum E ohne A.E., so gibt es (da isometrisch isomorphe

Räume immer *gemeinsam* die A.E. haben bzw. nicht haben) ein Kompaktum $K_1(=E_1' [\sigma(E', E)])$ und einen abgeschlossenen linearen Unterraum $A_1(\cong E)$ von $C(K_1)$ ohne A.E. Zu diesem können wir nach 10. ein kompaktes K_2 und ein abgeschlossenes A_2 in $C(K_2)$ finden, für das es gewisse Funktionen $f \in A_1 \# A_2$ gibt, die sich nicht durch Funktionen aus $A_1 \otimes A_2$ approximieren lassen. Umgekehrt impliziert für vorgegebene K_1 und K_2, A_1 und A_2 die Existenz von nur einem $f \in A_1 \# A_2 \setminus A_1 \bar{\otimes} A_2$ nach 10., daß A_1 ein Banachraum ohne A.E. ist.

Das Slice-Produkt-Problem tauchte Ende der 60er Jahre in einer *eingeschränkten* Form in Arbeiten von Birtel, Eifler u.a. auf (s. dazu [2]). Wir notieren:

11. Definition: Ist K kompakt, so heißt eine abgeschlossene Teil*algebra* A von $C(K)$, die die Konstanten enthält und die Punkte trennt (d.h. zu $t_1, t_2 \in K$, $t_1 \neq t_2$, gibt es $f \in A$ mit $f(t_1) \neq f(t_2)$) *uniforme Algebra* (auf K).

(Für *reelle* Skalare hätte der *Satz von Stone-Weierstraß* sofort zur Folge, daß eine uniforme Algebra über K wie in 11. bereits gleich **ganz** $C(K)$ sein müßte. Wir sind hier aber über $\mathbb{C}$, wo dies keineswegs der Fall ist!) – Die Definition führt zu:

Eingeschränktes Slice-Produkt-Problem: *Gilt für beliebige uniforme Algebren A_1 und A_2 (auf beliebigen kompakten Räumen K_1 und K_2) stets $A_1 \# A_2 = A_1 \bar{\otimes} A_2$?*

Insbesondere könnte man denken, daß die vorausgesetzte *multiplikative* (Algebra-) Struktur hier einen Unterschied zum Slice-Produkt-Problem hervorrufen würde. Doch der Satz von Milne, den wir im 3. Kapitel beweisen wollen, legte dann (1972) klar, daß *auch das eingeschränkte Slice-Produkt-Problem noch äquivalent zum Approximationsproblem* ist und daher mit diesem eine negative Antwort hat.

Wir schließen das 1. Kapitel mit einigen weiteren *Bemerkungen für interessierte Leser:*

1. Die wichtige Äquivalenz in Satz 6. über die A.E. von Banachräumen hat *bei allgemeineren lokalkonvexen Räumen* ein ebenso wichtiges *Analogon*; dazu benötigt man *den Begriff des ϵ-Produktes* von L. Schwartz: Siehe [19] oder [20]. (Gerade bei Anwendung auf Funktionenräume erweist sich dies als sehr nützlich.)
2. Eine Diskussion der A.E. wäre unvollständig, ohne *das nach Grothendieck zum Approximationsproblem äquivalente ≪ problème de biunivocité ≫* (siehe [20]) zu erwähnen: *Ein Banachraum E hat die A.E.*

genau dann, wenn eine (und damit jede) der folgenden untereinander äquivalenten Aussagen richtig ist:

(1) *Für jeden Banachraum F ist die natürliche Abbildung von* $E\hat{\otimes}_\pi F$ *in* $E\check{\otimes}_\epsilon F$ *eineindeutig.*
(2) *Für jeden Banachraum F ist die kanonische Abbildung von* $F'\hat{\otimes}_\pi E$ *in* $\mathscr{L}(F,E)$ *injektiv.*
(3) *Die kanonische Abbildung von* $E'\hat{\otimes}_\pi E$ *nach* $\mathscr{L}(E,E)$ *ist injektiv.*
(4) *Für jedes* $u \in E'\hat{\otimes}_\pi E$, *für das die* (vgl. (3)) *zugeordnete („nukleare") Abbildung von E nach E Null ist, muß auch die Spur von u Null sein, d.h. die Spur ist auf dem Raum der nuklearen Operatoren auf E wohldefiniert.*

Die hier vorkommenden Begriffe sind in Büchern über topologische Tensorprodukte (und auch in Schaefer [18]) erklärt. Die Aussagen sind von Bedeutung in der Theorie dieser Tensorprodukte, (4) hat auch in der Operatortheorie erhebliches Interesse. – Übrigens benutzt man die oben erwähnte Äquivalenz dazu, einen Beweis der letzten Aussage in Satz 7. zu geben (der also keineswegs einfach ist).

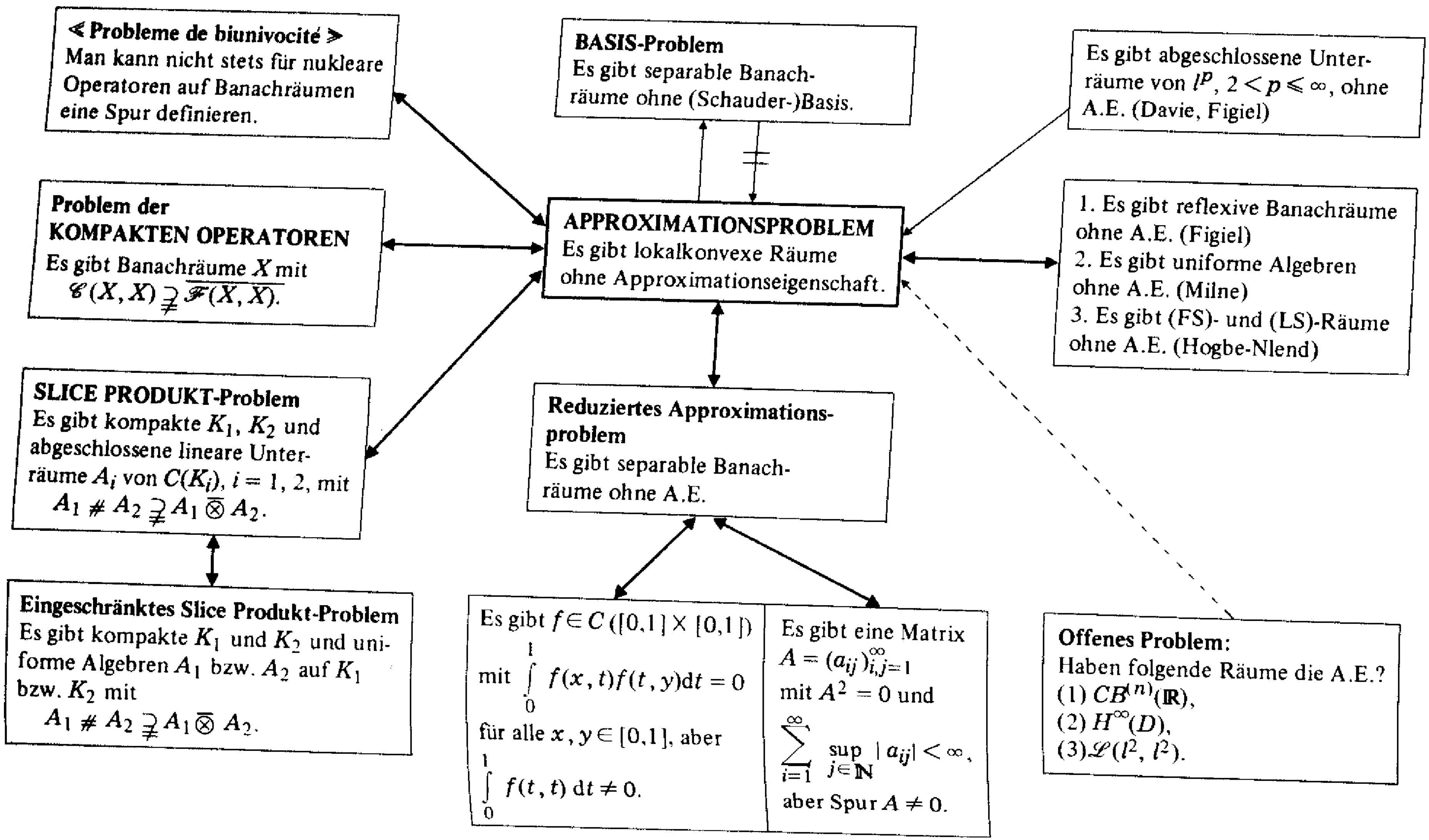
3. Bei Grothendieck [11] wird das Approximationsproblem durch Zuhilfenahme weiterer Theorie *auf einige konkrete Fragestellungen reduziert.* So ergibt sich dort, daß die Aussage, *jeder* Banachraum habe die A.E., *äquivalent* ist zu jeder der folgenden Behauptungen:

(i) Ist $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ eine unendliche Matrix mit $\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_{ij}| < \infty$ und $A^2 = 0$, dann gilt Spur $A = 0$.
(ii) Wenn f eine stetige Funktion auf $[0,1] \times [0,1]$ ist mit
$\int_0^1 f(x,t)f(t,y)\mathrm{d}t = 0$ für alle $x, y \in [0,1]$, so muß bereits
$\int_0^1 f(t,t)\mathrm{d}t = 0$ sein.
(Hier kann als Skalarenkörper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zugelassen werden.)

Wie sich aus Enflos Gegenbeispiel *auch konkrete Gegenbeispiele zu (i) und (ii)* ableiten lassen, wird in Davie [6] erklärt.

4. Wir haben bereits erwähnt, daß es separable Banachräume mit A.E., aber ohne Basis gibt. Kürzlich haben nun Mityagin und Zobin [17] auch ein *Beispiel eines nuklearen (F)-Raumes ohne Basis* angegeben. (Nukleare Räume haben stets die A.E.!)

Liste der Probleme und ihrer negativen Lösung nach Enflo:



2. Beispiele zur Approximationseigenschaft; Entwicklung des Approximationsproblems von Grothendieck bis heute

Es ist an der Zeit, einige *Beispiele* zur A.E. zu betrachten. Man pflegte vor Enflos Gegenbeispiel zu sagen, daß jeder „in den Anwendungen auftauchende (konkrete) Raum" die A.E. besitze. (Natürlich ist auch Enflos Gegenbeispiel „konstruiert", also nicht gerade „konkret", doch hilft eine solche sophistische Unterscheidung heute nicht mehr.) Tatsächlich stellte sich nämlich heraus, daß *viele lokalkonvexe und viele („klassische") Banachräume die A.E. haben.* Dies liefert nach 1., 6., 7. und 10. sofort *positive* Ergebnisse. (Wir haben die entsprechenden Sätze offensichtlich bewußt so formuliert, daß Gegenbeispiele zum Approximationsproblem nur gewisse Aussagen für *beliebige* Räume ausschließen. Die Gegenbeispiele besagen dann in diesem Zusammenhang, grob gesprochen, daß man sich zum Beweis positiver Resultate hier wirklich „anstrengen" muß – etwa beim Beweis der A.E. einiger benutzter Räume – und sie nicht sowieso „geschenkt" bekommt!)

Von folgenden *konkreten* Räumen weiß man nun, daß *sie die A.E. besitzen:*

(1) gewisse *Folgenräume*, z.B. l^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ und c_0,

(2) viele (reelle oder komplexe) *Funktionenräume* wie $L^p(X, \mu)$, X lokalkompakt und μ positives Maß auf X, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; $C(K)$, K kompakt; $CB(X)$ mit der sup-Norm, X vollständig regulär; $C_c(X)$ mit seiner kanonischen induktiven Limes-Topologie, X lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar; die Diskalgebra und allgemeiner $A(K)$ für beliebige kompakte $K \subset \mathbb{C}$ oder für gewisse „gutartige" $K \subset \mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ usw.,

(3) die meisten *Distributionsräume* und die entsprechenden *Grundräume*, jedenfalls wenn geeignete Abschneide- und Regularisierungsoperatoren existieren, s. etwa Schwartz [19]. Hierzu gehören etwa die Räume $\mathscr{D}, \mathscr{D}^m, \mathscr{E}^m, \mathscr{S}, \mathscr{O}_M, \mathscr{D}_{L^p}, \mathscr{D}', \mathscr{E}', \mathscr{S}', \mathscr{O}'_C, \mathscr{D}'_{L^p}$ $(0 \leqslant m \leqslant \infty, 1 \leqslant p < \infty)$.

Auch Räume stetiger Funktionen, deren Topologie mit Hilfe eines Systems von Gewichtsfunktionen definiert wird, haben in fast allen wichtigen Fällen die A.E. (siehe [4]). Hier beruht ein Beweis (wie auch bei den Räumen unter (2) mit Ausnahme derer des letzten Typs, wo man mehr Theorie benötigt) oft auf der *Existenz geeigneter Zerlegungen der Eins.* – (1) ist natürlich fast immer eine einfache Folgung von Satz 4. Wir erwähnen noch, daß die letzte Aussage von (2) mittels Satz 10. *interessante Anwendungen auf die Polynomapproximation im* $\mathbb{C}^n$ hat (vgl. dazu [2] und [3]).

Dagegen scheint bisher bei folgenden konkreten Banachräumen *nicht geklärt* zu sein, ob sie die A.E. haben:

(i) $CB^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ = Raum aller m-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, die samt aller partiellen Ableitungen bis zur Ordnung m einschließlich auf $\mathbb{R}^n$ (gleichmäßig) beschränkt sind, versehen mit der Norm

$$\| f \| = \sup_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(D^\alpha f)(x)|, \text{ für } 0 < m < \infty,$$

(ii) $H^\infty(D)$ = sup-Norm-Algebra der beschränkten holomorphen Funktionen auf dem offenen Einheitskreis D der komplexen Ebene,

(iii) $\mathscr{L}(l^2, l^2)$, also der Raum aller stetigen linearen Operatoren auf „dem" separablen Hilbertraum l^2 mit der Operatornorm.

Man sieht hieran, daß doch für einige recht konkrete Räume Probleme auftreten können, wenn man fragt, ob sie die A.E. haben!

Außer *einzelnen Beispielen* von Räumen mit A.E. läßt sich zeigen, daß gewisse Raum*klassen* immer dieA.E. haben.

12. Satz: *Die A.E. besitzen alle*
(1) *(separablen) Banachräume mit (Schauder-) Basis,*
(2) *Hilberträume,*
(3) *komplexen kommutativen C^*-Algebren,*
(4) *nuklearen (lokalkonvexen) Räume.*

Zum **Beweis**: (1) ist gerade Satz 4., (2) beweist man analog durch Anwendung einer Folgerung zum *Satz von Banach-Steinhaus* auf eine (i.a. natürlich nicht abzählbare) Orthonormalbasis des Hilbertraumes. (3) folgt aus dem bekannten *Darstellungssatz von Gelfand-Neumark*, der für jede kommutative C^*-Algebra über $\mathbb{C}$ mit Einselement eine isometrische Algebra-Isomorphie mit einem $C(K)$, K kompakt geeignet, herstellt. (Wenn die Algebra kein Einselement hat, läßt sich der Beweis entsprechend modifizieren.) Schließlich ist ein vollständiger lokalkonvexer Raum E, wie man weiß, genau dann nuklear, wenn in der kanonischen Darstellung $E = \operatorname{proj}_{\leftarrow V} \widehat{E_V}$ *nukleare* verbindende Abbildungen vorliegen. Ein Faktorisierungssatz für solche Abbildungen zeigt, daß die $\widehat{E_V}$ dann *als Hilberträume gewählt* werden können. Unter Zuhilfenahme dieser Überlegungen erhält man (4) aus (2) und gewissen *Vererbungseigenschaften der A.E.* (siehe auch weiter unten). □

Noch ein Wort zur Bedeutung von 12.(4): In der Distributionstheorie und bei der Behandlung von Räumen holomorpher Funktionen oder bei Lösungsräumen gewisser partieller Differentialoperatoren treten nukleare Räume auf. So liegt dem von L. Schwartz hergeleiteten wichtigen „*Satz vom Kern*" der Begriff des nuklearen Raumes zugrunde; daher auch der Name. Die Klasse der nuklearen Räume enthält von den Banachräumen nur genau die endlichdimensionalen; doch läßt sich mit ihr eine Theorie aufbauen, die bedeutende Anwendungen hat und in gewisser Weise näher an der endlichdimensionalen Theorie liegt als die der Banachräume. In der modernen Theorie topologischer Vektorräume spielen die nuklearen Räume eine fast ebenso bedeutende Rolle wie die Banachräume.

Für die Praxis wäre es schön, wenn man die in Satz 12. aufgeführten Raumklassen noch etwas *vergrößern* oder *weitere solche Raumklassen* finden könnte. So erhoben sich folgende **Fragen**:

(I) *Haben alle reflexiven Banachräume die A.E.?*
(II) *Haben alle uniformen Algebren die A.E.?*
(III) *Haben alle Fréchet-Schwartz-Räume (bzw. die dazu dualen sog. (LS)-Räume) die A.E.?*

(I) bezieht sich natürlich auf eine Verallgemeinerung von 12.(2), ebenso wird (III) durch 12.(4) motiviert: Vollständige lokalkonvexe Räume E sind Schwartzräume genau dann, wenn in der Darstellung $E = \operatorname{proj}_{\leftarrow V} \hat{E}_V$ (zwar nicht nukleare, aber doch) *kompakte* verbindende Abbildungen vorliegen. In der Praxis treten unter den vollständigen Schwartz-Räumen besonders die metrisierbaren, sog. (FS) (= Fréchet-Schwartz)-Räume, und ihre starken Duale, die (LS)-Räume, auf; daher (III). *Alle drei Fragen wurden negativ beantwortet, so daß Satz 12. in gewisser Weise scharf ist:* Per Enflos Gegenbeispiel löste (I) negativ, während sich Gegenbeispiele zu (II) und (III) aus (Enflos Gegenbeispiel und) Sätzen von Milne bzw. Hogbe-Nlend ergaben, auf die im 3. Kapitel genauer eingegangen werden soll.

Wir kommen damit zu einem *Überblick über die historische Entwicklung des Approximationsproblems nach Grothendieck (1955).* Am Ende seines Buches [11] hatte Grothendieck folgende scheinbar plausiblen **Vermutungen** ausgesprochen: Nicht jeder Banachraum hat die A.E., aber möglicherweise besitzt sie doch jeder *reflexive* Banachraum.

Es gab in den darauffolgenden Jahren wenig neue *allgemeine* Erkenntnisse zum Approximationsproblem. Man bewies von einzelnen Räumen, daß sie die A.E. besitzen, und hoffte wohl, unter konkreten, *in der Praxis auftretenden* Räumen ein Gegenbeispiel zu finden. [Dieses Problem ist in gewisser Weise heute noch ungeklärt, wie die Beispiele (i) - (iii) oben zeigen.] Vor Enflo wurde kein Versuch bekannt, ein Gegenbeispiel zu *konstruieren.*

Übrigens fand sich in den „Notices" der American Mathematical Society um 1970 eine Ankündigung eines Satzes, der eine positive Antwort auf das Approximationsproblem nach sich gezogen hätte. Doch war dort am entscheidenden Punkt eine Beweislücke zu entdecken. Dies war auch nicht das einzige Mal, daß falsche „Beweise" der A.E. aller Banachräume auftauchten, was unter anderem zeigt, daß man sich unter den Spezialisten lange Zeit nicht klar darüber war, ob es nicht vielleicht doch eine *positive* Lösung des Approximationsproblems geben könnte.

Die Impulse, die schließlich zur tatsächlichen Lösung des Problems geführt haben, entwickelten sich hauptsächlich *aus zwei Richtungen:* Die *Theorie der (Schauder-) Basen* machte starke Fortschritte (vgl. [15] und Singers Buch [21]), während man andererseits die *Theorie der „klassischen" Banachräume* vorantrieb (R.C. James, Lindenstrauss, Pelczyński, Rosenthal u.a.m., siehe die Lecture Notes [14] von Lindenstrauss und Tzafriri). Dort wurde bei der Theorie der sog. $\mathscr{L}_p$-Räume z.B. auch untersucht, wie die endlichdimensionalen Unterräume in solchen Banachräumen liegen. Der Einfluß von diesen Seiten auf Enflo ist leicht zu erkennen: Enflo schrieb zunächst eine Arbeit über das Beispiel eines Banachraumes mit Basiskonstante > 1 ([7]; wie Singer angibt, muß zumindest die wesentliche Idee zu diesem Beispiel spätestens 1970 entstanden sein), während er die letzten Jahre über bei Rosenthal in Berkeley gearbeitet hat.

Der erste konkrete Fortschritt im Approximationsproblem nach Grothendieck gelang aber T. Figiel 1970, als er in seiner Dissertation bewies (vgl. [9]), daß sich die beiden Vermutungen Grothendiecks in Wirklichkeit widersprachen: Figiel zeigte, daß ein Beweis der A.E. für alle *reflexiven* Banachräume bereits die A.E. *aller* Banachräume nach sich ziehen würde. Die Idee hierzu ist sehr einfach, wenn man einen *Faktorisierungssatz für kompakte Operatoren* zur Verfügung hat, der auf frühere Ergebnisse von W. Johnson zurückgeht.

13. Satz: *Seien E und F beliebige Banachräume und $T : F \to E$ ein kompakter linearer Operator. Dann lassen sich stets ein reflexiver Banachraum X und kompakte Operatoren $T_1 : F \to X$ und $T_2 : X \to E$ finden mit $T = T_2 \circ T_1$.*

Durch Kombination von 6. und 13. zeigt sich, daß die A.E. für alle reflexiven Banachräume implizieren würde, daß für beliebige Banachräume E, F stets $\overline{\mathscr{F}(F,E)} = \mathscr{C}(F,E)$ gilt (denn in der obigen Faktorisierung $T = T_2 \circ T_1$ für ein $T \in \mathscr{C}(F,E)$ wäre T mit T_1 durch Operatoren endlichen Ranges approximierbar). Also hätte, wieder nach 6., jeder Banachraum die A.E. Daß man also nach Figiel nachweisbar „klüger" als Grothendieck geworden war, hatte vor allem auch große psychologische Konsequenzen: Von nun an wurde an der Lösung des Approximationsproblems mit Hochdruck gearbeitet.

Man kann die reflexiven Räume X, über die sich kompakte Operatoren nach 13. faktorisieren lassen, sehr stark einschränken und genauer charakterisieren. Dies tat Johnson in seiner Arbeit [13], wobei er zu einem „*komplementiert universellen dualen Banachraum für separable Banachräume*" gelangte. Das heißt, Johnson gab einen Banachraum $C_1{}'$ an, so daß für jeden beliebigen separablen Banachraum E der Dualraum E' normisomorph einem stetig projizierten Unterraum von $C_1{}'$ ist. Man beachte nun, daß sich die A.E. nach der letzten Aussage von 7. vom Dual E' eines Banachraumes E auf E selbst vererbt und daß sicher jeder *stetig projizierte* Unterraum eines Raumes mit A.E. wieder die A.E. besitzt. Damit bekommt man, daß die A.E. von $C_1{}'$ bereits die A.E. jedes separablen Banachraumes und damit *eine positive Lösung des Approximationsproblems* nach sich ziehen würde! Nun ist $C_1{}'$ (bis auf eine Isometrie) gerade eine sog. l^∞-direkte Summe gewisser endlichdimensionaler Räume $G_n{}'$ (wachsender Dimension), also

$$C_1{}' = \{(g_n{}')_{n\in\mathbb{N}}; g_n{}' \in G_n{}' \ , \ \|(g_n{}')_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n{}'\|_{G_n{}'} < \infty\}.$$

Es könnte damit auf den ersten Blick so aussehen, als ob dieses Ergebnis von Johnson eine positive Lösung des Approximationsproblems hätte erwarten lassen. Doch war andererseits damit *ein guter Kandidat für ein Gegenbeispiel* gefunden. (Enflos Konstruktion verlief allerdings aus technischen Gründen anders, doch wissen wir nach seinem Gegenbeispiel natürlich, daß auch $C_1{}'$ oben nicht die A.E. hat!)

Im Sommer 1972 ging innerhalb ganz kurzer Zeit die Nachricht unter den Funktionalanalytikern um die Welt, daß Enflo ein *Gegenbeispiel zum Approximationsproblem* gefunden hatte. Verfolgen wir Enflos Entwicklung etwas genauer: Enflo hatte zunächst einen Banachraum mit Basiskonstante > 1 konstruiert (siehe [7]), indem er einen Unterraum des Folgenraumes l^∞ aus gewissen endlichdimensionalen Räumen aufbaute. Es handelte sich dabei um eine Konstruktion, die sich im wesentlichen um zweidimensionale Teilräume drehte. – Dies war allerdings, wie es zunächst schien, kein Weg zu einer negativen Lösung des Approximationsproblems: Lindenstrauss zeigte anschließend sogar, daß man einen uniform konvexen Banachraum mit Basiskonstante > 1 bekommen kann, der isomorph zu einem Hilbertraum ist, also mit diesem die A.E. hat. Die Basiskonstante ist ja auch ein Begriff der *isometrischen* Theorie, während die A.E. zur *iso-*

morphen Theorie der Banachräume gehört. *Immerhin war dies das stärkste damals bekannte Ergebnis hin zu einer negativen Lösung des Basisproblems.*

Und es gab eine Verbindung der isomorphen zur isometrischen Theorie: Der der A.E. analoge Begriff dort ist die sog. *metrische A.E.*, bei der die Identität von Operatoren endlichen Ranges *der Norm* $\leqslant 1$ approximiert werden muß. Grothendieck [11] hatte aber gezeigt, daß *reflexive Banachräume mit A.E. sogar die metrische A.E. haben müssen.* Tatsächlich zeichnete dies Enflos weiteren Weg vor: Er konstruierte einen Teilraum von l^∞ *ohne metrische A.E.* und bemerkte, daß man die angegebene Konstruktion so modifizieren könne, daß sie einen *reflexiven* Raum liefert. In der später entstandenen publizierten Version des Artikels über ein Gegenbeispiel zur A.E. ([8]) wurde dann direkt ein Banachraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) ohne metrische A.E. angegeben, der separabel und reflexiv ist als Teilraum einer l^2-direkten Summe gewisser endlichdimensionaler Räume. Im Gegensatz zum früheren Artikel [7] mußten hier höherdimensionale Unterräume betrachtet werden, und die Konstruktion wurde erheblich komplizierter.

Man benötigte sogar ein nicht sehr einfaches kombinatorisches Lemma. – Allerdings ist es auch eigentlich *eine Methode zur Erzeugung von Banachräumen ohne A.E.*, die in [8] entwickelt wird!

Enflos Konstruktion wurde anschließend von mehreren anderen Mathematikern vereinfacht: Pełczyński und Figiel konstruierten einen Unterraum des Raumes c_0 aller Nullfolgen ohne A.E. Dabei wurde das kombinatorische Argument durch Benutzung 2^n-dimensionaler statt n-dimensionaler Unterräume wesentlich einfacher. (Daß es, wenn überhaupt ein Banachraum ohne A.E. existiert, auch einen abgeschlossenen Unterraum von c_0 ohne A.E. geben mußte, war bereits Grothendieck klar.) S. Kwapień und ebenso A.M. Davie ersetzten die kombinatorischen durch wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen. Und unabhängig voneinander fanden schließlich Davie und Figiel 1973 folgende *Verallgemeinerung* von Enflos Gegenbeispiel:

14. Satz: *Für jedes p mit* $2 < p \leqslant \infty$ *hat der Folgenraum* l^p *einen abgeschlossenen linearen Unterraum ohne A.E.*

Bei $p = 2$ wird dies im Hilbertraum l^2 natürlich falsch; *ob die Aussage von 14. allerdings für* $1 < p < 2$ *richtig bleibt, ist ein offenes Problem.* Dennoch ist schon wieder eine neue **Vermutung** aufgetaucht: *Gilt vielleicht, daß ein Banachraum E, für welchen jeder abgeschlossene lineare Teilraum die A.E. hat, bereits topologisch isomorph zu einem Hilbertraum sein muß?* Ob diese Vermutung sich als richtig erweist, muß die Zukunft zeigen.

Davies Konstruktion in [5] ist die eleganteste und am leichtesten zugängliche. (Sie wird auch bei Lindenstrauss, Tzafriri [14] skizziert.) Bei ihr gibt man *direkt* einen Raum ohne A.E. an, statt einen Umweg über (Äquivalenzen des Approximationsproblems oder über) tieferliegende Sätze von Grothendieck zu nehmen. *Wir skizzieren hier kurz für Interessenten den Ausgangspunkt der Konstruktion* und verweisen für die technisch noch immer recht komplizierte Durchführung auf die Originalarbeit.

Sei φ der Raum aller endlichen (reellen oder komplexen) Folgen, d.h. eine Folge $x = (x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ gehört zu φ, wenn für alle $k \geqslant k_0 = k_0(x)$: $x^k = 0$ gilt. Wir wollen $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \varphi$ finden, derart daß X = abgeschlossene lineare Hülle von $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in c_0 oder l^p, $2 < p < \infty$, einen Banachraum ohne A.E. bildet. Dazu gibt man mit den u_n gleichzeitig ein System $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \varphi$ an, von dem man sich vorstellt, es liege im Dualraum des Raumes, der $\{u_n\}$ enthält – also in l^q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, falls $X \subset l^p$, bzw. in l^1, falls $X \subset c_0$. $\{u_n, \varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soll ein biorthogonales System bilden, d.h. man fordert $\varphi_n(u_m) = \delta_{nm}$ (= 1, falls $n = m$, und 0 sonst) für alle $n, m \in \mathbb{N}$, wobei klar ist, was $\varphi_n(u_m)$ bedeutet. Nun konstruiert man die u_n und φ_n nicht per Induktion nach n, sondern in Blöcken: Der k-te Block besteht aus 2^k Elementen ($k = 0, 1, \ldots$), und in k-ten Schritt werden also die u_n und φ_n angegeben mit $n \in A_k := \{2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1\} \subset \mathbb{N}$. Bei der Konstruktion und dem Beweis ist folgende **Definition** fundamental:

Für X wie oben und einen stetigen linearen Operator T von X in sich ist die *„mittlere Spur von T im k-ten Block"* gegeben durch

$$\beta_k(T) := \frac{1}{2^k} \sum_{n \in A_k} \varphi_n(T u_n).$$

Der entscheidende Punkt im Beweis ist nun die Wahl der u_n und φ_n so, daß für jedes $T \in \mathscr{L}(X, X)$ $\beta(T) := \lim\limits_{k\to\infty} \beta_k(T)$ existiert und folgende Eigenschaften hat: β ist stetiges lineares Funktional auf dem Raum $\mathscr{L}_c(X)$, d.h. auf dem Raum $\mathscr{L}(X, X)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X, und man bekommt $\beta \equiv 0$ auf den Operatoren endlichen Ranges. Andererseits gilt $\beta_k(\mathrm{id}_X) = 1$ für alle k (da $\{u_n, \varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonal), also auch $\beta(\mathrm{id}_X) = 1$. Der Satz von Hahn-Banach für den lokalkonvexen Raum $\mathscr{L}_c(X)$ (oder ein direktes Argument) zeigt dann, daß X nicht die A.E. hat, weil id_X nicht in $\mathscr{L}_c(X)$ durch Operatoren endlichen Ranges approximiert werden kann. □

Die Folgen der negativen Lösung des Approximationsproblems sind beträchtlich, wie aus dem Bisherigen wohl klargeworden sein dürfte. Tatsächlich zeigt sich immer mehr (vgl. auch Kapitel 3), daß es *viele Räume ohne A.E.* geben muß. Es wird in Zukunft sowohl in der Banachraum-Theorie als auch in der Theorie der lokalkonvexen Räume darum gehen, *möglichst einfache Charakterisierungen der Räume mit A.E.* anzugeben (und *handliche Kriterien dafür* zu finden, *daß ein Raum die A.E. besitzt).*

Vor allem, wenn man von vorgegebenen Räumen bei konkreten Untersuchungen die A.E. benötigt, spielen die bisher bekannten Beispiele und, darauf aufbauend, *Überlegungen mit Hilfe der Vererbungseigenschaften der A.E.* eine wesentliche Rolle. Diese Vererbungseigenschaften sind i.a. recht schwach, doch kennt man einige, die in den Fällen, die man in der Praxis trifft, helfen können. Wir stellen sie zum Schluß dieses Kapitels in einer **Tabelle** zusammen:

15. Satz: Die A.E. vererbt sich von	auf
(1) einem lokalkonvexen Raum	*dichte* Unterräume, insbesondere also:
(1') der Vervollständigung $\hat{E}$ eines Raumes E	E selbst
(2) einem lokalkonvexen Raum	*stetig projizierte* Unterräume
(3) allen lokalkonvexen E_α, $\alpha \in A$,	$E = \underset{\leftarrow \alpha}{\mathrm{proj}}\, E_\alpha$, *sofern die Projektion von E in jedes E_α dichtes Bild* hat, insbesondere also:
(3') den Räumen E_α	ihr Produkt $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha$
(4) allen lokalkonvexen E_α, $\alpha \in A$,	$E = \underset{\alpha \rightarrow}{\mathrm{ind}}\, E_\alpha$ bei Einbettungsspektren mit quasivollständigem Grenzraum, sofern *jedes kompakte K in E bereits in einem E_α liegt und dort bzgl. der Topologie von E_α kompakt ist* (insbesondere also bei abzählbaren *strikten* oder *kompakten* Einbettungsspektren vollständiger Räume), als *Spezialfall:*
(4') den Räumen E_α	ihre direkte Summe $\bigoplus_{\alpha \in A} E_\alpha$

(5) einem *quasivollständigen tonnelierten oder bornologischen* Raum E	das Dual $E'_c = E'$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von E, als *Spezialfall:*
(5') einem *Montelraum*	das *starke* Dual E'_b
(6) dem Dual E'_c eines Raumes E wie unter (5)	$E (= (E'_c)'_c)$ selbst
(7) dem *starken* Dual $E'(= E'_b)$ eines Banachraumes (oder Montelraumes) E	E selbst
(8) zwei vollständigen lokalkonvexen Räumen E und F	das Tensorprodukt $E \check{\otimes}_\epsilon F$
(9) zwei (F)- (oder zwei Montel-(DF)-) Räumen E und F	das Tensorprodukt $E \hat{\otimes}_\pi F$, insbesondere:
(8', 9') einem Banachraum E und dem Dual F' eines Banachraumes F	die Räume $\mathscr{C}(F, E)$ bzw. $\mathscr{N}(F, E)$ der kompakten bzw. nuklearen Operatoren von F nach E.

Hierbei sind (1) - (3) und (5) - (8) „klassisch" und finden sich (evtl. implizit oder in etwas stärkeren oder schwächeren Fassungen) bei Grothendieck [11], Schwartz [19] und [20] oder Schaefer [18]. (4) wurde etwa von Hogbe-Nlend (siehe [12]) gezeigt, und (9) erhält man durch Kombination einiger anderer Vererbungseigenschaften mit einer Formel über $(E \hat{\otimes}_\pi F)'_c$, die auf Buchwalter zurückgeht (vgl. [4]). □

Satz 15. ist in vielen Punkten scharf: Es ist trivial, daß *sich die A.E. nicht einmal bei Banachräumen auf abgeschlossene Unterräume* [*oder auf Quotientenräume*] *vererbt* (denn jeder Banachraum „ist" abgeschlossener Unterraum eines $C(K)$, und jeder separable Banachraum „ist" Quotient von l^1). Außerdem haben wir schon erwähnt, daß *sich die A.E. bei Banachräumen nicht auf das starke Dual vererbt;* ebenso *braucht auch das starke Dual eines vollständigen nuklearen Raumes nicht die A.E. zu haben* (denn nach Hogbe-Nlend „ist" jeder Banachraum starkes Dual eines vollständigen nuklearen Raumes). Schließlich kann man zeigen (Valdivia), daß jeder Banachraum sich als Limes eines induktiven Einbettungsspektrums von (separablen) Hilberträumen darstellen läßt, so daß *auch bei (4) die angegebene Voraussetzung über die kompakten Mengen nicht ersatzlos gestrichen werden kann.*

Wir erinnern daran, daß wir die Vererbungseigenschaften 15.(1') und (3) bereits bei der Reduktion des Approximationsproblems von lokalkonvexen auf Banachräume und weiter noch beim Beweis von 12.(4) benutzt hatten. – Für Unterräume vieler sog. gewichteter Räume stetiger Funktionen kann man zeigen, daß *sich die Approximationseigenschaft dort mit Hilfe der antisymmetrischen Mengen* genauso *lokalisieren läßt*, wie eine Verallgemeinerung des (Bishopschen) Stone-Weierstraß-Satzes (vgl. [3]) dies vorschreibt. Eine solche Lokalisierung kann als (recht spezielle, doch sehr nützliche) Vererbungseigenschaft der A.E. interpretiert werden. Für den (nicht gerade einfachen) Beweis und erste Anwendungen siehe [4].

3. Zwei Sätze von Milne und Hogbe-Nlend zur A.E.

Der im Titel dieses Kapitels erwähnte *Satz von Milne* [16] lautet:

16. Satz: *Es existieren uniforme Algebren ohne A.E.*

16. gibt also die früher angekündigte *negative Antwort auf Frage (II) aus dem vorhergehenden Kapitel und zeigt, daß auch die Algebrastruktur bei der Frage nach der A.E. nicht unmittelbar hilft.* – Es wäre (da der Beweis von 16. nur die *Existenz* liefert) schön, eine *konkrete* uniforme Algebra zu kennen – etwa über einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ –, welche die A.E. nicht hat.

Satz 16. ist eine einfache Folgerung des nächsten, leicht zu beweisenden Satzes 17., in dem *die eigentliche Idee von Milnes Artikel* [16] liegt:

17. Satz: *Jeder komplexe Banachraum E ist isometrisch isomorph einem stetig projizierten Unterraum einer geeigneten uniformen Algebra A.*

Denn nach 17. folgt aus Vererbungseigenschaft 15.(2) der A.E. sofort, daß bereits jeder komplexe Banachraum die A.E. hätte, wenn dies nur für alle uniformen Algebren (über beliebigen Kompakta, wohlgemerkt!) richtig wäre. Wie oben schon notiert, arbeitet Enflos Gegenbeispiel aber *sowohl über* $\mathbb{R}$ *als auch über* $\mathbb{C}$ (vgl. dazu [5]). Zum Beweis von 16. langt es also, 17. zu beweisen.

Beweis von 17. Zu dem komplexen Banachraum E wählen wir uns als kompakte Menge K, über welcher die entsprechende Algebra A definiert sein soll, $K := E_1' \,[\sigma(E', E)]$, also die (abgeschlossene) Einheitskugel E_1' des Dualraumes E', versehen mit der schwach*-Topologie $\sigma(E', E)$. E ist isometrisch in $C(K)$ eingebettet per $S : E \to C(K)$, definiert durch

$[S(e)](e') = e'(e)$ für alle $e' \in E_1'$. (Wir schränken also die Einbettung von E in sein Bidual E'' auf E_1' ein.) Daß K kompakt ist und S eine Isometrie, folgt aus den *Sätzen von Banach-Alaoglu-Bourbaki und Hahn-Banach*, wie wir bereits im letzten Teil des Beweises von Satz 10. verwendet haben. Wir wußten also schon, daß $S(E)$ isometrisch isomorph zu E ist, und *man hat nur folgendes zu beweisen:*

$S(E)$ ist komplementierter Unterraum einer uniformen Algebra A auf K.

A wird wie folgt gewählt: Sei R die von $S(E)$ und den Konstanten erzeugte Teilalgebra von $C(K)$ und $A := \overline{R}$, die Abschließung von R in $C(K)$. Es ist leicht zu sehen, daß A eine uniforme Algebra über K bildet. Zu zeigen bleibt aber die Existenz eines stetigen Projektors $\overline{P}$ von A auf $S(E)$. *Dazu genügt es offenbar, einen stetigen Projektor P von R auf $S(E)$ anzugeben:* Denn dann kann P natürlich stetig zu dem gewünschten $\overline{P}$ auf $A = \overline{R}$ fortgesetzt werden.

Zur Definition des Projektors P verwenden wir folgende Terminologie: Bei $e_1, \ldots, e_n \in E$ sei $g_{e_1,\ldots,e_n} \in R$ die durch $g_{e_1,\ldots,e_n}(e') = e'(e_1) \ldots . e'(e_n)$ für alle $e' \in E'$ oder E_1' definierte Funktion. Die Elemente 1 (= konstante Funktion identisch 1), g_e, $e \in E$, und $g_{e_1,\ldots,e_n}$, $e_1, \ldots, e_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, spannen R auf. Wir definieren P auf diesen Elementen so: $P(1) = 0, P(g_e) = g_e, P(g_{e_1,\ldots,e_n}) = 0 \; (n \geqslant 2)$.

Auf ganz R wird P dann durch lineare Fortsetzung erklärt. Man sieht leicht, daß P wohldefiniert, linear und ein Projektor von R auf $S(E)$ ist. *Es bleibt die Stetigkeit von P zu beweisen, und wir wollen sogar $\|P\|_{\mathscr{L}(R,S(E))} = 1$ zeigen.*

Wähle dazu $g \in R$ beliebig mit $\|g\|_R = \sup_{e' \in E_1'} |g(e')| \leqslant 1$ und beweise: $\|P_g\|_{S(E)} = \sup_{e' \in E_1'} |(P_g)(e')| \leqslant 1$. Wegen $g \in R$ findet man ein komplexes Polynom Q in n Variablen, etwa: $Q(w) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i w_i +$ Terme höherer Ordnung, bei $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$; derart daß:

$$g = a_0 \, 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i g_{e_i} + \text{Linearkombination von Produkten von Funktionen}$$

$g_{e_i} \in S(E)$,

d.h. $g(e') = Q(e'(e_1), \ldots, e'(e_n))$ für alle $e' \in E'$. Offenbar ist damit:

$$Pg = \sum_{i=1}^{n} a_i g_{e_i} \, (e_i \in E, i = 1, \ldots, n).$$

Fixiere im folgenden $e' \in E'_1$ und zeige:

$$|(Pg)(e')| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i e'(e_i) \right| \leqslant 1.$$

Wir führen zur Hilfe die Funktion $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein mittels:

$$\Phi(\zeta) := g(\zeta e') = a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e'(e_i) \right) \zeta + (\ldots) \zeta^2 + \ldots$$

für alle $\zeta \in \mathbb{C}$. Wir benutzen jetzt, daß wir einen *komplexen* Banachraum vor uns haben und schließen die gewünschte Abschätzung von $|(Pg)(e')|$ so: Φ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und

$$\Phi'(0) = \sum_{i=1}^{n} a_i e'(e_i) = (Pg)(e').$$

Die *Cauchysche Integralformel* liefert:

$$\Phi'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta^2} \, d\zeta,$$

so daß gilt:

$$|(Pg)(e')| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta^2} \, d\zeta \right| \leqslant \sup_{|\zeta|=1} |\Phi(\zeta)| = \sup_{|\zeta|=1} |g(\zeta e')| \leqslant 1,$$

was wir gerade zeigen wollten. □

Die Idee des Beweises von 17. ist m.E. besonders hübsch! – Es wurde hier wesentlich benutzt, daß wir *komplexe* Skalare bei E haben. Tatsächlich wäre auch, wie nach 11. notiert, eine *reelle* uniforme Algebra über K bereits gleich $C(K)$. *Somit wird auch die Aussage des Satzes 17. (oder 16.) falsch, wenn wir reelle Skalare betrachten:* Aus sehr vielen Gründen kann nicht jeder reelle Banachraum komplementiert in einem $C(K)$ liegen. (– Und sei es nur, weil sonst nach 15.(2) und Beispiel (2) zu Beginn von Kapitel 2. jeder reelle Banachraum die A.E. hätte!)

Um den Kreis zu schließen, wollen wir nach 16. und 17. auf *das eingeschränkte Slice-Produkt-Problem* zurückkommen und seine *Äquivalenz* *zum Approximationsproblem* nachweisen. Tatsächlich kann man zunächst für uniforme Algebren A_1 eine *Verschärfung* von 10. wie folgt erreichen (siehe [16]):

18. Satz: *Für eine uniforme Algebra A_1 (auf einem Kompaktum K_1) sind äquivalent:*
(1) A_1 *hat die A.E.*
(2) *Für beliebige uniforme Algebra A_2 (auf irgendeinem kompakten Raum K_2) gilt* $A_1 \# A_2 = A_1 \check{\otimes} A_2$.

Zum **Beweis** geht man genauso wie beim Beweis von 10. vor, mit folgender *Zusatzüberlegung bei* (2) ⇒ (1): Bei 10. war es offensichtlich, daß man, statt eine gewisse Dichtheitsaussage für *alle* Banachräume F beweisen zu müssen, sich auf F der Form „abgeschlossener linearer Unterraum A_2 eines $C(K_2)$" beschränken konnte. Weiß man die Dichtheitsaussage, wie bei (2) hier, „nur" für beliebige uniforme Algebren, so ist es leicht zu sehen, daß sie dann *auch für alle komplementierten Unterräume solcher* und damit nach 17. wieder für alle (komplexen) Banachräume richtig bleiben muß, daher (1). □

Mit 18. wird die Äquivalenz von eingeschränktem Slice-Produkt-Problem und Approximationsproblem offenbar; die bisher fehlende Richtung dabei geht nämlich so: Die Existenz eines Banachraumes ohne A.E. implizierte ja, daß es auch eine uniforme Algebra A_1 ohne A.E. gibt. Und zu dieser existiert nach 18. dann eine weitere uniforme Algebra A_2 mit $A_1 \# A_2 \neq A_1 \check{\otimes} A_2$, was *eine negative Antwort auf das eingeschränkte Slice-Produkt-Problem* darstellt.

Zum Schluß des Artikels kommen wir zum *Satz von Hogbe-Nlend* [12], der *Frage (III) aus Kapitel 2 negativ beantwortet* und damit untermauert, daß es *viele Räume ohne A.E.* geben muß.

19. Satz: *Man kann (FS)- und (LS)-Räume ohne A.E. finden.*

Die in 19. angegebenen Klassen lokalkonvexer Räume liegen in der Klasse der Montelräume, wie man weiß; von den Banachräumen enthalten sie wieder nur die endlichdimensionalen (die selbstverständlich alle die A.E. haben). Deshalb kann man die von Enflo angegebenen Gegenbeispiele zum Approximationsproblem nicht direkt zu einem Beweis von 19. benutzen, sondern muß sich, ausgehend von einem Banachraum ohne A.E., *neue Gegenbeispiele*, d.h. (FS)- und (LS)-Räume ohne A.E., *konstruieren.* Genau das tat Hogbe-Nlend in [12].

Beweisskizze von 19. Sei für das folgende ein (zunächst beliebiger) Banachraum E fixiert. Für eine absolutkonvexe kompakte Teilmenge K in E haben wir (beim Beweis von 6.) bereits die Bezeichnung E_K für den stetig in E eingebetteten Banachraum eingeführt, der sich ergibt, wenn man die lineare Hülle von K in E mit dem Minkowski-Funktional von K als Norm versieht. Sind K und K' zwei absolutkonvexe kompakte Mengen in E mit $K \subset K'$, dann bekommt man offenbar eine kanonische lineare Abbildung der Norm $\leqslant 1$ von E_K in $E_{K'}$. Unter Beachtung dessen, was bereits im Beweis von 6. gesagt wurde, kann man das dort erwähnte **Lemma** auch so ausdrücken: *Zu jeder absolutkonvexen kompakten Menge K im Banachraum E gibt es eine andere absolutkonvexe kompakte Menge $K' \supset K$, so daß die kanonische Abbildung $E_K \to E_{K'}$ kompakt ist. (K liegt sogar kompakt, nicht nur relativkompakt, in $E_{K'}$.)*

Wir konstruieren für eine beliebige absolutkonvexe kompakte Menge K in E jetzt *induktiv mit Hilfe des Lemmas* eine Folge absolutkonvexer kompakter Mengen K_n $(n = 0, 1, \ldots)$ wie folgt: $K_0 := K$, und $E_{K_n} \to E_{K_{n+1}}$ ist kompakt für jedes $n = 0, 1, \ldots$ Bilde *den lokalkonvexen induktiven Limes* $E(K) := \underset{n\to}{\operatorname{ind}} E_{K_n}$, d.h. den linearen Unterraum $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_{K_n}$ von E mit der stärksten lokalkonvexen Topologie, die alle Injektionen $E_{K_n} \to \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_{K_n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ stetig macht. $E(K)$ ist (mit allen E_{K_n}) stetig in E eingebettet und enthält K als kompakte Teilmenge (denn dies gilt nach Definition ja bereits für E_{K_1}). $\{E_{K_n}\}_{n=0}^{\infty}$ ist ein abzählbares induktives Einbettungsspektrum von Banachräumen mit kompakten verbindenden Abbildungen. Aus der *Dualitätstheorie lokalkonvexer Räume* weiß man, daß der Grenzraum $E(K)$ eines solchen Spektrums (reflexiv und) starker Dual eines (FS)-Raumes, d.h. ein (LS)-Raum, ist.

Beachte nun, daß sicher $E = \bigcup \{E(K); K$ absolutkonvex und kompakt in $E\}$ gültig ist; die Injektionen $E(K) \to E$ sind alle stetig, und außerdem gibt es zu jeder absolutkonvexen kompakten Menge K in E ein $E(K)$ mit $K \subset E(K)$ kompakt. *Vererbungseigenschaft 15.(4) der A.E.* bleibt auch in diesem (etwa allgemeineren) Fall noch richtig. Somit hat E die A.E., wenn dies für alle (LS)-Räume $E(K)$ gilt. Wählen wir also für E einen (nach Enflos Gegenbeispiel existierenden) Banachraum ohne A.E., so muß es zu diesem E einen (LS)-Raum $E(K)$ geben, der die A.E. nicht besitzt. Weil (FS)- und (LS)-Räume reflexiv, zueinander dual und sogar Montelräume sind, muß *nach Vererbungseigenschaft 15.(5')* auch der (FS)-Raum $(E(K))'_b$ ohne A.E. sein. □

Literatur

(Nur ein geringer Teil der das Thema dieses Artikels betreffenden Literatur kann hier notiert werden. Einige *weitere wichtige Literaturhinweise* findet man am Ende von [2], [9], [13], besonders aber [14], [15], [17] und [21].)

[1] G.G. Bachelis, A factorization theorem for compact operators, preprint 1975.

[2] K.-D. Bierstedt, Function algebras and a theorem of Mergelyan for vector-valued functions, Papers from the Summer Gathering on Function Algebras, Aarhus 1969, Various Publications Series No. **9**, p. 1 - 10.

[3] K.-D. Bierstedt, Verallgemeinerungen des Satzes von Stone-Weierstraß, Jahrbuch Überblicke Mathematik 1975, p. 109 - 135.

[4] K.-D. Bierstedt, The approximation property for weighted function spaces; Tensor products of weighted spaces; Proc. Conference Bonn 1974, erscheint in Bonner Math. Schriften.

[5] A.M. Davie, The approximation problem for Banach spaces, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 261 - 266.

[6] A.M. Davie, The Banach approximation problem, J. Approximation Theory **13** (1975), 392 - 394.

[7] P. Enflo, A Banach space with basis constant > 1, Arkiv Mat. **11** (1973), 103 - 107.

[8] P. Enflo, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta math. **130** (1973), 309 - 317.

[9] T. Figiel, Factorization of compact operators and applications to the approximation problem, Studia math. **45** (1973), 191 - 210.

[10] T. Figiel, W.B. Johnson, The approximation property does not imply the bounded approximation property, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 197 - 200.

[11] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[12] H. Hogbe-Nlend, Techniques de bornologie en théorie des espaces vectoriels topologiques, Summer School on Topological Vector Spaces [Brussels 1972], Springer Lecture Notes in Math. **331** (1973), 84 - 162.

[13] W.B. Johnson, A complementary universal conjugate Banach space and its relation to the approximation problem, Israel J. Math. **13** (1972), 301 - 310.

[14] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach spaces, Springer Lecture Notes in Math. **338** (1973).

[15] C.W. McArthur, Developments in Schauder basis theory, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 877 - 908.

[16] H. Milne, Banach space properties of uniform algebras, Bull. London Math. Soc. **4** (1972), 323 - 326.

[17] B.S. Mityagin, N.M. Zobin, Examples of nuclear linear metric spaces without a basis, Functional Analysis Appl. **8** (1974), 304 - 313.

[18] H.H. Schaefer, Topological vector spaces, Macmillan 1966 (reprint jetzt bei Springer).

[19] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles I, Ann. Inst. Fourier **7** (1957), 1 - 142.

[20] Séminaire Schwartz 1953 - 54: Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications, Paris 1954.

[21] I. Singer, Bases in Banach spaces I, Springer 1970.

[22] J. Wloka, Funktionalanalysis und Anwendungen, de Gruyter 1971.

(Abschließend sei noch auf das bald bei Springer erscheinende Buch von G. Köthe „Topological vector spaces II" verwiesen, wo auch der Problemkreis um die Approximationseigenschaft ausführlich dargestellt werden wird.)

Anschrift des Autors:

Fachbereich 17, Mathematik
Gesamthochschule Paderborn

479 Paderborn
Pohlweg, Postfach 1621