Verallgemeinerungen des Satzes von Stone-Weierstraß*

von Klaus-Dieter Bierstedt

1. Vom Weierstraßschen Approximationssatz zum Satz von Stone-Weierstraß

Im Jahre 1885 bewies K. Weierstraß den folgenden fundamentalen Satz, der heute als *Weierstraßscher Approximationssatz* bezeichnet wird:

1. Satz: *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Intervall* $[a, b]$ *der reellen Achse läßt sich gleichmäßig durch Polynome approximieren.*

In der modernen Terminologie der Funktionalanalysis, die wir im weiteren verwenden wollen, bezeichnet man mit $C[a, b]$ die Banachalgebra (bzgl. punktweise definierter algebraischer Operationen) aller stetigen reell- oder komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, versehen mit der sup-Norm $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Wenn dann $P = P[a, b]$ die Unteralgebra von $C[a, b]$ der Polynome (oder exakter: der Restriktionen von Polynomen auf das Intervall $[a, b]$) bezeichnet, so besagt 1. nichts anderes als: P liegt dicht in $C[a, b]$, d.h. $\bar{P} = C[a, b]$. [Daß 1. auch für komplexwertige Funktionen gilt, ist einfach zu sehen; man muß dann bei den Polynomen natürlich nur auch komplexe Koeffizienten zulassen.]

Nunmehr sind es fast 90 Jahre, seitdem der Weierstraßsche Approximationssatz bewiesen wurde. Und wie weit dieser Satz in das „Allgemeingut" der Mathematiker übergegangen ist, zeigt am besten die Tatsache, daß ein Beweis dieses Satzes heute schon in vielen Analysis-Grundvorlesungen gegeben wird. Dazu eine Episode am Rande: In einem Analysis-Skriptum der Universität Mainz wurde Satz 1 so frühzeitig bewiesen, daß man nach dem Beweis der Existenz des Riemann-Integrals für Polynome das Integral für beliebige stetige Funktionen mit Hilfe des Weierstraßschen Approximationssatzes einführen konnte . . .

Daß der Weierstraßsche Approximationssatz so zum allgemeinen Gedankengut der Mathematiker geworden ist, liegt daran, daß er ungeheure theore-

---

*Ausarbeitung der Antrittsvorlesung des Autors anläßlich seiner Habilitation am Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern am 14.5.1974.

tische und praktische Bedeutung hat. Deswegen ist es nicht verwunderlich, daß viele Verschärfungen, Präzisierungen numerischer Art und eine große Menge von Verallgemeinerungen gefunden wurden. Wir erwähnen Sätze vom Typ *Müntz-Szasz*: Die Abschließung der linearen Hülle der Funktionen $\{x^{\lambda_i}\}_{i=0}^{\infty}$ mit $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ ist dicht in $C[0,1]$ genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$ divergiert, vgl. etwa Rudin [13], 15.25; Sätze vom Typ *Jackson-Bernstein*: Charakterisierung gewisser Klassen stetiger Funktionen durch die Schnelligkeit, mit der sie durch Polynome vom Grad $\leqslant n$ bei $n \to \infty$ approximiert werden können, sowie Sätze über die *Approximation durch andere Funktionen als Polynome.*

Wir werden im 2. Paragraphen auf zwei mit der konkreten *Polynomapproximation* verknüpfte Gedankenkreise kurz eingehen: auf gleichmäßige Approximation durch Polynome auf kompakten Teilmengen der komplexen Ebene (*Satz von Mergelyan*) und auf andere als gleichmäßige Approximation auf ganz $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ (*Bernsteinsches Approximationsproblem*).

Es ist nun das Verdienst von M.H. Stone gewesen (s. [14]), viele der Verallgemeinerungen des Weierstraßschen Approximationssatzes auf einen allgemeinen abstrakten Satz und damit auf eine gemeinsame Beweismethode zurückzuführen. Dieser Satz wird heute als *Satz von Stone-Weierstraß* bezeichnet.

2. Satz: *Sei K ein kompakter (separierter) topologischer Raum. $C(K)$ bezeichne die Banachalgebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf K, versehen mit der* sup-*Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf K. Dann liegt eine Unteralgebra A in $C(K)$ dicht, wenn gilt:*

(1) *A enthält die Konstanten* (d.h., etwa die Funktion, die auf K identisch 1 ist),

(2) *A trennt die Punkte von K* (d.h., für $x_1, x_2 \in K$, $x_1 \neq x_2$, gibt es $f \in A$, derart daß $f(x_1) \neq f(x_2)$),

(3) *A ist selbstadjungiert* (d.h., aus $f \in A$ folgt $\overline{f} \in A$, wobei $\overline{f}$ die konjugiert-komplexe Funktion von f angibt).

In Satz 2 haben wir gleich komplexwertige Funktionen berücksichtigt. Für reelle Funktionen kann man (3) natürlich streichen. Es soll noch erwähnt werden, daß auch *eine verbandstheoretische Version des Theorems* existiert (bei der also max und min von reellen Funktionen eine Rolle spielen). Wir werden aber im gesamten Artikel nur auf die *algebrentheoretischen* Aspekte der Approximation eingehen und verweisen für die andere Version und für ihre Konsequenzen auf die Literatur.

M.H. Stone hat später selbst eine ausgezeichnete Darstellung vieler Varianten und Anwendungen von 2. gegeben, vgl. den Nachdruck in [14]. Es handelt sich dabei um Approximationssätze für Funktionen, die auf abgeschlossenen Teilmengen eines Kompaktums verschwinden, oder für Funktionen auf lokalkompakten Räumen usw. Die Anwendungen beziehen sich auf die Charakterisierung abgeschlossener Ideale in $C(K)$, auf den Lebesgue-Urysohnschen Ausdehnungssatz, auf trigonometrische Approximation und Approximation mittels Laguerre- bzw. Hermite-Funktionen, um nur einige Beispiele zu nennen. Wir empfehlen jedem, der sich für diesen Gedankenkreis interessiert, den Artikel [14] zu lesen.

Ich möchte nur auf eine Anwendung des Satzes von Stone-Weierstraß ganz kurz zurückkommen: Im gleichen Jahr 1937, als Stone seinen „verallgemeinerten Weierstraßschen Approximationssatz" publizierte, hatte Dieudonné folgendes bewiesen:

3. Satz: *Seien K bzw. K' kompakte Hausdorffräume und bezeichne $K \times K'$ ihr topologisches Produkt. Dann liegt in $C(K \times K')$ die Unteralgebra $C(K) \otimes C(K')$ aller endlichen Summen von Produkten von Funktionen aus $C(K)$ und $C(K')$ dicht. Das bedeutet: Jedes $f \in C(K \times K')$ kann gleichmäßig auf $K \times K'$ durch Funktionen der Form*

$$(x, x') \to \sum_{i=1}^{n} (f_i \otimes f_i')(x, x') = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f_i'(x')$$

($n \in \mathbb{N}$, $f_i \in C(K)$, $f_i' \in C(K')$) *approximiert werden.*

Aber offenbar erfüllt $C(K) \otimes C(K') \subset C(K \times K')$, wie sich unmittelbar ergibt, alle Voraussetzungen von 2., und es folgt, daß Satz 3 eine einfache Folgerung aus dem Satz von Stone-Weierstraß darstellt.

Seit 1937 sind auch wieder 37 Jahre vergangen, und entsprechend der schnelleren Weiterentwicklung vieler Gebiete der Mathematik ging es mit dem Satz von Stone-Weierstraß ähnlich wie vorher mit dem Weierstraßschen Approximationssatz: Er wurde verschärft, und man hat ihn in viele Richtungen verallgemeinert.

So wie der Weierstraßsche Approximationssatz am Beginn der *Approximationstheorie* steht, so ist auch der Satz von Stone-Weierstraß für die Entwicklung bzw. Weiterentwicklung ganzer Teilgebiete der Analysis fundamental gewesen. Beim Ausbau der *Funktionalanalysis*, insbesondere in der Theorie der Banachalgebren oder der sog. *uniformen Algebren*, benutzt man diesen Satz so häufig, daß etwa R.B. Burckel in seinem Buch [4] bei der Herleitung des Satzes aus einem allgemeineren Theorem von Bishop bemerkt (sinngemäß):

„Alle zum Beweis des Satzes von Bishop benutzten Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis können tatsächlich ohne Verwendung des Satzes von Stone-Weierstraß hergeleitet werden. Aus der Art heraus, wie der Satz von Stone-Weierstraß die Analysis durchdringt, scheint die Furcht, daß es nicht so sein könnte, auf ersten Anhieb durchaus begründet."

Im 3. Paragraphen des Artikels werde ich den *Beweis des Satzes von Bishop* skizzieren und als Anwendung eine gemeinsame Verallgemeinerung des Weierstraßschen Approximationssatzes und des Satzes von Mergelyan herleiten, die Rudin [12] zuerst bewiesen hat (vgl. auch Paragraph 2).

Der abschließende 4. Paragraph beschäftigt sich dann mit dem von L. Nachbin eingeführten sog. *gewichteten Approximationsproblem.* Wir geben dort einen Überblick über neuere Ergebnisse vor allem von J.B. Prolla und W.H. Summers zu diesem Problem, womit Resultate über das Bernsteinsche Approximationsproblem verallgemeinert werden. Die betreffenden Sätze gehen auch erheblich über das Theorem von Bishop hinaus, das sie als Spezialfall enthalten[1].

2. Zur Polynomapproximation

Es ist leicht zu sehen, daß der Weierstraßsche Approximationssatz auch für kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ richtig bleibt. Dies war auch Weierstraß selbst bereits bekannt. Dagegen ist folgende *Frage* wesentlich schwieriger zu beantworten:

Sei für eine kompakte Menge K des $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ $P(K)$ die Abschließung der Algebra der (Restriktionen auf K der) Polynome in $C(K)$. Welche Funktionen gehören dann zu $P(K)$?

---

[1]Es konnte bei weitem nicht der Sinn dieses Artikels sein, *alle* Resultate, Probleme und Vermutungen aus dem Problemkreis um den Satz von Stone-Weierstraß und seine Verallgemeinerungen auch nur zu streifen. Deshalb habe ich mich hier auf das beschränkt, was ich persönlich für besonders wichtig oder interessant ansah. Vieles andere mußte nur deshalb weggelassen werden, weil es den vorliegenden Rahmen gesprengt hätte.

	Gleichmäßige Approximation (auf kompakten Mengen)	Gewichtete Approximation
Polynomapproximation	Weierstraßscher Approximationssatz in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ (1.) Satz von Mergelyan in $\mathbb{C}$ (4.) Sätze von Li eb, Weinstock u.a. (hinreichende Bedingungen) in $\mathbb{C}^N$ (5.) Satz von Rudin in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$ bzw. in $\mathbb{C}^N \times \mathbb{R}^n$ (6., 13.)	Bernsteinsches Approximationsproblem in $\mathbb{R}^n$ (7.) Hinreichende Kriterien: analytisches, quasianalytisches usw. Sätze von Mergelyan, Ferrier u.a. in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}^N$ (vgl. [7])
Abstrakte Approximation	Satz von Stone-Weierstraß über selbstadjungierte Algebren (2.) Satz von Bishop: Lokalisierung (antisymmetrische Teilmengen von K) (10.)	Gewichtetes Approximationsproblem (17.) Selbstadjungierte Algebren: Beschränkter, analytischer und quasianalytischer Fall (L. Nachbin) (vgl. [10]) Allgemeine Algebren: Lokalisierung mit Hilfe antisymmetrischer Mengen. Beschränkter und analytischer Fall (W.H. Summers, J.B. Prolla) (20., 22.)

Eine *notwendige* Bedingung findet man sofort: Jede Funktion aus $P(K)$ muß natürlich auf $\mathring{K}$, dem Innern von K, *holomorph* sein. Denn jedes Polynom ist eine ganze Funktion, und Grenzwerte von holomorphen Funktionen (bei gleichmäßiger Konvergenz auf kompakten Teilmengen einer offenen Menge) sind wieder holomorph. Ist $A(K)$ die abgeschlossene Unteralgebra von $C(K)$ aller auf $\mathring{K}$ holomorphen Funktionen, so haben wir dementsprechend $P(K) \subset A(K)$. Eine teilweise Lösung unserer Frage resultiert dann aus einer Lösung des folgenden *Problems:*

Für welche K kompakt in $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ gilt $P(K) = A(K)$?

Nun ist dieses Problem, ebenso wie unsere vorher gestellte Frage, im Falle $n > 1$ keineswegs gelöst. Es gibt einige Gegenbeispiele für zunächst plausible Vermutungen und eine Reihe von hinreichenden Bedingungen der verschiedensten Arten (vgl. etwa [1], [20], [21]). Wir werden nicht in aller Ausführlichkeit darauf eingehen. Für $n = 1$ dagegen wurde unser Problem von S.N. Mergelyan 1952 vollständig gelöst. Wir geben jetzt den *Satz von Mergelyan* an (siehe unter anderem Rudin [13], 20.5 sowie Bücher über Funktionenalgebren, z.B. Stout [15]):

4. Satz: *Für K kompakt in der komplexen Ebene gilt $P(K) = A(K)$ genau dann, wenn $\mathbb{C}\setminus K$ zusammenhängend ist. Dann kann also jede auf K stetige und im Innern von K holomorphe Funktion gleichmäßig auf K durch Polynome approximiert werden.*

Übrigens ist leicht zu sehen, warum für unzusammenhängendes $\mathbb{C}\setminus K$, d.h. für kompakte $K \subset \mathbb{C}$ „mit Löchern", der Satz nicht mehr stimmt. Man muß nur auf der beschränkten Komponente des Komplementes von K das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen geeignet anwenden, siehe z.B. Rudin [13], 13.8.

Mergelyans Beweis von Satz 4 wurde ohne Funktionalanalysis durchgeführt (vgl. etwa die vereinfachte Fassung dieses Beweises bei Rudin [13]). Später entwickelte man dann in der Theorie der uniformen Algebren einen (nicht konstruktiven) Existenzbeweis mit funktionalanalytischen Mitteln, der ebenfalls sehr interessant ist.

Insbesondere folgt aus 4. natürlich $C(K) = P(K)$, sofern nur die kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ leeres Inneres hat und $\mathbb{C}\setminus K$ zusammenhängend ist.

J. Wermer bewies, daß für analytische Kurven $K \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ stets $P(K) = C(K)$. Bishop und Stolzenberg haben die Voraussetzungen abgeschwächt und das Ergebnis für differenzierbare Kurven hergeleitet (vgl. Wermer [21], 13.).

Eine andere Verallgemeinerung von Satz 4 erschien plausibel: Die Bedingung $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend entspricht für $n \geqslant 1$ der Bedingung K *polynomkonvex* (d.h., K ist homöomorph zum Gelfandschen Darstellungsraum der Algebra $P(K)$, s. Stout [15]). Man könnte denken, daß vielleicht $P(K) = A(K)$ allgemein für polynomkonvexe K richtig wäre. Tatsächlich läßt sich auch nach einem *Satz von Oka* (der den Rungeschen Approximationssatz von $n = 1$ auf beliebige $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinert) jede in einer Umgebung eines kompakten polynomkonvexen $K \subset \mathbb{C}^n$ holomorphe Funktion gleichmäßig auf K durch Polynome approximieren (vgl. z.B. Stout [15], 29.1.). Aber selbst für „*fette*" polynomkonvexe kompakte $K \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 2)$, d.h. für solche K mit $K = \overline{\mathring{K}}$ (K ist also die Abschließung seines Inneren), gilt i.a. nicht $P(K) = A(K)$, wie E. Kallin [9] gezeigt hat.

Andererseits liefern neue *Ergebnisse von Lieb, Kerzman u.a.* (vgl. [20]) immerhin, daß etwa für polynomkonvexe kompakte $K = \overline{G} \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 1)$, wobei G strikt pseudokonvexes Gebiet mit C^∞-Rand, wieder $A(K) = P(K)$ richtig ist.

Allgemein können jedoch noch viele weitere abgeschlossene Unteralgebren zwischen $P(K)$ und $A(K)$ liegen: Wenn z.B. $K = K_1 \times K_2 \subset \mathbb{C}^2$ mit $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ kompakt, so findet man leicht folgende abgeschlossene Unteralgebra A_π zwischen $P(K)$ und $A(K)$:

$$A_\pi = \{ f \in C(K_1 \times K_2); f(\,.\,, x_2) \in A(K_1) \text{ und}$$
$$f(x_1,\,.\,) \in A(K_2) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in K_1 \times K_2 \}.$$

Und i.a., nämlich z.B. falls K_1 oder K_2 isolierte Punkte enthält (so daß aber durchaus $\mathbb{C} \setminus K_1$ bzw. $\mathbb{C} \setminus K_2$ zusammenhängend sein kann), wird A_π nicht mit $A(K)$ zusammenfallen.

Sind aber K_1 und K_2 in der vorhergehenden Überlegung beide fett, so muß $A_\pi = A(K)$ richtig sein, wie leicht zu verifizieren ist. Auf diese Weise[2)] kann man mit Tensorproduktmethoden tatsächlich Teil (1) des folgenden Satzes beweisen (siehe [1]). 5.(2) stammt aus Weinstock [20], p. 812, wo die Resultate von Lieb auf Produktgebiete verallgemeinert sind.

[Die letzte Aussage von 5.(1) zeigt zusammen mit Liebs ursprünglichem Resultat (bzw. einer leichten Verfeinerung davon) praktisch auch bereits 5.(2), wenn man noch ein Ergebnis über die Approximationseigenschaft von

[2)]Verwendung des sog. *Slice-Produktes.*

$A(K)$ beachtet, das in der (unveröffentlichten) Dissertation von O.B.Bekken (Univ. of California, Los Angeles 1972) enthalten ist. Umgekehrt folgt 5.(1) fast ebenso aus 5.(2).]

5. Satz: *$P(K) = A(K)$ gilt für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 1)$, falls K eine Darstellung wie folgt hat:*

(1) *$K = K_1 \times \ldots \times K_n$ mit $K_i = \overline{\mathring{K}_i} \subset \mathbb{C}$ kompakt und $\mathbb{C} \setminus K_i$ zusammenhängend $(i = 1, \ldots, n)$.*

Allgemeiner bekommt man:

Gilt $A(K_j) = P(K_j)$ für kompakte $K_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$ $(j = 1, \ldots, r;\ \sum_{j=1}^{r} n_j = n)$, die alle fett sind, und haben sämtliche $A(K_j)$ (bis auf möglicherweise eines) die sog. Grothendiecksche Approximationseigenschaft (als Banachräume, vgl. etwa [2]*), so ergibt sich mit $K = K_1 \times \ldots \times K_r$ auch $A(K) = P(K)$.*

(2) *$K = K_1 \times \ldots \times K_r$ mit $K_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$ $(j = 1, \ldots, r;\ \sum_{j=1}^{r} n_j = n)$ kompakt, derart daß*

(i) *K polynomkonvex,*

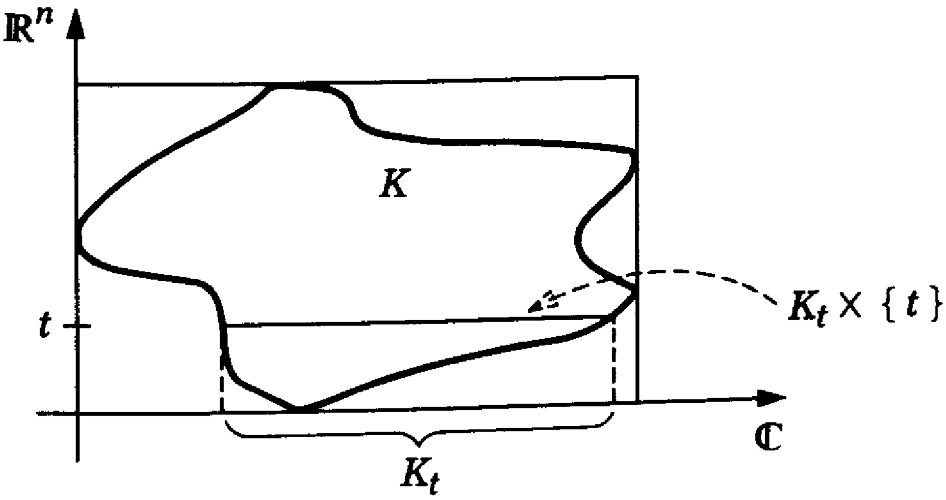
(ii) *K die sog. Segment-Eigenschaft hat: Es gibt eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von ∂K und Punkte $\{w_i\}$, so daß $z + tw_i \in \mathring{K}$ für $0 < t < 1$, $z \in K \cap U_i$,*

(iii) *und für jedes $j = 1, \ldots, r$:*
entweder $n_j = 1$, dann $K_j = \overline{\mathring{K}_j}$ und $\mathbb{C} \setminus K_j$ zusammenhängend, oder $n_j \geqslant 2$, dann $K_j = \overline{G}_j$ und G_j strikt pseudokonvexes Gebiet.

[Übrigens ist (ii) jedenfalls erfüllt, wenn zu (iii) alle K_j C^∞-Ränder haben.]

Um den Gedankengang, der mit der gleichmäßigen Polynomapproximation verbunden ist, abzuschließen, sollten wir noch einen *Satz von Rudin* [12] erwähnen, der den Weierstraßschen Approximationssatz und den Satz von Mergelyan gemeinsam verallgemeinert.

6. Satz: *Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$. Für jedes $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ gelte: Die Menge $K_t = \{z \in \mathbb{C}; (z, t) \in K\}$ hat zusammenhängendes Komplement in $\mathbb{C}$. Dann kann jede Funktion $f \in C(K)$ mit der Eigenschaft, daß $f(\,.\,, t)$ holomorph auf $\mathring{K}_t$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}^n$, gleichmäßig auf K durch Polynome (in $z, t_1, \ldots, t_n$) approximiert werden.*



Wir kommen auf diesen Satz im nächsten Paragraphen noch einmal zurück und werden einen besonders einfachen Beweis von 6. mit Hilfe des bereits erwähnten Satzes von Bishop (und natürlich unter Benutzung von 1. und 4.) notieren. Mit Hilfe von Satz 5 wird sich dabei sogar noch eine Verallgemeinerung von 6. in gleicher Weise ergeben.

Wenden wir uns jetzt einer anderen Fragestellung zu.

Der Weierstraßsche Approximationssatz besagt, wenn man ihn leicht umformuliert: Die Algebra P der (komplexen) Polynome liegt dicht in $C(\mathbb{R})$ (= stetige (komplexwertige) Funktionen auf $\mathbb{R}$), versehen mit der Topologie co der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Natürlich erhebt sich dann sofort die Frage: Wie steht es mit anderen Räumen stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ oder auf $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$? Besonders interessant werden gewisse Funktionenräume sein, die mittels *Gewichtsbedingungen* eingeführt sind. Dies führt uns zu dem sog. Bernsteinschen Approximationsproblem, dessen Formulierung wir hier noch angeben wollen.

7. **Bernsteinsches Approximationsproblem**: *Sei v eine nichtnegative, von oben halbstetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$.* (v ist insbesondere auf jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.) *Es gelte für beliebiges Polynom p auf $\mathbb{R}^n$, daß vp im Unendlichen verschwindet* (d.h., für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine kompakte Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ mit $|v(x)p(x)| < \epsilon$ für alle $x \in X \setminus K$, woraus insbesondere $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |v(x)p(x)| < \infty$ folgt).

Man sagt dann, die Gewichtsfunktion v sei (im Unendlichen) schnell fallend. Gesucht werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß v fundamental ist, d.h., daß die Algebra P dicht liegt im „gewichteten" Raum $Cv_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n); vf$ verschwindet im Unendlichen$\}$, versehen mit der Halbnorm $\mathrm{b}v(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} v(x)|f(x)|, f \in Cv_0(\mathbb{R}^n)$.

Es ist eine einfache Folgerung aus dem Weierstraßschen Approximationssatz, wie wir ihn vor 7. umformuliert hatten, daß jede nichtnegative, von oben halbstetige Funktion v auf $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger fundamental ist. Notwendige und hinreichende Kriterien der in 7. gewünschten Art dafür, daß eine Gewichtsfunktion v ohne Nullstellen fundamental ist, wurden im Falle $n = 1$ von verschiedenen Autoren angegeben, z.B. von Pollard, Carleson und Mergelyan. Auf $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ kennt man keine notwendigen und hinreichenden Bedingungen, aber eine Reihe interessanter hinreichender Kriterien wie das sog. *analytische bzw. quasianalytische Kriterium.* Für eine Darstellung der bekannten klassischen Resultate verweisen wir auf den Beginn von Ferrier [7], wo auch entsprechende Literaturhinweise zu finden sind. Vergleiche außerdem Nachbin [10]. Im weiteren Verlauf der Ausarbeitung [7] leitet Ferrier auch Resultate über „gewichtete" Approximation auf Teilmengen der komplexen Ebene bzw. entsprechende Resultate bei differenzierbaren (statt stetigen) Funktionen her. (Bezüglich des Bernsteinschen Approximationsproblems für *differenzierbare* Funktionen siehe aber insbesondere G. Zapata [22].) Wir wollen darauf nicht weiter eingehen.

Das Bernsteinsche Approximationsproblem haben wir hier nur deshalb erwähnt, weil das im letzten Teil dieses Artikels betrachtete sog. gewichtete Approximationsproblem von L. Nachbin das Bernsteinsche Approximationsproblem ähnlich verallgemeinert, wie der Satz von Stone-Weierstraß bzw. der Satz von Bishop den Weierstraßschen Approximationssatz verallgemeinert: Der Grundraum, auf dem die Funktionen definiert sind, ist dort (anstelle von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$) ein abstrakter vollständig regulärer topologischer Raum, und man approximiert (statt mit Polynomen) mit gewissen Moduln über Unteralgebren der Algebra aller stetigen Funktionen auf dem Raum.

3. Antisymmetrische Mengen und der Satz von Bishop

In diesem Paragraphen soll nun ein Beweis des Satzes von Bishop skizziert werden, wie ihn zuerst in ähnlicher Form Glicksberg gegeben hat. Außer einem bemerkenswerten Lemma von de Branges benutzt unser Beweis aus der Funktionalanalysis die Sätze von Hahn-Banach, Banach-Alaoglu und Krein-Milman sowie den Rieszschen Darstellungssatz über das Dual von $C(K)$. Wir notieren diese Sätze hier in der Form, wie wir sie später benötigen.

Theorem A. (Rieszscher Darstellungssatz): *Sei K kompakter Hausdorffraum und $C(K)$ die Banachalgebra der stetigen (komplexwertigen) Funktionen auf K mit der* sup-*Norm. Dann entspricht jedem Element $\Phi \in C'(K)$ genau ein (komplexes) Radon-Maß (= reguläres Borel-Maß) μ auf K mit $\Phi(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $f \in C(K)$. Mehr noch, die Zuordnung $\Phi \to \mu$, wie sie hiermit gegeben wird, ist ein Normisomorphismus des (Banach-)Duals $C'(K)$ auf den Banachraum $M(K)$ aller (komplexen) Radon-Maße auf K, versehen mit der totalen Variation $|\mu|(K)$ von $\mu \in M(K)$ über K als Norm.*

Dabei ist ein *Borel-Maß* μ auf K eine abzählbar additive skalare (=komplexwertige) Funktion μ auf der σ-Algebra $\mathscr{B}$ von Teilmengen von K, die von den abgeschlossenen Teilmengen von K erzeugt wird, mit $\mu(\emptyset) = 0$. Die *totale Variation* $|\mu|$ von μ wird für $E \in \mathscr{B}$ definiert als

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| ; E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathscr{B}, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ bei } i \neq j \right\}.$$

μ heißt *regulär*, falls für beliebiges $E \in \mathscr{B}$:

$|\mu|(E) = \inf \{|\mu|(U); U \text{ offen}, E \subset U\} = \sup \{|\mu|(F); F \text{ kompakt}, F \subset E\}$.
(Vergleiche Rudin [13].)

Theorem B. (Satz von Krein-Milman): *Eine konvexe kompakte Menge C in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum ist die abgeschlossene konvexe Hülle $\mathscr{C}$* [Ext (C)] *der Menge* Ext (C) *der Extremalpunkte von C. Insbesondere muß also für $C \neq \emptyset$ auch* Ext (C) *stets nichtleer sein.*

Hierbei heißt ein Punkt e einer konvexen Menge C in einem Vektorraum E (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) *Extremalpunkt* von C, wenn aus $e = \alpha e_1 + (1-\alpha) e_2$ mit $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $e_1, e_2 \in C$ stets $e = e_1$ oder $e = e_2$ (also $\alpha = 0$ oder 1) folgt. Das heißt, e liegt nicht im Innern einer ganz in der konvexen Menge C enthaltenen „Strecke"
$[e_1, e_2] = \{ e \in C; e = \alpha e_1 + (1-\alpha) e_2, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \} \; (e_1, e_2 \in C)$.

Theorem C. (Satz von Hahn-Banach): *Sei E ein beliebiger normierter Raum und F ein linearer Unterraum von E, der mit der induzierten Norm versehen wird.*

(1) *Dann kann jedes $f' \in F'$ normgleich zu einem $e' \in E'$ fortgesetzt werden.*

(2) *Ist F abgeschlossen in E, so gehört $e \in E$ genau dann bereits zu F, wenn für alle $e' \in E'$ mit $e'(f) = 0$ bei beliebigem $f \in F$ auch $e'(e) = 0$ gilt.*

[(1) ist der übliche Hahn-Banach-Satz für normierte Räume, während (2) eine wohlbekannte Folgerung daraus darstellt.]

Theorem D. (Banach-Alaoglu-Bourbaki): *Für einen beliebigen normierten Raum E ist die abgeschlossene Einheitskugel E_1' des Duals E' kompakt in der (sog. „weak*-") Topologie $\sigma(E', E)$.*

Wir kombinieren nun diese klassischen Sätze zu einem Resultat, das genau das liefert, was wir beim Beweis des Satzes von Bishop eigentlich verwenden werden.

Theorem E.: *Sei A ein beliebiger abgeschlossener linearer Unterraum von $C(K)$, K kompakt, und*

$A_1^\perp = \{\mu \in M(K);\ \|\mu\| \leqslant 1$ *und* $\int_K g\,d\mu = 0$ *für alle* $g \in A\}$.

Dann gehört eine Funktion $f \in C(K)$ genau dann zu A, wenn für alle $\mu \in \mathrm{Ext}\,(A_1^\perp)$ nur $\int_K f\,d\mu = 0$ richtig ist.

Beweis. Die eine Richtung dieses Satzes ist trivial. Wir beweisen die andere, d.h., aus $f \in C(K)$, $\int_K f\,d\mu = 0$ für alle $\mu \in \mathrm{Ext}\,(A_1^\perp)$ folgt $f \in A$.

Dazu beachten wir, daß es nach Theorem C. (2) langt zu beweisen, daß $\Phi(f) = 0$ für alle $\Phi \in C'(K)$ mit $\|\Phi\| \leqslant 1$ und $\Phi(g) = 0$ bei beliebigem $g \in A$. Nach Theorem A. entspricht jedes solche Φ einem $\mu \in M(K)$, $\|\mu\| \leqslant 1$, mit $\int_K g\,d\mu = 0$ für alle $g \in A$, d.h., einem $\mu \in A_1^\perp$. Offenbar gilt aber $A_1^\perp = \bigcap_{g \in A} \{\mu \in M(K);\ \|\mu\| \leqslant 1$ und $\int_K g\,d\mu = 0\}$, d.h., nach Definition der Topologie $\sigma(M(K), C(K))$ ist $A_1^\perp$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen in $M_1(K)$ (= abgeschlossene Einheitskugel von $M(K) = C'(K)$) bzgl. der Topologie $\sigma(M(K), C(K)) = \sigma(C'(K), C(K))$. Theorem D. besagt jetzt, daß die (offensichtlich konvexe) Menge $A_1^\perp$ mit $M_1(K)\,[\sigma(M(K), C(K))]$ eine kompakte Teilmenge von $M(K)\,[\sigma(M(K), C(K))]$ darstellt, auf die wir Theorem B. anwenden können. Auf solche Weise ist unmittelbar klar, daß wir die gewünschte Aussage $\int_K f\,d\mu = 0$ für alle $\mu \in A_1^\perp$ bekommen, wenn wir diese Aussage nur für die

μ der dichten Teilmenge $\mathscr{C}$ [Ext $(A_1^\perp)$] von $A_1^\perp$ haben. Also ist es natürlich genug, wenn $\int_K f \, d\mu = 0$ für beliebiges $\mu \in$ Ext $(A_1^\perp)$ richtig ist. Das hatten wir jedoch gerade zeigen wollen. □

Damit kommen wir zu dem bereits mehrfach erwähnten Satz von Bishop[3)], dessen Formulierung folgenden Begriff verwendet:

8. Definition: Sei A eine nichtleere Teilmenge von $C(K)$, K kompakt. Dann heißt eine nichtleere Teilmenge E von K *antisymmetrisch* für A, wenn aus $f \in A$, $f|_E$ reellwertig bereits $f|_E$ konstant folgt.

Offenbar ist für jedes $x \in K$ und jedes $A \subset C(K)$, $A \neq \emptyset$, die einpunktige Menge $E = \{x\}$ antisymmetrisch für A. Bei $A = C(K)$ kann aufgrund der Trennungseigenschaften der stetigen Funktionen auf kompakten Räumen keine Menge $E \subset K$, die zwei oder mehr Punkte enthält, antisymmetrisch für A sein.

Als typisches Beispiel dafür, daß eine antisymmetrische Menge mehr als einen Punkt enthalten kann und sogar recht groß werden darf, erwähnen wir die in Paragraph 2. definierte Algebra $A(K)$ bei $K \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 1$) kompakt: Jede Funktion $f \in A(K)$ ist auf dem Innern $\mathring{K}$ von K holomorph. Und weil eine reellwertige holomorphe Funktion auf einer offenen zusammenhängenden Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ dort bereits konstant sein muß, sieht man sofort ein, daß jede Zusammenhangskomponente von $\mathring{K}$ eine antisymmetrische Teilmenge von K für $A(K)$ bildet.

Der Begriff der antisymmetrischen Teilmenge von K für einen Unterraum $A \subset C(K)$ ist, wie sich so ergeben hat, besonders interessant, falls die Restriktion von Funktionen aus A auf gewisse Teilmengen von K holomorphe Funktionen liefert. Verwendung antisymmetrischer Mengen erlaubt es demnach, das Phänomen der Holomorphie in einem gewissen Umfang mit zu erfassen. (Das gilt in weiterem Sinne als vielleicht ursprünglich vermutet: K braucht nicht unbedingt a priori eine Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ zu sein. Genaueres dazu findet man in Büchern über uniforme Algebren. Wir begnügen uns hier mit diesem Hinweis.)

9. Bemerkungen: *Seien K und A wie in 8.*

(1) *Ist E antisymmetrische Teilmenge von K für A, so auch die Abschließung $\overline{E}$.*

[3)] Zu unserem Beweis vgl. etwa Stout [15], Rudins Buch „Functional analysis" oder G.M. Leibowitz, Lectures on complex function algebras, Scott, Foresman and Co. (1970).

(2) *Sind E_1, E_2 antisymmetrische Teilmengen von K für A und gilt $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, so bildet auch $E_1 \cup E_2$ eine antisymmetrische Teilmenge von K für A.*

(3) *Sei $E_0 \subset K$ antisymmetrisch für A. Definiere*

$$\widetilde{E}_0 = \bigcup \{E; K \supset E \supset E_0, E \text{ antisymmetrisch für } A\}.$$

Dann ist $\widetilde{E}_0$ ebenfalls antisymmetrisch für A.

(4) *Jede antisymmetrische Teilmenge E von K für A ist in einer bzgl. Inklusion maximalen solchen antisymmetrischen Menge $\widetilde{E} \subset K$ für A enthalten.*

(5) *Bezeichne $\mathcal{K}_A$ das System aller maximalen antisymmetrischen Teilmengen von K für A. Dann bildet $\mathcal{K}_A$ eine Zerlegung von K in paarweise disjunkte abgeschlossene Mengen.*

Beweis. (1) und (2) sind sofort klar.
Zu (3): E_0 ist nichtleer nach Definition, also gilt dies genauso für $\widetilde{E}_0 \supset E_0$. Seien zum Beweis von (3) $f \in A$ reellwertig auf $\widetilde{E}_0$ und $x_1, x_2 \in \widetilde{E}_0$ beliebig. Es genügt zu zeigen $f(x_1) = f(x_2)$.

Nach Definition von $\widetilde{E}_0$ findet man antisymmetrische Teilmengen E_1, E_2 von K für A mit $E_0 \subset E_1, E_2; x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$. Wegen $E_1 \cap E_2 \supset E_0 \neq \emptyset$ bildet $E_1 \cup E_2$ gemäß (2) eine antisymmetrische Teilmenge von K für A, so daß die auf dieser Menge reellwertige Funktion $f \in A$ dort konstant sein muß. Es folgt (wie gewünscht) $f(x_1) = f(x_2)$.
Zu (4): Bei $E_0 \subset K$ antisymmetrisch für A bildet, (3) entsprechend, $\widetilde{E}_0$ eine E_0 enthaltende antisymmetrische Teilmenge von K für A, von der man direkt sieht, daß sie maximal ist.
Zu (5): Da jede einpunktige Teilmenge von K antisymmetrisch für A ist, überdecken wegen (4) die Mengen aus $\mathcal{K}_A$ ganz K. Aufgrund von (1) muß jede maximale antisymmetrische Menge abgeschlossen sein. Schließlich besagt (2), daß zwei verschiedene maximale antisymmetrische Teilmengen von K für A stets disjunkt zu sein haben. Damit ist der Beweis beendet. □
Nach diesen einfachen Tatsachen über antisymmetrische Mengen kommen wir endlich zu:

10. Theorem (Satz von Bishop): *Sei A eine abgeschlossene Teilalgebra von $C(K)$ (K kompakt), die die Konstanten enthält. Dann gilt:*
$$A = \{f \in C(K); f|_E \in A|_E \text{ für alle } E \in \mathcal{K}_A\},$$
wo $\mathcal{K}_A$ wie in 9. (5) gebildet ist und wobei wir die Bezeichnung $A|_E = \{g|_E; g \in A\}$ benutzt haben.

Theorem 10. gibt demnach einen *Lokalisierungssatz* für die Zugehörigkeit zu einer abgeschlossenen Unteralgebra von $C(K)$: *Eine Funktion $f \in C(K)$ gehört bereits zu A, wenn f auf jeder maximalen antisymmetrischen Teilmenge von K für A mit (der Restriktion) einer Funktion aus A übereinstimmt.* (Die Umkehrung ist trivial.)

Übrigens kann man zeigen (vgl. etwa Stout [15], 12.1.(b)), daß für beliebiges $E \in \mathscr{K}_A$ die Unteralgebra $A|_E$ von $C(E)$ abgeschlossen in $C(E)$ ist. Wir benötigen dies im folgenden aber nicht und werden deshalb nicht näher darauf eingehen.

Theorem 10. ist natürlich nur dann interessant, wenn nicht schon K selbst maximale antisymmetrische Menge ist (wie z.B. bei vielen $A(K)$).

Beweis von 10. Theorem E. liefert für abgeschlossenen linearen Unterraum $A \subset C(K)$:

$$A = \{ f \in C(K);\ \int_K f \, d\mu = 0 \text{ für alle } \mu \in \operatorname{Ext}(A_1^{\perp}) \}.$$

Um diese Aussage benutzen zu können, benötigen wir zum weiteren Beweis eine Information über die Extremalpunkte von $A_1^{\perp}$. Diese ist im folgenden *Lemma von de Branges* enthalten:

11. Lemma: *Für eine Unteralgebra $A \subset C(K)$ mit $1 \in A$ sei $\mu \in \operatorname{Ext}(A_1^{\perp})$. Dann gilt für den Träger* supp μ von μ:
entweder supp $\mu = \emptyset$ [woraus sofort $\mu = 0$, also $A_1^{\perp} = \{0\}$ und damit nach Theorem C. (2) $\overline{A} = C(K)$ folgt],
oder supp μ *bildet eine antisymmetrische Teilmenge von K* für A.

Betrachten wir für den Augenblick das Lemma als bewiesen und zeigen wir dann, wie der Beweis von 10. beendet wird.

Im 1. Fall (supp $\mu = \emptyset$) haben wir $A = \overline{A} = C(K)$, d.h., es ist nichts mehr zu beweisen. Im andern Fall ist supp μ bei $\mu \in \operatorname{Ext}(A_1^{\perp})$ stets eine antisymmetrische Teilmenge von K für A, und wir müssen zeigen, daß aus unserer Voraussetzung $f|_E \in A|_E$ für alle $E \in \mathscr{K}_A$ bei festem $f \in C(K)$ bereits

$$\int_K f \, d\mu = 0 \text{ für beliebiges } \mu \in \operatorname{Ext}(A_1^{\perp}) \text{ folgt.}$$

Dies ist aber sofort klar: $\mu \in \operatorname{Ext}(A_1^{\perp})$ bewirkt ja supp $\mu \subset E \in \mathscr{K}_A$, somit $f|_E = g|_E$ für geeignetes $g \in A$, und gemäß $\mu \in A_1^{\perp}$ ergibt sich:

$$\int_K f \, d\mu = \int_{\operatorname{supp}\mu} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu = \int_K g \, d\mu = 0. \ \square$$

Es bleibt nur der **Beweis von 11.** nachzutragen.

Sei $\mu \in \operatorname{Ext}(A_1^\perp)$, supp $\mu \neq \emptyset$. Zu zeigen ist: Wenn $f \in A$ reellwertig auf supp μ, so ist $f|_{\operatorname{supp}\mu}$ bereits konstant.

Für die auf supp μ reelle Funktion f, die dort nach oben und nach unten beschränkt ist, wollen wir o.B.d.A. $0 < f < 1$ annehmen. (Ansonsten kann man nämlich f durch $\tilde{f} = af + b$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$ ersetzen und beachten, daß f genau dann auf supp μ konstant ist, wenn dies für $\tilde{f}$ gilt. Hierbei wird natürlich $1 \in A$ benutzt.) Wenn A eine Algebra ist, gehört mit μ auch $f\mu$ zu $A^\perp$, wobei $f\mu$ mittels $\int_K g\,d(f\mu) = \int_K fg\,d\mu$ für alle $g \in C(K)$ definiert ist.

Also gilt ebenso $(1-f)\mu = \mu - f\mu \in A^\perp$. Setze nun $a = \|f\mu\|$, $b = \|(1-f)\mu\|$. Man hat

$$a + b = \int_K d|f\mu| + \int_K d|(1-f)\mu| = \int_{\operatorname{supp}\mu} |f|\,d|\mu| + \int_{\operatorname{supp}\mu} |1-f|\,d|\mu| =$$

$$= \int_{\operatorname{supp}\mu} f\,d|\mu| + \int_{\operatorname{supp}\mu} (1-f)\,d|\mu| = \int_{\operatorname{supp}\mu} d|\mu| = \|\mu\| = 1.$$

Dementsprechend stellt die Gleichung

$$\mu = a\frac{f\mu}{a} + b\,\frac{(1-f)\mu}{b} = a\,\frac{f\mu}{\|f\mu\|} + b\,\frac{(1-f)\mu}{\|(1-f)\mu\|}$$

μ als konvexe Kombination von Elementen aus $A_1^\perp$ dar, wobei a und b wegen der Annahme $0 < f < 1$ auf supp μ sowie $\|\mu\| \leqslant 1$ die Ungleichung $0 \leqslant a,\ b \leqslant 1$ erfüllen.

Aus $\mu \in \operatorname{Ext}(A_1^\perp)$ folgt z.B. $\mu = \dfrac{f\mu}{\|f\mu\|}$, d.h., $f = \|f\mu\|$ fast überall bzgl. μ.

Somit ist $\{x \in K; f(x) \neq \|f\mu\|\}$ eine offene Menge vom $|\mu|$-Maß 0, hat also leeren Durchschnitt mit supp μ. Es folgt $f = \|f\mu\|$ konstant auf supp μ. □

Lemma 11. ist der einzige Punkt beim Beweis des Satzes von Bishop, wo wir von A die *Algebrastruktur* benötigen. Tatsächlich geht es auch mit gewissen abgeschwächten Voraussetzungen (Modul über einer Algebra, Ideal ...) doch kann man nicht völlig auf *gewisse multiplikative Bedingungen* verzichten.

Als unmittelbare Folgerung aus 10. notieren wir noch:

12. Korollar: *Eine abgeschlossene Unteralgebra A von $C(K)$ mit $1 \in A$ und mit der Eigenschaft $A|_E = C(E)$ für alle $E \in \mathscr{K}_A$ erfüllt bereits $A = C(K)$.*

Ist insbesondere jeder Punkt von K eine maximale antisymmetrische Teilmenge von K für A und enthält die abgeschlossene Unteralgebra A von $C(K)$ die Funktion identisch 1, so muß $A = C(K)$ gelten. Die Bedingung „Jeder Punkt von K ist maximale antisymmetrische Menge für A" ist äquivalent dazu, daß *die reellen Funktionen in A die Punkte trennen*. Letzteres gilt aber wiederum nach einem einfachen Argument bestimmt, wenn A die Punkte trennt und *selbstadjungiert* ist.
Somit haben wir Satz 2. von Stone-Weierstraß als Folgerung aus dem Satz von Bishop bekommen.

Der Unterschied der beiden Sätze wird besonders klar, wenn wir Algebren von Funktionen auf einer Menge $K \subset \mathbb{C}^n$, K kompakt, betrachten, für die alle Funktionen auf gewissen offenen Teilmengen von K holomorph sind. Hier läßt sich der Satz von Stone-Weierstraß nicht anwenden, weil für holomorphe nicht-konstante Funktionen f nie auch $\bar{f}$ holomorph sein kann. Aber der Satz von Bishop liefert möglicherweise noch nichttriviale Aussagen.

Ein anderes *typisches Anwendungsbeispiel für den Satz von Bishop* (das nicht schon mit dem Satz von Stone-Weierstraß erledigt werden kann) wollen wir zum Abschluß des Paragraphen angeben.

13. Satz: *Sei $K \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{R}^n$ $(N, n \geqslant 1)$ kompakt. Für festes $t = (t_1, \ldots, t_n)$ aus $\mathbb{R}^n$ betrachte $K_t = \{z \in \mathbb{C}^N; (z, t) \in K\}$. Wenn dann bei beliebigem $t \in \mathbb{R}^n$ stets $A(K_t) = P(K_t)$ gilt, so kann jede Funktion $f \in C(K)$ mit der Eigenschaft, daß $f(\,.\,, t)$ holomorph auf $\mathring{K}_t$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}^n$, gleichmäßig auf K durch Polynome (in $z_1, \ldots, z_N, t_1, \ldots, t_n$) approximiert werden.*

Beweis:[4)] Sei $f \in C(K)$ mit $f(\,.\,, t)$ holomorph auf $\mathring{K}_t$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}^n$ und bezeichne $P(K)$ die Abschließung der Polynome in $z_1, \ldots, z_N, t_1, \ldots, t_n$ im Raum $C(K)$. Zu beweisen ist $f \in P(K)$.
Nun stellt $P(K)$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(K)$ dar. Die reellen Polynome (in $t_1, \ldots, t_n$) trennen die Punkte des $\mathbb{R}^n$. Deshalb muß jede

4) Siehe Rudins Buch „Functional Analysis", p. 116f., und vergleiche die kürzeren, aber anders angelegten Beweise bei Chalice [5] oder Stout [15], 25.8.

antisymmetrische Teilmenge von K für $P(K)$ in einem $K_t \times \{t\} = \{z \in \mathbb{C}^N; (z, t) \in K\} \times \{t\}$ enthalten sein. Nach dem Satz 10. von Bishop genügt es jetzt zu beweisen: $f(\,.\,, t)\,|_{K_t} \in P(K)\,|_{K_t}$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}^n$, d.h., wenn $t_0 \in \mathbb{R}^n$ fest vorgegeben ist, so gibt es ein $g \in P(K)$, $g = g(z, t)$, $z = (z_1, \ldots, z_N)$, mit $f(\,.\,, t_0) = g(\,.\,, t_0)$. (Vgl. die Zeichnung nach 6.) Nach Voraussetzung ergibt sich aber $f(\,.\,, t_0) \in A(K_{t_0}) = P(K_{t_0})$, so daß man gemäß einer einfachen Überlegung Polynome $P_i = P_i(z)$, $z \in \mathbb{C}^N$, finden kann, derart daß $f(z, t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(z)$ gleichmäßig in $z \in K_{t_0}$, wobei o.B.d.A. $\sup_{z \in K_{t_0}} |P_i(z)| < 1/2^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Anschließend findet man auf elementare Weise ein Polynom $Q = Q(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, auf $\mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften: $Q(t_0) = 1$, aber $|Q(t)| < 1$ für alle $t \neq t_0$, derart daß $K_t \neq \emptyset$.

Sei jetzt $i \geqslant 1$ fest und definiere Φ_m auf K durch $\Phi_m(z, t) = |P_i(z)|\,|Q(t)|^m$. $\{\Phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ bildet eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen auf K mit

$$\lim_{m \to \infty} \Phi_m(z, t) = \begin{cases} 0, \text{ falls } t \neq t_0 \\ |P_i(z)|, \text{ wenn } t = t_0 \end{cases}.$$ Also $\lim_{m \to \infty} \Phi_m(z, t) < 1/2^i$ in jedem Punkt $(z, t) \in K$.

Bei $K_m = \{(z, t) \in K; \Phi_m(z, t) < 1/2^i\}$ bekommt man $K = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$, und ein einfaches Kompaktheitsargument erlaubt daraus zu schließen, daß es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $m_i \in \mathbb{N}$ geben muß mit $\Phi_{m_i}(z, t) < 1/2^i$ auf ganz K. Es folgt, daß die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} P_i(z) Q^{m_i}(t)$ gleichmäßig auf K gegen eine Funktion $g = g(z, t)$ konvergiert, für die $g \in P(K)$ gilt und offenbar (für beliebige $z \in K_{t_0}$)

$$g(z, t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(z) Q^{m_i}(t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(z) = f(z, t_0). \square$$

Z.B. kann Satz 13. nach 5. angewandt werden, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}^n$ K_t die in 5. (für das dortige K) angegebene Form besitzt. Direkt aus Satz 4. von Mergelyan folgt mit 13. insbesondere Satz 6. von Rudin, wie wir es früher versprochen hatten.

4. Approximation auf vollständig regulären Hausdorffräumen: Das gewichtete Approximationsproblem und seine Lösung im beschränkten Fall

L. Nachbin gelangte zum sog. gewichteten Approximationsproblem, einer gleichzeitigen Verallgemeinerung des Bernsteinschen Approximationsproblems und der Sätze von Stone-Weierstraß bzw. von Bishop, durch eine *Kombination folgender Ideen:*

1. *Approximation von Funktionen auf allgemeinen topologischen Räumen* (statt auf Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$) [wie schon beim Übergang vom Weierstraßschen Approximationssatz zum Satz von Stone-Weierstraß],
2. *die approximierenden Funktionen gehören einen gewissen algebraischen Gebilde, hier einem Modul, an* (statt wie früher auf Polynome festgelegt zu sein oder, wie beim Satz von Stone-Weierstraß, eine Algebra zu bilden) [auch dies ist nur eine konsequente Weiterführung der Idee, die zum Satz von Stone-Weierstraß führte],
3. *Verwendung von vielen verschiedenen Topologien, bzgl. derer approximiert wird (alle diese Topologien werden durch Systeme von Gewichtsfunktionen gegeben)* [hier wird der Einfluß des Bernsteinschen Approximationsproblems erkennbar].

Um noch vernünftige Resultate zu bekommen, müssen natürlich gewisse Voraussetzungen beibehalten werden, etwa bzgl. der Gewichtsfunktionen oder bzgl. der Struktur der Menge der Funktionen, die zur Approximation bereitstehen. Abgesehen von diesen möglichst schwachen Voraussetzungen wählte Nachbin aber den allgemeinsten Rahmen, der sich anbietet. Wir geben jetzt die Definitionen, die benötigt werden, und führen einige Bezeichnungen ein.

Dabei gehen wir nur auf *skalare Funktionen* ein, nicht aber auf Funktionen mit Werten in topologischen Vektorräumen. Für diese und Formen einer Verallgemeinerung des Satzes von Stone-Weierstraß bei Vektorfunktionen vergleiche z.B. [2] und Prolla [11].

14. Definition: Der *Grundraum* X, auf dem die Funktionen definiert sind, ist im folgenden immer ein vollständig regulärer (Hausdorff-)Raum; eine nichtnegative von oben halbstetige Funktion auf X heiße *Gewichtsfunktion*. Wir betrachten dann ein System $V \neq \emptyset$ von Gewichtsfunktionen v auf X, von dem wir das folgende fordern wollen: V ist nach oben gerichtet in dem Sinne, daß aus $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \geqslant 0$ stets folgt, daß ein $v \in V$ gefunden werden kann mit $\lambda v_1, \lambda v_2 \leqslant v$ punktweise auf X. Ein System V dieser Art wird (nach Summers) als *Nachbin-Familie* auf X bezeichnet.

Da bei beliebigem System V von Gewichtsfunktionen mit jedem $v \in V$ auch λv, $\lambda \geqslant 0$, und zu $v_1, v_2 \in V$ auch $\sup(v_1, v_2)$ hinzugenommen werden kann, ohne daß sich an den dadurch verlangten Gewichtsbedingungen etwas ändert, bedeutet die Bedingung, daß das System von Gewichtsfunktionen, welches wir betrachten wollen, eine Nachbin-Familie sein soll, keine Einschränkung der Allgemeinheit. Ähnliches gilt in etwas anderer Weise auch für die Forderung der vollständigen Regularität des Grundraumes.

Übrigens ist nach Definition 14. zugelassen, daß die Gewichtsfunktionen unstetig sind und in gewissen Punkten des Grundraumes verschwinden. Sie müssen aber auf kompakten Teilmengen von X stets beschränkt sein. Etwa charakteristische Funktionen abgeschlossener Mengen sind nach 14. als Gewichtsfunktionen zugelassen.

Die folgende Definition stammt aus Nachbin [10]:

15. Definition: Sei V eine Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären Raum X. Als *gewichteten Raum* (oder nach Prolla auch als *Nachbin-Raum*) bezeichnet man den lokalkonvexen topologischen Vektorraum

$$\begin{aligned} CV_0(X) = \; \{ & f \in C(X) \text{ (d.h., } f \text{ stetig und komplexwertig auf } X); \\ & vf \text{ verschwindet im Unendlichen für jedes } v \in V\}, \end{aligned}$$

versehen mit dem System von Halbnormen $\{ \mathrm{b}v; v \in V\}$:
$\mathrm{b}v(f) = \sup_{x \in X} v(x)|f(x)|$ für alle $f \in CV_0(X)$.

Hierbei sagt man wieder, eine Funktion $g : X \to \mathbb{C}$ verschwindet im Unendlichen, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein kompaktes $K \subset X$ existiert mit $|g(x)| < \epsilon$, sofern nur $x \in X \setminus K$. Und vf gibt die Funktion $x \to v(x)f(x)$ an. Wenn diese Funktion im Unendlichen verschwindet, so schließt man, daß sie auf ganz X beschränkt ist: Denn v muß ja nach Voraussetzung auf jeder kompakten Teilmenge von X nach oben beschränkt sein. Also existiert das sup in der Definition von $\mathrm{b}v$.

Beispiele solcher Räume bekommt man einerseits, indem man für V die Nachbin-Familie der positiven Vielfachen einer festen Gewichtsfunktion v nimmt. Andererseits liefert für einen linearen Unterraum U von $C(X)$ das System U^+ der nichtnegativen Funktionen aus U ebenfalls immer eine Nachbin-Familie auf X. Wir geben einige interessante und typische Beispiele in der folgenden *Tabelle:*

16. Beispiele: V	$CV_0(X)$
(1) positive Konstanten auf X	$C_0(X)$, versehen mit der sup-Norm (= im Unendlichen verschwindende stetige Funktionen auf X)
(2) $\{\lambda\chi_K; \lambda > 0, K \subset X$ kompakt$\}$, χ_K = charakteristische Funktion von K	$C(X)$, versehen mit der Topologie co der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X
(3) $C_0^+(X) = (C_0(X))^+$, X lokalkompakt	$CB(X)$ (= stetige beschränkte Funktionen auf X) unter der sog. *strikten* Topologie β von R.C. Buck [3]
(4) $C^+(X) = (C(X))^+$, X lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar	$C_c(X) = \{f \in C(X); f$ hat kompakten Träger in $X\}$, versehen mit der induktiven Limes-Topologie i (vgl. Bourbaki, Intégration, Summers [16] sowie [2] für allgemeinere X)

Die strikte Topologie β ist dabei auf $CB(X)$ besonderes interessant aus verschiedenen Gründen, z.B. approximationstheoretischer und maßtheoretischer Natur. Für sie gilt co $\leqslant \beta \leqslant$ sup-Norm-Topologie. β zu benutzen, hat in manchen Problemen Vorteile gegenüber einer Verwendung der üblichen sup-Norm. β ist ebenfalls vollständig, aber etwa nur für kompakte X metrisierbar. Für eine Verallgemeinerung der strikten Topologie auf nicht lokalkompakte Grundräume siehe z.B. Collins [6]. Viele Ergebnisse über gewichtete Räume wurden, wie Collins in [6] erwähnt, zunächst im Falle des Raumes $(CB(X), \beta)$ hergeleitet.

Wir gehen nicht auf die topologischen Vektorraum-Eigenschaften der gewichteten Räume ein. Einiges dazu findet man in [2], Collins [6], Prolla [11], Summers [16] bzw. der dort zitierten Literatur. Wir erwähnen, daß die Topologie von $CV_0(X)$ sicher *separiert* ist, wenn nur zu jedem $x \in X$ ein $v \in V$ mit $v(x) > 0$ gefunden werden kann.

Wir wenden uns nun gleich dem sog. gewichteten Approximationsproblem zu, wie es L. Nachbin in [10], 25. formuliert hat (vgl. auch Collins [6], Prolla [11], Summers [16], [17], [18], [19]).

Eine wesentliche Rolle beim Satz von Stone-Weierstraß bzw. beim Satz von Bishop spielte stets die *Algebrastruktur*. Nun ist $CV_0(X)$, wie man sofort sieht, i.a. keine Algebra unter punktweiser Multiplikation. Dagegen bildet $CV_0(X)$ immer *einen $CB(X)$-Modul*, wenn man die Modul-Multiplikation punktweise erklärt. Deshalb liegt es nahe, Untermoduln von $CV_0(X)$ zu betrachten und deren Abschließung zu studieren. Noch etwas allgemeiner, und auch auf die Möglichkeit einer Approximation mit Polynomen bzw. mit Funktionen, die auf Teilmengen des $\mathbb{C}^n$ holomorph sind, zugeschnitten, bekommt man jetzt:

17. Gewichtetes Approximationsproblem: *Sei A eine vorgegebene Unteralgebra von $C(X)$, die die Konstanten enthält, X vollständig regulär. Sei für eine Nachbin-Familie V auf X der lineare Unterraum W von $CV_0(X)$ ein Modul über A bzgl. punktweiser Multiplikation, d.h. $AW \subset W$. Das gewichtete Approximationsproblem fragt dann, wie die Abschließung von W in $CV_0(X)$ aussieht.*

Wenn A z.B. nur aus den konstanten Funktionen besteht, so kann W irgendein linearer Unterraum von $CV_0(X)$ sein, und die Bedingung, daß W ein A-Modul ist, hat keine Konsequenzen. Vergleiche mit dem Satz von Stone-Weierstraß bzw. dem Satz von Bishop zeigen, daß dann keine tiefliegenden Resultate zu erwarten sind. Dagegen erhält man interessante Sätze, wenn A wesentlich größer gewählt werden kann.

Offenbar stellt das gewichtete Approximationsproblem in der Form von 17. eine *Verallgemeinerung des Bernsteinschen Approximationsproblems* aus 7. dar: Dort haben wir für X den $\mathbb{R}^n$, V ist das System der positiven Vielfachen einer einzigen Gewichtsfunktion v, die schnell fallend angenommen wird. Gesucht werden dabei Bedingungen an v mit $\overline{P} = CV_0(\mathbb{R}^n)$ für die Algebra P der Polynome.

Insbesondere suggeriert Bishops Satz (genauso wie einige früher von Stone erwähnte Ergebnisse) eine *Lokalisierung* der Approximation im gewichteten Approximationsproblem 17. Darunter versteht man das folgende:

18. Definition: Für eine abgeschlossene Menge K in X (vollständig regulär) und eine Nachbin-Familie V auf X ist die Menge $V|_K$ der Restriktionen der Funktionen aus V auf K wieder eine Nachbin-Familie auf K. Und für A, W wie in 17. bildet $W|_K$ einen linearen Unterraum von $C(V|_K)_0(K)$, der Modul über $A|_K$ sein muß. Sei jetzt $\mathscr{K}$ eine Überdeckung von X durch paarweise disjunkte abgeschlossene Mengen. *Man sagt, das gewichtete Approximationsproblem sei lokalisierbar bezüglich der Überdeckung $\mathscr{K}$,* wenn stets

$$\overline{W}^{CV_0(X)} = \{f \in CV_0(X); f|_K \in \overline{W|_K}^{C(V|_K)_0(K)} \text{ für jedes } K \in \mathscr{K}\}.$$

Nachbin war bei seiner Behandlung des Problems 17. (vom Bernsteinschen Approximationsproblem herkommend) an *selbstadjungierten* Algebren A interessiert und betrachtete entsprechend *die folgende Lokalisierung:*

$x, y \in X$ heißen *äquivalent* $(x \sim y)$, falls $a(x) = a(y)$ für alle $a \in A$. Die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. der Relation $\sim$ bildet eine paarweise disjunkte abgeschlossene Überdeckung $\mathscr{A}$ von X, wie in 18. gefordert. Gemäß dem Satz von Bishop empfiehlt es sich, *im allgemeinen Fall* (A nicht notwendig selbstadjungiert) *eine andere Lokalisierung* zu betrachten: Sei $\mathscr{K}_A$ das System der maximalen antisymmetrischen Teilmengen von X für die Algebra A. Diese können genau wie früher (vgl. 8., 9.) definiert werden, und $\mathscr{K}_A$ bildet wieder eine Überdeckung von X durch paarweise disjunkte abgeschlossene Mengen. [Wir hatten in 8. bzw. 9. tatsächlich nirgends die Kompaktheit des Grundraumes ausgenutzt.] Wenn A selbstadjungiert ist, so zeigt man leicht, daß $\mathscr{K}_A$ mit $\mathscr{A}$ wie oben zusammenfällt.

Um im folgenden die Ergebnisse von Nachbin, Prolla und Summers zum gewichteten Approximationsproblem prägnanter formulieren zu können, führen wir folgende Definition ein:

19. Definition: *Man sagt, der beschränkte Fall des gewichteten Approximationsproblems liegt vor,* wenn in 17. jedes $a \in A$ beschränkt ist auf dem Träger jeder Gewichtsfunktion $v \in V$.

Dies ist insbesondere der Fall, wenn $A \subset CB(X)$ oder wenn jede Gewichtsfunktion $v \in V$ kompakten Träger hat.
Im beschränkten Fall sieht man, daß $CV_0(X)$ selbst A-Modul ist. Dann lautet das Ergebnis von Summers [17], [19]:

20. Theorem: *Im beschränkten Fall ist das gewichtete Approximationsproblem 17. stets lokalisierbar bzgl.* $\mathscr{K}_A$, *d.h.:*

Sei X vollständig regulär, V eine Nachbin-Familie auf X und A eine Unteralgebra von $C(X)$. Es gelte $a\,|_{\operatorname{supp} v}$ beschränkt für alle $a \in A$ und alle $v \in V$. Sei $W \subset CV_0(X)$ ein linearer Unterraum, der A-Modul bzgl. punktweiser Multiplikation. Dann gilt

$$\overline{W}^{CV_0(X)} = \{ f \in CV_0(X); f|_K \in \overline{W|_K}^{C(V|_K)_0(K)} \text{ für jede maximale antisymmetrische Teilmenge } K \text{ von } X \text{ bzgl. } A \},$$

so daß $f \in CV_0(X)$ *genau dann zu* $\overline{W}^{CV_0(X)}$ *gehört, wenn für jedes* $\epsilon > 0$, *jedes* $v \in V$ *und jedes* $K \in \mathscr{K}_A$ *ein* $w \in W$ *gefunden werden kann mit* $\sup_{x \in K} v(x)|f(x) - w(x)| < \epsilon$.

Falls die Algebra A selbstadjungiert ist, stimmt $\mathscr{K}_A$ nach unserer früheren Überlegung mit $\mathscr{A}$ überein. Wenn dann A noch die Punkte von X trennt, so sind die Elemente von $\mathscr{K}_A = \mathscr{A}$ alle einpunktig. In diesem Falle ist also entweder $\overline{W} = CV_0(X)$, oder die Funktionen aus $\overline{W}$ sind gerade alle Funktionen aus $CV_0(X)$, die auf einer gewissen abgeschlossenen Teilmenge von X verschwinden.

Das angegebene Resultat für selbstadjungierte Algebren A wurde bereits von Nachbin (vgl. [10]) bewiesen. Es enthält insbesondere als *Spezialfall* natürlich wieder den Satz von Stone-Weierstraß. Genauso bildet der Satz von Bishop übrigens eine einfache Folgerung aus 20.

Zur Problemgeschichte von 20. sollte vielleicht erwähnt werden, daß zunächst Glicksberg [8] den Satz von Bishop von kompaktem Grundraum auf die Algebra $(CB(X), \beta)$, X lokalkompakt, übertragen konnte. Für eine Verallgemeinerung der strikten Topologie β auf $CB(X)$ mit X nur vollständig regulär gelang es später Summers (vgl. [16], [18]) zu zeigen, daß bei einem Modul $W \subset (CB(X), \beta)$ über einer Algebra $A \subset CB(X)$ die Abschließung $\overline{W}$ in $(CB(X), \beta)$ stets im obigen Sinne lokalisierbar bzgl. $\mathscr{K}_A$ sein muß. Andererseits hat Prolla [11] Satz 20. bereits bewiesen, wenn X lokalkompakt ist und wenn zu jeder Gewichtsfunktion $v \in V$ ein $f \in C^+(X)$ mit $v \leqslant f$ gefunden werden kann.

Glicksberg und Prolla benutzten den in Paragraph 3. skizzierten Beweis des Satzes von Bishop und übertrugen ihn auf den vorliegenden Fall. Die dabei auftretenden Schwierigkeiten liegen nicht in den funktionalanalytischen Hilfsmitteln wie in den Sätzen von Krein-Milman, Hahn-Banach oder Alaoglu-Bourbaki, die in geeigneten Fassungen auch für beliebige lokalkonvexe Räume richtig bleiben. Damit sich aber die Methode des Beweises zum Satz von Bishop wie vorher anwenden läßt, muß man *eine Art Rieszschen Darstellungssatz für das Dual* $(CV_0(X))'$ *von* $CV_0(X)$ *mit Hilfe von Maßen auf* X herleiten, um dann feststellen zu können, daß die Extremalpunkte von (gewissen) Polaren von Nullumgebungen in $CV_0(X)$, geschnitten mit dem Annihilator von W, als Träger wieder eine antisymmetrische Teilmenge von X bzgl. A (oder die leere Menge) haben. Glicksberg hatte dabei eine Darstellung des Duals von $(CB(X), \beta)$ als Raum der beschränkten Radonmaße auf X zur Verfügung. Prolla konnte andererseits eine frühere

Darstellung der gleichstetigen Mengen im Dual von $CV_0(X)$ durch Summers ausnutzen, die aber X lokalkompakt und die Majorisierung der Gewichtsfunktionen $v \in V$ durch stetige nichtnegative Funktionen auf X erforderlich machte.

Für nicht lokalkompaktes X ergeben sich jedoch zusätzliche Schwierigkeiten aus der Maßtheorie. Nach verschiedenen Schritten gelang es Summers [17] dann doch, diese Schwierigkeiten durch Einführung eines geeigneten *„Trägerbegriffes"* für Elemente aus dem sup-Norm-Dual des Raumes $B_0(X)$ [= beschränkte komplexwertige Funktionen auf X, die im Unendlichen verschwinden] zu beheben. Summers hat seine Ergebnisse und die Problemgeschichte sowie die Lösung des Problems im beschränkten Fall selbst in den Artikeln [16], [18] und [19] dargestellt. Wir empfehlen ihre Lektüre jedem Interessierten.

Durch die hinreichenden sog. analytischen bzw. quasianalytischen Kriterien des Bernsteinschen Approximationsproblems veranlaßt, führte Nachbin in Verallgemeinerung des beschränkten Falles den sog. *analytischen bzw. quasianalytischen Fall* des gewichteten Approximationsproblems ein. *Nachbin (vgl.* [10]*) bewies dann auch, daß in diesen Fällen das gewichtete Approximationsproblem für eine selbstadjungierte Algebra A lokalisierbar bzgl. $\mathscr{A}$ wie oben ist,* was die hinreichenden Kriterien des Bernsteinschen Approximationsproblems im $\mathbb{R}^n$ als einfache Spezialfälle enthält.

21. Definition: *Der analytische Fall des gewichteten Approximationsproblems* 17 liegt vor, wenn es Teilmengen $G(A) \subset A$, $G(W) \subset W$ gibt, so daß für alle $v \in V$, $a \in G(A)$ und $w \in G(W)$ immer $c_1, c_2 > 0$ existieren mit

$v(x)|\, w(x)| \leqslant c_1\ \mathrm{e}^{-c_2 |\, a(x)|}$ für beliebiges $x \in X$

und $G(A)$ und $G(W)$ folgende Eigenschaften besitzen:

(i) Die von $G(A)$ und der Funktion identisch 1 erzeugte Unteralgebra von A liegt in A bzgl. der Topologie co der kompakten Konvergenz dicht,

(ii) der von $G(W)$ erzeugte A-Teilmodul von W ist dicht in W bzgl. der von $CV_0(X)$ induzierten gewichteten Topologie.

[Es ist einfach zu sehen, daß der beschränkte Fall sich als *Spezialfall* aus dem analytischen Fall ergibt.]

Collins [6], p. 39 erwähnt nun das folgende unveröffentlichte Resultat von Summers, das den analytischen Fall des Problems 17. praktisch abschließt:

22. Satz: *Auch im analytischen Fall ist das gewichtete Approximationsproblem 17. stets lokalisierbar bzgl. $\mathcal{K}_A$.*

Wie Summers kürzlich angekündigt hat (vgl. [23]), *gilt Satz 22. ebenfalls im quasianalytischen Fall.* Damit wurden Nachbins Ergebnisse für selbstadjungierte A auf *allgemeine* Algebren übertragen. – Diese Resultate von Summers kann man als *(bisher) weitreichendste Verallgemeinerung des Satzes von Stone-Weierstraß* ansehen. Deshalb möchte ich hiermit schließen.

Literatur[5)]

[1] K.D. Bierstedt, Function algebras and a theorem of Mergelyan for vector-valued functions, in „Papers from the Summer Gathering on Function Algebras", Aarhus (1969), Various Publications Series No. **9**, p. 1 - 10.

[2] –, Gewichtete Räume stetiger vektorwertiger Funktionen und das injektive Tensorprodukt I und II, J. reine angew. Math. **259** (1973), 186 - 210 und **260** (1973), 133 - 146.

[3] R.C. Buck, Bounded continuous functions on a locally compact space, Michigan Math. J. **5** (1958), 95 - 104.

[4] R.B. Burckel, Characterizations of $C(X)$ among its subalgebras, Marcel Dekker, New York (1972).

[5] D.R. Chalice, On a theorem of Rudin, Proc.Amer.Math.Soc. **35** (1972), 296 - 297.

[6] H.S. Collins, Strict, weighted, and mixed topologies, and applications, preprint, Louisiana State University, Baton Rouge (1973/74), 61 p. (to appear in Advances in Math.)

[7] J.P. Ferrier, Sur l'approximation pondérée, Séminaire d'analyse moderne, Université de Sherbrooke (1972), 89 p.

[8] I. Glicksberg, Bishop's generalized Stone-Weierstrass theorem for the strict topology, Proc.Amer.Math.Soc. **14** (1963), 329 - 333.

[9] E. Kallin, Fat polynomially convex sets, in „Function Algebras (Proceedings Symposium on Function Algebras Tulane University 1965, F.T. Birtel, Editor)", Scott, Foresman and Co., Chicago (1966), p. 149 - 152.

---

5) Diese Literaturliste ist bewußt sehr knapp gehalten und umfaßt nur die Artikel, die im Text zitiert sind. Für weitere Literatur siehe insbesondere die Arbeiten [4], [6], [7], [10], [14], [16], [20].

[10] L. Nachbin, Elements of approximation theory, Van Nostrand Math. Studies No. **14**, Princeton (1967).

[11] J.B. Prolla, Bishop's generalized Stone-Weierstraß Theorem for weighted spaces, Math. Ann. **191** (1971), 283 - 289.

[12] W.Rudin, Subalgebras of spaces of continuous functions, Proc.Amer. Math.Soc. **7** (1956), 825 - 830.

[13] –, Real and complex analysis, McGraw-Hill, New York (1970).

[14] M.H. Stone, A generalized Weierstraß approximation theorem, in „Studies in Modern Analysis (R.C. Buck, Editor)", Math. Association of America, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1962), p. 30 - 87.

[15] E.L. Stout, The theory of uniform algebras, Bogden and Quigley, Tarrytown-on-Hudson (1971).

[16] W.H. Summers, Weighted spaces and weighted approximation, Séminaire d'analyse moderne, Université de Sherbrooke (1970), 21 p.

[17] –, Weighted approximation for modules of continuous functions, Bull.Amer.Math.Soc. **79** (1973), 386 - 388.

[18] –, The bounded case of the weighted approximation problem, in „Functional analysis and applications (Symposium Recife, Brasil 1972)", Springer Lecture Notes in Math. **384** (1974), p. 177 - 183.

[19] –, Weighted approximation for modules of continuous functions II, Proc. Symposium Rio de Janeiro 1972, Hermann, to appear.

[20] B.M. Weinstock, Approximation by holomorphic functions on certain product sets in $\mathbb{C}^N$, Pacific J. Math. **43** (1972), 811 - 822.

[21] J. Wermer, Banach algebras and several complex variables, Markham Publ.Co., Chicago (1971).

[22] G. Zapata, Bernstein approximation problem for differentiable functions and quasi-analytic weights, Transact.Amer.Math.Soc. **182** (1973), 503 - 509.

Nachtrag:

[23] W.H. Summers, The weighted approximation problem, Short communication (and abstract) at the International Congress of Mathematicians, Vancouver (1974).

Anschrift des Autors:

Arbeitsstelle Mathematik
Fachbereich 17
Gesamthochschule Paderborn

D-479 Paderborn
Postfach 454, Pohlweg 55