Konvexe Mengen und ein Satz von TITCHMARSH

Von

BENNO FUCHSSTEINER

E. C. TITCHMARSH hat gezeigt, daß für integrable Funktionen u, v mit kompakten Trägern die abgeschlossene konvexe Hülle des Trägers der Faltung $u * v$ gleich der Vektorsumme der abgeschlossenen konvexen Hüllen der Träger von u und v ist. Gewöhnlich wird der Beweis dieses Satzes funktionentheoretisch geführt. Nach einer Idee von RYLL-NARDZEWSKI [3] vereinfacht sich der Beweis jedoch erheblich für $u = v$. In diesem Spezialfall kann man auf funktionentheoretische Hilfsmittel verzichten.

In dieser Arbeit wird ein Beweis des oben erwähnten Satzes vorgelegt, der auf einer einfachen Eigenschaft konvexer Mengen in lokalkonvexen Vektorräumen beruht. Benutzt man die Gültigkeit des Theorems von Titchmarsh für $u * u$, so führt diese Betrachtung konvexer Mengen direkt zu einem Beweis des Satzes im allgemeinen Falle.

1. Ein Satz über abgeschlossene konvexe Mengen. Es sei E ein lokalkonvexer Hausdorffscher topologischer Vektorraum. Ist $A_1, A_2 \subset E$, so schreiben wir:

$$A_1 + A_2 = \{x + y\colon\ x \in A_1, y \in A_2\} \quad \text{mit} \quad A_1 + \emptyset = \emptyset .$$

Mit $\langle A_1 \rangle$ bezeichnen wir die konvexe Hülle von A_1.

Für abgeschlossene $A \subset E$ gilt folgender Satz:

Satz 1. *Die beiden folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

a) *A ist konvex.*

b) *Wenn $X_n \subset E$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ mit*

i) $X_0 \subset A$,

ii) *$\exists$ eine beschränkte Menge $B \subset E$, so daß $X_n \subset A + B \quad \forall n \geqq 0$,*

iii) $2X_n \subset X_{n-1} + X_{n+1} \quad \forall n \geqq 1$,

dann gilt: $X_n \subset A \quad \forall n \geqq 0$.

Wenn $A = \emptyset$, so ist der Beweis trivial, da dann $X_n = \emptyset\ \forall n \geqq 0$. Wir können also annehmen, daß A nicht leer ist.

Beweis b) $\Rightarrow$ a): Wir fixieren zwei beliebige Punkte $\xi, \eta \in A$ und setzen:

$$X_0 = A, X_n = A \cup \{\tfrac{1}{2}(\xi + \eta)\} \quad \forall n \geqq 1 .$$

Damit gilt i), ii) und iii). Also ist auch $\frac{1}{2}(\xi + \eta) \in A$. Hieraus und aus der Abgeschlossenheit von A folgt sofort, daß A konvex ist.

Beweis a) $\Rightarrow$ b): Es seien die $X_n \subset E$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Mengen, für die i), ii) und iii) gelten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann B als absolutkonvex angenommen werden. Für $n \geqq 0$ sei $\tau_n = \operatorname{Inf}\{t > 0\colon X_0 \cup \cdots \cup X_n \subset A + tB\}$, also $\tau_0 = 0, \tau_n \leqq \tau_{n+1}$ und $\tau_n \leqq 1$. Da B absolutkonvex ist, schließt man mit iii): $2\tau_n \leqq \tau_{n-1} + \tau_{n+1}$, oder $\tau_n - \tau_{n-1} \leqq \tau_{n+1} - \tau_n \; \forall n \geqq 1$. Mithin gilt:

$$(n - l)(\tau_l - \tau_{l-1}) \leqq \tau_n - \tau_l \quad \forall 1 \leqq l \leqq n.$$

Daraus folgt $\tau_n = 0 \; \forall n \geqq 0$. Sei nun $V \subset E$ eine beliebige Nullumgebung, dann existiert ein $\beta > 0$ mit $B \subset \beta V$, außerdem gilt: $X_n \subset A + \frac{1}{\beta} B \subset A + V$. Damit erhalten wir $A = \bar{A} = \bigcap_V (A + V) \supset X_n \; \forall n \geqq 0$.

2. Der Satz von Titchmarsh-Lions. Wir wollen im folgenden Multiindizes verwenden. Als Multiindex α in $\mathbf{R}^n$ bezeichnen wir ein n-Tupel von nichtnegativen ganzen Zahlen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. M^n ist die Menge der Multiindizes in $\mathbf{R}^n$. Wir schreiben:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad \forall \alpha \in M^n, x \in \mathbf{R}^n,$$

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \qquad \forall \alpha \in M^n,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \qquad \forall \alpha \in M^n.$$

Es sei $\mathfrak{E}(\mathbf{R}^n)$ der Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbf{R}^n$ versehen mit der Topologie, die durch die Halbnormen ϱ_k $(k = 0, 1, \ldots)$ gegeben ist:

$$\varrho_k\colon \varrho_k(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leqq k} \sup |D^\alpha \varphi| \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{E}(\mathbf{R}^n).$$

$\mathfrak{E}'(\mathbf{R}^n)$ ist der Raum der stetigen linearen Funktionale über $\mathfrak{E}(\mathbf{R}^n)$. $\mathfrak{E}'(\mathbf{R}^n)$ ist dann der Raum der Distributionen mit kompaktem Träger [1, p. 11]. (u, φ) bezeichnet den Wert des Funktionals $u \in \mathfrak{E}'(\mathbf{R}^n)$ angewendet auf $\varphi \in \mathfrak{E}(\mathbf{R}^n)$. $\operatorname{Supp}(u)$ ist der Träger von u. Ist $\varphi \in \mathfrak{E}(\mathbf{R}^n)$ und $a \in \mathbf{R}^n$, dann sei $\varphi_a\colon \varphi_a(x) = \varphi(a - x)$. Für $u \in \mathfrak{E}'(\mathbf{R}^n)$ sei $u_a\colon (u_a, \varphi) = (u, \varphi_a) \; \forall \varphi \in \mathfrak{E}(\mathbf{R}^n)$.

Zwischen Funktionen und Distributionen ist dann eine Faltung gegeben durch:

$$u * \varphi\colon (u * \varphi)(x) = (u, \varphi_x) \qquad \forall u \in \mathfrak{E}'(\mathbf{R}^n), \; \forall \varphi \in \mathfrak{E}(\mathbf{R}^n).$$

$u * \varphi$ ist aus $\mathfrak{E}(\mathbf{R}^n)$. Für $u, v \in \mathfrak{E}'(\mathbf{R}^n)$ kann man nun die Faltung wie folgt definieren:

$$u * v\colon (u * v, \varphi) = (u, v_0 * \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{E}(\mathbf{R}^n).$$

Für den Träger von $u * v$ gilt dann wie üblich:

$$\operatorname{Supp}(u * v) \subset \operatorname{Supp}(u) + \operatorname{Supp}(v) \qquad \forall u, v \in \mathfrak{E}'(\mathbf{R}^n).$$

LIONS [2] hat nun folgende Erweiterung eines Theorems von TITCHMARSH bewiesen:

Satz 2. *Für $u, v \in \mathfrak{E}'(\mathbf{R}^n)$ ist die konvexe Hülle (= abgeschlossene konvexe Hülle) des Trägers von $u * v$ gleich der Vektorsumme der konvexen Hüllen der Träger von u und v:*

$$\langle \operatorname{Supp}(u * v) \rangle = \langle \operatorname{Supp}(u) \rangle + \langle \operatorname{Supp}(v) \rangle .$$

Im folgenden wird dieser Satz als eine Anwendung von Satz 1 bewiesen. Wir beginnen zuerst mit Funktionen mit kompakten Trägern. $C_0(\mathbf{R}^n)$ bestehe aus den stetigen Funktionen auf $\mathbf{R}^n$, die kompakten Träger haben, und $C(\mathbf{R}^n)$ aus den stetigen Funktionen auf $\mathbf{R}^n$.

2.1. Die Faltung $u * u$ für $u \in C_0(\mathbf{R}^n)$.

Lemma 1. *Ist $u \in C(\mathbf{R}^1)$ mit $u(x) = 0$ für $x < 0 \leqq T$, und ist*

$$(u * u)(x) = \int u(x - t)\, u(t)\, dt = 0 \quad \forall x < 2T ,$$

dann ist $u(x) = 0 \quad \forall x < T$.

Der recht einfache Beweis dieses Lemmas von C. Ryll-Nardzewski ist enthalten in Mikusinski [3, p. 20].

Wir fixieren nun in $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$ einen beliebigen Einheitsvektor λ.

Für $u \in C_0(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in C(\mathbf{R}^n)$ setzen wir:

$$u_\varphi\colon\ u_\varphi(t) = \int_{\{x : \langle x, \lambda \rangle = t\}} \varphi(x)\, u(x)\, d\sigma(x) ,$$

wobei $\langle x, \lambda \rangle$ das innere Produkt der Vektoren x und λ ist, und die Integration über die $(n - 1)$-dimensionale Hyperebene $\langle x, \lambda \rangle = t$ geht. Es ist damit $u_\varphi \in C_0(\mathbf{R}^1)$.

Es sei nun $u, v \in C_0(\mathbf{R}^n)$, und $\varphi \in C(\mathbf{R}^n)$ sei eine Exponentialfunktion, also: $\varphi(x + y) = \varphi(x)\, \varphi(y)\ \forall x, y \in \mathbf{R}^n$. Man kann sich leicht überzeugen, daß dann für die Faltung $u * v$ gilt: $u_\varphi * v_\varphi = (u * v)_\varphi$.

Lemma 2. $\langle \operatorname{Supp}(u * u) \rangle = 2 \langle \operatorname{Supp}(u) \rangle\ \forall u \in C_0(\mathbf{R}^n)$.

Beweis. Die Inklusion $\subset$ ist klar.

Wir nehmen nun an: $\xi \in 2 \langle \operatorname{Supp}(u) \rangle$ und $\xi \notin \langle \operatorname{Supp}(u * u) \rangle$. Da $\langle \operatorname{Supp}(u * u) \rangle$ konvex und abgeschlossen ist (siehe etwa Valentine [5, p. 40]), existiert nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach ein Einheitsvektor $\lambda \in \mathbf{R}^n$ mit

$$\langle \lambda, \xi \rangle > \langle \lambda, \eta \rangle\ \forall \eta \in \langle \operatorname{Supp}(u * u) \rangle .$$

Wir setzen: $\max\limits_{\eta \in \langle \operatorname{Supp}(u * u) \rangle} \langle \lambda, \eta \rangle = 2T$ und $\langle \lambda, \xi \rangle = 2\tau$, also $\tau > T$. Wenn nun φ eine beliebige Exponentialfunktion ist, dann folgt aus $(u * u)_\varphi = u_\varphi * u_\varphi$, daß $(u_\varphi * u_\varphi)(t) = 0\ \ \forall t > 2T$. Für $\tilde{u}_\varphi : \tilde{u}_\varphi(t) = u_\varphi(\tau - t)$ gilt also $\tilde{u}_\varphi(t) = 0\ \ \forall t < 0$ und $(\tilde{u}_\varphi * \tilde{u}_\varphi)(t) = 0\ \ \forall t < 2(\tau - T)$. Daraus folgt mit Lemma 1, daß $\tilde{u}_\varphi(t) = 0$ $\forall t < \tau - T$, oder auch $u_\varphi(t) = 0\ \forall t > T$. Da dies für alle Exponentialfunktionen φ gilt, folgt aus dem Satz von Stone-Weierstrass (Yosida [6, p. 9]), daß $u(x) = 0\ \forall x$ mit $\langle \lambda, x \rangle > T$. Damit gilt dann im Widerspruch zur obigen Annahme: $\xi \notin 2 \langle \operatorname{Supp}(u) \rangle$. Also haben wir $\langle \operatorname{Supp}(u * u) \rangle \supset 2 \langle \operatorname{Supp}(u) \rangle$.

2.2. Die Faltung $u * v$ für $u, v \in C_0(\mathbf{R}^n)$. Es sei $u, v \in C_0(\mathbf{R}^n)$ und $\alpha, \beta \in M^n$. Wir setzen: $v_\alpha : v_\alpha(x) = x^\alpha \cdot v(x)$, $h_\alpha^\beta : h_\alpha^\beta(x) = x^\beta (v_\alpha * u)(x)$. Dann gilt $\operatorname{Supp}(v_\alpha) = \operatorname{Supp}(v)$

und $\operatorname{Supp}(h_\alpha^\beta) = \operatorname{Supp}(v_\alpha * u)$. Weiter ist bekanntlich $\operatorname{Supp}(\bar{u} * \bar{v}) \subset \operatorname{Supp}(\bar{u}) + \operatorname{Supp}(\bar{v}) \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in C_0(\mathbf{R}^n)$.

Es sei $\beta \in M^n$ mit $|\beta| = 1$. Bekanntlich gilt dann die Produktregel:

$$x^\beta (\bar{v} * \bar{u})(x) = (\bar{v}_\beta * \bar{u})(x) + (\bar{v} * \bar{u}_\beta)(x) \qquad \forall \bar{u}, \bar{v} \in C_0(\mathbf{R}^n).$$

Damit erhält man folgende Gleichung:

$$(1) \qquad (v_{\alpha+\beta} * u) * (v_{\alpha+\beta} * u) = h_\alpha^\beta * (v_{\alpha+\beta} * u) - h_{\alpha+\beta}^\beta * (v_\alpha * u) + (v_{\alpha+2\beta} * u) * (v_\alpha * u).$$

Es sei nun $S_\alpha = \operatorname{Supp}(v_\alpha * u)$. Für $x \in \mathbf{R}^n$ mit $(v_{\alpha+\beta} * u) * (v_{\alpha+\beta} * u)(x) \neq 0$ folgt aus Gleichung (1) $x \in S_\alpha + S_{\alpha+\beta} \cup S_{\alpha+2\beta}$. Mit Lemma 2 erhält man dann:

$$2 S_{\alpha+\beta} \subset 2 \langle S_{\alpha+\beta} \rangle = \langle \operatorname{Supp}(v_{\alpha+\beta} * u) * (v_{\alpha+\beta} * u) \rangle \subset \langle S_\alpha \rangle + \langle S_{\alpha+\beta} \cup S_{\alpha+2\beta} \rangle.$$

Setzen wir: $X_n = \left\langle \bigcup_{|\alpha| \leqq n} S_\alpha \right\rangle \ \forall n \geqq 0$, also $X_0 = \langle S_0 \rangle$, dann sind die X_n abgeschlossen und durch ein von n unabhängiges B beschränkt, denn $X_n \subset \langle \operatorname{Supp}(u) \rangle + \langle \operatorname{Supp}(v) \rangle \ \forall n \geqq 0$, außerdem gilt: $2 X_n \subset X_{n-1} + X_{n+1} \ \forall n \geqq 1$. Mit Satz 1 schließt man nun: $X_n \subset \langle S_0 \rangle = \langle \operatorname{Supp}(v * u) \rangle \ \forall n \geqq 0$, oder auch: $S_\alpha \subset \langle \operatorname{Supp}(v * u) \rangle$ $\forall \alpha$. Es sei nun $V \subset \mathbf{R}^n$ eine offene Menge mit $V \cap \langle \operatorname{Supp}(v * u) \rangle = \emptyset$. Dann ist

$$V \cap \operatorname{Supp}(v_\alpha * u) = \emptyset \ \forall \alpha, \quad \text{oder} \quad \int v(t)\, u(x - t)\, t^\alpha\, dt = 0 \quad \forall \alpha \in M^n, \ \forall x \in V.$$

Mit dem Polynom-Approximationssatz von Weierstrass ergibt sich dann

$$v(t)\, u(x - t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}^n, \ \forall x \subset V.$$

Da V offen ist, folgt schließlich $\operatorname{Supp}(u) + \operatorname{Supp}(v) \subset \langle \operatorname{Supp}(v * u) \rangle$, oder $\langle \operatorname{Supp}(u) \rangle + \langle \operatorname{Supp}(v) \rangle \subset \langle \operatorname{Supp}(v * u) \rangle$.

Wir haben also bewiesen:

Satz 3. $\langle \operatorname{Supp}(v * u) \rangle = \langle \operatorname{Supp}(u) \rangle + \langle \operatorname{Supp}(v) \rangle \ \forall u, v \in C_0(\mathbf{R}^n)$.

2.3. Beweis von Satz 2. Es sei $V(a, \delta) = \{x : |x - a| \leqq \delta\}$ die Kreisumgebung von $a \in \mathbf{R}^n$ mit Radius $\delta > 0$. $\mathfrak{E}(a, \delta)$ sei die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit Träger in $V(a, \delta)$. Für $u \in \mathfrak{E}'(\mathbf{R}^n)$ gilt dann bekanntlich:

$$a \in \operatorname{Supp}(u) \Leftrightarrow u|_{V(a,\delta)} \neq 0 \qquad \forall \delta > 0,$$

wobei $u|_{V(a,\delta)}$ die Restriktion von u auf $\mathfrak{E}(a, \delta)$ ist. Dies ist gleichbedeutend mit:

$$a \in \operatorname{Supp}(u) \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathfrak{E}(0, \delta) \quad \text{mit} \quad (u * \varphi)(a) \neq 0 \qquad \forall \delta > 0.$$

Sei nun $T_\delta(u) = \overline{\bigcup_{\varphi \in \mathfrak{E}(0,\delta)} \operatorname{Supp}(u * \varphi)}$, wobei die Vereinigung über alle $\varphi \in \mathfrak{E}(0, \delta)$ gehen soll. Es gilt:

$$\operatorname{Supp}(u) + \overline{V(0, \delta)} \supset T_\delta(u) \supset \operatorname{Supp}(u).$$

Daraus ergibt sich:

$$\bigcap_{\delta > 0} T_\delta(u) = \operatorname{Supp}(u) \qquad \forall u \in \mathfrak{E}'(\mathbf{R}^n).$$

Wir betrachten nun $u * v * \varphi * \gamma$ mit $\varphi, \gamma \in \mathfrak{E}(0, \delta)$ und $u, v \in \mathfrak{E}'(\mathbf{R}^n)$. Da $u * \varphi \in \mathfrak{E}(\mathbf{R}^n)$

und $v * \gamma \in \mathfrak{E}(\mathbf{R}^n)$, erhalten wir mit Satz 3

$$\langle \operatorname{Supp}(u * v * \varphi * \gamma) \rangle = \langle \operatorname{Supp}(u * \varphi) \rangle + \langle \operatorname{Supp}(v * \gamma) \rangle.$$

Daraus folgt:

$$\langle \operatorname{Supp}(u * v) \rangle + 2\overline{V(0, \delta)} \supset \langle T_\delta(u) \rangle + \langle T_\delta(v) \rangle.$$

Die Bildung des Durchschnittes über alle $\delta > 0$ liefert dann:

$$\langle \operatorname{Supp}(u * v) \rangle \supset \bigcap_{\delta > 0} (\langle T_\delta(u) \rangle + \langle T_\delta(v) \rangle) \supset \left\langle \bigcap_{\delta > 0} T_\delta(u) \right\rangle + \left\langle \bigcap_{\delta > 0} T_\delta(v) \right\rangle.$$

Also gilt:

$$\langle \operatorname{Supp}(u * v) \rangle \supset \langle \operatorname{Supp}(u) \rangle + \langle \operatorname{Supp}(v) \rangle.$$

Aus $\operatorname{Supp}(u * v) \subset \operatorname{Supp}(u) + \operatorname{Supp}(v)$ folgt dann die Behauptung von Satz 2.

Diese Arbeit wurde während eines Aufenthaltes am California Institute of Technology in Pasadena geschrieben. Der Aufenthalt ist durch ein Stipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft ermöglicht worden. Herrn Professor Dr. H. König aus Saarbrücken bin ich für seine Hilfe und für zahlreiche Hinweise zur Verbesserung der Beweise außerordentlich dankbar.

Literaturverzeichnis

[1] L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.
[2] F. L. Lions, Support de produit de compositions. C. R. Acad. Sci. Paris **232**, 1530 (1951).
[3] J. Mikusinski, Operational Calculus. New York 1959.
[4] E. C. Titchmarsh, Theory of Fourier Integrals. Oxford 1948.
[5] F. A. Valentine, Convex Sets. New York 1964.
[6] K. Yosida, Funktional Analysis. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1965.

Eingegangen am 1. 4. 1968 *)

Anschrift des Autors:
B. Fuchssteiner
Mathematisches Institut der Technischen Hochschule Darmstadt
61 Darmstadt, Hochschulstraße 1

*) Eine revidierte Fassung ging am 22. 2. 1969 ein.