

Bemerkungen zu den Minimumsätzen von H. BAUER

Von

B. FUCHSSTEINER

Ist Ψ eine Menge unterhalb stetiger Funktionen auf einem kompakten Raum X mit Werten in $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, so machen die Minimumsätze von H. BAUER Aussagen über Mengen $L \subset X$, so daß die $f \in \Psi$ auf L ihr Minimum in X annehmen. Eine solche Menge ist zum Beispiel der Choquet-Rand von X bezüglich Ψ .

In der vorliegenden Arbeit wird ein einfacher, allgemeiner Satz angegeben, der die verschiedenen Minimumsätze als Spezialfälle enthält.

1. Ein allgemeiner Satz. Im folgenden sei X ein kompakter Raum und Ψ eine Menge unterhalb stetiger Funktionen auf X mit dem Wertebereich $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. K sei eine beliebige nicht-leere, kompakte Teilmenge von X . Für $f \in \Psi$ bezeichnen wir mit $f[K]$:

$$(1) \quad f[K] := \{x \in K \mid f(x) = \inf_{y \in K} f(y)\}.$$

Da unterhalb stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Minimum annehmen, gilt $f[K] \neq \emptyset$, außerdem ist $f[K]$ kompakt und $f[K] \subset K$. Sei $\Phi \subset \Psi$ und ϱ eine Wohlordnung von Φ und $f_0 \in \Phi$ das minimale Element bezüglich ϱ , d.h. $(f_0, f) \in \varrho \forall f \in \Phi$.

Wir definieren induktiv:

$$\begin{aligned} K_{f_0} &= f_0[K], \\ K_f &= f \left[\bigcap_{\substack{(f, f') \in \varrho \\ f' \neq f}} K_{f'} \right] \quad \forall f \in \Phi \setminus \{f_0\}. \end{aligned}$$

Aus der Kompaktheit von K folgt, daß die K_f nichtleere kompakte Mengen sind. Weiter setzen wir:

$$K_\varrho = \bigcap_{f \in \Phi} K_f$$

K ist wieder nichtleer und kompakt. Außerdem gilt für alle $f \in \Phi$

$$(2) \quad f(x) = f(y) \quad \forall x, y \in K_\varrho.$$

Durch vollständige Induktion sieht man leicht, daß für $x \in K_\varrho$ und $x \in \tilde{K} \subset K$, \tilde{K} kompakt, gilt, daß $x \in \tilde{K}_\varrho$. Es sei nun \mathscr{W} die Menge aller Wohlordnungen von Ψ .

Wir setzen:

$$B(K) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\varrho \in \mathscr{W}} K_\varrho.$$

Satz 1. Jedes $f \in \Psi$ nimmt auf $B(X)$ sein Minimum in X an.

Beweis. Wir fixieren ein beliebiges $f \in \Psi$. Es gibt dann eine Wohlordnung ϱ von Ψ , so daß f minimales Element von ϱ ist. Also $X_\varrho \subset f[X]$. Mit (1) ergibt sich $f(x) \leq f(y) \forall x \in X_\varrho, y \in X$. Aus $\emptyset \neq X_\varrho \subset B(X)$ folgt dann die Behauptung. ■

Es gilt folgende Charakterisierung von $B(x)$.

Satz 2. $x \in X$ ist genau dann Element von $B(x)$, wenn für jede kompakte Menge K mit $x \in K \subset X$ entweder ein $f \in \Psi$ und ein $y \in K$ existieren mit

$$f(x) = \inf \{f(z) \mid z \in K\} < f(y), \text{ oder } \varphi(x) = \varphi(y) \forall y \in K, \varphi \in \Psi.$$

Beweis. Aus der Konstruktion von $B(K)$ sieht man, daß für $x \in B(X)$ und $x \in K \subset X$ (K kompakt) folgt $x \in B(K)$. Damit folgt unmittelbar die Notwendigkeit der obigen Bedingungen. Wir nehmen nun an, für ein festes $x \in X$ sei die obige Bedingung erfüllt, und wir betrachten die Menge \mathcal{F} bestehend aus allen Paaren (Φ, ϱ) , so daß $\Phi \subset \Psi$ und ϱ Wohlordnung von Φ ist mit $x \in X_\varrho$. \mathcal{F} wird mit folgender Ordnungsrelation ausgestattet:

$$(\Phi, \varrho) < (\Phi', \varrho') \Leftrightarrow \Phi \subset \Phi' \text{ und } \varrho' \text{ Fortsetzung von } \varrho \text{ ist.}$$

Diese Ordnung ist induktiv. Sei (Φ, ϱ) ein maximales Element in \mathcal{F} . Es sind nun alle $f \in \Phi$ konstant auf der kompakten Menge X_ϱ . Für $\Psi \setminus \Phi \neq \emptyset$, gäbe es auf Grund der Annahme ein $g \in \Psi \setminus \Phi$ mit $g(x) = \inf_{y \in X_\varrho} g(y)$, dann wäre aber

$$(\Phi \cup \{g\}, \varrho \cup \{(f, g) \mid f \in \Phi\}) \succ (\Phi, \varrho).$$

Dies widerspricht der Maximalität von (Φ, ϱ) . Also ist $\Psi = \Phi$. Damit ist alles bewiesen. ■

Bemerkung. Ist X eine konvexe kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraumes E und ist Ψ die Menge der stetigen reellen linearen Funktionale in E , so folgt aus Satz 2, daß $B(X)$ eine Untermenge der Extrempunkte von X ist. Mit dem Satz von Hahn-Banach folgt aus Satz 1 dann unmittelbar der Satz von Krein-Milman.

Man kann nun die diversen Minimumsätze [1], [2], [3], [6] mit Satz 1 oder auch mit Satz 2 beweisen. Wir wollen dies an zwei Beispielen zeigen.

2. Ein Minimumsatz von H. BAUER. X und Ψ seien wie eingangs definiert. \mathcal{M} sei die Menge aller Radonschen Wahrscheinlichkeitsmaße auf X . Jedem Punkt $x \in X$ wird die Menge \mathcal{M}_x zugeordnet.

$$\mathcal{M}_x = \{\mu \in \mathcal{M} \mid \int_X f d\mu \leq f(x) \forall f \in \Psi\}.$$

Der Choquet-Rand $\text{Ch}(X)$ von X bezüglich der Funktionen Ψ ist die Menge aller Punkte $x \in X$, so daß alle $\mu \in \mathcal{M}_x$ von $\{y \in X \mid f(x) = f(y) \forall f \in \Psi\}$ getragen werden.

Lemma 1. $\text{Ch}(X) \supset B(X)$.

Beweis. Sei ϱ eine Wohlordnung von Ψ , $x \in X_\varrho$ ein festes Element und $K \subset X \setminus X_\varrho$ eine kompakte Menge. Wir betrachten das Minimum φ bezüglich ϱ von folgender

Menge $\Phi = \{f \in \Psi \mid X_f \not\supset K_f\}$. Φ ist nicht leer. Es gilt dann: $\inf_{y \in K} \varphi(y) - \varphi(x) = \alpha > 0$.
Mithin folgt für alle $\mu \in \mathcal{M}_x$

$$\alpha \mu(K) = \int_K \alpha d\mu \leq \int_K (\varphi - \varphi(x)) d\mu \leq 0.$$

Also gilt für alle $\mu \in \mathcal{M}_x$ und alle kompakten $K \subset X \setminus X_\varrho$ $\mu(K) = 0$; d. h. μ wird von $X_\varrho \subset \{y \in X \mid f(x) = f(y) \forall f \in \Psi\}$ getragen. Mithin $x \in \text{Ch}(X)$. ■

Aus Satz 1 folgt sofort:

Satz (BAUER). Jedes $f \in \Psi$ nimmt sein Minimum auf X auf dem Choquet-Rand von X an.

Im allgemeinen gilt jedoch nicht $B(X) = \text{Ch}(X)$. Dafür ein einfaches Beispiel.

Beispiel. Sei $X = \{a, b, c\}$ ausgestattet mit der diskreten Topologie, und sei $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, wobei $\varphi_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 4)\}$ und $\varphi_2 = \{(a, 4), (b, 2), (c, 1)\}$. Dann ist $B(X) = \{a, c\} \subset \text{Ch}(X)$. Wir wollen feststellen, ob $b \in \text{Ch}(X)$. $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ seien die Punktmaße auf X . Jedes $\mu \in \mathcal{M}$ hat die Form $\mu = \alpha \delta_a + \beta \delta_b + \gamma \delta_c$ mit $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ und $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Wenn $\mu \in \mathcal{M}_b$, so folgt: $\alpha + 2\beta + 4\gamma \leq 2, 4\alpha + 2\beta + \gamma \leq 2$. Mithin $\beta = 1$, also $\mathcal{M}_b = \{\delta_b\}$ und $b \in \text{Ch}(X)$.

Von W. HACKENBROCH wurden mir die folgenden Sätze mitgeteilt.

Satz (HACKENBROCH). Wenn Ψ punktetrennend ist und $\{f + g \mid f, g \in \Psi\} \subset \Psi$, dann gilt: $B(X) \subset \text{Ch}(X) \subset \overline{B(X)}$.

Beweis. Lemma 1 liefert die erste Inklusion. Mit den Voraussetzungen ist $\overline{\text{Ch}(X)}$ bekanntlich der Silov-Rand von X bezüglich Ψ [4]. Nach Satz 1 ist aber $\overline{B(X)}$ ein abgeschlossener Rand, mithin haben wir: $\overline{B(X)} \supset \text{Ch}(X)$. ■

Korollar. Wenn $\Psi \subset C(X)$ und $\{f + g \mid f, g \in \Psi\} \subset \Psi$, dann gilt für $\text{Cl}_\Psi(B(X))$, die abgeschlossene Hülle von $B(X)$ in der Ψ -schwachen Topologie, daß $\text{Cl}_\Psi(B(X)) \supset \text{Ch}(X)$.

Beweis. Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\pi = \{(x, y) \mid f(x) = f(y) \forall f \in \Psi\}$ und die natürliche Abbildung $\nu: X \rightarrow X/\pi$. X/π ist kompakt unter der Quotiententopologie und $\Psi \subset C(X/\pi)$. Für die abgeschlossene Hülle $\text{Cl}_\Psi(B(X/\pi))$ von $B(X/\pi)$ in der Ψ -schwachen Topologie, die gröber als die Quotiententopologie in X/π ist, gilt nach dem angeführten Satz $\text{Cl}_\Psi(B(X/\pi)) \supset \text{Ch}(X/\pi)$. Man sieht aber sofort, daß $\nu^{-1}(\text{Cl}_\Psi(B(X/\pi))) = \text{Cl}_\Psi(B(X))$, und eine einfache Anwendung des Hahn-Banach Satzes ergibt $\nu^{-1} \text{Ch}(X/\pi) = \text{Ch}(X)$. Daraus folgt dann $\text{Cl}_\Psi(B(X)) \supset \text{Ch}(X)$. ■

3. Satz von KY FAN. Eine Spezialisierung der Minimumsätze von BAUER ist der Satz von KY FAN. Wir wollen ihn als Beispiel für die Anwendbarkeit von Satz 2 benutzen. Sei X, Ψ wie eingangs definiert. Von Ψ wird noch vorausgesetzt, daß Ψ die Punkte in X trennt. Man sagt, $x \in X$ liegt zwischen z und y ($x \in [z, y]$), wenn: $[(f(x) \leq f(z) \wedge f(x) \leq f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y) = f(z)] \forall f \in \Psi$.

KY FAN nennt einen Punkt Extrempunkt von X ($x \in E(X)$), wenn für alle $z, y \in X$ mit $x \in [z, y]$ folgt: $x = y = z$.

Lemma 2. $B(X) \subset E(X)$.

Beweis. Sei $x \in B(X)$ und $y, z \in X$ mit $x \in [y, z]$. Wir betrachten $K = \{x, y, z\}$. Aus $x \in [y, z]$ folgt, daß es kein $f \in \Psi$ geben kann, welches auf x ein echtes Minimum in K annimmt. Mit Satz 2 folgt dann, daß alle $f \in \Psi$ konstant auf K sind. Da Ψ die Punkte von X trennt, erhält man: $x = y = z$. ■

Auch hier gilt im allgemeinen nicht, daß $B(X) = E(X)$. (Beispiel in Abschnitt 2.) Daraus folgt sofort mit Satz 1:

Satz (KY FAN). *Jedes $f \in \Psi$ nimmt in $E(X)$ sein Minimum auf X an.*

Herrn Dr. W. HACKENBROCH und Herrn Prof. Dr. H. KÖNIG von der Universität Saarbrücken möchte ich für ihre Hinweise und Anregungen herzlich danken.

Literaturverzeichnis

- [1] H. BAUER, Minimalstellen von Funktionen und Extrempunkte. Arch. Math. **9**, 389–393 (1958).
- [2] H. BAUER, Minimalstellen von Funktionen und Extrempunkte II. Arch. Math. **11**, 200 bis 205 (1960).
- [3] H. BAUER, Supermartingale und Choquet-Rand. Arch. Math. **12**, 210–223 (1961).
- [4] H. BAUER, Silovscher Rand und Dirichletsches Problem. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **11**, 89–136 (1961).
- [5] W. HACKENBROCH (private Mitteilung).
- [6] KY FAN, On the Krein Milman Theorem. Proc. Symposia pure Math. **7**, 211–219 (1963).

Eingegangen am 21. 1. 1970 *)

Anschrift des Autors:
Benno Fuchssteiner
Mathematisches Institut
Technische Hochschule Darmstadt

*) Eine Neufassung ging am 4. 1. 1971 ein.