Math. Ann. 186, 171—176 (1970)

Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe und L^p-Räume

BENNO FUCHSSTEINER

In [1] hat der Verfasser versucht, den Begriff der konvexen Menge zu verallgemeinern. In dieser Arbeit soll eine spezielle Klasse von Konvexitätsbegriffen angegeben werden, nämlich solche, die durch stetige Abbildungen in Hausdorffschen Räumen erzeugt werden. Darunter fällt dann auch die p-Konvexität ($p \leqq 1$), für die dann in p-normierbaren Räumen die in [1] bewiesene Erweiterung des Satzes von Krein-Milman gültig ist. Weiterhin wird für $p \geqq 1$ ein Konvexitätsbegriff angegeben, der gerade die L^p-Räume charakterisiert.

§ 1. Konvexe, die durch Abbildungen erzeugt werden

Es sei $\Phi^* = \{\varphi\}$ eine Familie von Abbildungen, die das Tensorprodukt $T \times T$ des Hausdorffschen Raumes T stetig in T abbilden. Wir wollen durch diese Abbildungen nun einen Konvexitätsbegriff definieren.

Definition 1. Eine Menge $B \subset T$ heißt *Φ-konvex*, wenn:

$$\varphi(a, b) \in B \;\forall\, a \in B \;\forall\, b \in B \;\forall\, \varphi \in \Phi^* .$$

Aus der Definition folgt dann unmittelbar:

Lemma 1. *Beliebige Durchschnitte Φ-konvexer Mengen sind Φ-konvex.*

Wir nennen den Durchschnitt aller Φ-konvexen Mengen, die A enthalten, die Φ-Hülle von A. $\langle A\rangle$ bezeichne die Φ-Hülle. Nach Lemma 1 ist $\langle A\rangle$ für alle A eine Φ-konvexe Menge. Die Φ-Hülle existiert immer, da der ganze Raum T eine Φ-konvexe Menge ist. Außerdem gilt:

$$\langle A\rangle \supset A \;\forall\, A \subset T . \tag{1}$$

Ist $\Pi(B)$ die Menge aller endlichen Untermengen von B, so erhalten wir:

Lemma 2.
$$\langle B\rangle = \bigcup_{\gamma \in \Pi(B)} \langle \gamma\rangle .$$

Beweis. Für alle $\gamma \in \Pi(B)$ gilt: $\langle\gamma\rangle \subset \langle B\rangle$. Also: $\bigcup_{\gamma\in\Pi(B)} \langle\gamma\rangle \subset \langle B\rangle$. Seien nun a, b zwei beliebige Elemente aus $\bigcup_{\gamma\in\Pi(B)} \langle\gamma\rangle$, dann gibt es zwei $\delta_1, \delta_2 \in \Pi(B)$ mit $a \in \langle\delta_1\rangle$, $b \in \langle\delta_2\rangle$. Aus $\langle\{a, b\}\rangle \subset \langle\delta_1 \cup \delta_2\rangle$ und $\delta_1 \cup \delta_2 \in \Pi(B)$ ergibt sich, daß $\bigcup_{\gamma\in\Pi(B)} \langle\gamma\rangle$ eine Φ-konvexe Menge ist. Also folgt mit $\bigcup_{\gamma\in\Pi(B)} \langle\gamma\rangle \supset B$ die Behauptung. ⌟

Man kann nun durch die Φ-Hülle eine Abbildung Φ der Menge aller Untermengen von T in sich definieren.

$$\Phi : \Phi(A) = \langle A \rangle \ \forall \ A \subset T .$$

Mit $\Phi(A) \supset A \ \forall \ A \subset T$ und Lemma 2 ist gezeigt, daß die Abbildung Φ eine „Konvexe" im Sinne von [1] ist.

Wir wollen noch eine Konstruktion der Φ-Hüllen beliebiger Mengen angeben. Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$Y : Y(A) = A \cup \{\varphi(a_1, a_2) \mid a_1 \in A, a_2 \in A, \varphi \in \Phi^*\} .$$

Es gilt dann für beliebige $a, b \in A$ und beliebige $\varphi \in \Phi^*$, daß $\varphi(a, b) \in Y(A)$. Da außerdem $Y(A) \subset \langle A \rangle$, erhalten wir:

$$\langle A \rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y^n(A) , \tag{2}$$

wobei $Y^n(A) := Y(Y^{n-1}(A))$.

Es erhebt sich nun die Frage, ob Φ eine reguläre, topologische Konvexe ist. Im allgemeinen muß man dies verneinen; es gilt lediglich folgende der für reguläre, topologische Konvexe geforderten Eigenschaften:

Lemma 3. *Der topologische Abschluß Φ-konvexer Mengen ist Φ-konvex.*

Beweis. Sei $A \subset T$ eine beliebige Φ-konvexe Menge und sei $a, b \in \bar{A}$. Dann gibt es Folgen a_n, b_n mit $a_n \in A$, $b_n \in A$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Da A Φ-konvex ist, folgt: $\varphi(a_n, b_n) \in A \ \forall \ \varphi \in \Phi^*$. Aus der Stetigkeit der Abbildungen $\varphi \in \Phi^*$ ergibt sich dann:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(a_n, b_n) = \varphi(a, b) \in \bar{A} \ \forall \varphi \in \Phi^* . \quad \lrcorner$$

§ 2. p-Konvexität ($p \leqq 1$)

In diesem Kapitel sei immer $0 < p \leqq 1$. Außerdem sei T nun ein topologischer Vektorraum. Wir wollen folgende stetige Abbildungen betrachten:

$$\varphi_{\alpha,\beta} : \varphi_{\alpha,\beta}(a, b) = \alpha a + \beta b \ \forall a, b \in T .$$

Φ_p^* sei nun:

$$\Phi_p^* = \{\varphi_{\alpha,\beta} \mid \alpha \geqq 0, \beta \geqq 0, \alpha^p + \beta^p = 1\} .$$

Diese Familie von Abbildungen definiert nach Kapitel 1 eine Konvexe, die wir mit Φ_p bezeichnen. Die Φ_p-Hülle $\langle A \rangle_p$ von beliebigen $A \subset T$ ist dann nach Gl. (2) gegeben durch:

$$\langle A \rangle_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \mid n = 1, 2, \ldots ; \alpha_i \geqq 0, a_i \in A, \sum \alpha_i^p = 1 \right\} . \tag{3}$$

Aus Gl. (3) folgt unmittelbar

Lemma 4. *Aus $\langle A \rangle_p = A$ und $\langle B \rangle_p = B$ folgt:*

i) $\langle A + B \rangle_p = A + B$,

ii) $\langle A \cup B \rangle_p = \{\alpha a + \beta b \mid a \in A; b \in B; \alpha, \beta \geqq 0, \alpha^p + \beta^p = 1\}$.

Üblicherweise bezeichnet man diesen Konvexitätsbegriff als p-Konvexität [2] und Mengen $A \subset T$ mit $\langle A \rangle_p = A$ als p-konvexe Mengen. Wir erinnern daran, daß ein Raum T Φ_p-konvex im Punkte a genannt wird, wenn es zu a eine Φ_p-konvexe Umgebungsbasis gibt [1]. Außerdem wird Φ_p eine reguläre, topologische Konvexe genannt, wenn für alle $B \subset T$ folgendes gilt:

a) $\langle \overline{\langle B \rangle_p} \rangle = \overline{\langle B \rangle_p}$;

b) B ist offen $\Rightarrow \langle B \rangle_p$ ist offen;

c) $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}(B)} \overline{\langle U \rangle_p} = \overline{\langle B \rangle_p}$;

d) $(a \in \langle \{b\} \rangle_p \wedge b \in \langle \{a\} \rangle_p \Rightarrow a = b)\ \forall a, b \in T$;

e) ist B offen und p-konvex, so gilt:

$$\langle \gamma \rangle_p \cap \bar{B} \backslash B \subset \langle \gamma \cap \bar{B} \backslash B \rangle_p \ \forall \gamma \in \Pi(\bar{B}),$$

wobei $\mathcal{U}(B)$ die Menge aller offenen Mengen ist, die B enthalten.

Es gilt nun folgender Satz:

Satz 1. *Ist T Φ_p-konvex im Nullpunkt, so ist Φ_p eine reguläre, topologische Konvexe.*

Beweis. a) folgt aus Lemma 3.

b) Sei $B \subset T$ eine beliebige offene Menge. Wir brauchen nur zu zeigen, daß es zu jedem $b \in \langle B \rangle_p \backslash B$ eine Umgebung gibt, die ganz in $\langle B \rangle_p$ liegt. Sei also $b \in \langle B \rangle_p \backslash B$, dann gibt es eine endliche Menge $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset B$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = b$, wobei $\alpha_i \geqq 0$ und $\sum\limits_{1}^{n} \alpha_i^p = 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\alpha_1 \neq 0$. Da $b_1 \in B$, gibt es eine in B liegende Umgebung $U(b_1)$ von b_1. Also ist $\alpha_1 U(b_1) + \sum\limits_{2}^{n} \alpha_i b_i \subset \langle B \rangle_p$, dies ist aber eine Umgebung von b.

c) Sei $\{U\}$ eine p-konvexe Nullumgebungsbasis. Dann ist nach Lemma 4 $\overline{\langle B \rangle_p} + \bar{U}$ p-konvex für alle $U \in \{U\}$ und $B \subset T$. Da es aber für jedes $U \in \{U\}$ ein $\hat{U} \in \mathcal{U}(B)$ gibt mit $\hat{U} \subset \langle B \rangle_p + U$, so folgt:

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}(B)} \overline{\langle U \rangle_p} \subset \bigcap_{U \in \{U\}} (\overline{\langle B \rangle_p} + \bar{U}) = \overline{\langle B \rangle_p}.$$

d) $a \in \{\lambda b \mid 0 < \lambda \leqq 1\}$ und $b \in \{\lambda a \mid 0 < \lambda \leqq 1\}$ ergibt $a = b$ für alle $a, b \in T$. Da nun $\langle a^* \rangle_p \subset \{\lambda a \mid 0 < \lambda \leqq 1\}\ \forall a^* \in T$, so folgt aus $a \in \langle \{b\} \rangle_p$ und $b \in \langle \{a\} \rangle_p$, daß $a = b$.

e) Es sei B offen und p-konvex. Wir nehmen ein beliebiges $\gamma \in \Pi(\bar{B})$ und setzen: $\gamma_0 = \gamma \cap B$ $\gamma_1 = \gamma \cap (\bar{B} \backslash B)$, also $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$. Nach Lemma 4 gilt dann:

$$\langle \gamma \rangle_p = \{\alpha a + \beta b \mid a \in \langle \gamma_0 \rangle_p, b \in \langle \gamma_1 \rangle_p, \alpha, \beta \geqq 0, \alpha^p + \beta^p = 1\}.$$

Es genügt zu zeigen, daß für $\alpha > 0$ die $\alpha a + \beta b$ in B liegen, wenn $a \in \langle \gamma_0 \rangle_p$, $b \in \langle \gamma_1 \rangle_p$ und $\beta \geqq 0$ mit $\alpha^p + \beta^p = 1$. Denn daraus folgt $\langle \gamma \rangle_p \backslash B \subset \langle \gamma_1 \rangle_p$. Sei also $\alpha > 0$, $\beta \geqq 0$, $\alpha^p + \beta^p = 1$ und $b \in \langle \gamma_1 \rangle_p$, $a \in \langle \gamma_0 \rangle_p$, dann existiert eine Folge $b_n \in B$ mit $b_n \to b (n \to \infty)$.

Es ist $\alpha a + \beta b = \alpha(a + \beta/\alpha(b - b_n)) + \beta b_n$. Da B offen ist, gibt es eine Umgebung von a, die ganz in B liegt, also gilt für hinreichend große n

$$[a + \beta/\alpha(b - b_n)] \in B$$

und da B p-konvex ist, $\alpha(a + \beta/\alpha(b - b_n)) + \beta b_n \in B$; also: $\alpha a + \beta b \in B$. ⌟

Da für alle regulären, topologischen Konvexe in Hausdorffschen Räumen das Theorem von Krein und Milman gültig ist, gilt dieses Theorem auch für die p-Konvexität in topologischen Vektorräumen, die eine p-konvexe Nullumgebungsbasis haben. Wenn man also den entsprechenden Konvexitätsbegriff zugrunde legt, gilt der Satz von Krein-Milman in allen lokalbeschränkten Vektorräumen. Der gängige Beweis dieses Satzes versagt für $p < 1$, da ein wesentlicher Beweisschritt unter Zuhilfenahme abgeschlossener Hyperebenen geführt wird. Für $p < 1$ gibt es aber lokalbeschränkte Vektorräume, in denen jede Hyperebene dicht ist [2].

§ 3. L^p-Räume

Wir betrachten die komplexen Funktionen über dem Intervall $I = [h, h^*] \subset \mathbb{R}$. $L^p(I)$ seien die Räume der L^p-Funktionen über diesem Intervall. Also: $L^p(I) = \left\{ f \,\middle|\, \int_I |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$. Durch $\|f\|_p = \left[\int_I |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}$ ist für $p \geqq 1$ eine Norm gegeben, für $0 < p < 1$ eine p-Norm. Das heißt, die Einheitskugel $E_p(I) = \{ f \mid \|f\|_p \leqq 1 \}$ ist für $p \geqq 1$ eine konvexe Menge, für $p < 1$ eine p-konvexe Menge.

Wir wollen nun folgende Sprungfunktionen betrachten:

$$\eta_{s,r}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad s \leqq x \leqq r, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $r > s$ gelten soll.

Sei

$$S(I) = \{ \lambda \cdot \eta_{s,r} \mid s, r \in I, s > r, \lambda \in \mathbb{C} \},$$

dann kann man für $p \leqq 1$ die Einheitskugel $E_p(I)$ durch p-konvexe Summen von Funktionen f aus $S(I)$ mit $\|f\|_p \leqq 1$ approximieren. Es gilt also für $p \leqq 1$:

$$\overline{\langle E_p(I) \cap S(I) \rangle_p} = E_p(I). \tag{4}$$

Dies ist eine direkte Folge der Ungleichung:

$$\int |f + g|^p \, dx \leqq \int |f|^p \, dx + \int |g|^p \, dx \qquad (p \leqq 1),$$

die eine Gleichung ist, wenn die Träger von f und g leeren Durchschnitt haben.

Die Frage, der wir uns nun zuwenden wollen, ist die, ob es einen verallgemeinerten Konvexitätsbegriff gibt, so daß eine zu (4) entsprechende

Gleichung auch für $p > 1$ gilt. Da ja für $p \leqq 1$ die p-Konvexität gerade die entsprechenden L^p-Räume charakterisiert, ist dies die Frage nach einer Konvexen, welche die L^p-Räume für $p > 1$ charakterisiert. Wie wir sehen werden, ist dies in der Tat möglich.

a) Eine Ungleichung

Lemma 5. *Für $p \geqq 1$ und $a, b \geqq 0$ haben wir die Ungleichung:*

$$(a + b + \sqrt{ab}(2^{1/p} - 2))^p \leqq a^p + b^p .$$

Das Gleichheitszeichen gilt für $p > 1$ genau dann, wenn $a = b$ oder $a = 0$ oder $b = 0$.

Beweis. Für $p = 1$ haben wir offensichtlich das Gleichheitszeichen. Wir nehmen also an $p > 1$ und betrachten die Funktionen: $R(y) = 2y - 2y^{2p-1} + t y^{2p} - t$

$$\Gamma(y) = (1 + y^2 - t y)^p/(1 + y^{2p}) ,$$

mit $t = 2 - 2^{1/p}$. Für $y > 0$ sind $R(y)$ und $\Gamma(y)$ beliebig oft stetig differenzierbar. $R''(y)$ hat in $0 < y < \infty$ nur eine Nullstelle, nämlich bei $y_0 = (2p-2)/p \cdot t$. Also hat $R'(y)$ höchstens zwei Nullstellen und $R(y)$ höchstens drei Nullstellen in $(0, \infty)$. Mit $R(y) = -y^{2p} R(1/y)$ folgt, daß $R(y)$ höchstens eine Nullstelle in $0 < y < 1$ hat. Aus

$$\Gamma'(y) = R(y)\, p(1 + y^2 - t y)/(1 + y^{2p})^2$$

ergibt sich, daß $\Gamma(y)$ höchstens einen Extrempunkt zwischen 0 und 1 hat. Mit $\Gamma(0) = \Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(t) < 1$ folgt dann $\Gamma(y) < 1$ für $y \in (0, 1)$. Aus $\Gamma(y) = \Gamma(1/y)$ erhalten wir letztlich $\Gamma(y) \leqq 1$ für $y \in [0, \infty]$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $y = 0$, $y = 1$, $y = \infty$ gilt. Aus

$$(a + b + \sqrt{ab}(2^{1/p} - 2))^p = \Gamma\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)(a^p + b^p)$$

folgt dann das Lemma. $\lrcorner$

b) Die Konvexe $\Phi_p (p \geqq 1)$

Seien f, g zwei Funktionen über I: Wir definieren:

$$F^p_{\alpha,\beta} : F^p_{\alpha,\beta}(f, g) = (\alpha f + \beta g) + \sqrt{\alpha\beta|fg|}\,\frac{\alpha f + \beta g}{|\alpha f| + |\beta g|}\,(2^{1/p} - 2) ,$$

$$\Phi^*_p = \{F^p_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \geqq 0;\ \alpha^p + \beta^p = 1\} ,$$

wobei $p \geqq 1$ gelten soll.

Die Familie von stetigen Abbildungen Φ^*_p definiert eine Konvexe Φ_p im Sinne von § 1.

Satz 2. *Die Einheitskugel $E_p(I)$ von $L^p(I)$ ist Φ_p-konvex.*

Beweis. Sei $\alpha, \beta \geqq 0$ mit $\alpha^p + \beta^p = 1$ und seien f, g beliebige Funktionen über I mit $\int_I |f|^p\,dx \leqq 1$, $\int_I |g|^p\,dx \leqq 1$. Dann folgt mit Lemma 5:

$$\int_I |F^p_{\alpha,\beta}(f,g)|^p\,dx \leqq \int_I \frac{|\alpha f + \beta g|}{|\alpha f| + |\beta g|} F^p_{\alpha\beta}(|f|,|g|)\,dx \leqq \alpha^p \int_I |f|^p\,dx + \beta^p \int_I |g|^p\,dx \leqq 1\,. \quad \lrcorner$$

Anmerkung. Mit $E_p(I)$ ist auch $\lambda E_p(I)$ für beliebige komplexe λ eine Φ_p-konvexe Menge, daher ist der Raum $L^p(I)$ im Nullpunkt Φ_p-konvex.

Wenn die Träger der Funktionen f und g leeren Durchschnitt haben, so ist $F^p_{\alpha,\beta}(f,g) = \alpha f + \beta g$. Damit sieht man leicht, daß für $\hat{p} > p$ die Einheitskugel des L^p-Raumes nicht $\Phi_{\hat{p}}$-konvex ist.

Satz 3. $\overline{\Phi_p(E_p(I) \cap S(I))} = E_p(I)$.

Beweis. Sei f eine beliebige Funktion über I mit $\int_I |f|^p\,dx \leqq 1$. Wir zerlegen I in N zusammenhängende Intervalle $I_1, \ldots, I_N$ von gleichem Maß. Also:

$$I_n = \left[\frac{(N+1-n)\,h + (n-1)\,h^*}{N}, \frac{(N-n)\,h + n\,h^*}{N}\right] \quad (n \leqq N)\,.$$

Sei $g_n(x) \in S(I)$ definiert durch:

$$g_n(x) = \begin{cases} \left(N/\int_I dx\right)^{1/p} \left(\int_{I_n} |f|^p\,dx\right)^{1/p} & \text{für} \quad x \in I_n\,, \\ 0 & \text{für} \quad x \notin I_n\,. \end{cases}$$

Da die Durchschnitte der Träger der $g_n(x)$ für verschiedene n das Maß Null haben, ist nach Definition von Φ_p die Funktion

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} g_n(x) \quad \text{aus} \quad \Phi_p(E_p(I) \cap S(I))\,.$$

Da aber: $\lim\limits_{N \to \infty} \|f - f_N\|_p = 0$, erhalten wir also

$$f \in \overline{\Phi_p(E_p(I) \cap S(I))}\,. \quad \lrcorner$$

Literatur

1. Fuchssteiner, B.: Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe und der Satz von Krein-Milman. Math. Ann. **186**, 149–154 (1970).
2. Köthe, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
3. Landsberg, M.: Lineare topologische Räume, die nicht lokalkonvex sind. Math. Z. **65**, 104–112 (1956).
4. Rolewicz, S.: On a certain class of linear metric spaces. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl II **5**, 471–473 (1957).
5. Valentine, F. A.: Convex sets. New York, Toronto, London: Mc Graw-Hill 1964.

Priv.-Doz. Dr. Benno Fuchssteiner
Mathematisches Institut der Technischen Hochschule
D-6100 Darmstadt, Hochschulstraße 1

(Eingegangen am 7. Juli 1969)