Extrempunkte und Minimumsätze bei Hüllenbildungen

Von

Benno Fuchssteiner

Es wird ein Extrempunktsatz für eine Hüllenbildungsoperation, die durch eine durchschnittsstabile Familie von Mengen gegeben ist, bewiesen. Dieser Extrempunktsatz enthält den bekannten Satz von Krein-Milman und diverse Verallgemeinerungen dieses Satzes als Spezialfälle. Als Anwendung wird ein abstrakter Minimumsatz angegeben, und auf den Zusammenhang mit dem Minimumsatz über den Choquet-Rand von H. Bauer hingewiesen.

Ein Extrempunktsatz. T sei eine beliebige Menge, und $\mathscr{F}$ sei eine durchschnittsstabile Familie von Teilmengen von T mit $T \in \mathscr{F}$. Durch $\mathscr{F}$ kann man dann eine Hüllenbildungsoperation Φ in T auf folgende Weise definieren:

$$\Phi : \Phi(A) = \bigcap_{A \subset X \in \mathscr{F}} X \quad \forall A \subset T .$$

Da $\mathscr{F}$ $\cap$-stabil ist, ist $\Phi(A) \in \mathscr{F}$. Außerdem sei eine weitere Familie $\mathscr{S}$ von Teilmengen von T mit folgenden Eigenschaften gegeben.

(1) $\mathscr{S} \cap \mathscr{F} = \{\emptyset, T\}$,

(2) *für alle* $X \in \mathscr{F}$ *gilt:* $X = \bigcap_{X \subset \alpha \in \mathscr{S}} \Phi(\alpha)$,

(3) *ist* $S \subset \mathscr{S}$ *linear geordnet bezüglich* $\subset$, *so ist* $\bigcup_{\alpha \in S} \alpha \in \mathscr{S}$.

Ist $A \subset T$, so sagen wir, $a \in A$ liegt auf dem Rand von A, wenn eine der beiden Bedingungen (i) oder (ii) erfüllt ist.

(i) es gibt ein $\beta \in \mathscr{S}$ mit: $A \cap \beta \neq \emptyset$, $a \notin \beta$ und $\Phi(\beta) \supset A$,

(ii) für alle $X \in \mathscr{F}$ mit $X \cap A \neq \emptyset$ folgt $X \supset A$.

$\mathscr{G}$ ist die Menge aller Vereinigungen in $\mathscr{S}$. Wir nennen eine Menge $A \subset T$ $\mathscr{S}$-kompakt, wenn für jede durch $\subset$ linear geordnete Teilmenge G von $\mathscr{G}$ mit: $A \backslash g \neq \emptyset \; \forall g \in G$ folgt, daß $A \backslash \bigcup_{g \in G} g \neq \emptyset$. $\mathscr{S}$-kompakte Mengen sind zum Beispiel $\emptyset$, endliche Teilmengen von T, oder auch Mengen, die die Eigenschaft haben, daß jede Überdeckung durch eine Teilmenge von $\mathscr{G}$ eine endliche Überdeckung enthält.

Einen Punkt $a \in A$ nennen wir Extrempunkt von A, wenn a aus dem Rand einer jeden, a enthaltenden $\mathscr{S}$-kompakten Teilmenge von A ist. Die Menge der Extrempunkte von A bezeichnen wir mit $\mathrm{Ex}(A)$.

Nach einigen Vorbereitungen werden wir folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Für jede $\mathscr{S}$-kompakte Teilmenge K von T gilt:* $\Phi(K) = \Phi(\mathrm{Ex}(K))$.

Mit $\Phi(\emptyset) = \emptyset$, ergibt sich daraus sofort:

Satz 2. *Jede nichtleere $\mathscr{S}$-kompakte Teilmenge K von T hat mindestens einen Extrempunkt.*

Hilfssätze.

Lemma 1. *Ist K $\mathscr{S}$-kompakt und $\varrho \in \mathscr{G}$, so ist $K \backslash \varrho$ $\mathscr{S}$-kompakt.*

Beweis. Sei G eine Kette bezüglich der Inklusion in $\mathscr{G}$ mit: $(K\backslash\varrho)\backslash g \neq \emptyset \; \forall g \in G$. Dann ist $\tilde{G} = \{g \cup \varrho \mid g \in G\}$ eine Kette in $\mathscr{G}$ mit: $K\backslash\tilde{g} \neq \emptyset \; \forall \tilde{g} \in \tilde{G}$. Da K $\mathscr{S}$-kompakt ist, folgt: $(K\backslash\varrho)\Big\backslash \bigcup\limits_{g \in G} g = K \Big\backslash \bigcup\limits_{\tilde{g} \in \tilde{G}} \tilde{g} \neq \emptyset$. ∎

Ist K eine $\mathscr{S}$-kompakte Menge, so nennen wir $\tilde{K} \subset K$ eine streng-$\mathscr{S}$-kompakte Untermenge von K, wenn es ein $g \in \mathscr{G}$ gibt mit: $\tilde{K} = K\backslash g$.

Lemma 2. *Sei K $\mathscr{S}$-kompakt und R eine durch $\subset$ linear geordnete Menge von streng-$\mathscr{S}$-kompakten Untermengen von K, außerdem seien die Elemente von R nicht leer, dann ist $\bigcap\limits_{r \in R} r$ eine nichtleere streng-$\mathscr{S}$-kompakte Untermenge von K.*

Beweis. Zu jedem $r \in R$ gibt es ein $g_r \in \mathscr{G}$ mit $K\backslash g_r = r$. Da R linear geordnet bezüglich $\subset$ ist, erhalten wir für $\tilde{g}_r = \bigcup\limits_{r \subset \tilde{r} \in R} g_{\tilde{r}}$, daß $K\backslash\tilde{g}_r = r$. $G = \{\tilde{g}_r \mid r \in R\}$ ist also eine Kette in $\mathscr{G}$ bezüglich $\subset$, mit: $K\backslash g \neq \emptyset \; \forall g \in G$. Also ist $\bigcap\limits_{r \in R} r = K \Big\backslash \bigcup\limits_{g \in G} g$ nichtleer und $\mathscr{S}$-kompakt. ∎

Lemma 3. *Es sei K $\mathscr{S}$-kompakt und $X \in \mathscr{F}$ mit $X \cap K \neq \emptyset$ und $K\backslash X \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $\beta \in \mathscr{S}$ mit: $\beta \supset X$, $K\backslash\beta \neq \emptyset$ und $\Phi(\beta) \supset K$.*

Beweis. Sei also $X \in \mathscr{F}$ mit $X \cap K \neq \emptyset$ und $K\backslash X \neq \emptyset$. Dann ist nach (2) die Menge $S = \{\beta \in \mathscr{S} \mid \beta \supset X, K\backslash\beta \neq \emptyset\}$ nicht leer. Nach dem Zornschen Lemma existiert eine bezüglich $\subset$ maximale Kette $\tilde{S}$ in S. Da K $\mathscr{S}$-kompakt ist, ist $\beta = \bigcup\limits_{x \in \tilde{S}} x \in \tilde{S}$ und damit maximales Element. Wir wollen nun zeigen, daß $\Phi(\beta) \supset K$ also $K\backslash\beta$ zum Rand von K gehört. Wenn $K\backslash\Phi(\beta) \neq \emptyset$, so gibt es nach (2) ein $z \in \mathscr{S}$ mit $z \supset \Phi(\beta)$ und $K\backslash\Phi(z) \neq \emptyset$. Mithin ist $K\backslash z \neq \emptyset$ und mit (1) folgt $z \neq \Phi(\beta)$, also ist $z \in S$ echte Obermenge von β. Dies widerspricht aber der Maximalität von β. ∎

Damit ist außerdem gezeigt, daß der Rand einer nichtleeren $\mathscr{S}$-kompakten Menge nichtleer ist. Wir müssen noch einen weiteren Hilfsbegriff einführen. Sei K eine $\mathscr{S}$-kompakte Menge, $S \subset \mathscr{S}$ und ϱ eine zweistellige Relation in S. Wir nennen (S, ϱ) eine K-Ordnung, wenn folgendes gilt:

(i) ϱ ist eine Wohlordnung in S,

(ii) $K \Big\backslash \bigcup\limits_{(\tilde{\beta},\beta) \in \varrho} \tilde{\beta} \neq \emptyset \quad \forall \beta \in S$,

(iii) $\Phi(\beta) \supset K \Big\backslash \bigcup\limits_{\substack{(\tilde{\beta},\beta) \in \varrho \\ \beta \neq \tilde{\beta}}} \tilde{\beta} \quad \forall \beta \in S$ mit $\beta \neq \emptyset$.

Das Minimum von S bezüglich ϱ bezeichnen wir mit $\operatorname{Min}(S)$, also $(\operatorname{Min}(S), \beta) \in \varrho \; \forall \beta \in S$. Für jedes $K \neq \emptyset$ gibt es mindestens eine K-Ordnung, nämlich $(\emptyset, \emptyset)$.

In der Menge der K-Ordnungen führen wir die Ordnungsrelation $\prec$ ein:

$$(S_1, \varrho_1) \prec (S_2, \varrho_2) \Leftrightarrow [S_1 \subset S_2, \varrho_1 \subset \varrho_2, (x, y) \in \varrho_2 \ \forall x \in S_1 \ \forall y \in S_2 \backslash S_1].$$

Lemma 4. *Sei K beliebig und (S, ϱ) eine K-Ordnung. Dann gibt es eine bezüglich $\prec$ maximale K-Ordnung (S^*, ϱ^*) mit: $(S, \varrho) \prec (S^*, \varrho^*)$.*

Beweis. Sei $\sigma = \{(u, z) \mid (S, \varrho) \prec (u, z)$ und (u, z) ist K-Ordnung$\}$. Da $(S, \varrho) \in \sigma$, ist also $\sigma \neq \emptyset$. Nach dem Zornschen Lemma existiert in σ eine bezüglich $\prec$ maximale Kette $\tilde{\sigma}$. Sei

$$(S^*, \varrho^*) = \Big(\bigcup_{(x,z) \in \tilde{\sigma}} x, \bigcup_{(u,y) \in \tilde{\sigma}} y\Big).$$

Man prüft leicht nach, daß (S^*, ϱ^*) eine K-Ordnung mit $(S, \varrho) \prec (S^*, \varrho^*)$ und $(u, z) \prec (S^*, \varrho^*) \ \forall (u, z) \in \tilde{\sigma}$ ist. Mithin ist $(S^*, \varrho^*) \in \tilde{\sigma}$ maximales Element in σ. ▮

Beweis von Satz 1.

Lemma 5. *Es sei K $\mathscr{S}$-kompakt und (S, ϱ) eine maximale K-Ordnung, dann gilt: $K \backslash \bigcup_{\beta \in S} \beta \subset \mathrm{Ex}(K)$.*

Beweis. Wir fixieren ein $a \in K \backslash \bigcup_{\beta \in S} \beta$ und es sei γ eine beliebige $\mathscr{S}$-kompakte Untermenge von K mit $a \in \gamma$. Wenn nun $\gamma \subset K_0 = K \backslash \bigcup_{\beta \in S} \beta$, so kann es kein $X \in \mathscr{F}$ mit $X \cap \gamma \neq \emptyset$ und $\gamma \backslash X \neq \emptyset$ geben, denn sonst erhielte man nach Lemma 3 ein $\delta \in \mathscr{S}$ mit $K_0 \backslash \delta \neq \emptyset$, $K_0 \cap \delta \neq \emptyset$ und $\Phi(\delta) \supset K_0$. Dann wäre aber

$$(S \cup \{\delta\}, \varrho \cup \{(\beta, \delta) \mid \beta \in S \cup \{\delta\}\}) = (S^*, \varrho^*)$$

eine K-Ordnung mit $(S, \varrho) \prec (S^*, \varrho^*)$ und $(S, \varrho) \neq (S^*, \varrho^*)$; dies widerspricht aber der Maximalität von (S, ϱ). Also ist γ für $\gamma \subset K_0$ sein eigener Rand und damit a aus dem Rand von γ. Wir nehmen nun an, es gebe ein $\beta \in S$ mit $\gamma \cap \beta \neq \emptyset$. Sei $S_0 = \mathrm{Min}\,\{\alpha \in S \mid \alpha \cap \gamma \neq \emptyset\}$. Dann ist $\gamma \subset K \backslash \bigcup_{(\tilde{\beta}, S_0) \in \varrho, \tilde{\beta} \neq S_0} \tilde{\beta}$. Also folgt, da (S, ϱ) eine K-Ordnung ist, $S_0 \cap \gamma \neq \emptyset$, $a \notin S_0 \in \mathscr{S}$ und $\Phi(S_0) \supset \gamma$. Mithin ist a aus dem Rand von γ, und da γ beliebig war, ist $a \in \mathrm{Ex}(K)$. ▮

Wir wollen nun Satz 1 beweisen. Sei also K eine beliebige $\mathscr{S}$-kompakte Menge. Da es immer eine maximale K-Ordnung (S, ϱ) gibt, folgt aus $K \backslash \bigcup_{\beta \in S} \beta \neq \emptyset$ (Lemma 2) die Existenz von Extrempunkten in K. Wir haben also $\Phi(K) \supset \Phi(\mathrm{Ex}(K)) \supset \mathrm{Ex}(K) \neq \emptyset$. Wir nehmen jetzt an $\Phi(K) \backslash \Phi(\mathrm{Ex}(K)) \neq \emptyset$. Dann gibt es nach Lemma 3 ein $\delta \in \mathscr{S}$ mit $\delta \supset \mathrm{Ex}(K)$, $K \backslash \delta \neq \emptyset$ und $\Phi(\delta) \supset K$. Also ist $(\delta, (\delta, \delta))$ eine K-Ordnung. Wir nehmen dann (Lemma 4) eine maximale K-Ordnung (S^*, ϱ^*) mit $(\delta, (\delta, \delta)) \prec (S^*, \varrho^*)$.

Mit Lemma 5 erhalten wir:

$$\emptyset \neq K \backslash \bigcup_{\beta \in S^*} \beta \subset \mathrm{Ex}(K).$$

Da $\delta \in S^*$, erhalten wir den Widerspruch:

$$\emptyset = \Big(K \backslash \bigcup_{\beta \in S^*} \beta\Big) \cap \delta \supset \Big(K \backslash \bigcup_{\beta \in S^*} \beta\Big) \cap \mathrm{Ex}(K).$$

Also gilt $\Phi(K) \backslash \Phi(\mathrm{Ex}(K)) = \emptyset$. Mithin $\Phi(K) = \Phi(\mathrm{Ex}(K))$. ▮

Der Satz von Krein-Milman. Es sei T ein lokalkonvexer Haussdorffscher Vektorraum. $\mathscr{F}$ sei die Menge der abgeschlossenen konvexen Mengen in T, und $\mathscr{S}$ die Menge der offenen konvexen Mengen. Dann treffen für $\mathscr{F}$ und $\mathscr{S}$ die Bedingungen (1), (2) und (3) zu. Da T lokalkonvex ist, ist $\mathscr{G}$ dann die Menge aller offenen Mengen, und die kompakten Mengen sind $\mathscr{S}$-kompakt. Seien $a \neq b$ zwei beliebige Punkte aus T und $[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda) b \mid 0 \leqq \lambda \leqq 1\}$ die Strecke mit den Endpunkten a und b. Man prüft leicht nach, daß der Rand von $[a, b]$ genau die Punkte a und b sind. Ein Extrempunkt x einer Menge K muß also nach unserer Definition Endpunkt einer jeden in K liegenden und x enthaltenden Strecke sein[1]).

In diesem Fall ergibt Satz 1 den bekannten Satz von Krein und Milman, der besagt, daß die abgeschlossene konvexe Hülle einer kompakten Menge K gleich der abgeschlossenen konvexen Hülle der Extrempunkte von K ist, [7], [8], [9].

Auch die in [4] und [5] angegebenen Verallgemeinerungen des Krein-Milman-Satzes sind Spezialfälle von Satz 1.

Minimumsätze. Wir wollen zuerst einen abstrakten Minimumsatz als Spezialfall von Satz 1 angeben. Sei Ψ eine beliebige Menge und T die Menge der Abbildungen von Ψ in $\mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Für $t_1, t_2 \in T$ verwenden wir folgende Schreibweise:

$$t_1 \leqq t_2 \Leftrightarrow [t_1(\varphi) \leqq t_2(\varphi) \; \forall \varphi \in \Psi].$$

Die von $\emptyset$ verschiedenen Elemente von $\mathscr{F}$ seien nun die $X \subset T$, für die es ein $t_0 \in T$ gibt mit:

$$X = \{t \in T \mid t_0 \leqq t\}.$$

Und die von $\emptyset$ und T verschiedenen Elemente von $\mathscr{S}$ seien die $Y \subset T$, für die es ein $\varphi \in \Psi$ und ein $\alpha \in \mathbf{R}$ gibt, so daß

$$Y = \{t \in T \mid t(\varphi) > \alpha\}.$$

Es gelten dann für $\mathscr{F}$ und $\mathscr{S}$ die Voraussetzungen (1), (2) und (3). Als Minimumpunkte einer Untermenge K von T bezeichnen wir die Punkte $a \in K$, die die Eigenschaft haben, daß für jedes $\mathscr{S}$-kompakte $\tilde{K} \subset K$ eine der beiden folgenden Bedingungen (i) oder (ii) erfüllt ist.

(i) Es gibt ein $\varphi_0 \in \Psi$ und ein $t_1 \in \tilde{K}$ mit

$$a(\varphi_0) < t_1(\varphi_0) \quad \text{und} \quad a(\varphi_0) \leqq t(\varphi_0) \; \forall t \in \tilde{K}.$$

(ii) $a(\varphi) = t(\varphi) \; \forall \varphi \in \Psi \; \forall t \in \tilde{K}$.

Aus der Definition der Extrempunkte folgt sofort, daß Extrempunkte auch Minimumpunkte sind.

Mit Satz 1 und 2 erhält man dann:

Satz 3. *Ist $K \subset T$ eine $\mathscr{S}$-kompakte Menge, dann gibt es für jedes $\varphi \in \Psi$ einen Minimumpunkt a von K mit: $a(\varphi) \leqq t(\varphi) \; \forall t \in K$.*

Wenden wir diesen Satz auf einen konkreten Fall an. Sei $\mathscr{X}$ ein kompakter Raum und Ψ eine Menge von unterhalb-stetigen Funktionen auf $\mathscr{X}$ mit Werten in $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

[1]) Im allgemeinen ist unsere Definition des Extrempunktes sogar strenger als die übliche. Dies wird durch ein Beispiel in einer noch unveröffentlichten Arbeit von W. HACKENBROCH und dem Autor gezeigt.

Satz 4. *Für jedes $\varphi_0 \in \Psi$ gibt es ein $a \in \mathscr{K}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\varphi_0(a) \leqq \varphi_0(y)\ \forall y \in \mathscr{K}$.

(ii) *auf jeder kompakten Untermenge $\tilde{K}$ von $\mathscr{K}$ sind entweder alle Funktionen $\varphi \in \Psi$ konstant, oder es gibt ein $y \in \tilde{K}$ und ein $\tilde{\varphi} \in \Psi$ mit $\tilde{\varphi}(a) \leqq \tilde{\varphi}(z)\ \forall z \in \tilde{K}$ und $\tilde{\varphi}(x) < \tilde{\varphi}(y)$.*

Beweis. Wir betrachten wieder T, die Menge der Funktionen von Ψ in $\mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ und betten $\mathscr{K}$ in T vermittels der Abbildung Π ein

$$[\Pi(a) : \Pi(a)(\varphi) = \varphi(a)\ \forall \varphi \in \Psi]\ \forall a \in \mathscr{K}.$$

$K = \{\Pi(x) \mid x \in \mathscr{K}\}$ ist dann $\mathscr{S}$-kompakt, da für ein beliebiges $S \in \mathscr{S}$ die Menge $\Pi^{-1}(S) = \{x \in \mathscr{K} \mid \Pi(x) \in S\}$ eine offene Menge in $\mathscr{K}$ ist, denn die $\varphi \in \Psi$ sind ja unterhalb stetige Funktionen auf $\mathscr{K}$. Die Urbilder der Minimumpunkte von K sind aber genau die Punkte von $\mathscr{K}$ mit der in Satz 4 beschriebenen Eigenschaft. Also ist Satz 4 eine direkte Folge von Satz 3. ▌

Satz 4 wurde bereits in [6] bewiesen. Es wurde dort insbesondere gezeigt, daß die Urbilder der Minimumpunkte von K eine Untermenge des Choquet-Randes von $\mathscr{K}$ bezüglich Ψ ist**). Es folgt also aus Satz 4 der Minimumsatz von H. Bauer, der besagt, daß die $\varphi \in \Psi$ ihr Minimum auf dem Choquet-Rand von $\mathscr{K}$ annehmen [3]. Außerdem ist in [4] auf die Zusammenhänge mit anderen Minimumsätzen von H. Bauer und Ky Fan ([1], [2], [7]) hingewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] H. Bauer, Minimalstellen von Funktionen und Extremalpunkte. Arch. Math. **9**, 389–393 (1958).

[2] H. Bauer, Minimalstellen von Funktionen und Extremalpunkte II. Arch. Math. **11**, 200–205 (1960).

[3] H. Bauer, Supermartingale und Choquet-Rand. Arch. Math. **12**, 210–223 (1961).

[4] B. Fuchssteiner, Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe und der Satz von Krein-Milman. Math. Ann. **186**, 149–154 (1970).

[5] B. Fuchssteiner, Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe und L^p-Räume. Math. Ann. **186**, 171–176 (1970).

[6] B. Fuchssteiner, Bemerkungen zu den Minimumsätzen von H. Bauer. Arch. Math. **21**, 287–290 (1971).

[7] Ky Fan, On the Krein Milman Theorem. In: Proc. Symposia pure Math. Vol. VII (1963), 211–219.

[8] M. Krein and D. Milman, On extreme points of regularly convex sets. Studia Math. **9**, 133–138 (1940).

[9] D. Milman and M. A. Rutman, On a more precise theorem on the completeness of the system of extreme points of a regularly convex set. Dokl. Akad. Nauk SSSR **60**, 100–132 (1948).

Eingegangen am 16. 3. 1970 *)

Anschrift des Autors:

B. Fuchssteiner
Mathematisches Institut der Technischen Hochschule Darmstadt
D 61 Darmstadt, Hochschulstraße 1

**) Dies sieht man leicht, indem man Satz 4, (ii) auf den kompakten Träger eines, einen Minimumpunkt repräsentierenden, Maßes anwendet.

*) Eine revidierte Fassung ging am 4. 10. 1970 ein.