C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274 (3 janvier 1972)

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES. — *Sur les faces exposées.*

Note (*) de M. **Benno Fuchssteiner**, présentée par M. Jean Leray.

Nous donnons ici une nouvelle notion de face exposée d'un ensemble convexe compact. Cette notion est utile dans l'étude des convexes compact et des mesures supportées par leurs frontières.

Soit X un sous-ensemble convexe compact d'un espace localement convexe E; on dit que $\Phi \subset X$ est une face de X si

$$\forall \lambda,\ 0<\lambda<1,\ \forall x, y \in X,\ \lambda x + (1-\lambda) y \in \Phi \Rightarrow x, y \in \Phi.$$

Nous dirons que la face Φ est faiblement exposée quand il existe une fonction φ définie sur X, concave et semi-continue supérieurement, telle que

$$\Phi = \{ x \in X \mid \varphi(x) = \max_{\tilde{x} \in X} \varphi(\tilde{x}) \}.$$

Si φ appartient à la première classe de Baire on dira que Φ est faiblement exposée de première classe. Enfin nous dirons que Φ est exposée chaque fois que φ est affine et continue ([1]).

On voit aisément qu'une face Φ faiblement exposée est non vide, fermée et convexe, et que ses points extrémaux sont aussi des points extrémaux pour X.

Une partie Y de X est une partie $\hat{F}_\sigma$, par définition, quand Y est l'union d'une famille dénombrable de compacts convexes.

Proposition. — *Si Φ est une face non vide de X telle que son complément dans X est une partie $\hat{F}_\sigma$, alors Φ contient une face faiblement exposée de première classe.*

Pour démontrer la proposition on utilisera le lemme suivant. $\langle\ \rangle$ et $\overline{}$ dénotent l'enveloppe convexe et la fermeture respectivement.

Lemme. — *Soit $\{X_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ une famille de parties compactes convexes de E et Φ une face non vide telle que pour chaque $n \in \mathbf{N}$ on a $X_n \cap \Phi = \emptyset$; alors il existe une famille $\{h_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ de fonctions continues et affines sur E telle que $\forall n \in \mathbf{N}$ on a*

(i) $\forall x \in \bigcup_{k \leq n} X_k,\ h_n(x) \leq -1/2^n$;

(ii) $\sup_{y \in \Phi} h_n(y) = 0$;

(iii) $\forall 0 \leq \varepsilon \leq (1-1/2^n),\ \forall x \in \overline{\langle \Phi \rangle}$,

$$h_{n-1}(y) \leq -\frac{1}{2^n} \Rightarrow h_n(\varepsilon x + (1-\varepsilon) y) < -\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Démonstration. — D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut choisir h_1 qui vérifie (i) et (ii). Soit $\{ h_n \mid n \leqq M \}$ une famille qui vérifie, les propriétés (i), (ii) et (iii) pour chaque $n \leqq M$. Considérons

$$W = \left\{ x \quad X \mid h_M(x) \leqq -\frac{1}{2^{M+1}} \right\},$$

$$V = \bigcup_{0 < \varepsilon \leqq 1 - \frac{1}{2^{M+1}}} \{ (1-\varepsilon) W + \varepsilon \overline{\langle \Phi \rangle} \},$$

$$U = \langle V \cup X_{M+1} \rangle.$$

Le maximum de h_M sur W et V est mineur de 0, donc $\Phi - W \neq \emptyset$ et $\Phi - V \neq \emptyset$. Pour voir que $\Phi - U \neq \emptyset$ il suffit de se rappeler que la face Φ n'intersecte pas X_{M+1}. U étant fermée et convexe, il existe $h \in E^*$ telle que

$$\sup_{x \in \Phi} h(x) - \max_{y \in U} h(y) > \frac{1}{2^{M+1}}.$$

Si on définit $h_{M+1} = h - \sup_{x \in \Phi} h(x)$, on a que la famille $\{ h_n \mid n \leqq M + 1 \}$ satisfait (i), (ii) et (iii) pour chaque $n \leqq M + 1$. Par induction, on obtient le résultat désiré.

Démonstration de la proposition. — Soit Φ une face de X et $X - \Phi = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n$, où les X_n sont des compacts convexes. Il esiste $\{ h_n \mid n \in \mathbf{N} \}$, une famille de fonctions affines et continues avec les propriétés (i), (ii) et (iii). Soit

$$\varphi(x) \underset{df}{=} \inf \left\{ h_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$$

alors φ est supérieurement semi-continue et concave et elle appartient à la première classe de Baire. Le maximum de φ sur X est égal à 0 et $\varphi^{-1}(0) \subset \Phi$ est, d'après (iii), une face contenue dans Φ.

Corollaire 1. — *Chaque face Φ de X, non vide et dont le complément dans X est un $\hat{F}_\sigma$, contient des points extrémaux de X.*

Nous montrerons dans la suite la liaison de la proposition avec le théorème de Choquet-Bishop-de Leeuw.

Soit Y une partie $\hat{F}_\sigma$ de X et soient

$$[Y] \underset{df}{=} \left\{ \sum_{n \geqq 1} \lambda_n x_n \mid \lambda_n \geqq 0, \sum \lambda_n = 1, x_n \in Y \right\},$$

$$[Y[\underset{df}{=} \left\{ \sum_{n \geqq 0} \lambda_n x_n \mid \lambda_0 < 1, x_0 \in X, \lambda_n \geqq 0, \sum_{n \geqq 0} \lambda_n = 1, x_n \in Y \ (n \geqq 1) \right\}.$$

Puisque $[Y[$ est un $\hat{F}_\sigma$ et son complément une face, on déduit :

Corollaire 2. — *Si* Y *est une partie* $\hat{F}_\sigma$ *de* X *qui en contient tous les points extrémaux, alors* $X = [Y[$.

Par un argument de maximalité, on obtient :

Corollaire 3. — *Si* Y *est une partie* $\hat{F}_\sigma$ *de* X *qui en contient tous les points extrémaux, alors* $X = [Y]$.

Quand X est métrisable, le complémentaire d'un point extrémal de X est $\hat{F}_\sigma$.

Corollaire 4. — *Quand* X *est métrisable tous ses points extrémaux sont des faces faiblement exposées de première classe.*

En général, les points extrémaux ne sont pas exposés, même dans le cas métrisable.

Corollaire 5. — *Soit* f *une fonction continue sur* X *telle que* $f(y) > 0$ *pour tous les points extrémaux; on a alors que* $\forall\, x \in X$, $\bar{f}(x) > 0$, *où* $\bar{f}$ *dénote l'enveloppe semi-continue supérieurement concave de* f [([1]), *et* ([4])].

Démonstration. — $\Phi = \{ x \in X \mid \bar{f}(x) = 0 \}$ est une face dont le complément est $\hat{F}_\sigma$. Φ ne contient pas de points extrémaux de X, donc Φ est vide (corollaire 1).

Nous appliquons le corollaire 5 pour démontrer le théorème de Choquet-Bishop-de Leeuw.

Théorème (Choquet-Bishop-de Leeuw). — *Soit* μ *une mesure de probabilité sur* X *qui est maximale sur le cône des fonctions continues et convexes; alors* $\mu(B) = 1$ *pour chaque ensemble de Baire* B *qui contient tous les points extrémaux de* X.

Démonstration. — Soit B une partie qui contient tous les points extrémaux et dont le complément est un compact G_δ. D'après le théorème de Uryson, on peut trouver une fonction continue f telle que $\forall\, x \in X - B$, $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ pour tous les points extrémaux. Car μ est maximale, on voit d'après le théorème de Hahn-Banach que $\mu(f) = \mu(\bar{f})$ ([4]). La fonction $\bar{f} - f$ est strictement positive sur $X - B$ et par là on déduit que $\mu(B) = 0$. La régularité de μ nous permet d'obtenir la conclusion.

(*) Séance du 20 décembre 1971.

([1]) E. M. Alfsen, *Compact convex Sets and Boundary Integrals*, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, 1971.

([2]) E. Bishop et K. de Leeuw, *Ann. Inst. Fourier*, 9, 1959, p. 305-331.

([3]) G. Choquet, *Existence unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes*, Séminaire Bourbaki, 139, 1956, 15 pages.

([4]) R. R. Phelps, *Lectures on Choquet Theorem*, Van Norstrand, Princeton, 1966.

Institut de Mathématiques pures,
B. P. n° 116,
38-Saint-Martin-d'Hères,
Isère.