ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Sur les mesures de Jensen supportées par une frontière plus fine que la frontière de Chilov.* Note (*) de M. **Benno Fuchssteiner**, présentée par M. Jean Leray.

Obtention pour une algèbre de fonctions A d'une frontière plus fine que la frontière de Chilov telle que chaque point du spectre de A admette des mesures de Jensen supportées par cette frontière.

Soit A (X) une algèbre de fonctions complexes sur un compact X, contenant les constantes, séparant les points de X et fermée pour la convergence uniforme. Nous appelons frontière faible de Choquet de X l'ensemble [noté $\widetilde{\mathrm{Ch}}\,(X)$] des points $x \in X$, tels que x appartienne au support compact de chaque mesure de probabilité qui représente le point x. On dit qu'une mesure μ représente x, si

$$\int_X \varphi\, d\mu = \varphi(x), \quad \forall\, \varphi \in A(X).$$

On a toujours $\mathrm{Ch}(X) \subset \widetilde{\mathrm{Ch}}(X) \subset \overline{\mathrm{Ch}(X)}$, où Ch (X) est la frontière de Choquet et $\overline{\mathrm{Ch}(X)}$ sa fermeture. Les exemples suivants montrent que ces inclusions ne sont pas triviales.

Exemples. — Quand X est un *swiss cheese* et A (X) = R (X), alors $\widetilde{\mathrm{Ch}}_A(X) = X$ ([3]). Un autre exemple où $\widetilde{\mathrm{Ch}}_A(X) = X$: les algèbres normales ([4]). Mais on peut donner aussi des exemples où $\mathrm{Ch}_A(X) = \widetilde{\mathrm{Ch}}_A(X)$. Soient Δ le disque unité du plan complexe, $X = \Delta \times [0, 1]$ et A (X) les fonctions continues dans X et holomorphes dans $\Delta \times \{0\}$, alors

$$\widetilde{\mathrm{CH}}_A(X) = \mathrm{CH}_A(X) = \Delta \times]0, 1] \cup \{(z, 0)\}, z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}.$$

On dit qu'une mesure de probabilité μ sur X, est une mesure de Jensen pour x, si

$$\ln|\varphi(x)| \leq \int_X \ln|\varphi|\, d\mu, \quad \forall\, \varphi \in A(X),$$

et que μ est supportée par $\widetilde{\mathrm{Ch}}(X)$, si $\mu(B) = 0$ pour chaque ensemble de Baire B avec $B \cap \widetilde{\mathrm{Ch}}(X) = \emptyset$.

Théorème. — *Pour chaque $x \in X$ il existe une mesure de Jensen supportée par* $\widetilde{\mathrm{Ch}}(X)$.

Pour la démonstration nous étudions d'abord les différentes notions de frontière.

1. Les frontières de Choquet. — Soient X compact et Ψ une famille de fonctions $X \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ semi-continues supérieurement, qui sépare les points de X. Notons Prob (X) l'ensemble des mesures de proba-

bilité sur X. Pour $\sigma \in \mathrm{Prob}(X)$, $x \in X$, définissons :

$$\sigma \text{ est } \Psi\text{-représentant de } x \Leftrightarrow \int_X \varphi \, d\sigma \geq \varphi(x), \quad \forall \varphi \in \Psi.$$

$\mathrm{Ch}_\Psi(X) = \{ x \in X \mid \sigma \ \Psi\text{-représentant } x \Rightarrow \sigma = \delta_x \}$ est la frontière de Choquet de X par rapport à Ψ (δ_x est la mesure de Dirac pour x). Nous appelons

$$\widetilde{\mathrm{Ch}}_\Psi(X) = \{ x \in X \mid \sigma \ \Psi\text{-représentant } x \Rightarrow x \in \mathrm{supp}(\sigma) \},$$

où supp (σ) est le support compact de σ, la frontière faible de Choquet.

A l'aide du théorème de Hahn-Banach on obtient les caractérisations suivantes de $\mathrm{Ch}(X)$ et $\widetilde{\mathrm{Ch}}(X)$ données dans (3).

Lemme 1. — *Soit $\Psi + \Psi \subset \Psi$; x appartient à $\widetilde{\mathrm{Ch}}_\Psi(X)$ si et seulement si pour chaque compact non vide $K \subset X - \{x\}$ il existe une $\varphi \in \Psi$ telle que $\varphi(x) > \max \varphi(K)$ (condition de maximum).*

Lemme 2. — *Soient α, β arbitraires avec $1 > \beta > \alpha$ et Ψ contenant les constantes, tel que pour tous les λ, $\tilde{\lambda}$ positifs et rationnels, $\lambda\Psi + \tilde{\lambda}\Psi \subset \Psi$ (Ψ est un cône rationnel). Alors x appartient à $\mathrm{Ch}_\Psi(X)$ si et seulement si pour chaque compact non vide $K \subset X - \{x\}$ il existe un $\varphi \in \Psi$ telle que [condition (α, β)] :*

$$1 \geq \max \varphi(X) \geq \varphi(x) \geq \beta > \alpha \geq \max \varphi(K).$$

Remarques. — L'inclusion $\widetilde{\mathrm{Ch}}_\Psi(X) \supset \mathrm{Ch}_\Psi(X)$ est toujours valable. Par le lemme 2 on voit aisément que la frontière de Chilov existe et contient $\widetilde{\mathrm{Ch}}_\Psi(X)$ dans cette situation. Quand on remplace Ψ par le cône positif contenant les constantes et engendré par Ψ, les frontières de Choquet ne changent pas. Et si Ψ est une famille de fonctions continues, et si l'on prend au lieu de Ψ la fermeture de Ψ par rapport à la convergence uniforme, les frontières de Choquet ne changent pas non plus.

Nous disons que $\varphi \in \Psi$ est presque continue quand pour chaque $k \in \mathbb{R}$, φ_k, définie par $\varphi_k(x) = \max(k, \varphi(x))$, $\forall x \in X$, est continue. Quand $\sigma \in \mathrm{Prob}(X)$ vérifie $\sigma(B) = 0$ pour chaque ensemble de Baire avec $B \cap Y = \emptyset$, nous disons que σ est supporté par Y.

Proposition 1. — *Soient les éléments de Ψ presque continus, alors pour chaque $x \in X$ il existe un σ Ψ-représentant x, qui est supporté par $\mathrm{Ch}_\Psi(X)$.*

Démonstration. — Soient J_1, J_2 les cônes positifs contenant les constantes, engendrés par Ψ et $\{ \varphi_k \mid k \in \mathbb{R}, \varphi \in \Psi \}$. D'après E. M. Ahlfsen [(1), p. 53] il existe un σ J_2-représentant x supporté par $\mathrm{Ch}_{J_2}(X)$. Le lemme 2 donne $\mathrm{Ch}_{J_2}(X) \supset \mathrm{Ch}_{J_1}(X)$, donc $\mathrm{Ch}_\Psi(X) \subset \mathrm{Ch}_{J_2}(X)$. Et puisque J_2-représentant entraîne Ψ-représentant, on déduit la proposition. ∎

2. Les algèbres de fonctions. — Soit $A(X)$ une algèbre de fonctions complexes sur X, contenant les constantes et séparant les points de X. $\mathrm{Re}(A)$, $|A|$, $|A|^p$, $\ln|A|$ sont les parts réelles, les valeurs absolues, les puissances p des valeurs absolues et les logarithmes des valeurs absolues.

Lemme 3 :

$$\widetilde{\mathrm{Ch}_{\ln|A|}}(X) = \widetilde{\mathrm{Ch}_{|A|}}(X) = \widetilde{\mathrm{Ch}_{\mathrm{Re}\,A}}(X) = \widetilde{\mathrm{Ch}}(X).$$

Démonstration. — Puisque $\ln|A| \supset \mathrm{Re}(A)$ et $\mathrm{Re}(A)$-représentant entraînent $|A|$-représentant, on déduit $\widetilde{\mathrm{Ch}}_{|A|}(X) \subset \widetilde{\mathrm{Ch}}_{\mathrm{Re}(A)}(X) \subset \widetilde{\mathrm{Ch}}_{\ln|A|}(X)$. Pour $x \in \mathrm{Ch}_{\ln|A|}(X)$ et K compact $\subset X - \{x\}$, il existe (lemme 1) une $\varphi \leqq \ln|f|$, $f \in A$, avec

$$\ln|f(x)| > \max \ln|f(K)|.$$

Donc $|f|(x) > \max|f(K)|$. Cela veut dire que x vérifie la condition de maximum par rapport au cône engendré par $|A|$, donc $x \in \widetilde{\mathrm{Ch}}_{|A|}(X)$. ■

Démonstration du théorème. — La proposition 1 fournit des mesures de Jensen (mesures $\ln|A|$-représentantes) supportées par

$$\mathrm{Ch}_{\ln|A|}(X) \subset \widetilde{\mathrm{Ch}_{\ln|A|}}(X) = \widetilde{\mathrm{Ch}}(X).\ ■$$

3. Caractérisation de $\mathrm{Ch}_{\ln|A|}(X)$. — On peut utiliser les lemmes 1 et 2 pour donner une caractérisation de $\mathrm{Ch}_{\ln|A|}(X)$ similaire de la caractérisation des points pics pour $A(X)$.

Soit $J_p(A)$ le cône positif engendré par $\bigcup_{p>0} |A|^p$.

Proposition 2. — *Soit $1 > \beta > \alpha > 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La mesure de Dirac δ_x est la seule mesure de Jensen pour x.*

(ii) *Pour chaque compact non vide $K \subset X - \{x\}$ il existe une $\varphi \in A$ et un $m \in \mathbf{N}$ tels que*

$$1 \geqq \max|\varphi(X)| \geqq |\varphi(x)| \geqq \beta^m > \alpha^m \geqq \max|\varphi(K)|.$$

(iii) *Pour chaque compact non vide $K \subset X - \{x\}$, il existe une $g \in J_p(A)$ telle que*

$$1 \geqq \max g(X) \geqq g(x) \geqq \beta > \alpha \geqq \max g(K).$$

Démonstration. — (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $\tilde{\beta} = \ln(\beta) + 1$, $\tilde{\alpha} = \ln(\alpha) + 1$ $(1 > \tilde{\beta} > \tilde{\alpha})$. $\bigcup_{m \in \mathbf{N}} (1/m)\ln|A|$ est un cône rationnel; donc (lemme 2) pour chaque $x \in \mathrm{Ch}_{\ln|A|}(X)$ et K compact $\subset X - \{x\}$, il existe une $g \in \ln|A|$, $m \in \mathbf{N}$ telle que

$$1 \geqq \frac{1}{m}\max g(X) \geqq \frac{1}{m} g(x) \geqq \tilde{\beta} > \tilde{\alpha} \geqq \frac{1}{m}\max g(K).$$

Donc $\varphi \in A$ avec $g = \ln |e^m \varphi|$ vérifie

$$1 \geq \max |\varphi(X)| \geq |\varphi(x)| \geq \beta^m > \alpha^m \geq \max |\varphi(K)|.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) est triviale.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : la condition (α, β) implique que $x \in \mathrm{Ch}_{J_p(A)}(X) = \mathrm{Ch}_{\Psi}(X)$, où $\Psi = \bigcup_{p>0} |A|^p$. Mais Ψ-représentant $x \Leftrightarrow \ln |A|$-représentant x, est un résultat bien connu [Browder (2), p. 126], donc $\mathrm{Ch}_{\Psi}(X) = \mathrm{Ch}_{\ln|A|}(X)$. ■

(*) Séance du 5 juin 1972.

(1) E. M. Ahlfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

(2) A. Browder, *Introduction to function algebras*, Benjamin, New York-Amsterdam, 1969.

(3) B. Fuchssteiner et W. Hackenbroch, *Maximumpunkte* (*Arch. Math.*, 1972).

(4) R. Mc Kissick, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69, 1963, p. 391-395.

Institut de Mathématiques pures,
B. P. n° 116,
38402 *Saint-Martin-d'Hères,*
Isère
et
Mathematisches Institut,
Technische Hochschule,
Hochschulstrasse 1,
D 61, *Darmstadt,*
République Fédérale Allemande.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Caractérisation des traces dans les espaces de Sobolev-Orlicz.* Note (*) de Mme **Marie-Thérèse Lacroix-Sonrier**, présentée par M. Jean Leray.

On étend aux espaces de Sobolev-Orlicz, définis sur un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, le notion d'espace « intermédiaire », et on obtient une caractérisation des espaces de traces pour une classe assez vaste d'espaces de Sobolev-Orlicz.

1. Soient Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue, M une fonction de Young. On note $L_M(\Omega)$ l'ensemble des (classes d') applications u mesurables de Ω dans $\mathbf{R}$ vérifiant $\int_\Omega M[u(x)]\,dx < +\infty$, et $E_M(\Omega)$ l'espace d'Orlicz associé, plus grand espace vectoriel contenu dans $L_M(\Omega)$, qui est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_M = \operatorname{Inf}\left\{k > 0 : \int_\Omega M\left[\frac{u(x)}{k}\right] dx \leq 1\right\}.$$

On considère l'espace de Sobolev-Orlicz associé

$$H^1_M(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \forall\, \alpha \in \mathbf{N}^n, |\alpha| \leq 1,\ D^\alpha u \in E_M(\Omega)\}$$

qui est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_H = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_M.$$

Définition 1.1. — *On appelle classe d'Orlicz produit* $L_{M(n-1)}(\Omega\times\Omega)$ *l'ensemble des* (classes d') *applications* v *mesurables de* $\Omega\times\Omega$ *dans* $\mathbf{R}$, *vérifiant*

$$\rho(v, M, n-1) = \int_{\Omega\times\Omega} M[v(x, y)] \frac{dx\,dy}{\|x - y\|^{n-1}} < +\infty,$$

et espace d'Orlicz produit $E_{M(n-1)}(\Omega\times\Omega)$ *le plus grand espace vectoriel inclus dans* $L_{M(n-1)}(\Omega\times\Omega)$. *C'est un espace de Banach pour la norme*

$$\|v\|_{M(n-1)} = \operatorname{Inf}\left\{k > 0,\ \rho\left(\frac{v}{k}, M, n-1\right) \leq 1\right\}.$$

A toute classe d'application u mesurable sur Ω, on associe la classe d'application $\tilde{u}$ définie sur $\Omega\times\Omega$ par

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{u(x) - u(y)}{\|x - y\|}.$$