Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit

von Jan Felix

Einer der großen Meister zeitgenössischer französischer Mathematik, J. Dieudonné, äußerte vor einiger Zeit in einem Vortrag die Vermutung, daß die Mathematik künftig zu Gunsten anderer Axiome auf das Auswahlaxiom als Beweisprinzip verzichten könnte. Was verbirgt sich dahinter? Eine erneute Hinwendung zu Intuitionismus, Konstruktivismus oder Semiintuitionismus? Wohl kaum! Hier deutet sich nur eine Verzweigung der Mathematik durch das Arbeiten mit verschiedenen Axiomensystemen an – Axiomensysteme, die entstehen, indem man den einsehbaren klassischen Axiomen der Mengenlehre neue unabhängige Axiome hinzufügt.

Eine solche Entwicklung war seit der Entdeckung des Unvollständigkeitssatzes durch K. Gödel (1931) zu erwarten. Daß diese Entwicklung trotzdem so spät einsetzt, liegt wohl vor allem daran, daß erst mit der Erfindung der „Forcing-Methode" durch P.J. Cohen (1963) wirkungsvolle beweistheoretische Hilfsmittel zur Entdeckung unabhängiger Axiome zur Verfügung stehen.

Der Intuitionismus konnte sich wohl deshalb bei vielen Mathematikern nicht durchsetzen, weil bei strenger Beachtung der intuitionistischen Grundsätze die Begründung mancher mathematischen Disziplin (und das Arbeiten mit dieser Disziplin) zu kompliziert wurde. Im Gegensatz dazu zeichnet sich die heutige Situation dadurch aus, daß durch Hinzunahme neuer unabhängiger Axiome – die zum Teil dem Auswahlaxiom widersprechen – einzelne Teilgebiete der Mathematik erheblich vereinfacht werden. So wird für den Maßtheoretiker das Axiom:

> Jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-meßbar

einen großen praktischen Wert haben, so daß er zu Gunsten dieses Axioms gerne auf das Auswahlaxiom verzichtet. Derjenige, der viel mit Operatoren zu tun hat, wird dem Axiom:

> Jede lineare Abbildung, die einen Banachraum in sich abbildet, ist stetig

sicher den Vorrang gegenüber der Kontinuumhypothese geben. Es besteht also die Gefahr einer Verzweigung der Mathematik derart, daß in Zukunft jeder mit dem ihm gerade genehmen Axiomensystem arbeiten wird. Läßt man also die Logiker bei der Auffindung neuer unabhängiger Axiome gewähren, so könnte die daraus folgende babylonische Axiomenverwirrung durchaus zu einem späten Sieg intuitionistischer und konstruktivistischer Gedanken führen.

Egal wie man zu solchen Entwicklungen stehen mag, einer immer stärkeren Durchdringung der verschiedensten mathematischen Gebiete durch modelltheoretische Erkenntnisse wird man sich nicht entziehen können. Ein Beispiel für diese Tendenz ist durch die Nonstandard-Analysis gegeben (siehe [12]).

Nur an wenigen Universitäten werden Kursvorlesungen über axiomatische Mengenlehre oder über Modelltheorie angeboten. Deshalb freue ich mich über die hier gebotene Gelegenheit, in einige Ergebnisse der axiomatischen Mengenlehre seit 1963 einzuführen. Der Leser sollte mit den Grundzügen der naiven Mengenlehre vertraut sein. Beweise werden wegen der gebotenen Kürze kaum gegeben. Häufig werde ich aber versuchen, das Verständnis durch verkürzte und simplifizierte Argumente zu erleichtern.

I Die Kontinuumhypothese

In seinem Bemühen, eine Theorie transfiniter Zahlen zu begründen, gab Georg Cantor (1845 - 1918) die vielzitierte Definition:

„Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen".

Um auch bei unendlichen Mengen die ‚Anzahl der Elemente' betrachten zu können, führte Cantor den Begriff der Mächtigkeit ein.

1. Definition: Eine Menge A ist von größerer oder gleicher *Mächtigkeit* wie eine Menge B (Schreibweise: $|A| \geqslant |B|$), wenn es eine injektive Funktion $f: B \to A$ gibt, die B in A abbildet.

Gilt $|A| \geqslant |B|$ und $|B| \geqslant |A|$, so schreiben wir $|A| = |B|$. $|A| > |B|$ steht für $|A| \geqslant |B|$ und $|A| \neq |B|$. Durch $|A| = |B|$ wird in der Klasse aller Mengen ein Äquivalenzbegriff definiert. Man überzeugt sich sofort, daß aus $A \subset B$ folgt $|A| \leqslant |B|$. $|A| = |B|$ kann selbst dann gelten, wenn A eine echte Teilmenge von B ist. Zum Beispiel $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = |\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}|$. Die Gleichheit der Mächtigkeit wird hierbei mit Hilfe einer Numerierung bewiesen. Für endliche Mengen A, B gilt $|A| = |B|$ genau dann, wenn A und B die gleiche Anzahl von Elementen (sagen wir n) haben. Belegt man in diesem Fall die Elemente mit Nummern von 1 bis n, so hat man eine bijektive Funktion von A auf B definiert. Oberflächlich gesehen, läßt das Beispiel $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ Zweifel an der Verallgemeinerungsfähigkeit dieses Sachverhalts für unendliche Mengen aufkommen. Dies stimmt aber nicht, denn es gilt:

2. Satz *(Schröder-Bernstein-Cantor): Gilt $|A| = |B|$, so gibt es eine bijektive Funktion $f: B \to A$ von B auf A.*

Beweis: Nach Definition 1 gibt es injektive Funktionen $\psi: A \to B$ und $\varphi: B \to A$. Setzen wir $X = \varphi \circ \psi(A)$, $Y = \varphi(B)$, so gilt $X \subset Y \subset A$. Außerdem ist $\varphi \circ \psi = g: A \to X$ bijektiv. Nun definieren wir $D_0 = A \setminus Y$, $D_1 = g(D_0), \ldots, D_{n+1} = g(D_n)$. Die durch $x \to g^{-1}(x)$ für $x \in \bigcup \{D_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ und $x \to x$ sonst gegebene Funktion $h: Y \to A$ ist bijektiv. Also ist auch $h \cdot \varphi = f: B \to A$ bijektiv. ■

Sofort erhebt sich die Frage, ob alle unendlichen Mengen die gleiche Mächtigkeit haben. Dem ist nicht so:

3. Satz: *Es bezeichne* $\mathfrak{P}(A) = \{ X \mid X \subset A \}$ *die Menge aller Teilmengen von A. Dann gilt:* $|\mathfrak{P}(A)| > |A|$.

Beweis: $a \to \{a\}$ (für $a \in A$) definiert eine injektive Funktion $A \to \mathfrak{P}(A)$, also $|A| \leqslant |\mathfrak{P}(A)|$. Gibt es ein injektives $f: \mathfrak{P}(A) \to A$, so betrachten wir $B = \{ a \in A \mid a \notin X \text{ wenn } f(X) = a \}$. $f(B) \in B$ kann nicht gelten, sonst würde die Definition von B zu $f(B) \notin B$ führen. Aber auch $f(B) \notin B$ kann nicht gelten, denn dann folgt aus der Definition von B ja gerade $f(B) \in B$.
Also haben wir einen Widerspruch erhalten. Das angenommene f existiert deshalb nicht. ■

Als Beispiel für eine weitere unendliche Menge fällt einem $\mathbb{R}$ ein. Die Frage nach der Mächtigkeit dieser Menge ist leicht zu beantworten. Um die Antwort zu finden, ordnen wir jedem $A \subset \mathbb{N}$ einen Dualbruch $\varphi(A) = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ zu, wobei $a_n = (1 \text{ wenn } n \in A, 0 \text{ sonst})$. Manche Zahlen in $\mathbb{R}$ besitzen aber zwei Dualbruchentwicklungen, zum Beispiel $0{,}0111111\ldots = 0{,}10000\ldots$ Deshalb definieren wir $\psi(A) = \varphi(A) + 2$ für solche $A \subset \mathbb{N}$, für die es ein m_0 mit $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m_0 \} \subset A$ gibt. Für alle anderen A setzen wir $\psi(A) = \varphi(A)$. $\psi: \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ ist nun injektiv, deshalb gilt $|\mathfrak{P}(\mathbb{N})| \leqslant |\mathbb{R}|$. Die Menge $I =]0,1[$ liegt aber im Bild von ψ, also ist $\psi^{-1}: I \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ injektiv. Dies ergibt $|I| \leqslant |\mathfrak{P}(\mathbb{N})|$. Schulkenntnisse reichen aus, um eine bijektive Funktion zwischen I und $\mathbb{R}$ zu finden, daraus folgern wir $|I| = |\mathbb{R}|$. Wir haben also erhalten: $|\mathbb{R}| = |I| \leqslant |\mathfrak{P}(\mathbb{N})| \leqslant |\mathbb{R}|$. Dies führt zu:

4. Satz: $|\mathbb{R}| = |\mathfrak{P}(\mathbb{N})|$.

Mathematische Neugier treibt damit zur Frage, ob es Mengen gibt, deren Mächtigkeiten echt zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$ liegen. Der Leser möge sich nicht abmühen, er wird keine solche Menge finden. Cantor ging es ebenso, deshalb vermutete er 1884:

Kontinuumhypothese: *Es gibt keine Menge M mit* $|\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|$.

Wir wissen aber, daß $|\mathfrak{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. Deshalb liegt es nahe zu verallgemeinern:

Verallgemeinerte Kontinuumhypothese: *Ist A eine unendliche Menge, so gibt es keine Menge M mit* $|A| < |M| < |\mathfrak{P}(A)|$.

Der von Cantor bereits angekündigte Beweis für diese Behauptung blieb aus. Der Lösung dieses Problems wurde in der Folgezeit eine immer größere Bedeutung zugemessen, da man sich davon einen Aufschluß über das Wesen des Kontinuums, welches soviele Mathematiker und Philosophen beschäftigt hatte, erhoffte. Hilbert setzte dieses Problem auf seine Liste der wichtigen im 20. Jahrhundert zu lösenden mathematischen Fragen. Wir werden sehen, daß die Lösung ganz anders aussieht, als Cantor und Hilbert es sich wohl vorgestellt haben. Durch Beispiele widerlegt wurde die Vermutung jedenfalls nicht. Deshalb zog man diese Hypothese auch mehr und mehr zur „Konstruktion" merkwürdiger Mengen und von Gegenbeispielen heran.

Auch andere mathematische Behauptungen, die sich hartnäckig einem Beweis entzogen hatten, konnten mit dieser Hypothese verifiziert werden. So bewies W. Sierpinski (1947) in recht einfacher Weise das Auswahlaxiom aus der verallgemeinerten Kontinuumhypothese.

Auswahlaxiom: *Ist M eine Menge, so gibt es eine Funktion (genannt Auswahlfunktion) $f : \mathfrak{P}(M) \to M$ mit $f(X) \in X$ für alle nichtleeren Teilmengen X von M.*

Damit sind wir jedoch der Zeit vorausgeeilt. Denn zunächst einmal sollte Cantors Mengenlehre durch die Entdeckung ihrer Widersprüche erschüttert werden. Das Cantorsche Mengenkonzept stellte sich nämlich als zu allgemein heraus. Nach Cantors „Definition" scheint es durchaus möglich, von M, der Menge aller Mengen zu sprechen. Jede Menge von Mengen wäre dann Teilmenge von M, also $\mathfrak{P}(\mathsf{M}) \subset \mathsf{M}$. Damit hätten wir im Widerspruch zu Satz 3 $|\mathfrak{P}(\mathsf{M})| \leqslant |\mathsf{M}|$. Eine andere widersprüchliche „Menge" ist $\{X \mid X \text{ Menge mit } X \notin X\}$ (Russelsche Antinomie).

Mannigfache Versuche zur Beseitigung der aufgetretenen Schwierigkeiten zeichneten die Folgezeit aus. Die einen kritisierten den der Cantor'schen Definition zugrundeliegenden ‚Existenzabsolutismus' und sahen das Hauptübel darin „daß ein Feld konstruktiver Möglichkeiten als geschlossener Inbegriff an sich seiender Gegenstände behandelt wurde" (wie H. Weyl später 1928 formulierte). Intuitionismus, Konstruktivismus, Halbintuitionismus und ihre Variationen waren die Folge. Andere versuchten die Widersprüche durch Axiomatisierung und Präzisierung der Cantor'schen Mengenlehre zu beseitigen. Zu nennen wäre hier die in ‚Principia Mathematica' von A.N. Whitehead und B. Russel niedergelegte Typentheorie. Gemäß dem Russelschen Satz „no totality can contain members defined in terms of itself" wurde eine Hierarchie von verschiedenen Typen der Zusammenfassung entwickelt. Die Bedeutung der Typentheorie ist heute allerdings gering, da die Mehrheit der Mathematiker eine verbindliche Axiomatisierung der Mengenlehre in den Systemen von Zermelo-Fraenkel oder von Gödel-Bernays erblickt. Diese beiden Axiomensysteme sind zudem in gewisser Weise äquivalent. In den folgenden Diskussionen werden wir uns auf das System von Zermelo und Fraenkel beziehen.

II Modelle

Vor einer Axiomatisierung der Mengenlehre muß eine Formalisierung der mathematischen Sprache liegen. Wir wollen uns der Sprache der Prädikatenlogik (erster Stufe) bedienen. Deshalb geben wir einen kurzen Einblick in die wesentlichen Elemente dieser Sprache ([5], [2], [10]). Wie bei jeder Schriftsprache arbeiten wir mit Zeichen, aus denen dann durch Aneinandersetzen Wörter gebildet werden. Unsere Zeichen bestehen aus

$x_1, x_2, x_3, \ldots$	(abzählbar vielen Subjektvariablen)
$R_1, R_2, R_3, \ldots$	(abzählbar vielen Relationsvariablen)

sowie den logischen Symbolen:

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Longleftrightarrow$	$=$
(nicht)	(und)	(oder)	(impliziert)	(äquivalent)	(gleich)
$\forall$	$\exists$	(,)			
(für alle)	(existiert)	(Klammern).			

Die umgangssprachliche Bedeutung haben wir jeweils unter die Symbole geschrieben. Mitunter nimmt man noch Konstante hinzu, dies ist für unsere Zwecke aber nicht nötig. Jeder Relationsvariablen R_i ordnen wir noch eine Stellenzahl n_i zu. Wir haben keinen Wert darauf gelegt, mit möglichst wenig Zeichen auszukommen. Durch Aneinanderreihung entstehen nun *Worte*. Genau wie in der Umgangssprache können wir sinnvolle und sinnlose Worte bilden. Die sinnvollen Worte unserer formalen Sprache nennen wir *Formeln*, sie entstehen aus Grundformeln durch Anwendung bestimmter Bildungsgesetze, die wir nicht alle aufzählen wollen. Zum Beispiel können wir die Grundformeln x_1 oder $R_i\,(x_1, \ldots, x_{n_i})$ . . . durch Bildungsgesetze der Art:

> sind A, B Formeln, so sind auch $(\neg A)$, $(A = B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $\forall\, xA$ usw. Formeln

zu neuen Formeln verbinden.

Wir kommen nun zur semantischen Bedeutung unserer Sprache. Dafür benötigen wir eine Interpretation.

5. Definition: (J, M) heißt *Interpretation*, wenn $x_1, x_2, \ldots$ von J in M und $R_1, R_2, \ldots$ von J in die Menge der Relationen in M so abgebildet wird, daß für $i = 1, 2, \ldots$ $J(R_i)$ n_i-stellig ist.

Betrachten wir einmal die Formel $R_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$. Diese würde man sinnvollerweise in $J(R_i)$ $(J(x_1), J(x_2), \ldots, J(x_{n_i}))$ übersetzen. Nun erfüllt $(J(x_1), \ldots, J(x_n))$ entweder die Relation $J(R_i)$ oder nicht. Im ersten Fall sagen wir

> $R_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$ *gilt unter der Interpretation* (J, M),

im zweiten Fall sagen wir $R_i(x_1, \ldots, x_n)$ gilt bei (J, M) nicht. Da sich die Formeln nun aus Grundformeln durch Anwendung gewisser Gesetze aufbauen, kann man induktiv für alle Formeln F die Gültigkeit von F bezüglich der Interpretation (J, M) definieren. Dies geschieht, indem man die Wirkungsweise unserer Formelaufbaugesetze auf die Gültigkeit unserer Formeln erklärt. Einige Beispiele:

(1) $\neg F$ gilt, wenn F nicht gilt

(2) $A \vee B$ gilt, wenn A gilt oder wenn B gilt

(3) $\forall\, x_i A(x_i)$ gilt genau dann, wenn $A(x_i)$ für jede Interpretation (J', M) mit $J' \underset{x_i}{=} J$ gilt. Dabei bedeute $J' \underset{x_i}{=} J$, daß J und J' sich höchstens im Bild von x_i unterscheiden.

Ist nun F eine Menge von Formeln, dann heißt die Interpretation (J, M) ein *Modell* für F, wenn alle $F \in \mathsf{F}$ unter (J, M) gelten. Existiert für F ein

Modell, so nennen wir F (semantisch) *widerspruchsfrei*. Es gibt nun Formeln, die bei jeder Interpretation gültig sind, zum Beispiel $A \vee (\neg A)$. Solche Formeln F nennen wir *allgemeingültig* und wir schreiben $\Vdash F$.

Wir sagen, A läßt sich aus der Formelmenge F *(semantisch) ableiten* (Schreibweise: F $\Vdash A$), wenn A in jedem Modell (J, M) von F gültig ist. Ist F nicht widerspruchsfrei, dann läßt sich also jedes A aus F ableiten.

Die intuitive Bedeutung von „allgemeingültig" soll natürlich „wahr" sein. Hier sollte man verwundert sein! Es ist doch sehr problematisch, daß wir einerseits die Mengenlehre formalisieren wollen und andererseits die Wahrheit einer Formel durch Verwendung dieses noch unbestimmten Mengenbegriffs erklären. Wir hätten eigentlich auch den Ableitungsbegriff und die Regeln des logischen Schließens formalisieren müssen.

Dies kann relativ einfach geschehen. Wir gehen aus von offensichtlich wahren Formeln, wie $x_1 = x_1$ oder $((x_1 = x_2) \wedge (x_2 = x_3)) \Rightarrow (x_1 = x_3)$ oder $(\forall x_1\, A(x_1)) \Rightarrow A(x_1)$. Diese Formeln nennen wir *ableitbar*. Danach müssen wir eine Reihe logischer Regeln festlegen, mit denen man von ableitbaren Formeln zu neuen ableitbaren Formeln kommt. Solche Regeln sind zum Beispiel die Regel der Variablensubstitution, oder die Regel der Abtrennung:

sind A und $A \Rightarrow B$ ableitbar, so ist B ableitbar,

und Vorschriften, welche die Behandlung der Quantoren $\forall$, $\exists$ betreffen. Für ableitbare Formeln F schreiben wir hinfort $\vdash F$. Sind F $= \{F_1, \ldots, F_n\}$ Formeln, so heißt A aus F *(syntaktisch) ableitbar*, wenn $\vdash (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \Rightarrow A$. Wir schreiben dann F $\vdash A$.

Ist F eine beliebige Menge von Formeln, dann heißt A aus F (syntaktisch) ableitbar (Schreibweise ebenfalls F $\vdash A$), wenn es $F_1, F_2, \ldots, F_m \in$ F gibt mit $\{F_1, \ldots, F_m\} \vdash A$. F heißt *(syntaktisch) widerspruchsfrei*, wenn aus F kein Widerspruch abzuleiten ist, wenn also für keine Formel A gilt F $\vdash (A \wedge (\neg A))$.

Ein Vergleich (unter Zugrundelegung der Mengenlehre) der syntaktischen und der semantischen Begriffe führt zu folgendem zentralen Ergebnis:

6. Satz: F $\vdash A$ *genau dann wenn* F $\Vdash A$.

Die entsprechenden Begriffe stimmen also überein. Die in unserem Satz enthaltene Aussage, daß zu jeder syntaktisch widerspruchsfreien Formelmenge ein Modell existiert, läßt sich noch zu einer Aussage über die Größe des Modells verschärfen. Dafür benötigen wir den Begriff des Untermodells.

Seien (J, M) und $(\bar{J}, \bar{M})$ Modelle für F. Wir nennen $(\bar{J}, \bar{M})$ ein *Untermodell* von (J, M) wenn $\bar{M} \subset M$, $\bar{J}(x_i) = J(x_i)$ für $i = 1, 2, \ldots$, und wenn für alle Relationsvariablen R_i $\bar{J}(R_i)$ die Beschränkung von $J(R_i)$ auf $\bar{M}$ ist. Nun der angekündigte Satz:

7. Satz *(Löwenheim-Skolem): Sei (J, M) ein Modell für* F $= \{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$. *Dann existiert ein Untermodell $(\bar{J}, \bar{M})$ mit abzählbarem $\bar{M}$.*

Die Beweisidee ist recht einfach. Man beginnt mit abzählbarem $N \subset M$, so daß N das Bild aller Subjektvariablen enthält. Dann geht man alle unter (J, M) geltenden Formeln der Reihe nach durch. Jedesmal wenn man dabei zu einer Formel F kommt, die in N nicht gilt, erweitert man N um endlich viele Elemente bis F gilt. Die daraus mit abzählbar vielen Konstruktionsschritten entstehende Menge nennen wir N^*. N^* ist ebenfalls abzählbar. $\bar{M} = \bigcup \{N^{n*} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (wobei $N^{1*} = N^*$ und $N^{(n+1)*} = (N^{n*})^*$) ist dann eine Menge mit den gesuchten Eigenschaften.

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob man die Widerspruchsfreiheit einer widerspruchsfreien Formelmenge F ‚beweisen' kann. Dafür sollten wir zuerst zeigen, daß die mathematische Aussage ‚F ist widerspruchsfrei' durch eine Formel unserer formalen Sprache ausgedrückt werden kann. Wir bemerken zuerst, daß es nur abzählbar viele Formeln $W_1, W_2, W_3, \ldots$ gibt. Diese lassen sich durch Verwendung der Bildungsgesetze in ‚vernünftiger' Weise durchnumerieren. F bestehe nun aus den Formeln $W_{n_1}, W_{n_2}, W_{n_3}, \ldots$, und wir nehmen an, daß die Funktion $k \to n_k$ eine sehr ‚elementare' Funktion sein soll, genauer eine *primitiv rekursive* Funktion. Dies sind Funktionen, die sich durch einfache Regeln bilden lassen und durch gewisse Formeln unserer Sprache beschrieben werden. Es gibt nun offensichtlich abzählbar viele syntaktische Ableitungen aus F, die man wie oben so durchnumerieren kann, daß die Funktion

> $R : k \to$ Nummer der mit der k-ten Ableitung abgeleiteten Formel

ebenfalls primitiv rekursiv ist. F ist nun widerspruchsfrei, wenn sich nicht sowohl W_1 als auch $(\neg W_1)$ (welches sagen wir die Nummer m trägt) aus F ableiten lassen. Wir müssen also klären, ob nicht 1 und m gleichzeitig im Bild von R liegen. Dies läßt sich aber durch eine einzige Formel ausdrücken, die wir wegen ihrer Bedeutung mit Consis(F) (consistent = widerspruchsfrei) bezeichnen. Wir nehmen nun noch an, daß F ein reichhaltiges System ist, d.h. die bei der Bildung primitiv rekursiver Funktionen vorkommenden Formeln sollen in gewisser Weise in F ‚enthalten' sein. Dann läßt sich unter Verwendung eines speziellen Resultats der Theorie rekursiver Funktionen (Existenz einer primitiv rekursiven Funktion mit nicht rekursivem Bild) zeigen, daß Consis(F) *nicht* aus F ableitbar ist. Dies ergibt den berühmten

8. Unvollständigkeitssatz *(Gödel 1931)* Consis(F) *ist nicht aus* F *ableitbar.*

Die überraschenden Konsequenzen dieses Satzes werden wir im nächsten Kapitel diskutieren.

Zuerst noch ein weiterer Begriff. Wenn F ein widerspruchsfreies Formelsystem ist, dann nennen wir eine Formel A von F ***unabhängig***, wenn sich weder A noch $(\neg A)$ aus F ableiten lassen. Gibt es solche unabhängigen Formeln? Ja, Satz 8 zeigt, daß Consis(F) von F unabhängig ist. Denn Consis(F) läßt sich nicht aus F ableiten und $(\neg$ Consis(F)) kann wegen der Widerspruchsfreiheit von F nicht gelten.

III Das Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel

Üblicherweise unterscheiden wir zwischen ‚Mengen' und ‚Elementen'. Jedoch läßt sich die ganze Mathematik ohne Elementbegriff aufbauen. Dafür beginnt man mit der leeren Menge $\emptyset$ und definiert nacheinander

$$1 = \{\emptyset\}, 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots n + 1 = n \cup \{n\}.$$

Aus den natürlichen Zahlen bauen wir dann alles weitere wie üblich auf. Diese Schreibweise ist zwar verwirrend aber begrifflich einfacher. Eine solche Mengenleere nennt man *atomlos*. Der Elementbegriff ist dann ein abgeleiteter Begriff.

Die nun anzugebenden Axiome bestehen aus Formeln, welche die in der ‚Mengenlehre' ausführbaren Konstruktionen beschreiben. Wir müssen nur bei Zusammenfassungsoperationen aufpassen, damit wir nicht auf widersprüchliche ‚Mengen' geführt werden.

Wir geben jeweils die umgangssprachliche Bedeutung der Axiome an, bei den meisten Axiomen auch die entsprechenden Formeln unserer formalen Sprache. Um Indizes zu sparen, schreiben wir w, x, y, z statt x_1, x_2, x_3, x_4. Weiterhin brauchen wir statt R_1 das Symbol $\in$, dies soll eine zweistellige Relationsvariable sein.

Axiom 1: Enthalten zwei Mengen gleiche Elemente, so sind sie gleich.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Longleftrightarrow z \in y)) \Rightarrow x = y.$$

Für die Formel $\forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)$ führen wir die Abkürzung $x \subset y$ ein. Die intuitive Bedeutung ist natürlich die Teilmengenrelation.

Axiom 2: Es gibt eine Menge ohne Elemente.

$$\exists x \forall y (\neg (y \in x)).$$

Die dadurch gegebene Menge bezeichnen wir mit $\emptyset$ und nennen sie die leere Menge.

Axiom 3: Zu je zwei Mengen x, y gibt es eine Menge z, die nur x und y als Elemente hat. Wir nennen diese Menge, das aus x, y gebildete ungeordnete Paar.

$$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \Longleftrightarrow (w = x) \vee (w = y))).$$

Die durch dieses Axiom gegebene Menge schreiben wir $\{x, y\}$. $\{x\}$ steht für $\{x, x\}$. Eine wichtige Rolle spielen aber die geordneten Paare, oder 3-Tupel, 4-Tupel etc. Diese lassen sich leicht aus ungeordneten Paaren aufbauen. Zum Beispiel durch $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$. Hierbei läßt sich die Rolle von x und y nicht mehr vertauschen, wir haben also ein geordnetes Paar.

Axiom 4: Die Vereinigung y der Mengen, die Elemente einer Menge x sind, ist wieder eine Menge. Diese Menge schreiben wir als $\cup \{w \mid w \in x\}$.

$$\forall x \exists y \forall z ((z \in y) \Longleftrightarrow \exists w (z \in w \wedge w \in x)).$$

Axiom 5: Es gibt eine unendliche Menge.

$$\exists x\, ((\emptyset \in x) \wedge (\forall y\, (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x).$$

Dabei steht $y \cup \{y\}$ für $\cup \{w \mid w \in \{y, \{y\}\}\}$.

Mit der eingangs dieses Kapitels getroffenen Definition sieht man, daß $\mathbb{N}$ die obige Bedingung erfüllt.

Axiom 6: Die Teilmengen einer Menge dürfen wir zu einer neuen Menge zusammenfassen.

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\, (z \in y \Longleftrightarrow z \subset x).$$

Axiom 7: Es sei $F(z, y)$ eine Formel derart, daß für jedes z genau ein $y = y(z)$ existiert, für welches $F(z, y)$ gilt. Dann ist für jede Menge x $\{y(z) \mid z \in x\}$ eine Menge.

Axiom 7, bei dem wir auf eine Formalisierung verzichtet haben, ist eigentlich kein einzelnes Axiom, sondern eine abzählbare Menge von Axiomen. Denn jede Formel $F(x, y)$ mit den genannten Eigenschaften führt zu einem selbständigen Axiom. Dieses sogenannte ‚Einsetzungsaxiom' kommt Cantors Begriff der ‚Zusammenfassung' am nächsten. Da wir dadurch jedoch nur Bilder einer vorher vorgegebenen Menge zusammenfassen dürfen, ist sichergestellt, daß die Mächtigkeit der neuen Menge nicht zu groß wird, und deshalb werden Widersprüche vermieden.

Mehr aus technischen Gründen nimmt man häufig das folgende *Regularitätsaxiom* hinzu:

Axiom 8: In jeder Menge $x \neq \emptyset$ gibt es ein y, welches kein Element von x enthält.

$$\forall x\, ((x = \emptyset) \vee \exists y\, ((y \in x) \wedge \forall z\, ((z \in x) \Rightarrow (\neg z \in y)).$$

Dieses Axiom legt also fest, daß jede Menge ein bezüglich $\in$ minimales Element enthält. Intuitiv kommt dies unserer eingangs erklärten Absicht entgegen, alle Mengen aus der leeren Menge aufzubauen.

Mit ZF (System von Zermelo und Fraenkel) bezeichnen wir die durch die Axiome 1 - 7 gegebene Formelmenge. ZFC steht für ZF vermehrt um Axiom 8 und das Auswahlaxiom.

Wie steht es nun mit der Widerspruchsfreiheit von ZF. Die Mengenlehre selbst dürfen wir zum Beweis der Widerspruchsfreiheit wohl nicht heranziehen, da sie ja erst durch die Axiome präzisiert werden soll. Eine syntaktische Ableitung der Formel Consis(ZF) ist wegen des Unvollständigkeitssatzes nicht möglich. Die Behauptung der Widerspruchsfreiheit von ZF ist also ein *Glaubenssatz*. Keiner zweifelt zwar daran, ein formaler Beweis ist aber nicht möglich.

Als nächstes erhebt sich die Frage, ob ZF (oder gegebenenfalls ZFC) die in unserer Vorstellungswelt (was immer das auch sein mag) gegebene Mengenlehre vollständig beschreibt. Keineswegs! Denn jede Aussage über die Mengenlehre unserer Vorstellung ist ja entweder wahr oder falsch. Aus dem Unvollständigkeitssatz geht aber hervor, daß es von ZF unabhängige Formeln gibt, die sich also nur unter Zugrundelegung der durch ZF beschriebenen mathematischen Systeme weder beweisen noch widerlegen lassen.

Es ist aber auch sinnlos, nach einem vollständigen Axiomensystem zu suchen. Denn jedes Axiomensystem, welches sich in vernünftiger Weise auf eine unendlich lange Papierrolle aufschreiben ließe, hätte ja denselben durch den Unvollständigkeitssatz beschriebenen Mangel. Trotzdem ist es vielleicht sinnvoll, durch Hinzufügung neuer Axiome unser System zu verbessern. Fatal wäre es natürlich, wenn für jede Erweiterung des Systems ein erneuter Glaubenssatz über die Widerspruchsfreiheit vonnöten wäre. Dies ist glücklicherweise nicht nötig, denn häufig ist für ein neues Axiom A die Formel

$$\mathrm{Consis(ZF)} \Rightarrow \mathrm{Consis(ZF} + A)$$

beweisbar, obwohl Consis(ZF) allen Beweisversuchen trotzt. In diesem Fall nennen wir ZF $+ A$ *relativ widerspruchsfrei*. Ein einfaches Beispiel dafür ist das Regularitätsaxiom. Denn aus der Annahme der Gültigkeit von ZF folgt die Existenz eines Modelles (J, M) für ZF und die Beschränkung auf diejenigen $x \in M$, die dem Regularitätsaxiom genügen, ist ein Untermodell in welchem das Regularitätsaxiom erfüllt ist. Also ist ZF $+ A$ widerspruchsfrei wenn nur Consis (ZF) gilt.

Dem kritischen Leser wird bei der Einführung von Modellen der Mengenlehre ein (scheinbarer) Widerspruch aufgefallen sein. Denn nach dem Satz von Löwenheim-Skolem existiert ja ein abzählbares Modell der Mengenlehre! Dies steht anscheinend im Widerspruch zu Satz 3, nach dem $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ (deren Bildung ja nach Axiom 6 erlaubt ist) eine überabzählbare Menge ist. Dieser Widerspruch löst sich glücklicherweise auf, wenn man beachtet, daß auch die Relation $|\mathfrak{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$ innerhalb unseres Modelles interpretiert werden muß, das also der Beweis von Satz 3 innerhalb des Modelles geführt werden muß. Der Beweis besagt dann ja nur, daß es *innerhalb* des Modelles keine injektive Funktion von der Interpretation von $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ in die Interpretation von $\mathbb{N}$ gibt. Außerhalb des Modelles kann es eine solche Funktion aber geben! Auch ist die Interpretation von $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ im Modell etwas anderes als die Menge $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ unserer (existenzabsolutistischen) Vorstellungswelt. Axiom 6 sagt ja nur, daß man die Elemente des Modells, welche Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind, zu einer neuen Menge zusammenfassen kann. Wir müssen bei der Betrachtung von Modellen der Mengenlehre also sorgfältig zwischen *internen* (im Modell liegenden) und *externen* (in unserer Vorstellungswelt liegenden) Begriffen und Dingen unterscheiden.

IV Modelle für ZF

Die von Gödel und Cohen zum Beweis ihrer Resultate herangezogenen Modelle sind das Ergebnis transfiniter Konstruktionsprozesse. Wir benötigen dafür den Begriff der Ordinalzahl. Eine Menge w heißt *transitiv*, wenn aus $x \in y \in w$ auch $x \in w$ folgt. Beispiele für transitive Mengen sind die im letzten Kapitel definierten Mengen $\emptyset$, n, $\mathbb{N}$. Eine transitive Menge nennen wir *Ordinalzahl*, wenn sie bezüglich der Relation $\in$ wohlgeordnet ist. Wohlgeordnet heißt dabei, daß eine lineare Ordnung derart vorliegt, daß jede Teilmenge ein minimales Element hat. Beispiele für Ordinalzahlen sind wiederum $\emptyset$, n, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$, $\mathbb{N} \cup \{\{\mathbb{N}\}$, $\{\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}\}\}$. Ordinalzahlen werden wir mit kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ bezeichnen.

Die getroffene Definition hat den Vorteil, daß jeweils in einer Klasse ‚äquivalenter' wohlgeordneter Mengen genau eine Ordinalzahl liegt. Weitere Vorteile sind, daß jedes Element einer Ordinalzahl wieder Ordinalzahl ist, oder daß zwei Ordinalzahlen entweder gleich sind, oder eine Element der anderen ist. Außerdem führen Vereinigung und Durchschnitt im Bereich der Ordinalzahlen wieder auf Ordinalzahlen.

Beginnend mit einer Menge $T = T_1$ betrachten wir nun wie in [3] die folgende mit Ordinalzahlen α (wobei $1 \in \alpha$), ausgeführte induktive Konstruktion.

Wir setzen $S_\alpha = \{T_\beta \mid \beta \in \alpha\}$. T_α bestehe dann aus den durch die folgenden Regeln ‚konstruierten' Mengen:

(1) Wenn $x, y \in S_\alpha$, dann ist $\{x, y\} \in T_\alpha$
(2) Wenn $x \in S_\alpha$, dann ist $\{y \mid \exists\, w \text{ mit } y \in w \in x\}$ Element von T_α
(3) Wenn $x \in S_\alpha$, dann ist $\{y \mid y \in S_\alpha \text{ mit } y \subset x\}$ Element von T_α
(4) Es sei $F(x, y)$ eine Formel derart, daß für jedes $z \in S_\alpha$ genau ein $y = y(z) \in S_\alpha$ existiert, für welches $F(z, y)_{|S_\alpha}$ gilt. Dann ist für jedes $x \in S_\alpha$ die Menge $\{y(z) \mid z \in x\}$ Element von T_α. Dabei ist $F(x, y)_{|S_\alpha}$ die Formel, die aus $F(x, y)$ entsteht, indem man die Quantoren $\forall x_i$ und $\exists x_i$ durch $\forall x_i \in S_\alpha$ und $\exists x_i \in S_\alpha$ ersetzt.

Für das folgende nehmen wir nun an, daß T eine abzählbare transitive Menge mit $\mathbb{N} \in T$ ist. Mit $\mathsf{M}[T]$ bezeichnen wir die durch Zusammenfassung aller Elemente von allen T_α, für beliebige Ordinalzahlen α, gegebene Klasse. Wir müssen mit der Bezeichnungsweise vorsichtig sein, da wir noch nicht wissen, ob $\mathsf{M}[T]$ eine Menge ist.

Unsere Definition ist nun so angelegt, daß alle gemäß ZF ausführbaren Konstruktionen auch ausgeführt werden, dies allerdings jeweils nur im Bereich eines S_α. Die Vereinigung über alle T_α beseitigt aber den durch diese Beschränkung gegebenen Mangel. Das heißt, in $\mathsf{M}[T]$ sind alle nach ZF möglichen Konstruktionen ausführbar. Ist $\mathsf{M}[T]$ eine Menge, dann liegt also ein Modell für ZF vor. Sei nun andererseits M ein transitives Modell für ZF mit $\mathsf{M} \supset T$. Man überzeugt sich leicht, daß in der obigen Definition von $\mathsf{M}[T]$ nur Konstruktionen ausgeführt wurden, die in M ausführbar sein müssen. Also gilt für jedes α, daß $T_\alpha \subset \mathsf{M}$. Daraus folgt $\mathsf{M}[T] \subset \mathsf{M}$. $\mathsf{M}[T]$ muß also eine Menge sein. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem können wir M sogar als abzählbar annehmen, mithin muß auch $\mathsf{M}[T]$ abzählbar sein. Wir halten unsere Betrachtungen in einem Satz fest:

9. Satz [3]: $\mathsf{M}[T]$ *ist ein transitives Modell für* ZF. *Für jedes transitive Modell* $\mathsf{M} \supset T$ *von* ZF *gilt* $\mathsf{M}[T] \subset \mathsf{M}$. $\mathsf{M}[T]$ *ist also minimales transitives Modell* $\supset T$ *für* ZF.

Die ursprünglich von Gödel ausgeführte Konstruktion war der oben beschriebenen sehr ähnlich. Er betrachtet die Mengen $T = \mathbb{N} \cup \{ \mathbb{N} \}$, $\bar{S}_\alpha = \cup \{ \bar{T}_\beta | \beta \in \alpha \}$, wobei $\bar{T}_\alpha$ durch die Regeln (1) - (4) unter Zusatz von

$$(5) \qquad \bar{S}_\alpha \in \bar{T}_\alpha$$

konstruiert wurde. Dadurch ging allerdings die in Satz 9 beschriebene Minimaleigenschaft verloren. Außerdem war das daraus entstehende $\overline{\mathsf{M}}[T]$ keine Menge, sondern eine Klasse. $\overline{\mathsf{M}}[T]$ ist nämlich die in der Klasse aller Mengen durch das folgende *Konstruierbarkeitsaxiom* ausgezeichnete Teilklasse.

Konstruierbarkeitsaxiom: Für jedes x existiert ein α mit $x \in \bar{T}_\alpha$.

Offensichtlich ist das Konstruierbarkeitsaxiom in $\mathsf{M}[T]$ erfüllt. Damit wissen wir:

10. Satz: *Das Konstruierbarkeitsaxiom ist relativ widerspruchsfrei.*

Gödel zeigte nun, daß sich aus ZF + ‚Konstruierbarkeitsaxiom' die allgemeine Kontinuumhypothese ableiten ließ. Nach dem im ersten Kapitel zitierten Ergebnis von Sierpinski ist dann auch das Auswahlaxiom ableitbar. Wir halten also fest:

11. Satz: *Die allgemeine Kontinuumhypothese und das Auswahlaxiom sind relativ widerspruchsfrei.*

Daß das Auswahlaxiom relativ widerspruchsfrei ist, läßt sich an unserem Modell $\mathsf{M}[T]$ für $T = \mathbb{N} \cup \{ \mathbb{N} \}$ ziemlich einfach ablesen. Unser Ausgangsobjekt T ist *intern* wohlgeordnet, außerdem lassen sich die Konstruktionsschritte – da Ordinalzahlen verwendet werden – ebenfalls intern wohlordnen. Deshalb ist einleuchtend, daß jedes $x \in \mathsf{M}[T]$ intern wohlgeordnet werden kann. Eine einfache Anfängerübung zeigt aber, daß das Auswahlaxiom Folge des

Wohlordnungsaxiom: *Jede Menge kann wohlgeordnet werden,*

ist.

Auf alle Fälle wissen wir nun, daß wir durch Hinzufügung des Auswahlaxioms (Abkürzung AC) oder der verallgemeinerten Kontinuumhypothese (Abkürzung GCH) zu den übrigen Axiomen der Mengenlehre nicht zu Widersprüchen geführt werden. Damit ist aber noch nicht die Frage geklärt, ob sich GCH aus ZF beweisen läßt, oder ob GCH von ZF unabhängig ist.

GCH oder AC sind aber nur dann von ZF unabhängig, wenn auch das weitergehende Konstruierbarkeitsaxiom unabhängig ist. Selbst diese einfachere Frage blieb bis zur Erfindung der Cohen'schen Forcing-Methode offen. Der Grund dafür ist darin zu suchen, daß sich diese Frage nicht durch Verwendung einfacher (der sogenannten inneren) Modelle lösen läßt (J.C. Shepherdson (1952)).

6 Cohens Modelle

Die Frage der Beweisbarkeit der verallgemeinerten Kontinuumhypothese wäre also entschieden, würde man das Konstruierbarkeitsaxiom zu den übrigen Axiomen von ZF hinzunehmen. Die Mehrzahl der Mathematiker (Gödel eingeschlossen) befand aber, daß dieses Axiom intuitiv nicht so einsichtig sei wie die übrigen Axiome von ZF. Außerdem befürchtete man, daß man durch dieses Axiom bei der Betrachtung neuer Mengen unnötig eingeschränkt würde.

Das Problem blieb also bis zur Erfindung der Cohen'schen Modelle offen. Da die Cohen'schen Methoden komplizierter Natur sind, können wir nur auf einige Aspekte eingehen. Relativ ausführlich werden wir die Unabhängigkeit des Konstruierbarkeitsaxioms behandeln. Dies ist auch die einfachste Frage.

Man kann recht einfach beantworten, in welchem Rahmen man die entsprechenden Modelle zu suchen hat. Wir betrachten dafür $M = \mathrm{M}[\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}]$ das minimale Modell für ZF, welches durch Satz 9 gegeben ist. Sei nun $\alpha_0 = \cup \{\alpha \mid \alpha \in M, \alpha \text{ Ordinalzahl}\}$ die Vereinigung der Ordinalzahlen von M. α_0 ist selbst Ordinalzahl, aber kein Element von M, denn sonst wäre $\alpha_0 \cup \{\alpha_0\}$ im Widerspruch zur Definition von α_0 eine in M enthaltene Ordinalzahl. Da M Modell für ZF ist, ist die Gesamtheit der mit den Ordinalzahlen von M durch die Regeln (1) - (5) konstruierten Mengen wieder Modell von ZF. Wegen der Minimalität von M muß dieses gleich M sein. Wir erhalten also $M = \cup \{T_\alpha \mid \alpha \in \alpha_0\}$. Zur Konstruktion von Modellen muß man also nicht alle Ordinalzahlen verwenden. Man könnte nun vermuten, daß durch Heranziehung größerer Ordinalzahlen weitere interessante Modelle entstehen. Dem ist aber nicht so, wie der folgende Satz zeigt.

12. Satz: *Sei T eine beliebige transitive Menge mit $\mathbb{N} \in T$. Dann ist die Aussage:*

> „*Für alle Ordinalzahlen β mit $\alpha_0 \in \beta$* ist $\Sigma_\beta(T) = \cup \{T_\alpha \mid \alpha \in \beta\}$ *kein Modell für ZF*"

relativ widerspruchsfrei.

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe β mit $\alpha_0 \in \beta$, so daß $\Sigma_\beta(T)$ Modell von ZF ist. Mit α_1 bezeichnen wir das Minimum der Ordinalzahlen α mit $\alpha_0 \in \alpha$, so daß $\Sigma_\alpha(T)$ Modell für ZF ist. α_1 ist dann nicht Element von $\Sigma_{\alpha_1}(T)$. Deshalb gilt *in* $\Sigma_{\alpha_1}(T)$, daß für jede Ordinalzahl α mit $\alpha_0 \in \alpha$ die Menge $\Sigma_\alpha(T)$ kein Modell für ZF ist. Also existiert ein Modell für ZF und die oben angegebene Aussage. Die betrachtete Aussage ist deshalb relativ widerspruchsfrei. ■

Es hat also gar keinen Sinn, Modellkonstruktionen mit größeren Ordinalzahlen als α_0 zu versuchen. Denn wenn dies zu einem Modell führen würde, so hätten wir den Beweis der *Negation* einer relativ widerspruchsfreien Aussage geführt. Dies ist nicht möglich. Wir können also nur hoffen, durch raffinierte Wahl der Ausgangsmenge T zu einem Modell zu gelangen, in welchem das Konstruierbarkeitsaxiom nicht gilt.

Die Grundidee für ein solches Modell ist sehr einfach. Wir nehmen eine Menge A mit $A \notin M$. Eine solche Menge gibt es sicher, da M abzählbar ist.

Dann setzen wir T_A für die kleinste transitive Menge, die A enthält, und betrachten $\Sigma_{\alpha_0}(T_A) = \Sigma(A)$.

Nehmen wir einmal an, dies sei ein Modell für ZF. $\Sigma(A)$ enthält genau dieselben Ordinalzahlen wie M, denn andernfalls würde ja die Konstruktion mit den Ordinalzahlen aus $\Sigma(A)$ im Widerspruch zu Satz 12 zu einem Modell für ZF führen. Da nun $A \notin M$ und die konstruierbaren Mengen in $\Sigma(A)$ genau die Elemente von M sind, ist also A in $\Sigma(A)$ nicht konstruierbar. Das Konstruierbarkeitsaxiom ist in diesem Modell also falsch, und die Unabhängigkeit wäre bewiesen. Unglücklicherweise ist $\Sigma(A)$ aber nicht für jedes $A \notin M$ ein Modell. Cohen ging dieser Frage nach und bewies, daß $\Sigma(A)$ immer dann ein Modell von ZF ist, wenn A ein sogenannter *generischer Filter* ist.

13. Definition: Sei $\pi \in M$ versehen mit einer internen Teilordnung $\leqslant$, (d.h. die Relation $\leqslant$, oder besser $\{(x, y) \mid x, y \in M, x \leqslant y\}$, ist Element von M). $A \subset \pi$ heißt *generischer Filter*, wenn gilt:

(i) Ist $x, y \in A$, dann existiert $z \in A$ mit $x \leqslant z$ und $y \leqslant z$.
(ii) Ist $x \in A$ und $y \in \pi$ mit $y \leqslant x$, dann ist $y \in A$.
(iii) Wir haben $A \cap X \neq \emptyset$ für alle $X \in M$ mit $X \subset \pi$ und
 (a) $x \in X$, $y \in \pi$ mit $x \leqslant y$ ergibt $y \in X$
 (b) für jedes $y \in \pi$ gibt es ein $x \in X$ mit $y \leqslant x$.

Diesen Begriff haben wir angegeben, um die Komplexität der Cohen'schen Methoden zu illustrieren; wir wollen ihn deshalb einstweilen nicht weiter diskutieren.

Das Ergebnis unserer Betrachtung ist aber auf alle Fälle:

14. Satz: *Das Konstruierbarkeitsaxiom ist unabhängig von ZF.*

Wir wollen noch bemerken, daß für $A \notin M$ unsere im letzten Kapitel gegebene Argumentation dafür, daß in M das Auswahlaxiom gilt, auch für unser Modell $\Sigma(A)$ gültig bleibt. Es ist also gleichzeitig gezeigt, daß das Konstruierbarkeitsaxiom von ZFC unabhängig ist.

Wir kehren noch einmal kurz zu den generischen Filtern $A \subset \pi$ zurück. Ist eine Formel F im Modell $\Sigma(A)$ gültig, so schreiben wir $\Sigma(A) \models F$. Ist $p \in \pi$, so sagen wir p erzwingt (forces) F, wenn für alle generischen Filter $A \subset \pi$ mit $p \in A$ gilt $\Sigma(A) \models F$, wir kürzen dies durch $p \Vdash F$ ab. Ein fundamentales Ergebnis der Cohen'schen Methode ist nun:

15. Forcing-Satz: *Sei $A \subset \pi$ ein generischer Filter mit $\Sigma(A) \models F$. Dann gibt es ein $p \in A$ mit $p \Vdash F$.*

Da die Relation $p \Vdash F$ in einem gewissen Sinne auch induktiv in der Menge aller Formeln definiert werden kann, erlaubt einem der Forcing-Satz nacheinander die $p \in A$ so zu definieren, daß die schon erzwungenen Aussagen gültig bleiben. Außerdem läßt sich jedes F oder $\neg F$ erzwingen. Um ein Modell für die Unabhängigkeit von GCH zu finden, muß man also bei der Festlegung der einzelnen $p \in A$ so verfahren, daß kein p die Formel GCH erzwingt. Dies ist in der Tat möglich. Mit dem Auswahlaxiom kann man in

„ähnlicher" Weise verfahren. Mit Hilfe solcher Konstruktionen bewies P.J. Cohen im Jahre 1963:

16. Satz: *GCH ist unabhängig von ZFC. AC ist unabhängig von ZF.*

Die Kontinuumhypothese ist also weder beweisbar noch widerlegbar, sofern man nur solche Manipulationen mit Mengen erlaubt, die zu den Axiomen von ZF führten.

VI Weitere Axiome, Solovays Modell

Häufig werden stärkere Unendlichkeitsaxiome bei mengentheoretischen Überlegungen betrachtet. Ein solches Axiom ist das Axiom der *unerreichbaren Mächtigkeit* (inaccessible cardinal):

(IC): Es gibt eine überabzählbare Menge x derart, daß für jede Menge y mit $|y| < |x|$ gilt $|\mathfrak{P}(y)| < |x|$.

Verwendet man das Auswahlaxiom, so sieht man, daß es bei Gültigkeit von IC auch eine Ordinalzahl α mit denselben Eigenschaften geben muß. Dann bilden die Elemente von α aber ein Modell für ZFC. Also erhalten wir:

$$\mathrm{ZFC} \vdash (\mathrm{IC} \Rightarrow \mathrm{Consis(ZFC)}).$$

Da nach dem Unvollständigkeitssatz Consis(ZFC) nicht aus ZFC ableitbar ist, kann auch IC nicht ableitbar sein. IC ist also entweder unabhängig oder nicht widerspruchsfrei. Die Mehrzahl der Mathematiker glaubt an die Unabhängigkeit.

Auch noch stärkere Unendlichkeitsaxiome werden häufig zugelassen. Man verbindet damit die Hoffnung, ein großes „Mengenuniversum" sicherzustellen. In Bezug auf GCH bringen diese Axiome allerdings nichts, GCH läßt sich daraus nicht ableiten.

Weitgehend im Dunkel liegt die Frage nach einer *meßbaren Mächtigkeit* (measurable cardinal). Man sagt, eine Menge x *habe das Maß Null*, wenn jedes endliche σ-additive Maß μ auf der σ-Algebra $\mathfrak{P}(x)$ mit $\mu(\{y\}) = 0$ für alle $y \in x$ Null sein muß. Man betrachtet:

(MC): Es gibt eine Menge x, die *nicht* das Maß Null hat.

Ulam [20] bewies, daß die Negation von MC relativ widerspruchsfrei zu ZFC ist. Auch hier herrscht die Meinung vor, daß MC sich als unabhängig von ZFC herausstellen wird. Auf alle Fälle muß die Mächtigkeit einer Menge, die nicht vom Maß Null ist, die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$, $\aleph_1 = \{\alpha \mid \alpha$ abzählbare Ordinalzahl$\}$, ... usw. übersteigen. Mit GCH kann man sogar zeigen, daß eine solche Mächtigkeit die kleinste unerreichbare Mächtigkeit übersteigen muß.

Ein auch für Anwendungen außerordentlich wichtiges Ergebnis erzielte R.M. Solovay (1970)

17. Satz: *Es gebe ein transitives Modell für ZFC + IC. Dann gibt es ein transitives Modell für ZF mit*

(i) *jede Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *ist Lebesgue-meßbar*
(ii) *jede Teilmenge* $A \subset \mathbb{R}$ *hat die Baire-Eigenschaft, d.h. es gibt ein offenes* $U \subset \mathbb{R}$, *so daß* $(A \setminus U) \cup (U \setminus A)$ *mager ist.*

In diesem Modell von Solovay kann man sogar $\mathbb{R}$ durch jeden vollständigen separablen metrischen Raum S und das Lebesguemaß durch ein beliebiges σ-endliches Maß μ auf S ersetzen. Für solche S und μ gilt dann also:

(S1) Jede Teilmenge von S ist μ-meßbar.
(S2) Jede Teilmenge von S hat die Baire-Eigenschaft.

In diesem Modell kann GCH nicht gelten, da $\mathbb{R}$ ja eine Mächtigkeit mit von Null verschiedenem Maß ist. AC gilt in diesem Modell ebenfalls nicht. Eine Mengenlehre in der ZF + S1 + S2 gilt, nennen wir *Solovaysche Mengenlehre.*

Diese Mengenlehre ist für den *Praktiker* von großer Anziehungskraft, denn der Praktiker hat ja Untersuchungen über die Lebesgue-Meßbarkeit von Mengen schon immer für unnötig gehalten.

Außerdem kann man in dieser Mengenlehre überraschende Sätze beweisen. So zeigte H.G. Garnir [8] mit Hilfe von 17(i) und J.D. Maitland Wright [21] mit Hilfe von (S2), daß jeder lineare Operator, der einen Banachraum in einen normierten Raum abbildet, stetig ist. Die durch solche Sätze gegebenen Vorteile werden allerdings durch einige Nachteile erkauft. Viele der mit AC bewiesenen Sätze gelten in dieser Mengenlehre nicht mehr.

Welche Mengenlehre ist nun die richtige? Nun, diese Frage kann man nur stellen, wenn man von der *Existenz* eines „wirklichen" Mengenuniversums ausgeht; wenn man also Gedanken hegt, die den Konstruktivisten und Intuitionisten schon seit jeher verwerflich erschienen. Vielleicht werden gerade die spektakulären Erfolge der axiomatischen Mengenlehre dazu führen, daß man die Objekte der Mathematik im Sinne der Semiintuitionisten wieder als ein Feld *konstruktiver Möglichkeiten* ansieht. Wobei die konstruktiven Möglichkeiten für den Axiomatiker durch die Hinzufügung unabhängiger Axiome gegeben sind.

Man muß allerdings hinzufügen, daß gerade diejenigen, die in der vordersten Front der axiomatischen Mengenlehre arbeiten, von der Existenz eines wirklichen Mengenuniversiums auszugehen scheinen. Sie glauben an ein ausgezeichnetes Axiomensystem. So schreibt z.B. Solovay:

> „Of course the axiom of choice is true and so there are non-measurable sets".

Oder Cohen:

> „In essence one can feel that set theory is merely a highly successful shell, which has nothing to do with „real" sets but at best describes some type of mental process used in describing real objects such as integers. The great defect with this view is that it leaves unexplained why this fiction is successful and how a presumably incorrect intuition has led us to such a remarkable system".

Auch glaubt Cohen, daß die Kontinuumhypothese falsch ist. Er meint, daß man eines Tages ZFC durch intuitiv einsehbare Axiome so erweitert, daß in diesem System dann GCH nicht mehr gilt.

VII Was hängt von AC und GCH ab?

Es ist hinreichend bekannt, daß das Wohlordnungsaxiom oder auch das Zornsche Lemma in ZF äquivalent zu AC sind. Wir wollen dafür noch einige andere Beispiele geben:

(AC 1) Für beliebige Mengen x, y gilt $|x| \leqslant |y|$ oder $|y| \leqslant |x|$

(AC 2) In jedem Verband mit mindestens zwei Elementen und mit Einheitselement gibt es ein maximales Ideal.

(AC 3) Das Produkt quasikompakter Räume ist unter der Produkttopologie quasikompakt (Satz von Tychonoff).

(AC 4) Kann x wohlgeordnet werden, so kann auch $\mathfrak{P}(x)$ wohlgeordnet werden.

(AC 5) Die Einheitskugel des Dualraumes eines normierten linearen Vektorraumes über $\mathbb{R}$ hat einen Extrempunkt [1].

Für alle Aussagen (ACn) gilt also:

$$\mathrm{ZF} \vdash ((\mathrm{AC}) \Longleftrightarrow (\mathrm{AC}n)).$$

Diese Liste ist natürlich unvollständig, nähere Einzelheiten findet der Leser in [17].

Auch bei vielen anderen Aussagen wird das Auswahlaxiom zum Beweis benötigt. Zum Beispiel bei:

(HB) dem Satz von Hahn-Banach

(KM) dem Satz von Krein-Milman

(BI) dem Satz über die Existenz von Primidealen in Booleschen Algebren.

(TC) dem Satz von Tychonoff für kompakte Räume.

Alle diese Aussagen sind von ZF unabhängig, und keine gilt in der Solovayschen Mengenlehre. In ZF läßt sich für sie die folgende Abhängigkeit zeigen [14]:

$$\mathrm{AC} \Rightarrow \mathrm{TC} \Longleftrightarrow \mathrm{BI} \Rightarrow \mathrm{HB}.$$

Außerdem gilt [1]:

$$\mathrm{BI} + \mathrm{KM} \Longleftrightarrow \mathrm{AC}.$$

Keiner der Pfeile $\Rightarrow$ läßt sich umkehren. Schwächt man zum Beispiel BI zu HB ab, so gilt nicht mehr HB + KM $\Longleftrightarrow$ AC.*

Wir wollen noch einige Beispiele für Anwendungen von GCH angeben.

18. Beispiel: Sei S ein vollständiger metrischer Raum. Mit $M(S)$ bezeichnen wir die Menge aller endlichen Bairemaße auf S. Dies sind Maße bezüglich

*Dies wurde bisher allerdings nur in ZFA, einer Mengenlehre mit Atomen, gezeigt.

der kleinsten σ-Algebra auf S, die alle stetigen reellen Funktionen meßbar macht. Man interessiert sich besonders für $M_s(S)$, die Menge der $\mu \in M(S)$, die von einer separablen Teilmenge von S getragen werden. Das Interesse an diesen Maßen rührt daher, daß diese mit den sogenannten straffen Maßen übereinstimmen. Dabei heißt ein Maß straff, wenn es von einer abzählbaren Vereinigung kompakter Teilmengen von S getragen wird, also besonders gutmütige Approximationseigenschaften hat. Es konnte nun bewiesen werden, daß für jedes $\mu \in M(S)$, welches nicht Element von $M_s(S)$ ist, eine Teilmenge $x \subset S$ existiert, die MC genügt. Damit folgt aus GCH, daß für S, welche geringerer als unerreichbarer Mächtigkeit sind, gilt:

$$M_s(S) = M(S) = \{\, \mu \in M(S) \mid \mu \text{ ist straff} \,\}.$$

Dies gilt dann also insbesondere für $|S| = |\mathbb{R}|$. Nimmt man statt GCH die Negation von MC, so gilt dies für alle vollständigen S. (Siehe [7] für Literaturangaben).

19. Beispiel: Sei K kompakt und $C(K)$ die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen auf K. Lange Zeit war die Frage offen, ob jeder Algebrahomomorphismus von $C(K)$ in eine Banachalgebra automatisch stetig bezüglich gleichmäßiger Konvergenz ist. Äquivalent dazu wäre, daß alle Algebra-Normen auf $C(K)$ stetig bezüglich gleichmäßiger Konvergenz sind. In der Solovayschen Mengenlehre ist dies natürlich wegen der weitergehenden Resultate von Garnir und Maitland Wright der Fall. H.G. Dales konnte neulich unter Verwendung von GCH einen nicht-stetigen Algebrahomomorphismus auf $C(K)$ konstruieren. Damit weiß man wenigstens, daß es zwecklos ist, in ZF zu versuchen, die Stetigkeit solcher Homomorphismen zu beweisen.

Literatur

Die Literaturangaben sind natürlich keineswegs vollständig. Es werden hauptsächlich Monographien und Übersichtsartikel angegeben. Originalliteratur ist nur aufgeführt, wenn die verwendeten Resultate in keiner der angegebenen Monographien zitiert sind. Eine Ausnahme davon bildet nur der leicht lesbare Artikel [3] von Cohen. Das Standardwerk der Axiomatischen Mengenlehre ist gegenwärtig wohl Takeuti-Zaring [19]. Mein Lieblingsbuch ist Cohen [5]. In dieser leicht lesbaren Darstellung erhält man Informationen aus erster Hand, außerdem wird immer auf die den einzelnen Methoden zugrundeliegende Intuition eingegangen. Als Einführung in die Mathematische Logik und in die Theorie rekursiver Funktionen wären Hermes [10] und [11] zu empfehlen. Wer eine knappe Information über die Forcing-Methode sucht, sei auf [4] oder auch auf das erste Kapitel von [18] hingewiesen. Von großem Reiz ist es, im Rückblick den Übersichtsartikel [9] von Gödel zu lesen. Formal einfachere Zugänge zu den Unabhängigkeitsbeweisen mit Hilfe Boolscher Nonstandard-Modelle befinden sich in Rosser [15]. Dieses Buch ist leicht lesbar, leider wird zum Verständnis der darin verwendeten Notation die Lektüre des schwer beschaffbaren Werkes [16] vorausgesetzt.

[1] J.L. Bell, D.H. Fremlin: A geometric form of the axiom of choice, Fundamenta Math. 77 (1972) 167 - 170.

[2] W. Bibel: Maschinelles Beweisen, Jahrbuch Überblicke Mathematik 1976.

[3] P.J. Cohen: A minimal model for set theory, Bull AMS 69 (1963) 537 - 540.

[4] P.J. Cohen: Independence results in set theory, in: Theory of models, (North Holland Publ. Co.) Amsterdam - London (1972) 39 - 54.
[5] P.J. Cohen: Set theory and Continuum hypothesis, (W.A. Benjamin Inc.) New York (1966).
[6] H.G. Dales: A discontinuous homomorphism from C(X) (preprint 1976).
[7] R.M. Dudley: Convergence of Baire measures, Studia Math. 27 (1966) 251 - 268.
[8] H.G. Garnir: Solovay's axiom and functional analysis, Springer Lecture notes Nr. 399 (1974) 189 - 204.
[9] K. Gödel: What is Cantor's Continuum Problem? Amer. Math. Monthly 54 (1947) 515 - 525.
[10] H. Hermes: Einführung in die mathematische Logik, (Teubner Verlag) Stuttgart (1972).
[11] H. Hermes: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit, (Springer Verlag) Berlin - Heidelberg - New York (1971).
[12] W.A.J. Luxemburg: Nichtstandard-Zahlsysteme und die Begründung des Leibnizschen Infinitesimalkalküls, Jahrbuch Überblicke Mathematik (1975).
[13] A. Mostowski: Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese, Elemente der Mathematik 19 (1964) 121 - 125.
[14] D. Pincus: Independence of the prime ideal theorem from the Hahn-Banach theorem, Bull. AMS 78 (1972) 766 - 770.
[15] J.B. Rosser: Simplified Independence proofs, (Academic Press) New York - London (1969).
[16] J.B. Rosser: Logic for Mathematicians, (Mc Graw-Hill) New York (1953).
[17] H. Rubin, J. Rubin: Equivalents of the axiom of choice (North Holland Publ. Co.) Amsterdam - London (1970).
[18] R.M. Solovay: A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. of Math. 92 (1972) 1 - 56.
[19] G. Takeuti, W.M. Zaring: Introduction to axiomatic set theory (Springer Verlag) New York - Heidelberg - Berlin (1970).
[20] S. Ulam: Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre, Fundamenta Math. 16 (1930) 140 - 150.
[21] J.D. Maitland Wright: On the continuity of mid-point convex functions, Bull. London Math. Soc. 7 (1975) 89 - 92.