Gruppenalgebren mit zentralem Radikal

Von

Hartmut Spiegel

Einleitung. Inhalt dieser Arbeit ist ein ringtheoretischer Beweis des folgenden Satzes:

Satz 0.1. *Ist K ein Körper, G eine endliche Gruppe, deren Ordnung von der Charakteristik $p > 0$ des Körpers geteilt wird und P eine p-Sylowgruppe von G, so sind folgende Bedingungen gleichwertig:*

(A) *Das Radikal liegt im Zentrum der Gruppenalgebra KG.*

(B) *p teilt nicht die Ordnung von G', und die K-Dimension des Radikals der Gruppenalgebra über $G'P$ ist $|P| - 1$.*

(C) *$G'P$ ist Frobeniusgruppe zu P mit G' als Frobeniuskern.*

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung von Ergebnissen von Wallace ([7], [8]). Der Beweis stützt sich nicht auf Ergebnisse aus der modularen Darstellungstheorie, die Gruppenalgebren über Körpern der Charakteristik 0 betreffen. Auch kann auf die Voraussetzung, daß K algebraisch abgeschlossen ist, verzichtet werden. Einige Hilfssätze gehen auf Wallace zurück, nur wurde ihr Beweis so modifiziert, daß sie auch für beliebige Körper gelten. Bei dem Beweis der Äquivalenz von (B) und (C) geht der Begriff Defektgruppe eines zentral primitiven Idempotents ein, wie er von Rosenberg ([6]) definiert wurde. Daher kann an dieser Stelle ein Satz von Michler ([4]) über die Struktur der Blöcke vom Defekt 0 p-nilpotenter Gruppen angewandt werden.

Ich danke Herrn G. Michler für die Anregung zu dieser Arbeit und seine zahlreichen Ratschläge während ihrer Entstehung.

Bezeichnungen. Im folgenden ist K ein kommutativer Körper. Jeder betrachtete Körper hat Primzahlcharakteristik $p > 0$. G ist eine endliche nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $p^a m$, wo $a > 1$ und p^a die höchste p-Potenz ist, die die Gruppenordnung teilt. G' ist die Kommutatorgruppe und P eine p-Sylowgruppe von G. KG bzw. $K(G)$ ist die Gruppenalgebra von G über dem Körper K, ZR das Zentrum und JR das Jacobsonradikal des Ringes R. Ist U ein KG-Modul, so ist $\dim U$ die K-Vektorraumdimension von U. Bezüglich der Terminologie wird auf Curtis-Reiner ([1]) und Rosenberg ([6]) verwiesen.

Der Beweis des Satzes 0.1 zerfällt in zwei Teile: Mit Hilfe von 1.1 und 1.2 wird in 1.3 gezeigt, daß (A) und (B) äquivalent sind. Danach wird in 2.1 die Äquivalenz von (B) und (C) — unter der Annahme, daß K Zerfällungskörper für G ist — bewiesen und anschließend in 2.4 mit Hilfe von 2.2 und 2.3 gezeigt, daß der allgemeine Fall auf diesen zurückgeführt werden kann.

1.1. Hilfssatz. *Ist $JKG \subseteqq ZKG$, dann sind gleichwertig:*

(1) $JKG \neq sKG$, *wo* $s = \sum_{y \in G'} y$ *ist.*

(2) $p \nmid |G'|$.

Beweis. Ist $JKG \neq sKG$, so ist nach ([11] 2.4) $JKG \subset sKG$. Wäre p ein Teiler von $|G'|$, so würde folgen: $s^2 = |G'|\, s = 0$ und daher $s \in JKG$ und $sKG \subseteqq JKG$. Das ist ein Widerspruch zu (1). Also gilt (2).

Sei $JKG = sKG$. Da G endlich ist und $G' \lhd G$, folgt aus ([2] Th. B) $JKG' = JKG \cap KG'$ und deshalb $JKG' = sKG' \neq 0$. Nach dem Satz von Maschke gilt dann: $p \mid |G'|$.

Im folgenden Hilfssatz wird das Ergebnis von Wallace ([9] Theorem) verwendet, daß aus $(JKG)^2 = 0$ folgt: $p^a = 2$. Wallace formulierte diese Behauptung für algebraisch abgeschlossene Körper K, aber der Beweis läßt sich wörtlich auf beliebige Körper übertragen.

1.2. Hilfssatz. *Ist $JKG \subseteqq ZKG$, so ist $JKG \neq sKG$* $\left(s = \sum_{y \in G'} y\right)$.

Beweis. Angenommen $JKG = sKG$. Dann ist $JKG' = sKG'$, $\dim JKG' = 1$ und $p \mid |G'|$. Also ist $s^2 = 0$. Deshalb ist $(JKG)^2 = 0$ und $p^a = 2$. Es folgt: $|G'| = 2n$, n ungerade. G' besitzt daher ([3] 6.7, S. 30) einen Normalteiler vom Index 2 und wir erhalten: $2 \nmid |G''|$. Sei P_0 eine p-Sylowgruppe von G'. Dann ist $P_0 \cap G'' = \{e\}$, $G'' P_0 \lhd G'$ und $p \nmid |G' : G'' P_0|$. Mit ([2] Th. B) ergibt sich:

$$\dim JKG' = |G' : G'' P_0| \dim JKG'' P_0\,,$$

also

$$1 = |G' : G'' P_0| \dim JKG'' P_0\,.$$

Daher ist $G' = G'' P_0$ und $|G' : G''| = 2$. Außerdem gilt: $2 \nmid |G : G'|$. $V := G'/G''$ ist folglich eine normale Untergruppe der Ordnung 2 in der Gruppe $S := G/G''$ und $|S : V|$ ist ungerade. Nach dem Satz von Zassenhaus ([3] S. 126) existiert dann eine Untergruppe U von S mit $S = VU$, $V \cap U = \{e\}$. Wie man leicht sieht, ist S abelsch. Das ist aber ein Widerspruch zu $G'' \subset G'$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Im weiteren Verlauf der Beweisführung wird mehrmals folgende Tatsache gebraucht: Ist H eine p-nilpotente Gruppe mit p-Sylowgruppe P und normalem p-Komplement N, dann ist KH direkte Summe der Ideale I und A, wobei $fKH = A \cong KP$ ist $\left(f = \frac{1}{|N|} \sum_{y \in N} y\right)$. Dies folgt aus ([10] Th. 2.1). Insbesondere ist $\dim JKH \geqq |P| - 1$.

1.3. Satz. $JKG \subseteqq ZKG \Leftrightarrow \dim JK(G'P) = p^a - 1$ *und* $p \nmid |G'|$.

Beweis. Ist $JKG \subseteqq ZKG$, so wissen wir aus dem Vorangehenden: $p \nmid |G'|$, $JKG \subset sKG$, wo $s = \sum_{y \in G'} y$ ist. Also ist

(1) $$\dim JKG < \dim sKG = |G : G'| .$$

Wegen $P \cap G' = \{e\}$, $G' P \lhd G$ und $p \nmid |G : G' P|$ folgt nach ([2] Th. B)

(2) $$\dim JKG = |G : G' P| \dim JK(G' P) .$$

(1) und (2) ergeben:

$$\dim JK(G' P) < \frac{|G : G'|}{|G : G' P|} = |G' P : G'| = |P| .$$

Nach der obenstehenden Bemerkung ist daher $\dim JK(G' P) = |P| - 1$.

Sei nun $\dim JK(G' P) = p^a - 1$ und $p \nmid |G'|$. Dann ist wegen $K(G' P) = I \oplus A$

$$J K(G' P) = J(A) \subseteqq sK(G' P).$$

Nach ([2] Th. B) folgt $JKG = JK(G' P)\, KG \subseteqq sKG$. Mit ([11] 2.4) erhält man dann: $JKG \subseteqq ZKG$.

Im nachstehenden Abschnitt werden — ohne daß es jedesmal besonders erwähnt wird — folgende Voraussetzungen über die betrachtete endliche Gruppe H gemacht: H ist p-nilpotent mit normalem p-Komplement N und p-Sylowgruppe P der Ordnung p^a.

2.1. Satz. *Sei K Zerfällungskörper von H. Dann sind äquivalent:*

(1) $\dim JKH = p^a - 1$,

(2) *$H = NP$ ist Frobeniusgruppe zu P mit Frobeniuskern N.*

Beweis. i) Es ist $KH = I \oplus A$, $A = fKH \cong KP$ $\left(f = \frac{1}{|N|} \sum_{n \in N} n\right)$. Also ist $A \leftrightarrow f \leftrightarrow \mu$ ein Block von KH mit Defekt a. Es gelte nun (1). Dann ist wegen $\dim JKH = |P| - 1 = \dim J(A)$ I halbeinfach. Die in I liegenden Blöcke von KH sind daher einfach und besitzen nach ([4] 2.4) Defekt 0. Folglich gibt es nur einen Block von KH mit positivem Defekt. Ist weiterhin $|P| = p$, so ist wegen ([5] Cor. 9) $\{e\}$ die einzige p-reguläre Konjugiertenklasse von H mit positivem Defekt, d.h. P operiert fixpunktfrei auf N und NP ist daher Frobeniusgruppe.

ii) Angenommen, es gilt (1), aber nicht (2). Sei H ein Gegenbeispiel mit minimalem a. Dann folgt aus i), daß $a > 1$ ist. Da H nicht Frobeniusgruppe zu P ist, existiert ein $d \in P$ mit $d \neq e$, $d^p = e$, das nicht fixpunktfrei auf N operiert. Ist D die von d erzeugte zyklische Gruppe, so gibt es einen Normalteiler H_1 mit $ND \leqq H_1 \lhd H$ und $|H : H_1| = p$. H_1 ist p-nilpotent und folglich ist $\dim JKH_1 \geqq p^{a-1} - 1$. Sei $T = \{q_1 = e, q_2, \ldots, q_p\} \subset P$ ein Nebenklassenvertretersystem von H_1 in H. Nach ([8] Lemma 2) ist

$$S = \sum_{i=1}^{p} \oplus\, q_i JKH_1 \subseteqq JKH .$$

Weiter ist $S \cap \sum_{i=2}^{p} \oplus f(e - q_i) K = 0$, da KH freier KH_1-Modul mit Basis T ist, und $\langle f(e - q_i) \mid i = 2, \ldots, p\rangle \subseteqq JKH$, da

$$\langle f(e-q) \mid e \neq q \in P \rangle = fJKP = fJKH \subseteqq JKH$$

ist. Also ist $\dim JKH \geqq p \dim JKH_1 + p - 1$. Wäre $\dim JKH_1 > p^{a-1} - 1$, dann folgte

$$p^a - 1 = \dim JKH > p(p^{a-1} - 1) + (p-1) = p^a - 1 .$$

Folglich ist $\dim JKH_1 = p^{a-1} - 1$ und H_1 ist nach Konstruktion keine Frobeniusgruppe zur p-Sylowgruppe P_1. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von a. Also gilt: (1) $\Rightarrow$ (2).

iii) Gilt (2), so besitzt jede p-reguläre Klasse $C \neq \{e\}$ von H Defekt 0 und daher auch ([5] Cor. 6) jeder von fKH verschiedene Block von KH Defekt 0. Da diese Blöcke alle einfach sind ([4] 2.6), folgt: $\dim JKH = \dim JKP = p^a - 1$.

2.2. Hilfssatz. *Ist E ein Erweiterungskörper von K, so gilt:*

$$\dim_K JKH > |P| - 1 \Rightarrow \dim_E JEH > |P| - 1 .$$

Beweis. Wegen $KH = I \oplus A$, $A \cong KP$ folgt:

$$EH = E \otimes_K KH = (E \otimes_K I) \oplus (E \otimes_K A) \cong (E \otimes_K I) \oplus EP . \tag{1}$$

Das isomorphe Bild des Radikals von EP in EH ist ein nilpotentes Ideal in EH von der Dimension $|P| - 1$. Ist nun $\dim_K JKH > |P| - 1$, so existiert wegen $JKH = JI \oplus JA$ ein nilpotentes Ideal $X \neq 0$ in I. Dann ist $0 \neq E \otimes_K X$ ein nilpotentes Ideal in $E \otimes_K I$ und wegen (1) folgt: $\dim_E JEH > |P| - 1$.

2.3. Hilfssatz. *Ist K ein perfekter Körper und* $\dim JKH = |P| - 1$, *so ist H eine Frobeniusgruppe zu P mit Frobeniuskern N.*

Beweis. Nach ([1] 69.11) existiert eine endliche Erweiterung $E \geqq K$, die Zerfällungskörper für H ist. E ist separabel, da K perfekt ist. Da $\dim JKH = |P| - 1$ ist, ist das Ideal I der Zerlegung $KH = I \oplus A$ eine halbeinfache K-Algebra. Dann ist auch $E \otimes_K I$ eine halbeinfache Algebra über E ([1] 69.4). Es ist $EH = (E \otimes_K I) \oplus EP$ und daher $\dim_E JEH = |P| - 1$. Aus Satz 2.1 folgt nun die Behauptung.

2.4. Satz. *Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $H = NP$ eine endliche p-nilpotente Gruppe. Dann sind äquivalent:*

(1) $\dim JKH = |P| - 1$,

(2) *H ist Frobeniusgruppe zu P mit Frobeniuskern N.*

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (1): Sei F der algebraische Abschluß von K. Wäre $\dim JKH > |P| - 1$, so wäre nach Hilfssatz 2.2 $\dim JFH > |P| - 1$. Der Widerspruch zu (1) folgt dann aus Satz 2.1.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei Q der Primkörper von K. Dann ist nach Hilfssatz 2.2 $\dim JQH = |P| - 1$. Da jeder endliche Körper perfekt ist, folgt mit 2.3 die Behauptung.

Literaturverzeichnis

[1] C. W. CURTIS and I. REINER, Representation theory of finite groups and associative algebras. New York, London 1962.

[2] J. A. GREEN and S. E. STONEHEWER, The radicals of some group algebras. J. Algebra **13**, 137–142 (1969).

[3] B. HUPPERT, Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg 1967.

[4] G. O. MICHLER, The blocks of p-nilpotent groups over arbitrary fields. Erscheint demnächst.

[5] G. O. MICHLER, Conjugacy classes and blocks of group algebras. Symposium on "Associative Algebras", Rome, November 23–26, 1970.

[6] A. ROSENBERG, Blocks and centres of group algebras. Math. Z. **76**, 209–216 (1961).

[7] D. A. R. WALLACE, Note on the radical of a group algebra. Proc. Cambridge Phil. Soc. **54**, 128–130 (1958).

[8] D. A. R. WALLACE, Group algebras with central radicals. Proc. Glasgow Math. Assoc. **5**, 103–108 (1962).

[9] D. A. R. WALLACE, Group algebras with radicals of square zero. Proc. Glasgow Math. Assoc. **5**, 158–159 (1962).

[10] D. A. R. WALLACE, Lower bounds for the radical of the group algebra of a finite p-soluble group. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **16**, 127–134 (1968).

[11] D. A. R. WALLACE, On commutative and central conditions on the Jacobson radical of the group algebra of a group. Proc. London Math. Soc. (3) **19**, 385–402 (1969).

Eingegangen am 26. 7. 1971

Anschrift des Autors:
Hartmut Spiegel
Mathematisches Institut der
Universität Tübingen
74 Tübingen
Brunnenstraße 27