# Blockkorrespondenzen und $p'$-Normalteiler

Von

HARTMUT SPIEGEL

$FG$ (bzw. $F(G)$) sei die Gruppenalgebra der endlichen Gruppe $G$ über dem beliebigen kommutativen Körper $F$, dessen Charakteristik $p > 0$ ein Teiler der Ordnung von $G$ ist. Ist $N$ ein $p'$-Normalteiler von $G$, so ist bekanntlich $F(G/N) \cong fFG$, wobei

$$f = \frac{1}{|N|} \sum_{x \in N} x$$

ist (vgl. [6]). Der Isomorphismus $\pi$ wird induziert durch den natürlichen Homomorphismus von $G$ auf $G/N$.

In dieser Arbeit wird zunächst gezeigt, in welcher Beziehung die Defektgruppen der durch $\pi$ einander zugeordneten Konjugiertenklassen bzw. Blockidempotenten zueinander stehen (Lemma 2). Da die Blockideale von $FG$, die in $fFG$ liegen, gerade diejenigen sind, deren Kern $K(B)$ den Normalteiler $N$ enthält (Lemma 3), kann mit Hilfe von Lemma 2 das Hauptresultat dieser Arbeit, die folgende Erweiterung des 1. Hauptsatzes über Blöcke von R. Brauer (vgl. [5]) bewiesen werden:

**Satz.** *Sei $N$ ein $p'$-Normalteiler von $G$,*

$$f = \frac{1}{|N|} \sum_{x \in N} x,$$

*$D$ eine $p$-Untergruppe von $G$, $\sigma_D$ bzw. $\sigma_{\bar{D}}$ der Brauer-Homomorphismus bezüglich $D$ bzw. $\bar{D} = DN/N$ und $\pi$ bzw. $\pi_D$ der natürliche Isomorphismus von $fFG$ auf $F(G/N)$ bzw. von $\sigma_D(f)FN_G(D)$ auf $F(N_G(D)N/N)$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} Z(fFG) & \xrightarrow[\sigma_D]{} & Z(\sigma_D(f)FN_G(D)) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_D} \\ Z(F(G/N)) & \xrightarrow[\sigma_{\bar{D}}]{} & Z(F(N_G(D)N/N)) \end{array}$$

*Dabei vermittelt der $F$-Algebrahomomorphismus $\beta = \beta(D, N) = \pi_D \sigma_D = \sigma_{\bar{D}} \pi$ eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Blöcken $B \leftrightarrow e \leftrightarrow \lambda$ von $FG$ mit Defektgruppe $D$ und Kern $K(B) \geqq N$ und den Blöcken $b \leftrightarrow \varepsilon \leftrightarrow \mu$ von $F(N_G(D)N/N)$ mit Defektgruppe $DN/N$.*

Als weitere Anwendung von Lemma 2 und Lemma 3 ergibt sich:

**Korollar 1.** *Sei $B \leftrightarrow e \leftrightarrow \lambda$ ein Block der Gruppenalgebra $FG$ mit Defektgruppe $D$ und Kern $K(B)$. Ist $N$ der maximale $p'$-Normalteiler von $K(B)$, dann gilt: $K(B)/N$ ist der normale Kern von $ND/N$ in $G/N$.*

Bezüglich der Terminologie wird auf [2] verwiesen. Dem Beweis des Satzes stellen wir Bezeichnungen und Hilfssätze voran:

$N$ ist stets ein $p'$-Normalteiler von $G$ und $\bar{G} = G/N$. $c$ bzw. $k$ sind die Klassensummen der Konjugiertenklassen $C$ bzw. $K$ von $G$ bzw. $\bar{G}$. Ist $D$ eine $p$-Untergruppe von $G$, so ist $I_D$ (bzw. $\hat{I}_D$) der $F$-Unterraum des Zentrums $ZFG$ von $FG$, der aufgespannt wird von denjenigen Klassensummen von Konjugiertenklassen von $FG$, deren Defektgruppen konjugiert sind zu Untergruppen (bzw. echten Untergruppen) von $D$. $I_D$ und $\hat{I}_D$ sind Ideale von $ZFG$ und das Blockidempotent $e$ besitzt genau dann $D$ als Defektgruppe, wenn $e \in I_D$ und $e \notin \hat{I}_D$ ist ([2] 3.9). $K(B)$ ist der Kern des Blocks $B \leftrightarrow e \leftrightarrow \lambda$, d.h. der Durchschnitt der Kerne der irreduziblen Darstellungen von $G$, die zum Block $B \leftrightarrow e \leftrightarrow \lambda$ gehören. Ist $x \in FG$, so ist $k_g(x)$ der Koeffizient von $g$ in der Darstellung

$$x = \sum_{g \in G} k_g(x)\, g \quad \text{und} \quad \mathrm{Tr}(x) = \{g \in G \mid k_g(x) \neq 0\}.$$

Mit $C_G(X)$ bzw. $N_G(X)$ wird der Zentralisator bzw. der Normalisator der Teilmenge $X$ von $G$ in $G$ bezeichnet und mit $O_{p'}(G)$ der maximale $p'$-Normalteiler von $G$.

**Lemma 1.** *Sei $C$ eine Konjugiertenklasse von $G$ und $c$ ihre Klassensumme. Dann sind äquivalent:*

(1) $fc \neq 0$.

(2) $\pi(fc) \neq 0$.

(3) *Ist $D$ eine Defektgruppe von $C$, so ist $\bar{D} = DN/N$ eine Defektgruppe von $\bar{C}$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar, da $\pi$ Isomorphismus ist.
(2) $\Leftrightarrow$ (3): Ist $K = \bar{C}$, so ist (vgl. [2] 4.4) $\pi(fc) = nk$ mit

$$n = \frac{|G : C_G(x)|}{|\bar{G} : C_{\bar{G}}(\bar{x})|} = |N| \, \frac{|C_{\bar{G}}(\bar{x})|}{|C_G(x)|} \quad \text{für} \quad x \in C.$$

Ist $D$ eine $p$-Sylowgruppe von $C_G(x)$, so ist $\bar{D} = DN/N \leqq C_{\bar{G}}(\bar{x})$. Daher gilt:

$$n \neq 0 \;\Leftrightarrow\; p \nmid n \;\Leftrightarrow\; \bar{D} \text{ ist } p\text{-Sylowgruppe von } C_{\bar{G}}(\bar{x}).$$

Also gilt die Behauptung.

**Definition.** Sei $N$ ein $p'$-Normalteiler von $G$ und $M$ die Menge derjenigen Konjugiertenklassen $C$ von $G$, für die gilt: $fc \neq 0$. Auf $M$ wird die *$N$-Äquivalenzrelation* erklärt durch: $C_i \sim C_j \Leftrightarrow \bar{C}_i = \bar{C}_j$. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen *$N$-Äquivalenzklassen von $G$* und werden mit $K_N(C_i)$ bezeichnet.

Der nächste Hilfssatz ist eine direkte Folgerung aus Lemma 1:

**Lemma 2.** *Sei $N$ ein $p'$-Normalteiler von $G$ und $\pi$ der natürliche Isomorphismus von $fFG$ auf $F(G/N)$. Dann gilt:*

a) *$\pi$ induziert eine eineindeutige Abbildung zwischen den Konjugiertenklassen von $G/N$ und den $N$-Äquivalenzklassen von $G$. Die Klasse $K$ von $G/N$ besitzt genau dann*

*Defektgruppe $DN/N$, wenn jeder Vertreter der zugehörigen $N$-Äquivalenzklasse Defektgruppe $D$ besitzt.*

b) *$\pi$ induziert eine eineindeutige Abbildung zwischen den Blockidempotenten aus $fFG$ mit Defektgruppe $D$ und den Blockidempotenten von $F\bar{G}$ mit Defektgruppe $\bar{D}$.*

**Lemma 3.** *Sei $B \leftrightarrow e \leftrightarrow \lambda$ ein Block der Gruppenalgebra $FG$ mit Kern $K(B)$ und $N$ ein $p'$-Normalteiler von $G$. Dann sind äquivalent:*

(1) $N \leqq K(B)$.

(2) $B = fB$ *ist ein Blockideal von* $fFG$.

Der Beweis folgt aus ([3] Lemma 2).

Als erste Folgerung ergibt sich nun:

**Korollar 1.** *Sei $B \leftrightarrow e \leftrightarrow \lambda$ ein Block der Gruppenalgebra $FG$ mit Defektgruppe $D$ und Kern $K(B)$. Ist $N$ der maximale $p'$-Normalteiler von $K(B)$, dann gilt: $K(B)/N$ ist der normale Kern von $ND/N$ in $G/N$.*

Beweis. $P/N$ sei der normale Kern von $ND/N$ in $G/N$. Nach Lemma 3 ist $e \in fFG$. Ist $\pi$ der natürliche Isomorphismus von $fFG$ auf $F(G/N)$, so ist $ND/N$ nach Lemma 2 Defektgruppe von $\pi(e)$. Da aber $K(B)/N$ ein $p$-Normalteiler von $G/N$ ist ([3] Theorem 1), folgt mit ([2] 4.7) $K(B)/N \leqq ND/N$. Andererseits ist nach dem Satz von Dickson (vgl. [2] 4.3) $P \leqq K(B)$. Also gilt die Behauptung.

Bevor eine weitere Anwendung von Lemma 2 bewiesen werden kann, zitieren wir der Vollständigkeit halber das folgende gruppentheoretische Lemma:

**Lemma 4** ([4], S. 79). *Sei $N$ ein $p'$-Normalteiler von $G$ und $D$ eine $p$-Untergruppe von $G$. Dann gilt:*

a) $N_G(D)N/N = N_{G/N}(DN/N)$,

b) $C_G(D)N/N = C_{G/N}(DN/N)$.

**Korollar 2.** *Sei $N$ ein $p'$-Normalteiler von $G$, $D$ eine $p$-Untergruppe von $G$ und*

$$\sigma_{\bar{D}}\colon ZF\bar{G} \to ZFN_{\bar{G}}(\bar{D}) = ZF\overline{N_G(D)}$$

*der Brauer-Homomorphismus bezüglich $\bar{D}$. Dann gilt:*

a) *Ist $C$ eine Konjugiertenklasse von $G$ mit Defektgruppe $D$ und $fc \neq 0$, so ist $\mathrm{Tr}(\sigma_{\bar{D}}\pi(fc)) = L$, wobei $L$ eine einzige Konjugiertenklasse von $\overline{N_G(D)}$ mit Defektgruppe $\bar{D}$ ist.*

b) *Ist $L$ eine Konjugiertenklasse von $\overline{N_G(D)}$ mit Defektgruppe $\bar{D}$, so existiert genau eine $N$-Äquivalenzklasse $K_N(C)$ von $G$ mit der Eigenschaft: $D$ ist Defektgruppe aller Klassen aus $K_N(C)$ und $\mathrm{Tr}(\sigma_{\bar{D}}\pi(fc)) = L$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\pi(fc) = rk$, wobei $r \neq 0$ und $K = \bar{C}$ ist. Außerdem ist nach Lemma 2 $\bar{D}$ Defektgruppe von $K$. Da nach Lemma 4 $N_{\bar{G}}(\bar{D}) = \overline{N_G(D)}$ ist, folgt mit ([2] Lemma 4.8) die Behauptung a).

Da $\bar{D}$ Defektgruppe von $L$ ist, existiert nach ([2] 4.8) genau eine Konjugiertenklasse $K$ von $\bar{G}$ mit $\sigma_{\bar{D}}(k) = 1$. Daher gilt nach Lemma 2 die Behauptung b).

Den Beweis des Hauptsatzes stützen wir noch auf folgende Hilfssätze:

**Lemma 5.** *Ist $a \in fFG$, dann gilt:*

a) $g \in \mathrm{Tr}(a) \Rightarrow gn \in \mathrm{Tr}(a)$ *für alle* $n \in N$,

b) $g \in \mathrm{Tr}(a) \Rightarrow \bar{g} \in \mathrm{Tr}(\pi(a))$ *und* $k_{\bar{g}}(\pi(a)) = |N| k_g(a)$.

Der Beweis folgt aus einer einfachen Rechnung.

**Lemma 6.** *Sei $N$ ein $p'$-Normalteiler von $G$,*

$$f = \frac{1}{|N|} \sum_{x \in N} x,$$

*$D$ eine $p$-Untergruppe von $G$ und $\sigma_D$ der Brauer-Homomorphismus bezüglich $D$. Dann gilt für jede Untergruppe $H$ von $G$ mit $C_G(D) \leqq H \leqq N_G(D)$:*

$$\sigma_D(f) = \frac{1}{|N \cap H|} \sum_{x \in N \cap H} x.$$

Beweis. Nach Definition von $\sigma_D$ ist $\sigma_D(f) = \frac{1}{|N|} \sum_{x \in N \cap C_G(D)} x$. Nun ist aber:

$$N \cap N_G(D) \leqq O_{p'}(N_G(D)) \leqq C_{N_G(D)}(D) \leq C_G(D),$$

also $N \cap N_G(D) = N \cap C_G(D) = N \cap H$. Da $\sigma_D$ ein Algebrahomomorphismus von $ZFG$ in $ZFH$ ist, ist $\sigma_D(f)$ Idempotent von $ZFH$. Also gilt:

$$\frac{1}{|N|} \sum_{x \in N \cap H} x = \sigma_D(f) = \sigma_D(f)^2 = \frac{|N \cap H|}{|N|^2} \sum_{x \in N \cap H} x.$$

Daher ist $|N| = |N \cap H| \bmod p$, und es gilt die Behauptung.

Bezeichnung. Mit $\pi_D$ wird von nun an der nach Lemma 6 existierende Isomorphismus von $\sigma_D(f)FH$ auf $F(HN/N)$ bezeichnet.

**Lemma 7.** *Ist $C$ eine Konjugiertenklasse von $G$ mit $fc \neq 0$, so gilt:*

$$\mathrm{Tr}(\sigma_{\bar{D}} \pi(fc)) = \mathrm{Tr}(\pi_D \sigma_D(fc)).$$

Beweis. Ist $\bar{x} \in \mathrm{Tr}(\sigma_{\bar{D}} \pi(fc))$, dann folgt aus Lemma 4b):

$$\bar{x} \in \mathrm{Tr}(\pi(fc)) \cap \overline{C_G(D)}.$$

Also ist $\bar{x} = \bar{g}$ für ein $g \in \mathrm{Tr}(fc)$ und $\bar{x} = \bar{h}$ für ein $h \in C_G(D)$. Wir erhalten: $h = g^n$ für ein $n \in N$ und $h \in \mathrm{Tr}(fc) \cap C_G(D)$ nach Lemma 5a). Da nach Definition von $\sigma_D$ $\mathrm{Tr}(fc) \cap C_G(D) = \mathrm{Tr}(\sigma_D(fc))$ ist, ist $h \in \mathrm{Tr}(\sigma_D(fc))$. Nach Lemma 6 kann Lemma 5 auf $\sigma_D(f)FN_G(D)$ angewendet werden, und daher ist $\bar{h} = \bar{x} \in \mathrm{Tr}(\pi_D \sigma_D(fc))$.

Ist andererseits $\bar{y} \in \mathrm{Tr}(\pi_D \sigma_D(fc))$, so ist $\bar{y} = \bar{g}_0$ für ein

$$g_0 \in \mathrm{Tr}(\pi(fc)) = \mathrm{Tr}(fc) \cap C_G(D).$$

Also ist nach Lemma 5b) und Lemma 4

$$\bar{y} = \bar{g}_0 \in \mathrm{Tr}(\pi(fc)) \cap \overline{C_G(D)} = \mathrm{Tr}(\pi(fc)) \cap C_{\bar{G}}(\bar{D})$$

und folglich: $\bar{y} \in \mathrm{Tr}(\sigma_{\bar{D}} \pi(fc))$.

Beweis des Hauptsatzes. Daß das angegebene Diagramm kommutativ ist, sieht man wie folgt: Nach Lemma 7 ist $\mathrm{Tr}(\sigma_{\overline{D}}\pi(fc)) = \mathrm{Tr}(\pi_D\sigma_D(fc))$, wenn $C$ eine Konjugiertenklasse von $G$ ist mit $fc \neq 0$. Daher braucht nur noch gezeigt werden: Ist $g \in \mathrm{Tr}(fc)$ mit $\bar{g} \in \mathrm{Tr}(\sigma_{\overline{D}}\pi(fc))$, dann ist $k_{\bar{g}}(\sigma_{\overline{D}}\pi(fc)) = k_{\bar{g}}(\pi_D\sigma_D(fc))$. Da $\sigma_D$ bzw. $\sigma_{\overline{D}}$ den Koeffizienten von $g$ bzw. $\bar{g}$ nicht verändert, folgt diese Behauptung aus Lemma 5b) und der Tatsache, daß $|N| = |N \cap N_G(D)| \bmod p$ ist. Der Rest der Behauptung folgt aus dem 1. Hauptsatz über Blöcke (vgl. [5]) und Lemma 3.

**Bemerkung.** Ein einfaches Korollar von Lemma 2 und Lemma 3 ist folgendes Ergebnis von Feit (vgl. [1], Kap. V, 4.3, S. 276), bei dessen Beweis Methoden der Vertextheorie und der Charaktertheorie verwendet werden:

„$K$ sei ein $p'$-Normalteiler von $G$. $B_1, \ldots, B_m$ seien alle Blöcke von $G$, deren Kern $K$ enthält, und $D_j$ sei Defektgruppe von $B_j$ für $j = 1, 2, \ldots, m$. $B_1^0, \ldots, B_n^0$ seien alle Blöcke von $G^0 = G/K$. Dann ist $m = n$ und nach geeigneter Umnumerierung $B_j = B_j^0$ für alle $j$. Weiterhin ist $D_j^0 = D_jK/K$ Defektgruppe von $B_j^0$."

Herrn G. Michler danke ich für die Anregung dieser Arbeit und seine Ratschläge während ihrer Entstehung.

## Literaturverzeichnis

[1] W. Feit, Modular representation theory. Lecture Notes Yale University, New Haven 1972.
[2] G. Michler, Blocks and centers of group algebras. In: Lectures on rings and modules. Lect. Notes Math. **246**, 430–552. Berlin-Heidelberg-New York 1972.
[3] G. Michler, The kernel of a block of a group algebra. Proc. Amer. Math. Soc. **37**, 47–49 (1973).
[4] M. B. Powell and G. Higman, Finite simple groups. London-New York 1971.
[5] A. Rosenberg, Blocks and centres of group algebras. Math. Z. **76**, 209–216 (1961).
[6] D. A. R. Wallace, Lower bounds for the radical of the group algebra of a finite $p$-soluble group. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **16**, 127–134 (1968).

Eingegangen am 3. 4. 1974

Anschrift des Autors:

H. Spiegel
Pädagogische Hochschule
D-7410 Reutlingen
Am Hohbuch