Hartmut Spiegel

Quadromino im Mathematikunterricht I[1]

1. Einleitung

Quadrominosteine sind quadratische Pappstücke, die auf einer Seite durch Einzeichnen der beiden Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt sind. Jedes dieser Dreiecke ist mit einer der Farben blau, gelb, rot gefärbt. Ein vollständiger Satz Quadrominosteine besteht aus allen verschiedenen Plättchen, die man auf diese Weise herstellen kann. Als verschieden sind solche Plättchen zu betrachten, die man nicht so aufeinanderlegen kann (Farbseite nach oben), daß übereinanderliegende Dreiecke dieselbe Farbe besitzen.

Sicherlich fällt Ihnen angesichts der Quadrominosteine das Stichwort „strukturiertes Material" ein, und der eine oder andere mag denken: „also schon wieder eine neue Art Logische Blöcke". Quadrominosteine (im folgenden abgekürzt QS) unterscheiden sich jedoch von allen herkömmlichen strukturierten Materialien in folgender Hinsicht: Ob man das matema-Begriffsspiel, Logische Blöcke, Legotürme etc. nimmt, alle diese Materialien besitzen eine Komponentenstruktur, d. h. sie lassen sich als kartesisches Produkt von Mengen, deren Elemente bestimmte Merkmalsausprägungen sind, beschreiben.

Die Menge der QS besitzt nicht diese Struktur. (Sie ist nicht unstrukturiert, sondern läßt sich mathematisch als vollständiges Repräsentantensystem zu einer Äquivalenzrelation auf dem vierfachen kartesischen Produkt einer Menge von drei Farben beschreiben.) Die bloße Feststellung dieses Unterschiedes zu den üblicherweise verwendeten Materialien ist natürlich keine ausreichende Begründung für den Vorschlag, QS im Mathematikunterricht zu verwenden. Ich hoffe aber, daß aus meinen weiteren Ausführungen – insbesondere aus den konkreten Arbeitsvorschlägen – deutlich wird, daß dieses Material eine sinnvolle Erweiterung des bisherigen Angebots darstellt und neue Möglichkeiten zum Erreichen allgemeiner mathematischer Lernziele erschließt.

Was mit allgemeinen mathematischen Lernzielen gemeint ist, soll im folgenden kurz erläutert werden. Es gibt verschiedene Versuche, sich eine Übersicht über allgemeine mathematische Lernziele zu verschaffen. Ich beziehe mich auf den Vorschlag von Heinrich Winter [5] und möchte Ihnen seine Zusammenstellung kurz in Erinnerung bringen:

a) anzustrebende Haltungen

1. Lernziel: Dialogfähigkeit und Dialogwilligkeit (Fähigkeit, vernünftig zu reden).
2. Lernziel: Der Schüler muß lernen, neue Situationen zu erzeugen und mit neuen Situationen fertig zu werden.
3. Lernziel: Der Schüler soll lernen, wie man eine inner- oder außermathematische Situation mit mathematischen Mitteln ordnen kann.

[1] Vortrag Berlin 13.3.1974

b) anzustrebende intellektuelle Grundfertigkeiten

4. Lernziel: Der Schüler kann klassifizieren.
5. Lernziel: Der Schüler kann ordnen.
6. Lernziel: Der Schüler kann „analogisieren“.
7. Lernziel: Der Schüler kann „generalisieren“.
8. Lernziel: Der Schüler kann „formalisieren“.

Als Ergänzung dieser Aufzählung möchte ich noch zwei mir wichtig erscheinende Lernziele aus dem affektiven Bereich nennen, die den Fernbriefen zur Weiterbildung der Grundschullehrer, Klett-Verlag, Stuttgart [3] entnommen sind:

I. Mut zum Nachdenken haben, auch wenn kein Lösungsweg in Sicht ist.

II. Die Freude spüren, die aus dem Entdecken von Sachverhalten und Zusammenhängen kommt.

Winter schreibt bezüglich seines Lernziels Nr. 2: „Es gibt offensichtlich keinen Lehr-Algorithmus, dessen Anwendung garantiert, daß die Schüler neue Situationen produzieren, und auch keinen zum Lehren des Problemlösens. Aber es gibt didaktische Maßnahmen, die die angestrebte heuristische Haltung fördern können“ ([5, S. 75]).

Ähnliches gilt auch für die anderen Lernziele. Die im folgenden vorgetragenen Vorschläge zur Arbeit mit Quadrominosteinen im Mathematikunterricht halte ich für didaktische Maßnahmen, die sich zur Förderung vieler der genannten Lernziele eignen.

2. Mathematische Aktivitäten mit Quadrominosteinen

2.1. Herstellung aller verschiedenen QS und Diskussion über die Vollständigkeit

Man sollte Kinder nicht um wichtige Lernerfahrungen bringen, indem man ihnen die QS vorfabriziert vorsetzt. Man braucht nur Pappe und Farbstifte, um sie selbst herzustellen, so daß der materielle Aufwand im Vergleich zu anderen strukturierten Materialien sehr gering ist – ein nicht zu unterschätzender Faktor für die Schule. Zeigt man Kindern ein paar Beispiele für Quadrominosteine, so erkennen sie unschwer das gemeinsame Konstruktionsprinzip. Zwei Aufgaben stellen sich für die Kinder sofort: Die Suche nach möglichst viel verschiedenen QS und die Suche nach einer Begründung dafür, daß es außer den gefundenen keine weiteren mehr gibt. Diese Aktivitäten führen zu der Erfahrung, daß es nützlich ist, systematisch vorzugehen, wobei systematisches Vorgehen in diesem Fall in durchaus unterschiedlichen mathematischen Tätigkeiten bestehen kann:

I. In einer bestimmten Reihenfolge vorgehen, d. h. ordnen, also z. B. in dieser Reihenfolge:

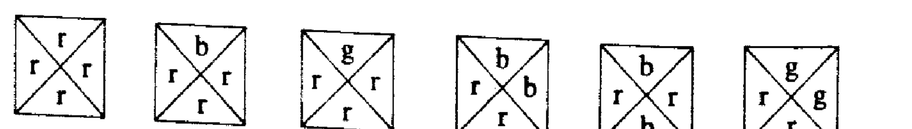


Fig. 1

II. Ein System disjunkter Teilmengen herstellen, die aber alle Möglichkeiten umfassen, d. h. klassifizieren, also z. B.

(i) einfarbige, zweifarbige, dreifarbige, oder

(ii) ohne rot, ein Viertel rot, die Hälfte rot, mehr als die Hälfte rot, oder

(iii) Verwendung geometrisch-topologischer Kriterien (Größe und Anzahl der „Zusammenhangskomponenten").

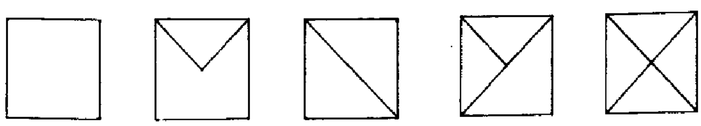


Fig. 2

Die Kinder können dabei die Erfahrung machen, daß die Klassifizierung nicht nur eine Möglichkeit ist, sich Übersicht über eine gegebene Menge zu verschaffen, sondern auch als Hilfe für die Erfindung neuer Objekte brauchbar ist.

III. Eine andere Möglichkeit, zu schon gefundenen Steinen neue zu finden, ist, sie durch Permutationen der Farben zu verwandeln.

Beispiel:

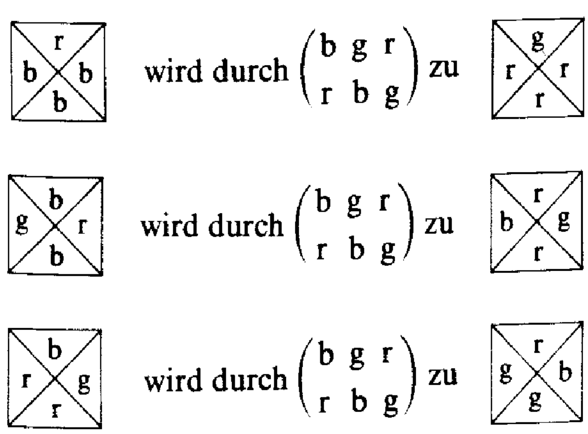


Fig. 3

Sie sehen hier, daß die Gruppe der Permutationen der Farben blau, gelb, rot als Gruppe von Operatoren auf der Menge der QS interpretiert werden kann, eine Tatsache, die zu einem eigenen Problemkreis mit reizvollen Fragestellungen führt, auf den ich später noch eingehe.

Ich halte es für sinnvoll, im Unterricht die Aufgabenstellung, alle verschiedenen QS herzustellen, jeweils an Gruppen von 3–6 Kindern zu vergeben, da die Notwendigkeit, sinnvolle Arbeitsteilung vorzunehmen bzw. die Arbeit zu koordinieren, auch die Kommunikation der Kinder über die Sache fördert und für das Erreichen sozialer Lernziele günstig ist. Dem Herstellungsprozeß in Form von Ausmalen der Quadrate sollte noch – was nicht nur für Grundschüler eine Hilfe darstellt – eine Probier- und Konstruktionsphase auf der enaktiven Repräsentationsebene vorausgehen, während der die QS aus farbigen Pappdreiecken zusammengesetzt werden.

Im Unterricht stellten 5 Kinder auf diese Weise in 15 Minuten 22 verschiedene QS her (der beobachtete Durchschnitt liegt bei 16 (4. bzw. 5. Schuljahr)). Am häufigsten werden – erfahrungs- und erwartungsgemäß – diejenigen vergessen, die sich von schon gefundenen nur in der Orientierung unterscheiden. Bei der anschließenden Diskussion darüber, wie man einsehen könne, daß man alle QS gefunden habe, begannen die Kinder mit den einfarbigen, aus denen sie dann durch „Wegnehmen von Dreiecken“ und „Ergänzen der Lücke durch andere“ – also eine starke Bindung an den Herstellungsprozeß – schließlich alle zweifarbigen und dann alle dreifarbigen gewannen.

2.2. Phase des Kennenlernens

Bevor man die Kinder zur Untersuchung spezieller Probleme anregt, sollte man ihnen Gelegenheit geben, sich mit dem Material vertraut zu machen. Dazu eignen sich freies Spiel bzw. Einzel- oder Gruppenspiel nach vorgeschlagenen oder von den Kindern selbst festzulegenden Regeln. Will man später mit Arbeitsblättern arbeiten, ist es nützlich eine einfache Kennzeichnung der QS zu vereinbaren, indem man sie beispielsweise auf diese Art durchnumeriert:

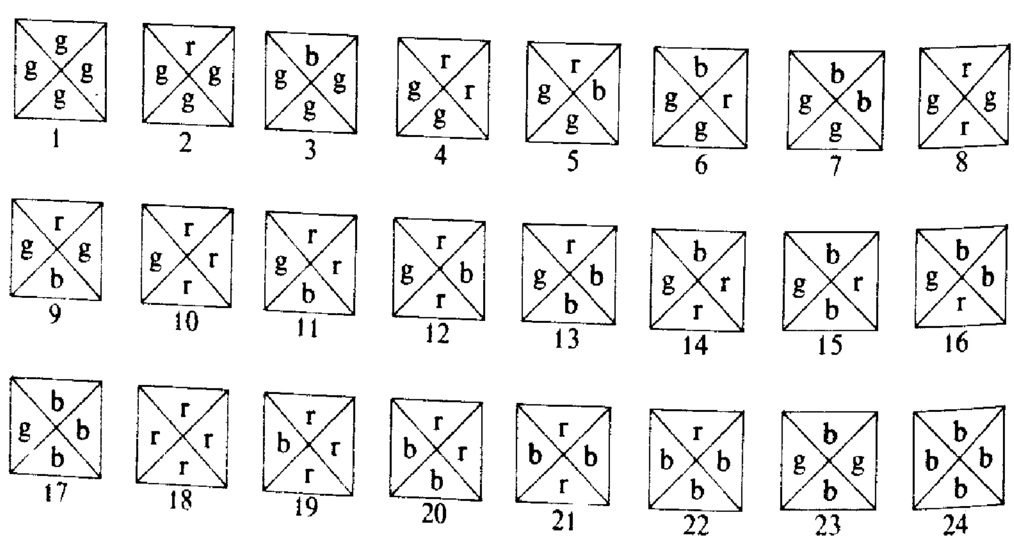


Fig. 4

Dieser Numerierung liegt zwar ein System zugrunde, aber sie nimmt z. B. keine der naheliegenden Ordnungsmöglichkeiten oder Klassifizierungen vorweg. Mit Hilfe dieses „Nummernblattes“ lassen sich dann Identifizierungsübungen durchführen: Man präsentiert (Arbeitsblatt oder Tuchtafel) QS in einer anderen Lage als sie auf dem Nummernblatt eingezeichnet sind und fragt nach ihrer Nummer. Eine Umkehrung dieser Aufgabenstellung ist die folgende Aufgabe.

Aufgabe: Unter jedem Quadrat steht die Nummer des Steins, den du malen sollst. Die Dreiecke mit dem Punkt sollen blau werden.

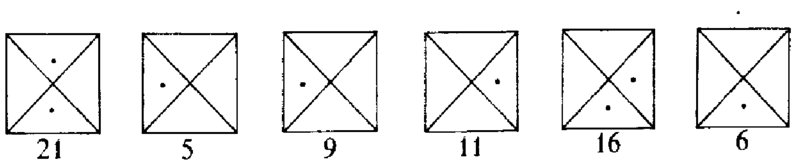


Fig. 5

Ein Beispiel für eine weitere mögliche Aktivität ist, die Kinder Gesetzmäßigkeiten in dieser Figur entdecken und erklären zu lassen.

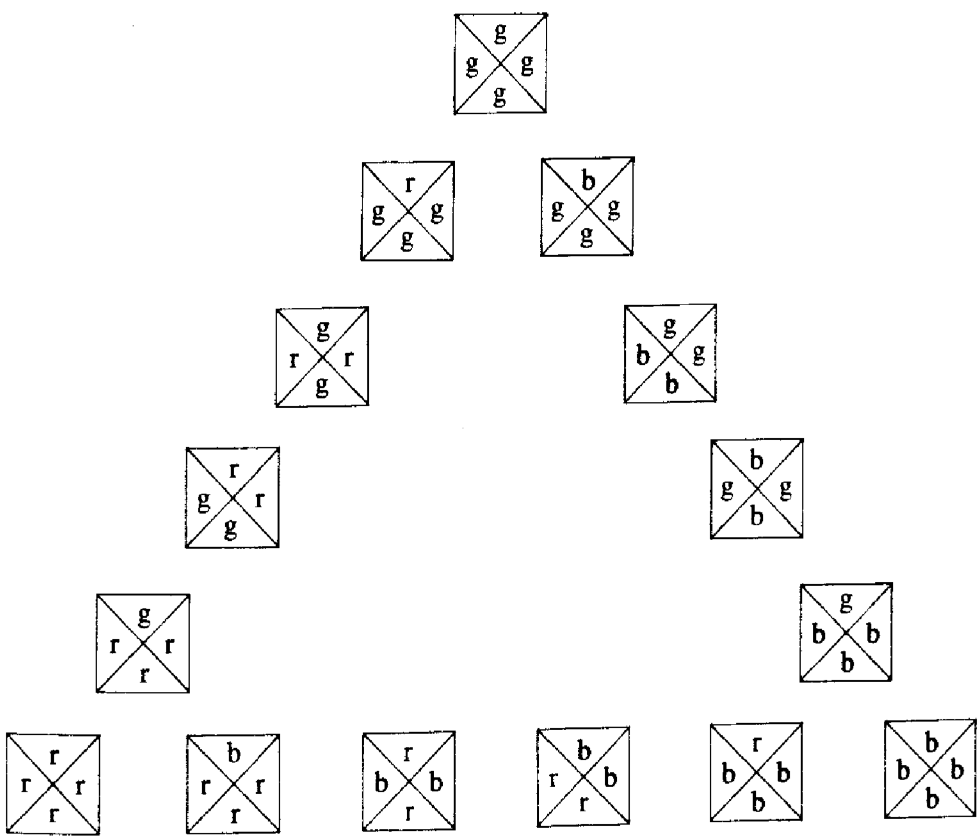


Fig. 6

2.3. Eigenschaften von Quadrominosteinen und Klassifizierungen

Das Lernziel: „Der Schüler kann klassifizieren“ umfaßt zunächst die spezielle Komponente: „Eine gegebene Menge nach vorgegebenen oder selbst erfundenen Kriterien klassifizieren können“. Daß die QS hierzu reichhaltige Möglichkeiten bieten, ist offensichtlich, z. B.: Farbanteil bestimmter Farben, Farbverhältnis, Symmetrieeigenschaften, geometrische oder topologische Eigenschaften, Anzahl der vorkommenden Farben etc. Eine ebenso wichtige Komponente scheint mir die Umkehrung zu sein: „Der Schüler kann zu einem vorgegebenen Teilmengensystem entscheiden, ob es sich um eine Klassifizierung handelt, und diese Entscheidung begründen.“

Im Unterricht entdeckten die Kinder bei der Diskussion über zweckmäßige Schubladensortierungen selbst die wesentlichen Eigenschaften einer Klassifizierung:

a) Vollständigkeit („für jeden Stein muß eine Schublade da sein").
b) Eindeutigkeit („kein Stein darf in zwei Schubladen passen") und untersuchten dann (mit unterschiedlich anspruchsvollen Strategien) vorgegebene Schubladensortierungen auf diese Eigenschaften. Es gibt vier Variationen, je nachdem, ob beide Eigenschaften erfüllt, nicht erfüllt, bzw. nur eine nicht erfüllt ist.

Beispiele:
Schublade 1: Steine, bei denen es mindestens 2 gegenüberliegende Dreiecke mit gleicher Farbe gibt
Schublade 2: Steine, bei denen Dreiecke, die gegenüberliegen, nicht die gleiche Farbe haben

Schublade 1: Steine ohne blaue Dreiecke
Schublade 2: Steine ohne gelbe Dreiecke
Schublade 3: Steine ohne rote Dreiecke

Schublade 1: Steine mit höchstens einem blauen Dreieck
Schublade 2: Steine mit höchstens einem gelben Dreieck
Schublade 3: Steine mit höchstens einem roten Dreieck

Schublade 1: Steine mit genau einem roten und genau einem blauen Dreieck
Schublade 2: Steine mit genau einem blauen und genau einem gelben Dreieck
Schublade 3: Steine mit genau einem gelben und genau einem roten Dreieck.

Bevor man Probleme dieser Art stellt, muß man natürlich sicher sein, daß die sprachliche Beschreibung der Eigenschaften klar erfaßt wird (z. B. traten Schwierigkeiten bei den Begriffen „mindestens", „höchstens" auf). Als Übung dafür habe ich im Unterricht Arbeitsblätter verwendet, die in dieser Form allgemein bekannt sind: In einer Art Koordinatensystem sind auf dem einen Eingang die Eigenschaften eingetragen, auf dem anderen Eingang sind QS gezeichnet. Zu jedem Stein sollen dann die Eigenschaften angekreuzt werden, die er besitzt. Bei den gewählten Eigenschaften kommt bei der Entscheidung über das Setzen der Kreuze auch die Problematik der Verneinung von All- bzw. Existenzaussagen ins Spiel (Fig. 7, s. S. 145).

Kehrt man die Aufgabenstellung um, so müssen zu ausgefüllten Spalten ein oder mehrere passende Steine selbst gefunden oder aus einer vorgegebenen Auswahl richtig eingeordnet werden (Fig. 7).

Diese Aufgabenstellung läßt Strategien von unterschiedlichem Anspruchsniveau zu.

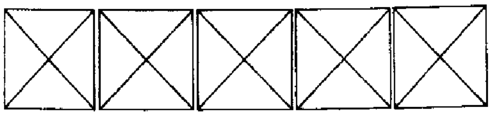
Am Rande sei vermerkt, daß man in diesem Zusammenhang noch solche Untersuchungsaufträge vergeben kann wie:

a) Welche der Eigenschaften haben andere zur Folge?

b) Welche Eigenschaften haben zur Folge, daß eine andere nicht gilt?

c) Gibt es Steine, die keine (alle) dieser Eigenschaften haben?

d) Kannst du ein System von Eigenschaften angeben, welches eine eindeutige Kennzeichnung ergibt? Wieviel Eigenschaften braucht man mindestens dafür?



1 6 11 16 20

	?	?	?	?	?
mindestens zwei Dreiecke sind rot	×	–	×	–	–
Hat genau ein rotes und genau ein blaues Dreieck	–	×	–	–	–
höchstens zwei Dreiecke sind blau	×	×	×	×	×
jedes Dreieck hat eine andere Farbe als das gegenüberliegende	×	×	×	×	–
höchstens drei Dreiecke sind gelb	×	×	×	×	–
mindestens ein Dreieck ist rot	×	×	×	×	–
Es gibt mindestens zwei gegenüberliegende Dreiecke mit der gleichen Farbe	–	–	–	–	×
jedes Dreieck hat mindestens ein Nachbardreieck mit der gleichen Farbe	–	–	×	–	×
mindestens ein Dreieck ist rot und höchstens zwei blau	×	×	×	×	–

Fig. 7

2.4. Ordnungsrelationen

Die Frage, ob man mit QS auch Skat spielen kann, führt auf das Problem, ob man in geeigneter Weise auf der Menge der QS eine Ordnungsrelation („ist mehr wert als") erklären kann. Eine Möglichkeit ist, die durch die Anordnung ‚blau vor gelb vor rot' induzierte Ordnung zu nehmen, d. h. welcher Stein mehr wert ist, darüber entscheidet zunächst die Zahl der blauen Dreiecke, bei Gleichheit die der gelben, etc.

Das größte Element in dieser Ordnung ist (vgl. die Nummern in Fig. 4) Nr. 24 und die nächstkleineren sind Nr. 17, Nr. 22. Vorgänger von Nr. 22 sind Nr. 7 und Nr. 23, deren Vorgänger wiederum Nr. 13, Nr. 15 und Nr. 16 sind.

(Die Ordnung ist nicht lexikographisch, aber sie wird durch eine lexikographische erzeugt: Bildet man die QS auf Zahlentripel so ab, daß in der ersten Komponente die Zahl der blauen Dreiecke, in der zweiten die Zahl der gelben Dreiecke und in der dritten die Zahl der roten Dreiecke steht, dann wird der Vergleich zweier QS zurückgeführt auf den Vergleich ihrer Bilder unter dieser Figur bezüglich der bei den Tripeln erklärten lexikographischen Ordnung.)

Da sich die drei Farben auf sechs verschiedene Arten anordnen lassen, gibt es sechs solcher Ordnungen der QS. Diese Ordnungsrelationen sind nicht linear, denn es gibt verschiedene Steine mit gleichem Farbanteil von jeder Farbe. Weiterhin ist anzumerken, daß die zu dem genannten Beispiel inverse Ordnung nicht etwa die ist, die von der Ordnung ‚rot vor gelb vor blau' erzeugt wird.

Eine andere Möglichkeit, die QS zu ordnen, ist, den Teildreiecken verschiedener Farbe verschiedene Punktwerte zuzuordnen. Der Wert eines QS ist dann die Summe der Punktwerte seiner Teildreiecke, und geordnet wird nach dem Wert. Zu diesen Ordnungsrelationen gibt es interessante Problemstellungen arithmetischer Natur. Beispiele dafür sind die folgenden Aufgaben:

a) Stein Nr. 17 ist 10 Punkte wert. Welche Punktwerte kann dann gelb haben?

b) Stein Nr. 9 ist 10 Punkte wert. Welche Punktwerte können dann rot, blau, gelb haben? (Es gibt viele Möglichkeiten!)

c) Stein Nr. 11 und Stein Nr. 2 sind gleichviel wert. Gelb ist 3 Punkte wert und blau 4 Punkte. Wieviel Punkte ist rot wert?

d) Stein Nr. 23 ist 8 Punkte wert, und Stein Nr. 4 ist 12 Punkte wert. Wieviel Punkte ist dann gelb wert?

e) Stein Nr. 24 ist genausoviel wert wie Stein Nr. 6. Gelb ist 4 Punkte wert. Wieviel Punkte haben dann blau und rot? (Es gibt mehr als eine Lösung!).

Die Fülle der möglichen Problemstellungen, die es zum Thema Ordnungsrelationen im Unterricht gibt, braucht hier nicht im einzelnen dargestellt zu werden. Ich möchte nur einen Fragenkreis skizzieren, der mir in diesem Zusammenhang besonders interessant erscheint:

Problem: (Es werden nur die Ordnungen betrachtet, die von den Ordnungen der drei Farben erzeugt werden.)

Aus einer oder mehreren Aussagen „q_1 ist mehr wert als q_2" ($q_1 > q_2$) für bestimmte QS soll die zugrunde liegende Ordnung der Farben ermittelt werden.

Diese Aufgabe führt zu folgenden *Fragen:*

Gibt es Aussagen $q_1 > q_2$, die bestimmte Ordnungen eindeutig identifizieren?

Gibt es Aussagen $q_1 > q_2$, die mehr (weniger) Information enthalten als die über die Stellung zweier Farben in der zugrunde liegenden Ordnung?

Ist durch die Zusatzinformation „q_1 ist unmittelbarer Nachbar von q_2" immer eine eindeutige Identifizierung möglich?

Wie kann man durch möglichst wenige Paare (q_1, q_2) eine Ordnung eindeutig identifizieren?

2.5. Farbänderungsoperatoren (Permutationen)

Sie haben vorhin gesehen, wie die sechs Permutationen der Farben blau, gelb, rot in natürlicher Weise als eine Gruppe von Operatoren auf der Menge von QS aufgefaßt werden können, die dann im Unterricht z.B. unter dem Stichwort Farbänderungsmaschinen eingeführt werden können.

In mathematischer und didaktischer Hinsicht sind diese Operatoren wegen folgender Eigenschaften interessant:

a) Es gibt keinen QS, aus dem man durch (ggf. wiederholte) Anwendung aller Operatoren alle QS erzeugen kann. Die Relation „$x R y \Leftrightarrow$ Es gibt einen Operator, der x in y überführt“ führt zu einer Zerlegung der Menge der QS in sechs (nicht gleichmächtige) Äquivalenzklassen. (Übungsaufgabe: Man gebe ein vollständiges Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation an.)

b) Es gibt nichttriviale Operatoren, die Fixpunkte besitzen: Nr. 15 wird von der Permutation $\begin{pmatrix} b & g & r \\ b & r & g \end{pmatrix}$ „festgelassen“.

c) Nicht durch jedes Wertepaar ist der zugehörige Operator eindeutig bestimmt. Beispiel: Nr. 15 wird sowohl durch $\begin{pmatrix} b & g & r \\ r & g & b \end{pmatrix}$ als auch durch $\begin{pmatrix} b & g & r \\ r & b & g \end{pmatrix}$ auf Nr. 12 abgebildet.

(Die Eigenschaften b) und c) sind äquivalent, da es sich um eine Gruppe von Operatoren handelt.)

Ich kann zum Schluß nur noch kurz andeuten, welche Begriffsbildungen durch diese Eigenschaften nahegelegt werden und welche Fragestellungen sich daran anschließen können (hier dargestellt in mathematischer Terminologie, aber auf entsprechende Schulstufen adäquat transformierbar):

Problem: Eine unbekannte Maschine (Operator) soll auf folgende Art identifiziert werden: man gibt einen Stein (oder mehrere nacheinander) ein und stellt fest, in welchen er verwandelt wird.

Begriffe: Steine, die nicht immer einen eindeutigen Schluß zulassen, heißen „schlecht“.

Steine, die nie einen eindeutigen Schluß zulassen, heißen „miserabel“.

Steine, die von einer nichttrivialen Maschine festgelassen werden, heißen „träge“.

Aufgaben: Man finde solche (bzw. alle solchen) Steine und stelle die Beziehung zwischen diesen Begriffen fest.

Man finde zwei schlechte Steine, die – nacheinander eingegeben – eine eindeutige Identifizierung zulassen.

Man finde zwei schlechte Steine, die – nacheinander eingegeben – keine eindeutige Identifizierung zulassen.

(Eine ausführliche Darstellung des Problemkreises Farbänderungsoperatoren bei Quadrominosteinen wird vom Autor an anderer Stelle gegeben. Siehe hierzu auch [6]).

3. Schlußbemerkung

Im Vorangehenden konnte die Vielfalt der didaktischen Einsatzmöglichkeiten der QS (bzw. von entsprechend verallgemeinertem Material: In n ($n > 2$) kongruente Teildreiecke zerlegte n-Ecke mit m verwendeten Farben; z. B. Trimino vgl. [4]) nur angedeutet werden. Folgende Punkte scheinen mir besonders wichtig zu sein:

a) Mit QS lassen sich alle bekannten Problemstellungen behandeln, die sich an herkömmliches strukturiertes Material anschließen, z. B. Probleme zu Unterschiedsrelationen, Ordnungsrelationen, mengenalgebraischen Operationen, Permutationen.

b) QS bieten darüber hinaus wegen ihrer reichen Struktur den Vorteil, auch anspruchsvollere Probleme schon auf der enaktiven Ebene zugänglich zu machen, z. B. Abzählprobleme, Klassifikationsprobleme, Probleme zum logischen Zusammenhang von Eigenschaften, Probleme zur Wirkung einer Gruppe von Operatoren auf einer Menge.

c) QS erscheinen besonders geeignet – und erste Unterrichtsversuche scheinen das zu bestätigen – Schüler anzuregen, selbst tätig zu werden, nach weiteren Problemstellungen zu suchen und Lösungsstrategien des unterschiedlichsten Anspruchsniveaus zu entwickeln.

Zum Schluß sei noch vermerkt, daß anregende Gespräche mit Herrn J. Ziegenbalg den Ausgangspunkt der vorgelegten Arbeit bildeten, bei deren Fortgang Herr D. Vogel wertvolle Anregungen beisteuerte.

Anschrift des Autors: Dr. Hartmut Spiegel, 74 Tübingen, Bismarckstr. 44.

Eingangsdatum: 2.4.1974

Literatur

[1] Bauersfeld, H.: Alef, Wege zur Mathematik. Handbücher zum Lehrgang. Hannover: Schroedel 1970.
[2] Freund, H., und P. Sorger: Denken mit Lego. Freiburg: Herder 1971.
[3] Görner, A., und E. Röhrl: Mathematikunterricht auf der Primarstufe. Stuttgart: Klett 1971.
[4] Haber, H.: Das mathematische Kabinett, Folge 1. München: dtv 1973.
[5] Winter, H.: Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula in der Gesamtschule. In: Beiträge zum Lernzielproblem. Ratingen: Henn 1972.
[6] Ziegenbalg, J.: Quadromino im Mathematikunterricht II. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1974. Hannover: Schroedel.